ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

PRAVIDELNÉ MNOHOSTĚNY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Anna Knetlová

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: RNDr. Václav Kohout

Plzeň, 2016

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 15.dubna 2016

....

vlastnoruční podpis

Děkuji RNDr. Václavu Kohoutovi za cenné rady a připomínky při zpracování této bakalářské práce.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta pedagogická
Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Anna KNETLOVÁ**
Osobní číslo:	**P13B0013P**
Studijní program:	**B1001 Přírodovědná studia**
Studijní obor:	**Matematická studia**
Název tématu:	**Pravidelné mnohostěny**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy**

Zásady pro vypracování:

Půjde o text o pravidelných mnohostěnech. Soustředí se na Platónovská a archimédovská (výběrové) tělesa.
Uvede historii těchto těles. Odvodí jejich počet, objem, povrch a ostatní vlastnosti.
Uvede základní věty o těchto tělesech. Dualita těles. Vyšší dimenze.
Využití v přírodních vědách. V poslední části vytvoří interaktivní aplikaci k zobrazení těchto těles.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy: 30 - 50

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

Sutton, D. Platónovská a archimedovská tělesa. Praha: Kosmas, 2011.
Jucovič, E. Konvexní mnohostěny. Bratislava: Veda, 1981.
http: www.matfyz.eu/dokumenty/zahady/platonska-telesa.pptx

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Václav Kohout
Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Datum zadání bakalářské práce: 19. března 2015
Termín odevzdání bakalářské práce: 15. dubna 2016

Doc. PaedDr. Jana Coufalová, CSc.
děkanka

Doc. PaedDr. Jarmila Honzíková, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 24. března 2015

Obsah

Seznam zkratek

a = délka hrany pravidelného mnohostěnu

v_a = stěnová výška

v = tělesová výška

r = poloměr kulové plochy opsané

ρ = poloměr kulové plochy vepsané

P = obsah mnohoúhelníku

S = povrch mnohostěnu

S_p = obsah podstavy tělesa

V = objem mnohostěnu

u_s = stěnová úhlopříčka mnohostěnu

u_t = tělesová úhlopříčka mnohostěnu

ω = odchylka sousedních stěn

V_j = objem jehlanu

Úvod

Cílem mojí bakalářské práce je zpracování Platónských, Archimédovských těles, až po Poinsotova tělesa. První část přináší pohled do historických výkladů pravidelných mnohostěn. V další obšírné části jsou objasněny vlastnosti jednotlivých typů Platónských mnohostěnů, v návaznosti na ně Archimédovská, Keplerova a Poinsotova tělesa.

V bakalářské práci byly využity programy pro názornou vizualizaci některých síťových modelů v GeoGebře, většina byla namodelována v programu Wolfram Mathematica. Wolfram Mathematica byl zvolen jako prioritní program k modelování mnohostěnů z důvodu lepší vizualizace výsledků a možností využití pro výuku.

Doufám, že bude bakalářská práce využita nejen k obhajobě, ale i jako zdroj informací pro výuku na školách z důvodu použitých vizualizací pravidelných mnohostěnů, k podpoření představivosti čtenáře bakalářské práce.

1 Historie

Nejstarší dochovaný popis mnohostěnů pochází z Platónova Timaia, bývají proto často nazývány platónskými tělesy. Platón žil od roku 427 př. n. l. do roku 347 př. n. l. Existují důkazy, že tato tělesa byla objevena mnohem dříve (SUTTON, 2011). Platón krychli, osmistěn, čtyřstěn a dvacetistěn považoval za představitele čtyř základních živlů: země, vzduch, oheň a voda, dvanáctistěn byl představitelem jsoucna neboli všeho, co existuje (PLATÓNSKÁ TĚLESA, 2016).

Pythagorejci znali čtyři z pěti pravidelných mnohostěnů (čtyřstěn, šestistěn, osmistěn a dvanáctistěn), dvacetistěn studoval teprve později Theaitetos z Athén (5. – 4. století př. n. l.). Pythagorejci se však ve stereometrii nedostali na úroveň svých planimetrických znalostí. Stereometrii jako zvláštní disciplínu, kterou by měl kromě čtyř pythagorejských oborů aritmetiky, geometrie, astronomie a hudby) studovat budoucí státník, jmenuje poprvé Platón (5. – 4. století př. n. l.). V Platónově škole byl proveden důkaz o počtu pravidelných mnohostěnů. Platón učinil nauku o pravidelných mnohostěnech součástí svého idealistického názoru. Podle něho se oheň skládal ze čtyřstěnů, vzduch z osmistěnů, voda z dvacetistěnů a země z krychlí, obrys světa pak tvořil dvanáctistěn. Pravidelným mnohostěnům se ještě dnes říká platónská tělesa. Platónovi je také připisováno jedno z nejjednodušších mechanických řešení jedné ze tří proslulých úloh starověku – zdvojení krychle (tj. sestrojení hrany krychle, která má dvakrát větší objem než daná krychle (POMYKALOVÁ, 2009).

Platónská tělesa byla lidem známa mnohem dříve než z dob filozofa Platóna. Existují tělesa vytesaná z kamene (datované přibližně do roku 2000 před naším letopočtem), které byly objeveny ve Skotsku. Některá z nich jsou označena čarami odpovídajícími hranám pravidelného polyedru. Platón předpokládal, že geometrické uspořádání nejmenších částic těchto čtyř elementů jsou pravidelné mnohostěny – polyedr (PLATÓNSKÁ TĚLESA, 2016).

Démokritos (5. – 4. století př. n. l.) věnoval ve svých geometrických spisech velkou pozornost určování obsahu obrazců, povrchů a objemů těles. Zřejmě jako první zjistil, že objem jehlanu se rovná jedné třetině objemu hranolu o stejné podstavě a výšce. Důkaz této věty však provedl až za padesát let Eudoxos z Knidu. Démokritos zobecnil větu pro jehlany s mnohoúhelníkovou podstavou. A protože pro něj byl kruh mnohoúhelníkem o velmi velkém počtu stran, vyplývalo z věty pro jehlany zobecnění i pro kužele. V zemích římského impéria byla střediskem vědy, a tedy i matematiky, Alexandrie.

Eukleidés (4. – 3. století př. n. l.) se jako první soustavně zabýval stereometrií. Shrnul do té doby známé stereometrické poznatky v posledních třech kapitolách svých Základů. Jedenáctá kapitola obsahuje poznatky o kolmých a rovnoběžných přímkách a rovinách i o úhlech vytvářených přímkami a rovinami, poznatky o rovnoběžnostěnu a nakonec o hranolu. Ve dvanácté kapitole jsou uvedeny věty dokazující objemové vztahy těles, zejména jehlanů, kuželů, válců a koulí. Kniha neobsahuje žádné výpočty objemů či obsahů (povrchů), neboť ty spadaly do praktické geodézie, nikoli do teoretické geometrie. Ve třinácté kapitole pojednává Eukleidés o pravidelných mnohostěnech. Eukleidovy Základy vynikají přesností, jsou vybudovány podle jednotného logického schématu. Velkým matematikem 3. století př. n. l. byl Archimédes. Na rozdíl od Eukleida přinesl do matematiky mnoho svých vlastních objevů. Jeho objevy při stanovení povrchů a objemů těles ohraničených křivými plochami jsou začátkem myšlenek, na kterých byl po dvou tisících letech budován integrální počet. Archimédes nalezl také řadu tzv. polopravidelných mnohostěnů. Vztahy mezi počtem vrcholů, hran a stěn u mnohostěnů byly zkoumány již ve starověku. Švýcarský matematik působící také v Berlíně a v Petrohradě, Leonard Euler (1707 – 1783), studoval mnohostěny, vyhovující tzv. Eulerově větě. Dokázal, že mezi takové mnohostěny patří zejména všechny konvexní mnohostěny. Mnohostěny, pro něž platí Eulerova věta, se nazývají Eulerovy mnohostěny (POMYKALOVÁ, 2009).

Archimédova tělesa, někdy také archimedovská, splňují konvenci, shodnost stran a dokonce i ekvivalenci vrcholů, jediná odlišnost od platónských těles je, že jejich stěny tvoří různé pravidelné n-úhelníky (vždy však u každého vrcholu zastoupeny ve stejném počtu i pořadí). Jejich české názvosloví není úplně ustálené. Poprvé popsal těchto třináct těles ve svých spisech Archimédes (přibližně 287 – 212 př. n. l.), ale tyto spisy se nedochovaly a pro Evropu byla Archimédova tělesa postupně znovu objevena v průběhu renesance a všechna popsána v Keplerově Harmonices Mundi (1620) (ŠMÍD, 2016).

Johannes Kepler se pokusil mezi šest sfér tehdy známých planet vložit těchto pět platónských těles. Mezi Merkur a Venuši dal osmistěn, mezi Venuši a Zemi dvacetistěn, mezi Zemi a Mars dvanáctistěn, mezi Mars a Jupiter čtyřstěn a mezi Jupiter a Saturn krychli (PLATÓNSKÁ TĚLESA, 2016).

Keplera napadlo, zda jejich vzdálenosti od Slunce dodržují geometrický vzorec a zaujalo ho, že planet je právě šest. Šest planet podle něho ponechávalo prostor pro pět vložených tvarů, a protože existovalo právě pět pravidelných těles, vysvětloval si tím omezení na šest planet. Přišel s řadou šesti koulí ležících jedna v druhé, na rovníku každé z nich leží oběžná dráha planety. Mezi koule umístil pět pravidelných těles tak, aby se těsně přimykaly k dvěma sousedícím koulím v pořadí: Merkur – osmistěn – Venuše – dvacetistěn – Země – dvanáctistěn – Mars – čtyřstěn – Jupiter – krychle – Saturn. Počet rozumně seděl, zejména za daných omezení v přesnosti pozorování té doby. Ale existuje 120 způsobů, jak přeskládat pět těles, což dává velmi mnoho umístění planet. (Počet permutací s pěti prvky, P(5) = 5!). Pozdější objev dalších planet odsoudil toto přirovnání k zapomnění (STEWART, 2014).

