ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

# MATEMATICKÉ ÚLOHY Z ČASOPISU TECHNICKÝ MAGAZÍN

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Bc. Veronika Vacínová**

*Učitelství pro základní školy, obor Ma - Ge*

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

**Plzeň, 2016**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem „Matematické úlohy z časopisu Technický magazín“ vypracovala samostatně jen s použitím uvedeného seznamu literatury.

Plzeň, 15. 6. 2016 ______________________________

podpis

## PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych ráda poděkovala panu doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za ochotu a pomoc při zpracování mé diplomové práce.

## OBSAH

# ÚVOD

Dnes již nevycházející Technický magazín, měsíčník vydávaný v letech 1960 – 1998, obsahoval nemalé množství matematických úloh, které mohli matematičtí nadšenci řešit. Kapitola s těmito příklady nesla název Matematické rekreace. Jednotlivé úlohy byly podle obtížnosti bodovány a nejúspěšnější řešitelé odměňováni a uváděni v následujícím díle spolu s naznačeným správným řešením. Postupem času se i do Matematických rekreací dostaly cizí jazyky. Byly jimi jazyk německý a anglický. Na své si ale přišli i technicky založení řešitelé nebo třeba milovníci astronomie či fyziky.

Úlohy obsažené v Technickém magazínu byly bezesporu nápadité, originální a byla by škoda, aby byly zapomenuty. I z tohoto důvodu jsem vytvořila jakousi sbírku hrstky úloh pocházejících z tohoto magazínu. Věřím, že by toho, kdo mou práci otevře, mohly zaujmout natolik, aby zatoužil v dříve vycházejícím měsíčníku vyhledat další.

K sepsání práce v této podobě a výběru úloh této obtížnosti, mě vedlo především to, komu je práce primárně určena.

Cílem je, aby posloužila nejen učitelům matematiky jako sbírka úloh, či jen případný podpůrný materiál, ale aby z ní mohli čerpat i žáci druhého stupně základní školy, kteří by příklady v ní obsažené využili jako materiál procvičující.

Práci jsem se tedy snažila sepsat tak, aby v případě, že si žák základní školy nebude vědět s úlohou rady a dostane se do mrtvého bodu, mohl nahlédnout do řešení. Řešení úloh jsou právě z tohoto důvodu sepsána velmi podrobně. Dalo by se říci, že téměř krok po kroku.

Dále jsem se snažila, vždy ve stručnosti a tak, aby ji pochopili právě i žáci základní školy, sepsat teorii, která se jednotlivých kapitol, popř. úloh, týká. Uvedená teorie by měla pokrýt rozsah vybraných příkladů v jednotlivých kapitolách na úrovni probíraného učiva základní školy.

V práci je vždy dohledatelné, pro jaký ročník je dané učivo (daný příklad či daná kapitola) typické, tedy kdy se s ním žáci poprvé setkávají.

Svou práci jsem se dále pokusila obohatit o zpracování některých úloh v programech, které se dají v dnešní době v matematice využít. Dříve je řešitelé k dispozici neměli. Chtěla bych, aby již i žáci základní školy měli alespoň povědomí o tom, že nějaké matematické programy existují, a s jejich pomocí je možné si práci usnadnit a čas strávený nad výpočtem zkrátit. Ve své práci jsem využila programy Geogebra, Mathematica a WolframAlpha.

Práce obsahuje celkem devět kapitol s různým počtem úloh. Mezi nejpočetnější kapitoly patří kapitola první – Netradiční úlohy k zamyšlení a kapitola druhá s názvem Aritmetika – rovnice, která by již pro většinu žáků 8. třídy neměla představovat žádný problém. Nejedná se pouze o rovnice lineární. V kapitole se vyskytují i úlohy, k jejichž řešení je zapotřebí znalost řešení kvadratické rovnice. Její problematika není zařazena v osnovách výuky základní školy, ale je brána jako doplňkové učivo.

Nejméně obsáhlá kapitola nese název Nejmenší společný násobek. Na tuto kapitolu by dokázali vyzrát i žáci 6. třídy.

Méně tradiční úlohy obsahuje kapitola první s názvem Netradiční úlohy k zamyšlení. V této kapitole by si jistě svůj příklad našel každý žák 2. stupně základní školy. Jedná se o úlohy, se kterými se žáci v běžné výuce základní školy nesetkávají. Učitelům by mohly posloužit např. jako vzor při obohacení matematické výuky.

Dále práce obsahuje kapitoly: Soustavy lineárních rovnic, Úlohy o společné práci, Úlohy o pohybu, Úlohy s procenty, Slovní úlohy s nádechem geometrie či Algebrogramy.

## ÚLOHY

Pokud řešíme slovní úlohy, jejichž řešení nás zavede k sestavení rovnice či soustavy rovnic, programy Wolfram Alpha či Mathematica nám velmi usnadní výpočet a ušetří čas. Zatímco bychom počítali desítky sekund či minuty, rovnici nebo soustavu rovnic zadáme do programu a během sekundy máme výsledek třeba i s grafickým řešením.

Program Wolfram Alpha za nás vyřeší více matematických úkonů najednou, stačí jen zadat rovnici. V případě soustavy rovnic využívá program příkazu *solve*.

Mathematica sice nevykresluje najednou i graf, ale stačí využít např. funkci *plot* a grafické řešení získáme. Ovšem pro žáky základní školy bude jistě lehčí pracovat s programem Wolfram Alpha.

Název programu Geogebra napovídá, že je určen spíše pro geometrické účely. V práci je program využit v kapitole předposlední, Slovní úlohy s nádechem geometrie.

Práce také obsahuje množství úloh vyžadující jen zamyšlení, kde nemusíme nic počítat. Příkladem je hned první kapitola.

## 1. Kapitola: Netradiční úlohy k zamyšlení

Všechny úlohy této kapitoly, kromě úlohy čtyři, by měli více méně zvládnout žáci všech ročníků druhého stupně základní školy. Úlohy jsou totiž řešitelné i logickou cestou. Úlohy v druhé části této kapitoly by mohly být pro mladší žáky druhého stupně obtížnější, ale ti bystřejší by si s nimi poradit také mohli.

Úloha čtyři je řešitelná pouze pro žáky od 8. třídy, kteří se již s rovnicemi pravidelně setkávají.

**1.** „Jak rozvážíme obsah dvacetikilogramového pytle cukru do deseti sáčků po 2 kg? Máme k tomu váhy a závaží jen 5 a 9 kg.“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Snadnou úvahou odhalíme, že bychom mohli odvážit dvakrát 9 kg. Zbývají tedy 2 kg, což je požadovaná hmotnost jednoho sáčku, který můžeme dále použít jako závaží.

**2.** „Zkuste vyjádřit čísla od 1 do 10 tak, že na každé spotřebujete čtyři čtyřky.

(např. $7 = \frac{44}{4} - 4 = 11 - 4$, atd.)“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Přijdete i na jiná řešení?

$1 = \frac{4+4}{4+4}$ $\qquad 2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$

$3 = \frac{4.4-4}{4}$ $\qquad 4 = (4-4).4+4$

$5 = \frac{4.4+4}{4}$ $\qquad 6 = \frac{4+4}{4} + 4$

$7 = 4 + 4 - \frac{4}{4}$ $\qquad 8 = \frac{(4+4).4}{4}$

$9 = \frac{4}{4} + 4 + 4$ $\qquad 10 = \frac{44-4}{4}$

Úloha rozvíjí kreativní matematické myšlení žáků.

**3.** „Zákazník má platit útratu 19 Kčs. Má jen tříkoruny a prodavač má jen pětikoruny. Jak se beze zbytku vyrovnají? Jak by se vyrovnali, kdyby zákazník měl jen samé pětikoruny a prodavač jen samé tříkoruny?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Zákazník zaplatí 24 Kčs, tzn. osmkrát tříkorunou, což je 24 Kčs a prodavač mu pak vrátí jedenkrát pět korun. Pak budou beze zbytku vyrovnáni.

Nebo také existuje možnost, že zákazník zaplatí 39 Kč, tzn. třináctkrát tříkorunou a prodavač mu vrátí čtyřikrát pětikorunu, což je 20 Kčs.

Úloha má nekonečně mnoho řešení.

Řekněme, že řešením je aritmetická posloupnost s prvním členem $a_1 = 24$ a diferencí $d = 15$. Diference $d$ je nejmenším společným násobkem čísel 3 a 5 (tedy peněžních hodnot, kterými zúčastnění disponují).

Žák ZŠ by úlohu řešil logickou úvahou, neboť se s pojmem posloupnosti přímo nesetkává. Ale již v učivu 6. třídy se setkává s pojmem společného násobku, který tedy může při řešení této slovní úlohy také využít.

**4.** „Sledujte tento výpočet a najděte chybu:

1. $x = 2$, násobíme obě strany $x - 1$
2. $x^2 - x = 2.x - 2$, odečteme x od obou stran
3. $x^2 - 2x = x - 2$, dělíme obě strany $x - 2$
4. $x = 1$, čili $2 = 1$“

*[Technický magazín 1960 - 1998]*

Tato úloha je určena pro žáky od 8. třídy, kdy už jsou seznámeni s učivem o rovnicích.

*Řešení:*

Problémem této úlohy, respektive postupu uvedeného řešení, je dělení nulou v kroku 3. V tomto kroku dělíme obě strany rovnice výrazem $x - 2$, což se rovná nule, protože z prvního kroku víme, že $x = 2$.

**5.** „Na otázku, kdy mají narozeniny, odpovídají R a P pravdivě kterýkoli den v roce, ale nepravdivě v den narozenin. Když se jich 1. května ptali, kdy mají narozeniny, řekla R „Včera“ a P „Zítra“. Když se jich ptali 2. května, odpověděly obě stejně jako předchozí den. Kdy mají narozeniny?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

Ač může na první pohled úloha působit trochu složitě, při krátkém zamyšlení by měla být úloha řešitelná pro všechny žáky 2. stupně základní školy.

*Řešení:*

| | |
|---|---|
| 1. 5. | 2.5. |
| R „včera“ - lež | R „ včera“ - pravda |
| P „zítra“ - pravda | P „ zítra“ - lež |

R má narozeniny 1. 5., P má narozeniny 2. 5.

**6.** „Tři studenty označíme **J**, **D**, **S.** Studují v Praze, Bratislavě, Olomouci, pořadí měst je však jiné než uvedené pořadí studentů. **J** nestuduje v Praze, **D** nestuduje v Bratislavě, student z Prahy nestuduje historii, ten, který studuje v Bratislavě, studuje chemii. **D** nestuduje biologii. Co a kde studuje **S.“** *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Víme, že student v Bratislavě studuje chemii. Zbývá nám tedy zařadit studenty, kteří studují chemii a historii. Vzhledem k tomu, že v Praze se historie nestuduje, je patrné, že se historie studuje v Olomouci. Na Prahu tedy zbývá biologie.

Nyní přiřaďme studenty. O studentovi **D** víme, že nestuduje v Bratislavě. Nestuduje tudíž chemii. Připadají tedy v úvahu Praha a Olomouc. Jenže tento student nestuduje biologii. Je tedy zřejmé, že student **D** studuje historii v Olomouci.

Jelikož student **J** nestuduje v Praze, studuje chemii v Bratislavě.

**Na studenta S nám zbývá studium biologie v Praze.**

**7.** „Ve vazbě byli tři podezřelí, jeden z nich byl vinen. Soudce poslal strážného, aby viníka přivedl. „Jak ho poznám?“ zeptal se strážný. „Stačí k tomu jedna otázka s odpovědí ano-ne od jednoho z nich. Odpoví-li pravdu, je vinen, zalže-li, není vinen.“ Strážný zašel do cely, kde seděli tři vězni vedle sebe na lavici. Zeptal se levého krajního: „Je prostřední vinen?“ Dostal odpověď, podle které poznal viníka. Který ze tří to byl?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Kdyby odpověď zněla ne, nepoznali bychom, zda je vinen prostřední podezřelý či podezřelý sedící vlevo. Odpověď musela být ano. Viník by ale ano neřekl a nevinný by lhal. Viník tedy sedí vpravo. *[dle Technický magazín 1960 - 1998]*

**8.** „a) Máme dvoje přesýpací hodiny, jimiž se měří čas při vaření vajec. První naměří 7 minut, druhé 11 minut. Jak jejich použitím naměříme 15 minut?

b) Starověký filosof se narodil sedmý den roku 40 před n. l. a zemřel sedmý den roku 40 našeho letopočtu. Kolik let žil?” *[dle Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

a) Oboje hodiny otočíme ve stejnou dobu. Když dojde písek v hodinách na 7 minut, otočíme je. Necháme dojít písek v hodinách na 11 minut a hodiny na 7 minut znovu otočíme, protože v nich zbývají právě 4 minuty, které do celkových 15minut potřebujeme.

b) Filosof žil 79 let, protože nebyl nultý rok.

**9.** „Ze životopisu velkého francouzského matematika Simeóna Poissona (1781 – 1840): „Nemohl se rozhodnout, do jakých studií se pustit. Jednou na výletě přišel k němu přítel s matematickou úlohou, kterou mladý Poisson s nesmírným zájmem rozřešil, a teprve v této chvíli si uvědomil své pravé nadání.“ Jaká to byla úloha? Máme osmilitrovou nádobu plnou vína a dvě nádoby na 5 litrů a 3 litry. Jak odměříme co nejrychleji dvakrát po čtyřech litrech vína?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Nejprve přelijme z osmilitrové nádoby víno do nádoby pětilitrové. Pak z pětilitrové nádoby přelejme 3 litry vína do třílitrové nádoby a z ní zpět do nádoby osmilitrové, kde nyní máme 6 litrů. V pětilitrové nádobě nám zůstaly 2 litry vína, které přelijeme do třílitrové nádoby. Z osmilitrové nádoby opět přelijme víno do nádoby na 5 litrů vína a zůstane v ní 1 litr. Nyní máme ve třílitrové nádobě 2 litry vína. Doplňme tuto nádobu zbylým litrem vína z pětilitrové nádoby, kde nám tak zůstanou požadované 4 litry vína. Když nakonec přelejeme víno z plné třílitrové nádoby zpět do nádoby osmilitrové, kde je 1 litr, získáme zbylé 4 litry vína.

**10.** „Jeden ze čtyř chlapců A, E, F, G rozbil okno. A tvrdí: Byl to E. E tvrdí: Byl to G. F tvrdí: Já to nebyl. G tvrdí: E lhal.

a) Když jen jeden ž čtyř lhal, kdo rozbil okno?

b) Když jen jeden mluvil pravdu, kdo rozbil okno?” *[dle Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

a) Předpokládejme, že lhal E a ostatní chlapci mluvili pravdu. V tomto případě nastává spor ve tvrzení chlapců E a G.

Pokud bude lhát chlapec E a ostatní chlapci budou pravdomluvní, potom nedochází k žádnému sporu, a dokonce ze všech tvrzení vyplývá, že chlapec **E byl ten, kdo okno rozbil**.

Pro kontrolu ještě ověřme zbylé dva chlapce. Kdyby lhal chlapec F, byl by vinen právě on sám a mezi tvrzeními zbylých chlapců by došlo ke sporu. Pokud by lhal G, objevíme mezi tvrzeními také spor.

b) Pokud by chlapec A mluvil pravdu, znamenalo by to, že chlapec E rozbil okno. Jenže v tomto případě chlapec F lže, tudíž on je ten, kdo okno rozbil. Máme tady tedy spor.

