ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

MATEMATICKÉ KONSTANTY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Jan Frank

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma - Ge

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 17. března 2016

....

vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ:

Předně bych rád touto cestou poděkoval doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc., za jeho cenné připomínky, trpělivost, čas a podporu při vedení mé diplomové práce.

Dále bych rád poděkoval všem, kteří mě podporovali a povzbuzovali po celou dobu studia. Zvláštní poděkování pak patří dědovi, Mgr. Zdeňku Šebrlemu, který mi byl oporou nejen při vypracování této práce.

Místo tohoto listu je ve svázané práci zařazen originál zadání práce.

OBSAH

1 ÚVOD

S některou z matematických konstant se v životě setkal snad každý člověk. Již na základní škole se významné matematické konstanty objevují v rámci učiva matematiky. Jako příklad lze uvést poměr délky a průměru kružnice, tedy Ludolfovo číslo – číslo π. Tuto matematickou konstantu můžeme bezpochyby považovat za obecně nejznámější a nejslavnější. Další významnou konstantou, se kterou se mohou žáci již na základní škole setkat, je například $\sqrt{2}$ ve vzorci pro výpočet úhlopříčky čtverce o straně a, tj. $u = a.\sqrt{2}$.

Matematických konstant je velké množství a nalezneme je ve všech odvětvích matematiky – v matematické analýze, algebře, statistice i dalších. Pochopitelně není možné v této diplomové práci popsat všechny známé a používané matematické konstanty; bylo nutné provést určitý výběr a zaměřit se na ty nejznámější a nejvýznamnější z hlediska dějin matematiky i běžného života. Jednotlivé kapitoly práce jsou proto věnovány již zmíněné hodnotě $\sqrt{2}$ (tj. Pythagorova konstanta) a dále tzv. zlatému řezu (φ), Eulerovu číslu (e) a částečně i hodnotě $\ln(2)$. Záměrně je vynecháno číslo π, kterému byla věnována celá má bakalářská práce.

Cílem této práce bylo shrnout vlastnosti a historii vybraných matematických konstant, popsat jejich odvození a aproximaci v minulosti i současnosti, kdy máme k dispozici matematický software, a zaměřit se na jejich uplatnění v praxi a souvislost se školskou matematikou. Dalším záměrem bylo stručně seznámit čtenáře s matematickým softwarem Mathematica 8.0, využít jej při vlastním číselném určení vybraných matematických konstant pomocí popsaných vzorců a případně porovnat rychlost jejich konvergence k dané hodnotě. Také většina konstrukcí provedených v práci je původní. Vytvořeny byly na základě literatury v programu dynamické geometrie GeoGebra 4.2.

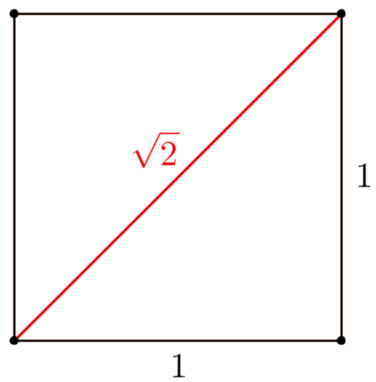
Práce je rozdělena do tří velkých celků. První z nich je věnován Pythagorově konstantě, protože se jedná o jednu z významných hodnot, se kterou se setká snad opravdu každý. V úvodní části jsou stručně shrnuty vlastnosti této konstanty a následně je popsána její historie, vliv na matematiku i příbuzné obory a aproximace používané od starověku až po novodobé výpočty. Již bylo řečeno, že $\sqrt{2}$ úzce souvisí se školskou matematikou a proto jsou v kapitole o této hodnotě popsány i školské souvislosti a některé úlohy, které mohou řešit žáci v rámci hodin matematiky na základních nebo středních školách. Značná část kapitoly věnované Pythagorově konstantě se zabývá vlastním číselným určením této hodnoty pomocí programu Mathematica 8.0. U jednotlivých metod je následně zhodnocena jejich efektivita. Závěr kapitoly je pak věnován rekordům ve výpočtu číselné hodnoty $\sqrt{2}$ a propojení této konstanty s každodenním životem.

Druhý celek této práce je věnován tzv. zlatému řezu – číslu φ. Jedná se o další konstantu, jejíž historie sahá až do starověku. První část kapitoly je věnována určité motivaci a odvození této konstanty. Následně jsou zařazeny definice, které přesně hodnotu čísla φ vymezují. Vedle těchto definic je zařazeno i několik geometrických konstrukcí zlatého řezu, které jsou dány do souvislosti s konstrukcí pětiúhelníku. Jedná se opět o konstrukční úlohu, kterou by mohli řešit žáci základních nebo spíše středních škol. Nejsou opomenuty ani vlastnosti zlatého řezu a opět jsou v kapitole zařazeny výpočty pomocí matematického softwaru Mathematica. Závěr kapitoly je pak věnován výskytu zlatého řezu v našem okolí a jeho využití ve fotografické praxi.

Třetí z celků se věnuje Eulerově číslu – číslu e. V úvodu kapitoly jsou opět popsány historické souvislosti. Následně se práce zabývá možnými definicemi čísla e, včetně některých důkazů existence limit. Poměrně velký prostor je též věnován vlastnostem Eulerova čísla, v rámci kterých jsou provedeny důkazy iracionality a transcendence. V neposlední řadě jsou zařazeny další zajímavé možnosti vyjádření čísla e, například pomocí řetězových zlomků, a část kapitoly se opět zabývá výpočty v programu Mathematica a zhodnocením jednotlivých metod. Závěr celého celku o Eulerově čísle je věnován rekordům ve výpočtu číselné hodnoty čísla e a zařazena je též souvislost s další matematickou konstantou – hodnotou $\ln(2)$.

2 PYTHAGOROVA KONSTANTA, $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ neboli Pythagorova konstanta je hodnota, která odpovídá velikosti úhlopříčky jednotkového čtverce (obrázek 1) a činí přibližně $1,414$. $\sqrt{2}$ lze považovat za jeden z nejstarších příkladů iracionálních čísel a kvůli iracionalitě není možné tuto hodnotu vyjádřit zlomkem – jako podíl dvou celých čísel. [7] Pokud bychom se zabývali transcendencí Pythagorovy konstanty, zjistili bychom, že $\sqrt{2}$ není transcendentním číslem. Aby bylo číslo transcendentní, musí splňovat podmínku, že není řešením algebraické rovnice $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ s racionálními koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$. [25] Vezmeme-li ovšem například rovnici ve tvaru $x^2 - 2 = 0$, je jejím řešením právě $\sqrt{2}$.



Obrázek 1 - ÚHLOPŘÍČKA JEDNOTKOVÉHO ČTVERCE

Vrátíme-li se k tvrzení, že $\sqrt{2}$ představuje velikost úhlopříčky jednotkového čtverce, můžeme jeho platnost snadno dokázat pomocí Pythagorovy věty. Vycházíme z běžně užívaného matematického vyjádření, tj. $c^2 = a^2 + b^2$, kde c představuje přeponu pravoúhlého trojúhelníka a a, b jsou jeho odvěsny. Úhlopříčku jednotkového čtverce si pro naše potřeby označíme písmenem u. Platí tedy, že $u = c$ a je zřejmé, že $a = b$. Vycházíme tedy z rovnice $u^2 = a^2 + a^2$ a postupujeme následovně:

$$u^2 = a^2 + a^2$$
$$u^2 = 2a^2$$

Víme, že se jedná o jednotkový čtverec, platí tedy, že $a = 1$. Tuto hodnotu dosadíme a dopočteme:

$$\begin{aligned} u^2 &= 2.(1)^2 \\ u^2 &= 2 \qquad /\sqrt{} \\ \underline{\underline{u}} &\underline{\underline{= \sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Dospěli jsme tedy k závěru, že pro velikost úhlopříčky jednotkového čtverce platí $u = \sqrt{2}$ v příslušných jednotkách délky. Nutno dále podotknout, že pokud bychom odmocnili obě strany rovnice ještě před dosazením $a = 1$, získali bychom obecně známý vzorec $u = a.\sqrt{2}$ pro výpočet velikosti úhlopříčky jakéhokoliv čtverce, který je vyučován již na základních školách.

2.1 BABYLONSKÁ MATEMATIKA A $\sqrt{2}$

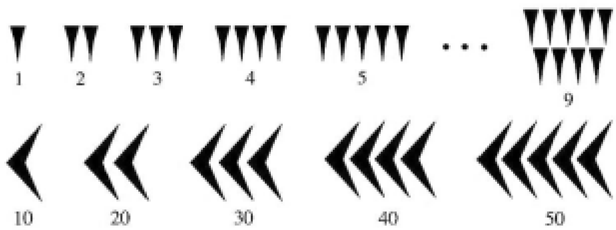
Nejstarší zmínky o $\sqrt{2}$ pocházejí asi z 18. nebo 17. století před naším letopočtem od Babyloňanů. [4] Babylonský národ byl velmi vyspělý a na svou dobu měl vysokou úroveň matematických znalostí, které byly vždy aplikovány na konkrétní úlohy. Babyloňané uměli počítat obsahy rovinných útvarů, čehož využívali k určování výměr pozemků, zvládali vypočítat přesný objem krychle, kvádru, hranolu a válce. Objemy složitějších těles, kterými jsou například komolý kužel nebo klín, ovšem počítali pouze přibližně. V aritmetice uměli Babyloňané sčítat konečné aritmetické a geometrické posloupnosti, řešili soustavy lineárních rovnic a zvládli vypočítat dokonce některé typy kvadratických i kubických rovnic. Veškeré své výpočty prováděli Babyloňané v šedesátkové soustavě a poznatky zaznamenávali na hliněné tabulky. [24]

Hliněná tabulka se současným označením YBC7289 udávající babylonskou hodnotu $\sqrt{2}$ v šedesátkové soustavě pochází z již zmíněného 18. nebo 17. století před naším letopočtem a dnes je součástí sbírky Yaleovy univerzity v New Havenu. [4]

Obrázek 2 - HLINĚNÁ TABULKA YBC7289

2.1.1 BABYLONSKÝ ČÍSELNÝ SYSTÉM

Při pohledu na tabulku YBC7289 (obrázek 2) je jasné, že před samotným určením babylonské hodnoty $\sqrt{2}$ bylo nutné pochopit celý babylonský číselný systém. Již bylo řečeno, že Babyloňané využívali pro své výpočty šedesátkovou soustavu. Zápisy pak prováděli klínovým písmem.



Obrázek 3 - BABYLONSKÝ ČÍSELNÝ SYSTÉM

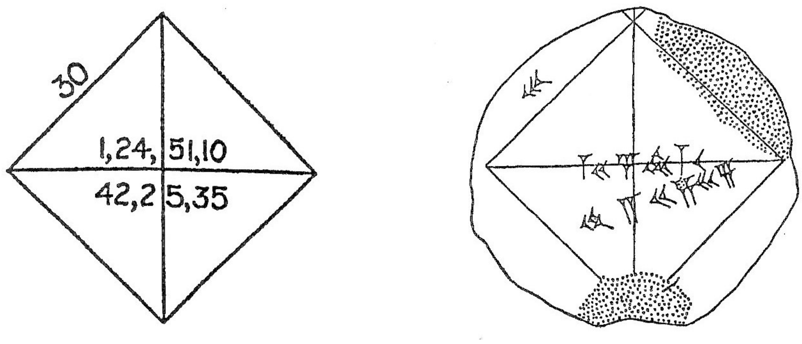
Na obrázku 3 je zachycen babylonský číselný systém. Vidíme zde rozdílný symbol pro jednotky a desítky. Jejich kombinací pak Babyloňané mohli získat jakoukoliv číslici v rozmezí 1 – 59. Pomocí těchto kombinací pak mohli zapsat libovolnou hodnotu. Konkrétní příklad zápisu hodnoty pomocí babylonského číselného systému je uveden na obrázku 4. Aby bylo možné zápis realizovat, je nutné v prvním kroku převést požadovanou hodnotu z desítkové do šedesátkové soustavy.

$1534 = 25 \cdot 60^1 + 34 \cdot 60^0 =$ 

Obrázek 4 - PŘÍKLAD ZÁPISU HODNOTY POMOCÍ BABYLONSKÉ SYMBOLIKY

2.1.2 BABYLONSKÁ HODNOTA $\sqrt{2}$

Vrátíme-li se k hliněné tabulce YBC7289 (obrázek 2), jsme již schopni díky předchozí kapitole dešifrovat její sdělení.



Obrázek 5 - PŘEPIS TABULKY YBC7289

Tabulka uvádí babylonskou hodnotu $\sqrt{2}$ v šedesátkové soustavě ve tvaru $(1;24,51,10)$. Tento zápis pro nás ovšem není nijak srozumitelný, musíme tedy provést převod z šedesátkové do desítkové soustavy:

$$\sqrt{2} \approx \frac{1}{60^0} + \frac{24}{60^1} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{2}{5} + \frac{17}{1200} + \frac{1}{21600}$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41421\overline{296}$$

Po přepočtu do desítkové soustavy zjišťujeme, že babylonská aproximace hodnoty $\sqrt{2}$ byla velmi přesná, protože tuto hodnotu určili správně na pět desetinných míst (zvýrazněny červenou barvou). [4]

Při určování hodnoty $\sqrt{2}$ vycházeli Babyloňané pravděpodobně z posloupnosti definované volbou počáteční hodnoty a_0 a rekurentním vztahem:

$$a_{t+1} = \frac{1}{2}\left(a_t + \frac{2}{a_t}\right) \qquad \text{pro každé } t \geq 0$$

[4]

V případě výpočtu limity této posloupnosti bychom zjistili, že je rovna právě hodnotě $\sqrt{2}$, což vyplývá z následujících tří tvrzení:

I. Pro každé $a_t > 0, a_t \neq \sqrt{2}$, je $a_{t+1} > \sqrt{2}$. Je-li $a_t = \sqrt{2}$, je $a_{t+1} = \sqrt{2}$.

II. Je-li $a_t > \sqrt{2}$, je $\sqrt{2} < a_{t+1} < a_t$. Proto existuje limita posloupnosti $\{a_t\}_{t=0}^{\infty}$ a je $\lim_{t\to\infty} a_t \geq \sqrt{2}$.

III. Je-li $a_t > \sqrt{2}$, je $a_{t+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a_t - \sqrt{2}\right)$. Proto je $\lim_{t\to\infty} a_t \leq \sqrt{2}$.

[4]

Závěrem kapitoly o babylonské hodnotě $\sqrt{2}$ je nutné podotknout, že babylonští matematici neměli k dispozici dnešní matematický aparát ani počítačový software, který by jim práci usnadnil. I přes to však dosáhli velmi přesného určení hodnoty $\sqrt{2}$.

2.2 HINDSKÁ HODNOTA $\sqrt{2}$

Hindská hodnota $\sqrt{2}$ pochází přibližně z období kolem roku 800 před naším letopočtem a ve svém díle Sulbasútra ji popsal matematik Baudhayana. Nejednalo se ovšem o matematika ve smyslu, jak ho chápeme dnes. Baudhayana byl s největší pravděpodobností védský kněz a matematikou se zabýval pouze z důvodu jejího využití pro náboženské účely. [22]

Hodnotu $\sqrt{2}$ definuje Baudhayana následovně:

Zvětši jednotku délky o její třetinu, a tu o její čtvrtinu bez čtyřiatřicetiny této čtvrtiny.

[19]

Pokud budeme postupovat přesně podle výše uvedených instrukcí, můžeme snadno určit Baudhayanovu hodnotu $\sqrt{2}$ (červeně jsou zvýrazněny správně vypočtené cifry).

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \left[\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{3.4} \cdot \frac{1}{34} \right) \right]$$

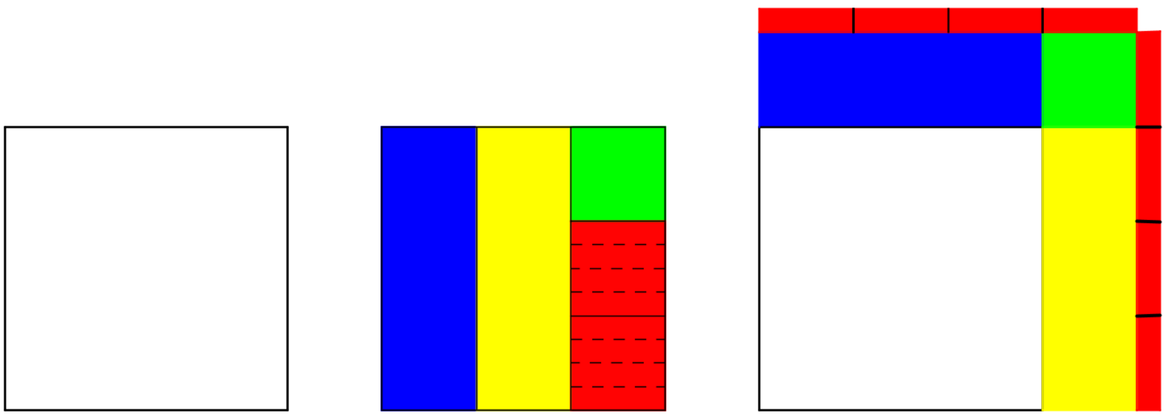
$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{408}$$

$$\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$$

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41421\overline{56862745098039}$$

Vidíme, že Budhayana určil pomocí svého vzorce hodnotu $\sqrt{2}$ správně na pět desetinných míst a jedná se tedy o stejnou přesnost, se kterou ji určili babylonští matematici.