2 Platónská tělesa

Mnohostěn je trojrozměrné těleso tvořené stěnami z mnohoúhelníků. Existuje jen pět pravidelných mnohostěnů (BEATTY, a další, 2013).

Mnohostěn je ohraničen konečnou množinou mnohoúhelníků, v níž platí:

a) Mnohoúhelníky se stýkají pouze na stranách nebo ve vrcholech
b) Každá strana mnohoúhelníka se stýká právě s jednou stranou jiného mnohoúhelníka
c) Pro každé dva mnohoúhelníky existuje cesta mezi jejich vnitřky
d) Pro každý vrchol V platí, že existuje cesta mezi vnitřky stěn k vrcholu přilehlých taková, že neprochází vrcholem V.

Platónské těleso je pravidelný konvexní mnohostěn (polyedr) v prostoru. Z každého vrcholu vychází stejný počet hran a všechny stěny tvoří stejný pravidelný n-úhelník. Existuje jen pět těles, která mají tuto vlastnost (PLATÓNSKÁ TĚLESA, 2016).

Krychle (hexaedr) má šest stěn ve tvaru čtverce, ostatní mají svá jména odvozena od počtu stěn. Stěny tří z těchto těles tvoří rovnostranné trojúhelníky: čtyřstěn (tetraedr) se skládá ze čtyř, osmistěn (oktaedr) z osmi a dvacetistěn (ikosaedr) z dvaceti. Stěnami dvanáctistěnu (dodekaedru) je dvanáct pravidelných pětiúhelníků (SUTTON, 2011).

Ve svém díle Timaios z roku 360 př. n. l. popsal Platón pět pravidelných těles nazývaných mnohostěny. Pravidelnost znamená, že všechny hrany měly stejnou délku, svíraly mezi sebou stejné úhly, jejich stěny tak představovaly shodné mnohoúhelníky. Jedním tvarem je čtyřstěn, který se skládá ze čtyř rovnostranných trojúhelníků, krychle z šesti čtverců, osmistěn má šest trojúhelníků, dvanáctistěn 12 pětiúhelníkových stran, dvacetistěn sestává z 20 trojúhelníkových stran. Platón vděčí za objev těles svým pythagorejským předchůdcům, i když jeho současník Theaetetus byl pravděpodobně skutečným objevitelem osmistěnu a dvacetistěnu. Platón tvrdil to, co bylo obecně chápáno, že jde o jediné možné pravidelné mnohostěny. Pak připsal jejich tvarům mystický charakter a roli základních tvarů v přírodě. Od jeho časů jsou známy jako platónská tělesa. Kepler podporoval starořeckou koncepci, že vesmír je matematicky harmonický a strávil mnoho let pokusy o nalezení způsobu, jakým jsou uspořádány oběžné dráhy šesti známých planet jako sféry opsané a vepsané do Platónských těles (BEATTY, a další, 2013).

Mnohostěn se nazývá konvexní, když rovina každé jeho stěny nemá s mnohostěnem žádných jiných společných bodů než mnohoúhelník, který v této rovině leží. Pravidelný čtyřstěn je ohraničen čtyřmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky, jež tvoří při jeho vrcholech pravidelné shodné trojhrany s hranovými úhly 60°. Má 6 hran a 4 vrcholy. Pro všechny pravidelné mnohostěny platí, že střed, za který považujeme těžiště tělesa, pravidelného mnohostěnu má tutéž vzdálenost od jeho vrcholů (střed opsané koule) a tutéž vzdálenost od jeho stěn (střed vepsané koule. Pravidelný čtyřstěn má šest rovin souměrnosti, každá z nich prochází hranou kolmo k protější stěně. Krychle je ohraničena šesti shodnými čtverci, jež tvoří v jejích vrcholech pravoúhlé trojhrany, má 12 hran a 8 vrcholů, čtyři stejné úhlopříčky, jež se protínají v jejím středu stejně vzdáleném od všech vrcholů (poloměr opsané koule) a od všech stěn (poloměr vepsané koule) protější stěny jsou rovnoběžné. Pravidelný osmistěn je ohraničen osmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky, jež tvoří při jeho vrcholech pravidelné shodné čtyřhrany s hranovými úhly 60°. Pravidelný osmistěn má 12 hran a 6 vrcholů. Čtyři hrany, jež leží ve stěnách stýkajících se v jednom vrcholu, tvoří čtverec, jehož rovina je rovinou souměrnosti tělesa. Osmistěn má tři stejné úhlopříčky protínající se ve středu osmistěnu a tvořící v něm pravoúhlý trojhran. Pravidelný dvanáctistěn je ohraničen dvanácti shodnými pravidelnými pětiúhelníky, jež tvoří při jeho vrcholech pravidelné shodné trojhrany s hranovými úhly 108°, má 30 hran a 20 vrcholů. Pravidelný dvacetistěn je ohraničen dvaceti shodnými rovnostrannými trojúhelníky, jež tvoří při jeho vrcholech pravidelné shodné pětihrany s hranovými úhly 60°, má 30 hran a 12 vrcholů. Spojnice protějších vrcholů u pravidelného dvanáctistěnu a dvacetistěnu, které procházejí středy těles, jsou stejně dlouhé a půlí se ve středu tělesa. Protější stěny jsou rovnoběžné a spojnice jejich středů procházejí středem tělesa a stojí na zmíněné stěny kolmo, je to osa a výška pravidelných jehlanů, majících vrchol ve středu tělesa a podstavy v jeho protějších stěnách. Parametry pěti pravidelných těles lze sestavit v tabulce 2.1 (KOUNOVSKÝ, a další, 1956):

Tabulka 2.1 Parametry Platónovských těles

	Počet stran ve stěně	Počet hran ve vrcholu	Počet stěn	Počet vrcholů	Počet hran
Čtyřstěn	6	3	4	4	6
Krychle	4	3	6	8	12
Osmistěn	3	4	8	6	12
Dvanáctistěn	5	3	12	20	30
Dvacetistěn	3	5	20	12	30

Dle Jucoviče (JUCOVIČ, 1981), pravidelné mnohostěny mají navzájem shodné pravidelné m-úhelníky jejich stěn, s vrcholy se stejnou valencí n, označované uspořádanou dvojicí [m,n] přirozených čísel.

Rovnice pro počet hran platónského tělesa – označme p počet stran každé stěny, q počet hran stýkajících se v jednou vrcholu. Pak z Eulerovy věty (V + S - H = 2 ,blíže v podkapitole 2.2) vyplývá: $E = \frac{2pq}{2(p+q)-pq}$ (PRAVIDELNÉ MNOHOSTĚNY, 2016).

Jucovič doplňuje vlastnosti platónských těles o poznatky:

Nechť $k \geq 3$ je přirozené číslo, nechť V je k-valentní vrchol mnohostěnu M a nechť $A_1, A_2, \dots, A_k$ jsou všechny vrcholy sousedící s V, přičemž trojice vrcholů (A_k, V, A_1), jako i (A_i, V, A_{i+1}) pro každé i = 1, 2, …, k – 1 náleží té samé stěně mnohostěnu M. Mnohoúhelník $A_1, A_2, \dots, A_k$ nazýváme vrcholovým mnohoúhelníkem mnohostěnu M při vrcholu V. Lze dokázat, že mnohostěn je pravidelný jen tehdy, když splňuje 2 podmínky:

a) Všechny jeho stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky
b) Všechny jeho vrcholové mnohoúhelníky jsou navzájem shodné a pravidelné

Existuje pět druhů pravidelných mnohostěnů: [3,3] – čtyřstěn, [4,3] – krychle, [3,4] – osmistěn, [3,5] – dvacetistěn, [5,3] – dvanáctistěn.

Důkaz, že vnitřní úhel na stěně pravidelného mnohostěnu [m,n] má velikost $\frac{(m-2)\pi}{m}$. Vzhledem ke konvexnosti mnohostěnu platí $\frac{(m-2)\pi}{m} \cdot n < 2\pi$, po úpravě $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$. Zřejmě nemůže být současně $m \geq 4$ ani $n \geq 4$. Proto je buď m = 3 nebo n = 3. Když m = 3, platí nerovnost jen s $n \in \{3, 4, 5\}$, podobně při n = 3 musí být $m \in \{3, 4, 5\}$, tím dostáváme dvojice [m,n]. je třeba ještě dokázat, že pravidelné mnohostěny označené uvedenými symboly existují. Sestrojíme pravidelný dvacetistěn, vybereme takovou jeho čtveřici stěn, že žádné dvě z nich nemají společnou hranu. Vybereme společný smysl obíhání vrcholů těchto stěn a v tomto smyslu rozdělíme bodem každou hranu v poměru tzv. zlatého řezu, konvexní obal těchto dvanácti dělících bodů je pravidelný dvacetistěn. Opíšeme pravidelnému dvacetistěnu kulovou plochu a ve vrcholech vedeme k ploše dotykové roviny, průnik těmito rovinami určených poloprostorů obsahujících kulovou plochu je pravidelný dvanáctistěn. Navzájem duální jsou mnohostěny [3,4] a [4,3], dále [3,5] a [5,3], mnohostěn [3,3] je duální sám se sebou (JUCOVIČ, 1981).