Nyní řekněme, že pravdu říká chlapec E, který obviňuje chlapce G. Tvrzení těchto dvou chlapců se vzhledem k našemu předpokladu nevylučují. Jenže opět nám tuto úvahu kazí tvrzení chlapce F. Uvažujme tedy dále.

Předpokládejme pravdomluvnost chlapce F. Potom dochází opět ke sporu mezi zbylými tvrzeními. Tvrzení G totiž rozporuje tvrzení chlapce E vzhledem k našemu předpokladu, že tento chlapec lže.

Zbývá nám ověřit pravdomluvnost tvrzení chlapce G, že chlapec E lhal. Toto tvrzení nerozporuje tvrzení druhého chlapce. Dokonce i u ostatních tvrzení nenajdeme spor a chlapec F nám potvrzuje, že okno rozbil on.

**Odpovědí je: Chlapec G mluvil pravdu a chlapec F rozbil okno.**

**11.** „a) Při výslechu tří obviněných F, G, H: F tvrdí, že G lže; G tvrdí, že H lže; H tvrdí, že F i G lžou. Kdo z vyslýchaných lže a kdo mluví pravdu?

b) U zastřeleného H je lékař, který konstatoval jeho smrt, a tři podezřelí muži R, S, T, z nichž každý jednou řekl pravdu a jednou lhal:

R tvrdí: S ho nezastřelil. Byla to sebevražda.

S tvrdí: Nebyla to sebevražda. R ho zastřelil.

T tvrdÍ: Já to neudělal. Zavraždil ho S.

Zjistilo se, že H byl skutečně zastřelen jedním z přítomných. Kdo to byl?"

*[dle Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

a) Předpokládejme, že obviněný F říká pravdu. To by znamenalo, že G lže. Potom by z tvrzení obviněného G vyplývalo, že H mluví pravdu. H ale říká, že lže F i G, což se dostává do sporu s naším předpokladem, že F mluví pravdu.

Pokud říká pravdu obviněný G, znamená to, že lže obviněný H. Toto tvrzení se nedostane do sporu se žádným dalším tvrzením.

Ověřme ještě tvrzení obviněného H a uvažujme, že on je ten, kdo říká pravdu. To by obvinění F a G lhali, což se ale opět dostává do sporu s naším předpokladem.

**Závěrem můžeme říci, že obviněný G říká pravdu a obvinění F a H lžou.**

**b)** Jelikož víme, že H byl určitě zastřelen, můžeme s jistotou říci, že druhé tvrzení podezřelého R je lživé. A protože je jedno tvrzení lživé a druhé pravdivé, zprošťuje první tvrzení R podezřelého S viny.

Je zřejmé, že první tvrzení obviněného S je pravdivé, tudíž druhé lživé tvrzení zprošťuje viny i obviněného R.

Jelikož od obviněného R víme, že obviněný S nezastřelil H, je druhé tvrzení obviněného T lživé. Proto víme, že ani tento obviněný T nezastřelil H.

Kdo tedy H zastřelil, když jsme všechny obviněné vyloučili? **Nezapomeňme, že přítomný byl i lékař. A ač se nám to může zdát divné, musel to být on. Nikdo jiný přítomný nebyl.**

**12.** „Máme sestavit pětičlennou skupinu. F odmítá, bude-li tam A a D. Nechce zasedat s C, nebude-li tam E, odmítá, nebude-li tam B. G se účastní jen, bude-li tam C, který odmítá účast, bude-li tam A. Aby se účastnili B a C, musí tam být i H. Aby se účastnili B s H, musí tam být E, který však odmítá, je-li tam A nebo D nebo C spolu s G. H přijme jen, bude-li tam F. Určete členy skupiny." *[dle Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Ze všech tvrzení vyplývá, že jistým účastníkem je člen F, jelikož není nikým odmítán. Ba naopak je dokonce podmínkou účasti, aby přišel člen jiný. Tímto členem je člen H, který taktéž není nikým odmítnut. Pokud v této skupině bude člen H, budou se účastnit i členové B a C. Účast člena B potvrzuje i tvrzení člena F, který odmítá neúčast B. Aby se účastnili členové B a H, musí tam být člen E, který nepřijde, bude-li tam člen C společně se členem G. Tím máme vyloučenou účast člena G, jelikož účast člena C potvrzuje účast člena E, což byla podmínka F. Protože člen E odmítal neúčast B, nedochází k žádné kolizi mezi tvrzeními zatím námi vybranými členy (F, H, B, C, E) skupiny.

Ověřme ještě případnou účast zbylých členů a zbylá tvrzení, abychom věděli, zda byl náš úsudek správný.

Účast člena A můžeme vyloučit, jelikož člen C by nebyl součástí skupiny, pokud A ano. To potvrzuje i úplně první tvrzení člena F, které zároveň ze skupiny vyřazuje i člena D.

**Mezi členy pětičlenné skupiny patří B, C, E, F a H.**

**13.** „Tři děvčata – Růžena, Anna, Jana – a tři chlapci – Rudolf, Ludvík, Pavel – sedí kolem stolu tak, že se střídá děvče a chlapec. Anna nechce sedět vedle Ludvíka, Růžena chce sedět vedle Ludvíka a Jana nechce sedět vedle Rudolfa. Jak sedí kolem stolu?"

*[dle Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Úlohu nemusíme ani nijak složitě rozebírat, protože najít řešení je velmi jednoduché. Můžeme si pomoci obrázkem, kde odhalíme, že kolem stolu budou zúčastnění sedět v tomto pořadí: **Růžena, Ludvík, Jana, Pavel, Anna, Rudolf**.

**14.** „Šest mužů řezalo dřevo na půlmetrová polena. Václav měl pomocníka Mílu a řezali dvoumetrové kusy, Petr měl pomocníka Karla a řezali kusy dlouhé 1,5 m, Pavel měl pomocníka Borka a řezali metrové kusy. Kos s pomocníkem Borkem rozřezali 26 kusů, Horák s pomocníkem Koubou rozřezali 27 kusů, Kozel s pomocníkem Bášou rozřezali 28 kusů. Jak se jmenuje křestním jménem Kouba?" *[dle Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Václav – Míla ….. 2 m

Petr – Karel ….. 1,5 m

<u>Pavel – Borek ….. 1 m</u>

Kos (Pavel) s Borkem ….. 26 ks

Jelikož Petr s Karlem jediní řežou 1,5 m dlouhé kusy a 27 ks, které nařezali, jsou dělitelné třemi, je patrné, že křestní jméno Kouby je Karel.

Pavel Kos – Borek

Petr Horák – Karel Kouba

Václav Kozel - Míla Báša

## 2. Kapitola: Aritmetika – rovnice

Zhruba řečeno, rovnice je charakteristická výskytem alespoň jedné neznámé a rovnítkem, které odděluje dvě strany rovnice – levou stranu a pravou stranu (př. $2x$=10).

Při jejím řešení využíváme ekvivalentních úprav, pomocí kterých rovnici zjednodušujeme a snažíme se získat kořen rovnice (řešení rovnice). Ekvivalentní úpravy nemění řešení rovnice a nevyžadují zkoušku. V průběhu řešení jsou zapisovány za lomítko k příslušnému řádku.

Typy ekvivalentních úprav

- přičteme (odečteme) k oběma stranám rovnice stejné číslo (proměnou, výraz, mnohočlen)
- vynásobíme (vydělíme) obě strany rovnice stejným číslem (proměnou, výrazem, mnohočlenem)
- umocníme (odmocníme) obě strany rovnice stejným číslem

Na ZŠ se setkáváme s rovnicemi lineárními. Rovnice kvadratické jsou brány jako doplňující učivo.

<u>Lineární rovnice</u> má obecný tvar $ax + b = 0$, kde $a \neq 0$. Lineární rovnice nemusí mít vždy jen jedno řešení (např. $x = 3$). Může jích mít i nekonečně mnoho. V tomto případě nám při řešení rovnice vyjde $0x = 0$ (za *x* můžeme tedy dosadit jakékoli reálné číslo, aby rovnost byla vždy dodržena). Rovnice ale nemusí mít řešení žádné. Příkladem je např. rovnice $0x = 2$. Ať dosadíme za *x* jakékoli reálné číslo, nikdy se nebude levá strana rovnat pravé straně rovnice.

Při řešení lineárních rovnic s neznámou ve jmenovateli nikdy nezapomínáme na podmínky, za kterých má smysl rovnici řešit. Určením podmínek bychom měli řešení rovnice vždy začít.

Obecný tvar kvadratické rovnice je $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$. Kdyby se *a* rovnalo nule, šlo by o rovnici lineární.

- $ax^2$ - kvadratický člen
- *bx* - lineární člen
- *c* - absolutní člen

Pokud $b = 0$, jedná se o tzv. ryze kvadratickou rovnici (vypadne nám lineární člen). Jestliže $c = 0$, jde o kvadratickou rovnici bez absolutního členu.

Kvadratickou rovnici na ZŠ řešíme pomocí diskriminantu *D*, který vypočteme pomocí vzorce $D = b^2 - 4ac$.

- $D = kladné\ číslo$- rovnice má dvě řešení v R
- $D = nula$ – rovnice má právě jedno řešení v R
- $D = záporné\ číslo$ – rovnice v R nemá žádné řešení

Kořeny kvadratické rovnice potom vypočteme s využitím vzorce

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, při čemž si všimněme, že pod odmocninou figuruje diskriminant, jehož odmocninu můžeme vypočíst předem a poté již jen dosadit.

Vždy bychom se měli zamyslet, zda to, co nám vyšlo, je možným řešením.

Rovnice lze zobrazit také graficky, s čímž pomohou nejrůznější matematické programy.

V této kapitole jsou využity již výše zmíněné algebraické programy Wolfram Alpha a Mathematica.

Tato kapitola je určena především pro žáky 8. a 9. třídy, kteří již umí s rovnicemi pracovat. Lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli jsou učivem až třídy deváté. S kvadratickými rovnicemi jako doplňkovým učivem se žáci mohou setkat taktéž až ve třídě deváté.

**15.** „Z Aritmetiky Görla z Görlštejna (1577): Panna Maruška má frejíře Janka: zeptá se matky, mohla-li by ho sobě za manžela vzít. Dí máti: „Má milá Maruško! Jestliže se tobě líbí a ty ho miluješ a s ním se živit míníš, můžeš ho sobě vzíti. Nejsi tak mladá, neboť kdybys polovinu, čtvrtinu a osminu svých let spolu znásobila, jest bez šesti let 70.“ Jak stará je Maruška?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

S mocninami s přirozenými mocniteli, které se v této slovní úloze vyskytují, se žáci základní školy setkávají již v 8. třídě.

*Řešení:*

Rovnice vyžaduje jen přemístit absolutní člen z levé strany na stranu pravou a po té členy na levé straně vynásobit mezi sebou. Dostaneme se k upravené rovnici obsahující neznámou umocněnou na třetí, tudíž pro získání výsledku budeme muset využít třetí odmocninu.

$$\frac{1}{2}x.\frac{1}{4}x.\frac{1}{8}x + 6 = 70 \quad /-6$$

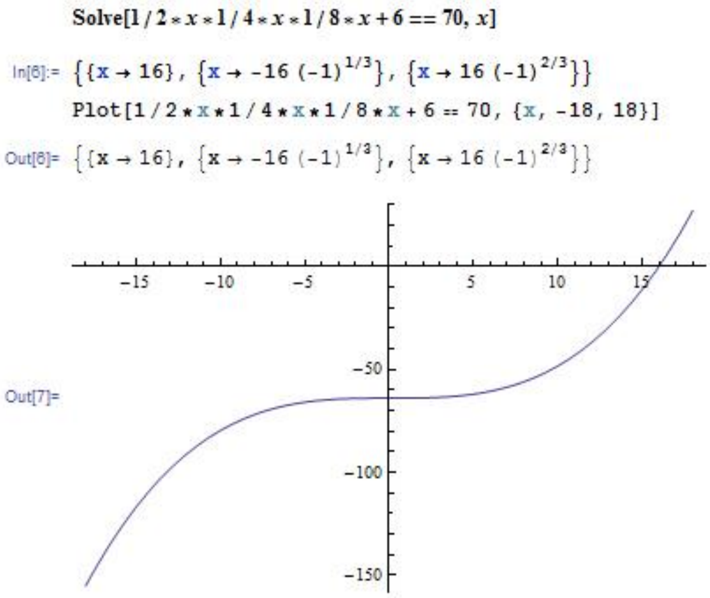
$$\frac{x^3}{64} = 64 \quad /.64$$

$$x^3 = 4096 \quad /\sqrt[3]{}$$

$$\boldsymbol{x = 16}$$

Marušce je 16 let.

**Obrázek 1: Úloha 15 v Mathematice**



**16.** „a) Třetinu majetku odkázal otec synovi, dvě pětiny dceři, ze zbytku se zaplatilo 2500 Kčs na dluhy a 3000 Kčs vdově. Kolik bylo dědictví?

b) Za každou pětilitrovou láhev prvního druhu vína jsme zaplatili 150 Kčs, za každou sedmilitrovou láhev druhého druhu 140 Kčs. Chceme namíchat 50 litrů směsi po 27 Kčs za litr. Kolik litrů prvního druhu vezmeme?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

S oběma částmi této úlohy by si měli poradit i žáci 8. třídy, s druhou částí alespoň ti matematicky bystřejší.

*Řešení:*

a) Vcelku jednoduchá slovní úloha. Jako neznámý celek vystupuje velikost dědictví v Kč, kterou označíme jako *x.* Pak už jen postupně sestavíme rovnici, kterou upravujeme.

<u>velikost dědictví v Kč ….. *x*</u>

$$\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}+2500+3000=x \quad /.15$$

$$5x+6x+37500+45000=15x \quad /-37500-45000-15x$$

$$-4x=-82500 \quad /:(-4)$$

$$\boldsymbol{x=20\,625}$$

Dědictví bylo 20 625 Kčs.

b) Slovní úloha týkající se směsí, kde si jako neznámou zvolíme množství *x* litrů prvního druhu vína. Vyjádříme, kolik Kčs zaplatíme za litr prvního druhu vína a dopočítáme množství s cenou za druhý druh vína. Součet tohoto se musí rovnat součinu požadovaného množství a ceny.

$$\frac{150}{5}x+\frac{140}{7}(50-x)=50.27$$

$$30x+20(50-x)=1350$$

$$30x+1000-20x=1350 \quad /-1000$$

$$10x=350 \quad /:10$$

$$\boldsymbol{x=35}$$

Vezmeme 35 litrů prvního druhu vína.

**17.** „Otci je 59 let, synovi je 11 let. Za kolik let bude otec třikrát starší než syn?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

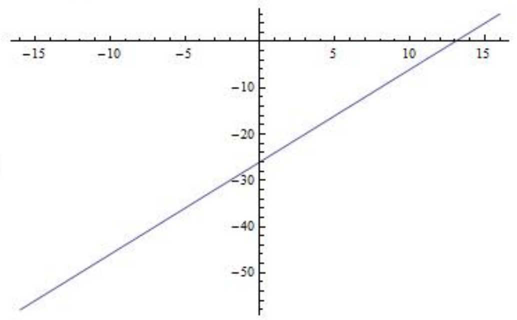
Jednoduchý typ rovnice, kdy roznásobíme závorku na levé straně a po té se pomocí jednoduchých ekvivalentních úprav dostaneme k řešení.

$$3(11 + x) = 59 + x$$
$$33 + 3x = 59 + x \quad /-33 - x$$
$$2x = 26 \quad /:2$$
$$\boldsymbol{x = 13}$$

Otec bude třikrát starší než syn za 13 let.