Původ této aproximace hodnoty $\sqrt{2}$ bychom hledali v hindské architektuře. S největší pravděpodobností byla totiž objevena při záměru hindských architektů postavit čtvercový oltář, který by byl stejný jako již jeden postavený, ale měl by dvojnásobný obsah. Plánem bylo nejprve vyrobit dvě stejné čtvercové desky, které měly stejné rozměry jako již postavený oltář, a následným řezáním jedné z nich a přikládáním odřezků k druhé získat oltář s požadovanou velikostí – plochou. [22]

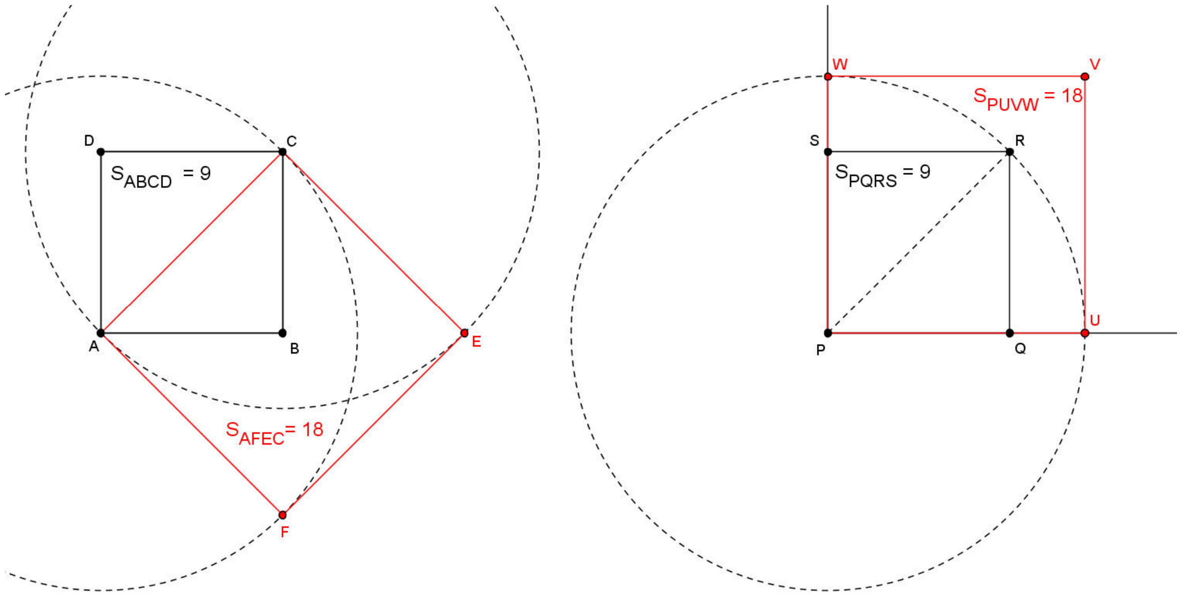


Obrázek 6 - KONSTRUKCE ČTVERCOVÉHO OLTÁŘE S DVOJNÁSOBNOU VELIKOSTÍ

Na obrázku 6 vidíme, jakým způsobem hindští architekti postupovali. Nejprve rozdělili jeden ze čtverců na třetiny a dvě z nich přiložili k druhému čtverci (modrý a žlutý pruh). Zbývající část rozdělili opět na třetiny a jednu (zelený čtverec) přiložili do vzniklého prostoru k vrcholu celého čtverce. Obě zbývající třetiny rozdělili na čtvrtiny a přiložili je k nově vzniklému, většímu čtverci (červené proužky). Tím byly použity všechny části původního čtverce, ale útvar, který vznikl, není úplný čtverec – chybí doplnit malý čtvereček do pravého horního rohu. Budhayana se touto problematikou zabýval a snažil se najít způsob, jak získat ze čtverce takové části, které by po přiložení utvořily celý čtverec o dvojnásobném obsahu. Právě při řešení tohoto problému objevil hindskou aproximaci hodnoty $\sqrt{2}$. [22]

2.2.1 KONSTRUKCE ČTVERCE S DVOJNÁSOBNÝM OBSAHEM

Hindský problém se stavbou oltáře je vlastně obdoba dnes již velmi známé konstrukční úlohy, jejímž úkolem je sestrojit k zadanému čtverci čtverec s dvojnásobným obsahem. Konstrukci samotnou lze provést několika způsoby, dva z nich jsou zachyceny na obrázku 7.



Obrázek 7 - KONSTRUKCE ČTVERCE O DVOJNÁSOBNÉM OBSAHU

Vidíme, že délka strany čtverce s dvojnásobným obsahem je rovna velikosti úhlopříčky původního čtverce. Již dříve bylo řečeno, že velikost úhlopříčky čtverce vypočítáme pomocí vzorce $u = a.\sqrt{2}$. Hodnota $\sqrt{2}$ tedy přímo zasahuje do velikosti obsahu většího čtverce, což byl důvod, kvůli kterému hindským architektům vznikl při stavbě oltáře neúplný čtverec s chybějícím rohem.

Pokud bychom chtěli ověřit tvrzení, že délka strany čtverce s dvojnásobným obsahem je rovna velikosti úhlopříčky čtverce původního, vyjdeme z obecného vzorce pro výpočet obsahu čtverce, $S = a.a = a^2$. Podle Pythagorovy věty platí pro úhlopříčku v takovém čtverci, že $u^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Dosadíme-li úhlopříčku u za stranu do vzorce pro výpočet obsahu čtverce, získáme vztah $S = u.u = u^2 = 2a^2$. Vidíme, že dosazením úhlopříčky u čtverce o straně a jsme získali čtverec s dvojnásobným obsahem, což koresponduje s konstrukcemi na obrázku 7.

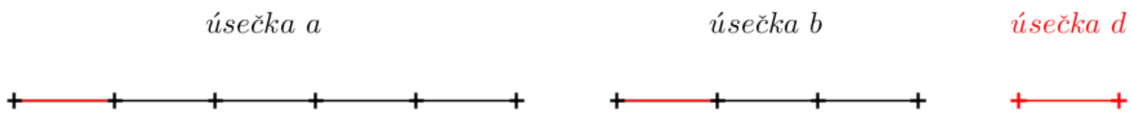
2.3 $\sqrt{2}$ VE STAROVĚKÉM ŘECKU

Matematika, fyzika a další vědy se v Řecku začínají rozvíjet kolem roku 800 před naším letopočtem. [24] Z tohoto období známe celou řadu významných filosofů a matematiků, kteří položili základy matematiky coby moderní vědy. Nejstarším takovým známým filosofem je zakladatel tzv. Milétské školy, Thales z Milétu. Žil pravděpodobně v období 625 – 545 před naším letopočtem a byl mimo jiné také velmi zdatným obchodníkem a astronomem. V matematice se zabýval řadou problémů, ale jeho nejznámějším odkazem je pravděpodobně tzv. Thaletova věta, resp. Thaletova kružnice. Na jeho dílo navázali Anaximandros a Anaximédes. Z dalších významných matematiků tohoto období bychom mohli jmenovat například Pythagora ze Samu (pravděpodobně 570 – 500 před naším letopočtem) a jeho Pythagorovu větu popisující vztah odvěsen a přepony v pravoúhlém trojúhelníku, Zenona z Eley (490 – 430 před naším letopočtem) zabývajícího se otázkou nekonečna, nebo Eukleida (asi 325 – 260 př. n. l.), který sepsal rozsáhlé dílo Stoicheia (česky Základy) zabývající se geometrií. [16]

2.3.1 OBJEV NESOUMĚŘITELNOSTI A $\sqrt{2}$

O řecké matematice nelze říci, že by se intenzivně zabývala hledáním přesné číselné hodnoty $\sqrt{2}$, nicméně i přes to tato konstanta výrazně ovlivnila celou řeckou matematiku. $\sqrt{2}$ je totiž úzce spjata s problematikou nesouměřitelnosti, kvůli které došlo k celkovému přechodu od aritmetiky ke geometrii v řecké matematice. Tento odklon se označuje jako „první krize matematiky".

Matematici ve starověkém Řecku pracovali při výpočtech pouze s kladnými racionálními čísly, které bylo možné znázorňovat jako délky úseček. Dále pak měli představu, že každé dvě takové úsečky jsou souměřitelné – lze pro ně nalézt určitou společnou míru, tj. třetí úsečku, kterou lze beze zbytku nanést na obě dané úsečky. Situace je zobrazena na obrázku 8. [16]



Obrázek 8 - SPOLEČNÁ MÍRA

Na obrázku 8 jsou vyobrazeny úsečky a, b a jejich společná míra, tj. úsečka d. Pokud budeme stejnými písmeny označovat název i velikost úseček a, b a písmeny p (resp. q) označíme počet úseček d „naskládaných“ do úsečky a (resp. b), je zřejmé, že platí:

$$\begin{aligned} a &= p.d \\ b &= q.d \end{aligned}$$

Z toho lze vyvodit:

$$\frac{a}{b} = \frac{p.d}{q.d} = \frac{p}{q},$$

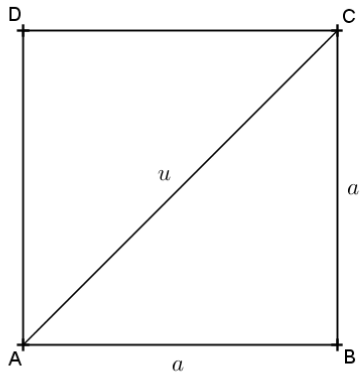
kdy v konkrétním případě na obrázku 8 je $p = 5$ a $q = 3$. „Úseček d“, tedy společných měr dvou daných úseček, můžeme sestrojit nekonečně mnoho. Pokud totiž mají dvě úsečky a, b společnou míru d, pak je jejich společnou mírou také každá úsečka daná předpisem $d_n = \frac{d}{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pokud bychom v krajním případě zvolili za jednotku délky velikost úsečky b, pak by pro velikost úsečky a platilo:

$$a = \frac{a}{b}.b = \frac{p}{q},$$

kde čísla $p, q \in \mathbb{N}$. Právě díky tomuto poznatku víme, že Řekové znali pouze kladná racionální čísla. [16]

V práci bylo ovšem již dříve uvedeno, že $\sqrt{2}$ je číslo iracionální a právě iracionalita této hodnoty je úzce spjata s problematikou nesouměřitelnosti. Na tento problém narazili Pythagorejci, kteří při svém bádání objevili dvojice úseček, které neměly žádnou společnou míru – byly nesouměřitelné. Jednalo se například o stranu a úhlopříčku čtverce nebo úhlopříčku a stranu pravidelného pětiúhelníku. Tento objev znamenal pro řecké matematiky zhroucení původních pythagorejských představ o vzájemném vztahu čísel a geometrických veličin. [16]

My se nyní zaměříme na nesouměřitelnost strany a úhlopříčky čtverce. Tuto nesouměřitelnost dokázal údajně jako první pythagorejec Hippasus z Metapontu. Pověsti vypráví, že byl později svržen z lodě do moře a utopen. Ovšem různé verze se rozcházejí v tom, zda to bylo kvůli utajení tohoto objevu nebo kvůli tomu, že tento objev nesouměřitelnosti vyzradil. Zvolme si nyní čtverec $ABCD$ se stranou a a úhlopříčkou u (obrázek 9).



Obrázek 9 - ČTVEREC ABCD

Předpokládejme, že strana a a úhlopříčka u jsou souměřitelné úsečky. Dále zvolme za jednotku délky jejich největší společnou míru. Musí tedy platit, že čísla $a = |AB| = |BC|$ a $u = |AC|$ jsou přirozená a nesoudělná. Pro trojúhelník ABC platí na základě Pythagorovy věty, že $u^2 = a^2 + a^2$, což lze upravit na rovnost $u^2 = 2a^2$. Víme, že každé číslo dělitelné dvěma je sudé a tudíž z této rovnosti vyplývá, že musí být nutně i číslo u^2 sudé. Dále platí, že výsledek součinu dvou sudých čísel je opět číslo sudé. Vzhledem k tomu, že pro hodnotu u^2 platí $u^2 = u.u$, musí být nutně i číslo u sudé. Pokud nyní zvolíme $u = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$, a dosadíme, získáme následující vztah:

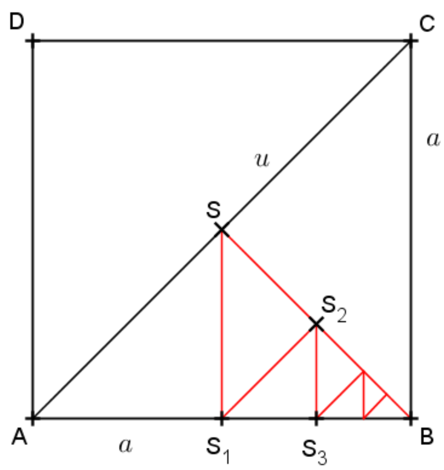
$$(2k)^2 = 2a^2$$
$$4k^2 = 2a^2 \qquad /:2$$
$$\boxed{2k^2 = a^2}$$

Číslo a^2 musí být tedy nutně sudé a analogicky jako výše; číslo a je také sudé. To je ovšem spor s požadavkem na nesoudělnost čísel a a u. Úsečky a a u, tj. strana a úhlopříčka čtverce $ABCD$, nemají společnou míru – jsou nesouměřitelné. [16]

Pro nás samozřejmě není výše uvedený závěr žádným překvapením a na otázku, zda jsou nebo nejsou strana a úhlopříčka čtverce souměřitelné, bychom dokázali odpovědět takřka okamžitě. Ovšem dnes již známe celý obor reálných čísel, nejsou pro nás překvapením čísla iracionální a máme určitou představu o číselné hodnotě $\sqrt{2}$. Pro matematiky ve starověkém Řecku musel být ovšem tento objev šokující, zvláště pokud si uvědomíme, že se při výpočtech pohybovali pouze na oboru $\mathbb{Q}^+$.

2.3.2 METODA NEKONEČNÉHO SESTUPU V DŮKAZU NESOUMĚŘITELNOSTI

V předcházející kapitole jsme se seznámili s problematikou nesouměřitelnosti a provedli jsme důkaz, který potvrzuje nesouměřitelnost strany a úhlopříčky čtverce. Nyní provedeme důkaz tohoto tvrzení pomocí metody nekonečného sestupu. Předpokládejme, že strana a a úhlopříčka u čtverce $ABCD$ jsou souměřitelné úsečky. Libovolnou společnou míru těchto úseček volíme za jednotku délky. Platí tedy, že $a, u \in \mathbb{N}$. Na základě Pythagorovy věty pak pro trojúhelník ABC platí, že $u^2 = 2a^2$, z čehož vyplývá, že číslo u je sudé. Nyní sestrojíme výšku na stranu b trojúhelníka ABC, tzn. na úhlopříčku u čtverce $ABCD$ (obrázek 10). Tato výška rozděluje trojúhelník ABC na dva rovnoramenné, pravoúhlé trojúhelníky o stejném obsahu - ABS, BSC.



Obrázek 10 - METODA NEKONEČNÉHO SESTUPU VE ČTVERCI

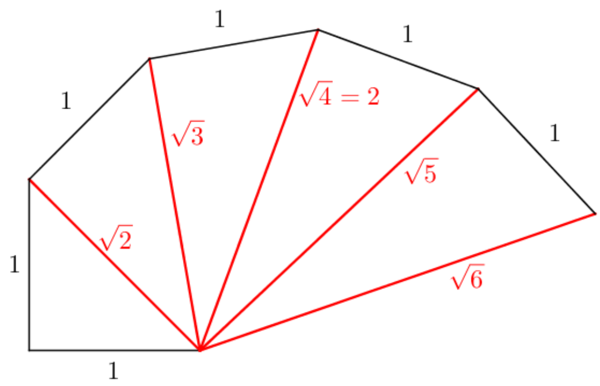
Délky přepony a kterékoliv odvěsny kteréhokoliv z těchto trojúhelníků jsou opět přirozená čísla. Vezmeme-li například trojúhelník ABS, pak $a = |AB|$ a $|AS| = |BS| = \frac{u}{2}$, což nepředstavuje žádný problém, protože u je sudé číslo. Analogicky pak postupujeme dále a nalézáme trojúhelníky SS_1S_2, S_1S_2B a postupně další. Délky stran všech takto nalezených trojúhelníků jsou vždy hodnoty z oboru přirozených čísel. Mohli bychom tedy takto postupovat, půlit trojúhelníky, do nekonečna a vždy bychom získali nové trojúhelníky, jejichž délky stran budou přirozená čísla. To však není možné, protože pro jakékoliv číslo $n \in \mathbb{N}$ platí, že jeho zmenšováním nám může vzniknout nejvýše $n-1$ přirozených čísel. Jedná se o čísla $n-1, n-2, ..., 2, 1$. Tudíž jsme znovu ukázali, že strana čtverce a a úhlopříčka u jsou nesouměřitelné úsečky. [16]

2.3.3 PRVNÍ KRIZE MATEMATIKY A JEJÍ DŮSLEDKY

Po objevu existence nesouměřitelnosti došlo k úplnému zhroucení aritmetického pojetí matematiky, se kterým přišla pythagorejská škola. Ukázalo se totiž, že k vybudování geometrie nestačí pouze přirozená čísla a jejich poměry. V práci již bylo řečeno, že tato situace se označuje jako „první krize matematiky“. Krize z důvodu, že s objevem nesouměřitelnosti došlo opravdu k celkovému otřesu základů tehdejší matematiky a matematici se museli s tímto problémem vypořádat. [3]