Tabulka 2.2 Vlastnosti platónských těles

	Čtyřstěn	Krychle	Osmistěn	Dvanáctistěn	Dvacetistěn
Typ stěn	pravidelný trojúhelník	čtverec	pravidelný trojúhelník	pravidelný pětiúhelník	pravidelný trojúhelník
Počet stěn	4	6	8	12	20
Počet hran	6	12	12	30	30
Počet vrcholů	4	8	6	20	12
Počet hran u vrcholů	3	3	4	3	5
Povrch	$a^2\sqrt{3}$	$6 \cdot a^2$	$2a^2 \cdot \sqrt{3}$	$3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{[5 \cdot (5 + 2 \cdot \sqrt{5})]}$	$5a^2 \cdot \sqrt{3}$
Objem	$\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$	a^3	$\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$	$\frac{a^3 \cdot (15 + 7 \cdot \sqrt{5})}{4}$	$\frac{5a^3 \cdot (3 + \sqrt{5})}{12}$
Poloměr kulové plochy opsané	$\frac{a \cdot \sqrt{6}}{4}$	$\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$	$\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$	$\frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{5})}{4}$	$\frac{a \cdot \sqrt{[2 \cdot (5 + \sqrt{5})]}}{4}$
Poloměr kulové plochy vepsané	$\frac{a \cdot \sqrt{6}}{12}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a \cdot \sqrt{6}}{6}$	$\frac{a \cdot \sqrt{[10 \cdot (25 + 11 \cdot \sqrt{5})]}}{20}$	$\frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot (3 + \sqrt{5})}{12}$

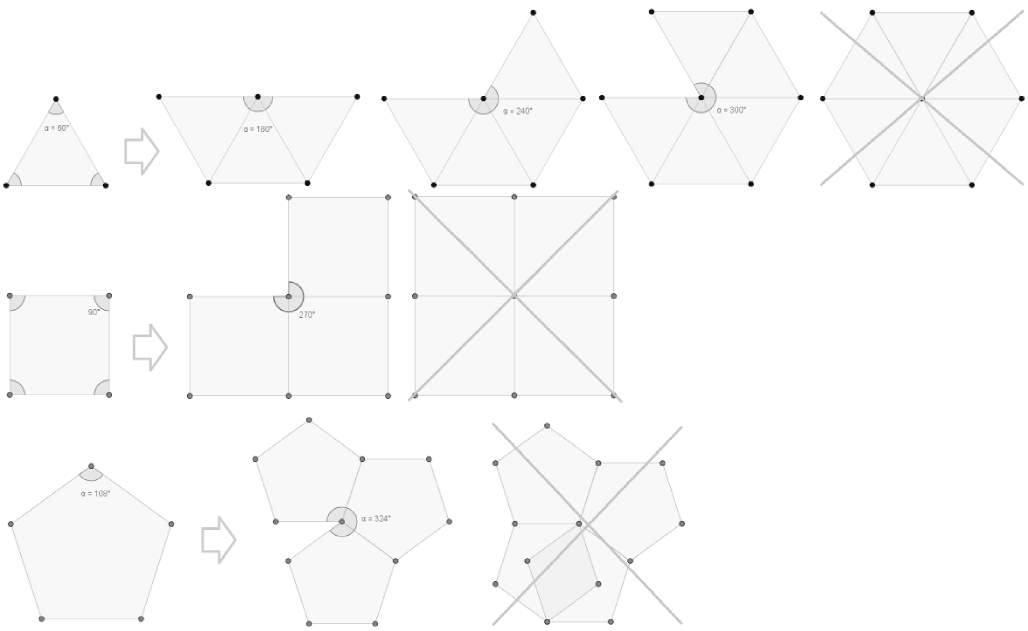
2.1 Eukleidův důkaz počtu platónských těles

Pravidelný mnohoúhelník má shodné strany i úhly. Pravidelný mnohostěn má shodné stěny a nerozlišitelné vrcholy. Jedinými možnými konvexními pravidelnými mnohostěny je pět platónských těles. Na vymezení prostorového úhlu jsou vždy potřeba alespoň tři mnohoúhelníky.

Použijeme-li rovnostranné trojúhelníky, je to možné udělat se třemi, čtyřmi a pěti okolo jednoho bodu. Se šesti už výsledek leží v rovině, protože součet úhlů v bodě je 360° ($6 \cdot 60° = 360°$). Tři čtverce vymezují prostorový úhel, ale čtyři narazí na podobné meze jako šest trojúhelníků, opět je součet 360° ($4 \cdot 90° = 360°$). Tři pravidelné pětiúhelníky vymezují úhel 324° ($3 \cdot 108 = 324$), ale na čtyři nebo víc už není dost místa. Tři pravidelné šestiúhelníky stýkající se v jednom bodě leží v rovině a tři víceúhelníky okolo jednoho společného bodu by se překrývaly, součet úhlů by byl větší než 360°, takže jsme došli k maximu. Vzhledem k tomu, že pomocí shodných pravidelných mnohoúhelníků se dá vymezit jen pět prostorových úhlů, existuje maximálně pět konvexních pravidelných mnohostěnů. Z kopií všech pěti pravidelných prostorových úhlů se pravidelný mnohostěn kupodivu vytvořit dá. Tento důkaz pochází od Eukleida z Alexandrie (asi 325 – 265 př. n. l.), z 13. knihy jeho Základů.

Úhel, který zbyde do 360°, rozložíme-li okolí vrcholu mnohostěnu do roviny, se nazývá deficit vrcholu. René Descartes (1596 – 1650) zjistil, že součet deficitů všech vrcholů konvexního mnohostěnu se vždy rovná 720°. Později, v osmnáctém století, si Leonhard Euler (1707 – 1783) všiml jiné pozoruhodné skutečnosti: v každém konvexním mnohostěnu se počet stěn minus počet hran plus počet vrcholů rovná dvěma (SUTTON, 2011).

Obrázek 2.1.1 Důkaz, že pravidelných mnohostěnů není více než 5



2.2 Eulerova věta

Nechť je dán libovolný mnohostěn, počet jeho vrcholů označme V, počet jeho stěn označme S a počet jeho hran označme H. Tyto tři veličiny spolu souvisejí vztahem, který se nazývá Eulerova věta.

V + S - H = 2 (PLATÓNSKÁ TĚLESA, 2016).

důkaz:

Čtyřstěn: 4 + 4 – 6 = 2

Krychle: 6 + 8 – 12 = 2

Osmistěn: 8 + 6 - 12 = 2

Dvanáctistěn 12 + 20 – 30 = 2

Dvacetistěn: 20 + 12 – 30 = 2

Důkaz je proveden indukcí pro tělesa s trojúhelníkovými stěnami, pro stěny jiných tvarů úpravou. Čtyřstěn má čtyři stěny, čtyři vrcholy a šest hran. 4+4=6+2 a proto pro něj tvrzení platí. Dále přidávejme vždy jeden vrchol nad libovolnou stěnu, čímž zanikne tato stěna. Každou ze tří hran dosud ohraničujících bývalou stěnu spojuje s novým vrcholem nová stěna a od každého ze tří vrcholů náležejících původní stěně k němu vede nová hrana. Indukční krok zapíšeme symbolicky:

$$V_{n+1} = V_n + 1$$

$$S_{n+1} = S_n + 2$$

$$H_{n+1} = H_n + 3$$

Pokud pro původní těleso Eulerova věta platila, platí i pro těleso obohacené o jeden vrchol:

$$V_{n+1} + S_{n+1} - H_{n+1} = (V_n + 1) + (S_n + 2) - (H_n + 3) = V_n + S_n - H_n = 2$$

Ne každé těleso je ohraničeno trojúhelníky. Předchozí postup ale nebránil vzniku sousedních stěn. Pokud odebereme hranu, která dvě takové stěny odděluje, stane se ze dvou stěn jedna, dohromady počet stěn klesne o jednu stejně jako počet hran. Počet vrcholů se nezměnil. I zde platí, že pokud věta platila pro původní těleso, platí i pro nové:

$$V_{m+1} + S_{m+1} - H_{m+1} = V_m + (S_m - 1) - (H_m - 1) = V_m + S_m - H_m = 2$$

(ŠMÍD, 2012).

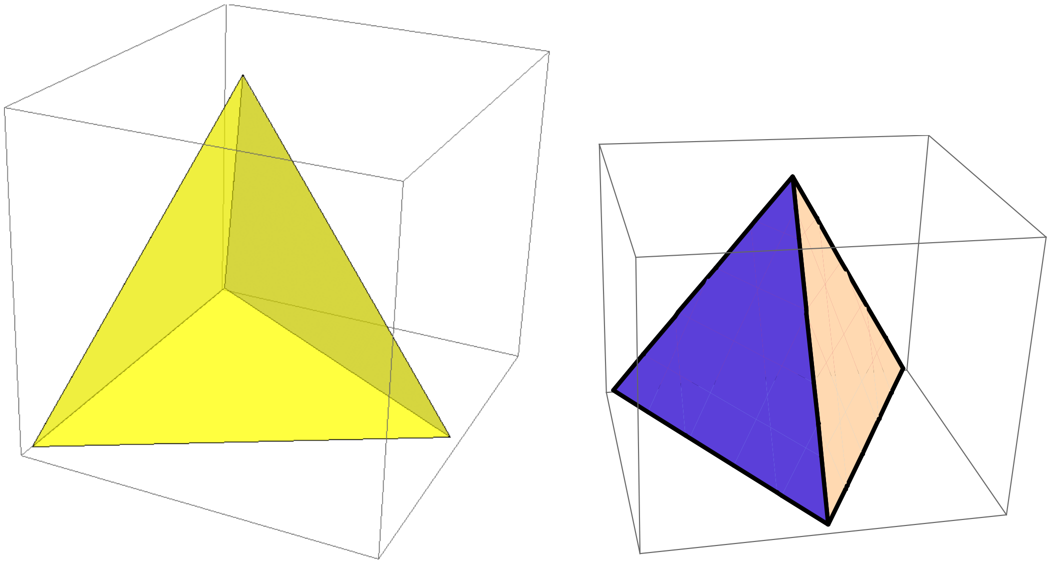
2.3 Čtyřstěn

4 stěny, 6 hran, 4 vrcholy

Čtyřstěn je tvořen čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky, viz obrázek 2.3.1. V každém vrcholu se stýkají tři z nich. Platón spojoval tento tvar s živlem ohně kvůli pronikavé ostrosti jeho hran a vrcholů a také proto, že to je nejjednodušší a nejzákladnější z pravidelných těles. Pro čtyřstěn je poloměr kulové plochy vepsané jedna třetina poloměru kulové plochy opsané.

Čtyřstěn (tetraedr) je mnohostěn s nejmenším počtem stěn, existují v něm dvojice protějších hran, zvolíme – li jednu ze stěn za podstavu, dostáváme trojboký jehlan. Těžiště čtyřstěnu je bod, ve kterém se protínají spojnice středů protějších hran. Vzdálenost těžiště od vrcholu je rovna třem čtvrtinám délky příslušné těžnice (SUTTON, 2011).