**Obrázek 2: Úloha 17 v Mathematice**

```
In[18]:= Solve[3 (11 + x) == 59 + x, x]
         Plot[3 (11 + x) == 59 + x, {x, -16, 16}]
Out[18]= {{x → 13}}
Out[19]=
```




```
{{x → 13}}
```

**18.** „Bratři jsou staří 19, 11 a 6 let. Kdy byl nebo bude součet věků obou mladších roven polovině věku staršího?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

<u>součet věků obou mladších bratrů bude roven polovině věku staršího za *x* let</u>

$$\frac{1}{2}(19 + x) = (11 + x) + (6 + x)$$
$$\frac{19}{2} + \frac{x}{2} = 17 + 2x \quad /.2$$
$$19 + x = 34 + 4x \quad /-19 - 4x$$
$$-3x = 15 \quad /:(-3)$$
$$\boldsymbol{x = -5}$$

Součet věků obou mladších bratrů byl polovině věku staršího roven před pěti lety.

**19.** „Ve čtyřech pokladničkách je 28,50 Kčs. Vezmu-li 3 Kčs z první, dám-li 2 Kčs do druhé, zdvojnásobím-li obnos třetí a uberu-li 2/3 obsahu ze čtvrté, bude v každé pokladničce stejně. Kolik?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Víme, že nakonec bylo ve všech čtyřech pokladničkách stejně korun. Označme tuto částku *x.* Před provedením změn bylo v první pokladničce *x + 3* Kčs, ve druhé *x – 1 Kčs,* ve třetí $\frac{x}{2}$ Kčs a ve čtvrté pokladničce *3x.* Dostáváme tedy rovnici:

$$x + 3 + x - 2 + \frac{x}{2} + 3x = 28{,}5 \quad /.2$$

$$2x + 6 + 2x - 4 + x + 6x = 57 \quad /-6+4$$

$$11x = 55 \quad /:11$$

$$\boldsymbol{x = 5}$$

V každé pokladničce bude 5 Kčs.

Původní počet Kčs v každé pokladničce je: v první pokladničce 8 Kčs, ve druhé 3 Kčs, ve třetí 2,5 Kčs a ve čtvrté 15 Kčs.

**20.** „Tak praví písař Ahmes v početnici z roku 1700 před n. l.: „ Pastýř vedl na pastvu 70 ovcí. Ptá se ho přítel, jak velkou část ze všech svých ovcí žene na pastvu. Pastýř odpoví: „ Vedu na pastvu dvě třetiny z třetiny svého stáda. Kolik ovcí měl pastýř ve stádě?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Znovu vcelku triviální typ rovnice. Po vynásobení členů se na levé straně rovnice a vhodných ekvivalentních úpravách dostaneme k řešení této slovní úlohy. Počet ovcí ve stádě si označíme jako *x.*

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} x = 70$$

$$\frac{2}{9} x = 70 \quad /.9$$

$$2x = 630 \quad /:2$$

$$\boldsymbol{x = 315}$$

Pastýř měl ve stádě 315 ovcí.

**21.** „Úloha z „ Obecné aritmetiky“ I. Newtona: Mám určitý počet grošů. Uberu z nich 100 grošů, přidám třetinu zbytku, uberu opět 100 grošů, přidám třetinu toho, co zbylo, uberu ještě 100 grošů a opět přidám třetinu zbytku. Mám pak dvakrát víc, než na začátku. Kolik jsem měl?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Tato slovní úloha vyžaduje větší dávku pozornosti při sestavování rovnice.
Původní počet grošů označme jako *x.* Ubereme 100 grošů … *x – 100* atd.

$$x - 100 + \frac{1}{3}x - \frac{100}{3} - 100 + \frac{1}{3}\left(x - 100 + \frac{1}{3}x - \frac{100}{3} - 100\right) - 100 + \frac{1}{3}\left(x - 100 + \frac{1}{3}x - \frac{100}{3} - 100 + \frac{1}{3}\left(x - 100 + \frac{1}{3}x - \frac{100}{3} - 100\right) - 100\right) = 2x$$

$$x - 100 + \frac{1}{3}x - \frac{100}{3} - 100 + \frac{1}{3}x - \frac{100}{3} + \frac{1}{9}x - \frac{100}{9} - \frac{100}{3} - 100 + \frac{1}{3}x - \frac{100}{3} + \frac{1}{9}x - \frac{100}{9} - \frac{100}{3} + \frac{1}{9}x - \frac{100}{9} + \frac{1}{27}x - \frac{100}{27} - \frac{100}{9} - \frac{100}{3} = 2x$$

$$27x - 2700 + 9x - 900 - 2700 + 9x - 900 + 3x - 300 - 900 - 2700 + 9x - 900 + 3x - 300 - 900 + 3x - 300 + x - 100 - 300 - 900 = 54x$$

$$64x - 14800 = 54x \quad /+14800 - 54x$$
$$10x = 14800 \quad /:10$$
$$\boldsymbol{x = 1480}$$

Měl 1480 grošů.

Dnes je Newtonovo dílo digitalizováno. Můžeme se tedy podívat na titulní stranu jeho knihy z r. 1720 a najít a dokonce se pokusit rozluštit jeho úlohu i s dobovým postupem řešení. Původní úloha hovoří o majetku kupce v librách.

**Obrázek 3: Titulní strana Newtonova díla**

Newton, Sir Isaac

*Univerſal Arithmetick:*

OR, A

TREATISE

OF

ARITHMETICAL

Compoſition and Reſolution.

To which is added,

Dr. HALLEY's Method of finding the Roots of Æquations Arithmetically.

---

*Tranſlated from the* LATIN *by the late Mr.* RAPHSON, *and reviſed and corrected by Mr.* CUNN.

---

---

*LONDON,*

Printed for J. SENEX at the *Globe* in *Saliſbury-Court*; W. TAYLOR at the *Ship*, T. WARNER at the *Black-Boy*, in *Pater-noſter Row*, and J. OSBORN at the *Oxford-Arms* in *Lombard-ſtreet*. 1720.



Take another Example. A certain Merchant encreaſes his Eſtate yearly by a third Part, abating 100 *l.* which he ſpends yearly in his Family; and after three Years he finds his Eſtate doubled. *Query*, What he is worth?

*[Newton I., 1720]*

**Obrázek 4: Původní řešená úloha**

[ 69 ].

To reſolve this, you muſt know there are [or lie hid] ſeveral Propoſitions, which are all thus found out and laid down.

| *In Engliſh.* | *Algebraically.* |
|---|---|
| A Merchant has an Eſtate — | $x.$ |
| Out of which the firſt Year he expends 100 *l.* | $x - 100.$ |
| And augments the reſt by one third. — | $x - 100 + \frac{x - 100}{3}$, or $\frac{4x - 400}{3}.$ |
| And the ſecond Year expends 100 *l.* | $\frac{4x - 400}{3} - 100$, or $\frac{4x - 700}{3}.$ |
| And augments the reſt by a third — — | $\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$, or $\frac{16x - 2800}{9}.$ |
| And ſo the third Year expends 100 *l.* — | $\frac{16x - 2800}{9} - 100$, or $\frac{16x - 3700}{9}.$ |
| And by the reſt gains likewiſe one third Part | $\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$, or $\frac{64x - 14800}{27}.$ |
| And he becomes [at length] twice as rich as at firſt — — | $\frac{64x - 14800}{27} = 2x.$ |

Therefore the Queſtion is brought to this Æquation, $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$, by the Reduction whereof you are to find $x$; *viz.* Multiply it by 27, and you have $64x = 14800 = 54x$; ſubtract $54x$, and there remains $10x - 14800 = 0$, or $10x = 14800$, and dividing by 10, you have $x = 1480$. Wherefore, 1480 *l.* was his Eſtate at firſt, as alſo his Profit or Gain ſince.

*[Newton I., 1720]*

Stejná úloha se v Technickém magazínu objevila ještě v poněkud jiné formulaci. Zřejmě bylo dosti pracné připravovat stále nové a nové úlohy.

„Chlapec zvětšil každý rok o 1/3 své úspory zmenšené o 100 Kčs, které utratil. Za 3 roky se jeho úspory zdvojnásobily. Kolik měl na začátku, když začínal spořit?“

*[Technický magazín 1960 - 1998]*

**22.** „39 dělníků se rozdělilo na několik (tj. víc než jednu) stejně velkých skupin a čtyři brigády, z nichž každá měla tolik členů, kolik bylo skupin. Kolik dělníků bylo v každé skupině a brigádě?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

*x* skupin po *y* dělnících

$$xy + 4x = 39$$
$$x(y + 4) = 39 \quad /:(y + 4)$$
$$x = \frac{39}{y + 4}$$

$(y + 4)$ musí být dělitelem čísla 39

$$39 = 13.3$$
$$13 = y + 4 \quad /-4, záměna\ stran\ rovnice$$
$$y = 13 - 4$$
$$\boldsymbol{y = 9}$$

Při zpětném dosazení zjistíme hledaný počet skupin (x):

$$\boldsymbol{x} = \frac{39}{9 + 4} = \frac{39}{13} = \mathbf{3}$$

Celkem bylo 9 dělníků ve 3 skupinách.

**23.** „Jak starý je děda? Jeho syn je starý tolik týdnů, kolik dnů je věk vnuka. Vnuk je starý tolik měsíců, kolik je dědovi let. Všichni tři dohromady jsou staří 100 let.“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Slovní úloha, která při správném zvolení neznámé vede k triviálnímu řešení rovnice.

děda ….. 12x let

syn ….. 7x let

<u>vnuk ….. x let</u>

celkem ….. 100 let

$12x + 7x + x = 100$

$$20x = 100 \quad /:20$$

$$x = 5$$

Při zpětném dosazení zjistíme hledaný věk všech tří osob:

vnuk ….. $\boldsymbol{5}$

syn ….. $7.5 = \mathbf{35}$

děda ….. $12.5 = \mathbf{60}$

Vnukovi je 5 let, synovi 35 let a dědovi 60 let.

**24.** „Prodali jsme zboží za 1800 Kčs. Kdybychom byli prodali o 150 ks méně za stejnou celkovou cenu, byl by jeden kus o 1 Kčs dražší. Kolik bylo kusů?"

*[Technický magazín 1960 - 1998]*

S touto úlohou si vzhledem k rovnicím s neznámou ve jmenovateli, které obsahuje, poradí až žáci 9. třídy.

*Řešení:*

Po sestavení a následné úpravě rovnice s neznámou ve jmenovateli se dostaneme k řešení rovnice kvadratické. Je tedy zapotřebí využít vzorec pro výpočet diskriminantu a následně vzorec pro výpočet kořenů této rovnice. Než uděláme jakýkoli závěr úlohy a napíšeme odpověď, zamysleme se nad tím, zda jsou oba kořeny výsledkem.

zboží ….. x ks

cena celkem ….. 1800 Kčs

cena za ks ….. $\frac{1800}{x}$ Kč

cena dražšího zboží ….. $\frac{1800}{x-150} + 1$

$$\frac{1800}{x} = \frac{1800}{x-150} - 1$$

$$1800x - 270000 = 1800x - x(x-150)$$

$$1800x - 270000 = 1800x - x^2 + 150x \quad /-1800x - 150x + x^2$$

$$x^2 - 150x - 270000 = 0$$

$$D = (-150)^2 - 4.1.(-270000) = 1102500$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{1102500} = 1050$$

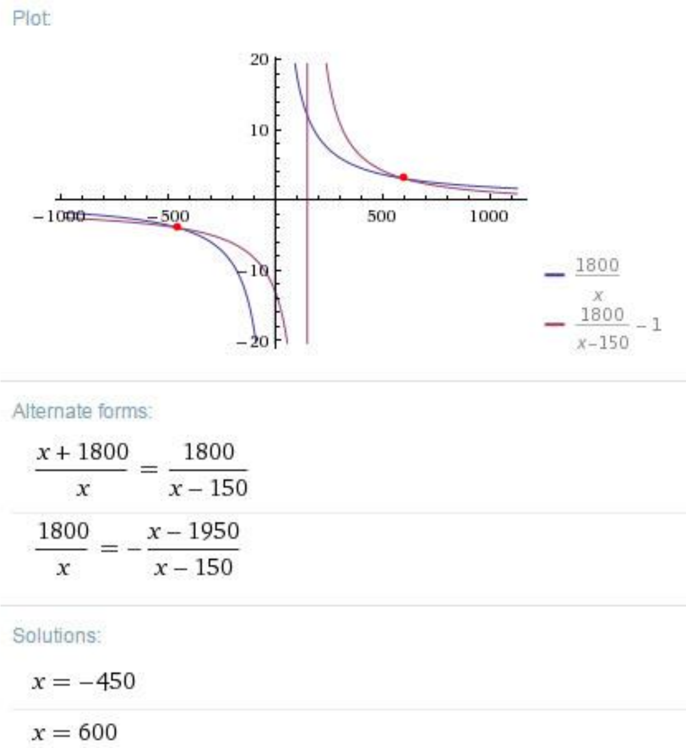
$$x_{1,2} = \frac{150 \pm 1050}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 600}$$

$$x_2 = -450$$

Jelikož počet prodaných kusů zboží nemůže být záporné číslo, je zřejmé, že celkem bylo 600 ks zboží.

**Obrázek 5: Úloha 24 ve Wolframu Alpha**



**25.** „Prvnímu chlapci dal děd polovinu toho, co měl, a 1 Kčs. Druhému dal polovinu zbytku a 1 Kčs. Třetímu dal polovinu zbytku a 3 Kčs. Tím rozdal vše, co měl. Kolik dostal každý chlapec?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Po sestavení rovnic a jejich následnému součtu získáme hodnotu neznámé, která nám při zpětném dosazení odhalí, kolik každý z chlapců dostal peněz.

děda měl ….. x Kčs

první chlapec dostal ….. $\frac{1}{2}x + 1$

dědovi zbylo ….. $x - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}x - 1$

druhý chlapec dostal ….. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 1 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

dědovi zbylo ….. $\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$

třetí chlapec dostal ….. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{1}{8}x - \frac{3}{4} + 3 = \frac{1}{8}x + \frac{9}{4}$

---

$$\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x + \frac{9}{4} = x \quad /.8$$

$$4x + 8 + 2x + 4 + x + 18 = 8x$$

$$7x + 30 = 8x \quad /-30 - 8x$$

$$-1\,x = -30 \quad /:(-1)$$

$$\boldsymbol{x = 30}$$

Při zpětném dosazení zjistíme požadovanou částku:

první chlapec dostal ….. $\frac{1}{2}.30 + 1 = \mathbf{16}$

druhý chlapec dostal ….. $\frac{1}{4}.30 + \frac{1}{2} = \mathbf{8}$

třetí chlapec dostal ….. $\frac{1}{8}.30 + \frac{9}{4} = \mathbf{6}$

První chlapec dostal 16 Kčs, druhý 8 Kčs a třetí chlapec dostal 6 Kčs.

**26.** „Krásná dívko, smím se ptáti, žhavé oči lesk než ztratí... " - tak začíná starobylá indická úloha, která (nikoli ve verších) zní takto: Odmocnina z poloviny včel počtu roje se usadila na jasmínovém keři. Mimoto odlétla jedna včela na pomoc druhé včele z téhož roje, která byla uzavřena v lotosovém květu, do něhož se ukryla před nocí. Osm devítin celého roje zůstalo v úlu. Spočítej, krásná dívko, kolik bylo včel v roji?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Po sestavení a následné úpravě rovnice obsahující odmocninu se dostaneme k řešení rovnice kvadratické. Znovu se zamysleme nad výsledky našeho řešení.

