ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ V ÚLOHÁCH MATEMATICKÝCH OLYMPIÁD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martina Pánková
Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň 2015

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně
s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni 15. dubna 2015

....
vlastnoruční podpis

Na tomto místě bych chtěla poděkovat panu Mgr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D. za odborné vedení této práce, cenné podněty a připomínky a za vstřícnost při konzultacích. Také bych chtěla poděkovat své rodině za podporu při studiu.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

SEZNAM ZKRATEK

[1]	Odkaz na seznam literatury
f	Zobrazení
Z	Geometrické zobrazení
Z^{-1}	Inverzní zobrazení
$\in$	„je prvkem množiny“
X'	Obraz
$Z_1 \circ Z_2$	Skládání zobrazení
$\lvert XY \rvert$	Velikost úsečky
$\overrightarrow{AB}$	Orientovaná úsečka
$\cong$	Shodnost
$\parallel$	Rovnoběžnost
$\nparallel$	Různoběžnost
$\cap$	Průnik
κ	Koeficient stejnolehlosti (dělící poměr)

ÚVOD

Předložená bakalářská práce s názvem Geometrická zobrazení v úlohách matematických olympiád si klade za cíl především seznámit čtenáře s geometrickými zobrazeními a jejich výskytem v úlohách různých ročníků matematických olympiád (MO).

MO je soutěž, kde žáci řeší ve vymezeném časovém limitu tematicky různé úlohy z matematiky a geometrie. Dělí se na dvě základní kategorie, které se ještě nadále člení. Kritériem pro rozlišování těchto kategorií je věk řešitelů. Máme matematické olympiády pro základní školy (od pátého do devátého ročníku) a pro školy střední, kterých se již účastní žáci všech čtyř ročníků. U MO pro základní školy existují dvě, resp. tři (u devátých tříd) kola. Ve středoškolských MO značíme jednotlivé ročníky pomocí počátečních písmen abecedy, kategorie A je pro nejstarší žáky (třetí a čtvrtý ročník), kategorií B a C se pak účastní žáci druhých a prvních ročníků. Všechny tyto ročníky mají tři, resp. čtyři (kategorie A) kola. Toto dělení se samozřejmě odráží na úrovni složitosti řešených úloh. Geometrická zobrazení se vyskytují v úlohách téměř všech kategorií a kol, výjimku tvoří pouze kategorie nižších ročníků základních škol, které zatím nemají potřebné poznatky na řešení takto zaměřených úloh.

Do skupiny čtenářů, pro které je práce především určena, náležejí pedagogové, kteří se svými žáky mohou využívat příklady k procvičování výuky geometrie. Zejména jsou sem však řazeni samotní budoucí řešitelé MO. Pro ně, vzhledem k podrobnému řešení geometricky zaměřených úloh, může následující text práce představovat vhodné podklady pro přípravu na jejich nadcházející účast v soutěži. Naleznou zde jak potřebné teoretické základy, tak především různé typy úloh, od jednodušších, pro kategorie základních škol, až po ty z nejsložitějších. Jedním z cílů je také to, aby se žáci naučili rozpoznávat úlohy, ve kterých mohou geometrická zobrazení využívat, jelikož ne vždy lze z úlohy na první pohled určit, že výsledku je možné dosáhnout přes geometrická zobrazení, která často daný problém mnohonásobně zjednoduší.

V práci je nejprve nutné přiblížit tento pojem z teoretického hlediska, definovat, co to zobrazení vlastně je, vymezit jeho vlastnosti a především to, jak se zobrazení podle těchto charakteristik rozděluje na různé typy. Tento text musel být přizpůsoben různému věku potenciálních čtenářů, obsahuje tedy složitější matematické definice, které jsou však zároveň vysvětleny poměrně snadno pochopitelným způsobem. To je obsahem přibližně první třetiny práce. Teprve po této teoretické části lze přistoupit k hlavní části celé bakalářské práce, a to praktickému počítání geometrických úloh. Jak již bylo řečeno výše, tato část obsahuje úlohy různé složitosti s jejich podrobným řešením.

Každý příklad je doplněn názorným obrázkem tvořeným v programu GeoGebra, vystihujícím danou geometrickou transformaci, jelikož u většiny zde řešených úloh je umění znázornit si graficky daný problém nepostradatelné pro jeho správné vyřešení.

1 GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

Úvodní kapitola této práce je věnována vymezení pojmů a vlastností týkajících se geometrických zobrazení. Jelikož v úlohách matematických olympiád se u geometrických úloh na toto téma setkáváme především s úlohami ve dvoudimenzionálním afinním prostoru, i tato kapitola popisuje výhradně geometrická zobrazení v rovině.

Vzhledem k tomu, že se jedná o látku běžně vyučovanou na základních i středních školách, bylo při vysvětlování daných pojmů čerpáno především z učebnic a skript.

1.1 DEFINICE POJMU GEOMETRICKÉ ZOBRAZENÍ A JEHO VLASTNOSTI

Ze všeho nejdříve si vymezíme samotný pojem „zobrazení": Máme libovolné množiny A, B. Zobrazením f nazveme předpis, jenž každému prvku $a \in A$ přiřazuje právě jeden prvek $b \in B$. Značíme f: $A \rightarrow B$ nebo také $b = f(a)$. Vztah mezi prvky množin A a B můžeme nazvat též binární relací, která představuje podmnožinu všech uspořádaných dvojic daných prvků, tedy $[a, b] \in f$. Prvek a nazýváme vzorem, prvek b pak jeho obrazem. [1]

Geometrické zobrazení se značí pomocí velkých písmen abecedy, nejčastěji Z, dále například S, P, A … Definujeme ho jako předpis, kdy každému libovolnému bodu roviny (vzor) přiřazujeme právě jeden bod (obraz) té samé roviny. Vzor značíme velkým písmenem, např. X … jejich obrazy následně značíme X' … Tento vztah zapisujeme symbolicky různými způsoby, a to například:

$Z : X \rightarrow X'$

$Z(X) = X'$

příp. $[X, X'] \in Z$

Pokud platí, že $Z(X) = X$, tedy že obraz splývá se svým vzorem, nazveme bod X samodružným bodem daného zobrazení.

Jestliže hovoříme o množině bodů, tedy o útvaru U, tak jeho obrazem chápeme množinu bodů U' (obraz útvaru U). Útvar nazveme jako samodružný pokud platí $Z(U) = U$. Neplatí však, že samodružný útvar musí být útvarem samodružných bodů. V případě, že samodružný útvar není tvořen pouze samodružnými body, nazývá se slabě samodružný.

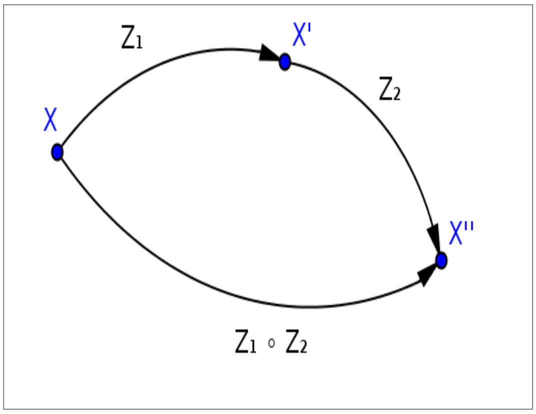
Je-li tomu opačně a každý bod tohoto útvaru je samodružný, nazveme jej silně samodružným.

Pokud jsou všechny body jistého zobrazení samodružné, což znamená, že každému bodu *X* v něm přiřazujeme tentýž bod *X*, nazýváme toto zobrazení identitou.

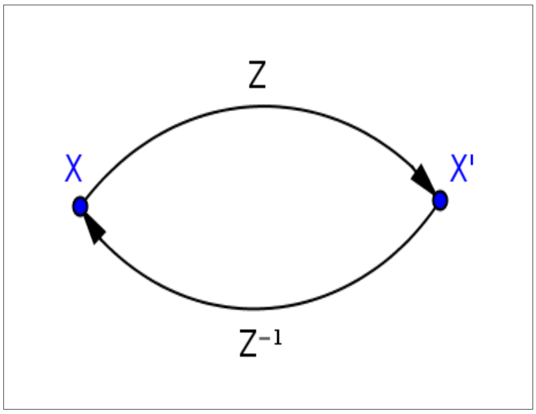
Jednotlivá zobrazení lze skládat (*obr. 1.1*). V případě, že máme zobrazení Z_1 a Z_2 je jejich složením (značení $Z_1 \circ Z_2$) myšleno zobrazení:

$Z(X) = X'' \Leftrightarrow (\exists X')[Z_1(X) = X' \wedge Z_2(X') = X'']$.

Zjednodušeně můžeme zapsat jako $Z = Z_1 \circ Z_2$, opačný vztah ale obecně neplatí (skládání zobrazení není komutativní), tedy $Z_1 \circ Z_2 \neq Z_2 \circ Z_1$.



Obrázek 1.1: Skládání zobrazení



Obrázek 1.2: Inverzní zobrazení

V případě, že je zobrazení *Z* prosté (2 různým vzorům náleží 2 různé obrazy), lze k němu vytvořit inverzní zobrazení Z^{-1} (*obr. 1.2*), kde platí, že pokud $Z(X) = X'$, tak $Z^{-1}(X') = X$.

[2], [3], [4]

2 VYBRANÉ TYPY GEOMETRICKÝCH ZOBRAZENÍ

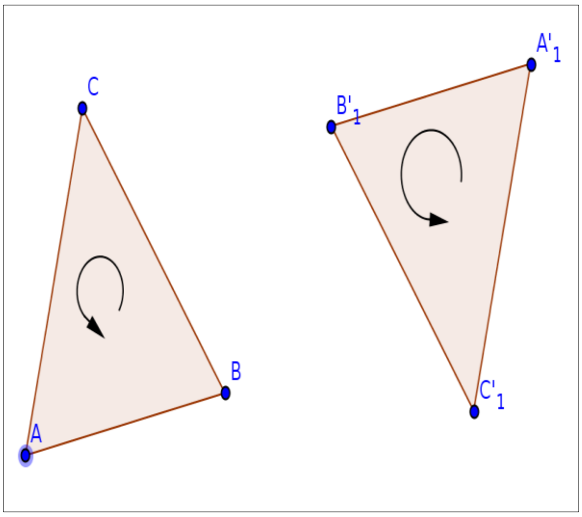
V následující kapitole budou definovány a popsány vybrané typy geometrických zobrazení v eukleidovském prostoru (afinní prostor, v jehož zaměření je definován skalární součin vektorů), a to zobrazení shodná a podobná. Kritériem jejich rozlišení jsou vlastnosti, které jsou v těchto zobrazeních zachovávány. Dalšími typy se zde zabývat nebudeme, jelikož se složitější druhy zobrazení v úlohách matematických olympiád (vzhledem k nízkému věku jejich účastníků) nevyskytují.

Definice u jednotlivých druhů jsou převzaty ze skript *Geometrie 1 – Základy geometrie v rovině* od autora doc. RNDr. Miroslava Lávičky, Ph.D. [2]

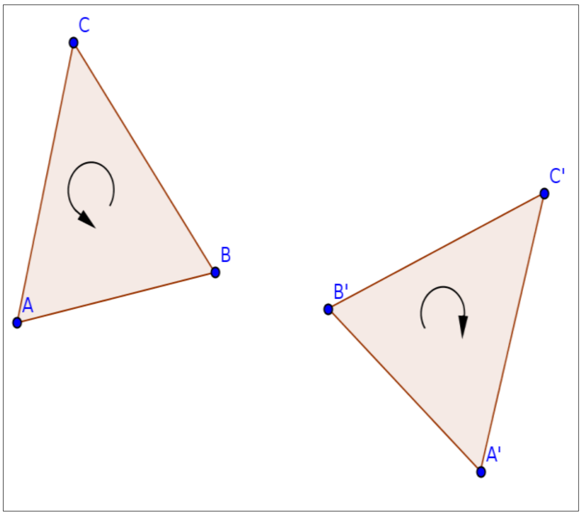
2.1 SHODNÉ ZOBRAZENÍ (SHODNOST, IZOMETRIE)

Zobrazení označíme jako shodné právě tehdy, když obrazem každých dvou bodů *X, Y* dané roviny jsou body *X′, Y′*, pro něž platí: $|XY| = |X'Y'|$, což znamená, že shodnost zachovává vzdálenost dvou bodů (délku úsečky), zachovává také velikost úhlů a rovnoběžnost přímek. Z toho plyne i zachovávání obsahů a objemů. Všechna shodná zobrazení jsou prostá.

Rozlišujeme shodnost přímou a nepřímou (*obr. 2.1* a *2.2*).



Obrázek 2.1: Přímá shodnost



Obrázek 2.2: Nepřímá shodnost

Přímá zachovává orientaci úhlů. Do této skupiny spadají:

- identita
- středová souměrnost
- posunutí
- otočení

Nepřímá shodnost orientaci úhlů obrací. Sem náleží:

- osová souměrnost
- posunutá souměrnost

V následujících podkapitolách se budeme zabývat jednotlivými typy shodnosti.

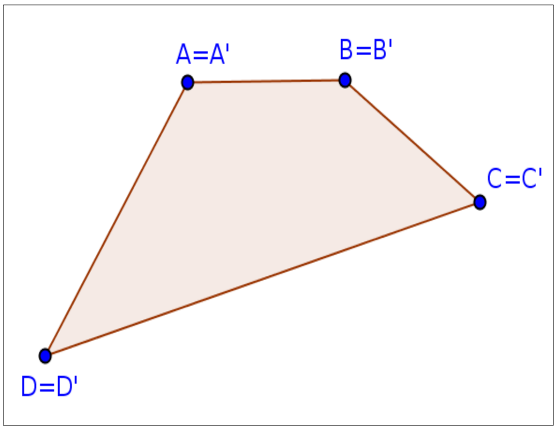
[3], [5],

2.1.1 IDENTITA

Definice 2.1.1: ***Identitou*** *v rovině nazýváme zobrazení, které každému bodu X přiřazuje týž bod X.*

Značíme *I*.

Jak již bylo zmíněno výše, identita je takový druh zobrazení, kde je každý bod i každý útvar v rovině samodružný. Znamená to tedy, že se každý bod (útvar) zobrazuje sám na sebe, což lze zapsat jako $Z: X \rightarrow X' = X$ ($Z: U \rightarrow U' = U$). [2]



Obrázek 2.3: Identita

2.1.2 STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

Definice 2.1.2: *Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu S přiřazuje týž bod S a každému bodu X ≠ S bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX', se* ***nazývá středová souměrnost*** *(souměrnost podle středu). Bod S se nazývá* ***střed souměrnosti****. Značíme S(S) (popř. SS).*

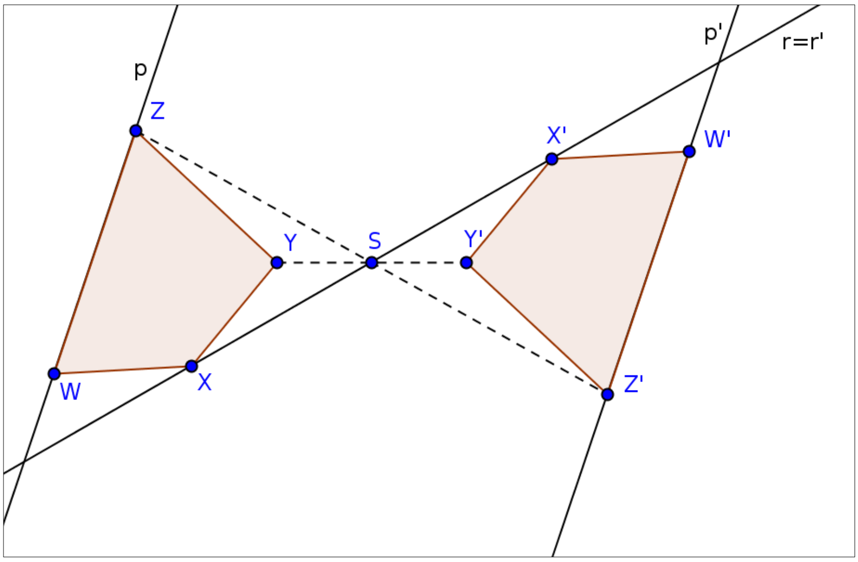
V tomto geometrickém zobrazení je pevnému bodu *S* (střed souměrnosti) přiřazen bod *S'*, u něhož platí, že *S'* = *S*. Již z názvu je patrné, že jde o souměrnost kolem tohoto středu. Libovolnému bodu *X* ≠ *S* přiřazuje bod *X'* a platí, že středem úsečky *XX'* je právě bod *S*, který je zároveň jediným samodružným bodem tohoto zobrazení. Body *X*, *X'* nazýváme jako souměrně sdružené podle *S*. Přímka procházející středem je samodružná a přímky, které bodem *S* neprocházejí, jsou rovnoběžné (*obr. 2.4*).