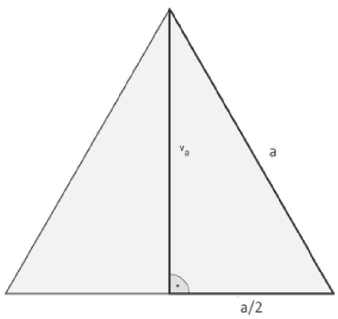
Obrázek 2.3.1 Čtyřstěn



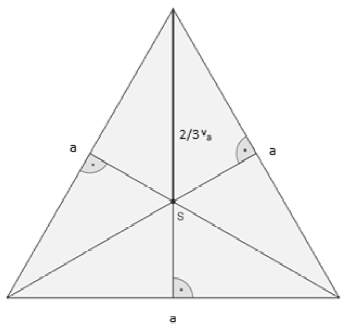
Stěnová výška tetraedru je $v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$ (obrázek 2.3.2). Těžiště stěny dělí výšku v poměru 2:1 (obrázek 2.3.3), z toho plyne $\frac{2}{3} v_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$ a dle Pythagorovy věty vypočítáme tělesovou výšku (obrázek 2.3.4):

$$v_t = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot v_a\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}$$

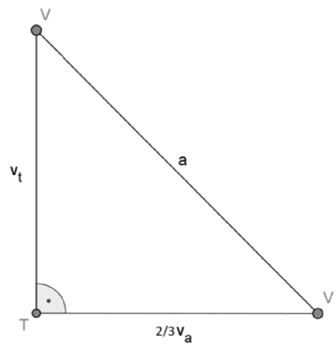
Obrázek 2.3.2 Stěnová výška



Obrázek 2.3.3 Těžiště



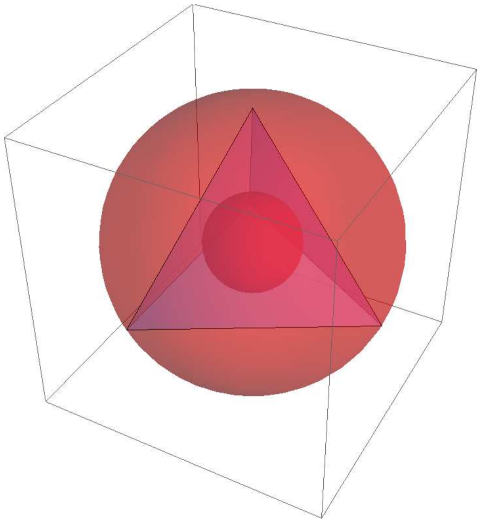
rázek 2.3.4 Tělesová výška



Poloměr r kulové plochy opsané tetraedru (obrázek 2.3.5), je roven vzdálenosti těžiště tělesa T od libovolného vrcholu tělesa. Těžiště pravidelného čtyřstěnu je v $\frac{1}{4}$ jeho výšky. Poloměr je:

$$r = \frac{3}{4} \cdot v = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{4}$$

Obrázek 2.3.5 Kulová plocha opsaná a vepsaná čtyřstěnu

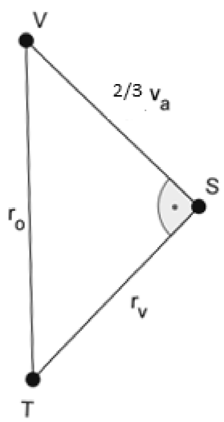


Poloměr ρ kulové plochy vepsané (obrázek 2.3.5), pravidelnému čtyřstěnu je vzdálenost těžiště tělesa T od libovolné stěny. Dotykové body kulové plochy vepsané jsou středy stěn. Využijeme pravoúhlý trojúhelník TVS (obrázek 2.3.6), kde T je těžiště, V je vrchol čtyřstěnu a S je těžiště jedné stěny, pomocí Pythagorovy věty $v^2 + t^2 = s^2$, dosazujeme s $= \mathrm{r} = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{4}, t = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$.

Odtud

$$v = \rho = \sqrt{\frac{3a^2}{8} - \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{\frac{3a^2}{8} - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{a^2}{24}} = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{12}$$

Obrázek 2.3.6 Poloměr kulové plochy vepsané čtyřstěnu

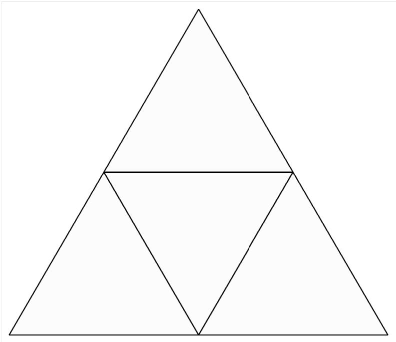


Povrch S tetraedru (obrázek 2.3.7), vypočítáme jako součet obsahů jednotlivých stěn, které jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky. Obsah jedné stěny

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Čtyřstěn má čtyři stěny, proto výsledný povrch bude roven čtyřnásobku P:

$$S = 4 \cdot P = 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

Obrázek 2.3.7 Povrch čtyřstěnu



Objem V pravidelného čtyřstěnu, spočítáme jako obsah podstavy násobený tělesovou výškou vydělený třemi, kde obsah podstavy je $S_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Dosadíme do vztahu pro výpočet objemu jehlanu:

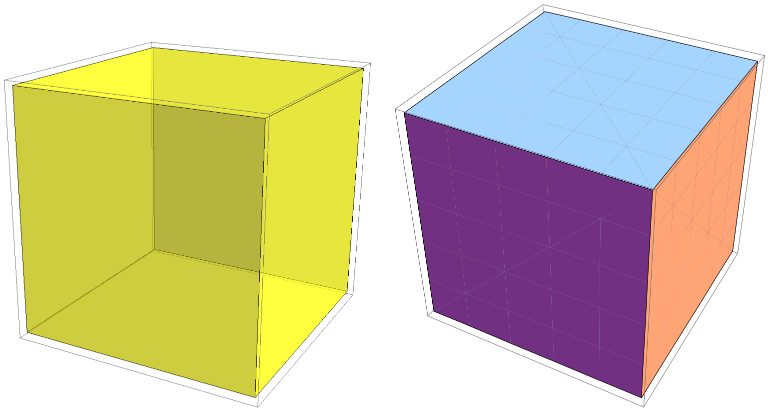
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{18}}{36} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$ (PAVLOVIČOVÁ, 2014).

2.4 Krychle

6 stěn, 12 hran, 8 vrcholů

Platón ji kvůli stabilitě jejích čtvercových podstav přiřadil k živlu země. Podle našich zkušeností s prostorem má stěny otočené dopředu, dozadu, doleva, doprava, nahoru, dolů, což odpovídá šesti směrům: sever, jih, východ, západ, zenit a nadir. Krychle je zobrazena obrázkem 2.4.1. Šest je první dokonalé číslo, neboli takové, jež je součtem svých dělitelů (1 + 2 + 3 = 6). Sečteme-li dvanáct hran krychle s jejími dvanácti stěnovými úhlopříčkami a čtyřmi tělesovými úhlopříčkami, dostaneme celkem dvacet osm úseček spojujících osm vrcholů krychle navzájem. Dvacet osm je druhé dokonalé číslo (1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28). Poloměr kulové plochy krychli opsané je $\sqrt{3}$-krát větší než poloměr kulové plochy vepsané (SUTTON, 2011).

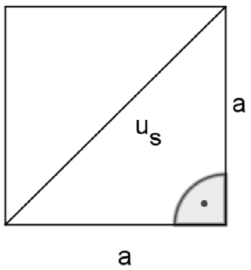
Obrázek 2.4.1 Krychle



Délka u_s stěnové úhlopříčky (obrázek 2.4.2) je délkou úhlopříčky čtverce a podle Pythagorovy věty platí:

$$u_s = \sqrt{a^2 + a^2} = a \cdot \sqrt{2}$$

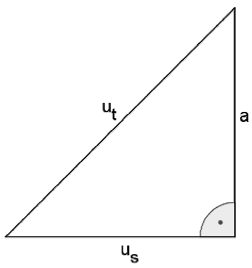
Obrázek 2.4.2 Stěnová úhlopříčka krychle



Délku u_t tělesové úhlopříčky (obrázek 2.4.3) lze vypočítat pomocí strany čtverce a stěnové úhlopříčky také podle Pythagorovy věty:

$$u_t = \sqrt{a^2 + {u_s}^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a \cdot \sqrt{3}$$

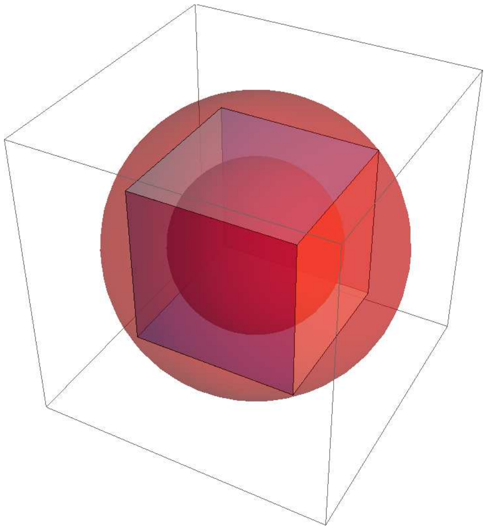
Obrázek 2.4.3 Tělesová úhlopříčka krychle



Poloměr r kulové plochy opsané (obrázek 2.4.4) je u šestistěnu roven polovině délky tělesové úhlopříčky, která prochází středem tělesa:

$$r = \frac{1}{2} \cdot u_t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Obrázek 2.4.4 Kulová plocha opsaná a vepsaná krychli



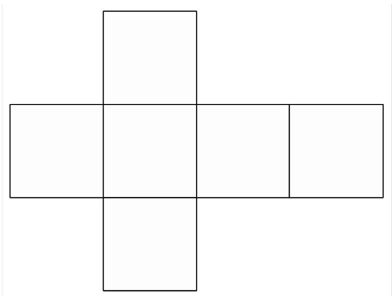
Poloměr ρ kulové plochy vepsané krychli (obrázek 2.4.4) je roven vzdálenosti středu tělesa od libovolného středu stěny:

$$\rho = \frac{a}{2}$$

Povrch S krychle vypočítáme jako součet obsahů jednotlivých stěn. Každá stěna je tvořena čtvercem. Obsah jedné stěny je $P = a^2$. krychle má stěn celkem 6, proto:

$S = 6 \cdot P = 6 \cdot a^2$

Obrázek 2.4.5 Povrch krychle



Objem V krychle lze vypočítat velice snadno, výška odpovídá hraně, proto se objem vypočítá:

$V = a^3$ (PAVLOVIČOVÁ, 2014).