<u>počet včel ….. x</u>

$$\sqrt{\frac{1}{2}x} + 2 + \frac{8}{9}x = x \quad /-2-\frac{8}{9}x$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}x} = x - \frac{8}{9}x - 2$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{9}x - 2 \quad /^2$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{81}x^2 - \frac{4}{9}x + 4 \quad /.162$$

$$81x = 2x^2 - 72x + 648 \quad /-81x, záměna\ stran\ rovnice$$

$$2x^2 - 153x + 648 = 0$$

$$D = (-153)^2 - 4.2.648 = 18225$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{18225} = 135$$

$$x_{1,2} = \frac{153 \pm 135}{4}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 72}$$

$$x_2 = 4{,}5$$

Jelikož včely nemůžeme počítat na poloviny, je zřejmé, že celkem bylo 72 včel v roji.

**27.** „Úkol starý přes 4000 let: Přidám-li k neznámému číslu jeho polovinu, překročí součet 60 o tolik, o kolik je ono neznámé číslo menší než 65. Určete toto neznámé číslo.“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Opět tu máme jednoduché řešení sestavené rovnice. Celou rovnici postačí vynásobit číslem ve jmenovateli, abychom se zbavili zlomku. Pak už rovnici jen upravujeme, dokud nedostaneme její kořen, řešení zadané slovní úlohy.

<u>neznámé číslo ….. x</u>

$$x + \frac{1}{2}x - 60 = 65 - x \quad /.2$$

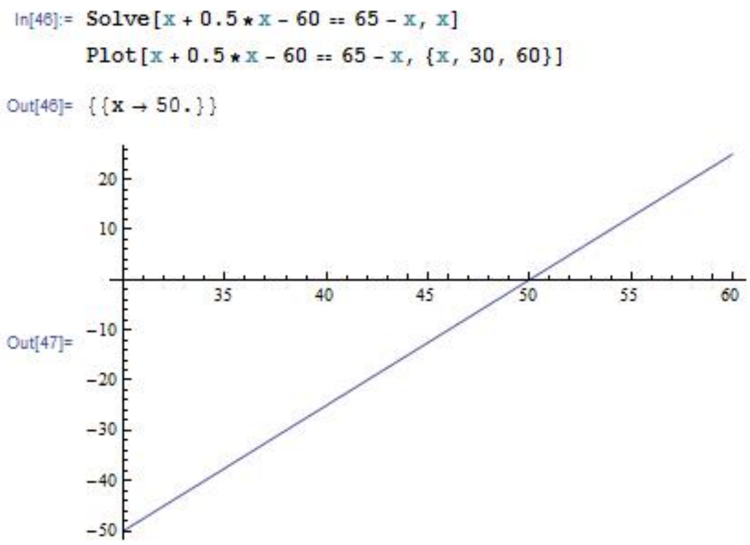
$$2x + x - 120 = 130 - 2x \quad /{+2x} + 120$$

$$5x = 250 \quad /:5$$

$$\boldsymbol{x = 50}$$

Hledané číslo je 50.

**Obrázek 6: Úloha 27 v Mathematice**



**28.** „Vše, co víme o starověkém matematikovi Diofantovi, bylo vytesáno na jeho náhrobku: „Šestinu svého věku byl chlapcem, další dvanáctinu mu rostly vousy, další sedminu trvalo, než se oženil. Syn, který se mu narodil o pět let později, zemřel, když dosáhl právě poloviny otcova celého věku. Diofant zemře za 4 roky po svém synovi.“ Jakého věku se dožil?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Pokud pozorně sestavíme rovnici, s jejím řešením jistě nebude problém. Nápis na náhrobku nás vede k jednoduchému sestavení této rovnice.

Neznámá, kterou hledáme, je Diofantův věk. Označme ho tedy jako *x.* Tomuto věku se musí rovnat součet všech věkových informací, které jsou vytesány na náhrobku.

<u>Diofantův věk ….. x</u>

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x \quad /.84$$

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x$$

$$75x + 756 = 84x \quad /-756 - 84x$$

$$-9x = -756 \quad /:(-9)$$

$$\boldsymbol{x = 84}$$

Diofant se dožil 84 let.

## 3. Kapitola: Soustavy lineárních rovnic

Jedná se o řešení více lineárních rovnic s více proměnnými najednou. Na základní škole se v praxi setkáváme především s řešením dvou rovnic o dvou neznámých, popř. tří rovnic o třech neznámých.

Mezi způsoby řešení patří metoda dosazovací, sčítací, popř. metoda kombinovaná, která představuje kombinaci obou předchozích.

Dosazovací metoda

Tato metoda spočívá ve vyjádření neznámé z jedné rovnice. Takto vyjádřenou neznámou vložíme do rovnice druhé. Poté již počítáme pouze s jednou neznámou, kterou po vypočtení využijeme pro výpočet neznámé zbývající.

Sčítací metoda

Rovnice si nejprve upravíme tak, abychom měli neznámé na jedné straně rovnice a absolutní členy na straně druhé. Při použití této metody musíme nejprve pomocí ekvivalentních úprav upravit rovnici (popř. rovnice) tak, abychom potom tyto rovnice mohli sečíst a tím se jedné neznámé „zbavit“. Rovnice sčítáme tak, že po jejich úpravě sečteme vždy spolu shodné neznámé na jedné straně rovnice a sečteme i absolutní členy na straně druhé. Tím dojde k vyjádření jedné neznámé. Pokud postup opakujeme s rozdílem, že se „zbavíme“ druhé neznámé, získáme vyjádření neznámé chybějící.

Řešení soustavy lineárních rovnic lze odhalit i pomocí grafického řešení, kdy hledáme průnik zadaných rovnic.

Učivo soustav lineárních rovnic je zařazeno v 9. třídě.

**29.** „Problém věčně mladý, na kterém velmi snadno uklouznete: Stojí-li láhev se zátkou 1,10 Kčs a láhev o korunu víc než zátka, kolik stojí zátka?"

*[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Pomocí dosazovací metody vyřešíme jednoduchou soustavu rovnic.

- dosazovací metoda

láhev ….. x Kčs

zátka ….. y Kčs

$x + y = 1{,}1$

$\underline{x - 1 = y => y = x - 1}$

$x + x - 1 = 1{,}1 \quad /+1$

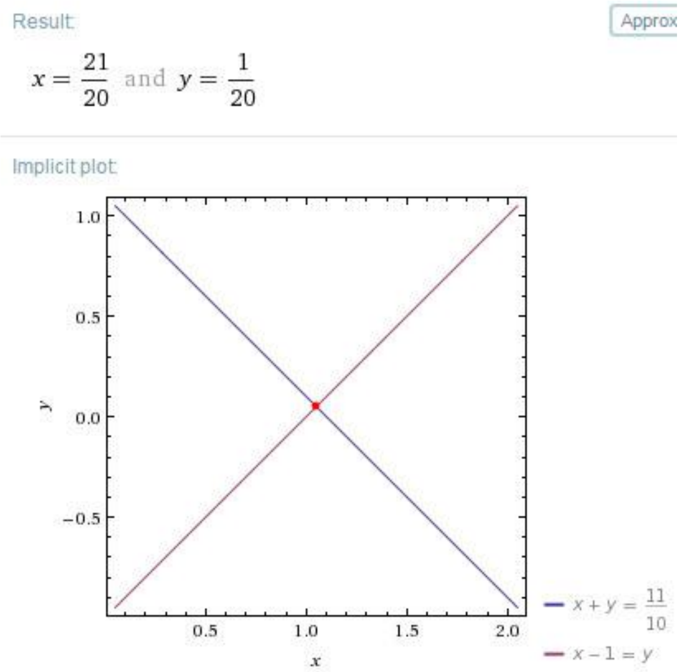
$2x = 2{,}1 \quad /: 2$

$\boldsymbol{x = 1{,}05}$

$\boldsymbol{y} = 1{,}05 - 1 = \mathbf{0{,}05}$

Láhev stojí 1,05 Kčs, zátka stojí 0,05 Kčs.

**Obrázek 7: Úloha 29 ve Wolframu Alpha**



**30.** „Když se dělila v prádelně prémie 2400 Kčs mezi 20 osob, dostal každý muž 60 Kčs a každá žena 160 Kčs. Kolik bylo mužů a kolik žen?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

- dosazovací metoda

počet žen ….. x

počet mužů ….. y

$x + y = 20 \Rightarrow x = 20 - y$

$\underline{60y + 160x = 2400}$

$60y + 160.(20 - y) = 2400$

$60y + 3200 - 160y = 2400 \quad /-3200$

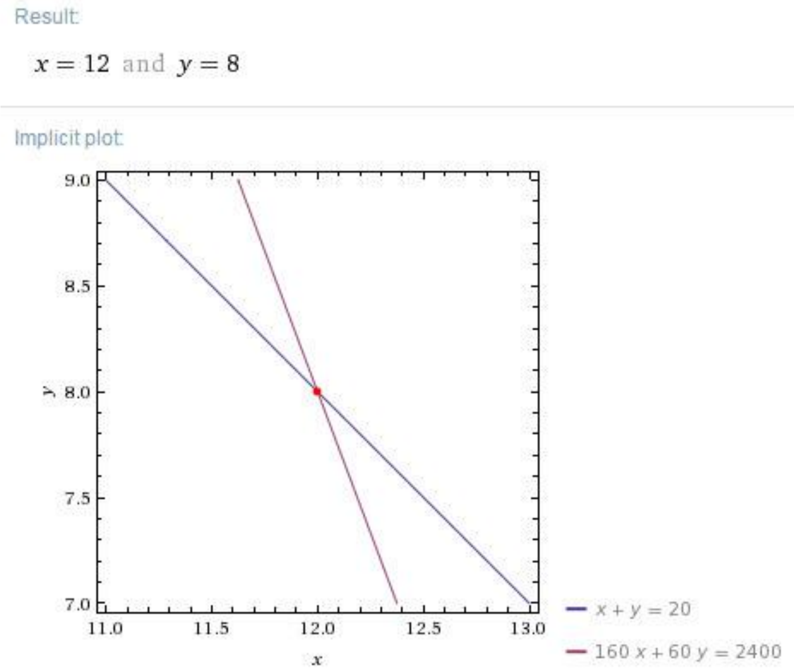
$-100y = -800 \quad /:(-100)$

$\boldsymbol{y = 8}$

$\boldsymbol{x} = 20 - 8 = \boldsymbol{12}$

V prádelně bylo 12 žen a 8 mužů.

**Obrázek 8: Úloha 30 ve Wolframu Alpha**



**31.** „Ve společné pokladně, z níž hradí svačiny, mají tři studenti A, B, C 504 Kčs. Kdyby C nesvačil, vystačilo by to A a B na 72 dní. Kdyby B nesvačil, vystačilo by to A a C na 63 dní. Kdyby A nesvačil, vystačilo by to B a C na 56 dní. Jak dlouho vystačí hotovost, svačí-li všichni tři a kolik přispívá každý na den."

*[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Než začneme řešit soustavu tří rovnic o třech neznámých, pozorně si tyto rovnice sestavme a rovnou je upravme. Cenu svačiny studenta A, resp. B, resp. C označme *a*, *b*, *c*.

- dosazovací metoda

nesvačí C ..... $72 = \frac{504}{a+b} \quad /.(a+b)$

$$72Aa + 72b = 504$$

nesvačí B ..... $63 = \frac{504}{a+c} \quad /.(a+c)$

$$63a + 63c = 504$$

nesvačí A ..... $56 = \frac{504}{b+c} \quad /.(b+c)$

$$\underline{56b + 56c = 504}$$

$a + b = 7 \ \ => a = 7 - b$

$a + c = 8$

$\underline{b + c = 9}$

$7 - b + c = 8$

$\underline{\quad b + c = 9}$

$-b + c = 1$

$\underline{\ b + c = 9}$

$2c = 10 \quad /: 2$

$c = \mathbf{5}$

Při zpětném dosazení dostaneme A, B:

$63a + 63.5 = 504$

$63a + 315 = 504 \quad /-315$

$63a = 189 \quad /: 63$

$\boldsymbol{a} = \mathbf{3}$

$56b + 56.5 = 504$

$56b + 280 = 504 \quad /-280$

$56b = 224 \quad /:56$

$\boldsymbol{b = 4}$

**celkem Kčs za den** ….. $a + b + c = 3 + 4 + 5 = \mathbf{12}$

**na kolik dní** ….. $504 \div 12 = \mathbf{42}$

A přispívá 3 Kčs, B 4 Kčs a C 5 Kčs. Svačí-li všichni tři, vystačí jim hotovost na 42 dní.

**32.** „Dva melouny váží dohromady 20 kg. Kilo menšího je o 20 hal dražší než 1 kg většího. Malý stál 8,20 Kčs, velký 29,60 Kčs. Kolik každý vážil?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Tato slovní úloha nás zavede nejen k řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Setkáme se i s řešením rovnice kvadratické.

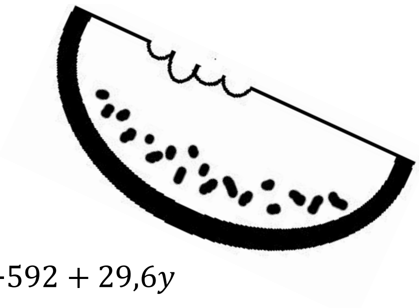
- dosazovací metoda

malý meloun váží *x* kg….. 8,2 Kč, cena za 1 kg ….. $\frac{8,2}{x}$ ( o 0,2 Kčs dražší/kg)

velký meloun váží *y* kg….. 29,6 Kč, cena za 1 kg ….. $\frac{29,6}{y}$

celkem ….. 20 kg

**Obrázek 9: Meloun**



$x + y = 20$

$\frac{8,2}{x} - 0,2 = \frac{29,6}{y} \quad /.xy$

$x + y = 20 \Rightarrow x = 20 - y$

$8,2y - 0,2xy = 29,6x$

$8,2y - 4y + 0,2y^2 = 592 - 29,6y \quad /-592 + 29,6y$

$0,2y^2 + 33,8y - 592 = 0 \quad /:0,2$

$y^2 + 169y - 2960 = 0$

$D = 169^2 - 4.1.(-2960) = 40401$

$\sqrt{D} = \sqrt{40401} = 201$

$$y_{1,2} = \frac{-169 \pm 201}{2}$$

$y_1 = -185$

$\boldsymbol{y_2 = 16}$

Při zpětném dosazení dostaneme váhu malého melounu: $\boldsymbol{x} = 20 - 16 = \mathbf{4}$

Jelikož váhu neuvádíme v záporných číslech, je zřejmé, že velký meloun vážil 16 kg, malý meloun 4 kg.

Pokud by nás zajímala cena každého melounu za 1 kg, opět zpětně dosadíme a zjistíme, že cena velkého melounu za 1 kg je 1,85 Kčs a malého melounu 2,05 Kčs za 1 kg.

**33.** „Dort s ozdobnou krabicí stojí 115 Kčs. Bez krabice stojí o 100 Kčs víc než krabice. Kolik stojí dort bez krabice?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Tato slovní úloha vyžaduje triviální řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Vhodnější je zvolení sčítací metody.

- sčítací metoda

cena dortu ….. x

<u>cena krabice ….. y</u>

$x + y = 115$

$\underline{x - 100 = y \quad /-y + 100}$

$x + y = 115$

$\underline{x - y = 100}$

$2x = 215 \quad /:2$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{107{,}5}$

$\boldsymbol{y} = 107{,}5 - 100 = \mathbf{7{,}5}$

Dort bez krabice stojí 107,5 Kčs.