Středová souměrnost je jednoznačně určena právě středem *S*, nebo dvěma nesamodružnými odpovídajícími si body *X*, *X'*.

Geometrický útvar *U*, nazveme středově souměrným podle středu *S* právě tehdy, platí-li: *U* = *U'*, tedy pokud je útvar samodružný ve středové souměrnosti.

Popisované zobrazení můžeme též chápat jako speciální případ otočení o 180°, kde střed souměrnosti je zároveň středem otočení.

[2], [3], [5]



Obrázek 2.4: Středová souměrnost

2.1.3 POSUNUTÍ (TRANSLACE)

Definice 2.1.3: *Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu X přiřazuje bod X' ≠ X tak, že pro každou další dvojici odpovídajících si bodů Y, Y' platí, že úsečky XY' a YX' mají společný střed, se nazývá* ***posunutí*** *(**translace**). Směr, který je určen odpovídajícími body XX' se nazývá* ***směr posunutí****, velikost úsečky XX'* ***velikost posunutí*** *a pořadí bodů X, X'* ***smysl posunutí****. Značíme T (XX') (popř. T (X → X') nebo $T_{XX'}$).*

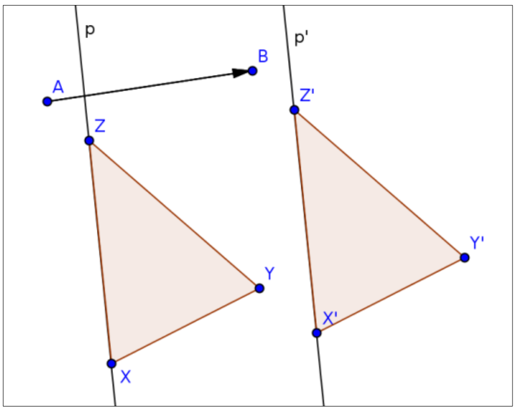
Při translaci platí, že bodu *X* je přiřazen bod *X′*, přičemž $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, kde $\overrightarrow{AB}$ je orientovaná úsečka, která jednoznačně určuje směr posunutí, jeho velikost a smysl (ten by se dal popsat jako orientace vektoru určitého směru). Tento vztah určuje, že případný útvar *ABX′X* je rovnoběžník. Posunutí je tedy určeno 2 odpovídajícími si body a orientovanou úsečkou.

Pokud je úsečka nulové velikosti, posunutí se stává identitou, jelikož se každý bod zobrazí sám na sebe. V opačném případě, tedy má-li úsečka nenulovou velikost, se zde nenachází žádný samodružný bod. Samodružné přímky ale nalézt lze a jsou to přímky rovnoběžné se směrem posunutí. Přímkám jiného směru odpovídají přímky s nimi rovnoběžné.

Inverzní zobrazení je určeno stejnou velikostí a směrem, má však opačný smysl. Zapisujeme: *T* (*X′* → *X*).

Posunutí lze určit také složením 2 osových souměrností, jež mají rovnoběžné osy. Tento vztah definuji více v jedné z dalších podkapitol, která bude pojednávat právě o osové souměrnosti.

[2], [3]



Obrázek 2.5: Posunutí

2.1.4 OTOČENÍ (ROTACE)

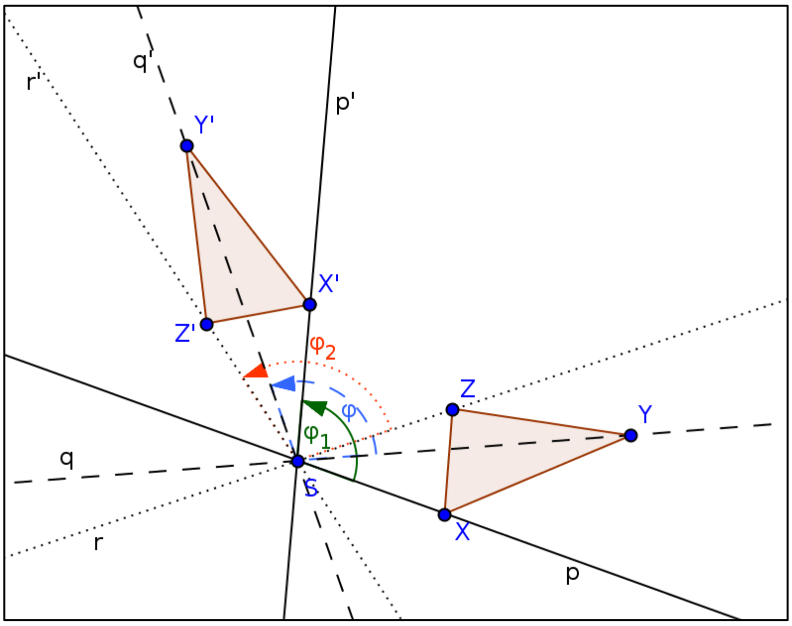
Definice 2.1.4: *Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu S přiřazuje týž bod S a každému bodu $X \neq S$ bod X' tak. že $XS \cong X'S$ a $\measuredangle X'SX = \varphi$, kde φ je daný orientovaný úhel, se nazývá **otočení** (**rotace**) kolem bodu S o orientovaný úhel φ. Bod S se nazývá **střed otočení**, úhel φ se nazývá **úhel otočení** a orientace úhlu φ udává **smysl otočení**. Značíme R (S, φ) (popř. $R_{S,\varphi}$).*

Bod *S* představuje střed otočení a *φ* je úhel otočení (orientovaný úhel). K jednoznačnosti rotace je kromě těchto dvou prvků nutné znát ještě smysl otočení. Ten může být kladný (orientace proti směru hodinových ručiček), nebo záporný (orientace po směru hodinových ručiček). Bodu *S* v tomto zobrazení přiřazujeme týž bod, tedy $S' = S$. V případě, že úhel otočení $\varphi \neq 2k\pi$ je *S* jediným samodružným bodem a otočení se nazývá neidentické. Libovolnému bodu *X*, kde $X \neq S$ odpovídá bod *X'*. Mezi úsečkami *SX* a *SX'* platí vztah $|SX| = |SX'|$. Tato vzdálenost je poloměr kružnice se středem *S*, na které leží právě body *X* a *X'*. Úsečku *SX* lze označit jako počáteční rameno a úsečku *SX'* jako koncové rameno konstantního orientovaného úhlu otočení $\varphi = \measuredangle XSX'$. Koncové rameno tedy dostaneme otočením úsečky *SX* o úhel *φ*.

Pokud se úhel $\varphi = k\pi$, přičemž *k* je sudé, nastává identita (obraz je posunut po kružnici o *k*-násobky 360°) a všechny body a přímky jsou samodružné. Je-li *k* liché, jedná se o středovou souměrnost a samodružné jsou všechny přímky procházející bodem *S*.

Inverzní zobrazení se (stejně jako posunutí) liší smyslem otočení, který je opačný. Střed a velikost úhlu zůstává stejná jako u původního zobrazení. Značíme *R* (*S, -φ*). Rotaci lze rozložit na 2 osové souměrnosti, ve kterých jsou jejich osy k sobě různoběžné. Více tuto situaci popíši v podkapitole zabývající se osovou souměrností.

[2], [3], [5]



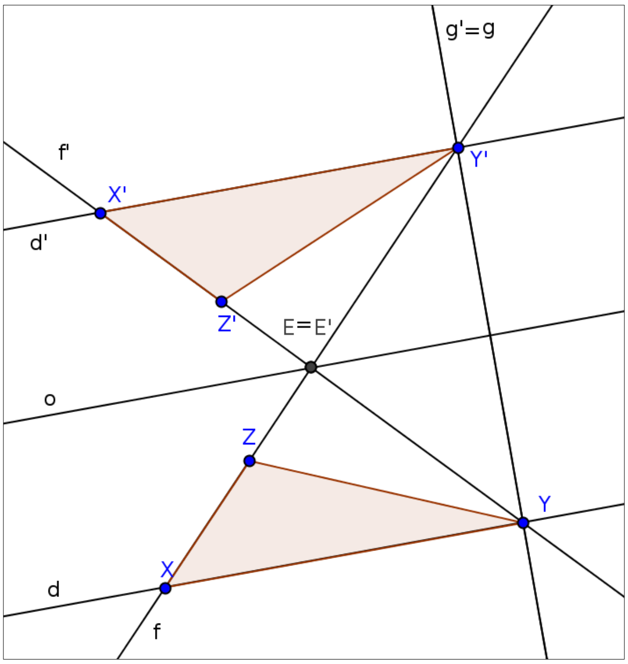
Obrázek 2.6: Otočení

2.1.5 OSOVÁ SOUMĚRNOST

Definice 2.1.5: *Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu $A \in o$, kde o je pevně zvolená přímka, přiřazuje týž bod A a každému bodu $X \notin o$ přiřazuje bod X' tak, že přímka o je osou úsečky XX', se nazývá **osová souměrnost** (**souměrnost podle osy**). Přímka o se nazývá **osa souměrnosti**. Značíme O (o) (popř. O_O).*

Osová souměrnost se na rozdíl od všech předchozích druhů shodných zobrazení řadí k nepřímým shodnostem, což znamená, že obrazy orientovaných úhlů mají opačnou orientaci než jejich vzory. Prvkem, který tuto souměrnost jednoznačně určuje je osa *o*, dalším může případně být i dvojice navzájem si odpovídajících nesamodružných bodů. To jsou všechny body nenáležející ose *o*. Naopak bod, nacházející se na ose je samodružný, tedy zobrazí se sám na sebe ($X = X'$) Z toho plyne, že je osa souměrnosti samodružnou přímkou (je to dokonce přímka samodružných bodů). Přímka, na níž leží bod *X* a zároveň i jeho obraz *X'* (a zároveň $X, X' \notin o$) je kolmá k ose *o* a vzdálenost obou bodů k ose je stejná. Také platí, že dvě navzájem různoběžné odpovídající si přímky se protnou právě v ose souměrnosti, kde se nachází jejich jediný společný bod. Toto zobrazení spadá mezi tzv. involutorní zobrazení, tedy taková, která jsou inverzní sama k sobě, což můžeme popsat jako $(X')' = X$, nebo $O^{-1} = O$. Tedy pokud složíme 2 osové souměrnosti (se stejnými osami), můžeme dostat identitu, kterou lze popsat vztahem $O \circ O^{-1} = O^{-1} \circ O = I$.

[2], [3], [5]



Obrázek 2.7: Osová souměrnost

Skládáním osových souměrností (nejvýše tří) lze vytvořit jakékoliv shodné zobrazení v rovině.

Pokud skládáme 2 osové souměrnosti, mohou nastat 3 případy vzájemné polohy jejich os souměrnosti. Tyto osy si označíme o_1 a o_2 (samotné zobrazení označíme O_1 a O_2).

1. $o_1 = o_2$: osy jsou totožné, tedy splývají. Pokud nastává tato situace, tak platí, že jsou totožná i zobrazení O_1 a O_2 a složením těchto zobrazení vzniká identita. Zapisujeme: $O_1 \circ O_2 = O_1 \circ O_1 = I$.
2. $o_1 \parallel o_2$: osy jsou vzájemně rovnoběžné různé a složením vzniká posunutí. Zapisujeme: $O_1 \circ O_2 = T$. Smysl translace je určen pořadím os a její velikost (tedy vzdálenost mezi vzorem a obrazem) odpovídá dvojnásobku vzdálenosti mezi o_1, o_2. Jak vyplývá z vlastností osové souměrnosti, směr posunutí je na tyto osy kolmý.
3. $o_1 \nparallel o_2$: osy jsou různoběžné. V tomto případě mohou nastat ještě 2 různé situace. Pokud je úhel mezi přímkami tvořícími osy souměrností různý od 90°, dochází k rotaci. Úhel mezi těmito osami určuje velikost úhlu otočení v rotaci, ten je totiž roven dvojnásobku velikosti úhlu, který svírají o_1 a o_2. Smysl rotace je dán pořadím těchto os a středem otočení je jejich vzájemný průsečík.

   Ve speciálním případě, když jsou na sebe osy souměrností kolmé, z čehož plyne, že velikost úhlu složeného zobrazení je 180° dochází k středové souměrnosti (speciální případ rotace). Středem otočení je opět průsečík jednotlivých os. Zapisujeme: $O_1 \circ O_2 = R$, příp. $O_1 \circ O_2 = S$.

Při skládání 3 osových souměrností může dojít k 4 různým případům vzájemné polohy jednotlivých os (o_1, o_2, o_3). Dané souměrnosti značíme O_1, O_2 a O_3.

1. $o_1 = o_2 = o_3$: všechny osy jsou totožné. Zapisujeme: $O_1 \circ O_2 \circ O_3 = O_1 \circ O_1 \circ O_1 = I \circ O_1 = O_1$. U tohoto příkladu lze vycházet z předchozího prvního příkladu, kde je dáno, že složením dvou shodných osových souměrností vzniká identita. Z toho přímo vyplývá, že složením identity a totožné osové souměrnosti vznikne opět osová souměrnost.
2. $o_1 \cap o_2 \cap o_3 = \{S\}$: tento zápis udává, že osy jsou vzájemně různoběžné a mají průsečík v jediném bodě, označeném S. Zapisujeme: $O_1 \circ O_2 \circ O_3 = O_1 \circ (O_2 \circ O_3) = O_1 \circ R(S, 2\varphi) = (O_1 \circ O_1) \circ O'_3 = I \circ O'_3 = O'_3$. Skládání si rozložíme na části, ve kterých budeme využívat poznatky ze skládání 2 osových souměrností. Z části $O_1 \circ (O_2 \circ O_3)$ víme, že průnikem o_2 a o_3 je jistý bod S a úhel mezi těmito osami je φ. Složením 2 různoběžných osových souměrností ($O_2 \circ O_3$) vzniká rotace R se středem $\{S\}$ a velikostí 2φ. Dalším krok: $O_1 \circ R(S, 2\varphi)$ si můžeme upravit na $R = O_1 \circ O'_3$, jelikož rotaci lze rozložit na 2 osové souměrnosti. O'_3 bereme jako obecnou osovou souměrnost a opět platí, že průnikem o_1 a o'_3 (obecná osa) je $\{S\}$ a úhel mezi nimi se rovná φ. Další postup je již celkem jasný. Složením ($O_1 \circ O_1$) vznikne identita, jejímž složením s osovou souměrností O'_3 vzniká osová souměrnost O'_3.
3. $o_1 \parallel o_2 \parallel o_3$: osy všech tří osových souměrností jsou rovnoběžné. Jejich složení zapisujeme: $O_1 \circ O_2 \circ O_3 = O_1 \circ (O_2 \circ O_3) = O_1 \circ T = (O_1 \circ O_1) \circ O'_3 = I \circ O'_3 = O'_3$. Postupujeme jako v předchozím případě. V části $O_1 \circ (O_2 \circ O_3)$ víme, že osa o_2 je rovnoběžná s osou o_3. Již bylo řečeno, že složením dvou osových souměrností majících tyto osy vzniká posunutí, které lze následně rozložit zpětně na 2 osové souměrnosti ($T = O_1 \circ O'_3$, o O'_3 platí totéž, jako v případě rotace). Jedna jejich osa je zvolena libovolně (musí být kolmá k směru translace) a druhá je potom již určena jednoznačně (značíme $o_1 \parallel o'_3$). Tím se dostáváme k části $(O_1 \circ O_1) \circ O'_3 = I \circ O'_3 = O'_3$, která je stejná jako u skládání 3 osových souměrností s různoběžnými osami a dostáváme se ke stejnému výsledku.
4. $o_2 \cap o_3 = \{M\} \wedge M \notin o_1$: u tohoto případu jsou nejméně 2 osy různoběžkami a třetí z os zároveň neprochází jejich průsečíkem, což znamená, že uvedený předpis je pouhý příklad, jelikož nemusíme jednoznačně určit dané osy. Zapisujeme: $O_1 \circ O_2 \circ O_3 = O_1 \circ (O_2 \circ O_3) = O_1 \circ R(M, 2\varphi) = (O_1 \circ O'_2) \circ O'_3 = S(S) \circ O'_3 = O'_1 \circ (O''_2 \circ O'_3) = O'_1 \circ T$. Toto výsledné zobrazení se nazývá posunutá souměrnost (také posunuté zrcadlení), značené PS (o, $\overrightarrow{AB}$), případně $PS_{o,\overrightarrow{AB}}$, patřící stejně jako osová souměrnost mezi nepřímé shodnosti.