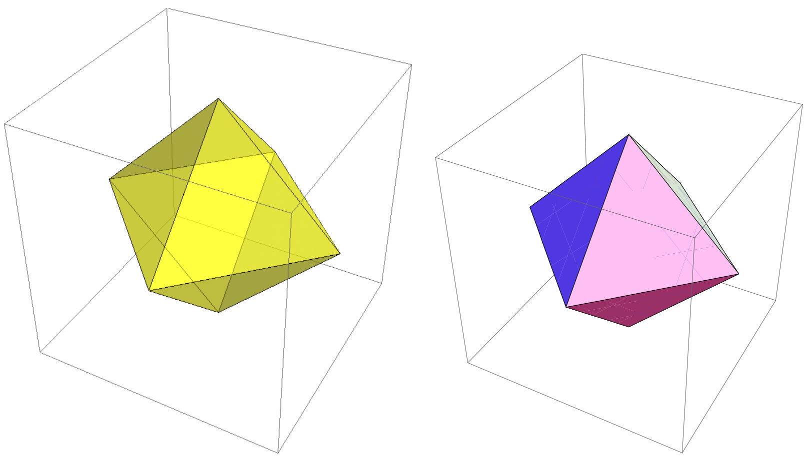
2.5 Osmistěn

8 stěn, 12 hran, 6 vrcholů

Osmistěn je tvořen osmi rovnostrannými trojúhelníky, z nichž se v každém vrcholu stýkají čtyři, je zobrazen obrázkem 2.5.1. Platón jej považoval za přechod mezi čtyřstěnem, neboli ohněm, a dvacetistěnem, neboli vodou, a tak jej přiřadil k živlu vzduchu. Poloměr kulové plochy osmistěnu opsané je $\sqrt{3}$-krát větší než poloměr kulové plochy vepsané (SUTTON, 2011).

Dalším názvem osmistěnu je oktaedr. Dobře si ho lze představit jako těleso vzniklé použitím středů stěn krychle jako vrcholu osmistěnu, neboli je duálním tělesem krychle (dualitě se věnuje kapitola 2.8) (ŠMÍD, 2012).

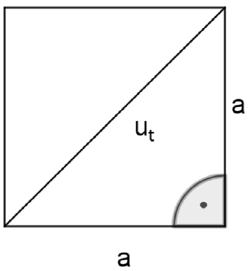
Obrázek 2.5.1 Osmistěn



Délka u_t tělesové úhlopříčky (obrázek 2.5.2) je stejná jako úhlopříčka čtverce se stranou a:

$$u_t = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a \cdot \sqrt{2}$$

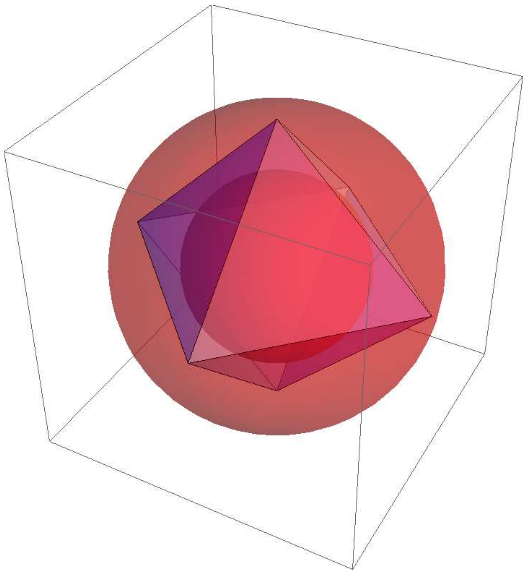
Obrázek 2.5.2 Tělesová úhlopříčka osmistěnu



Poloměr r kulové plochy opsané (obrázek 2.5.3) se rovná polovině délky tělesové úhlopříčky, která prochází středem tělesa:

$$r = \frac{u_t}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$$

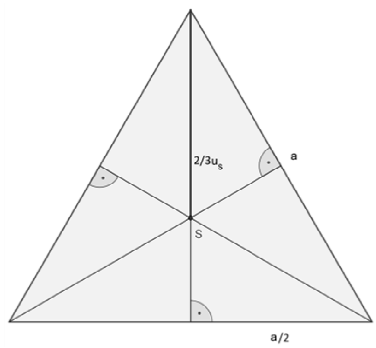
Obrázek 2.5.3 Kulová plocha opsaná a vepsaná osmistěnu



$$u_s = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2}{3} \cdot u_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$$

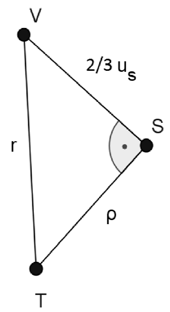
Obrázek 2.5.4 Těžiště stěny osmistěnu



Poloměr ρ kulové plochy vepsané (obrázek 2.5.3) se rovná vzdálenosti těžiště tělesa od libovolné stěny (obrázek 2.5.5). Dotykové body kulové plochy jsou těžiště stěn osmistěnu (obrázek 2.5.4).

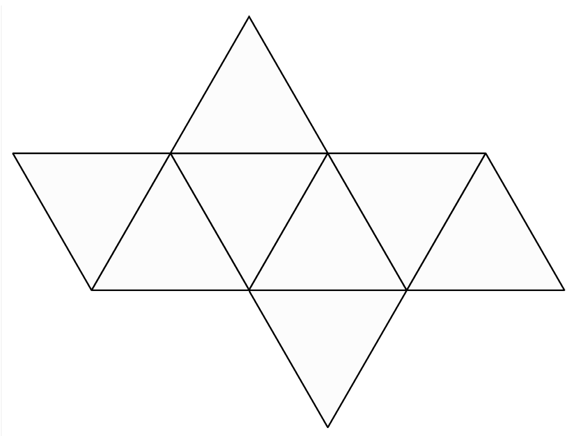
$$\rho = \sqrt{\left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{a^2}{6}} = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{6}$$

Obrázek 2.5.5 Poloměr kulové plochy vepsané osmistěnu



Povrch S osmistěnu (obrázek 2.5.6) vypočítáme jako součet obsahů všech stěn. Stěny jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky se stranou délky a, obsah jedné stěny je $P = \frac{\mathrm{a}^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Výsledný povrch je: $S = 8 \cdot S_\Delta = 8 \cdot \frac{\mathrm{a}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2\mathrm{a}^2 \cdot \sqrt{3}$

Obrázek 2.5.6 Povrch osmistěnu



Objem V osmistěnu získáme, sečteme-li objemy dvou shodných jehlanů se společnou čtvercovou podstavou a výškou r (poloměr kulové plochy opsané. Objem osmistěnu vypočítáme:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot r = \frac{2}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$ (PAVLOVIČOVÁ, 2014).

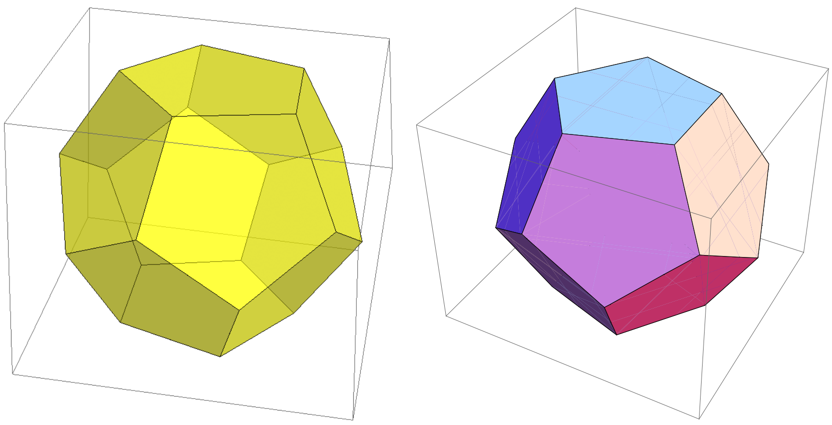
2.6 Dvanáctistěn

12 stěn, 30 hran, 20 vrcholů

Dvanáctistěn má dvanáct stěn tvořených pravidelnými pětiúhelníky, z nichž se u každého vrcholu stýkají tři, zobrazeno obrázkem 2.6.1. Poté, co Platón rozebral ostatní čtyři tělesa a přiřadil je k živlům, napsal v Timaiovi záhadně: „Zbyla pátá konstrukce, kterou Bůh použil na vyzdobení celého nebe souhvězdími“ (SUTTON, 2011).

Stranami pravidelného dvanáctistěnu jsou pravidelné pětiúhelníky, které se po třech stýkají ve dvaceti vrcholech. K pospojování vrcholu je potřeba 30 hran. V literatuře je pro pravidelný dvanáctistěn používán také název dodekaedr. Na rozdíl od těles s menším počtem stěn má dvanáctistěn tělesové úhlopříčky různých délek, také jich má výrazně víc: z každého vrcholu vedou tři hrany a šest stěnových úhlopříček, ke zbývajícím deseti vrcholům tedy vede tělesová úhlopříčka. Jediná z nich prochází středem a vede do protějšího vrcholu, tuto úhlopříčku nazveme hlavní (ŠMÍD, 2012).