## 4. Kapitola: Úlohy o společné práci

Úlohy o společné práci nás při řešení vedou k sestavení rovnice nebo soustavy rovnic.

S řešením úloh o společné práci se žáci setkávají již v 8. třídě základní školy.

**34.** „Pět dělníků vykope pět metrů příkopu za pět hodin. Kolik dělníků vykope za 100 hodin 100 metrů příkopu.“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Toto není úplně typická slovní úloha na společnou práci. Je to spíše úloha vyžadující logiku a trochu přemýšlení. Jeden náš dělník vykope za 5 hodin 1 metr příkopu. Za 100 hodin je to 20 metrů. **Tedy 100 metrů příkopu za 100 hodin vykope 5 dělníků.**

**35.** „Do nádrže přivádějí vodu dvě trubky. První trubkou se nádrž naplní za 24 minut, druhou za 15 minut. Odpadem se nádrž vyprázdní za 2 hodiny. Za jak dlouho se nádrž naplní, přitéká-li voda oběma trubkami a odpad je otevřen?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Určíme si, kolik nádrže se naplní za uvedenou dobu a pomocí těchto údajů sestavíme rovnici.

doba naplnění oběma trubkami při otevřeném odpadu ….. *x*

$2h = 120\ min$

první trubka naplní: za 1 min $\frac{1}{24}$ nádrže ….. za *x* min $\frac{x}{24}$

druhá trubka naplní: za 1 min $\frac{1}{15}$ nádrže …..za *x* min $\frac{x}{15}$

odpadem odteče: za 1 min $\frac{1}{120}$ nádrže …..za *x* min $\frac{x}{120}$

___

$$\frac{x}{24}+\frac{x}{15}-\frac{x}{120}=1 \quad /.120$$

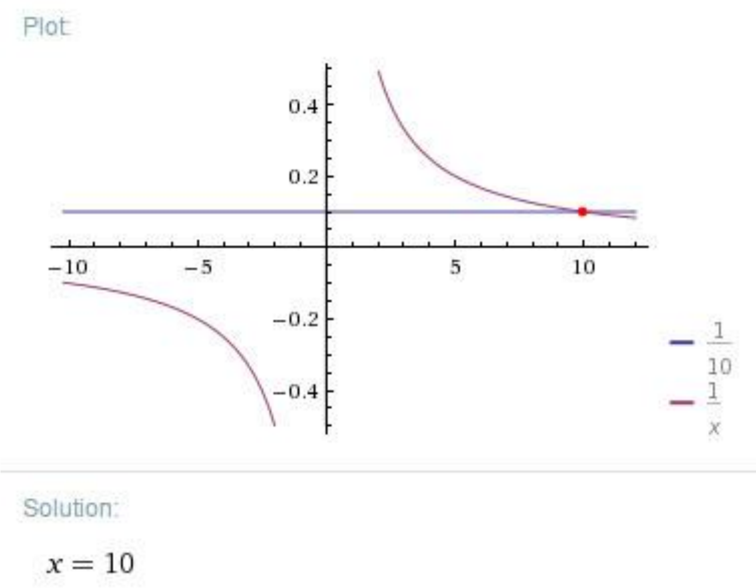
$$5x+8x-x=120$$

$$12x=120 \quad /:12$$

$$\boldsymbol{x=10}$$

Nádrž se za těchto podmínek naplní za 10 minut.

**Obrázek 10: Úloha 35 ve Wolframu Alpha**




**36.** „Pracuje-li B s K, vykonají jistou práci za 10 dní. Pracuje-li A s K, trvá práce 9 dní. Pracuje-li A s B, trvá práce 8 dní. Kolik dní by práce trvala samotnému A nebo B nebo K?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Zadání úlohy nás zavede k sestavení soustavy tří rovnic o třech neznámých, po jejímž vypočtení získáme řešení této slovní úlohy. Pro řešení soustavy je použita dosazovací metoda. Označme dobu trvání práce pracovníka A, resp. B, resp. K jako a, b, k.

Jelikož je v úloze využita soustava rovnic a rovnice s neznámou ve jmenovateli, je úloha řešitelná pro žáky 9. třídy.

A udělal za 1 den $\frac{1}{a}$ - tý díl práce

B udělal za 1 den $\frac{1}{b}$ - tý díl práce

K udělal za 1 den $\frac{1}{k}$ - tý díl práce

B s K za 10 dni vykonají $\frac{1}{10}$ práce

A s K za 9 dní vykonají $\frac{1}{9}$ práce

A s B za 8 dní vykonají $\frac{1}{8}$ práce

---

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{k}=\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{k}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8}=>\frac{1}{a}=\frac{1}{8}-\frac{1}{b}$$

---

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{k}=\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{b}+\frac{1}{k}=\frac{1}{9}\quad /-\frac{1}{8}$$

---

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{k}=\frac{1}{10}$$

$$-\frac{1}{b}+\frac{1}{k}=-\frac{1}{72}$$

---

$$\frac{2}{k}=\frac{31}{360}\quad /.360K$$

$$720=31k\quad /:31K, záměna\ stran\ rovnice$$

$$\boldsymbol{k}=\frac{\mathbf{720}}{\mathbf{31}}=\sim\mathbf{23,23}$$

---

$$\frac{1}{a}+\frac{31}{720}=\frac{1}{9}\quad /.720a$$

$$720+31a=80a\quad /-720-80a$$

$$720=49a\quad /:49A, záměna\ stran\ rovnice$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathbf{720}}{\mathbf{49}}=\sim\mathbf{14,7}$$

---

$$\frac{1}{b}+\frac{31}{720}=\frac{1}{10}\quad /.720b$$

$$720+31b=72b\quad /-720-72b$$

$$720=41b\quad /:41b, záměna\ stran\ rovnice$$

$$\boldsymbol{b}=\frac{\mathbf{720}}{\mathbf{41}}=\sim\mathbf{17,6}$$

Samostatně by A pracoval ~15 dní, B ~17,5 dne a K by samostatně pracoval ~23 dny.

**37.** „Úloha velkého matematika a fyzika Herona z Alexandrie z 2. století před naším letopočtem: „ Čtyři prameny plní cisternu. První sám by ji naplnil za den. Druhý sám by ji naplnil za dva dny, třetí za tři dny a čtvrtý sám za čtyři dny. Za kolik dní naplní cisternu všechny prameny najednou?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

počet dní ..... x

první pramen za den jednu cisternu

druhý pramen za den $\frac{1}{2}$ cisterny

třetí pramen za den $\frac{1}{3}$ cisterny

čtvrtý pramen za den $\frac{1}{4}$ cisterny

---

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 1 \quad /.12$$

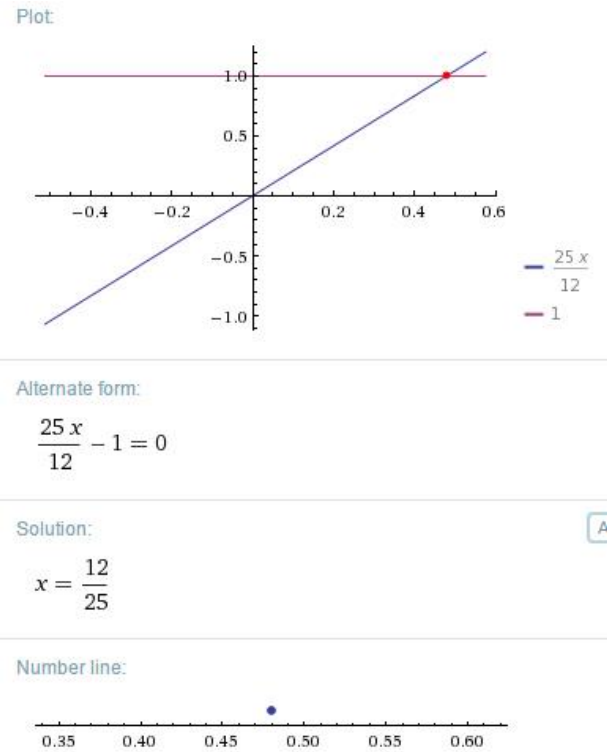
$$12x + 6x + 4x + 3x = 12$$

$$25x = 12 \quad /:25$$

$$\boldsymbol{x = 0,48\ dne = 11,52\ h = 11\ h\ 31\ \mathrm{min}\ 12\ s}$$

Všechny prameny naplní cisternu najednou za 11 h 31 min 12 s.

**Obrázek 11: Úloha 37 ve Wolframu Alpha**



**38.** „Nádrž na 40 litrů se naplní dvěma přívody, je-li první přívod otevřen 3 minuty a druhý 1 minutu. Je-li první přívod otevřen 1 minutu a druhý 7 minut, nádrž se naplní a ještě přeteče 20 litrů vody. Kolik litrů za minutu dává každý přívod?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Označme si počet doplněných litrů v nádrži z prvního přívodu za 1 min jako *x* a počet doplněných litrů z druhého přívodu jako *y.* Dále už jen zbývá sestavit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Jelikož víme, kolik litrů a za kolik minut celkem do nádrží přiteče, je sestavení těchto rovnic triviální. K vyřešení soustavy rovnic využijeme např. sčítací metodu.

první přívod ….. x litrů za minutu

<u>druhý přívod ….. y litrů za minutu</u>

$3x + y = 40$

$\underline{x + 7y = 60 \quad /.(-3)}$

$3x + y = 40$

$\underline{-3x - 21y = -180}$

$-20y = -140 \quad /:(-20)$

$\boldsymbol{y = 7}$

$x + 7y = 60$

$x + 7.7 = 60$

$\boldsymbol{x = 11}$

První přívod dává 11 litrů za minutu, druhý přívod dává 7 litrů za minutu.

## 5. Kapitola: Úlohy o pohybu

Úlohy o pohybu se zakládají především na znalosti fyzikálního vzorce pro výpočet dráhy $s = v.t\ [km, m]$, a jeho obměnách pro výpočet rychlosti $v = \frac{s}{t}\ [\frac{km}{h}, \frac{m}{s}]$ a času $t = \frac{s}{v}\ [h, s]$.

V těchto slovních úlohách figurují objekty, které se pohybují buďto za sebou nebo proti sobě, popř. dochází k otočení a zpáteční cestě. Pro lepší přehlednost bychom zprvu měli určit přesný typ pohybové úlohy (za sebou, proti sobě) a zakreslit schéma.

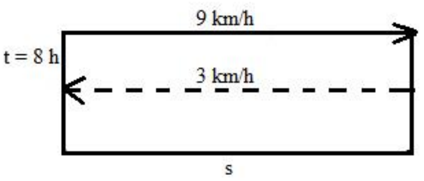
Úlohy o pohybu řeší žáci i 8. třídy.

**39.** „Jednu cestu jeli výletníci člunem rychlostí 9 km/h. Zpět šli pěšky rychlostí 3 km/h. Jak daleko jeli, trval-li celý výlet 8 hodin?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Využijme vzorec pro výpočet dráhy a dosaďme do něj čas, který známe. Dráhy se sobě musí rovnat, jelikož výletníci šli tam i zpět stejnou cestou.

**Obrázek 12: Schéma pohybové úlohy 39**




$s = v.t$

čas člunem ….. t

<u>čas pěšky ….. $8 - t$</u>

$s = 9.t$

$\underline{s = 3(8 - t)}$

$9t = 24 - 3t \quad /+3t$

$12t = 24 \quad /:12$

$t = 2$

čas člunem **…..** 2 h

čas pěšky ….. $8 - t = 8 - 2 = 6\ h$

$\boldsymbol{s} = 2.9 = \mathbf{18}\ \boldsymbol{km}$ či $\boldsymbol{s} = 3.6 = \mathbf{18}\ \boldsymbol{km}$

Výletníci jeli 18 km daleko.

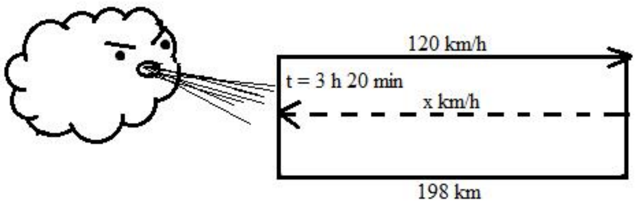
**40.** „Helikoptéra létající za bezvětří rychlostí 120 km/h proletí za 3 h 20 min trať 198 km po větru i nazpět proti větru. Jaká je rychlost větru?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Jelikož známe celkový čas letu, sestavme rovnici s využitím vzorečku pro výpočet času. Součet obou časů, času po i proti větru, se musí rovnat času celkovému.

Úloha je řešitelná pro žáky 9. třídy, protože se v ní vyskytují rovnice s neznámou ve jmenovateli.

**Obrázek 13: Schéma pohybové úlohy 40**




rychlost větru ..... x km/h

rychlost po větru ..... $(120 + x) km/h$

rychlost proti větru ..... $(120 - x)\ km/h$

dráha s ..... 198 km

celkový čas t ..... $3\ h\ 20\,\mathrm{min} = \frac{10}{3} h$

---

tam: $t = \frac{198}{120+x}$

zpět: $t = \frac{198}{120-x}$

---

$$\frac{10}{3} = \frac{198}{120 + x} + \frac{198}{120 - x} \quad /.3(120 + x)(120 - x)$$

$$(1200 + 10x)(120 - x) = 594(120 - x) + 594(120 + x)$$

$$144000 - 1200x + 1200x - 10x^2 = 71280 - 594x + 71280 + 594x \quad /-144000$$

$$-10x^2 = -1440 \quad /:(-10)$$

$$x^2 = 144 \quad /\sqrt{}$$

$$x_1 = -12$$

$$\boldsymbol{x_2 = 12}$$

Jelikož není možné měřit rychlost větru v záporných hodnotách, je jediný výsledek a sice: Rychlost větru je 12 km/h.

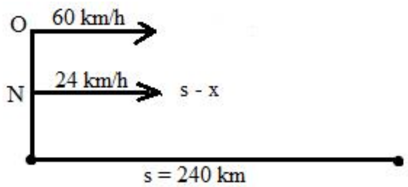
**41.** „Nákladní vlak vyjel rychlostí 24 km/h. Později vyjel z téže stanice osobní vlak rychlostí 60 km/h. Kolik kilometrů náskoku musí mít nákladní vlak, aby k cíli vzdálenému 240 km přijely oba vlaky společně?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Pohybová úloha typu „za sebou“ čili objekty se dohánějí. Opřeme se opět o vzorec pro výpočet dráhy.

V úloze se vyskytuje soustava lineárních rovnic o dvou neznámých, proto je úloha vhodná pro žáky 9. třídy.

**Obrázek 14: Schéma pohybové úlohy 41**




náskok ..... x km

rychlost nákladního vlaku ..... $v = 24\ km/h$

rychlost osobního vlaku ..... $v = 60\ km/h$

$\underline{s = 240\ km}$

$$240 = 60t => t = \frac{240}{60} = 4\ h$$

$\underline{240 - x = 24t}$

$240 - x = 24.4$

$240 - x = 96 \quad /-240$

$\quad - x = -144 \quad /:(-1)$

$\quad \boldsymbol{x = 144}$

Nákladní vlak musí mít náskok 144 km.

**42.** „Do města jel automobil průměrnou rychlostí 60 km/h, vracel se stejnou cestou průměrnou rychlostí 40 km/h. Jaká byla průměrná rychlost celé cesty?“

*[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Ze vzorce pro výpočet průměrné rychlosti, podílu celkové dráhy ku celkovému času, vyjádříme tyto veličiny pomocí rychlostí, s jejichž hodnotami po té můžeme počítat (jsou zadány).