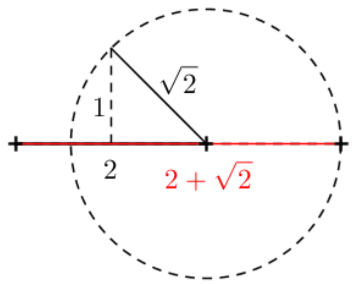
Řešení našli řečtí matematici v přechodu od aritmetického ke geometrickému pojetí matematiky a vznikem tzv. řecké geometrické algebry. Základní aritmetické matematické veličiny, přirozená čísla, nahradily geometrické veličiny – délky, obsahy, objemy. S těmito veličinami pak řečtí matematici pracovali stejně jako dříve s veličinami aritmetickými. Bylo zřejmé, že sčítání bylo možné pouze pro veličiny stejného rozměru, tzn. délky s délkami, obsahy s obsahy a objemy s objemy. Při násobení vznikl součinem dvou délek obsah, součinem obsahu s délkou objem…atp. Pochopitelně bychom mohli i dále rozebírat celou řeckou geometrickou algebru. To však není předmětem této práce. Proto poslední poznámkou k řecké geometrické algebře je, že souhrn všech pravidel pro operace s geometrickými veličinami se označuje jako zákon homogenity. [3]

Než ovšem definitivně opustíme „první krizi matematiky“ a řeckou matematiku, podíváme se na jeden z důsledků této krize, který úzce souvisí i se školskou matematikou. Žáci na základních a středních školách mohou mít za úkol konstrukci některé z druhých odmocnin. Ať už se jedná o hodnotu $\sqrt{2}$ nebo jinou - $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6},\ldots$ Obdobným problémem se zabýval i řecký matematik Theodoros z Kyrény v 5. stol. před naším letopočtem. Jedním z důsledků „první krize matematiky“ totiž bylo, že se začaly zkoumat iracionality a právě Theodoros z Kyrény údajně dokázal iracionalitu čísel typu $\sqrt{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, a to až po hodnotu $\sqrt{17}$. Jejich konstrukci prováděl dle obrázku 11 a stejně by postupovali i žáci na školách při řešení zadaného úkolu. [16]



Obrázek 11 - KONSTRUKCE ODMOCNIN

Výhodou geometrické konstrukce odmocnin oproti jejich číselnému určování je, že je můžeme sestrojovat „přesně“. Pokud bychom například přesně chtěli určit součet $2+\sqrt{2}$, nejsme schopni číselně tento problém vyřešit. $\sqrt{2}$ je číslo iracionální a má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj. Jazykem řeckým matematiků bychom řekli, že číslo $\sqrt{2}$ je nesouměřitelné s číslem 2. Geometrickou konstrukcí je ovšem řešení snadné. [18]



Obrázek 12 – SOUČET 2 + $\sqrt{2}$

Vedle uvedeného objevu Theodora z Kyrény se iracionalitami zabývali také Archytás (žijící pravděpodobně v rozmezí 428 – 365 př. n. l.), který ukázal, že každá hodnota $\sqrt{n(n+1)}$ pro $n \in \mathbb{N}$ je iracionální, a Theaitétos (pravděpodobně 414 – 369 př. n. l.), který provedl klasifikaci iracionalit. [16]

2.4 NOVODOBÉ VZORCE A VÝPOČTY

Číselnou hodnotou $\sqrt{2}$ nebo případně jejím znázorněním se samozřejmě nezabývali pouze v dávné minulosti, ale zkoumali ji i matematici novověku. Jedním z nich byl například Isaac Newton.

Sir Isaac Newton žil v letech 1643 – 1727 a jedná se o významného anglického fyzika, matematika, astronoma, alchymistu a teologa. Jeho život lze rozdělit do tří zcela odlišných období. Prvním z nich je nepříliš šťastné dětství. Isaac Newton se narodil do poměrně bohaté farmářské rodiny, ale nikdy nepoznal svého otce, protože zemřel v říjnu roku 1642. Druhé, velmi produktivní období Newtonova života lze vymezit roky 1669 – 1687, kdy působil jako lukasiánský profesor matematiky na univerzitě v Cambridge. Třetím obdobím Newtonova života bylo jeho působení na vysoce placené pozici vládního úředníka s malým zájmem o matematický výzkum. [22]

Z hlediska aproximace čísla $\sqrt{2}$ nalezl Newton několik rekurentně zadaných posloupností, které k této hodnotě poměrně rychle konvergují. První z nich je ve tvaru:

$$x_0 = 1, \quad x_k = \frac{x_{k-1}}{2} + \frac{1}{x_{k-1}} \qquad \text{pro } k \geq 1$$

Limita této rekurentně zadané posloupnosti je $\sqrt{2}$, v dnešním zápisu $\lim_{k \to \infty} x_k = \sqrt{2}$.

Dalším rekurentním vztahem, který Newton objevil, lze získat převrácenou hodnotu čísla $\sqrt{2}$, tedy hodnotu $\frac{1}{\sqrt{2}}$, kdy platí:

$$y_0 = \frac{1}{2}, \qquad y_k = y_{k-1}\left(\frac{3}{2} - y_{k-1}^2\right) \quad \text{pro } k \geq 1$$

Pro limitu posloupnosti $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ platí $\lim_{k\to\infty} y_k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Platnost tohoto i předcházejícího tvrzení si ověříme později pomocí matematického softwaru Mathematica. Nyní se zaměříme na další možné aproximace čísla $\sqrt{2}$. [11]

Vedle uvedených posloupností objevil Isaac Newton také dvě zajímavé řady, které opět rychle konvergují k hodnotám $\sqrt{2}$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tvar mají následující:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(2n-1)}\binom{2n}{n}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}-+...=\sqrt{2}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}+-...=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Díky objevům Isaaca Newtona dnes máme několik možností, jak vyjádřit hodnotu $\sqrt{2}$, případně hodnotu převrácenou. Než postoupíme k další kapitole a demonstraci rychlosti konvergence jednotlivých aproximací čísla $\sqrt{2}$, podíváme se ještě na několik dalších zajímavých vyjádření této hodnoty.

Následující vyjádření využívají principu nekonečného součinu a jeho konvergence. Pokud si stručně připomeneme matematickou teorii, máme-li nekonečnou posloupnost $a_1, a_2, a_3, ...$, pak nekonečný součin zapisujeme ve tvaru $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 . a_2 . a_3 . ...$ Tento nekonečný součin je pak roven limitě částečných součinů $a_1 . a_2 . a_3 .... a_n$, kde n roste k nekonečnu. Pokud tato limita existuje a je nenulová, hovoříme o konvergenci součinu a jeho hodnota je rovna hodnotě limity. V opačném případě je součin divergentní. [5]

Pokud se vrátíme k aproximaci hodnoty $\sqrt{2}$, máme k dispozici dva nekonečné součiny, které opět konvergují k hodnotám $\sqrt{2}$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}$, stejně jako výše uvedené řady objevené Newtonem. Jsou v následujícím tvaru:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right)=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)...=\sqrt{2}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4(2n-1)^2}\right)=\frac{1.3}{2.2}.\frac{5.7}{6.6}.\frac{9.11}{10.10}.\frac{13.15}{14.14}...=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Poslední vyjádření, které v této kapitole zmíníme, využívá řetězového zlomku pro přibližování se k hodnotě $1+\sqrt{2}$, kdy platí:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}=1+\sqrt{2}$$

Tento vztah úzce souvisí s tzv. Pellovou posloupností. Jedná se o posloupnost, jejímž autorem je anglický matematik John Pell a má tvar:

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_n=2a_{n-1}+a_{n-2} \qquad \text{pro } n\geq 2,$$

kdy pomocí limity zapíšeme $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\sqrt{2}$, což je stejná hodnota, kterou získáme pomocí výše uvedeného řetězového zlomku. [11]

2.5 VÝPOČET ČÍSELNÉ HODNOTY $\sqrt{2}$ V PROGRAMU MATHEMATICA

V této kapitole se budeme zabývat určením číselné hodnoty $\sqrt{2}$ pomocí programu Mathematica 8.0 s využitím předcházejících posloupností a řad. Demonstrujeme rychlost konvergence jednotlivých aproximací čísla $\sqrt{2}$ a můžeme tak provést i určité srovnání jednotlivých vztahů. Před samotným určováním je vždy zařazen nezbytný úvod, v rámci kterého budou shrnuty a vysvětleny příkazy, které budou při hledání hodnoty čísla $\sqrt{2}$ využívány.

V úvodu této kapitoly je také nutné připomenout, že v případě potřeby přesné hodnoty čísla $\sqrt{2}$ nemusíme postupovat tak, jak bude prováděno dále. Pro běžné potřeby by nám pravděpodobně stačila hodnota, kterou nám vypočítá každý kalkulátor. Jedná se o hodnotu $\sqrt{2}\approx 1,414213562$. Pokud bychom potřebovali hodnotu $\sqrt{2}$ s vyšší přesností, můžeme pak přímo využít matematického softwaru Mathematica. Pro výpočet odmocniny bychom využili příkaz **Sqrt[*výraz*]**, který nám určuje druhou odmocninu daného výrazu. Dále bychom využili příkazu **N[*výraz, počet číslic*]**, pomocí kterého bychom získali číselné vyjádření požadované odmocniny. Nutno zde upozornit, že „počet číslic“ nepředstavuje v příkazu počet desetinných míst, ale celkový počet číslic před i za desetinnou čárkou. Pokud bychom tedy chtěli určit číselné hodnoty výrazů $\sqrt{2}$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ na 50 desetinných míst, bude situace vypadat následovně:

```
In[5]:=  N[Sqrt[2], 51]
Out[5]=  1.41421356237309504880168872420969807856967187537695

In[6]:=  N[1 / Sqrt[2], 51]
Out[6]=  0.707106781186547524400844362104849039284835937688474
```

Obrázek 13 - URČENÍ ČÍSELNÝCH HODNOT $\sqrt{2}$ A $\frac{1}{\sqrt{2}}$ NA 50 DESETINNÝCH MÍST

Hodnoty uvedené na obrázku 13 se nám budou hodit pro pozdější srovnání efektivity výpočtu hodnoty $\sqrt{2}$ (příp. $\frac{1}{\sqrt{2}}$) různými způsoby.

2.5.1 NEWTONOVY POSLOUPNOSTI A ŘADY

Již bylo uvedeno, že Isaac Newton objevil celkem čtyři postupy, pomocí kterých lze určit hodnotu čísla $\sqrt{2}$ (resp. $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Efektivitu, tj. rychlost konvergence, těchto postupů nyní otestujeme pomocí programu Matematica.

Při práci s rekurentně zadanými posloupnostmi využijeme příkaz **RecurrenceTable**, který vypočte jednotlivé členy posloupnosti a vypíše je. Z hlediska složitosti a různých modifikací příkazu; konkrétní syntaxi je možné dohledat přímo v programu v „Documentation Center“. Pro číselné vyjádření je využitý příkaz **N[*výraz, počet číslic*]** a pro celkovou přehlednost příkaz **TableForm[*list*]**, který jednotlivé členy posloupnosti vypíše do řádků pod sebe. Pro větší přehlednost bylo při výpočtech v programu Mathematica zachováno stejné značení jako je v původních posloupnostech. Nyní tedy určíme členy posloupnosti, která je ve tvaru:

$$x_0 = 1, \quad x_k = \frac{x_{k-1}}{2} + \frac{1}{x_{k-1}} \qquad \text{pro } k \geq 1$$

Tato posloupnost by měla konvergovat k hodnotě $\sqrt{2}$. Nyní vypočteme prvních pět členů této posloupnosti s přesností na 30 desetinných míst (obrázek 14).

```
In[1]:= TableForm[
          N[RecurrenceTable[{x[k] == (x[k - 1] / 2) + (1 / x[k - 1]), x[0] == 1}, x, {k, 1, 5}], 31]]

Out[1]//TableForm=
        1.500000000000000000000000000000
        1.416666666666666666666666666667
        1.414215686274509803921568627451
        1.414213562374689910626295578890
        1.414213562373095048801689623503
```

Obrázek 14 - VÝPOČET HODNOTY $\sqrt{2}$ POMOCÍ NEWTONOVY POSLOUPNOSTI

Pokud se podíváme na vypočtené hodnoty, zjišťujeme, že u prvního členu posloupnosti nezískáme ani jedno správně vypočtené desetinné místo. Následně se ovšem přesnost zvyšuje a vezmeme-li člen x_5 a zvýrazníme červeně správně vypočtené cifry, zjišťujeme, že hodnota čísla $\sqrt{2}$ je správně určena na 23 desetinných míst:

$$x_5 = 1{,}414213562373095048801689623502$$

Pokud bychom pokračovali dále, přesnost by se stále zvyšovala a jen u členu x_6 by došlo ke zpřesnění o 24 správně určených desetinných míst.

Nyní budeme pracovat s druhou z Newtonových posloupností, která je ve tvaru:

$$y_0 = \frac{1}{2}, \qquad y_k = y_{k-1}\left(\frac{3}{2} - y_{k-1}^2\right) \quad \text{pro}\, k \geq 1$$

Tato posloupnost konverguje k hodnotě $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Opět si vypočteme prvních pět členů této posloupnosti s přesností na 30 desetinných míst (obrázek 15) a porovnáme se skutečnou hodnotou výrazu $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

```
In[3]:= TableForm[
          N[RecurrenceTable[{y[k] == y[k - 1] * (3 / 2 - (y[k - 1]) ^2), y[0] == 1 / 2}, y, {k, 1, 5}], 31]]

Out[3]//TableForm=
        0.6250000000000000000000000000000
        0.6933593750000000000000000000000
        0.7067084684967994689941406250000
        0.7071064444695907075511730676593 2
        0.7071067811863073359254359312377
```

Obrázek 15 - VÝPOČET HODNOTY $\frac{1}{\sqrt{2}}$ POMOCÍ NEWTONOVY POSLOUPNOSTI

Je zřejmé, že tato posloupnost konverguje k hodnotě $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pomaleji, než předcházející posloupnost k $\sqrt{2}$. Až člen y_3 je vypočtený správně alespoň na dvě desetinná místa. Vezmeme-li člen y_5 a stejně jako dříve zvýrazníme správně vypočtené cifry, získáváme hodnotu výrazu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ určenou správně na 12 desetinných míst:

$$y_5 = 0,707106781186307335925435931237 7$$

Pokud bychom se opět zabývali členem y_6, přesnost by se zvětšila o dalších 12 správně vypočtených desetinných míst. Pokud bychom tedy chtěli přesně určit hodnotu čísla $\sqrt{2}$, pravděpodobně bychom volili první z uvedených posloupností – rychlost konvergence je zde vyšší a navíc získáváme přímo číselnou hodnotu $\sqrt{2}$.

Nyní se budeme zabývat konvergentními řadami, které Newton objevil. Při práci s řadami v programu Mathematica využijeme příkazu **Sum[***f, {i, i*$_{max}$**}]**, který nám vypočítá hodnotu $\sum_{i=1}^{i_{\max}} f$. Pro zadání kombinačního čísla je nutné použít příkaz **Binomial[***m, n***]**, který v řeči matematiky představuje kombinační číslo $\binom{m}{n}$. Pokud budeme pracovat s první z Newtonových řad ve tvaru $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(2n-1)}\binom{2n}{n} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}-+\ldots=\sqrt{2}$, tak přepis v programu Mathematica pro prvních pět členů by vypadal následovně:

```
In[2]:=
    1 + Sum[(((-1)^(n - 1)) / ((2^(2 n)) * (2 n - 1))) * Binomial[2 n, n], {n, 1, 5}]
```

Obrázek 16 - NEWTONOVA KONVERGUJÍCÍ ŘADA V PROGRAMU MATHEMATICA

Nyní budeme postupně provádět sčítání určitého počtu členů. Počet sečtených členů je označen k a červeně jsou zvýrazněny správně vypočtené cifry čísla $\sqrt{2}$:

$k = 1$: 1,5
$k = 5$: 1,42578125
$k = 20$: 1,4126671859885391...
$k = 100$: 1,4140730477177160388524...
$k = 1000$: 1,41420910373663926785655470 26...

Vidíme, že rychlost konvergence k hodnotě $\sqrt{2}$ není příliš vysoká a i při sečtení 1000 členů této řady získáme správně vypočtená pouze čtyři desetinná místa, což je horší přesnost než se kterou pracovali například Babyloňané.

Rychlost konvergence k převrácené hodnotě $\sqrt{2}$ u druhé z Newtonových řad je ovšem ještě nižší. Řada $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}+-...=\frac{1}{\sqrt{2}}$ má pro součet prvních pěti členů v programu Mathematica tvar:

```
In[5]:=
        1 + Sum[(((-1)^n) / (2^(2 n))) * Binomial[2 n, n], {n, 1, 5}]
```

Obrázek 17 - DRUHÁ NEWTONOVA KONVERGUJÍCÍ ŘADA V PROGRAMU MATHEMATICA

Opět provedeme sčítání určitého počtu členů a budeme si jako dříve zapisovat výsledky:

$$
\begin{array}{ll}
k=1: & 0,5 \\
k=10: & 0,793064117431640625 \\
k=100: & 0,735210763363486230 54... \\
k=1000: & 0,716024057441246794293 39... \\
k=10000: & 0,709927623321604622450752526...
\end{array}
$$

Vidíme, že i při sečtení 10 000 členů získáváme hodnotu výrazu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ správně určenou pouze na dvě desetinná místa. Pokud bychom tedy zhodnotili všechny uvedené postupy, které nám Newton dal k dispozici, pro přesné číselné určení hodnoty $\sqrt{2}$ je z nich nejlepší využít první z uvedených posloupností, protože má poměrně vysokou rychlost konvergence.

2.5.2 VÝPOČET POMOCÍ NEKONEČNÝCH SOUČINŮ

V předcházející kapitole jsme zhodnotili efektivitu Newtonových vzorců při hledání číselné hodnoty čísla $\sqrt{2}$ pomocí matematického softwaru Mathematica. Obdobně nyní otestujeme i další výrazy aproximující hodnotu $\sqrt{2}$ - nekonečné součiny uvedené v kapitole 2.4.