Z uvedených případů tedy vidíme, že při skládání 3 osových souměrností dostaneme v jednom z případů novou nepřímou shodnost, a to posunutou souměrnost, tvořenou osovou souměrností a posunutím.

Tedy při skládání sudého počtu nepřímých shodností vznikne přímá shodnost a při skládání jejich lichého počtu vznikne shodnost nepřímá.

[2]

2.2 PODOBNÁ ZOBRAZENÍ

Podobná zobrazení se od těch shodných liší v tom, že nezachovávají délku úsečky, ale zobrazují její k-násobek, kde platí, že $k > 0$ a nazývá se koeficient podobnosti. Tento vztah můžeme zapsat jako $|X'Y'| = k \cdot |XY|$. Pokud platí, že $k \neq 1$, hovoříme o vlastní podobnosti. Situaci, kde platí $k = 1$ nazveme nevlastní podobnost a jedná se o shodné zobrazení (speciální případ podobnosti). V případě tvorby inverzního zobrazení je koeficient k^{-1}. Dále jsou zachovány velikosti úhlů, rovnoběžnost přímek a poměry objemů a obsahů. I u podobnosti platí stejně jako u shodných zobrazení dělení na přímou a nepřímou podobnost. Princip tohoto členění se od shodností nijak neliší. Jedná se o zobrazení prosté.

Do této skupiny náležejí:

- stejnolehlost
- osová afinita
- středová kolineace
- kruhová inverze

Posledními dvěma zobrazeními se však v této části zabývat nebudu, jelikož úlohy na tato zobrazení se v matematických olympiádách nevyskytují.

[2]

2.2.1 STEJNOLEHLOST (HOMOTETIE)

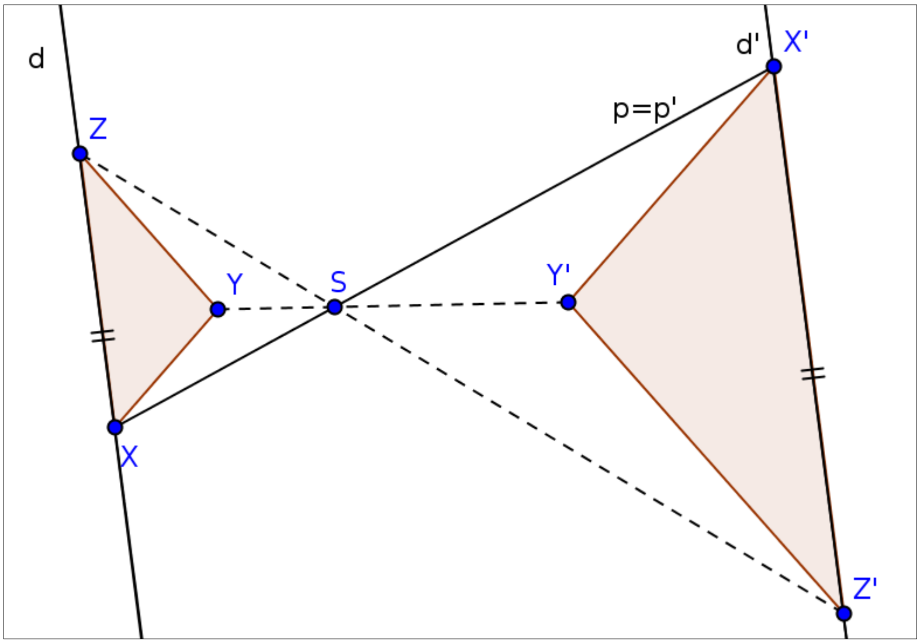
Definice 2.2.1: *Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu S přiřazuje týž bod S a každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že platí $(X'XS) = \kappa$, kde $\kappa \neq 0, 1$ je pevně zvolené reálné číslo, se nazývá* ***stejnolehlost (homotetie)****. Bod S se nazývá střed stejnolehlosti, číslo κ* ***koeficient stejnolehlosti****. Značíme $H(S, \kappa)$ (popř. $H_{S,\kappa}$).*

K jednoznačnému určení tohoto zobrazení je vždy nutné znát střed stejnolehlosti S. Nadále musíme znát alespoň koeficient κ (dělící poměr), nebo dvojici odpovídajících si bodů X, X', které nesmí splývat se středem S. Vzhledem k tomu, že bod S leží na přímce, která spojuje bod X a jeho obraz X' a mezi těmito body platí vztah: $|SX'| = |\kappa| \cdot |SX|$, je zobrazení bodu X' (případně jiného objektu) závislé na tom, zda je koeficient kladný nebo záporný. V případě, že je $\kappa > 0$, leží obraz X' na polopřímce SX. Pokud je $\kappa < 0$, náleží X' opačné polopřímce, než bod X, s počátečním bodem polopřímek S. V situaci, kdy se $\kappa = -1$

hovoříme o středové souměrnosti. Kdybychom si předem v definici neurčili podmínku, že $\kappa \neq 0, 1$, mohly by nastat následující situace: Pro $\kappa = 1$ dochází k identickému zobrazení, kde je každý bod samodružný. Pro $\kappa = 0$ se každý bod stejnolehlosti zobrazí do středu S. Z těchto všech poznatků vyplývá, že zobrazená úsečka je tedy κ-násobkem původní úsečky. Při splnění podmínky $\kappa \neq 1$, má zobrazení jediný samodružný bod, a to střed stejnolehlosti. V tomto zobrazení existuje nekonečně mnoho samodružných přímek – jsou to všechny přímky procházející středem stejnolehlosti. Přímky, které nesplňují tuto podmínku samodružné nejsou.

Inverzní zobrazení má vůči původní stejnolehlosti převrácený koeficient $H(S, \kappa^{-1})$.

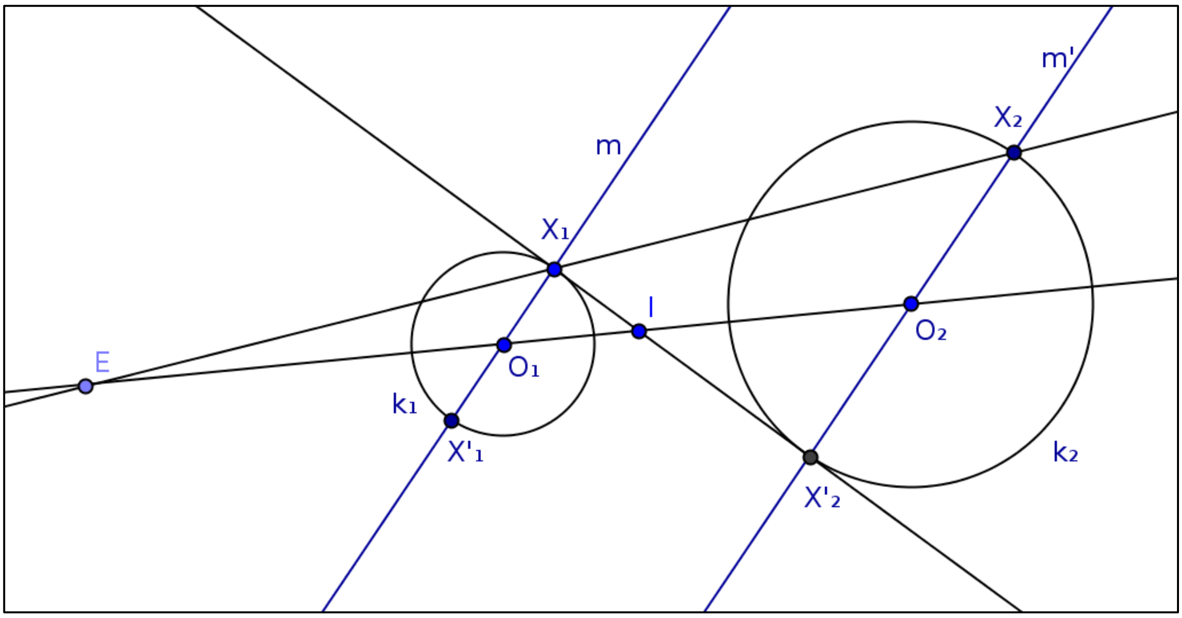
Orientace úhlů je zachována, mohli bychom proto stejnolehlost označit jako přímá podobnost.



Obrázek 2.8: Stejnolehlost s $\kappa < 0$

Trochu odlišná je stejnolehlost kružnic, kde obrazem kružnice k se středem O a poloměrem r, zapsáno $k\ (O; r)$ je kružnice k' se středem O' a poloměrem r', pro který platí, že $r' = |\kappa|\cdot r$. Zapisujeme $k'\ (O'; |\kappa|\cdot r)$. Stejnolehlost u dvou kružnic existuje vždy. Pokud máme kružnice k_1 a k_2, pro jejichž poloměry platí, že $r_1 \neq r_2$, nalezneme právě dvě stejnolehlosti. V případě, že se poloměry rovnají, stejnolehlost je pouze jedna a nachází se přesně mezi oběma středy kružnic, je tedy středovou souměrností. Vycházíme ze vztahu

$r_2 = |\kappa| \cdot r_1$, tedy $|\kappa| = \frac{r_2}{r_1}$ případně $\kappa = -\frac{r_2}{r_1}$. Pokud platí, že $\kappa > 0$, střed stejnolehlosti leží vně bodů O_1 a O_2. V opačném případě, tedy když $\kappa < 0$, nachází se střed stejnolehlosti mezi body O_1 a O_2 (tyto závěry vyplývají z charakteristik dělícího poměru, popsaného [2], str.61). Dostáváme tedy 2 středy stejnolehlosti. První bod (označíme *E*) nazveme vnější střed stejnolehlosti a druhý (označíme *I*) vnitřní střed stejnolehlosti. Pokud se 2 kružnice vzájemně dotýkají, je jedním ze středů stejnolehlosti vždy bod dotyku.



Obrázek 2.9: Příklad stejnolehlosti kružnic
[2], [3], [5],

2.2.2 OSOVÁ AFINITA

Definice 2.2.2: *Geometrické zobrazení v rovině, pro něž platí, že zobrazuje přímku na přímku, bod a jeho obraz leží na přímce daného směru s a body odpovídající samy sobě leží na dané přímce o, se nazývá* ***osová afinita****. Směr v rovině s se nazývá* ***směr afinity****, přímka o se nazývá* ***osa afinity****.*

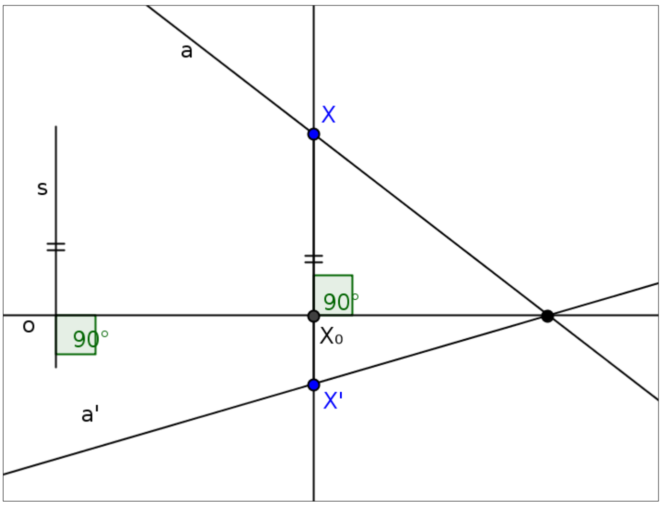
Osová afinita je značena *A* (*o*, *s*, *k*), kde *o* je osa afinity, *s* označujeme jako směr afinity, přičemž platí, že každá přímka, která prochází dvěma odpovídajícími si body (tedy vzorem a jeho obrazem, např. *X* a *X'*) náleží tomuto směru. Poslední prvek, označený *k,* nazýváme charakteristikou afinity. Je to konstantní číslo, udávající dělící poměr ($X'\ X\ X_0$), kde *X* a *X'* jsou 2 vzájemně různé odpovídající si body (mohou být libovolné – *k* na volbě těchto bodů nijak nezávisí) a X_0 představuje průsečík osy *o* a přímky určené body *X X'*. Přímky, které odpovídají směru afinity jsou samodružné a jediné samodružné body tohoto zobrazení jsou body osy. Osová afinita zachovává rovnoběžnost, a pokud je přímka různoběžná s osou, protíná se s odpovídající přímkou v jediném bodě na ose.

Osová afinita má inverzní zobrazení, značené A^{-1}, které se od zobrazení *A* liší svou charakteristikou, která se rovná k^{-1}. Z tohoto vztahu si lze odvodit, že pokud $k = -1$, jedná se o zobrazení samo k sobě inverzní (involuci). V případě pravoúhlé afinity se jedná o osovou souměrnost.

Toto zobrazení nelze jednoznačně označit za přímé či nepřímé. Záleží na jeho charakteristice. Pokud je $k > 0$, zachovává se orientace úhlů. V opačném případě, kdy platí, že $k < 0$ je orientace opačná.

Uvedené vztahy a charakteristiky však platí pouze u osových afinit, které nejsou elacemi. Elace je jedním z typů osové afinity, jenž nastává v případě, že je směr rovnoběžný s osou. Dalšími dvěma typy, které, stejně jako elaci, určujeme podle polohy směru afinity k její ose, jsou kosoúhlá afinita (směr je kosý k ose) a pravoúhlá afinita (směr kolmý k ose).

[2]



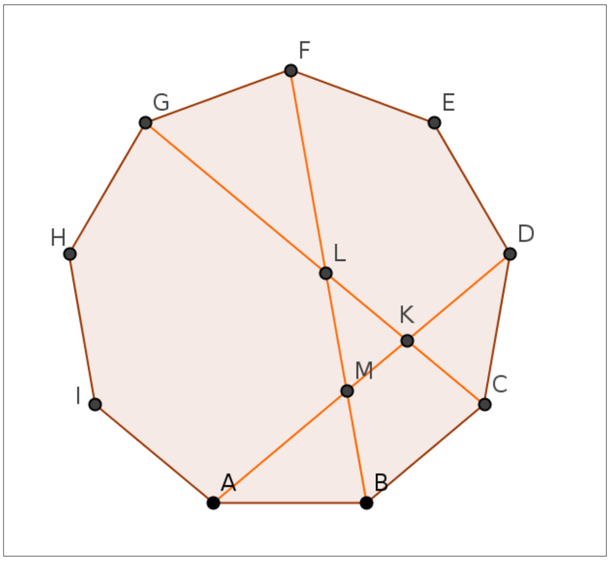
Obrázek 2.10: Pravoúhlá osová afinita

3 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

V této kapitole budeme podrobně řešit vybrané příklady z ročenek matematických olympiád, a to jak pro základní, tak i pro střední školy. Úlohy jsou vybrány ty, které souvisí s tématem bakalářské práce a k výsledku se tedy dospěje pomocí geometrických zobrazení. Každý příklad je nadepsán tak, aby bylo možné jednoznačně určit, z kterého ročníku a typu matematické olympiády je převzat. K lepší názornosti jsou jednotlivé úlohy doplněny obrázky.

1. **V pravidelném devítiúhelníku *ABCDEFGHI* označme *K, L, M* průsečíky dvojic přímek *AD* a *CG, BF* a *CG, AD* a *BF*. Najděte 18 různých trojúhelníků podobných s trojúhelníkem *KLM,* jejichž všechny vrcholy jsou vrcholy daného devítiúhelníku.**

(37. ročník matematické olympiády na středních školách, C-I-6) [6]

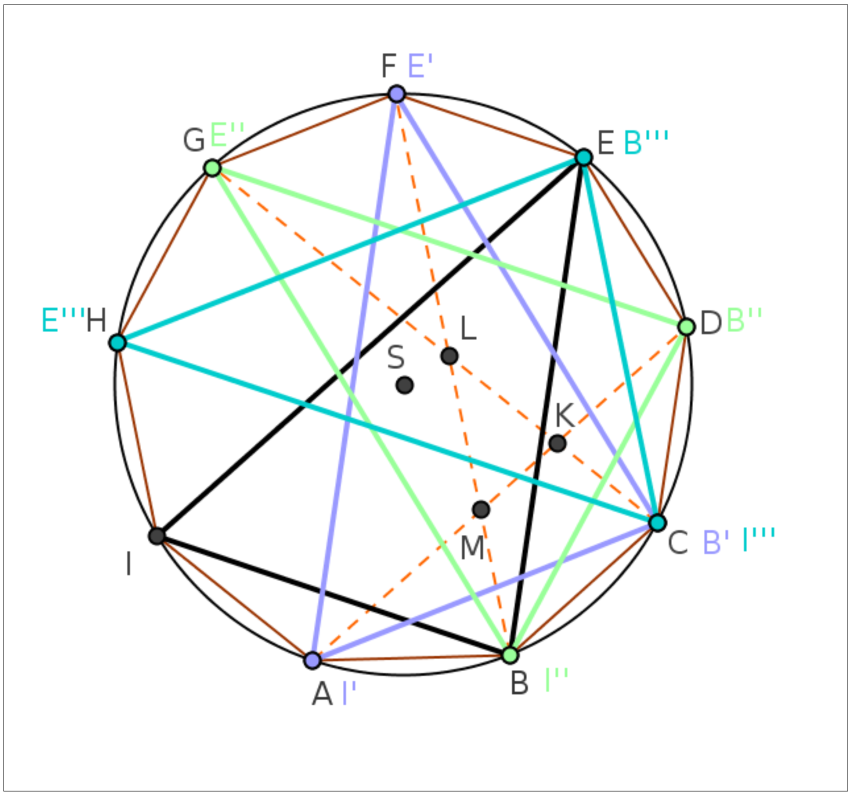


Obrázek 3.1: Devítiúhelník ABCDEFGHI s průsečíky vybraných přímek.