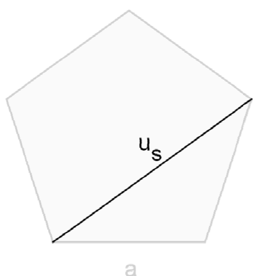
Obrázek 2.6.1 Dvanáctistěn



Délku u_s úhlopříčky (obrázek 2.6.2) pravidelného pětiúhelníka vypočítáme, protože víme, že průsečík dvou úhlopříček dělí každou z nich v poměru zlatého řezu:

$$u_s = \frac{a \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)}{2}$$

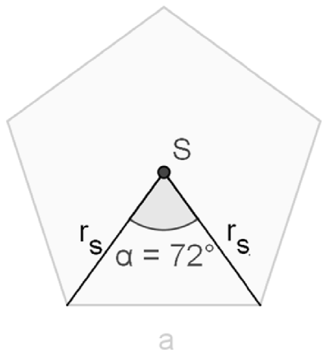
Obrázek 2.6.2 Úhlopříčka pětiúhelníka



Poloměr r_s kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku (obrázek 2.6.3) vypočteme, když pětiúhelník rozdělíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků se základnou a a rameny r_s. Pro jakýkoliv z těchto trojúhelníků platí kosinová věta:

$$a^2 = {r_s}^2 + {r_s}^2 - 2 \cdot r_s \cdot r_s \cdot \cos 72°$$

Obrázek 2.6.3 Pětiúhelník, poloměr r_s



$$\cos 72° = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$$

$$a^2 = 2{r_s}^2 - 2{r_s}^2 \cdot \cos 72\,° = 2{r_s}^2 \cdot (1 - \cos 72\,°)$$

závislost r_s na délce strany:

$$r_s = \sqrt{\frac{a^2}{2 \cdot (1 - \cos 72\,°)}} = \sqrt{\frac{a^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)}} = \sqrt{\frac{a^2}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot (1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}}$$

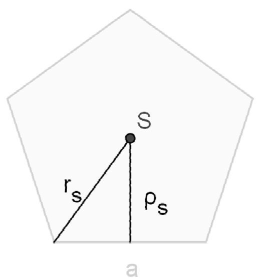
$$= \sqrt{\frac{a^2 \cdot (5+\sqrt{5})}{10}} = \frac{a}{10} \cdot \sqrt{10 \cdot (5+\sqrt{5})}$$

Poloměr ρ_s kružnice vepsané pravidelnému pětiúhelníku (obrázek 2.6.4) můžeme vypočítat pomocí pravoúhlého trojúhelníka s přeponou r_s a odvěsnami ρ_s a $\frac{a}{2}$. Aplikujeme Pythagorovu větu:

$$r_s^2 = \rho_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\rho_s = \sqrt{r_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot (1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{2}}$$

Obrázek 2.6.4 Pětiúhelník, poloměr ρ_s

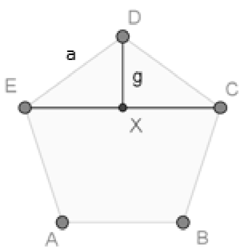


Označme vzdálenost D, X jako g (obrázek 2.6.5). D je vrchol pravidelného pětiúhelníka a X střed úhlopříčky C, E pravidelného pětiúhelníka. Odvěsnu g pravoúhlého trojúhelníka DXE vypočteme podle Pythagorovy věty:

$$a^2 = \left(\frac{u_s}{2}\right)^2 + g^2$$

$$g = \sqrt{a^2 - \left(\frac{u_s}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cdot (1+\sqrt{5})^2}{16}} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{16 - 1 - 2\sqrt{5} - 5} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Obrázek 2.6.5 Vzdálenost g



K výpočtu poloměru kulové plochy vepsané pravidelnému dvanáctistěnu musíme znát odchylku ω jeho sousedních stěn. Tu zjistíme, když z dodekaedru odřízneme pravidelný trojboký jehlan. Hrany jeho podstavy mají délku úhlopříčky pětiúhelníku u_s a boční hrany jsou hranami dodekaedru. Takto vzniklý jehlan poté řízneme rovinou kolmou k jeho poční hraně, procházející hranou podstavy. Řezem je rovnoramenný trojúhelník s rameny x a základnou u_s. Délku x vypočítáme z rovnosti obsahů trojúhelníku:

$$\frac{a \cdot x}{2} = \frac{u_s \cdot g}{2}$$

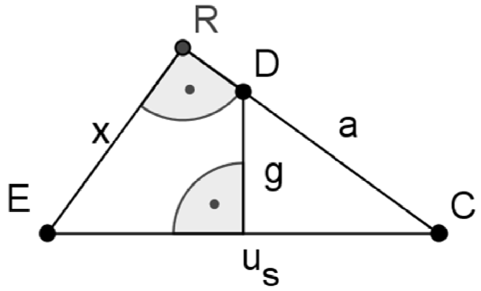
$$x = \frac{u_s \cdot g}{a} = \frac{\frac{a \cdot (1+\sqrt{5})}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{a} = \frac{a}{8} \cdot (1+\sqrt{5}) \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Díky znalosti x můžeme určit odchylku ω sousedních stěn (obrázky 2.6.6 a 2.6.7), kterou vypočítáme:

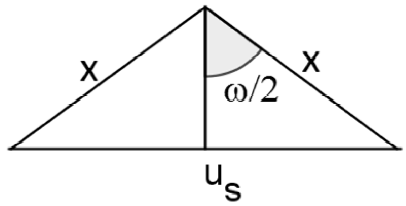
$$sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\frac{u_s}{2}}{x} = \frac{\frac{a \cdot (1+\sqrt{5})}{4}}{\frac{a}{8} \cdot (1+\sqrt{5}) \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

ω = 116°34´

Obrázek 2.2.6 Odchylka sousedních stěn I.



Obrázek 2.6.7 Odchylka sousedních stěn II.



Poloměr ρ kulové plochy vepsané (obrázek 2.6.8) vypočteme, protože střed této sféry leží v těžišti T dodekaedru a poloměr je roven vzdálenosti těžiště od středu libovolné stěny. Zjistíme jej díky pravoúhlému trojúhelníku TSY, kde T je střed dodekaedru, S střed stěny a Y je střed hrany téže stěny. Pak odvěsna SY (ρ_s) svírá s přeponou TY úhel $\frac{\omega}{2}$ a druhá odvěsna TS je hledaný poloměr ρ

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\rho}{\rho_s}$$

$$\rho = \rho_s \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right), \text{ kde } \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}, \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{6-2\cdot\sqrt{5}}{10-2\cdot\sqrt{5}}}$$

$$\rho = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{5}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}}{\sqrt{\frac{6-2\cdot\sqrt{5}}{10-2\cdot\sqrt{5}}}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{5(2\sqrt{5}+5)}}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{6-2\cdot\sqrt{5}}}$$

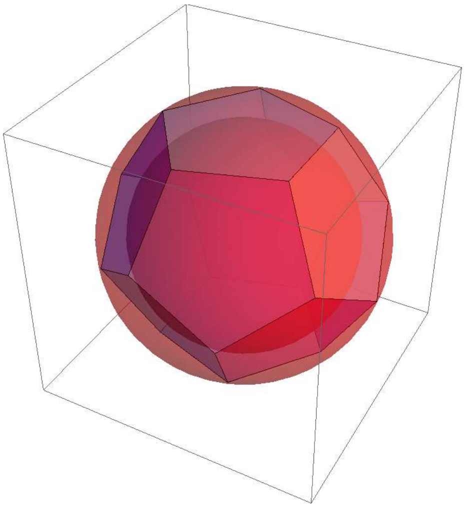
$$= \frac{a\cdot\sqrt{10\cdot(25+11\sqrt{5})}}{20}$$

Poloměr r kulové plochy opsané (obrázek 2.6.8) vypočítáme pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku s přeponou r a odvěsnami ρ a r_s

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{10}\cdot\sqrt{10\cdot(5+\sqrt{5})}\right)^2 + \left(\frac{a\cdot\sqrt{10\cdot(25+11\sqrt{5})}}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2\cdot 3\cdot\sqrt{5}+9}{8}}$$

$$= \frac{a\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+6}}{4} = \frac{a\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}}{4} = \frac{a\cdot\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{5})}{4}$$

Obrázek 2.6.8 Kulová plocha opsaná a vepsaná dvanáctistěnu



Teď můžeme dopočítat i délku u_t tělesové úhlopříčky, která prochází středem tělesa a je dvojnásobkem r:

$$u_t = 2 \cdot r = 2 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{5})}{4} = \frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{5})}{2}$$

Povrch S dvanáctistěnu je součet obsahů dvanácti shodných pravidelných pětiúhelníků, obsah pětiúhelníku je roven součtu obsahů pěti shodných rovnoramenných trojúhelníků se základnou a a výškou ρ_s.

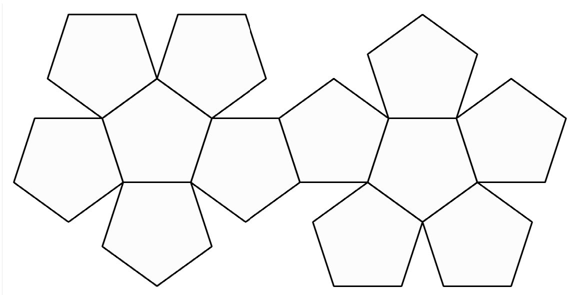
Obsah pětiúhelníku:

$$P = 5 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sqrt{5} + 5}{5}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot (2 \cdot \sqrt{5} + 5)}{5}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{10 \cdot \sqrt{5} + 25}$$

Povrch dvanáctistěnu (obrázek 2.6.9):

$$S = 12 \cdot P = 12 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{10 \cdot \sqrt{5} + 25} = 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{10 \cdot \sqrt{5} + 25}$$

Obrázek 2.6.9 Povrch dvanáctistěnu



Objem V dodekaedru zjistíme na základě znalosti poloměru kulové plochy vepsané. Vypočítáme ho jako součet objemů dvanácti shodných pravidelných pětibokých jehlanů, jejichž podstavy tvoí stěny dvanáctistěnu a výšky jsou rovny poloměru kulové plochy vepsané.

$$V_j = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot \rho = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{10 \cdot \sqrt{5} + 25} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{10 \cdot (25 + 11\sqrt{5})}}{20}$$

$$= \frac{a^3}{240} \cdot \sqrt{(10 \cdot \sqrt{5} + 25) \cdot 10 \cdot (25 + 11\sqrt{5})} = \frac{5 \cdot a^3}{240} \cdot \sqrt{470 + 210 \cdot \sqrt{5}}$$

$$= \frac{a^3}{48} \cdot \sqrt{225 + 210 \cdot \sqrt{5} + 245} = \frac{a^3}{48} \cdot \sqrt{(15 + 7 \cdot \sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{a^3}{48} \cdot (15 + 7 \cdot \sqrt{5})$$

Objem celého dvanáctistěnu je:

$V = 12 \cdot V_j = 12 \cdot \frac{a^3}{48} \cdot (15 + 7 \cdot \sqrt{5}) = \frac{a^3}{4} \cdot (15 + 7 \cdot \sqrt{5})$ (PAVLOVIČOVÁ, 2014).