Pokud pracujeme s nekonečnými součiny v programu Mathematica, využíváme příkazu **Product[***f, {i, i*$_{max}$*}***]**. Jedná se tedy o podobnou syntaxi jako při práci s řadami. Zde nám příkaz představuje operaci $\prod_{i=1}^{i_{\max}} f$.

Budeme-li pracovat s prvním z dříve uvedených nekonečných součinů ve tvaru:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right)=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)...=\sqrt{2}\,,$$

pak pro součin prvních čtyř činitelů vypadá zápis v programu Mathematica následovně:

```
In[17]:= Product[1 + (((-1)^(n + 1)) / (2 n - 1)), {n, 1, 4}]
```

Obrázek 18 - NEKONEČNÝ SOUČIN KONVERGUJÍCÍ K HODNOTĚ $\sqrt{2}$ V PROGRAMU MATHEMATICA

Pokud počet činitelů v součinu označíme k a správně vypočtené cifry zvýrazníme červeně, získáváme následující výsledky:

$k=10:$	1,396696183...
$k=100:$	1,41244695130...
$k=1000:$	1,4140367967774...
$k=10000:$	1,414195884814101...
$k=100000:$	1,41421179460724698...

Vidíme, že rychlost konvergence tohoto součinu není nijak vysoká a pro správné určení hodnoty $\sqrt{2}$ na pět desetinných míst musíme mít k dispozici 100 000 činitelů. Obdobnou, i když trochu vyšší, rychlost konvergence má druhý z uvedených nekonečných součinů, který konverguje k hodnotě $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a má tvar:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4(2n-1)^2}\right)=\frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{5.7}{6.6}\cdot\frac{9.11}{10.10}\cdot\frac{13.15}{14.14}...=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Zápis v programu Mathematica pro součin prvních čtyř činitelů pak vypadá následovně:

```
In[47]:= Product [1 - (1 / (4 * (2 n - 1)^2)), {n, 1, 4}]
```

Obrázek 19 - NEKONEČNÝ SOUČIN KONVERGUJÍCÍ K HODNOTĚ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ V PROGRAMU MATHEMATICA

Provedeme výpočty a stejně jako dříve vypíšeme výsledky se zvýrazněním správně vypočtených číslic výrazu $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$
\begin{array}{ll}
k=1: & 0,75 \\
k=10: & 0,71153... \\
k=100: & 0,7075488... \\
k=1000: & 0,707150976... \\
k=10000: & 0,70711120061... \\
k=100000: & 0,7071072231284...
\end{array}
$$

Zhodnotíme-li výsledky, zjišťujeme, že už pro $k=1$ získáváme jedno správně vypočtené desetinné místo. Rychlost konvergence je poté vyšší než u předcházejícího nekonečného součinu, ale pro hodnotu $k=100000$ získáváme opět pouze pět správně určených desetinných míst převrácené hodnoty čísla $\sqrt{2}$.

2.5.3 VYUŽITÍ ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU

Řetězové zlomky mohou být vhodným prostředkem pro aproximaci iracionálních čísel. S řetězovým zlomkem konvergujícím k hodnotě $1+\sqrt{2}$ jsme se již setkali. Než však budeme zkoumat rychlost konvergence k této hodnotě, podíváme se na možnosti, které nám dává software Mathematica při rozkladu jakéhokoliv čísla na řetězový zlomek.

Pokud bychom hledali řetězový zlomek pomocí softwaru Mathematica, využijeme příkazu **ContinuedFraction[***výraz, počet členů***]**. Pokud bychom hledali řetězový zlomek pro číslo $\sqrt{2}$, mohla by situace vypadat následovně:

```
In[6]:= ContinuedFraction[Sqrt[2], 4]
Out[6]= {1, 2, 2, 2}
```

Obrázek 20 - HLEDÁNÍ ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU PRO ČÍSLO $\sqrt{2}$

Nyní musíme výsledek, který nám program poskytnul, správně interpretovat. Víme, že každý řetězový zlomek má tvar:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\dots}}}} \qquad [15]$$

A právě za členy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dosazujeme postupně hodnoty, které nám vypočetl program Mathematica. Řetězový zlomek pro číslo $\sqrt{2}$ by pak vypadal následovně:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} \approx \sqrt{2}$$

Pro číselnou hodnotu tohoto zlomku by pak platilo, že $\sqrt{2} \approx 1{,}41\overline{6}$. Získali jsme tedy aproximaci čísla $\sqrt{2}$ se dvěma správně vypočtenými desetinnými místy.

Pokud se vrátíme k řetězovému zlomku z kapitoly 2.4, má platit:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}} = 1+\sqrt{2}$$

Platnost si můžeme ověřit pomocí výše uvedené příkazu v programu Mathematica (obrázek 21).

```
In[1]:= ContinuedFraction[1 + Sqrt[2], 4]
Out[1]= {2, 2, 2, 2}
```

Obrázek 21 - OVĚŘENÍ ŘETĚZOVÉ ZLOMKU PRO VÝRAZ 1 + $\sqrt{2}$

Nyní si určíme číselnou hodnotu výrazu a porovnáme ji s výsledky, které nám poskytnou řetězové zlomky. Platí, že $1+\sqrt{2} = 2{,}4142135623730950488016887\ldots$

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} = 2{,}41\overline{6}$$

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}} = 2{,}41421568\ldots$$

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}}}}} = 2{,}41421356242\ldots$$

Vidíme, že hodnota řetězového zlomku se postupně blíží k číselné hodnotě výrazu $1+\sqrt{2}$. V případě čtyř členů posloupnosti a_0, a_1, a_2, a_3 jsme určili hodnotu správně na dvě desetinná místa. Zdvojnásobení počtu členů posloupnosti pak vždy přibližně představovalo zdvojnásobení počtu správně vypočtených desetinných míst.

2.6 NĚKOLIK DŮKAZŮ IRACIONALITY $\sqrt{2}$

O iracionalitě čísla $\sqrt{2}$ jsme se již několikrát přesvědčili a některé z možných důkazů byly i provedeny – například v kapitole 2.3. V této kapitole se zaměříme na několik dalších možných důkazů, pomocí kterých lze ukázat, že se $\sqrt{2}$ opravdu řadí mezi čísla iracionální.

2.6.1 DŮKAZ POMOCÍ NEJMENŠÍHO CELÉHO ČÍSLA

Předpokládejme, že $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Potom existuje takové kladné číslo $s \in \mathbb{Z}$, pro které platí, že i číslo $s\sqrt{2}$ je kladné celé číslo. Volme toto kladné číslo s nejmenší možné. Protože platí $1 < 2$, musí též platit, že $1 < \sqrt{2}$. Pokud tedy vezmeme nějaké číslo $t = s.\left(\sqrt{2}-1\right)$, pak musí být opět kladným celým číslem. Tedy i hodnota $t\sqrt{2} = s.\left(\sqrt{2}-1\right).\sqrt{2} = 2s - s\sqrt{2}$ je celým číslem a je zřejmé, že pro hodnoty s, t platí $t < s$. To je ovšem spor s předpokladem, že $s \in \mathbb{Z}$ je nejmenší možné kladné číslo. [11]

2.6.2 ANALYTICKÝ DŮKAZ

Před důkazem samotným musíme nejprve dokázat následující lemma.

Lemma: Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ a $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$. Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N} : \left|\alpha q_n - p_n\right| \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\alpha q_n - p_n\right| = 0$. Potom je α iracionální číslo.

Důkaz: Předpokládejme, že $\alpha = \frac{a}{b}$, kde $a, b \in \mathbb{N}^+$. Pro dostatečně velké n pak platí:

$$0 < \left|\alpha q_n - p_n\right| < \frac{1}{b}$$

Provedeme úpravy:

$$0 < \left|\frac{aq_n}{b} - p_n\right| < \frac{1}{b}$$

$$0 < \left|aq_n - bp_n\right| < 1$$

Hodnota $aq_n - bp_n$ by měla být přirozeným číslem, což ovšem není možné. Číslo α je tedy iracionální. Nyní pomocí tohoto dokázaného lemmatu a matematické indukce ukážeme, že i číslo $\sqrt{2}$ je iracionální. [10]

Nechť $p_1 = q_1 = 1$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí, že $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2$ a $q_{n+1} = 2p_nq_n$. Potom pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí vztah:

$$0 < \left|\sqrt{2}q_n - p_n\right| < \frac{1}{2^{2^{n-1}}}$$

Aplikujeme matematickou indukci a upravíme výraz pro $n = 1$:

$$0 < \left|\sqrt{2}q_1 - p_1\right| < \frac{1}{2}$$

Jestliže je výraz splněn pro hodnotu $n = 1$, musí být pravdivý i pro hodnotu $n + 1$:

$$\begin{aligned} 0 &< \left|\sqrt{2}q_n - p_n\right|^2 < \frac{1}{2^{2^n}} \\ 0 &< \left|\sqrt{2}\left(2p_nq_n\right) - \left(p_n^2 + 2q_n^2\right)\right|^2 < \frac{1}{2^{2^n}} \\ 0 &< \left|\sqrt{2}q_{n+1} - p_{n+1}\right| < \frac{1}{2^{2^n}} \end{aligned}$$

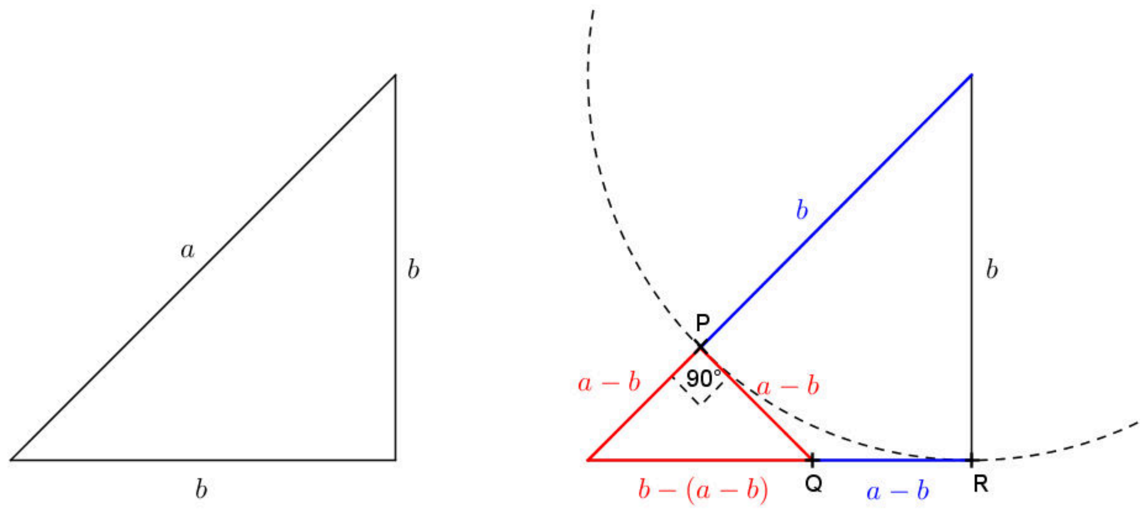
Pokud na poslední řádek aplikujeme dokázané lemma, vyplývá z něj, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. [10]

2.6.3 GEOMETRICKÝ DŮKAZ

Předpokládejme platnost tvrzení $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, kdy $a, b \in \mathbb{Z}$, přičemž platí, že $D(a,b) = 1$.

Potom jsme schopni sestrojit rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami o velikosti b a přeponou o délce a (obrázek 22). [17] Možnost této konstrukce si můžeme ověřit pomocí Pythagorovy věty a vyjádřením přepony tohoto trojúhelníka:

$$a^2 = b^2 + b^2 = 2b^2 \Rightarrow a = b\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$



Obrázek 22 - GEOMETRICKÝ DŮKAZ IRACIONALITY ČÍSLA $\sqrt{2}$

Pokud v sestrojeném trojúhelníku nyní naneseme velikost odvěsny b na přeponu a, jak je provedeno na obrázku 22, získáme bod P, který nám přeponu rozděluje na úseky o velikostech $b, a-b$. Je zřejmé, že hodnota $a-b \in \mathbb{Z}$. Nyní v bodě P sestrojíme kolmici na přeponu a a průsečík této kolmice s odvěsnou b označíme Q. Je evidentní, že body P, R jsou osově souměrné podle osy procházející bodem Q a protilehlým vrcholem trojúhelníku. Musí tedy platit $|QR| = a-b$ (v obrázku 22 modře) a pro velikosti stran menšího pravoúhlého trojúhelníku (v obrázku 22 červeně) platí, že obě odvěsny mají délku $a-b$ a přepona $b-(a-b) = 2b-a$. I zde musí platit, že $2b-a \in \mathbb{Z}$. [17]

Vyjdeme-li nyní z podobnosti trojúhelníků, musí pro poměry stran platit:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{(2b-a)}{(a-b)}$$

Je evidentní, že čitatel i jmenovatel druhého zlomku jsou menší čísla, což je spor s předpokladem, protože čísla a, b měla být nesoudělná a zlomek $\frac{a}{b}$ měl již být v základním tvaru. To znamená, že číslo $\sqrt{2}$ nemůže být racionální. [17]

Výše provedený důkaz je typickým příkladem propojení dvou oblastí matematiky. Na jedné straně máme čistě číselný teoretický problém a na straně druhé máme geometrické řešení pomocí podobnosti trojúhelníků. Vyřešením geometrického problému pak získáváme i řešení problému původního. Tato metoda je často využívána i v dalších odvětvích matematiky a lze ji často provádět i mezi věcmi zdánlivě nesouvisejícími. [17]

2.7 REKORDY VE VÝPOČTECH ČÍSELNÉ HODNOTY $\sqrt{2}$

Z hlediska „závodu“ ve zpřesňování hodnot iracionálních čísel a „lovení“ dalších správně vypočtených desetinných míst je určitě nejznámější číslo π, které dnes známe na více než 13.10^{12} desetinných míst. [29] Stejně tak se někteří matematici a informatici zabývali i zpřesňováním hodnoty čísla $\sqrt{2}$. Samozřejmě výpočty dnes již nikdo neprovádí ručně a využívá se, zpravidla speciálně upravená, výpočetní technika. Držitel aktuálního rekordu a jeho předchůdce, počet vypočtených desetinných míst (v desítkové soustavě), výpočetní čas a použité přístroje následují v tabulce níže.

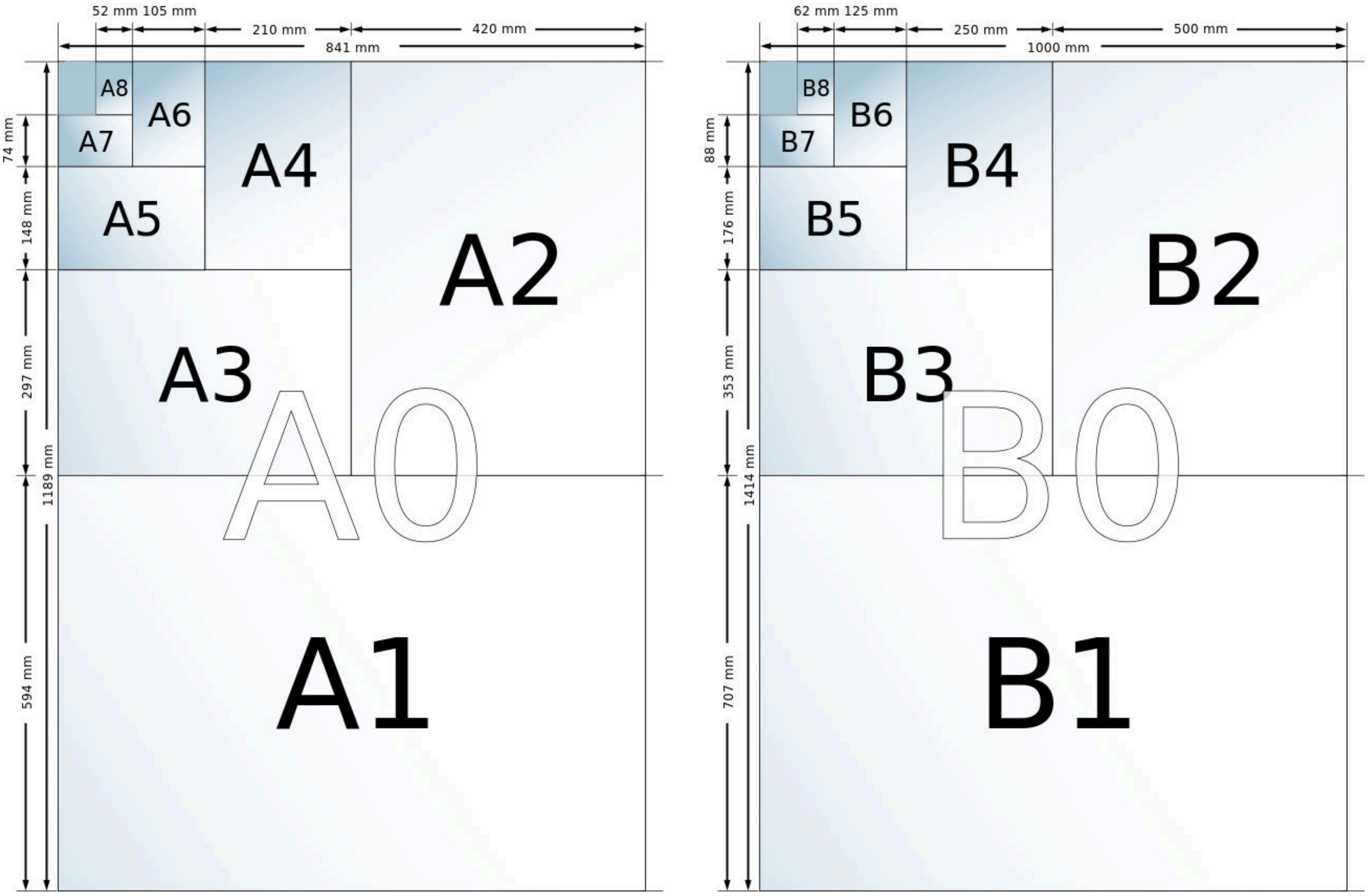
Tabulka 1 - REKORDY VE VÝPOČTU SPRÁVNĚ VYPOČTENÝCH DESETINNÝCH MÍST ČÍSLA $\sqrt{2}$

DATUM	DRŽITEL REKORDU	POČET DES. MÍST	VÝPOČETNÍ ČAS	POČÍTAČ
9. 2. 2012	Alexander Yee	2 000 000 000 050	**výpočet:** 110 hod. **ověření:** 119 hod.	**"Nagisa"** 2 x Intel Xeon X5482 @ 3.2 GHz 64 GB DDR2 FB-DIMM @ 800 MHz 64 GB SSD (Boot) + 2 TB (Data) 8 x 2 TB (Swap) **"Hina"** Intel Core i7 2600K @ 4.4 GHz 16 GB DDR3 @ 1333 MHz 1.5 TB (Boot) 5 x 1 TB + 5 x 2 TB (Swap)
22. 3. 2010	Shigeru Kondo	1 000 000 000 000	**výpočet:** 193 hod. **ověření:** 98 hod.	Core i7 975 @ 4 GHz - 12 GB 8 x 1 TB HDs 2 x Xeon W5590 - 144 GB 16 x 2 TB HDs

2.8 VYUŽITÍ $\sqrt{2}$ V BĚŽNÉM ŽIVOTĚ

Závěrem kapitoly o $\sqrt{2}$ se zaměříme na využití této hodnoty v běžném životě. Již bylo zmíněno a ukázáno, že tato hodnota má své místo ve školské matematice, například při výpočtu velikosti úhlopříčky čtverce. Někdo by ovšem mohl namítnout, že se o „běžný život“ nejedná. „S číslem $\sqrt{2}$ “ se však denně setkává snad každý člověk při práci s jakýmkoliv tištěným dokumentem. Poměry velikostí stran u běžně používaných formátů papíru jsou totiž právě $1:\sqrt{2}$. Tento poměr je často označování jako „brána harmonie“ a úzce souvisí se zlatým řezem, kterému je věnována následující kapitola.