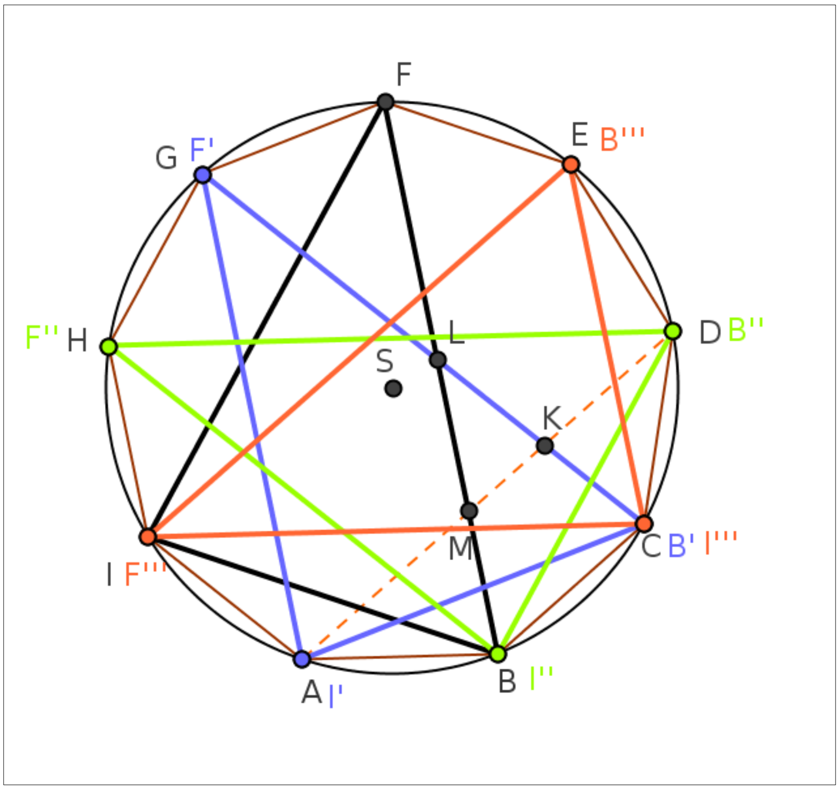
Řešení: Abychom mohli získat trojúhelníky podobné s trojúhelníkem *KLM*, musíme zjistit jeho jednotlivé úhly, tedy $\measuredangle KLM$, $\measuredangle LMK$, $\measuredangle MKL$. Jejich velikost získáme pomocí věty o obvodovém a středovém úhlu. Ta říká, že velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku příslušného obvodového úhlu. Pokud tedy máme např. $\measuredangle ASC$, kde *S* je střed kružnice opsané danému devítiúhelníku, pak platí vztah $|\measuredangle ASC| = 2 \cdot |\measuredangle AFC|$(obvodový úhel je určen libovolně, musí pouze procházet stejnými krajními body).

Víme, že středový úhel kružnice *k*, odpovídající jedné straně devítiúhelníku má velikost 40° ($\frac{360°}{9}$), díky čemuž snadno zjistíme, že $|\measuredangle BSG| = 160°$, a tedy $|\measuredangle BFG| = 80°$. Dále vypočteme stejným způsobem $|\measuredangle FGC| = 60°$(jelikož $|\measuredangle FSC| = 120°$). Součet všech úhlů v trojúhelníku dává celkem 180°, proto snadno dopočteme, že $|\measuredangle FLG| = 40°$. Z obrázku je jasné, že úhly *FLG* a *KLM* jsou vrcholové, jejich velikosti jsou si tedy rovny a platí: $|\measuredangle KLM| = 40°$. Stejným způsobem si vypočteme zbylé 2 úhly trojúhelníka. Zvolíme si středový úhel *ASC*, kde $|\measuredangle ASC| = 80°$, z čehož plyne, že $|\measuredangle ADC| = 40°$. Z $|\measuredangle GSD| = 120°$určíme $|\measuredangle GCD| = 60°$. Zbylý úhel opět určíme jednoduchým dopočtem do 180° a z vrcholových vlastností úhlů *CKD* a *MKL* určíme, že $|\measuredangle MKL| = 80°$. Úhel *KML* už opět pouze dopočteme do celkového součtu 180°v trojúhelníku, a zjistíme tedy, že $|\measuredangle KML| = 60°$. Vnitřní úhly trojúhelníka jsou tedy 40°, 60° a 80°. Nyní potřebujeme nalézt trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají stejnou velikost a jsou zároveň obvodovými úhly devítiúhelníku.

Víme, že velikost obvodového úhlu kružnice *k*, který odpovídá jedné straně devítiúhelníku je 20°. Jelikož chceme úhly v trojúhelníku velikostí 40°, 60° a 80°, rozdělíme kružnici *k* na 3 oblouky. Ty odpovídají dvěma, třem a čtyřem stranám devítiúhelníku. Trojúhelník při splnění této podmínky může být zvolen naprosto libovolně. Můžeme si tedy určit například trojúhelník *IBE*. Pokud použijeme geometrické zobrazení rotaci, kde si za střed otočení *S* zvolíme střed kružnice *k* a úhel otočení je roven celým násobkům 40° (dojde k otočení právě o 1 stranu devítiúhelníku), dostaneme dalších 8 trojúhelníků shodných s *IBE*, a máme tedy 9 trojúhelníků podobných trojúhelníku *KLM* (*obr.3.2*). Zbylých 9 získáme výběrem trojúhelníku *IBF* a jeho otočením o celočíselné násobky 40°, stejně jako u trojúhelníku *IBE* (*obr. 3.3*). Celkem tedy dostaneme 18 trojúhelníků podobných s *KLM*.



Obrázek 3.2: Trojúhelník IBE a jeho první 3 zobrazení.

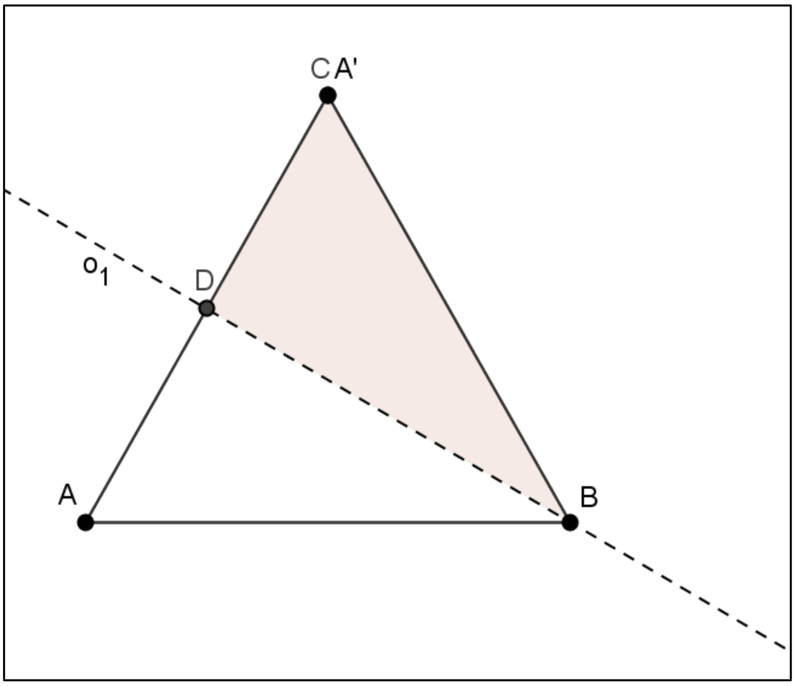


Obrázek 3.3: Trojúhelník IBF a jeho první 3 zobrazení.

2. **Petra má rovnostranný trojúhelník *ABC*. Nejdřív trojúhelník přehnula tak, aby bod *A* splynul s bodem *C*. Potom vzniklý útvar přehnula tak, že bod *B* splynul s bodem *C*. Tento útvar poté obkreslila na papír a zjistila, že jeho obsah je 12 cm^2. Určete obsah původního trojúhelníku.**

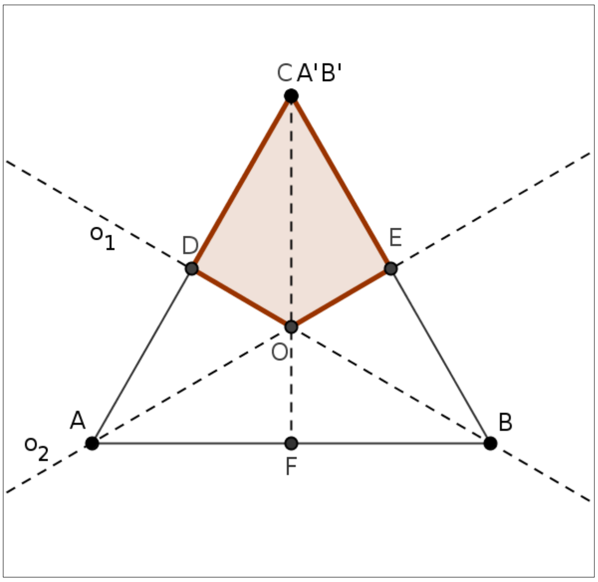
(62. ročník matematické olympiády pro základní školy, Z7-II-2) [7]

Řešení: Při řešení tohoto příkladu využijeme osovou souměrnost. Pokud v rovnostranném trojúhelníku chceme, aby se nám jeden bod zobrazil na druhý (čili splynul s ním), stačí najít střed strany, na které se oba tyto body nacházejí. V prvním případě tedy nalezneme střed úsečky *AC*. Pojmenujeme jej například *D*. Tímto bodem povedeme přímku procházející zároveň i protějším vrcholem trojúhelníka. Sestrojenou přímku, která představuje osu souměrnosti, si označíme o_1 a s její pomocí zobrazíme bod *A* do bodu *C*, tedy *C = A'* (*obr. 3.4*). Tím vytvoříme trojúhelník *DBC* (původní trojúhelník přeložíme podle této osy), který má přesně poloviční obsah počátečního trojúhelníku *ABC*.



Obrázek 3.4: Zobrazení bodu A

V dalším kroku máme u nově vzniklého trojúhelníka zobrazit bod *B* na bod *C*. Opět nejprve nalezneme střed úsečky, tentokrát ale pracujeme s úsečkou *BC*. Její střed pojmenujeme například *E* a vedeme jím přímku do bodu *A* (náležejícímu původnímu trojúhelníku). Tímto způsobem vytvoříme druhou osu souměrnosti, tu označme o_2. Po zobrazení bodu *B* do *C* (*C* = B') a přehnutí trojúhelníku *DBC* podle nově vytvořené osy získáme nový útvar, a to čtyřúhelník, jehož vrcholy jsou body *E*, *C*, *D* a nově vytvořený vrchol, který vznikl jako průsečík o_1 a o_2, nazveme jej tedy *O* (*obr.3.5*).



Obrázek 3.5: Nově vzniklý čtyřúhelník DOEC

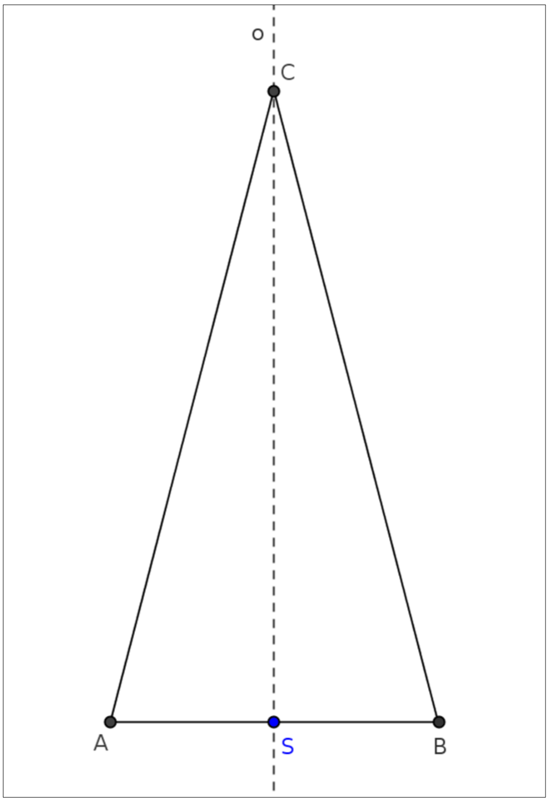
Víme, že útvar *DOEC* má obsah 12 cm^2. Vzhledem k tomu, že bychom chtěli zjistit obsah celého trojúhelníka *ABC*, musíme si nejprve určit, jaký podíl na původním obsahu má nově vytvořený čtyřúhelník. Určíme si tedy ještě střed strany *AB*, pojmenujeme jej *F* a sestrojíme přímku procházející body *F* a *C*. Vzhledem k tomu, že trojúhelník *ABC* je rovnostranný, osy jeho stran tvoří zároveň i osy souměrnosti tohoto trojúhelníka a dělí jej na 3 shodné části – tedy 3 shodné čtyřúhelníky *DOFA*, *EOFB* a *DOEC*. Z jejich vzájemné shodnosti jasně plyne, že jejich obsahy jsou totožné, tedy každý z nich má obsah 12 cm^2. Celkový obsah trojúhelníku *ABC* je roven součtu obsahů čtyřúhelníků, z nichž se skládá, což lze zapsat:

$S_{ABC} = 3 \cdot 12$, tedy $S_{ABC} = 36cm^2$

3. **Je dán rovnoramenný trojúhelník *ABC* se základnou *AB* dlouhou 10 cm a rameny dlouhými 20 cm. Bod *S* je středem základny *AB*. Rozdělte trojúhelník *ABC* čtyřmi přímkami procházejícími bodem *S* na pět částí se stejným obsahem. Zjistěte, jak dlouhé úsečky vytnou tyto přímky na ramenech trojúhelníku *ABC*.**

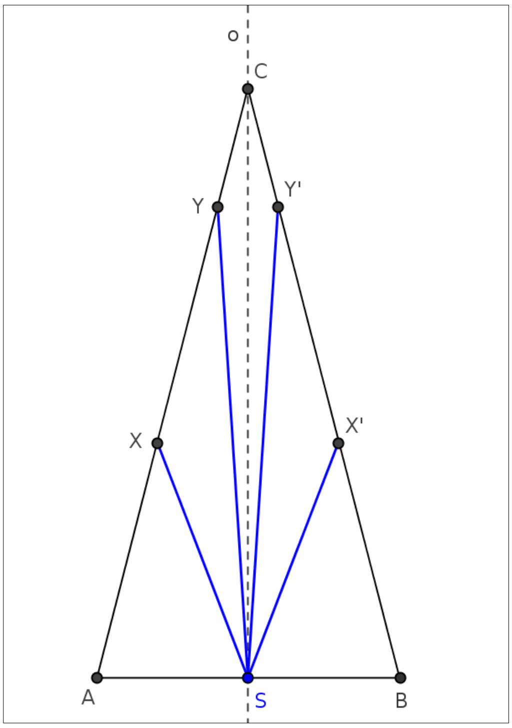
(61. ročník matematické olympiády pro základní školy, Z8-I-2) [7]

Řešení: Vzhledem k tomu, že je trojúhelník *ABC* rovnoramenný a bod *S* rozděluje jeho základnu na 2 poloviny, dělí osa (pojmenujeme ji například *o*), která prochází body *S* a *C*, tento trojúhelník na 2 shodné poloviny (*obr. 3.6*). Lze také říci, že je trojúhelník *ABC* osově souměrný podle osy *o*. V tomto případě platí, že i přímky, kterými máme trojúhelník *ABC* rozdělit na pět obsahově shodných částí, jsou osově souměrné podle *o*. Průsečíky těchto přímek se stranou *AC* si označíme *X* a *Y*. Tím vytvoříme dvě dvojice osově souměrných trojúhelníků a u vrcholu *C* nám vznikne jeden osově souměrný čtyřúhelník. Tyto nově vzniklé trojúhelníky mají tedy značení *ASX*, *XSY* a *YSC* (z něhož vznikne v osové souměrnosti již zmíněný čtyřúhelník).