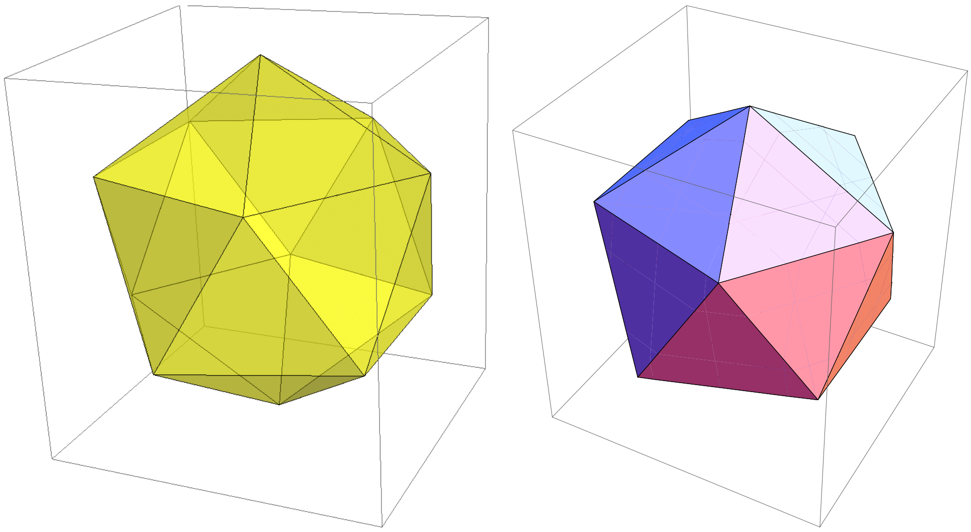
2.7 Dvacetistěn

20 stěn, 30 hran, 12 vrcholů

Dvacetistěn sestává z dvaceti rovnostranných trojúhelníků, pět na vrchol, je zobrazen obrázkem 2.7.1. Platón ho přiřadil k vodě, nejhustšímu a nejméně pronikajícímu z tekutých živlů ohně, vzduchu a vody (SUTTON, 2011).

Libovolný vrchol tvoří s pěti sousedními vrcholy pravidelný pětiboký jehlan, tento jehlan budeme v kontextu dvacetistěnu nazývat vrcholový. Odebereme-li dva protější vrcholové jehlany, těleso, které zůstane, se nazývá antihranol, v tomto případě navíc pravidelný. Z každého vrcholu pravidelného dvacetistěnu vychází šest úhlopříček, z toho jedna hlavní do protějšího vrcholu a ostatní do pěti vrcholu s ním sousedících (ŠMÍD, 2012).

Obrázek 2.7.1 Dvacetistěn



Odchylku dvou sousedních stěn nejlépe nahlédneme na řezu vrcholového jehlanu. Bude nás zajímat úhel u hlavního vrcholu rovnoramenného trojúhelníku s rameny délky rovné stěnové výšce $v_s = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$ a základnou o délce úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku $u_s = \frac{a \cdot (1+\sqrt{5})}{2}$. Vyjádříme sinus polovičního úhlu

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a \cdot (1+\sqrt{5})}{4}}{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

Odchylku hlavních tělesových úhlopříček u středu pravidelného dvacetistěnu spočítáme pomocí rovnoramenného trojúhelníka nad libovolnou hranou s hlavním vrcholem ve středu dvacetistěnu. Potom je

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a \cdot \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2 \cdot (5+\sqrt{5})}}{2 \cdot (5+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{(5-\sqrt{5}) \cdot \sqrt{2 \cdot (5+\sqrt{5})}}{20} = \frac{\sqrt{40 \cdot (5-\sqrt{5})}}{20} = \frac{\sqrt{10 \cdot (5-\sqrt{5})}}{10}$$

τ = 63°26´

Představíme si trojúhelník s vrcholy: střed dvacetistěnu, střed libovolné stěny a střed některé její hrany. V něm známe jednu stranu a jí připsané úhly – tou stranou je třetina stěnové výšky, u středu stěny je pravý úhel a u středu hrany je úhel polovinou velikosti odchylky dvou stěn $\frac{\omega}{2}$. Pro tento úhel je dále odvozena hodnota $\sin\frac{\omega}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{3}}$, můžeme vyjádřit kosinus:

$$\sqrt{1-\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{v_s}{3\cdot r_h}$$

$$r_h = \frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{1-\frac{6+2\cdot\sqrt{5}}{12}}} = \frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{6-2\cdot\sqrt{5}}}{2\cdot\sqrt{3}}} = \frac{a}{3\cdot\sqrt{6-2\cdot\sqrt{5}}} = \frac{a\cdot\sqrt{6-2\cdot\sqrt{5}}}{3\cdot(6-2\cdot\sqrt{5})}$$
$$= \frac{a\cdot\sqrt{6-2\cdot\sqrt{5}}}{18-6\cdot\sqrt{5}} =$$

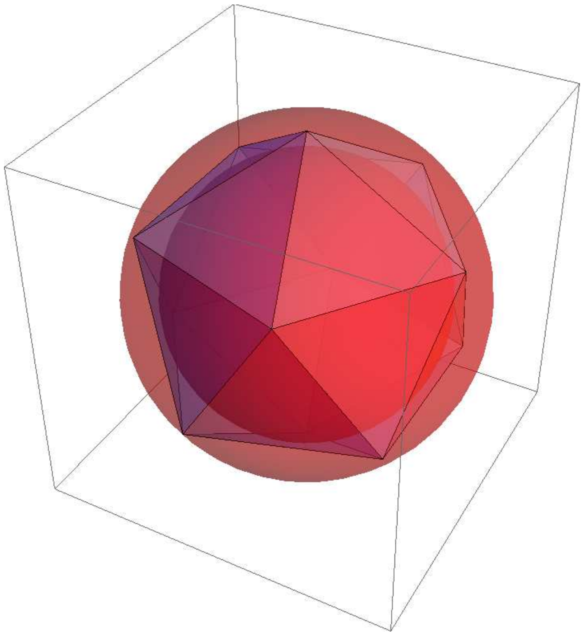
Podle Pythagorovy věty aplikované na stejný trojúhelník dopočítáme poloměr kulové plochy vepsané (obrázek 2.7.2) a současně polovinu tělesové výšky

$$r_v = a\cdot\sqrt{\frac{6+2\cdot\sqrt{5}}{16}-\frac{1}{12}} = a\cdot\frac{\sqrt{18+6\cdot\sqrt{5}-4}}{4\cdot\sqrt{3}} = a\cdot\frac{\sqrt{9+6\sqrt{5}+5}}{4\cdot\sqrt{3}}$$
$$= a\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot(3+\sqrt{5})}{12}$$

Podobně vypočítáme i poloměr kulové plochy opsané (obrázek 2.7.2) jako délku přepony v trojúhelníku s odvěsnami r_h a $\frac{a}{2}$

$$r_o = \sqrt{a^2\cdot\frac{6+2\cdot\sqrt{5}}{16}+\frac{a^2}{4}} = a\cdot\frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4} = a\cdot\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$$

Obrázek 2.7.2 Kulová plocha opsaná a vepsaná dvacetistěnu



Délka hlavní tělesové úhlopříčky je dvojnásobkem tohoto poloměru:

$$u_t = a \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot (5 + \sqrt{5})}}{2}$$

Kratší úhlopříčky ve dvacetistěnu jsou úhlopříčkami podstavy vrcholového jehlanu a mají délku:

$$u_5 = a \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Výška vrcholového jehlanu v_j je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka, ve kterém je druhou odvěsnou poloměr kružnice opsané základně tohoto jehlanu, pravidelnému pětiúhelníku, o velikosti $r_5 = a \cdot \frac{\sqrt{10 \cdot (5+\sqrt{5})}}{10}$ a přeponou je hrana délky a. Z Pythagorovy věty získáme:

$$v_j = \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \frac{10 \cdot (5 + \sqrt{5})}{100}} = a \cdot \frac{\sqrt{10 \cdot (5 - \sqrt{5})}}{10}$$

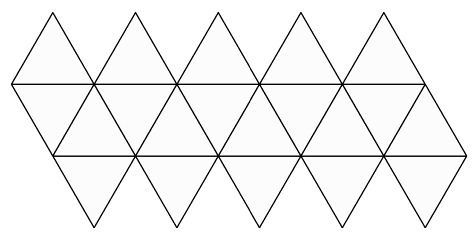
Objem pravidelného dvacetistěnu je dvacetinásobkem objemu pravidelného trojbokého jehlanu s hranou podstavy o délce a a výšce r_v:

$$V = \frac{12}{3} \cdot S \cdot r_v = \frac{12}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot (3 + \sqrt{5})}{12} = a^3 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$$

Povrch (obrázek 2.7.3) je dvacetinásobkem obsahu jedné stěny. Trojúhelníkové stěny mají výšku $v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$ a obsah $P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, známé již z předchozích těles:

$$S = 20 \cdot P = 20 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 5a^2 \cdot \sqrt{3}$$ (ŠMÍD, 2012)

Obrázek 2.7.3 Povrch dvacetistěnu

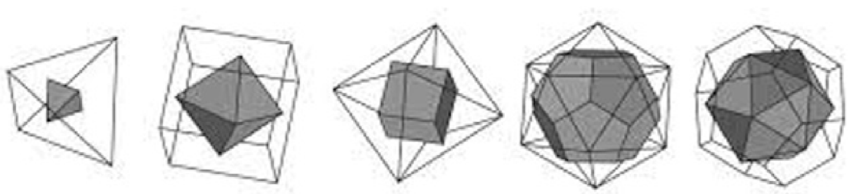


2.8 Dualita těles

Přidružená tělesa (obrázek 2.8.1): krychle s pravidelným osmistěnem, pravidelný dvanáctistěn s pravidelným dvacetistěnem se nazývají vzájemně reciproká (duální) tělesa, počet stěn jednoho se rovná počtu vrcholů druhého, počet hran u obou je stejný (o 2 menší než počet stěn a vrcholů podle věty Eulerovy, kterou lze napsat vzorcem s + v = h + 2), pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě, počet jeho stěn je roven počtu jeho vrcholů (KOUNOVSKÝ, a další, 1956).