Zaměříme-li se na velikosti listů papírů a poměry délek jejich stran, standardně využíváme řady A, B a C. Řada A je definována základním formátem A_0 a plochou o velikosti 1 m^2 a poměrem velikostí stran právě $1:\sqrt{2}$. Délky stran se pak zaokrouhlují na celé milimetry. Další formáty (A_1, A_2, A_3, A_4,…) získáme vždy půlením delší strany. Řada B je definována základním formátem B_0 a délkou kratší strany papíru 1 m. Poměr velikostí stran je pak opět $1:\sqrt{2}$, čili formát B_0 má plochu o velikosti $1,4142$ m^2. Délky stran se opět zaokrouhlují na celé milimetry. Řada C je pak dána geometrickými průměry příslušných formátů z řad A a B. Jednotlivé formáty z řad A a B a jejich velikosti v milimetrech jsou uvedeny na obrázku 23. [6]



Obrázek 23 - VELIKOSTI STANDARDNÍCH FORMÁTŮ PAPÍRŮ ŘAD A, B

3 ZLATÝ ŘEZ, φ

Zlatý řez, někdy též božský poměr, značíme řeckým písmenem φ, které zavedl počátkem 20. století americký matematik Mark Barr, a jedná se o jednu z významných a pozoruhodných matematických konstant, která výrazně přesahuje hranice matematiky. Její existence je známá velmi dlouhou dobu - údajně ji využívali již Egypťané při stavbě pyramid. Nejstarší písemná zmínka o zlatém řezu pak pochází od Eukleida (asi 325 – 260 př. n. l.), který ve svém díle Základy požaduje rozdělení dané úsečky na dvě nestejné části takovým způsobem, aby čtverec sestrojený nad větší z částí měl stejný obsah jako pravoúhelník, jehož jedna strana má délku menší z částí a druhá má délku celé úsečky. Řešením této úlohy je rozdělení dané úsečky právě v poměru zlatého řezu. Pokud bychom chtěli uvést konkrétní příklad výskytu zlatého řezu, mohli bychom například v architektuře zmínit půdorys apsidy katedrály sv. Víta v Praze, která má tvar poloviny pravidelného desetiúhelníku. [13], [14]

Dalším dokladem o významnosti této konstanty může být citát z 1. dílu sebraných spisů německého astronoma Johannese Keplera (1571 – 1630):

„Geometrie má dva poklady. Jeden z nich je Pythagorova věta a druhý zlatý řez. První má cenu zlata, druhý připomíná spíše drahocenný kámen.“

[13]

Smutným faktem ovšem je, že zatímco Pythagorova věta je nedílnou součástí matematiky na základních i středních školách, zlatý řez je pro žáky a možná i některé učitele neznámým pojmem. A to i přes to, že se vedle matematiky a výše zmíněné architektury objevuje například i v chemii, botanice, zoologii nebo krystalografii. [13]

Pokud bychom chtěli před samotnou definicí demonstrovat zlatý řez na konkrétním příkladu, mohli bychom vycházet z otázky:

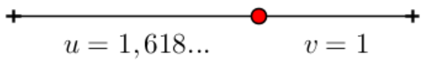
„Jakým způsobem byste rozdělili úsečku na dvě části, aby to lahodilo vašim očím?“

Pravděpodobně by nastaly dvě (resp. tři) situace, které jsou znázorněny červeně na obrázku 24.

Obrázek 24 - RŮZNÁ ROZDĚLENÍ ÚSEČKY NA DVĚ ČÁSTI

Někteří lidé by umístili bod do středu a rozdělili tak úsečku na dvě stejné části. Někdo jiný by naopak umístil bod přibližně do první nebo třetí čtvrtiny úsečky. Správná odpověď na uvedenou otázku pochopitelně neexistuje - jedná se o subjektivní cítění. Nicméně umístění dělícího bodu blíže krajním bodům úsečky odpovídá představě o „krásnu“, kterou měli starověcí Řekové, a estetici v této souvislosti hovoří o principu „dynamické symetrie“. [11]

Vezměme si nyní třetí z případů umístnění bodu, tj. bod ve třetí čtvrtině úsečky. V případě, že by nastala situace znázorněná na obrázku 25, kdy kratší ze vzdáleností umístěného bodu a krajního bodu úsečky by byla $v=1$ a delší $u=1,618...$, hovoříme o rozdělení úsečky v poměru zlatého řezu. [11]



Obrázek 25 - ROZDĚLENÍ ÚSEČKY V POMĚRU ZLATÉHO ŘEZU

Důvod právě takového rozdělení je následující. Vezmeme-li délku u, pak velikost celé úsečky nám představuje součet $u+v$. Pro části úsečky u,v pak platí:

$$\frac{u}{u+v}=\frac{v}{u}$$

Položíme-li $\varphi=\frac{u}{v}$, pozorujeme:

$$\varphi=\frac{u}{v}=\frac{u+v}{u}=1+\frac{v}{u}=1+\frac{1}{\varphi}$$

Řešením kvadratické rovnice ve tvaru $\varphi^2-\varphi-1=0$ pak získáme hodnotu zlatého řezu:

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,6180339887...$$

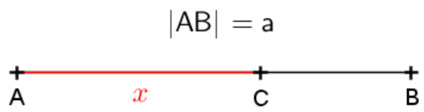
[11]

3.1 DEFINICE ZLATÉHO ŘEZU

O bodu C řekneme, že dělí danou úsečku AB v poměru zlatého řezu, pokud pro délky uvažovaných úseček platí vztah:

$$|AB|:|AC| = |AC|:|CB|,$$

tedy poměr délek celé úsečky její delší části je roven poměru délek její delší a kratší části. [24]



Obrázek 26 - DEFINICE ZLATÉHO ŘEZU

Pokud si označíme velikosti stejně jako na obrázku 26, tzn. $|AB| = a$, $|AC| = x$, získáme úměru ve tvaru:

$$a : x = x : (a - x)$$

Vyjádříme-li si tuto úměru pomocí zlomků a provedeme několik úprav, získáme kvadratickou rovnici s parametrem a:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{(a-x)} \qquad /.x(a-x)$$

$$a(a-x) = x^2$$

$$\boxed{x^2 + ax - a^2 = 0}$$

Pokud tuto rovnice vyřešíme, získáme řešení ve tvaru:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} a}$$

Je evidentní, že kořen $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$ je kladný, zatímco $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}a$ záporný. Hodnotu φ pak představuje převrácená hodnota kladného řešení, tedy $\varphi = \frac{1}{x_1}$, což bylo předvedeno již v úvodu kapitoly. Při uvažování jednotkové délky $a = 1$ pak získáváme hodnotu, kterou jsme již vypočetli dříve, tedy:

$$\varphi = \frac{1}{x_1} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} = \frac{2\left(-1-\sqrt{5}\right)}{-4}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618}$$

3.2 ČÍSELNÉ VLASTNOSTI ZLATÉHO ŘEZU

Je zřejmé, že zlatý řez není možné vyjádřit jako podíl dvou celých čísel, tudíž se jedná o číslo iracionální. Tento fakt lze okamžitě určit při pohledu na výsledný zlomek, ve kterém se vyskytuje $\sqrt{5}$. Pokud bychom se i přesto pokusili určit hodnotu číselných výrazů ve výsledcích; hodnota kladného kořene x_1 v případě volby $a = 1$ je rovna $x_1 = 0,618033988749895...$ a hodnota $\varphi = 1,61803398874989...$ Z povahy zlomku $\varphi = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{0,61803...}$, který určuje zlatý řez, se často hovoří o zlatém řezu dokonce jako o čísle „nejiracionálnějším", protože se svým zlomkem nejvíce odlišuje od ostatních iracionálních čísel. [24]

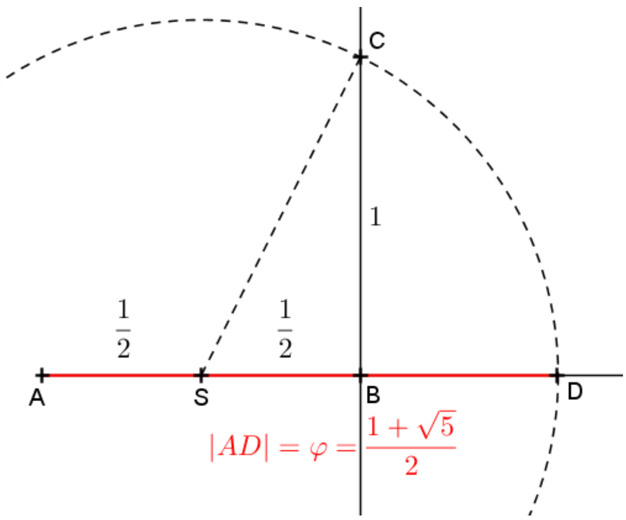
Pokud bychom zkoumali transcendenci zlatého řezu, je na základě dříve uvedeného odvození evidentní, že se o transcendentní číslo nejedná. Již v úvodu této kapitoly byla uvedena kvadratická rovnice $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, jejímž řešením je právě hodnota φ, zlatý řez.

3.3 GEOMETRICKÉ KONSTRUKCE ZLATÉHO ŘEZU

V předcházející kapitole jsme se zabývali odvozením a vymezením zlatého řezu, včetně přibližného určení číselné hodnoty φ. Pochopitelně v minulosti neměli matematici k dispozici dnešní matematický aparát a většina řešení se prováděla pouze geometricky, pomocí konstrukce. V této kapitole provedeme některé možné konstrukce zlatého řezu, které též úzce souvisí s běžně vyučovanými konstrukcemi na základních a středních školách. Konkrétně můžeme zmínit například konstrukci pravidelného pětiúhelníku.

3.3.1 KONSTRUKCE ÚSEČKY DÉLKY φ

Při konstrukci úsečky o velikosti φ (obrázek 27) postupujeme v několika krocích. Nejprve sestrojíme úsečku o jednotkové délce AB a její střed S. Následně vztyčíme kolmici v bodě B a na ní sestrojíme bod C, pro který platí $|AB| = |BC| = 1$. Poté sestrojíme kružnici $k(S;|SC|)$. V průsečíku kružnice k s polopřímkou AB vznikne bod D, pro který platí $|AD| = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. [13]



Obrázek 27 - KONSTRUKCE ÚSEČKY O VELIKOSTI φ

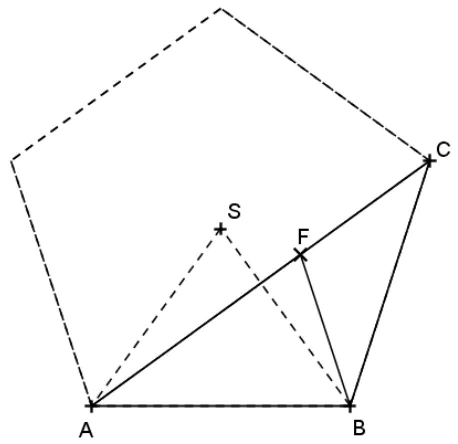
3.3.2 KONSTRUKCE PRAVIDELNÉHO PĚTIÚHELNÍKU

Výše uvedená konstrukce úsečky o velikosti φ by mohla být známá i žákům na základních a středních školách, protože se jedná o začátek konstrukce pravidelného pětiúhelníku při znalosti velikosti jeho strany. Do souvislosti nám dává tyto konstrukce následující věta:

Věta: Strana a_5 pravidelného pětiúhelníku je větším dílem úhlopříčky u tohoto pětiúhelníku rozdělené zlatým řezem, tj. $a_5 : u = (u - a_5) : a_5$. [13]

Důkaz: Při důkazu využijeme podobnosti dvou trojúhelníků - ABC, BFC, kde trojúhelník ABC je částí pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ a bod F je bodem úhlopříčky

$u = AC$, pro který platí $a_5 = AB \cong AF$. Situace je znázorněna na obrázku 28. Bod S zde představuje střed kružnice opsané pětiúhelníku $ABCDE$.



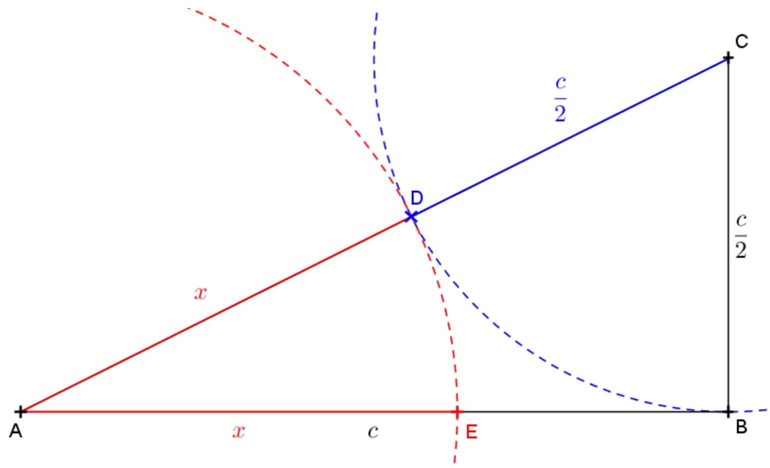
Obrázek 28 - DŮKAZ VĚTY O ÚHLOPŘÍČCE PĚTIÚHELNÍKU

Jelikož platí $|\measuredangle ABC| = 2|\measuredangle ABS| = 2.\frac{1}{2}\left(180° - \frac{360°}{5}\right) = 108°$ a trojúhelník ABC je rovnoramenný, platí pro velikosti úhlů $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle BCA| = 36°$. Vzhledem k postupu konstrukce je trojúhelník ABF rovnoramenný a pro jeho vnitřní úhly platí, že $|\measuredangle ABF| = |\measuredangle BFA| = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$. Dále tedy musí platit, že $|\measuredangle FBC| = \frac{1}{2}(180° - 72°) = 36°$. To ovšem znamená, že $\measuredangle FBC \cong \measuredangle BCF$ a rovněž trojúhelník BCF je rovnoramenný. Trojúhelníky ABC a BCF jsou podobné na základě věty uu a proto platí: $AB : AC = CF : BC$, tj. $a_5 : u = (u - a_5) : a_5$, čímž jsme větu dokázali. [13]

Pokud bychom na základě výše dokázané věty chtěli provést konstrukci pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ při znalosti velikosti jeho strany AB, stačí pouze sestrojit úsečku $u = \varphi.AB$ dle obrázku 27 a následně sestrojit trojúhelník ABC, kde $|AB| = |BC|$ a $u = |AC|$, jako na obrázku 28. Zbývající vrcholy D, E tohoto pravidelného pětiúhelníku leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC (pětiúhelník je sestrojen na obrázku 28). [13]

3.3.3 KONSTRUKCE ZLATÉHO ŘEZU V PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU

Konstrukce zlatého řezu v pravoúhlém trojúhelníku je založena na užití Pythagorovy věty. Postupujeme opět v několika krocích. Nejprve sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou b a odvěsnami o velikostech c a $\frac{c}{2}$. V dalším kroku sestrojíme kružnici se středem ve vrcholu C a poloměrem $\frac{c}{2}$. V průsečíku s přeponou b vznikne bod D. Označíme $|AD| = x$ a sestrojíme kružnici se středem v bodě A a poloměrem x. V průsečíku s odvěsnou c sestrojíme bod E. Následně platí, že $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AB|}{|AE|}$.