Obrázek 3.6: Trojúhelník ABC

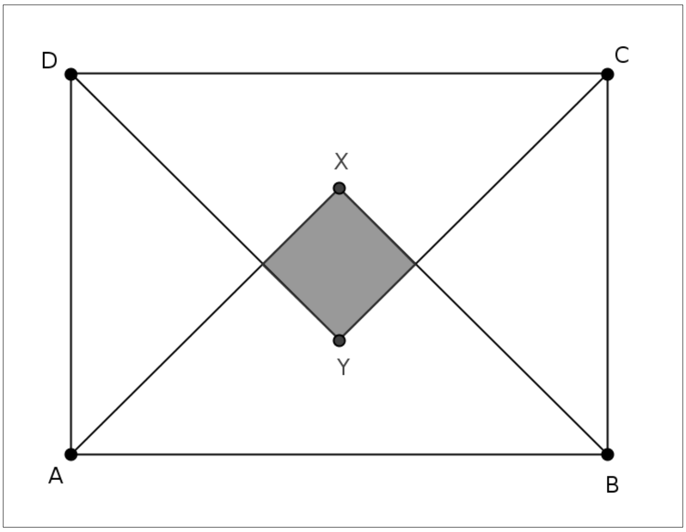
Jak plyne ze zadání obsahy prvních dvou trojúhelníků a dvojnásobek obsahu posledního trojúhelníka by měly být shodné. Ze vzorce na výpočet obsahu trojúhelníku, který zní: $S = \frac{c \cdot v_c}{2}$ víme, že k tomu abychom mohli zajistit stejný obsah požadovaných útvarů musíme znát jednu ze stran trojúhelníka a jeho příslušnou výšku. Jelikož máme za úkol zjistit délky jednotlivých nově vytvořených úseček náležejících ramenům trojúhelníka *ABC*, budeme pracovat s výškami, příslušnými těmto úsečkám. Vzhledem k těmto skutečnostem dospějeme k tomu, že výška, vycházející ze společného vrcholu *S* je u všech tří trojúhelníků stejná. Z výše uvedeného vztahu pro obsah je tedy jasné, že aby platila rovnost obsahů útvarů, musí platit i rovnost následující: $|AX| = |XY| = 2|YC|$. Zároveň je jasná platnost vztahu $|AC| = |AX| + |XY| + |YC| = 20cm.$ Z první uvedené rovnosti vyplývá, že $5|YC| = 20cm,$ tedy $|YC| = 4cm.$ Poté, co získané výsledky dosadíme do původního vztahu, dojdeme k závěru, že $|AX| = |XY| = 8cm.$ Vzhledem k souměrnosti dostaneme stejný výsledek i v druhé polovině trojúhelníku *ABC*. Na každém z ramen trojúhelníku existuje dvojice úseček dlouhých 8 cm a jedna dlouhá 4 cm s jedním koncovým bodem splývajícím s vrcholem trojúhelníku *C*. (*obr. 3.7*).



Obrázek 3.7: Trojúhelník ABC s pěti částmi o stejném obsahu

4. **Máme obdélník *ABCD* (viz *obr. 3.8*). Délky stran *AB* a *BC* jsou v poměru 7:5. Uvnitř obdélníku *ABCD* leží body *X* a *Y* tak, že trojúhelníky *ABX* a *CDY* jsou pravoúhlé rovnoramenné s pravými úhly ve vrcholech *X* a *Y*. Plocha společná oběma trojúhelníkům je vybarvena šedě a tvoří čtverec o obsahu 72 cm^2. Určete délky stran *AB* a *BC*.**

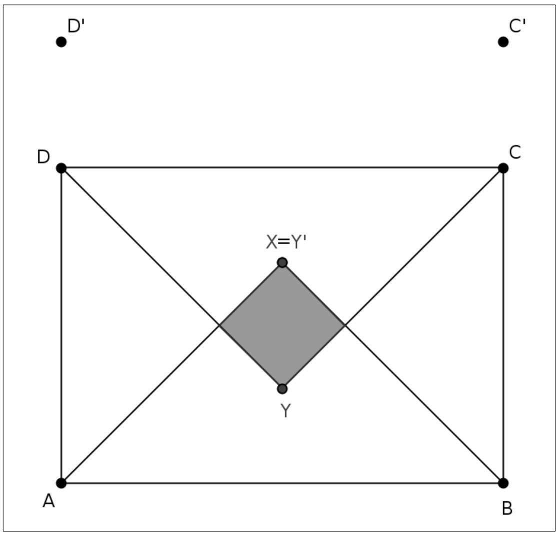
(61. ročník matematické olympiády pro základní školy, Z9-III-3) [7]



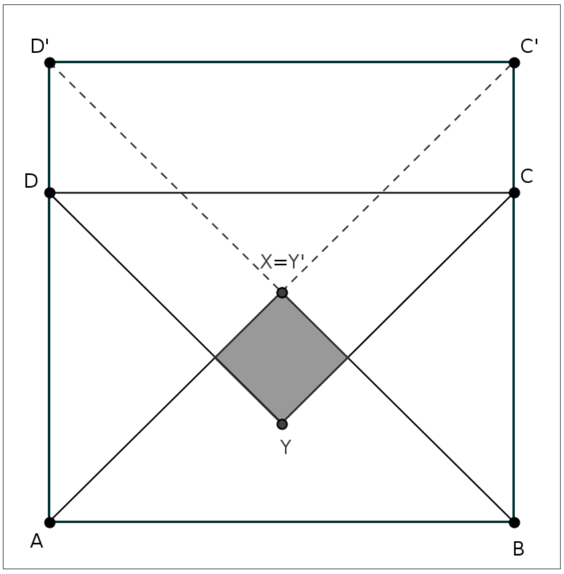
Obrázek 3.8: Obdélník ABCD

Řešení: Zadaný příklad lze řešit více způsoby, my si zde uvedeme ten, kde si k úspěšnému vyřešení dopomůžeme translací. Jako první vypočteme délku úhlopříčky *u* šedého čtverce, čímž zjistíme vzájemnou vzdálenost bodů *X* a *Y*. Jelikož známe jeho obsah *S*, můžeme k výpočtu využít vztah$S = \frac{1}{2}u^2$. Postupně si vyjádříme *u*: $u^2 = 2 \cdot S \Rightarrow u = \sqrt{2 \cdot S}$. Po dosazení čísel dostaneme $u = \sqrt{2 \cdot 72} = \sqrt{144} = 12(cm)$.

Jeden ze zadaných rovnoramenných trojúhelníků, trojúhelník *CDY* posuneme tak, aby se bod *Y* zobrazil do bodu *X*. Jak je vidět z obrázku, velikost posunutí je délka úsečky *XY*, což je zároveň úhlopříčka *u*. Předchozím výpočtem jsme určili, že velikost této úhlopříčky je 12 cm. Dostaneme tedy vztah *X = Y'*. Body *D* a *C* se zobrazí jako *D'* a *C'* (*obr. 3.9*). Jak víme ze zadání, oba původní trojúhelníky *ABX* i *CDY* jsou pravoúhlé a rovnoramenné, při posunutí se žádná z těchto vlastností nemění. Jelikož se oba trojúhelníky, tedy *ABX* a *C'D'Y'* dotýkají vrcholy, ve kterých mají pravé úhly a zároveň jsou shodných rozměrů se vzájemně rovnoběžnými základnami, dojdeme k závěru, že útvar *ABC'D'* musí být čtverec (*obr. 3.10*).



Obrázek 3.9: Zobrazení bodů CDY

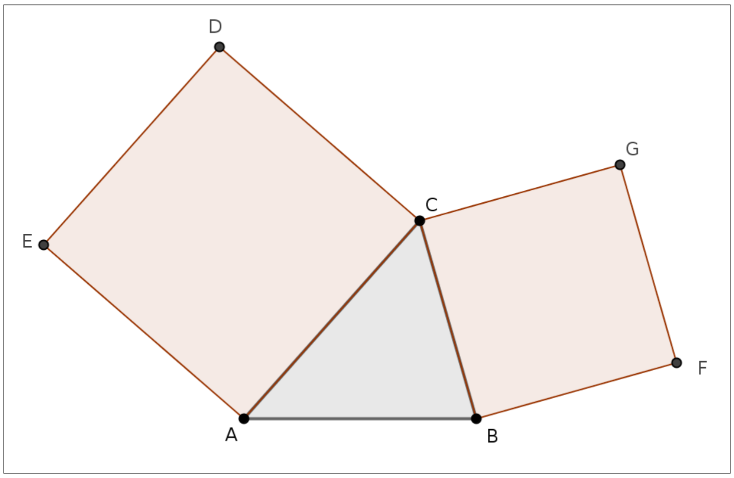


Obrázek 3.10: Čtverec ABC'D'

V zadání je uvedeno, že úsečka *AB* představuje 7 dílů (poměr stran *AB:BC* je 7:5). V tom případě, vzhledem k vlastnostem čtverce, představuje 7 dílů i úsečka *BC'*. Rozdíl mezi úsečkami *BC* a *BC'* je tedy přesně 2 díly, zároveň víme, že tento rozdíl je roven úhlopříčce *u*, jejíž velikost je 12 cm. Snadno již tedy dopočteme délku jednoho dílu, která je 6 cm. Jakmile jsme zjistili toto, není již problém určit délku stran *AB* a *BC*. Strana *AB* se spočte vztahem $|AB| = 7 \cdot 6 = 42(cm)$a u strany *BC* platí vztah $|BC| = 5 \cdot 6 = 30(cm)$.

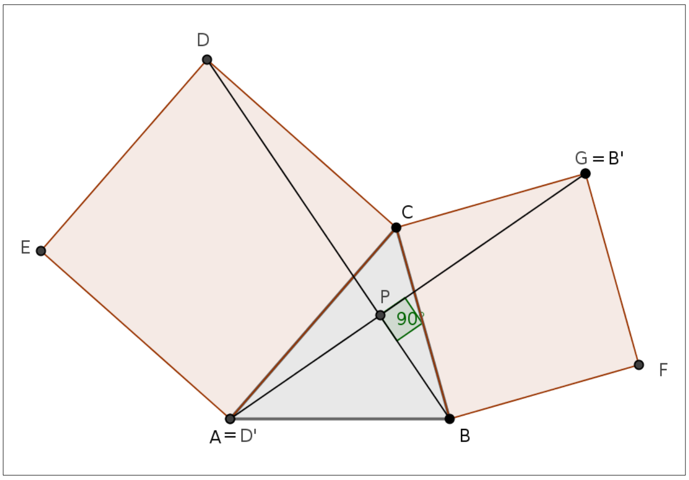
5. **Vně daného trojúhelníku *ABC* jsou sestrojeny čtverce *ACDE*, *BCGF*. Dokažte, že |*AG*| = |*BD*|. Dále ukažte, že středy obou čtverců spolu se středy úseček *AB* a *DG* jsou vrcholy čtverce (*obr.3.11*).**

(60. ročník matematické olympiády pro střední školy, B-II-3) [8]



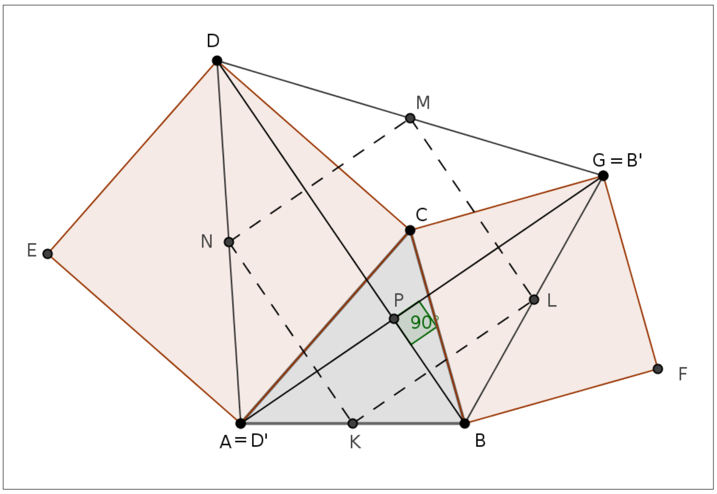
Obrázek 3.11: Trojúhelník ABC a jeho 2 vnější čtverce

Řešení: Zadaný příklad má opět více možných způsobů řešení. Zde se budeme zabývat tím, které k dokázání požadovaných vlastností využívá rotace. Víme, že úhly *BCG* a *ACD* jsou pravé. Pokud provedeme rotaci bodu *B* kolem vrcholu *C* právě o 90°, zobrazí se nám tento bod do bodu *G* (tedy *G* = *B'*). Pokud to samé provedeme i pro bod *D*, tak zjistíme, že ten se nám v rotaci o úhel 90° zobrazí do bodu *A* (*A* = *D'*). V tom případě je obrazem úsečky *BD* úsečka *GA*. Z toho plyne, že $|AG| = |BD|$ (rotace, jako shodné zobrazení zachovává délku úseček) a jelikož jsme provedli otočení o 90° jsou na sebe tyto úsečky kolmé (*obr. 3.12*).



Obrázek 3.12: Rotace bodů B,D a úsečky BD

Druhou část zadání dokážeme tak, že si nejprve s pomocí již zadaných útvarů vytvoříme čtyřúhelník *ABGD*. Na jednotlivých stranách nově vzniklého čtyřúhelníku nalezneme jejich středy a nazveme je po řadě *K*, *L*, *M*, *N*. Vzhledem k tomu, že úsečky *BG* a *AD* jsou zároveň i úhlopříčkami čtverců *BCGF* a *ACDE*, leží body *L* a *N* ve středech těchto čtverců. Pokud z těchto bodů vytvoříme úsečky *KL* a *MN* vytvoříme tak zároveň střední příčky trojúhelníků *AGB* a *AGD*. Vzhledem k vlastnostem středních příček víme, že $|KL| = \frac{1}{2}|AG| = |MN|$a mezi těmito třemi přímkami platí vztah rovnoběžnosti$KL \parallel AG \parallel MN$. Zároveň přímky KN a LM jsou středními příčkami trojúhelníků BDA a BDG. Proto platí stejný vztah jako v předchozím případě, tedy $|KN| = \frac{1}{2}|BD| = |LM|$a $KN \parallel BD \parallel LM$ (*obr. 3.13*). Z těchto vlastností vidíme, že *KLMN* je rovnoběžník. Jelikož se nám v předchozím odstavci povedlo dokázat, že$|AG| = |BD|$, a že jsou tyto dvě přímky navíc kolmé ($AG \perp BD$), došli jsme k závěru, že rovnoběžník *KLMN* je čtverec (jsou na sebe kolmé podstavy trojúhelníků, proto jsou kolmé i jejich střední příčky). Tím jsme dokázali i druhé tvrzení a úlohu můžeme považovat za splněnou.

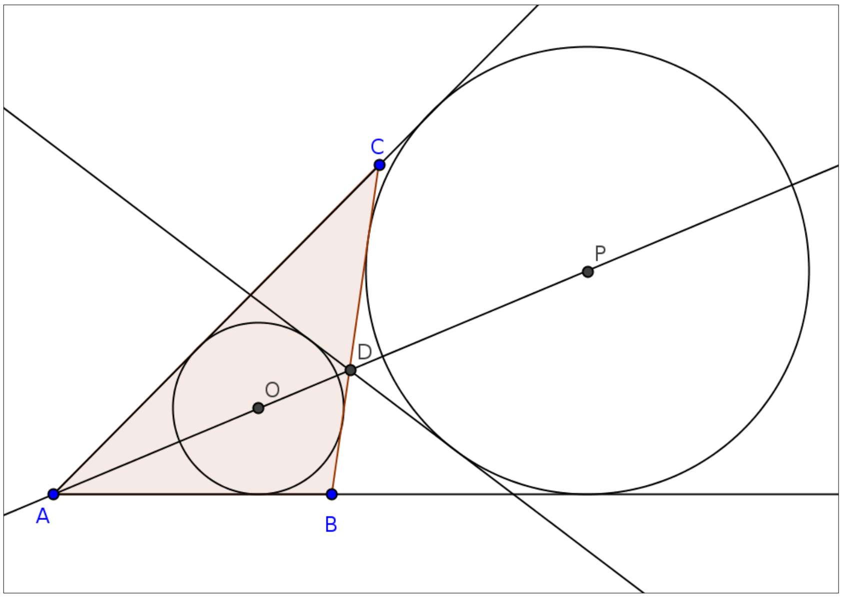


Obrázek 3.13: Čtverec KLMN

6. V libovolném trojúhelníku *ABC* označme *O* střed kružnice vepsané, *P* střed kružnice připsané ke straně *BC* a *D* průsečík osy úhlu *CAB* se stranou *BC*. Dokažte, že platí $\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}$.