Celkovou dráhu *s* vyjádříme jako *2s,* jelikož se jedná o stejnou cestu tam i zpět. Celkový čas je součtem trvání cesty tam a cesty zpět tzn. $t_1 + t_2$.

Pak už jen budeme vzorec upravovat tak, aby se v něm vyskytovaly pouze veličiny rychlostí.

rychlost automobilu do města ..... $v_1 = 60\ \frac{km}{h}$

rychlost automobilu z města ..... $v_2 = 40\ \frac{km}{h}$

průměrná rychlost automobilu ..... $v_p =\ ?\ \frac{km}{h}$

---

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, t_2 = \frac{s}{v_2}$$

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{\frac{sv_2 + sv_1}{v_1 v_2}} = \frac{2s}{\frac{s(v_2 + v_1)}{v_1 v_2}} = 2s.\frac{v_1 v_2}{s(v_2 + v_1)} = \frac{2v_1 v_2}{v_2 + v_1}$$

$$\boldsymbol{v_p} = \frac{2.60.40}{40 + 60} = \frac{4800}{100} = \mathbf{48}\ \boldsymbol{\frac{km}{h}}$$

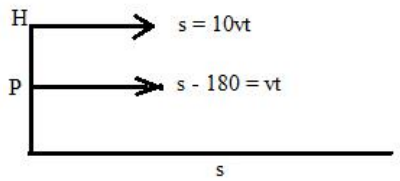
Průměrná rychlost celé cesty byla 48 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

**43.** „Parník vyplul na moře. Když byl 180 km od břehu, startoval za ním ze břehu hydroplán s poštou letící desetkrát větší rychlostí, než měl parník. Jak daleko od břehu dohoní hydroplán parník?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Pohybová úloha typu dohánění (zúčastněné objekty startují za sebou stejným směrem). Z úlohy plyne, že parník i hydroplán urazí stejnou vzdálenost (dráhu), tudíž se tyto vzdálenosti musejí rovnat. Z toho tedy budeme vycházet a sestavíme rovnici, jejíž výsledek zpětně dosadíme a získáme řešení úlohy.

**Obrázek 15: Schéma pohybové úlohy 43**




$s_h = 10vt$

$\underline{s_p = vt + 180}$

$10vt = vt + 180 \quad /-vt$

$9vt = 180 \quad /:9$

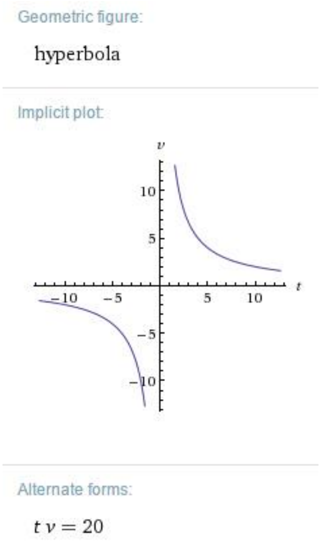
$vt = 20$

Při zpětném dosazení zjistíme, že:

$s_h = 10.20 = \mathbf{200\ km}$ či $s_p = 20 + 180 = \mathbf{200\ km}$

Hydroplán dohoní parník 200 km od břehu.

**Obrázek 16: Úloha 43 ve Wolframu Alpha**



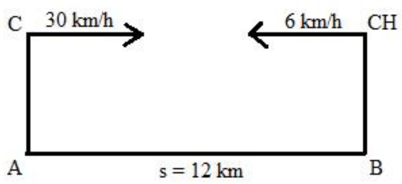
**44.** „Dvě místa A a B jsou vzdálena 12 km. Z místa A vyjede cyklista stálou rychlostí 30 km/h, z místa B, ležícího před ním, vyjde současně tím směrem chodec rychlostí 6 km/h. Za jak dlouho a v které vzdálenosti od A se setkají?“

*[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Pohybová úloha, kdy se objekty pohybují proti sobě. Vycházíme ze znalosti celkové dráhy, která se musí rovnat součtu obou drah, které urazili cyklista a chodec.

**Obrázek 17: Schéma pohybové úlohy 44**




vzdálenost míst A a B ….. s

vzdálenost, kterou urazil cyklista ….. $s_c$

vzdálenost, kterou urazil chodec ….. $s_{ch}$

rychlost, kterou jede cyklista ….. $v_c$

rychlost, kterou jde chodec ….. $v_{ch}$

čas jízdy cyklisty ….. $t_c$

čas chůze chodce ….. $t_{ch}$

$t = t_c = t_{ch}$

$s_c = 30t\ km$ $\quad\quad$ $s_{ch} = 6t\ km$

$v_c = 30\frac{km}{h}$ $\quad\quad$ $v_{ch} = 6\ km/h$

$t_c = t\ h$ $\quad\quad$ $t_{ch} = t\ h$

$s_c + s_{ch} = s$

$30t + 6t = 12$

$36t = 12 \quad /:36$

$$\boldsymbol{t} = \frac{12}{36} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{h} = \mathbf{20}\ \boldsymbol{min}$$

$$\boldsymbol{s_c} = 30.\frac{1}{3} = \mathbf{10}\ \boldsymbol{km}$$

Setkají se za 20 min, 10 km od A.

**45.** „Půjdu-li rychlostí 6 kilometrů za hodinu, přijdu k vlaku hodinu po jeho odjezdu. Kdybych tam jel na kole rychlostí 12 kilometrů za hodinu, přijel bych hodinu před odjezdem vlaku. Startuji v poledne. Kdy odjíždí vlak, jak daleko je nádraží?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Vyjdeme z faktu, že se uražené dráhy rovnají. Podle toho sestavíme rovnici. Rychlosti jsou nám známy. Neznáme sice přesný čas, ale víme, že rozdíl mezi oběma časy je 2 hodiny. Nyní jsme schopni sestavit rovnici. Při zpětném dosazení výsledku rovnice dostaneme vzdálenost k nádraží a čas, ke kterému buďto přičteme nebo odečteme jednu hodinu. Záleží na tom, zda jsme dosadili do rovnice, kdy jdeme pěšky (vlak o hodinu ujel) či jedeme na kole (o hodinu dříve).

$s = vt$

$s_1 = s_2 \ldots\ldots dráha\ pěšky\ (na\ kole)$

$t_1 \ldots\ldots čas\ pěšky$

$\underline{t_1 - 2 \ldots\ldots čas\ na\ kole}$

$s_1 = 6t_1$

$\underline{s_2 = 12(t_1 - 2)}$

$6t_1 = 12(t_1 - 2)$

$6t_1 = 12t_1 - 24 \quad /-12t_1$

$-6t_1 = -24 \quad /:(-6)$

$t_1 = 4$

Při zpětném dosazení:

$s_1 = 6t_1$

$s_1 = 6.4 = \mathbf{24\ km}$

$12{:}00 + 4\ h = 16{:}00 \rightarrow 16{:}00 - 1\ h = \mathbf{15{:}00}$

Vlak z 24 km vzdáleného nádraží odjíždí v 15:00.

**46.** „Turista ušel 24 km, pak hodinu odpočíval a šel ještě 15 km, ale poloviční rychlostí než před tím. Celá cesta trvala i s odpočinkem 14,5 hod. Jakou šel rychlostí?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

S úlohou by si poradili žáci 9. třídy, jelikož se v ní vyskytují rovnice s neznámou ve jmenovateli.

*Řešení:*

Řešení úlohy vychází ze vzorce pro výpočet času. Po krátkém zamyšlení je nám známa celková doba chůze. Dále známe jednotlivé dráhy a něco víme i o rychlosti. Vyjádříme si dobu chůze prvního úseku a dobu chůze druhého úseku. Ze zadání je patrné, že se tyto doby musí rovnat celkové době chůze, tzn. celkovému času bez odpočinku.

Nyní můžeme sestavit rovnici.

$t = \frac{s}{v}$

celková doba chůze ..... $t = 13{,}5\ h$

rychlost v první části ..... $v_1 = v\ \frac{km}{h}$

rychlost druhé části ..... $v_2 = \frac{v}{2}\ \frac{km}{h}$

dráha prvního úseku ..... $s_1 = 24\ km$

<u>dráha druhého úseku ..... $s_2 = 15\ km$</u>

$\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = t$

$\frac{24}{v} + \frac{15}{\frac{v}{2}} = 13{,}5$

$\frac{24}{v} + \frac{30}{v} = 13{,}5 \quad /.\,v$

$24 + 30 = 13{,}5v$

$54 = 13{,}5v \quad /: 13{,}5\ , záměna\ stran\ rovnice$

$\boldsymbol{v = 4\ \frac{km}{h} = v_1}$

$\boldsymbol{v_2 = \frac{v}{2} = \frac{4}{2} = 2\ \frac{km}{h}}$

První úsek šel turista rychlostí 4 $\frac{km}{h}$, druhý 2 $\frac{km}{h}$.

## 6. Kapitola: Úlohy s procenty

Úlohy spočívají ve výpočtu základu, procentové části a výpočtu počtu procent.

- základ (100 %) – celek
- procentová část – udává množství
- počet procent – udává vztah

S procenty se setkávají žáci od 7. třídy základní školy.

**47.** „Dva velocipédy prodal Ferda po 600 Kčs. Na prvním vydělal 20 %, na druhém prodělal 20 %. Kolik celkem vydělal nebo prodělal?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Zaměřme se na každý velocipéd zvlášť. Pokud z prvního byl zisk 20 %, byla částka 600 Kčs tedy 120%. Naopak v případě druhého velocipédu, který byl prodělečný, představuje částka 600 Kčs 80 %. Nyní už jen dopočteme.

velocipéd 1 ….. zisk (x) 20 %

120 % ….. 600 Kčs

20 % ….. x Kčs

$\frac{x}{600} = \frac{20}{120} \quad /.600$

$x = 100\ Kčs$

velocipéd 2 ….. ztráta (y) 20 %

80 % ….. 600 Kčs

20 % ….. y Kčs

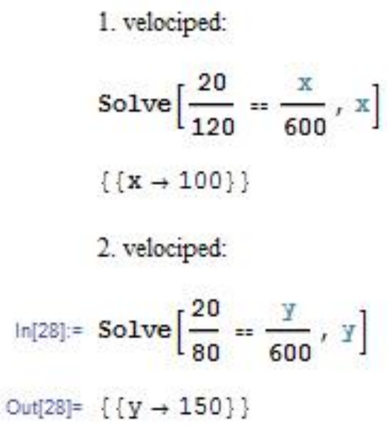
$\frac{y}{600} = \frac{20}{80} \quad /.600$

$y = 150\ Kčs$

$150 - 100 = \mathbf{50\ Kčs}$

Ferda prodělal 50 Kčs.

**Obrázek 18: Úloha 47 v Mathematice**



**48.** „Jak praví stará zkazka: V městě Chatum, které má 20 000 obyvatel, nosí 5 % lidí jen jeden sandál, protože jim žraloci ukousli po jedné noze. Ze zbytku chodí polovina bosa. Kolik sandálů tam nosí?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Úloha představuje vcelku jednoduché počítání s procenty. Jen se v úloze neztratit.

JEDNONOZÍ ….. jeden sandál (x)

20000 ….. 100%

x ….. 5%

$$\frac{x}{20000} = \frac{5}{100} \quad /.20000$$

$$\boldsymbol{x = 1000}$$

BOSÍ ….. žádný sandál (y)

$100\% - 5\% = 95\% = 0{,}95$

$$\boldsymbol{y} = 20000.0{,}95.\frac{1}{2} = \mathbf{9500}$$

OBUTÍ ….. oba sandály (z)

$\boldsymbol{z} = 9500\,.\,2 = \mathbf{19000}$

celkem sandálů: $1000 + 19000 = 20\,000$

Ve městě Chatum nosí lidé celkem 20 000 sandálů.

**49.** „Myš, myška a sýr v pastičce váží 170 gramů. Myš váží o 100 gramů víc než myška a sýr dohromady, sýr váží o 60 % méně než myška. Kolik váží myš, myška a sýr?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

Jelikož je pro výpočet této úlohy využita rovnice, je úloha řešitelná až pro žáky od 8. třídy.

*Řešení:*

Při řešení se dostaneme k sestavení jednoduché rovnice, po jejímž vyřešení a zpětném dosazení získáme řešení slovné úlohy.

myška váží *x* g

myš váží $(x + x - 0{,}6x + 100) = (1{,}4x + 100)$ g

<u>sýr váží $(x - 0{,}6x) = 0{,}4x$ g</u>

celkem ….. 170 g

$x + 1{,}4x + 100 + 0{,}4x = 170 \quad / - 100$

$$2{,}8x = 70 \quad /: 2{,}8$$

$$x = 25$$

Při zpětném dosazení zjistíme zjišťované váhy:

myška ….. ***25 g***

myš ….. 1,4 . 25 + 100$= \boldsymbol{135\ g}$

sýr ….. 0,4 . 25 $= \boldsymbol{10\ g}$

Myš váží 135 g, myška 25 g a sýr 10 g.

**50.** „O kolik procent vzroste kupní síla obyvatelstva, sníží-li se cena všeho zboží o 20 %.“

*[Technický magazín 1960 - 1998]*

Po vysvětlení pojmu kupní síla obyvatelstva zvládnou úlohu i žáci 7. třídy.

*Řešení:*

Kupní síla obyvatelstva je, velmi zjednodušeně řečeno, kolik si toho obyvatelé mohou za svůj plat koupit.

Uveďme si to na konkrétním příkladu: Nakoupíme rajčata za 10 Kč/kg. Pak rajčata zlevní o 20 %. Stojí tedy 8 Kč/kg. Za těchto 8 Kč jich nyní koupíme 1,25 kg. Kupní síla obyvatelstva vzroste o 0,25 tedy o 25 %.

8 Kč ………. 1 kg

<u>10 Kč ………. x kg</u>

$$\frac{x}{1} = \frac{10}{8}$$

$$x = \frac{10}{8} = 1{,}25\ Kč$$

$$1{,}25 - 1 = \mathbf{0{,}25}$$

**51.** „Sběratel prodal dvě vzácné známky za 210 Kčs. Na jedné vydělal 10 % nákupní ceny, na druhé ztratil 10 % nákupní ceny, celkově však na prodeji vydělal 5 % nákupní ceny. Za jakou cenu původně známky koupil?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Jako první bychom si měli vypočíst částku, za kterou sběratel známky koupil. Původní ceny známek označme *x* a *y*. Prodejní cenu známek budeme brát jako 105 %, jelikož zisk byl 5%. Původní cena je tedy brána jako 100 %.

Úlohu vyřešíme pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, ve které je při řešení využita sčítací metoda.

Jelikož úloha vede na řešení soustavy rovnic, je vhodné zadat úlohu žákům až v 9. třídě.

první (výdělečná) známka ….. *x Kčs*…. $x + 0{,}1x = 1{,}1x$

druhá (prodělečná) známka ….. *y Kčs*….. $\underline{y - 0{,}1y = 0{,}9y}$

<u>prodejní cena ….. 210 Kčs</u>

původní cena:

210 Kčs ….. 105 %

<u>x Kčs ….. 100 %</u>

$$\frac{x}{210} = \frac{100}{105}$$

$$x = 200\ Kčs$$

$$x + y = 200 \quad /.(-1{,}1)$$

$$\underline{1{,}1x + 0{,}9y = 210}$$

$$-1{,}1x - 1{,}1y = -220$$

$$\underline{1{,}1x + 0{,}9y = 210}$$

$$-0{,}2y = -10$$

$$\boldsymbol{y = 50}$$

Při zpětném dosazení zjistíme x:

$$x = 200 - y$$

$$\boldsymbol{x} = 200 - 50 = \mathbf{150}$$

Původní cena známek je 50 Kčs a 150 Kčs.