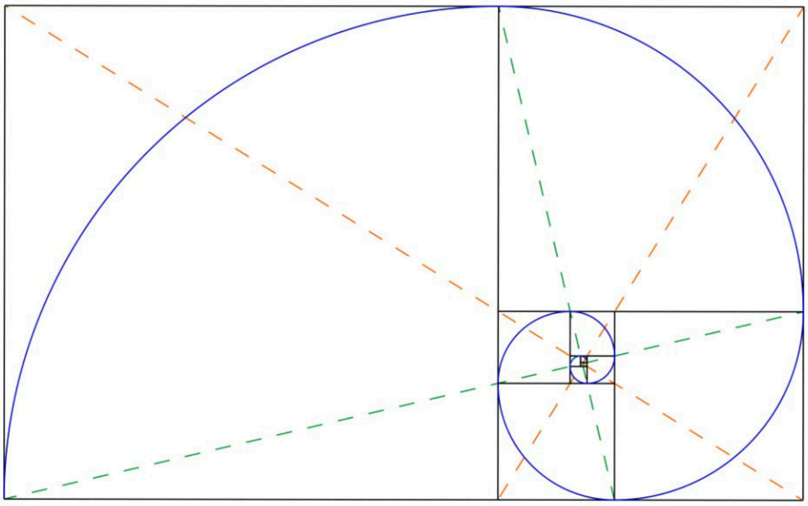
Obrázek 29 - ZLATÝ ŘEZ V PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU

3.3.4 ZLATÝ OBDÉLNÍK A LOGARITMICKÁ SPIRÁLA

Zlatý obdélník a logaritmická spirála jsou dvě zajímavosti spojené s konstrukcí zlatého řezu. Zlatý obdélník je takový obdélník, který má poměr délky k jeho šířce roven zlatému řezu. Další zajímavostí je, že pokud od tohoto obdélníku oddělíme čtverec, získáme menší obdélník, který je opět zlatý (obrázek 30). Navíc poměr rozměrů původního a nově vzniklého obdélníku je opět roven zlatému řezu. Pokud bychom následně od nově získaných obdélníků oddělovali čtverce stejně jako v prvním případě, získávali bychom další malé zlaté obdélníky, jejichž rozměry oproti původnímu obdélníku budou φkrát menší. Všechny takto vzniklé obdélníky jsou si navzájem podobné. [24]

Logaritmickou spirálu pak získáme jako spojnici vrcholů rotujícího čtverce oddělovaného od zlatého obdélníka, které dělí jeho delší stranu ve zlatém řezu (obrázek 30).

Logaritmickou křivku lze popsat pomocí polárních souřadnic rovnicí $r = a.e^{b\varphi}$, kde $\varphi \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. [24]



Obrázek 30 - ZLATÝ OBDÉLNÍK A LOGARITMICKÁ SPIRÁLA

3.4 FIBONACCIHO POSLOUPNOST A HODNOTA φ

Se zlatým řezem a hodnotou čísla φ velmi úzce souvisí tzv. Fibonacciho posloupnost, jejímž autorem je italský matematik Leonardo Pisano Fibonacci (žil pravděpodobně v letech 1170 - 1250). I přes to, že se Fibonacci narodil v Itálii, byl vzdělávaný v severní Africe, kde jeho otec zastával pozici diplomata. Fibonacci se zabýval studiem matematiky a hodně cestoval se svým otcem. Díky tomu mohl poznávat výhody a nevýhody jiných matematických systémů používaných v zemích, které navštívili. V roce 1200 se Fibonacci vrací do Pisy a publikuje řadu významných děl. [22]

Fibonacciho posloupnost je definována následovně:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ \ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \text{pro n} \geq 2$$

Pro členy posloupnosti platí, že $f_0 = 0$, $f_1 = f_2 = 1$ a následně je každý další člen roven součtu dvou členů předchozích. Členy posloupnosti $0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$ obvykle označujeme jako Fibonacciho čísla. Pokud bychom nyní brali dvojice po sobě následujících členů Fibonacciho posloupnosti a určovali jejich poměr, zjistili bychom, že se postupně blížíme k hodnotě zlatého řezu. Pro Fibonacciho čísla totiž platí, že $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$. Platnost tohoto tvrzení a rychlost konvergence si později ověříme v programu Mathematica. [11]

3.4.1 KONVERGENTNÍ ŘADA VYUŽÍVAJÍCÍ FIBONACCIHO ČÍSEL

Přímou souvislost mezi Fibonacciho posloupností a zlatým řezem jsme si již ukázali. Určení poměru dvou po sobě jdoucích Fibonacciho čísel ovšem není jediný způsob, jak lze aproximovat hodnotu φ s využitím této posloupnosti. Dalším způsobem může být nekonečná řada konvergující k hodnotě $4-\varphi$, u které se Fibonacciho čísla vyskytují ve jmenovatelích zlomků. Řada má tvar:

$$4-\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{f_{2^n}}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_4}+\frac{1}{f_8}+\ldots$$

[11]

3.5 DALŠÍ ZPŮSOBY APROXIMACE HODNOTY φ

Již jsme se seznámili s několika možnosti, jak aproximovat hodnotu φ a následně určit její přibližnou číselnou hodnotu. V této kapitole budou shrnuty další způsoby, pomocí kterých je možné hodnotu zlatého řezu určit. Vybrané formule pak budou zkoumány pomocí programu Mathematica.

3.5.1 VYUŽITÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

Určení hodnoty zlatého řezu pomocí goniometrických funkcí úzce souvisí s euklidovskou konstrukcí pravidelného pětiúhelníku, který máme vepsat zadané kružnici. Vzorce využívají funkcí sinus a kosinus:

$$\varphi=2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \qquad \sqrt{3-\varphi}=2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

[11]

3.5.2 NEKONEČNÁ ODMOCNINA

Zajímavé vyjádření zlatého řezu je pomocí druhé odmocniny ve tvaru:

$$\varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$$

Přidáváním dalších členů pak dochází ke zpřesňování hodnoty φ. [11]

3.5.3 HODNOTA $\boldsymbol{ln(\varphi)}$

Již jsme se setkali s případy, kdy hodnota φ nebyla samostatným členem na jedné straně rovnosti. Dalším takovým případem je níže uvedená řada, která konverguje dokonce k hodnotě $\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln(\varphi)$. Je zřejmé, že tato řada nebude ideálním prostředkem pro získání číselné hodnoty zlatého řezu. Využití by ovšem mohla najít ve chvíli, kdy by bylo třeba v rámci nějakého výpočtu znát číselnou hodnotu výrazu $\ln(\varphi)$ a samotná hodnota φ by nás přímo nezajímala. Platí:

$$\frac{2\sqrt{5}}{2}\ln(\varphi)=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}\right)+\ldots$$

[11]

3.5.4 ROGERSOVY - RAMANUJANOVY ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

Poslední existující formule obsahující hodnotu φ, které si uvedeme, jsou čtyři Rogersovy – Ramanujanovy řetězové zlomky. Leonard James Rogers (1862 – 1933) byl významný britský matematik, který jako první, v roce 1894, objevil a dokázal tzv. Rogersovy – Ramanujanovy identity vztahující se k základním hypergeometrickým řadám. Nezávisle na něm byly znovu objeveny kolem roku 1913 indickým matematikem Srinivasou Ramanujanem (1887 – 1920). Ten je však uváděl bez důkazu. Později začali Rogers s Ramanujanem spolupracovat a v roce 1919 zveřejnili nový důkaz těchto identit. [9], [11]

S problematikou výše uvedených identit úzce souvisí Rogersovy – Ramanujanovy řetězové zlomky, pomocí kterých lze určit číselnou hodnotu φ. Mají následující tvary:

$$I. \quad \frac{1}{\alpha-\varphi}e^{\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}=1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\cfrac{e^{-8\pi}}{1+\ldots}}}}, \qquad II. \quad \frac{1}{\beta-\varphi}e^{\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{5}}\right)}=1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-8\pi\sqrt{5}}}{1+\ldots}}}},$$

$$III.\quad \frac{1}{\kappa-(\varphi-1)}e^{\left(-\frac{\pi}{5}\right)}=1-\cfrac{e^{-\pi}}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1-\cfrac{e^{-3\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1\mp\ldots}}}},\quad IV.\quad \frac{1}{\lambda-(\varphi-1)}e^{\left(-\frac{\pi}{\sqrt{5}}\right)}=1-\cfrac{e^{-\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1-\cfrac{e^{-3\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1\mp\ldots}}}},$$

kde:

$$\alpha=\left(\varphi\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad \alpha'=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\varphi-1)\sqrt{5}\right)^{\frac{5}{2}},\qquad \beta=\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{\alpha'-1}},$$

$$\kappa=\left((\varphi-1)\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad \kappa'=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi\sqrt{5}\right)^{\frac{5}{2}},\qquad \lambda=\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{\kappa'-1}}.$$

[11]

3.6 VÝPOČET HODNOTY ZLATÉHO ŘEZU V PROGRAMU MATHEMATICA

V této kapitole se budeme věnovat výpočtům hodnoty zlatého řezu v programu Mathematica 8.0 s využitím dříve uvedených vztahů. V úvodu si hodnotu φ vypočteme pomocí vzorce z definice a následně budeme zkoumat efektivitu a rychlost konvergence vybraných formulí. Dále se pokusíme nalézt jednodušší řetězový zlomek pro aproximaci hodnoty φ než objevili Rogers s Ramanujanem a též zhodnotíme rychlost jeho konvergence. V případě nutnosti bude, jako již dříve, zařazeno obecné vysvětlení příkazů použitých při výpočtu.

Při výpočtu hodnoty zlatého řezu na 50 desetinných míst ze vzorce $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ získáváme výsledek:

```
In[20]:= N[(1 + Sqrt[5]) / 2, 51]
Out[20]= 1.61803398874989484820458683436563811772030917980576
```

Obrázek 31 - HODNOTA ZLATÉHO ŘEZU NA 50 DESETINNÝCH MÍST

3.6.1 VYUŽITÍ FIBONACCIHO ČÍSEL K URČENÍ ČÍSELNÉ HODNOTY φ

Souvislost Fibonacciho posloupnosti, resp. Fibonacciho čísel, se zlatým řezem byla již vysvětlena dříve. Nyní platnost těchto vztahů ověříme. Pokud chceme v programu

Mathematica určit n-tý člen Fibonacciho posloupnosti, tj. Fibonacciho číslo f_n, využijeme příkazu **Fibonacci[*n*]**.

V kapitole 3.4 bylo řečeno, že pokud určíme poměr dvou po sobě následujících Fibonacciho čísel, získáme jistou aproximaci zlatého řezu. Obecně pak platí, že $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\varphi$. Toto tvrzení lze snadno ověřit pomocí příkazu **Limit[*výraz, limita*]**:

```
In[1]:= Limit[Fibonacci[n + 1] / Fibonacci[n], n → Infinity]
```

Out[1]= $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$

Obrázek 32 - LIMITA UDÁVAJÍCÍ HODNOTU ZLATÉHO ŘEZU POMOCÍ FIBONACCIHO ČÍSEL

Vidíme, že limita je shodná s definicí zlatého řezu (obrázek 32), tudíž jsme potvrdili platnost tvrzení. Nyní se budeme zabývat rychlostí konvergence a určování poměrů vybraných dvou po sobě následujících Fibonacciho čísel. Pro přehlednost budeme opět červeně zvýrazňovat správně vypočtené cifry:

$$\frac{f_2}{f_1}=1$$

$$\frac{f_5}{f_4}=1,\overline{66}$$

$$\frac{f_{10}}{f_9}=1,617647\ldots$$

$$\frac{f_{20}}{f_{19}}=1,6180339631667\ldots$$

$$\frac{f_{40}}{f_{39}}=1,6180339887498947364\ldots$$

Zhodnoťme výsledky: pro podíl $\frac{f_2}{f_1}$ máme vypočtenou správně pouze cifru na pozici jednotek. Ovšem čím vyšší Fibonacciho čísla následně bereme, tím přesnější získáváme výsledky. Pro podíl $\frac{f_{40}}{f_{39}}$ získáváme hodnotu φ správně vypočtenou již na 15 desetinných míst. Jedná se tedy o metodu, kdy lze pomocí jednoduché operace získat přesný výsledek. Otázkou ovšem zůstává, kolik času by bylo třeba vynaložit k ručnímu určení těchto velkých Fibonacciho čísel, protože například $f_{40}=102334155$.

Dále se budeme zabývat konvergentní řadou ve tvaru $4-\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{f_{2^n}}$, která též k určení hodnoty zlatého řezu využívá Fibonacciho čísel. Pro usnadnění práce upravíme tuto řadu na tvar $\varphi=4-\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{f_{2^n}}$ a pro jednotlivá k získáváme tyto výsledky:

$$
\begin{aligned}
k &= 2: & & 1,6\overline{6} \\
k &= 5: & & 1,618033988749989\ldots \\
k &= 6: & & 1,618033988749894848204586834833\ldots
\end{aligned}
$$

Vidíme, že rychlost konvergence k hodnotě φ je vysoká a pokud bychom pokračovali dále, pro $k=10$ bychom získali hodnotu zlatého řezu již s přesností přesahující 420 správně vypočtených desetinných míst.

3.6.2 VYPOČTENÍ NEKONEČNÉ ODMOCNINY

Jedna ze zmíněných aproximací hodnoty φ byla ve tvaru $\varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$.

Výpočet v programu Mathematica je zde jednoduchý – opakovaně použijeme příkaz **Sqrt**. Při volbě různého počtu členů docházíme k následujícím výsledkům:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}=1,61184\ldots$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}}}}=1,618016\ldots$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}}}}}}}}}=1,6180339395\ldots$$

Přesnost a rychlost konvergence není nijak vysoká, nicméně lze říci, že se jedná o postup, který by šel „při práci odzadu“ provádět poměrně rychle i ručně s pomocí běžného kalkulátoru.

3.6.3 HLEDÁNÍ JEDNODUCHÉHO ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU

V kapitole 3.5.4 jsme uvedli řetězové zlomky obsahující hodnotu zlatého řezu, které objevili Rogers s Ramanujanem. Již při prvním pohledu je jasné, že tyto zlomky jsou pro ruční výpočet přinejmenším nepraktické. Pokusíme se nyní pomocí programu Mathematica najít jednodušší řetězový zlomek aproximující hodnotu φ. K dispozici máme příkaz **ContinuedFraction[***výraz, počet členů***]**, se kterým jsme se již setkali. Za „výraz" nyní dosadíme hodnotu $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a necháme si určit zlomek na pět členů (obrázek 33).

```
In[12]:= ContinuedFraction[(1 + Sqrt[5]) / 2, 5]
Out[12]= {1, 1, 1, 1, 1}
```

Obrázek 33 - HLEDÁNÍ JEDNODUCHÉHO ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU APROXIMUJÍCÍ HODNOTU φ

Hledaný řetězový zlomek je tedy ve tvaru:

$$\varphi \approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = 1,6$$

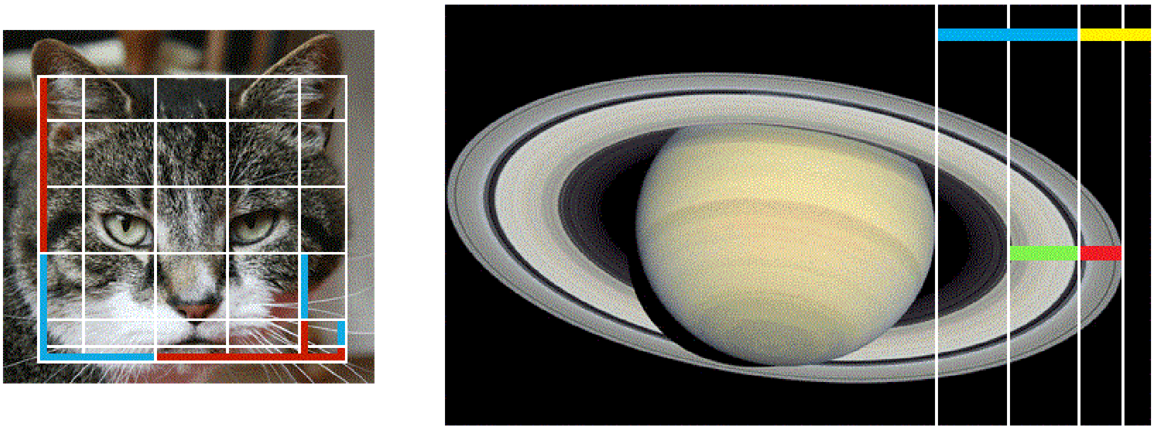
Pokud bychom následně prováděli zpřesňování, zvyšování počtu členů, zjistili bychom, že rychlost konvergence je nízká – srovnatelná s rychlostí výpočtu pomocí nekonečné odmocniny v předchozí kapitole.