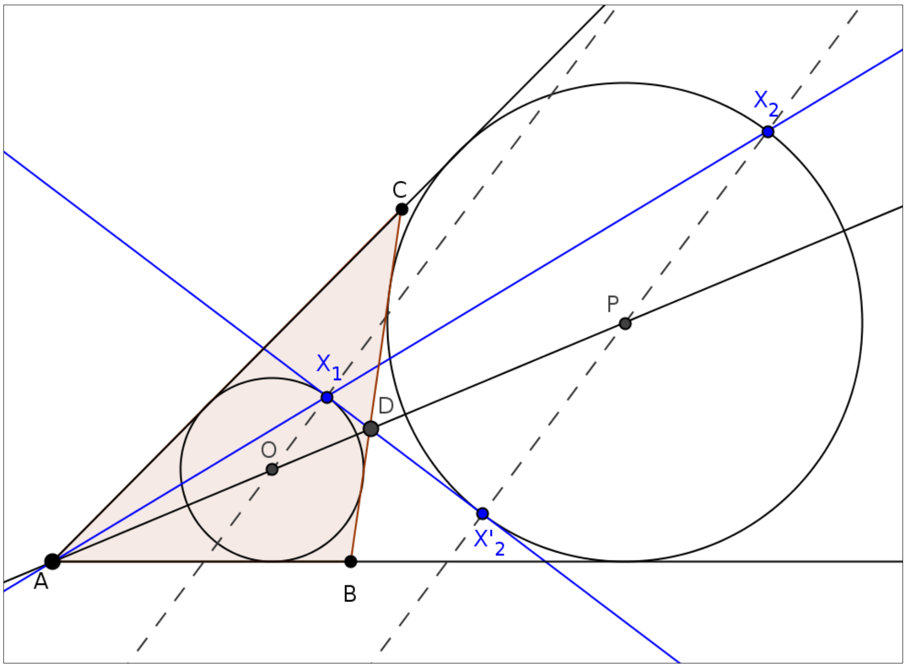
(Kružnicí připsanou ke straně *BC* rozumíme takovou kružnici, která se dotýká jednak strany *BC*, jednak obou polopřímek opačných k polopřímkám *BA* a *CA*.)

(59. ročník matematické olympiády pro střední školy, A-III-4) [8]



Obrázek 3.14: Trojúhelník ABC s oběma zadanými kružnicemi

Řešení: Jak víme z teoretické části práce, každé dvě kružnice jsou stejnolehlé. Jedním z možných způsobů dokázání požadovaného vztahu je tedy využití stejnolehlosti kružnice vepsané trojúhelníku *ABC* a kružnice připsané straně *BC*. Z obrázku *3.14* můžeme vidět, že vnitřním středem stejnolehlosti je bod *D*. Ten zjistíme tak, že si na menší z kružnic zvolíme bod X_1 a zkonstruujeme přímku protínající tento bod a zároveň střed kružnice *O*. S touto přímkou vedeme rovnoběžku procházející středem *P* u větší z kružnic. Průsečík rovnoběžky a druhé kružnice, nacházející se ve stejné polorovině vymezené přímkou $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ nazveme X_2, průsečík v opačné polorovině X'_2. V místě, kde se přímka spojující body X_1 a X'_2 protne s přímkou procházející oběma středy kružnice, vznikne vnitřní střed stejnolehlosti, tedy bod *D*. Vnější střed stejnolehlosti vznikne jako průsečík přímky $\overleftrightarrow{X_1X_2}$ s přímkou spojující středy kružnic. V našem případě se tento střed nachází v bodě *A* (*obr. 3.15*). Existují tedy 2 stejnolehlosti, které se od sebe liší pouze znaménkem koeficientu stejnolehlosti a zobrazují bod *O* na bod *P*.



Obrázek 3.15: Stejnolehlost kružnic

Též můžeme říci, že obrazem kružnice vepsané se středem *O* je ve stejnolehlosti kružnice připsaná straně *BC*, se středem *P*. Z tohoto vzájemného vztahu vyplývá, že mezi poměry vzdáleností středů obou kružnic od vnitřního středu stejnolehlosti a jejich vzdáleností od vnějšího středu stejnolehlosti je rovnost. Zapisujeme: $\frac{|DP|}{|DO|} = \frac{|AP|}{|AO|}$. Tento vztah můžeme přepsat následovně: $\frac{|AP|-|AD|}{|AD|-|AO|} = \frac{|AP|}{|AO|}$. Provedeme úpravu:

$$\frac{|AP|}{|AD|-|AO|} - \frac{|AD|}{|AD|-|AO|} = \frac{|AP|}{|AO|}$$

$$|AP| \cdot |AO| - |AD| \cdot |AO| = |AP| \cdot (|AD| - |AO|)$$

$$|AP| \cdot |AO| - |AD| \cdot |AO| = |AP| \cdot |AD| - |AP| \cdot |AO|$$

$$2 \cdot |AP| \cdot |AO| = |AP| \cdot |AD| + |AD| \cdot |AO|$$

$$2 \cdot |AO| \cdot |AP| = |AD| \cdot (|AP| + |AO|)$$

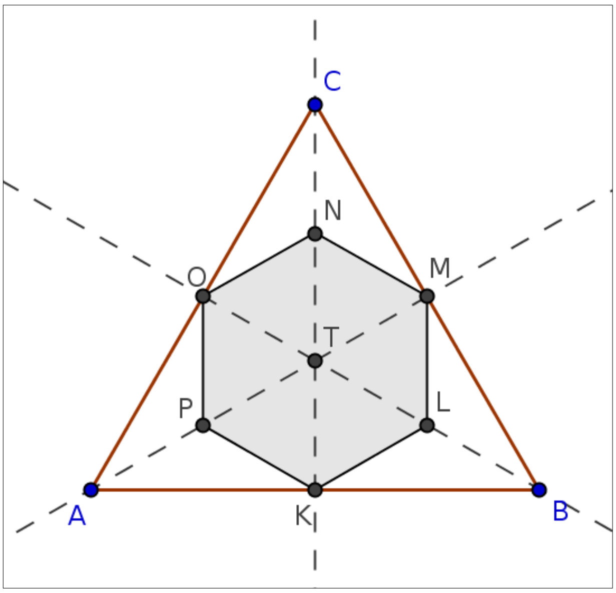
Výsledný vztah ještě vydělíme nenulovým součinem $|AP| \cdot |AO| \cdot |AD|$a vyjde nám:

$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}$, což je přesně výraz, který jsme chtěli dokázat. Tím je úloha splněna.

7. **Do rovnostranného trojúhelníku *ABC* je vepsán pravidelný šestiúhelník *KLMNOP* tak, že body *K*, *M*, *O* leží po řadě ve středech stran *AB*, *BC* a *AC*. Vypočtěte obsah šestiúhelníku *KLMNOP*, jestliže obsah trojúhelníku *ABC* je 60 cm^2.**

(59. ročník matematické olympiády pro základní školy, Z9-III-4) [7]

Řešení: Nejprve do zadaného trojúhelníku *ABC* vepíšeme pomocí os úhlů pravidelný šestiúhelník (*obr. 3.16*).



Obrázek 3.16: Vepsání pravidelného šestiúhelníku

Z vytvořeného obrázku a především z vlastností vytvořených objektů (rovnostrannost, pravidelnost) víme, že osy úhlů trojúhelníka jsou zároveň osy souměrnosti. Oba útvary jsou v tom případě osově souměrné podle tří os souměrnosti. Následné řešení je tedy založeno na vlastnostech osové souměrnosti. Z těch přímo vyplývá, že těžiště trojúhelníku i šestiúhelníku se nachází v jednom společném bodě, označeném *T*. Osy souměrnosti jsou totiž navíc i těžnicemi obou útvarů. Zároveň dělí trojúhelník *ABC* na šest shodných pravoúhlých trojúhelníků. Každý z nich je úsečkami, tvořícími strany šestiúhelníku rozdělen na dva další trojúhelníky. Celkem tedy máme šest shodných trojúhelníků z šestiúhelníku *KLMNOP* a ze zbylé části trojúhelníka *ABC* jsme dostali opět šest shodných trojúhelníků.

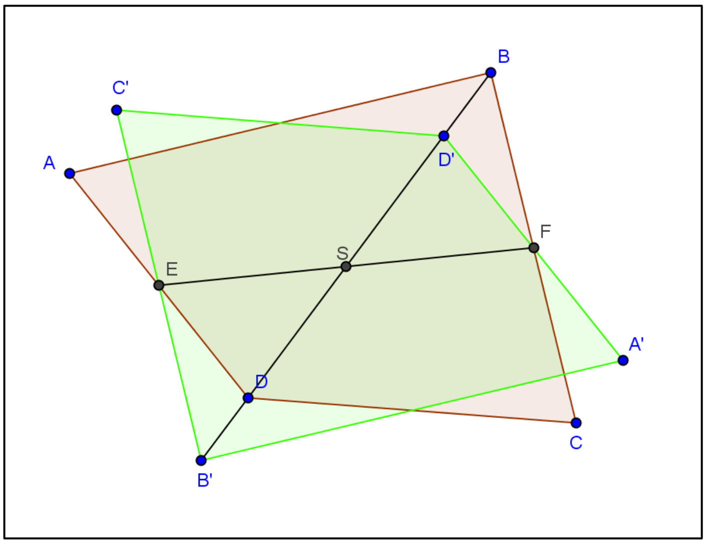
Jelikož známe obsah celého trojúhelníku *ABC* a chceme vypočítat obsah šestiúhelníku *KLMNOP*, potřebujeme zjistit, v jakém poměru jsou k sobě nově vytvořené menší trojúhelníky náležející šestiúhelníku a zbytku původního trojúhelníka. Pro snadnější určování a lepší přehlednost si zvolíme konkrétní dvojici trojúhelníků, a to například *PKT* a *AKP*. Vzhledem k tomu, že úsečka *AM* tvořící jednu ze stran obou trojúhelníků je těžnicí, budeme dále vycházet z vlastností těžiště a těžnic, které říkají, že těžiště dělí těžnici v trojúhelníku v poměru 2:1, přičemž dva díly v našem případě náležejí úsečce *AT* a jeden díl úsečce *TM*. Mezi jejich velikostmi je tedy vztah $|AT| = 2 \cdot |TM|$. Z pravidelnosti šestiúhelníku *KLMNOP* vyplývá $|PT| = |TM|$ (všechny trojúhelníky mají stejnou délku ramen). Pokud tento poznatek spojíme i s předchozím vztahem $|AT| = 2 \cdot |TM|$, dojdeme k závěru, že platí rovnost: $|AP| = |PT|$. K výpočtu obsahu trojúhelníku potřebujeme znát jednu ze stran a výšku k této straně. V trojúhelnících *PKT* a *AKP* jsme zjistili stejnou velikost stran *AP* a *PT* a jak je vidět z obrázku, příslušné výšky k těmto stranám jsou shodné, proto se oba trojúhelníky shodují i v obsahu.

Vzhledem k tomu, že se šestiúhelník *KLMNOP* skládá z šesti těchto trojúhelníků a zbytek trojúhelníku *ABC* taktéž, je celková plocha trojúhelníku *ABC* složena z jejich součtu, tedy z 12 trojúhelníků. Ze zadání víme, že těchto 12 trojúhelníků má celkový obsah 60 cm^2 (= obsah trojúhelníku *ABC*). Jednoduchým podílem si zjistíme obsah jedné části, a ten pak vynásobíme počtem trojúhelníků v šestiúhelníku. Zapisujeme: $S = \frac{60}{12} \cdot 6 = 30(cm^2)$. Případně bychom si mohli říci, že obsah šestiúhelníka *KLMNOP* je k obsahu trojúhelníka *ABC* v poměru 6:12 = 1:2, proto celkový obsah vydělíme dvěma a vyjde nám stejný výsledek, tedy 30 cm^2.

8. **Úhlopříčka konvexního čtyřúhelníku půlí úsečku spojující středy dvou protilehlých stran tohoto čtyřúhelníku. Dokažte, že tato úhlopříčka dělí čtyřúhelník na dvě stejně velké části.**

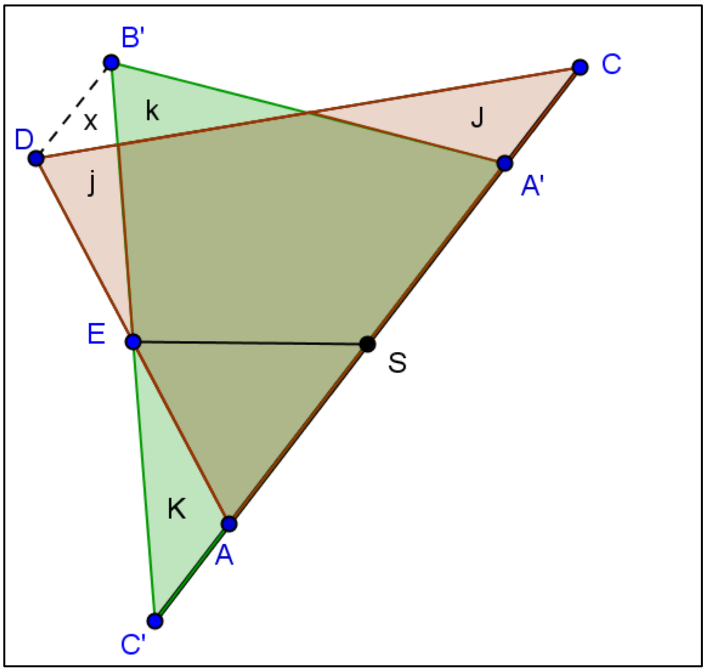
(50. ročník matematické olympiády pro základní školy, Z9-I-2) [7]

Řešení: Při řešení této úlohy si vypomůžeme obrázkem. Nejprve si sestrojíme konvexní čtyřúhelník (čtyřúhelník, jehož každý úhel je menší než 180°) spolu s jednou jeho úhlopříčkou a úsečkou spojující středy protilehlých stran, přesně jak je v zadání. Pojmenujme ho například *ABCD*. Následně tento čtyřúhelník zobrazíme ve středové souměrnosti, podle středu S, což je právě průsečík úhlopříčky a úsečky spojující středy protilehlých stran (*obr. 3.17*). Pro větší přehlednost jsme zobrazený čtyřúhelník *A'B'C'D'* barevně odlišili.



Obrázek 3.17: Zobrazení ve středové souměrnosti

Vzhledem k vlastnostem středové souměrnosti nám bude stačit, když budeme pracovat pouze s jednou polovinou obou obrazců, rozdělených právě podle úhlopříčky tedy s trojúhelníky *ACD* a *C'A'B'*, jelikož dohromady nám dávají celý původní obrazec (*obr.3.18*).