## 7. Kapitola: Nejmenší společný násobek

Při hledání nejmenšího společného násobku *n* operujeme s pojmem prvočíslo.

<u>Prvočíslo</u> je číslo, které má pouze dva dělitele (jedničku a samo sebe). Příkladem prvočísel jsou čísla 2,3,5,7,11,13,17,19,…

Hledání nejmenšího společného násobku spočívá v rozkladu všech zúčastněných čísel na prvočísla a jejich následnému pronásobování.

S úlohami v této kapitole by si měli bez problémů poradit i žáci 6. třídy, kde je tato látka již probírána.

**52.** „Tři přátelé A, B, C chodí trénovat skoky do vody do klubu Poseidon. A chodí každý třetí den, B chodí každý čtvrtý den, C chodí každý pátý den. Kolikrát se sejdou všichni tři za dva měsíce?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Slovní úloha vyžaduje jen nalezení nejmenšího společného násobku dní, kdy přátelé chodí trénovat. Hledáme tedy nejmenší společný násobek čísel 3, 4 a 5.

A ….. každý třetí den

B ….. každý čtvrtý den

<u>C ….. každý pátý den</u>

Hledáme nejmenší společný násobek *n* čísel *3, 4* a *5*.

$n\ (3,4,5) = 3\ .\ 5\ .\ 2\ .\ 2 = 60$

$3 = 3$

$5 = 5$

$4 = 2\ .\ 2$

Všichni tři se sejdou maximálně dvakrát za dva měsíce. Závisí to na počtech dnů ve dvou po sobě jdoucích měsících.

**53.** „Letecký maják má tři otočné reflektory. Světlo prvního vidíme každých 5 vteřin, světlo druhého každých 6 vteřin, světlo třetího každých deset vteřin. Přesně ve 20 hodin 15 minut se všechny tři rozsvítily, pozorovali jsme je do 21 hodin. Jak často uvidíme svítit všechny tři současně?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

K řešení této úlohy využijeme stejné matematické prostředky jako v úloze předchozí. Nalezneme tedy nejmenší společný násobek viditelnosti reflektorů, tzn. nejmenší společný násobek čísel 5, 6 a 10.

první reflektor ….. každých pět sekund

druhý reflektor ….. každých šest sekund

<u>třetí reflektor ….. každých deset sekund</u>

Hledáme nejmenší společný násobek *n* čísel *5, 6* a *10*.

$n\,(5{,}6{,}10) = 5\,.\,3\,.\,2 = 30$

$6 = 3\,.\,2$

$5 = 5$

$10 = 5\,.\,2$

$45\,.\,2 = \mathbf{90}$

Reflektory svítí současně každých 30 sekund. Každou minutu vidíme tedy reflektory svítit současně dvakrát. Pozorujeme je 45 minut. Tedy svítit současně je uvidíme za celou dobu pozorování devadesát krát.

## 8. Kapitola: Slovní úlohy s nádechem geometrie

**54.** „Pozemek na chatu měl tvar čtverce a 1 m² stál 2 Kčs. Chatař k němu přikoupil za 1000 Kčs další pozemek za stejnou cenu za 1 m², aby byla parcela opět čtvercová. Její strana byla o 10 m delší než dříve. Jak velká byla parcela?“

*[Technický magazín 1960 - 1998]*

Vzhledem k tomu, že se v řešení příkladu vyskytují rovnice, je příklad vhodný pro žáky od 8. třídy.

*Řešení:*

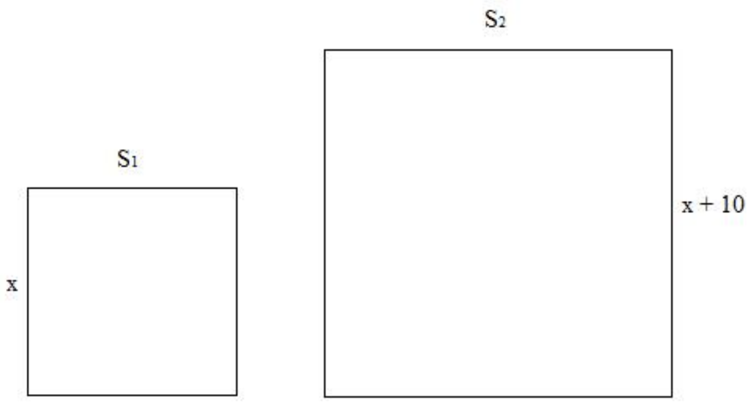
Nejprve vyjádříme plochu obou pozemků, pozemku původního i pozemku nového, většího. Cena za $1m^2$ je 2 Kčs. Dále víme, že rozdíl velikostí těchto pozemků (tzn. přikoupené části) se musí rovnat 1000 Kčs. Z těchto informací již sestavíme rovnici a při zpětném dosazení do obecného vyjádření plochy prvního pozemku zjistíme rozlohu pozemku původního.

$S_1 - plocha\ původního\ pozemeku$

$S_2 - plocha\ rozšířeného\ pozemku$

$S = a.a = a^2 \quad - vzorec\ pro\ výpočet\ obsahu\ čtverce$

**Obrázek 19: Parcely**




$S_1 = (x^2)\ m^2 \qquad S^2 = (x^2 + 20x + 100)\ m^2$

$2x^2\ Kčs \qquad 2(x^2 + 20x + 100)\ Kčs$

$S_2 - S_1 = (20x + 100)\ m^2 \quad - plocha\ (obsah)\ přikoupené\ části\ pozemku$

cena přikoupené části: $2(20x + 100) = 1000$

$$40x + 200 = 1000 \quad /-200$$

$$40x = 800 \quad /:40$$

$$x = 20$$

$\boldsymbol{S_1} = 20^2\ m^2 = \mathbf{400}\ \boldsymbol{m^2}$

**55.** Parcela byla velká 400 $m^2$. „Kvádr se opírá o dvaválečky, jejichž průměr je 7 cm. O jakou vzdálenost se kvádr posune, otočí-li se válečky právě jednou? Počítejte s přibližnou hodnotou Ludolfova čísla 22/7.“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

Ač se učivo válce bere až v 8. třídě základní školy, při zamyšlení by tuto úlohu dokázali vyřešit i žáci 6. třídy. Řešitelé si totiž vystačí se znalostmi vzorce týkajícího se učiva této třídy, a sice se znalostmi vzorce týkajícího se kružnice či kruhu, které tvoří podstavu válce.

*Řešení:*

Úloha vyžaduje znalost vzorce pro výpočet obvodu kruhu.

Úloha navíc žáka obohatí o informaci, že číslu „Pí“ se také říká Ludolfovo číslo.

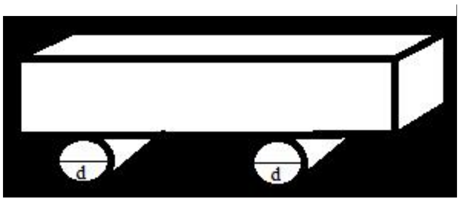
průměr válečků ….. d

Ludolfovo číslo = $\pi = \sim \frac{22}{7}$

<u>obvod ….. o</u>

otočení válečku

**Obrázek 20: Kvádr a válečky**




$o = \pi d \quad - vzorec\ pro\ výpočet\ obvodu\ kruhu\ (podstavy\ válce)$

$o = \frac{22}{7}.7 = 22\ cm$

Jelikož se válečky valí po zemi i po stykové ploše kvádru, posune se kvádr o 44 cm.

**56.** „Dutá koule z oceli o hustotě 7,8 g/cm³ má hmotnost 1000 g. Její stěna je tlustá 2 cm. Jaký je vnější poloměr R a vnitřní poloměr r?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

Úloha je vhodná pro žáky od 8. třídy. Žáci už umí pracovat s rovnicemi a dokáží vyjádřit neznámou ze vzorce. Vzorec pro výpočet hustoty znají již od 6. třídy z fyziky. Úloha však není zcela triviální.

*Řešení:*

Vyjdeme ze vzorce pro výpočet hustoty. Z tohoto vzorce si vyjádříme objem V, jehož hodnotu již snadno dopočteme, jelikož vše známe ze zadání. Dále využijeme vzorec pro výpočet objemu koule, čímž zjistíme objem koule s jednotlivými poloměry.

hmotnost ….. m

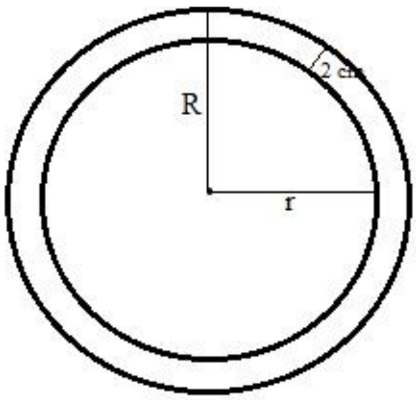
objem ….. V

hustota ….. $\rho$

vnější poloměr ….. R

vnitřní poloměr ….. r

**Obrázek 21: Dutá koule**




$\rho = 7{,}8\,\frac{g}{cm^3}$

$\underline{m = 1000\ g}$

$\rho = \frac{m}{V}\quad - vzorec\ pro\ výpočet\ hustoty$

$7{,}8 = \frac{1000}{V}$

$V = \frac{m}{\rho} - vzorec\ pro\ výpočet\ objemu$

$V = \frac{1000}{7{,}8} = \frac{10000}{78} (\sim 128{,}2\ cm^3)$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad - vzorec\ pro\ výpočet\ objemu\ koule\ s\ vnějším\ poloměrem\ R$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad - vzorec\ pro\ výpočet\ objemu\ koule\ s\ vnitřním\ poloměrem\ r$

Výše jsme si vypočetli celkový objem, který je roven objemu duté koule $V_d$, které jsme schopni pomocí našich poloměrů vyjádřit. Pro poloměry platí $\boldsymbol{r = R - 2.}$ Tento vztah dále využijme a dosaďme, abychom při výpočtu získali jen jednu neznámou.

$V_d = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi[R^3 - (R-2)^3]$

Nyní můžeme zvolit způsob postupného roznásobování a úprav, protože umíme pracovat s mocninou s přirozeným mocnitelem. Výsledně upravený výraz položíme roven celkovému objemu a dopočteme.

$$\frac{4}{3}\pi[R^3-(R-2)^3]=\frac{4}{3}\pi[R^3-(R-2).(R-2).(R-2)]=\frac{4}{3}\pi(6R^2-12R+8)$$
$$=\frac{8}{3}\pi(3R^2-6R+4)$$

$$\frac{8}{3}\pi(3R^2-6R+4)=\frac{10000}{78} \quad /.78$$

$$208\,\pi(3R^2-6R+4)=10000 \quad /:208\,\pi$$

$$3R^2-6R+4=\frac{10000}{208\pi}(\sim 15{,}3)$$

Získanou kvadratickou rovnici lze řešit pomocí příkazu NSolve v programu Mathematica nebo ve Wolframu Alpha, kdy dostaneme poloměr vnější části duté koule $\boldsymbol{R=\sim 3,18\ cm}$. Poloměr vnitřní duté koule *r* již jednoduše dopočteme z výše uvedeného $r=R-2$. Pak zjistíme, že vnitřní poloměr duté koule je $\boldsymbol{r=\sim 1,18\ cm}$.

Druhou a zároveň časově úspornější možností je využití vzorce $A^3-B^3$, se kterým se žáci na ZŠ často nesetkávají, ale s pomocí učitele by si s tímto řešením jistě poradili. Je nutné vysvětlit, co v našem příkladu představují A a B.

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$
$$R^3-(R-2)^3=2[R^2+R(R-2)+(R-2)^2]=2(3R^2-6R+4)$$

Dostaneme opět rovnici $\frac{8}{3}\pi(3R^2-6R+4)=\frac{10000}{78}$, po jejíž úpravě se dostaneme k již výše uvedené kvadratické rovnici.

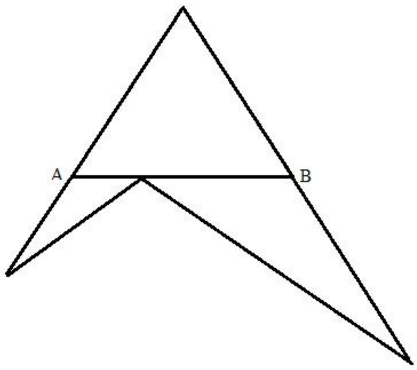
**57.** „Kus geometrického vtipu: K úsečce AB přikreslete čtyřúhelník, tj. obrazec, který má čtyři vrcholy a čtyři úhly, aby jej přímka AB dělila na tři trojúhelníky a aby body AB ležely na jeho obvodu.“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

Po seznámení žáků s pojmem konvexní a nekonvexní čtyřúhelník by úlohu jistě zvládli i žáci 6. třídy.

*Řešení:*

Je patrné, že např. čtverec se nám takto úsečkou AB rozdělit nepovede, ani jiný konvexní čtyřúhelník. Pokud se ale pokusíme podle zadání rozdělit nekonvexní čtyřúhelník, požadované tři trojúhelníky nám vzniknou.

**Obrázek 22: Nekonvexní čtyřúhelník**



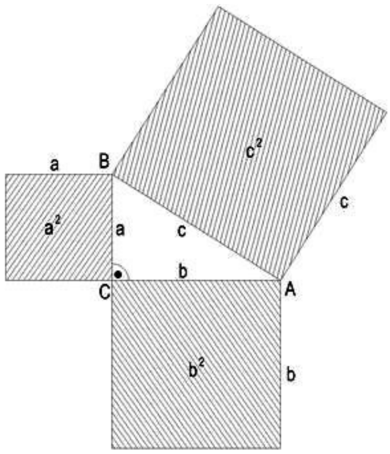

**58.** „Rovnoramenný trojúhelník má základnu 16 cm a dvě ramena po 17 cm. Existuje právě ještě jeden trojúhelník, který má ramena také po 17 cm a stejný obsah jako předešlý. Jakou má základnu?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

K vyřešení této úlohy se předpokládá znalost Pythagorovy věty:

- Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka se rovná součtu obsahu čtverců nad jeho odvěsnami ($c^2 = a^2 + b^2$).
- Pro výpočet odvěsny: $a^2 = c^2 - b^2,\ b^2 = c^2 - a^2$

Během řešení úlohy se objevuje kvadratická rovnice.

**Obrázek 23: Pythagorova věta**




*[mizici, 2009]*

Učivo Pythagorovy věty je zařazené v učivu 8. třídy.

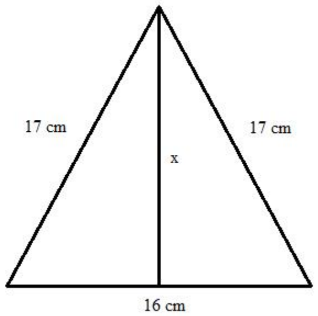
Vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka, který je v řešení uveden, není běžně součástí výuky základní školy, je však dohledatelný.

*Řešení:*

Nejprve si vypočteme obsah zadaného trojúhelníku, který se má rovnat i trojúhelníku druhému. K tomu budeme potřebovat výšku tohoto zadaného trojúhelníku, kterou vypočteme pomocí Pythagorovy věty.

Následně pomocí již známého obsahu a zadaných ramen rovnoramenného trojúhelníku vypočteme jeho „druhou" základnu. Tímto výpočtem se dostaneme ke kvadratické rovnici, jejíž kořeny jsou dvěma možnostmi velikosti základny rovnoramenného trojúhelníka se zadanými velikostmi ramen.