3.7 ZLATÝ ŘEZ KOLEM NÁS

Obecně jsme se již o výskytu zlatého řezu kolem nás zmínili – najdeme ho v přírodě, architektuře nebo umění. Se zlatým řezem se však setkáváme mnohem častěji, aniž bychom si to uvědomovali. Přijde nám totiž přirozený. Proto je tato kapitola věnována konkrétním příkladům a případně využití zlatého řezu. [14]

3.7.1 ZLATÝ ŘEZ V PŘÍRODĚ A VESMÍRU

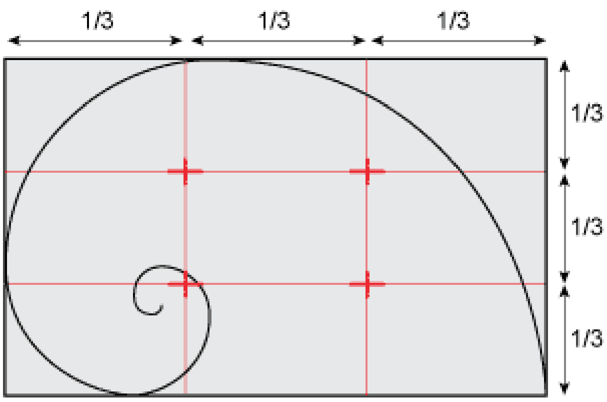
Pokud bychom se rozhlédli kolem sebe a zaměřili se na hledání zlatého řezu, zjistili bychom, že se nachází takřka všude. Schránky mořských korýšů, rostliny, živočichové, lidská tvář nebo třeba prstence planet – zde všude je možné nalézt zlatý řez (obrázek 34). Samozřejmě příroda si „neuvědomuje" tento poměr, nicméně se jím „řídí". [14]



Obrázek 34 - ZLATÝ ŘEZ V PŘÍRODĚ A VE VESMÍRU

3.7.2 KOMPOZIČNÍ PRAVIDLO FOTOGRAFOVÁNÍ

Významnou roli hraje zlatý řez při fotografování – mluvíme o tzv. pravidle třetin. Pravidlem třetin rozumíme hrubé přiblížení ke zlatému řezu v obdélníku. Pro reálnou fotografii nemá přesné číselné vyjádření hodnoty φ význam a ani poměr stran fotografií nectí zlatý obdélník. V praxi při fotografování se proto využívá aproximace pomocí jedné třetiny, která je dostačující (obrázek 35). [23]



Obrázek 35 – APROXIMACE ZLATÉHO ŘEZU PŘI FOTOGRAFOVÁNÍ

Pro pořizování fotografií pak průsečík třetin představuje místo, do kterého je třeba umístit prvky mimořádného významu. Pokud má fotografie jeden objekt, pak je možné jej umístit do libovolného průsečíku. V případě dvou objektů se doporučuje umístit je na úhlopříčku. Z hlediska estetiky zde pak pochopitelně hrají roli další faktory a nelze fotografování vnímat pouze jako umisťování bodu na „souřadnice“. [23]

4 EULEROVO ČÍSLO, *e*

Eulerovo číslo, číslo e, má přibližnou hodnotu $2{,}718$ a bylo pojmenováno na počest významného švýcarského matematika a fyzika Leonharda Eulera (1707 – 1783). Z hlediska historie se jedná o poměrně „mladou" konstantu. Zatímco číslem π nebo hodnotou $\sqrt{2}$ se zabývali filosofové a matematici již v dávném starověku, původ čísla e sahá přibližně do 16. století, kde se objevuje výraz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ve vztahu pro složené úrokování. Dnes se jedná o důležitou konstantu s velkým významem nejen pro matematiku, ale i další přírodní vědy, například astronomii nebo fyziku. [26]

Než se budeme dále podrobněji zabývat číslem e, zmíníme několik informací o životě Leonharda Eulera. Leonhard Paul Euler se narodil v dubnu roku 1707 ve švýcarském městě Basilej a zemřel v září 1783 v Rusku – v Petrohradu. I přes to, že zprvu na chudé škole v Basileji nestudoval matematiku, díky svému hlubokému zájmu o tento obor, který v něm pravděpodobně probudil jeho otec, je dnes považován za jednoho z nejlepších matematiků vůbec a jeho přínos vědě byl obrovský. V matematické analýze zavedl řadu nový pojmů a symbolů, provedl mnoho objevů v rámci diferenciálního a integrálního počtu a je považován za zakladatele teorie grafů. Ve fyzice se pak zabýval například mechanikou nebo optikou. [22]

4.1 DEFINICE ČÍSLA *e*

Eulerovo číslo je možné definovat několika způsoby a každý z nich má své výhody a nevýhody. V této kapitole se budeme zabývat třemi nejčastějšími definicemi této hodnoty. Je zřejmé, že všechny uvedené definice jsou vzájemně ekvivalentní.

4.1.1 LIMITNÍ DEFINICE

Pokud zavádíme Eulerovo číslo prostřednictvím limit, máme následující dvě možnosti:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad\qquad e=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$$

[28], [11]

Z výše uvedených způsobů se pravděpodobně častěji setkáme s limitou posloupnosti ve tvaru $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, který koresponduje i s výrazem pro složené úrokování z 16. století.

Pokud bychom chtěli ukázat existenci této limity, vycházeli bychom z poznatků o chování monotónní posloupnosti a tzv. AG-nerovnosti:

Věta: Nechť je dána neklesající posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $n\in\mathbb{N}$, $a_n\in\mathbb{R}$. Je-li tato posloupnost shora omezená, existuje $a\in\mathbb{R}$ tak, že:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,. \qquad [26]$$

Lemma (AG – nerovnost): Nechť je $n\in\mathbb{N}$ a nechť jsou x_k, kde $k=1,2,\dots,n$, nezáporná reálná čísla. Potom platí:

$$x_1x_2x_3\dots x_n \le \left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^n,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x_1=x_2=\dots=x_n$. [26]

Díky výše uvedené větě a lemmatu (jejich důkazy lze najít např. v [28]) můžeme vyslovit následující tvrzení:

Tvrzení: Položme:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad n=1,2,\dots$$

Pak je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající.

Důkaz: Dle definice je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí právě tehdy, když pro každé n je $a_n<a_{n+1}$. Důkaz provedeme na základě AG-nerovnosti, kterou aplikujeme na součin n činitelů $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ a 1. Získáme zápis ve tvaru:

$$x_1x_2\dots x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Dále pak:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}}{n+1}=\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$$

Na základě AG-nerovnosti platí $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{(n+1)}\right)^{n+1}$, ovšem podmínka pro rovnost není splněna a pro každé $n\in\mathbb{N}$ získáváme ostrou nerovnost ve tvaru:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1}$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy rostoucí. Pokud nyní položíme $x_1=x_2=\ldots=x_n=1+\frac{1}{n+1}$, $x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{(n+1)}\right)^2$. Pak platí:

$$x_1x_2\ldots x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

a

$$\frac{x_1+\ldots+x_{n+1}}{n+1}=\frac{n\frac{n+2}{n+1}+\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2}{n+1}:=M_{n+1}.$$

Upravíme:

$$M_{n+1}=\frac{(n+1)^3+(n+1)^2+(n+1)+1}{(n+1)^3}=1+\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}\right]\leq$$

$$\leq 1+\underbrace{\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^k}+\ldots\right]}_{\text{geometrická řada s kvocientem } \frac{1}{n+1}}=1+\frac{1}{n}$$

Z uvedených vztahů a AG-nerovnosti tedy vyplývá, že $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, přičemž podmínka nerovnosti není opět splněna a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$b_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$$

Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy klesající. Tím je důkaz hotov. [26]

Je evidentní, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$ a dále, že $a_n < b_n \leq b_1 = 4$. Posloupnost a_n je tedy rostoucí a shora omezená. Již víme, že posloupnost s těmito vlastnostmi má konečnou limitu:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

[26]

4.1.2 NEKONEČNÁ ŘADA KONVERGUJÍCÍ K ČÍSLU *e*

Nekonečná konvergentní řada, pomocí které lze definovat číslo e, je ve tvaru:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots$$

Vidíme, že řada využívá k výpočtu Eulerova čísla hodnotu $k!$. Rychlost konvergence si ověříme později.

4.1.3 DEFINICE POMOCÍ URČITÉHO INTEGRÁLU

Další způsob, kterým lze definovat Eulerovo číslo, je výpočet určitého integrálu a následné vyřešení rovnice, kde číslo e představuje jediný kladný kořen. [11] Rovnice má tvar:

$$\int_1^x \frac{1}{u}\,du = 1$$

Je nutné podotknout, že se nám zde ukazuje souvislost mezi číslem e a logaritmem, kdy lze zapisovat:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u}\,du = 1$$

4.2 VLASTNOSTI ČÍSLA *e*

Již známe několik způsobů, jak definovat číslo e a určit jeho hodnotu. Nyní se budeme zabývat některými vlastnostmi této konstanty.

4.2.1 ZÁKLAD PŘIROZENÉHO LOGARITMU

Jednou z důležitých vlastností Eulerova čísla je, že se jedná o základ přirozeného logaritmu. Jedná se tedy o logaritmus $\log_e(x)$, který má svůj specifický zápis $\ln(x)$. Platí tedy:

$$\ln(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad e^y = x$$

Na tuto vlastnost jsme narazili již dříve u definice čísla e pomocí určitého integrálu, kde platil vztah $\ln(x) = 1$, tedy $e^1 = x$. [7]

4.2.2 DŮKAZ IRACIONALITY ČÍSLA *e*

Další z vlastností Eulerova čísla je, že se jedná o číslo iracionální. Důkazů iracionality existuje několik. Pravděpodobně nejznámější je Fourierův důkaz sporem, který je proveden níže. Při důkazu se vychází ze vztahu $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Předpokládejme nyní, že číslo e je racionální a lze ho vyjádřit jako podíl $e = \frac{a}{b}$, kde $a, b \in \mathbb{N}$ a jsou nesoudělná. Pomocí b nyní vytvoříme racionální aproximaci podílu $\frac{a}{b}$, kdy uvažujeme racionální číslo získané jako b-tý částečný součet nekonečné řady definující číslo e, tedy:

$$\sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}$$

Z toho vyplývá, že rozdíl $\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}$ musí být kladný. Nyní výraz vynásobíme hodnotou $b!$, díky čemuž se nám vykrátí oba jmenovatelé zlomků, využijeme předpokladu, že $e = \frac{a}{b}$ a po úpravách získáme kladné celé číslo.

$$b!\left(\frac{a}{b}-\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)=b!\left(e-\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)=b!\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)=$$
$$=b!\left(\frac{1}{(b+1)!}+\frac{1}{(b+2)!}+\frac{1}{(b+3)!}+\dots\right)=$$
$$=\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)}+\dots$$

Protože platí, že $b \geq 1$, lze toto kladné celé číslo ohraničit shora geometrickou řadou ve tvaru:

$$\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)}+\dots<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots=1$$

Tím jsme ovšem sestrojili celé číslo, které by mělo být z intervalu $(0,1)$:

$$0<b!\left(\frac{a}{b}-\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)<1,$$

což je spor. Číslo e musí být nutně iracionální. [12]

4.2.3 DŮKAZ TRANSCENDENCE ČÍSLA *e*

První důkaz transcendence čísla e publikoval v roce 1873 francouzský matematik Charles Hermite (1822 – 1901). Zároveň ve své práci uvedl racionální aproximace pro e a e^2:

$$e \approx \frac{58291}{21444} \qquad e^2 \approx \frac{158452}{21444}$$

[27]

Důkaz transcendence čísla e není triviální záležitost. Je třeba postupovat v několika krocích a v rámci „přípravné fáze“ před důkazem samotným se musí dokázat několik lemmat. Důkaz je proveden dále dle [20]. Důležitou součástí důkazu je polynom definovaný pro libovolné číslo přirozené číslo n a prvočíslo p, kdy $p>n$:

$$f(x):=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(x-1)^p(x-2)^p\dots(x-n)^p$$

Polynom f je stupně $(n+1)p-1$. Nyní musíme dokázat dvě potřebné vlastnosti polynomu f v bodech $0,1,2,...,n$.

Lemma 1: Pro derivace polynomu f v bodě 0 platí:

1. $f^{(r)}(0)$ je celé číslo pro každé $r \in \mathbb{N}_0$,
2. $f^{(p-1)}(0)$ není dělitelné prvočíslem p,
3. $f^{(r)}(0)$ je dělitelné prvočíslem p pro každé $r \in \mathbb{N}_0 \setminus \{p-1\}$.

Důkaz 1: I. případ: $r > (n+1)p-1$

Jelikož je polynom f stupně $(n+1)p-1$, jsou všechny jeho r-té derivace identicky rovny 0. Pro každé takové r je číslo $f^{(r)}(0)=0$, tedy celé a dělitelné prvočíslem p.

II. případ: $r < (p-1)$

Jedno z tvrzení o polynomech nám říká, že pokud je číslo α k-násobný kořen polynomu $q(x)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak má derivace $q'(x)$ číslo α za svůj $(k-1)$ násobný kořen. Protože 0 je $p-1$ násobným kořenem polynomu f, je 0 též kořenem všech jeho derivací $f^{(i)}$ pro $i=0,1,...,p-2$. Proto opět pro takové r platí, že $f^{(r)}(0)=0$.

Pro zbývající případy se r-tá derivace polynomu f vypočte pomocí Newtonova vzorce pro výpočet derivace součinu dvou funkcí:

$$f^{(r)}(x)=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\right)^{(k)}\left(\left[(x-1)(x-2)...(x-n)\right]^{p}\right)^{(r-k)}$$

Pro naše potřeby označíme $A=\left(\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\right)^{(k)}$.

III. případ: $r = p-1$

Dosaďme do dříve uvedené rovnosti $x=0$. Pro tento případ je výraz A nenulový pouze pro sčítací index $k = p-1$. Pro takové k pak platí, že $A=1$. Získáme rovnost ve tvaru:

$$f^{(p-1)}(0)=\left[(-1)(-2)\ldots(-n)\right]^p=(-1)^{np}(n!)^p\in\mathbb{Z}$$

Požadavek $p>n$ pak zaručuje, že p nedělí $f^{(p-1)}(0)$.

IV. případ: $p-1<r\leq(n+1)p-1$

Pokud dosadíme hodnotu 0 do vztahu na předcházející straně, opět bude pro sčítací index platit $k = p-1$ a $A=1$ jako v předcházejícím případě. Polynom $h(x)$:

$$h(x):=\left[(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\right]^p$$

je pro $r > p-1$ alespoň jednou derivován. Z tvaru definice $h'(x)$:

$$h'(x)=p\left[(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\right]^{p-1}\left[(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\right]'$$

je evidentní, že $h'(x)$ lze vyjádřit jako $pg(x)$, kde $g(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Takový polynom pak má všechny své derivace v celočíselných bodech celočíselné. Proto tedy je $(h(x))^{(r-p+1)}$ v bodě 0 násobkem prvočísla p. Čímž je důkaz hotov pro všechny případy.

Lemma 2: Pro každé $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ a $r\in\mathbb{N}_0$ je $f^{(r)}(j)$ dělitelné prvočíslem p.

Důkaz 2: Fixujme j. Polynom f je potom možné zapsat ve tvaru:

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}\left(B_p(x-j)^p+B_{p+1}(x-j)^{p+1}+\ldots\right)\quad\text{, kde } B_p,B_{p+1},\ldots\in\mathbb{Z}$$

Protože je číslo j p-násobným kořenem polynomu $f(x)$, platí:

$$f^{(r)}(j)=0\qquad\text{pro } r=0,1,\ldots,p-1$$

Pro $r \geq p$ pak dostaneme:

$$f^{(r)}(j) = \frac{1}{(p-1)!} B_r r! = B_r r(r-1)\dots p\,,$$

což znamená, že je toto číslo dělitelné prvočíslem p.

Lemma 3: Nechť q je libovolný polynom stupně s. Položme:

$$F(x) := q(x) + q'(x) + \dots + q^{(s)}(x)$$

Pak:

$$\int_0^x e^{x-t} q(t)\,dt = -F(x) + e^x F(0)$$

Důkaz 3: Aplikujeme metodu per partes:

$$\int_0^x e^{x-t} q(t)\,dt = \left[-e^{x-t} q(t)\right]_0^x + \int_0^x e^{x-t} q'(t)\,dt = e^x q(0) - q(x) + \int_0^x e^{x-t} q'(t)\,dt$$

a následně indukci na stupeň polynomu q.

Věta: Číslo e je transcendentní.

Důkaz: Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme pro spor, že existují taková celá čísla $c_0, c_1, \dots, c_n$, že $c_0 + c_1 e + \dots + c_n e^n = 0$, kde $c_0 \neq 0$.

Aplikujeme tvrzení lemmatu 3 na zavedený polynom $f(x)$, kde za x postupně dosazujeme $j = 0, 1, \dots, n$. Po vynásobení koeficientem c_j a sečtením s ohledem na výše uvedený předpoklad získáváme:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \int_0^j e^{j-t} f(t)\,dt = -\sum_{j=0}^{n} c_j F(j)$$

Na základě lemmat 1 a 2 je pravá strana rovnosti celé číslo, které je modulo p rovno $c_0 F(0)$ pro každé $p > n$. Pokud zvolíme prvočíslo $p > c_0 \neq 0$, pak dle lemmatu 1 pravá strana rovnosti $\not\equiv 0 \mod p$. Z toho důvodu je pravá strana celé nenulové číslo. Spor následně získáme z levé strany rovnosti takovým způsobem, že jí vhodnou volbou prvočísla $p > c_0$ dokážeme udělat v absolutní hodnotě menší než $\frac{1}{2}$. Odhadujeme:

$$\left|\sum_{j=0}^{n}\int_{0}^{j} e^{j-t} f(t)\,dt\right| \le (n+1)\,n \max_{j=0,\dots,n}\left|c_j\right| e^n \frac{n^{p-1}n^{pn}}{(p-1)!}$$

Nyní si musíme uvědomit, že n je pevné – jedná se o řád čísla e, o kterém pro spor předpokládáme, že je algebraické. Jelikož

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\left(n^{n+1}\right)^p}{(p-1)!} = 0\,,$$

je možné pro dostatečně velké prvočíslo p odhadnout levou stranu zlomkem $\frac{1}{2}$.