Obrázek 3.18: Dva překrývající se trojúhelníky

Části, které se překrývají, mají stejný obsah, v dalším postupu je tedy nemusíme brát v úvahu. Po jejich vynechání nám zbývají čtyři menší trojúhelníky, které jsme si označili *J*, *j* z původního čtyřúhelníku *ABCD*, a *K*, *k* z čtyřúhelníku *A'B'C'D'*, a představují zobrazení dvou menších trojúhelníků z opačné poloroviny čtyřúhelníku *ABCD* vymezené úhlopříčkou *C'C*. Pokud tedy dokážeme, že obsah trojúhelníků *J + j = K + k*, dokážeme tím zároveň i to, že úhlopříčka dělí čtyřúhelník na dvě stejné části. K tomuto důkazu využijeme shodnost trojúhelníků podle věty *sus*. Jak plyne ze zadání, úhlopříčka se protíná s úsečkou (v našem případě pojmenovanou *EF*) spojující středy protilehlých stran. Víme tedy, že bod *E* půlí úsečku *C'B'*, a proto platí $|C'E| = |EB'|$. To samé platí pro úsečku *AD*, tedy $|AE| = |ED|$. Z vlastností vrcholových úhlů plyne, že v trojúhelnících *K* a *j* jsou úhly u vrcholu *E* shodné. Tím jsme dokázali shodnost dvou stran a úhlu ve dvou trojúhelnících a tedy platnost vztahu *K = j + x*, kde jsme si jako *x* označili doplňkový trojúhelník (viz *obr.3.18*), který v součtu s trojúhelníkem *j* svou jednou stranou pokryje celou délku úsečky *EB'* a díky tomu platí výše uvedená rovnost. Stejný vztah bychom mohli dokázat i pomocí další středové souměrnosti, tentokrát podle bodu *E*, v níž je trojúhelník *j + x* obrazem trojúhelníku *K* a tudíž jsou shodné. Ze stejného důvodu platí rovnost *J = k + x*. Tyto trojúhelníky jsou středově souměrné podle průsečíku úseček *DC* a *B'A'*. Pokud si oba získané vztahy převedeme do soustavy dvou rovnic, získáme vztah:

$K = j + x$

$J = k + x$

Zde po odečtení *x* dostaneme:

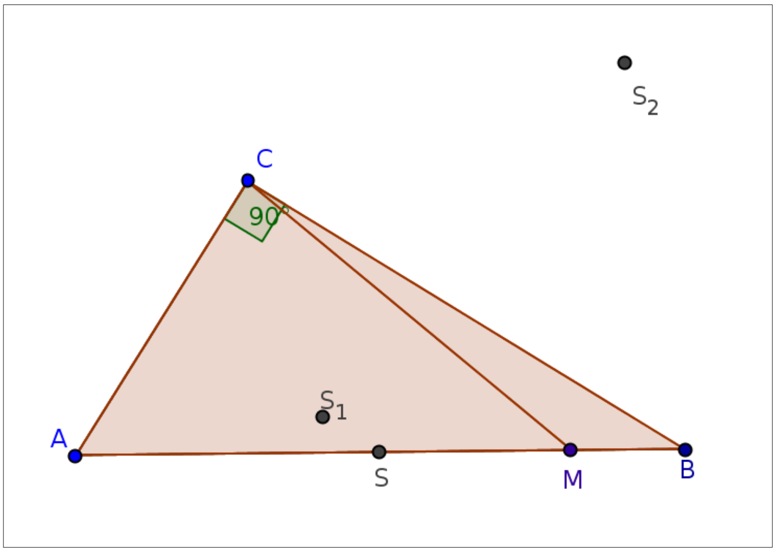
$K - J = j - k$

Odtud je již jasně patrný výsledek $K + k = J + j$, což je vztah, jehož platnost jsme chtěli dokázat, a proto můžeme s jistotou říci, že úhlopříčka dělí zadaný čtyřúhelník na dvě stejné části.

9. **Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme S, S1, S2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC, AMC, BMC. Dokažte, že body M, C, S1, S2 a S leží na téže kružnici.**

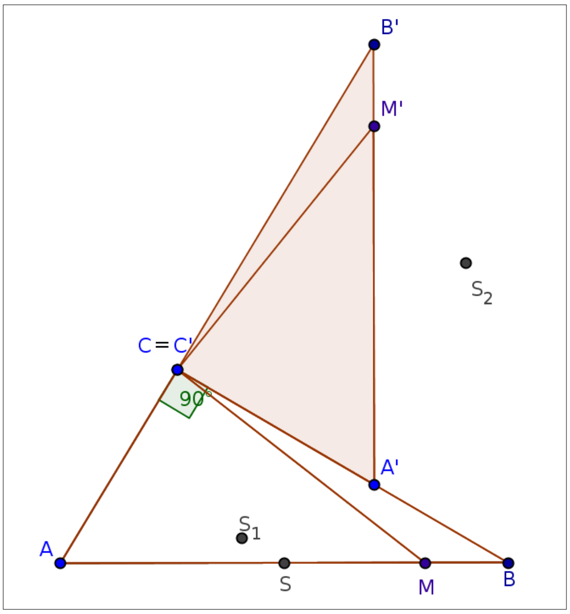
(56. ročník matematické olympiády pro střední školy, A-III-3) [8]

Řešení: Nejprve si sestrojíme trojúhelník *ABC* se všemi uvedenými body podle zadání (*obr.3.19*)

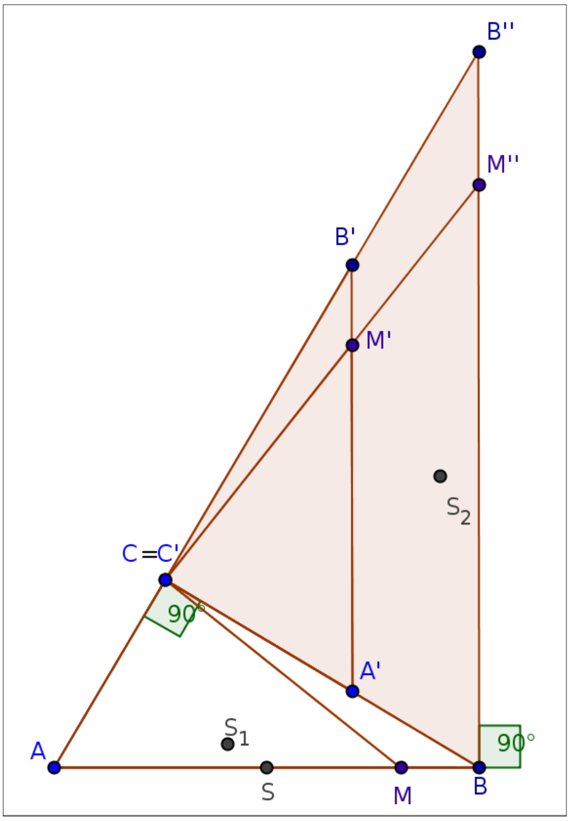


Obrázek 3.19: Zadaný trojúhelník s body M, S, S1 a S2

Jednou z možností řešení této úlohy je využití rotace a zároveň stejnolehlosti, přičemž dojde k zobrazení bodů *A*, *B* a *M*. Využijeme tedy složené podobné zobrazení. Ze všeho nejdříve provedeme rotaci o 90°. Vzorem je trojúhelník *ABC* spolu se svými dvěma vnitřními trojúhelníky *AMC* a *BCM*. Středem otáčení jsme zvolili bod *C*, ten tedy zůstal totožný se svým vzorem (je samodružný), body *A*, *B*, *M* se zobrazily do bodů *A'*, *B'*, *M'* (*obr.3.20*). Takto vytvořené trojúhelníky zobrazíme ve stejnolehlosti, jejíž střed je opět v bodě *C*. Jelikož bychom chtěli, aby se bod *A'* zobrazil do bodu *B*, zvolíme koeficient stejnolehlosti rovný poměru $\frac{|BC|}{|AC|}$, kde jeho kladnost zajišťuje to, že obraz bude ležet ve stejné polorovině od středu stejnolehlosti, jako jeho vzor. Bod *A'* se nám tedy zobrazil do bodu *B* a body *M'* a *B'* se zobrazily do bodů *M''* a *B''*. Bod *C* se opět nezměnil (*obr.3.21*) a mezi původní přeponou *AB* a novou přeponou *B'B''* vznikl pravý úhel (úhel *ABB''*).



Obrázek 3.20: Zobrazení v rotaci

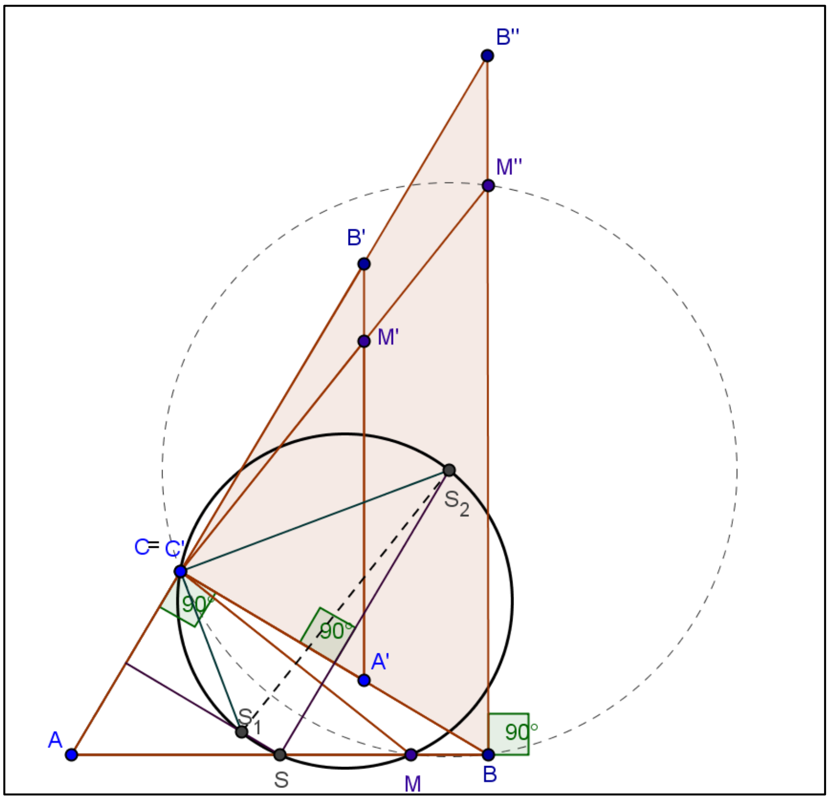


Obrázek 3.21: Zobrazení ve stejnolehlosti

Z úsečky *BC* se stala výška právě na přeponu nově vzniklého pravoúhlého trojúhelníku *ABB''*. Bod *M* leží na jedné jeho odvěsně, a to na *AB*. Bod *M''* leží na jeho druhé odvěsně

BB''. Obě použitá zobrazení zachovávají velikost úhlů. Úhly AMC a $BM''C$ jsou tedy shodné a podle tohoto vztahu mezi nimi vidíme, že kružnice, kterou opíšeme trojúhelníku BMC je zároveň i kružnicí opsanou trojúhelníku $BM''C$. Stejný vztah můžeme odvodit i podle pravých úhlů MCM'' a MBM''. Provedené zobrazení převádí trojúhelník AMC na trojúhelník $BM''C$ a kružnice opsaná trojúhelníku AMC má střed v bodě S_1. Tento střed se zobrazí na bod S_2, což je podle zadání střed kružnice opsané trojúhelníku BMC a zároveň je tedy také středem kružnice opsané trojúhelníku $BM''C$. Vzhledem k tomu, že při prvním zobrazení – rotaci jsme celý trojúhelník AMC otáčeli o 90°, došlo k otočení o stejný úhel i u bodu S_1 a úhel S_1CS_2 je tedy pravý. Přímka spojující S_1 a S_2 je osou úsečky CM a úhel S_1MS_2 má taktéž hodnotu 90°. Dalším pravým úhlem je i úhel S_1SS_2, a to z toho důvodu, že jeho ramena – polopřímky SS_1 a SS_2 leží na osách odvěsen AC a BC a tyto odvěsny jsou na sebe kolmé.

Z těchto poznatků o pravých úhlech plyne, že body C, M, S leží na Thaletově kružnici, jejíž střed se nachází na ose spojnice S_1S_2, tudíž všech pět bodů leží na jedné kružnici přesně tak, jak jsme měli zjistit (*obr. 3.22*).

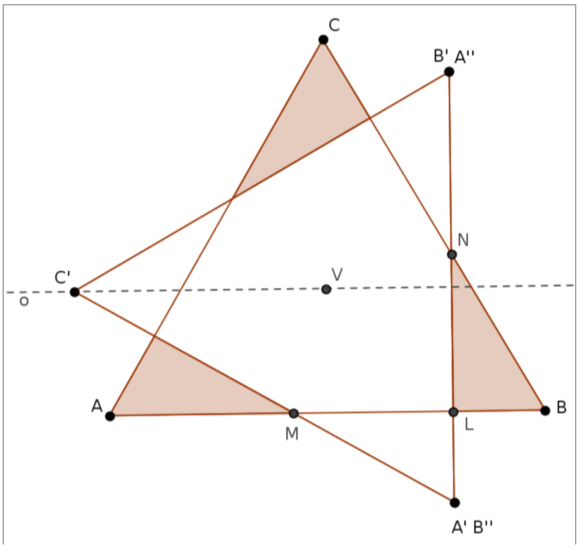


Obrázek 3.22: Znázornění bodů na kružnici

10. Rovnostranný trojúhelník *ABC* o délce strany 4 cm otočíme kolem jeho průsečíku výšek o 90°, dostaneme tak trojúhelník *A′B′C′*. Určete obsah průniku trojúhelníků *ABC* a *A′B′C′*.

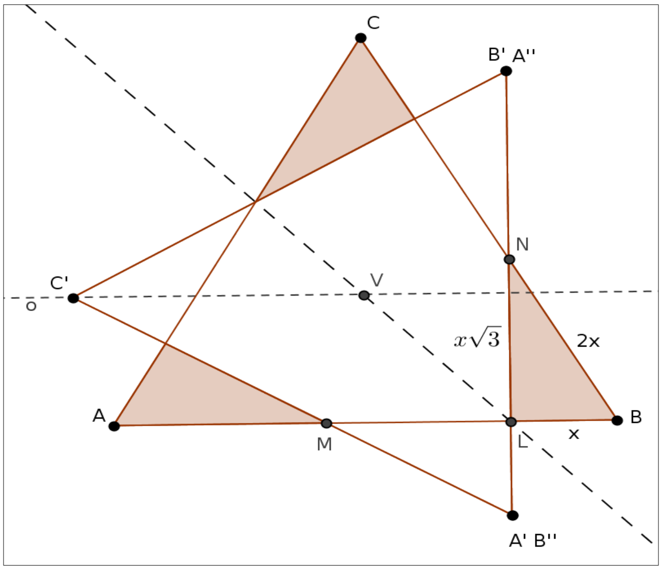
(38. ročník matematické olympiády na středních školách, C-I-2) [9]

Řešení: Průsečík výšek, který byl středem otáčení trojúhelníku *ABC* si označíme *V*. Další důležité body, jako jsou průsečík přímek *AB* a *C′A′* označíme *M*, průsečík přímek *BC* a *A′B′* označíme *N* a písmenem *L* označíme průsečík přímky *AB* s přímkou *A′B′*. K vyřešení úlohy využijeme složené zobrazení, ve kterém skládáme rotaci o 90° (jak je v zadání) s osovou souměrností, ke které si nejprve sestrojíme osu úsečky *A′B′*. Označme ji například *o*, a poté zobrazíme trojúhelník *A′B′C′* v souměrnosti právě podle této osy. Jelikož je díky rovnostrannosti zadaného i zobrazeného trojúhelníka osa *o* zároveň i výškou na stranu *A′B′* a prochází průsečíkem výšek *V* (je to zároveň i střed otáčení) zobrazí se bod *V* sám na sebe a je tedy samodružný. Bod *C′* se zobrazí taktéž sám na sebe, jelikož náleží ose *o*. To ve výsledku celého složeného zobrazení znamená, že se bod *C* zobrazil na *C′*, bod *A* se zobrazil na bod *B′* a obrazem bodu *B* je bod *A′* (*obr. 3.23*). Jak je z toho samého obrázku patrné, k výpočtu obsahu překrývajících se částí trojúhelníků *ABC* a *A′B′C′* nám postačí, když od obsahu původního trojúhelníku odečteme vybarvené části.



Obrázek 3.23: Složené zobrazení trojúhelníka ABC

Pokud si představíme trojúhelník *AVB*, zjistíme, že se nám zobrazil na trojúhelník *B′VA′* (*A″VB″*), což znamená, že složené zobrazení je osovou souměrností podle přímky procházející body *L* a *V*. Bod *L* je tedy také samodružný. A body *M* a *N* se podle této osy zobrazí vzájemně na sebe (*M' = N* a *N' = M*). Následně zjistíme rozměry vybarvených částí. Pokud si určíme, že $|LB| = x$, a to je zároveň rovno $|A'L|$ (rovnost plyne z osové souměrnosti) snadno již dopočítáme $|NL|$a $|BN|$. Víme totiž, že vnitřní úhel u vrcholu *B* je 60° (v rovnostranném trojúhelníku *ABC* jsou všechny tři vnitřní úhly shodné, tedy 60°). Úhel *BLN* je pravý, což plyne z otočení trojúhelníka o 90°. Velikost strany *NL* tedy spočteme pomocí těchto poznatků přes tangens úhlu 60°. Z vlastností pravoúhlého trojúhelníka víme, že $\tan(60°) = \frac{|NL|}{x}$ a jelikož $\tan(60°) = \sqrt{3}$, tak $|NL| = x\sqrt{3} = |ML|$. Důvodem této rovnosti je zobrazení bodu *M* na *N* a naopak. Ten samý vztah zajišťuje i rovnost $|BN| = |MA'|$. K výpočtu zvolíme opět goniometrickou funkci, v našem případě $\sin(60°) = \frac{x\sqrt{3}}{|BN|}$, po úpravě nám vyjde, že $|BN| = \frac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$ (*obr. 3.24*).