**Obrázek 24: Výpočet výšky x**




$$x^2 = 17^2 - 8^2 \quad - výpočet\ odvěsny\ x$$

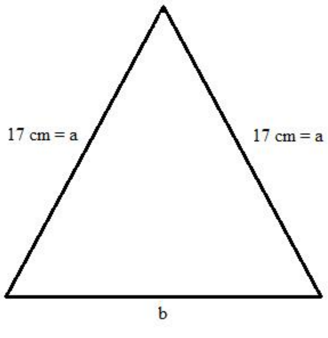
$$x^2 = 289 - 64 = 225 \quad /\sqrt{}$$

$$x = 15$$

$$S = \frac{AB.v_{AB}}{2} \quad - vzorec\ pro\ výpočet\ obsahu\ trojúhelníka$$

$$S = \frac{16.15}{2} = \frac{240}{2} = 120\ cm^2$$

**Obrázek 25: Výpočet základny b**



$$S = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$$

$$120 = \frac{b}{4}\sqrt{4.17^2 - b^2} \quad /.4$$

$$480 = b\sqrt{1156 - b^2} \quad /^2$$

$$230400 = b^2(1156 - b^2)$$

$$230400 = 1156b^2 - b^4$$

$$b^4 - 1156b^2 + 230400 = 0 \qquad substituce:\ b^2 = y$$

$$y^2 - 1156x + 230400 = 0$$

$$D = (-1156)^2 - 4.1.230400 = 414736$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{414736} = 644$$

$$y_{1,2} = \frac{1156 \pm 644}{2}$$

$$y_1 = 900$$

$$y_2 = 256$$

$$resubstituce: \quad b^2 = 900 \quad b^2 = 256$$

$$\boldsymbol{b = 30} \qquad b = 16$$

Druhý rovnoramenný trojúhelník s rameny po 17 m má základnu dlouhou 30 cm.

Nebo si ukažme jiný způsob řešení a zamysleme se. Vypočetli jsme si výšku zadaného trojúhelníku $x = 15\ cm$. Pokud bychom trojúhelník rozstřihli podél této výšky, vzniknou dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Když je k sobě přiložíme jejich kratšími odvěsnami, vznikne nám druhý rovnoramenný trojúhelník s rameny dlouhými 17 cm a základnou 30 cm. Základna je rovna dvojnásobku výšky původního trojúhelníku.

**59.** „Nádoba tvaru komolého kuželu má objem 7050 $cm^3$. Je vysoká 12 cm, průměr u okraje je dvakrát větší než průměr dna. Jaký je průměr okraje D přesně na čtyři desetinná místa?“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

Úlohu by měli zvládnout žáci 8. třídy. Jedná se o dosazení do vzorečku, ze kterého je potřeba vyjádřit neznámou.

*Řešení:*

Se znalostí či vyhledáním vzorečku pro výpočet komolého kuželu by neměl být problém úlohu vyřešit.

Je nutné si uvědomit, co do vzorce dosazujeme. Ve vzorci je totiž dosazen poloměr. My máme zadaný průměr. Na to je třeba dát si pozor. Poté tento poloměr vyjádříme, jelikož celkový objem máme v úloze zadaný.

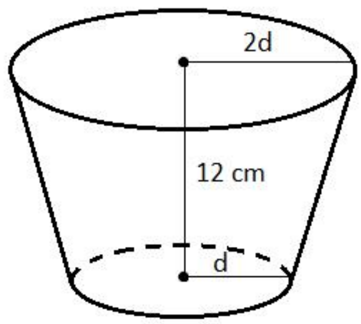
Závěrem nezapomeňme, že výsledek vypočtené rovnice je průměrem u dna. Vynásobíme tedy tento průměr dvěma a dostaneme tak průměr komolého kužele D u okraje.

Na obrázku zpracovaném ve Wolframu Alpha (obr.27) si všimněte, že v tomto programu stačí najet kurzorem na „červené tečky“, čili hodnoty, kterých dosahuje *d,* a Wolfram Alpha nám zobrazí jejich přesnou hodnotu.

$V = 7050\ cm^3$

$\underline{2d = D}$

**Obrázek 26: Komolý kužel**




$$\boldsymbol{V = \frac{v}{3}\pi[\left(\frac{d}{2^2}^2\right) + \frac{d}{2}d + d^2]}$$

$$7050 = 4\pi\left(\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{2} + d^2\right)$$

$$7050 = 4\pi \frac{7}{4} d^2$$

$$7050 = 7\pi d^2 \quad /: 7\pi$$

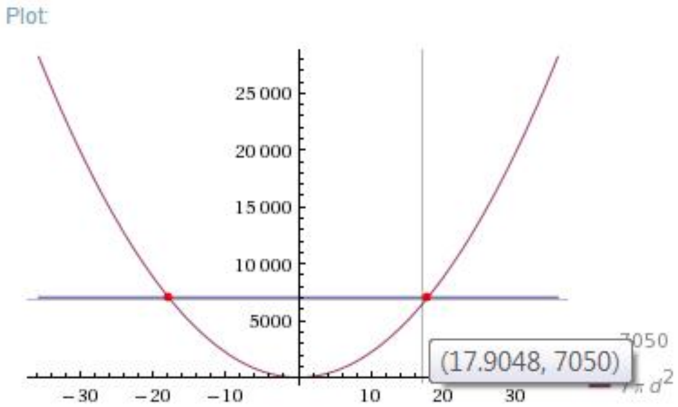
$$d^2 = \frac{7050}{7\pi} \quad /\sqrt{}$$

$$d = \sqrt{\frac{7050}{7\pi}} = \sim 17{,}9048$$

$$\boldsymbol{D} = 2d = 2\sqrt{\frac{7050}{7\pi}} = \sim \mathbf{35{,}8097}$$

Průměr okraje D je 35,8097 cm.

**Obrázek 27: Úloha 59 ve Wolframu Alpha**



## 9. Kapitola: Algebrogramy

Algebrogramy jsou úlohy založené na matematických logických postupech. Číslice jsou nahrazeny jinými znaky (písmeny, obrázky, tečkami, …). Nejjednodušší je řešení z těch míst, kam je možné dosadit nejmenší počet možností. *[dle Sekaninová 2014]*

Do algebrogramů jsou dosazována čísla 0 – 9. Většinou dokážeme některé číslice přiřadit či vyřadit jednoduchou úvahou. U jednodušších úloh můžeme pak postupovat experimentálně.

Algebrogramy by měli zvládnout i žáci 6. třídy, ti nadanější určitě.

**60.** „Nahraďte v dalším součinu písmena číslicemi, aby byl výsledek správný:

*ABCD . D = DCBA*

Autor úlohy: Inž. K. Socha, Jistebnice u Tábora“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Je zřejmé, že výsledný součin musí být dělitelný číslem zastoupeným písmenem D.

Zkusme si dát tento součin pod sebe (kvůli přehlednosti) a nahradit písmeno D číslicí 9. Poté velmi snadno zjistíme, že A nahradíme číslicí 1 a postupným dosazením zbylých číslic zjistíme zbylé obsazení. Výsledkem úlohy je tedy: *1089 . 9 = 9801*

**61.** „Nahraďte písmena celými kladnými čísly v této úloze:

A násobeno E dá F

B děleno E dá F

C minus E dá F

D plus E dá F

$A + B + C + D = 45$“ *[Technický magazín 1960 - 1998]*

*Řešení:*

Je zřejmé, že všechna z písmen kromě D, to nemůžeme jednoznačně vyloučit, nemohou být rovna 0 a 1. Kdyby E skrývalo číslici 1, A násobeno E by se rovnalo opět A. To není možné, protože výsledný součin je roven F. Obdobnou úvahou vyřadíme tuto číslici i u písmene B. Ze zadání násobení a dělení snadno ověříme, že číslici 1 nezastupuje ani písmeno F. Pod C se číslice 1 neskrývá, protože E by muselo suplovat 0 (tou ale nemůžeme dělit) nebo 1, protože zastoupením ostatních číslic bychom se dostali do záporných hodnot. To jsme ale již zamítli. O vyloučení číslice 0 na těchto pozicích uvažujeme podobným způsobem.

Zbývají nám tedy číslice 2 – 9. Experimentálně dosaďme za E číslici 2. Místo písmene A připadají v úvahu číslice 3 – 9. Pokud A bude 3, F se bude zastupovat číslici 6. B by bylo 12, C by zastupovalo 8 a D by se rovnalo 4. Avšak požadovaný součet by se nerovnal 45. Zkusme za A dosadit další číslici. Takto zjistíme, že **A = 5, B = 20, C = 12, D = 8**.

$$5 . 2 = 10$$
$$20 : 2 = 10$$
$$12 - 2 = 10$$
$$8 + 2 = 10$$
$$5 + 20 + 12 + 8 = 45$$

**62.** „Ve schématu $(AB)^2 = CAB$ nahraďte různá písmena různými číslicemi.“

*[Technický magazín 1960 - 1998]*

S úlohou, tak jak je zadána, by si měli poradit žáci od 8. třídy. Ti se s druhými mocninami již setkávají.

Žákům nižších tříd, by se mohl povrchově vysvětlit princip fungování druhé mocniny a zapsat schéma na levé straně rovnice jako součin. S tím by si mladší žáci mohli poradit.

*Řešení:*

Na pozici písmene B můžeme uvažovat o nahrazení číslicemi 0, 1 a 5, jelikož obě čísla těmito číslicemi končí a druhá mocnina zachovává na pozici jednotek stejné číslo pouze s těmito číslicemi.

Nejprve uvažujme číslici 0. Ta nepřipadá v úvahu, jelikož by se po umocnění dostala i na pozici desítek. Číslice 0 by tedy zastupovala i písmeno A, což v našem případě není možné.

Nyní se zamysleme nad číslicí 1. To bychom na pozici A, na levé straně rovnice, přemýšleli o číslicích 2 a 3, jelikož při dosazení číslic 4, 5, 6, 7, 8, 9 bude umocněné číslo čtyřciferné. Po vypočtení zjistíme, že ani jedna z číslic 2 a 3 písmeno A nezastupuje.

Zbývá nám tedy číslice 5. Na pozici písmene A zkusíme dosadit zbylé v úvahu přicházející číslice. Správné řešení představuje číslice 2, tudíž pozici písmene C nahradíme číslicí 6.

$$(25)^2 = 625$$

## ZÁVĚR

Cílem vypracování mé diplomové práce bylo dostat do povědomí čtenářů existenci dříve vydávaného Technického magazínu, ve kterém byla v rubrice Matematických rekreací vydávána řada nejen matematických úloh, na které by byla velká škoda zapomenout.

Má práce obsahuje jen velmi nepatrný zlomek matematických úloh, protože za 38 let, kdy byl měsíčník vydáván, jich vyšlo několik tisíc.

Ráda bych, aby práce posloužila učitelům jako zdroj netradičních příkladů, kterými, v případě zájmu, mohou obohatit svou výukovou hodinu. Příklady jsou koncipovány celkem netradičně. Žákům základní školy by práce měla posloužit jako sbírka úloh k procvičení.

Věřím, že čtenář, pokud se nechá příklady inspirovat, vyhledá zdroj těchto příkladů, aby čerpal další. Tím nebudou příklady bez dalšího užívání postupně zapomínány.

Dále jsou v práci využity matematické programy Mathematica, Wolfram Alpha a Geogebra, které ukazují, jak je v dnešní době možné rychle a přehledně úlohu vyřešit. Ráda bych, aby se žáci již na základní škole alespoň okrajově seznámili s matematickými programy a věděli o jejich existenci. Tyto programy mohou velmi usnadnit matematické výpočty. Pouze ty totiž měli k dispozici řešitelé v době vydávání magazínu.

Protože se má aprobace specializuje na učitelství druhého stupně základní školy, jsou příklady obtížnostně přizpůsobeny. V magazínu se jinak nacházejí i úlohy, které jsou svou obtížností pro žáky základní školy zcela neřešitelné.

Úlohy v mé diplomové práci jsou rozděleny v různých počtech do 9kapitol a obsahují podrobná řešení. Dále jsem se snažila uvádět, pro jaké žáky druhého stupně jsou příklady, případně celé kapitoly, určeny.

Věřím, že práce bude čtenářům inspirací a užitečným materiálem.

## RESUMÉ


Práce se opírá o úlohy rubriky Matematické rekce vycházející v měsíčníku Technický magazín, který byl k dostání v letech 1960 – 1998.

Vybrané úlohy odpovídají úrovni řešitelů, pro které je práce určena jako případný procvičující materiál, a sice žákům druhého stupně základní školy. Jejich učitelé mohou práci využít jako méně tradiční materiál pro svou výuku.

Úlohy jsou rozděleny do celkem devíti kapitol. Součástí práce je teorie, odpovídající každé kapitole, a informace, kdy je učivo probíráno.

Diplomová práce je obohacena o zpracování některých příkladů v matematických programech – Geogebra, Mathematica a Wolfram Alpha. Myslím si, že žáci základní školy by měli být seznámeni s existencí alespoň nějakého matematického programu. Tyto programy zrychlují práci a podávají přehledné výsledky. V době, kdy vycházel Technický magazín, byly některé úlohy v něm obsažené mnohdy počítány jen složitými metodami s využitím tužky a papíru popř. kalkulačky.

Věřím, že by práce mohla čtenáře motivovat pro vyhledání dalších příkladů v Technickém magazínu a tím příklady nebudou zcela zapomenuty.

## RÉSUMÉ

The dissertation insists on exercises from section Mathematical government published in Technical magazine from 1960 – 1998.

Selected exercises correspond with a stage of solvers, for whom is this dissertation designated, namely for the second - degree pupils of primary school. Their teachers can use the dissertation as a less traditional material for teaching.

The exercises are divided into nine chapters. There is included a theoretical part of the dissertation in accordance with every chapters.

The dissertation is enriched with processing of some examples in mathematical programs – Geogebra, Mathematica and Wolfram Alpha. I think that the pupils of primary school should get a basic knowledge of certain mathematical programs. These programs speed up the work and give well-arranged results. At the time of the publishing of the Technical magazine certain implicated examples were calculated through tangled methods using only a pencil, a piece of paper, eventually a calculator.

I believe, this dissertation could motivate readers in retrieval for further examples in the Technical magazine and therefore they will not be completely forgotten.

# ZDROJE INFORMACÍ

## 10. SEZNAM LITERATURY

Matematické rekreace, In: *Technický magazín.* 1960 – 1998. Státní nakladatelství technické literatury, 1960 – 1998.

## 11. ELEKTRONICKÉ ZDROJE

Sekaninová, L. Algebrogramy. In: educoland.muni [online]. EDUCOLAND Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity, 2014. [cit. 5. 5. 2016]. Dostupnost:
https://educoland.muni.cz/matematika/vymena-zkusenosti/algebrogramy/

## SEZNAM OBRÁZKŮ



Vlastní zpracování v programech Geogebra, Wolfram Alpha, Mathematika a Malování (kromě Obrázků: 3, 4 a 23).

*Obrázek 3: Titulní strana Newtonova díla, Obrázek 4: Původní řešená úloha*

Newton, I. *Universal Arithmetic*. Londýn, 1720. [online]. [cit. 5. 5. 2016]. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=3_s2AAAAMAAJ&pg=PA1&hl=cs&source=gbs_selected_pages&cad=2#v=onepage&q&f=false

*Obrázek 23: Pythagorova věta*

Pythagorova věta. In: *mizici.com* [online]. ©2009 mizici.com. [cit. 5. 5. 2016].
Dostupné z: http://www.mizici.com/article.php?aid=521