Dokázali jsme tedy, že číslo e je transcendentní.

4.3 DALŠÍ MOŽNOSTI VYJÁDŘENÍ ČÍSLA *e*

Seznámili jsme se s vlastnostmi a některými možnostmi aproximace čísla e. Než budeme jednotlivé postupy zkoumat pomocí matematického softwaru, zmíníme ještě několik dalších možností, jak vyjádřit tuto konstantu.

4.3.1 VYJÁDŘENÍ EULEROVA ČÍSLA POMOCÍ NEKONEČNÉHO SOUČINU

Jednou z možností vyjádření čísla e je pomocí nekonečného součinu konvergujícího k hodnotě této konstanty. Můžeme se setkat se dvěma takovými součiny. Pomocí jednoho z nich můžeme získat přímo hodnotu čísla e, u druhého hodnotu $\frac{e}{2}$:

$$e = \frac{2}{1}.\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{6.8}{5.7}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(\frac{10.12.14.16}{9.11.13.15}\right)^{\frac{1}{8}}\dots$$

$$\frac{e}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{2.4}{3.3}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(\frac{4.6.6.8}{5.5.7.7}\right)^{\frac{1}{8}}\dots$$

[11]

4.3.2 ŘETĚZOVÉ ZLOMKY ČÍSLA *e*

Pokud budeme chtít vyjádřit Eulerovo číslo pomocí řetězových zlomků, a případně určit číselnou hodnotu této konstanty, máme opět několik možností. Řetězový zlomek samotného čísla e vypadá následovně:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}}}}$$

Elegantnější tvar mají zlomky vyjadřující hodnoty $e-1$ a $\frac{1}{e-2}$:

$$e - 1 = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \ldots}}}} \qquad \frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ldots}}}}$$

Jejich jedinou nevýhodou ovšem je, že nezískáme samotnou hodnotu čísla e a bylo by následně třeba provádět další úpravy. [11]

4.3.3 SOUVISLOST S MACLAURINOVOU ŘADOU

Vezměme Maclaurinovu řadu ve tvaru:

$$\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4 - \frac{959}{2304}x^5 + \ldots$$

Díky této řadě můžeme lépe nahlédnout do limitní definice čísla e. Současně tak získáme další vyjádření této hodnoty, která mohou být například ve tvaru:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{1}{2}e \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} + \frac{e}{2}}{x} = \frac{11}{24}e$$

[11]

4.4 VÝPOČET ČÍSELNÉ HODNOTY ČÍSLA *e* V PROGRAMU MATHEMATICA

Pokud bychom potřebovali rychle určit hodnotu čísla e na velký počet desetinných míst, můžeme k tomu využít program Mathematica. Tento matematický software v sobě má již algoritmus výpočtu naprogramovaný. Nutné podotknout, že na rozdíl od běžného značení Eulerova čísla, využívá program Mathematica pro označení symbol **E**. Pokud bychom tedy chtěli vypočítat číslo e s přesností na 70 desetinných míst, postupovali bychom následovně:

```
In[1]:= N[E, 71]
Out[1]= 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766
```

Obrázek 36 - HODNOTA EULEROVA ČÍSLA VYPOČTENÁ NA 70 DESETINNÝCH MÍST

Nesmíme zapomenout na syntaxi příkazu **N**, která je popsána v kapitole 2.5.

4.4.1 PŘESNOST HERMITOVY APROXIMACE

Při důkazu transcendence v kapitole 4.2.3 jsme narazili na aproximaci čísla e, kterou využil francouzský matematik Charles Hermite. Ten tvrdil, že $e \approx \dfrac{58291}{21444}$.

```
In[2]:= N[58291 / 21444, 31]
Out[2]= 2.718289498227942548032083566499
```

Obrázek 37 - PŘESNOST HERMITOVY APROXIMACE

Pokud porovnáme hodnoty čísla e z obrázků 36 a 37, zjišťujeme, že Hermite mohl touto aproximací správně určit pět desetinných míst Eulerova čísla, což je určitě pro běžné potřeby dostačující.

4.4.2 RYCHLOST KONVERGENCE NEKONEČNÉ ŘADY

Nyní se budeme zabývat rychlostí konvergentní řady z definice Eulerova čísla. Pro připomenutí, jedná se o řadu ve tvaru $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Pokud provedeme označení $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ a budeme určovat příslušné součty, získáváme pro jednotlivá n následující výsledky (červeně jsou vyznačeny správně vypočtené cifry):

$$n=5: \qquad 2{,}71\overline{66}$$

$$n=6: \qquad 2{,}7180\overline{55}$$

$$n=10: \qquad 2{,}7182818011\ldots$$

$$n=20: \qquad 2{,}7182818284590452353397\ldots$$

Vidíme, že postupně se přibližujeme k hodnotě čísla e a například pro hodnotu $n=20$ získáváme 19 správně vypočtených desetinných míst této konstanty.

4.4.3 NEKONEČNÝ SOUČIN PRO HODNOTU ČÍSLA *e*

V kapitole 4.3.1 byly uvedeny dva nekonečné součiny, pomocí kterých lze určit číselnou hodnotu čísla e (resp. $\frac{e}{2}$). Zaměříme-li se pouze na nekonečný součin konvergující k hodnotě čísla e a vezmeme aproximaci tvaru $e \approx \frac{2}{1}.\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{6.8}{5.7}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(\frac{10.12.14.16}{9.11.13.15}\right)^{\frac{1}{8}}$, získáme následující výsledek:

```
In[21]:= N[(2/1) * ((4/3)^(1/2)) * (((6*8) / (5*7))^(1/4)) * ((10*12*14*16) / (9*11*13*15))^(1/8), 31]
Out[21]= 2.604729295113756961271021945304
```

Obrázek 38 - VYUŽITÍ NEKONEČNÉHO SOUČINU K APROXIMACI EULEROVA ČÍSLA

Zjišťujeme, že při tak nízkém počtu činitelů, který jsme použili, získáváme správně vypočtenou pouze číslici na pozici jednotek. Samozřejmě se zvyšujícím se počtem činitelů by se zvyšovala přesnost, ale zároveň by se též zvyšovala náročnost výpočtu.

4.4.4 VÝPOČET POMOCÍ ŘETĚZOVÝCH ZLOMKŮ

V práci bylo uvedeno několik řetězových zlomků, pomocí kterých lze aproximovat hodnotu čísla e. První z uvedených řetězových zlomků nám poskytne výsledek:

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}}}}=2{,}7182795\ldots$$

Hodnotu čísla e jsme tedy správně určili na čtyři desetinná místa. Pokud bychom využili dalších dříve uvedených zlomků, musíme si nejprve vypočítat hodnoty pro porovnání. Platí, že $e-1=1,718281828459045...$ a $\frac{1}{e-2}=1,392211191177332814...$. Řetězové zlomky nám pak poskytují výsledky:

$$1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5}}}}=1,71698... \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5}}}}=1,39189...$$

Lze říci, že rychlost konvergence těchto dvou řetězových zlomků k hodnotě čísla e je srovnatelná a ne příliš vysoká. Jedná se ovšem o poměrně jednoduchý výpočet, který bychom mohli realizovat i ručně s pomocí kalkulátoru.

4.5 VZTAH EULEROVA ČÍSLA A KONSTANTY $ln(2)$

Eulerovo číslo úzce souvisí s další matematickou konstantou – s číslem $\ln(2)$. Pokud bychom chtěli definovat tuto konstantu a určit její číselnou hodnotu, vypadal by zápis následovně:

$$\ln(2)=\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=0,6931471805...$$

[11]

Pokud bychom se zaměřili na limitní vyjádření čísla $\ln(2)$, mohli bychom vypozorovat jejich podobnost s limitami určující číslo e:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\ln(2)=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-2^{-x}}{2x}$$

Na základě součtů Maclaurinovy řady pro funkci $\ln(1+x)$ vypočtených v bodech $x=1$ a $x=-\frac{1}{2}$ pak můžeme získat pro vyjádření hodnoty čísla $\ln(2)$ ještě vztah:

$$\ln(2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k2^k}$$

[11]

4.6 REKORDY VE VÝPOČTECH EULEROVA ČÍSLA

Závěrem kapitoly o Eulerově čísle uvedeme tabulku s přehledem rekordů ve výpočtech hodnoty čísla e za posledních pět let, včetně počtu správně vypočtených desetinných míst této konstanty. V tabulce je také názorně vidět, že v dnešní „době počítačů“ není problém „cokoliv“ vypočítat – vše je pouze otázkou výpočetního času.

Tabulka 2 - REKORDY VE VÝPOČTU ČÍSLA e

DATUM	DRŽITEL REKORDU	POČET DES. MÍST	VÝPOČETNÍ ČAS
24. 6. 2015	Matthew Hebert	1 400 000 000 000	**výpočet:** 15 dní **ověření:** 22 dní
5. 7. 2010	Shigeru Kondo	1 000 000 000 000	**výpočet:** 224 hod. **ověření:** 219 hod.
20. 2. 2010	Alexander Yee	500 000 000 000	**výpočet + ověření:** 307 hod.
7. 2. 2010	Alexander Yee	100 000 000 000	**výpočet:** 57,8 hod.
3. 6. 2009	A. Yee & R. Chan	31 026 000 000	**výpočet + ověření:** 6 hod. 38 min.

5 ZÁVĚR

V práci jsme se postupně seznámili s čísly $\sqrt{2}$, φ, e a $\ln(2)$, jejich možnými vyjádřeními, význačnými vlastnostmi a souvislostmi s běžným životem a matematikou vyučovanou na základních a středních školách. Je evidentní, že ne s každou konstantou se běžně setkáme. Na jedné straně zde máme Pythagorovu konstantu nebo zlatý řez, se kterými se v nějaké podobě setkáváme takřka denně. U hodnoty $\sqrt{2}$ se navíc jedná i konstantu, kterou se žáci musí naučit v rámci vzorečků pro řešení příkladů v hodinách matematiky. Na straně druhé stojí Eulerovo číslo a případně i hodnota $\ln(2)$. Pro matematiku se obecně jedná o velmi významné hodnoty, zvláště číslo e. Běžně se s nimi člověk však v podstatě nesetká.

Zjistili jsme, že ne každá konstanta má tak dlouhou a bohatou historii. Zatímco iracionalita čísla $\sqrt{2}$ trápila architekty a stavitele již ve starověku, s hodnotou čísla e se setkáváme až na přelomu středověku a novověku v rámci finančnictví. I přes to však nelze říci, že by nějaká z konstant byla „méněcenná“. Objev každé z konstant určitým způsobem ovlivnil a obohatil matematiku. Můžeme si například vzpomenout na „první krizi matematiky“, kterou způsobila již zmíněná iracionalita Pythagorovy konstanty. Řečtí matematici se sice odklonili od aritmetického pojetí matematiky, ale díky tomu vybudovali celý systém řecké geometrické algebry a začali se zabývat studiem iracionalit. Stejně tak bychom mohli hovořit o vlivu dalších konstant.

Dnes již známe velké množství matematických konstant, které leckdy usnadňují nebo dokonce umožňují realizaci často obtížných matematických výpočtů. Stačí si otevřít publikaci [11] a nahlédnout do přehledu konstant v obsahu knihy. I přes to však nelze tvrdit, že bychom všechny matematické konstanty již znali. Asi ani není možné, abychom někdy všechny znali. V této práci jsme se přesvědčili, že matematické konstanty jsou často iracionální a někdy i dokonce transcendentní čísla. A při faktu, že iracionálních čísel je nekonečně mnoho, je těžké si představit, že člověk všechny důležité matematické konstanty již objevil. Samozřejmě se dnes už pravděpodobně nesetkáme s problémem, že by nám nešel „dostavit domek“ kvůli iracionalitě některé hodnoty. Řadu výpočtů za nás realizují počítače a navíc, při zaokrouhlení například na pět desetinných míst se již jedná o tak malinkou chybu, která se při jakékoliv stavbě ztratí. Nejpravděpodobnější možnost objevení nebo zavedení nové konstanty je dle mého názoru právě při přesných počítačových výpočtech a případně důkazech. Naše moderní společnost má potřebu matematizovat svět – popsat ho a vysvětlit všechny vztahy v přírodě. Tento proces je pochopitelně velmi složitý, stačí si vzpomenout na matematizaci při řešení slovních úloh, a někdy je možné „něco“ vysvětlit jen díky zavedení určitých konstant nebo „umělých“ vztahů, na základě kterých je možné vybudovat následnou teorii.

Samozřejmě by se i v této diplomové práci dalo pokračovat, popisovat a hledat další konstanty. Práce by ovšem nabyla velmi velkého rozsahu a nikdy určitě není možné v rámci jedné publikace popsat do detailu úplně všechny matematické konstanty se všemi jejich vlastnostmi. A jak již bylo řečeno v úvodu – cílem této práce bylo zaměřit se na ty nejznámější, nejslavnější a nejvýznamnější a přiblížit je čtenáři.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] BALCAR, B., ŠTĚPÁNEK, P. 1986. *Teorie množin.* 1. vyd. Praha: Academia.

[2] BARROW, J. D. 2005. *Konstanty přírody: Čísla skrývající nejhlubší tajemství vesmíru.* 1. vyd. Praha: Paseka.

[3] BEČVÁŘ, J., BEČVÁŘOVÁ, M. 2012. *Vývoj matematiky jako popularizující stimul* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//oppa/matematika_stimul_blok.pdf>.

[4] BEČVÁŘ, J., DLAB, V. 2011. *Babylonský výpočet čísla* $\sqrt{2}$. Učitel matematiky, roč. 19, č. 2.

[5] CS.WIKIPEDIA. 2013. *Nekonečný součin* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Nekone%C4%8Dn%C3%BD_sou%C4%8Din>.

[6] CS.WIKIPEDIA. 2016. *Formát papíru* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Form%C3%A1t_pap%C3%ADru>.

[7] DELVENTHAL, K. M., KISSNER, A., KULICK, M. 2008. *Kompendium matematiky: vzorce a pravidla, četné příklady včetně řešení: od základních operací po vyšší matematiku.* 2. vyd. Praha: Euromedia Group – Knižní klub.

[8] EN.WIKIPEDIA. 2011. *Golden rectangle* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Golden_rectangle>.

[9] EN.WIKIPEDIA. 2015. *Rogers – Ramanujan continued fraction* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <https://en.wikipedia.org/wiki/Rogers%E2%80%93Ramanujan_continued_fraction>.

[10] EN.WIKIPEDIA. 2016. *Square root of 2* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <https://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2>.

[11] FINCH, S. R. 2003. *Mathematical Constants.* 1. vyd. New York: Cambridge University Press.

[12] HAVLÍČEK, V. 2011. *Iracionalita a transcedence* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://is.muni.cz/th/323536/prif_b/transcendence.pdf>.

[13] HEJL, J. 1995. *Zlatý řez.* Učitel matematiky, roč. 4, č. 1.

[14] HORDĚJČUK, V. 2016. *Zlatý řez* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://voho.cz/wiki/zlaty-rez/>.

[15] CHINČIN, A. J. 1952. *Řetězové zlomky.* 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství.

[16] JČU. 2016. *Dějiny matematiky* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/DejinyM.pdf>.

[17] KUN, J. 2011. *The Square Root of 2 is Irrational (Geometric Proof)* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://jeremykun.com/2011/08/14/the-square-root-of-2-is-irrational-geometric-proof/>.

[18] LEISCHNER, P. 2014. *Proslulé úlohy starověku* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://www.knih-st.cz/sites/default/files/l%C3%A1tka.pdf>.

[19] MASÁKOVÁ, Z. 2010. *Málo známý osud odmocniny ze dvou* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://people.fjfi.cvut.cz/masakzuz/prezentace_soubory/OdmocninaRozsirenaNova.pdf>.

[20] MASÁKOVÁ, Z., PELANTOVÁ, E. 2010. *Teorie čísel.* Praha: ČVUT. Skriptum.

[21] MELVILLE, D. J. 2006. *YBC 7289* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/tablets/YBC7289.html>.

[22] O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F., 2016. *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>.

[23] PIHAN, R. 2012. *Kompoziční pravidla IV.* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://www.fotoroman.cz/techniques3/comp8_rules4.htm>.

[24] REICHL, J., VŠETIČKA, M. 2016. *Encyklopedie fyziky: Dějiny matematiky a fyziky* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1400-dejiny-matematiky-a-fyziky>.

[25] REKTORYS, K. a kol. 1963. *Přehled užité matematiky.* 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury.

[26] SIKOROVÁ, R. 2000. *Číslo e a jeho vlastnosti (3).* Učitel matematiky, roč. 9, č. 1.

[27] SIKOROVÁ, R. 2001. *Číslo e a jeho vlastnosti (4).* Učitel matematiky, roč. 9, č. 2.

[28] VESELÝ, J. 1997. *Matematická analýza pro učitele.* 1. vyd. Praha: Mytfyzpress.

[29] YEE, A. J. 2015. *Mathematical Constants – Billion of Digits* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://www.numberworld.org/digits/>.

[30] ZOBALOVÁ, J. 2007. *Geometrické konstrukce řešené s využitím algebraického výpočtu* [online]. [cit. 16. 3. 2016]. Dostupné z WWW: <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/MRG/konst.pdf>.

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK

RESUMÉ

This thesis deals with selected mathematical constants. Especially Pythagoras' constant – the square root of 2, Golden mean, Euler's number and ln(2). The study examines the history of these mathematical constants, their properties (for example irrationality or transcendentality) and their influence on mathematics. Part of this thesis is devoted to the mathematical computation in Mathematica 8.0. Other chapters are focused on links with mathematics in schools. Part of this thesis is also devoted to finding practical uses mathematical constants in everyday life.