Obrázek 3.24: Strany trojúhelníku BLN

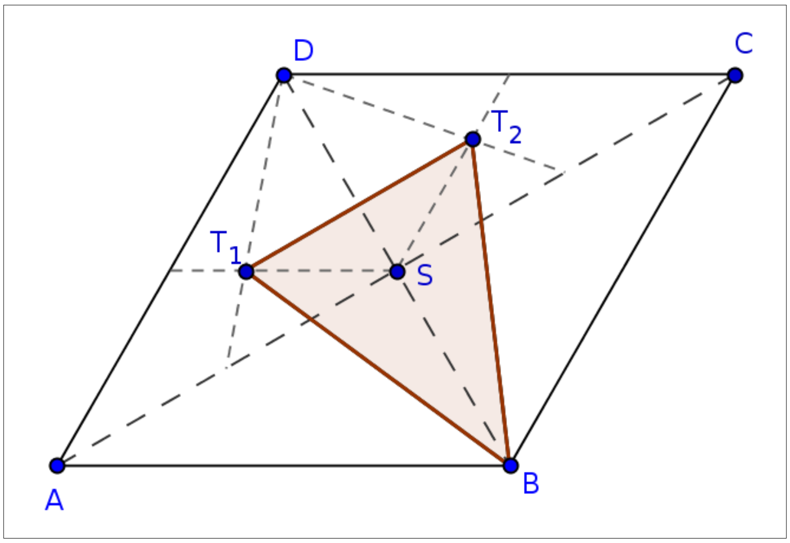
Pokud provedeme otočení o 120° kolem vrcholu *V*, tak se bod *A* zobrazí na bod *B* a bod *B* na bod *C*. Zároveň se bod *C'* otočí do bodu *A'* a bod *A'* do bodu *B'* a bod *M* se opět zobrazí na *N*. Platí tedy, že i $|AM| = 2x$.

Ze zadání víme, že $|AB| = 4$, také zároveň víme, že $|AB| = |AM| + |ML| + |LB|$ po dosazení námi zjištěných hodnot dostaneme rovnici: $4 = 2x + x\sqrt{3} + x$. Upravíme: $4 = x(3 + \sqrt{3})$a vyjádříme si *x*: $x = \frac{4}{3+\sqrt{3}}$, zlomek rozšíříme, abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli: $x = \frac{12-4\sqrt{3}}{6} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{3}$. Nyní provedeme výpočet obsahu trojúhelníku *BLN*. Vzorec pro obsah je $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$, vzhledem k tomu, že je pravoúhlý, tak jako výšku dosadíme stranu kolmou na stranu označenou jako a. Z vypočítaných hodnot pro jednotlivé strany tohoto trojúhelníka dostaneme vztah: $S_{BLN} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{3} . \frac{\sqrt{3} \cdot 2(3-\sqrt{3})}{3} . \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}(9-6\sqrt{3}+3)}{18} = \frac{18\sqrt{3}-36+6\sqrt{3}}{9} = \frac{2(4\sqrt{3}-6)}{3} = \frac{8\sqrt{3}-12}{3}$. Tím jsme získali obsah jednoho ze tří vyznačených malých trojúhelníků. Abychom získali obsah všech, vynásobíme výsledek třemi (trojúhelníky jsou shodné). Obsah vybarvené části je tedy roven $8\sqrt{3} - 12$.

Nyní zjistíme obsah původního trojúhelníku *ABC*. Výška v rovnostranném trojúhelníku je rovna $a \cdot \sin(60°)$, vzorec pro obsah je tedy roven: $S_{ABC} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, strana *a = 4*, po dosazení tedy platí: $\frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. Nakonec odečteme obsah vybarvených trojúhelníků od obsahu trojúhelníku *ABC*. Výsledek, který nám vyjde, je výsledkem celé úlohy: $S_{ABC} - 3S_{BLN} = 4\sqrt{3} - (8\sqrt{3} - 12) = 4(3 - \sqrt{3})$.

11. **Je dán kosočtverec *ABCD* s úhlem velikosti 60° při vrcholu *C* a se středem *S*. Vypočtěte obsah trojúhelníku *BT_1T_2*, kde *T_1* a *T_2* jsou těžiště trojúhelníků *ASD* a *DSC*.**

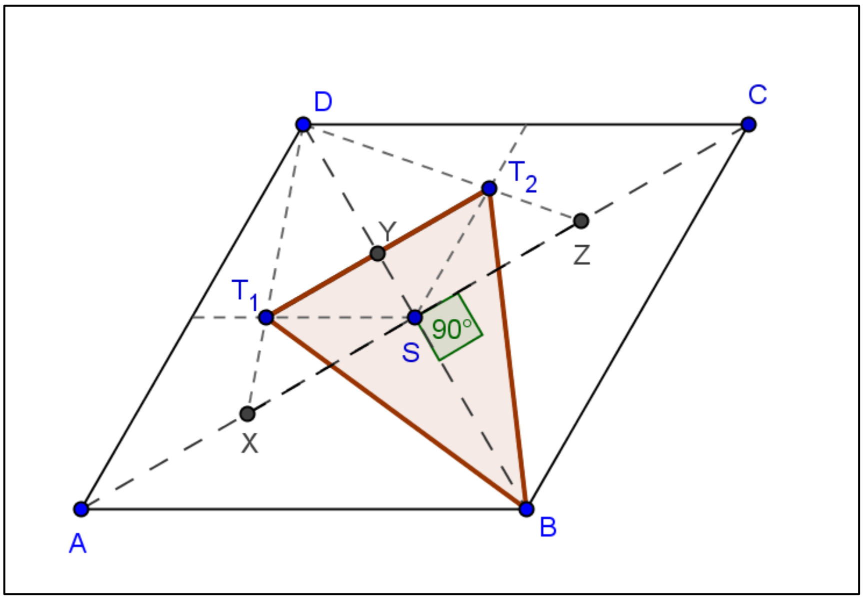
(40. ročník matematické olympiády na základních školách, Z8-II-3) [10]



Obrázek 3.25: Zadaný kosočtverec ABCD s trojúhelníkem BT_1T_2

Řešení: Jeden z možných způsobů řešení si k dosažení výsledku dopomáhá využitím stejnolehlosti.

Patu těžnice (bod, kde se těžnice dotýká své příslušné strany) na stranu *AS* v trojúhelníku *ASD* pojmenujeme *X*. V druhém trojúhelníku – *DSC* patu těžnice na stranu *SC* nazveme *Z*. Dále si označíme průsečík spojnice těžišť T_1T_2 s úhlopříčkou *BD* písmenem *Y* (*obr. 3.26*). Úsečku *XZ* zobrazíme ve stejnolehlosti se středem stejnolehlosti v bodě *D* a koeficientem $\frac{2}{3}$, vzhledem ke zvoleným hodnotám se nám zobrazí do úsečky T_1T_2 (tyto body se totiž nacházejí ve dvou třetinách úseček *DX* a DZ, což plyne z vlastností tečen a těžiště). Z vlastností stejnolehlosti (zachování úhlů) jsme zjistili, že úsečka T_1T_2 je rovnoběžná s úsečkou *XZ*. Z této stejnolehlosti zároveň plyne, že délka úsečky T_1T_2 je rovna $\frac{2}{3}$ délky úsečky XZ.



Obrázek 3.26: Označení zbylých bodů v kosočtverci ABCD

Jelikož je zadaný útvar kosočtverec a jeho úhlopříčky jsou na sebe kolmé, jsou na sebe kolmé i úsečky T_1T_2 a *BY*. Z tohoto vztahu je jasné, že úsečka *BY* je výškou příslušnou straně T_1T_2 v trojúhelníku BT_1T_2. K výpočtu obsahu trojúhelníku BT_1T_2 nám tedy stačí znát délku úseček *BY* a T_1T_2, jakožto výšky a její příslušné strany.

Délku T_1T_2 zjistíme právě pomocí zobrazení úsečky *XZ* ve stejnolehlosti na tuto úsečku. Úsečka *XZ* leží na úhlopříčce *AC*. Bod *X* leží v polovině úsečky *AS* (jelikož tečny vedou ze středu strany k příslušnému bodu) a bod *Z* se nachází v polovině úsečky *SC*. Z těchto poznatků vidíme, že $|XZ| = |AS|$(případně $|XZ| = |SC|$), tedy $|XZ| = \frac{1}{2}|AC|$. To, že mezi těmito hodnotami platí rovnost je dáno také tím, že úhlopříčky kosočtverce se protínají přesně ve své polovině, a proto například $|AS| = \frac{1}{2}|AC|$. Jak již bylo řečeno výše, délka T_1T_2 je rovna $\frac{2}{3}|XZ|$. Jak plyne z předchozích vztahů, tuto rovnost lze přepsat jako $|T_1T_2| = \frac{2}{3}|AS|$. Potřebujeme tedy vypočítat délku úsečky *AS.* Délku strany kosočtverce položíme rovnou *a*. Z poloviny kosočtverce *ABCD* si vytvoříme rovnostranný trojúhelník *ABD*.

To, že velikost úhlopříčky *BD* je rovna straně *a* zjistíme díky tomu, že $|\sphericalangle BCD| = 60°$ a jelikož *ABCD* je kosočtverec, platí $|BC| = |CD|$, což lze považovat za ramena rovnoramenného trojúhelníku. Na oba úhly u základny *BD* zbývá 120° a poměr jejich velikostí je 1:1. Na každý úhel tedy připadá velikost 60°. Z toho plyne, že trojúhelník BCD je rovnostranný, tedy $|BC| = |CD| = |BD| = a$. Při pohledu na trojúhelník *ABD* (*obr. 3.26*) vidíme, že úsečka *AS* představuje výšku rovnostranného trojúhelníku *ABD*. Výška rovnostranného trojúhelníka je rovna hodnotě $a \cdot \sin(60°)$, platí tedy, že $|AS| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$. Jak je uvedeno výše, $|T_1T_2| = \frac{2}{3}|AS|$. Po dosazení právě získaného výsledku dostaneme:

$$|T_1T_2| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$$

Z vlastností těžnic (a především použité stejnolehlosti) víme, že bod *Y* leží ve $\frac{2}{3}$ délky úsečky *DS*. Pokud bychom si úhlopříčku *BD* rozdělili na šestiny, tak $|YS| = \frac{1}{6}$, jelikož úsečka *BS* je polovinou úhlopříčky, její velikost je rovna $\frac{3}{6}$. Z těchto poznatků snadno spočítáme, že $|BY| = \frac{2}{3}\ |BD|$. Jelikož délka *BD = a*, platí: $|BY| = \frac{2}{3} \cdot a$.

Nyní máme vše potřebné pro vypočtení obsahu *S* trojúhelníku T_1T_2B:

$$\boldsymbol{S_{T_1T_2B} = \frac{|T_1T_2B| \cdot |BY|}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot a^2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{9}}$$

Výsledná hodnota je zároveň i požadovaným výsledkem a úloha je tímto vyřešena.

ZÁVĚR

Jak již bylo řečeno v úvodu, hlavním cílem práce bylo seznámit čtenáře s úlohami MO zabývajícími se geometrickými zobrazeními, a také s těmito zobrazeními samotnými.

Koncept celého díla by mohl být pomyslně rozdělen na dva hlavní oddíly, a to teoretický a praktický. Teoretická část se skládá ze dvou kapitol. Ve třetí a zároveň poslední kapitole jsme se věnovali řešení vybraných úloh MO.

V první kratší kapitole bylo čtenáři stručně představeno zobrazení, jeho značení, zápis, a především to, co by si pod tímto pojmem měl představit. Tyto poznatky byly dále aplikovány při charakteristice zobrazení geometrických, kde byly již poněkud více rozvíjeny. Seznámili jsme se zde například s pojmem samodružnost, či inverzní zobrazení.

V následující kapitole byla geometrická zobrazení rozdělena podle svých vlastností do dvou hlavních skupin. V každé této skupině jsme vyjmenovali již jejich jednotlivé druhy. Každý tento typ byl uveden převzatou definicí, kterou více popisoval a rozvíjel následující text, v němž byly krom jiného dále obsaženy informace o provázanosti jednotlivých typů zobrazení, jejich značení, nebo zachovávané vlastnosti. Pro úplnost práce bylo důležité každý typ doplnit obrázkem, který vyobrazuje právě charakteristiky popisované v textu, což je klíčové pro jejich snadnější pochopení. Ke konci kapitoly byl také, v rámci osové souměrnosti, uveden oddíl zabývající se skládáním tohoto zobrazení, z něhož lze vytvořit i ostatní popisované druhy zobrazení.

Ve třetí kapitole jsme se dostali k praktické části bakalářské práce. V tomto nejrozsáhlejším oddílu se nacházejí řešené příklady, využívající k dosažení výsledků geometrických zobrazení. Vyskytují se zde úlohy z různých ročníků MO a vybrány byly tak, aby byly zahrnuty všechny kategorie (z hlediska věku řešitelů), ve kterých se mohou vyskytovat úlohy řešené za pomoci geometrických zobrazení. Tím se zároveň dokázalo, že tento způsob řešení se může využít bez ohledu na úroveň složitosti jednotlivých úloh. U zadání každého příkladu byl uveden typ MO, kategorie, ročník a číslo příkladu v daném ročníku, což usnadňuje dohledání příkladu v daném zdroji a čtenář tak mohl jednoduše porovnávat mezi originálním řešením a zde uvedeným detailním řešením. Zároveň byl každý příklad doplněn minimálně jedním obrázkem, což napomáhá lepšímu porozumění příkladu a minimalizuje se možnost jeho nesprávného pochopení.

Práce by díky všem uvedeným prvkům, které obsahuje, měla být srozumitelná pro všechny, kteří již přišli do styku s geometrickými zobrazeními a orientují se v základních geometrických vztazích a výpočtech. Pro žáky základních škol by s pomocí zde uvedených řešení neměl být problém dospět k výsledku u úloh jim odpovídající kategorie. Lze tvrdit, že žáci středních škol (především vyšších ročníků) by měli být schopni, s využitím teoretické části a podrobně komentovaných řešení úloh MO, pochopit a vyřešit veškeré příklady zde obsažené.

Je známo, že geometrie rozvíjí představivost žáků a studentů a je nepostradatelnou disciplínou i v dalších příbuzných oborech. Bohužel často nepatří mezi oblíbené předměty vyučované na školách, právě díky své náročnosti na obrazotvornost, jelikož nestačí pouze se naučit nazpaměť určité množství vzorců a vztahů. Je nutné umět tyto vztahy správně použít, nebo například dokázat zjednodušit příliš složité úlohy, k čemuž často dopomáhají právě geometrická zobrazení. Tato práce tedy může dopomoci rozvíjet fantazii žáků v oblasti geometrie a ukázat jim nové možnosti řešení daných typů úloh.

RESUMÉ

The main target of this thesis is geometric projection and its occurrence in mathematical olympiads. Therefore the major part of the thesis forms solutions of selected mathematical tasks, which are chosen from mathematical olympiads collections.

The first chapter is an introduction into the issue of geometric projection. It describes its basic characteristic.

The second chapter describes basic types of geometric projections contained in mathematical olympiads tasks. The various types of projections are described by taken definition and also completed with attached pictures.

The third chapter deals with solutions of selected tasks, which could be solved by using of geometric projection. There is a given assignment, category, class, source and custom solution commented in details and everything is clearly described also by using pictures, which facilitates the understanding of selected tasks.

SEZNAM LITERATURY

[1] *Množiny, relace, zobrazení*. Brno, 2004. Dostupné z: http://www.fch.vutbr.cz/~polcerova/mat1/texty/mnozrel.pdf

[2] LÁVIČKA, Miroslav. Geometrie. 1. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita v Plzni, 2002, 189 s. ISBN 80-708-2861-7

[3] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 206 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-807-1963-585.

[4] Matematika I: Zobrazení. *Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích* [online]. 2013 [cit. 2015-02-28]. Dostupné z: http://www2.ef.jcu.cz/~klufova/vyukaMAT2011_12/ZS/pred10_ZS.pdf

[5] Geometrická zobrazení v rovině. *Základy geometrie* [online]. 2013 [cit. 2015-04-12]. Dostupné z: http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/ZakladyGeometrie/Planimetrie/GeometrickaZobrazeni/GeometrickaZobrazeni.html

[6] BOČEK, Leo. *37. ročník matematické olympiády na středních školách*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství v Praze, 1990. ISBN 80-04-24245-6.

[7] Olympiáda pro základní školy. *Matematická olympiáda* [online]. 2015 [cit. 2015-04-12]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly

[8] Olympiáda pro střední školy. *Matematická olympiáda* [online]. 2015 [cit. 2015-04-12]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-stredni-skoly

[9] BOČEK, Leo. *38. ročník matematické olympiády na středních školách*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1991. ISBN 80-04-25644-9.

[10] *40. ročník matematické olympiády na základních školách*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1993. ISBN 80-04-26406-9.

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ

PŘÍLOHY

Přílohou bakalářské práce je přiložené CD.