Duální dvojice platónských těles se dají spojit také tak, že se dotýkají středy jejich stran a vzniknou složené mnohostěny zobrazené níže. Všechno na světě má svůj protiklad nebo protipól a platónská tělesa jsou toho skvělým příkladem (SUTTON, 2011).

Obrázek 2.8.1 Dualita těles

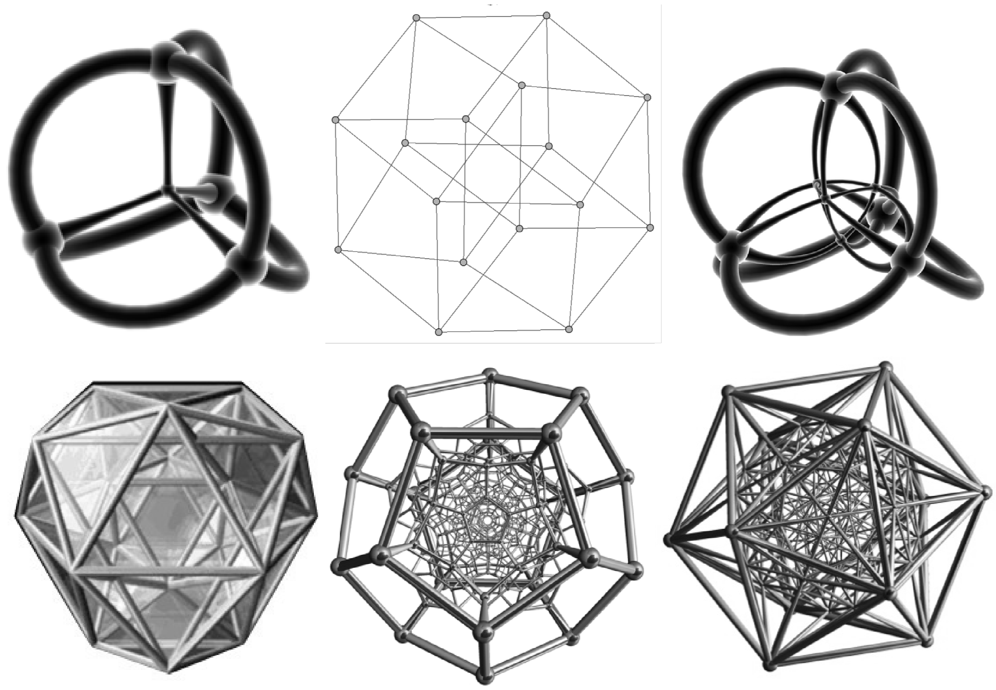


2.9 Vyšší dimenze

Ludwig Schläfli (1814-1895) dokázal, že existuje šest pravidelných čtyřrozměrných mnohostěnů: 5-nadstěn vyrobený ze čtyřstěnů, 8-nadstěn neboli teserakt z krychlí, 16-nadstěn ze čtyřstěnů, 24-nadstěn z osmistěnů, 120-nadstěn z dvanáctistěnů a 600-nadstěn ze čtyřstěnů (obrázek 2.9.1). Kosočtverečný dvanáctistěn je trojrozměrným stínem čtyřrozměrného teseraktu, podobně jako je šestiúhelník dvojrozměrným stínem krychle. V krychli se v každé hraně potkávají dva čtverce. V teseraktu se v každé hraně scházejí čtverce tři. Čtverce z jedné hrany určují tři krychle. Schläfli také dokázal, že v pětirozměrných a vícerozměrných prostorech jsou jedinými pravidelnými tělesy simplexy, neboli zobecněné čtyřstěny, zobecněné krychle a zobecněné osmistěny (SUTTON, 2011).

Pravidelné mnohostěny existují i ve vyšších dimenzích – ve čtyřrozměrném prostoru jich je šest (5-nadstěn, teserakt, 16-nadstěn, 24-nadstěn, 120-nadstěn, 600-nadstěn). V prostorech dimenze vyšší než čtyři existují vždy právě tři pravidelné mnohostěny (zobecnění čtyřstěnu, zobecnění krychle a zobecnění osmistěnu (PLATÓNSKÁ TĚLESA, 2016).

Obrázek 2.9.1 Soubor obrázků - 5-nadstěn, teserakt, 16-nadstěn, 24-nadstěn, 120-nadstěn, 600-nadstěn



2.10 Využití v přírodních vědách

Čtyřstěn, osmistěn a krychle se vyskytují v říši minerálů. Ve formě osmistěnu často bývají krystalické diamanty (SUTTON, 2011).

Vzhledem k vysoké symetrii se platónská tělesa objevují běžně v současné krystalografii, krystalochemii a molekulární fyzice a chemii. Řada tvarů krystalů s vysokou symetrií krystalové mřížky nabývá forem platónských těles, například krystaly kuchyňské soli mají tvar krychle, u sfaleritu někdy tvar čtyřstěnu. Také symetrické molekuly mají mnohdy tvar těchto těles, metan má čtyři vodíkové atomy ve vrcholech pravidelného čtyřstěnu s uhlíkovým atomem v jeho těžišti, molekula hexafluoridu sírového má tvar pravidelného osmistěnu.

Krystalická struktura: pravidelné uspořádání atomů (iontů, molekul) s prostorově neomezenou translační periodicitou. Pseudokrystalická struktura: pravidelné uspořádání atomů (iontů, molekul) s prostorově omezenou translační periodicitou a s prvky symetrie, které jsou nepřípustné pro makroskopické krystaly (pětičetná rotační osa). Obvyklými tvary jsou pravidelný ikosaedr nebo dekaedr (pentagonální bipyramida), které lze geometricky popsat jako prostorové útvary složené z lehce deformovaných pravidelných tetraedrů. Styčné plochy tetraedrů lze z hlediska atomární struktury chápat jako roviny dvojčatní (multiple twinned structures).

Fulereny – v roce 1985 byla nalezena nová forma uspořádání atomů uhlíku v podobě molekuly C_{60}. Tato „nejkulatější“ možná molekula je přesnou obdobou kopacího míče sešitého z 12 pětiúhelníků a 20 šestiúhelníků. Supravodivost – ukázalo se, že K_3C_{60} se stává vodičem, který pod teplotou 18 K přechází do supravodivého stavu. Diamanty – vysokým tlakem je možné přeměnit C_{60} na diamant a to i při pokojové teplotě.

Nanotrubičky – existují jednak uzavřené plochy z uhlíku, zvané fullereny, jednak nekonečné plochy v obou rozměrech, které běžně tvoří grafit. Je zřejmé, že by mělo existovat i něco mezi tím, tedy trubička neboli grafitový list, stočený do trubice. Takové útvary byly opravdu pozorovány a vzhledem ke svému průměru až desítky nm a tvaru byly pojmenovány jako nanotubes čili nanotrubičky. Nanoelektrické ovody, Tunelovací mikroskopy, Nanovlákna, superkondenzátory, elektrické kabely, baterie, palivové články, solární články, umělé svaly, kompozitní materiály pro automobily či letadla, materiály pro ukládání energie.

Viry – virion je nejmenší jednotka viru, která je schopna infikovat hostitele a dále se v něm množit. U nejjednodušších virů je to pouze komplex nukleové kyseliny a bílkoviny, u složitějších navíc povrchové obaly. Viriony jsou po vstupu do hostitelské buňky schopny změnit celý metabolismus buňky. Jde o klidové částice ve vnějším prostředí, které jsou schopné napadat buňky. Jejich velikost činí 15 – 390 nm, může mít tvar pravidelného mnohostěnu.

Krystaly – Wignerova – Seitzova elementární buňka – nejsymetričtější primitivní buňka krystalové mřížky, má tvar pravidelného mnohostěnu se středem v uzlovém bodě mřížky, symetrie odpovídá bodové symetrii krystalové mřížky (PLATÓNSKÁ TĚLESA, 2016).

S konvexními mnohostěny se setkáme v chemii, např. při studiu struktury molekul, krystalových mřížek. Bez základních znalostí o konvexních mnohostěnech se neobejdeme v mineralogii při studiu geometrie krystalů. V matematice, v teorii grafů, zjistíme, že spolu velmi těsně souvisí konvexní mnohostěny a souvislé grafy (POMYKALOVÁ, 2009).

3 Archimedovská tělesa – pravidelné mnohostěny

Archimedovská tělesa jsou mnohostěny, jejichž stěny jsou ne nutně stejné pravidelné mnohoúhelníky a jejichž vrcholy jsou rovnocenné, tj. žádné dva vrcholy nejdou odlišit. Archimedovských těles je 13, největší z nich má 96 stěn. Každé archimedovské těleso lze reprezentovat kombinací pravidelných mnohoúhelníků kolem jednoho vrcholu. Tímto lze matematicky dokázat, že žádné další archimedovské těleso neexistuje (PRAVIDELNÉ MNOHOSTĚNY, 2016).

Protože mají archimedovská tělesa, viz soubor obrázků v příloze, pravidelné stěny víc než jednoho druhu a shodné vrcholy, říká se jim někdy také polopravidelná tělesa. I když bývají připisována už Archimedovi (cca 287-212 př. n. l.), Kepler byl zřejmě od starověku první, kdo všech třináct těles ve svém díle Harmonices Mundi popsal. Dále si všiml dvou nekonečných množin pravidelných hranolů a antihranolů, které také mají shodné vrcholy a pravidelné stěny.

Otočíme-li jeden osmihranný vrchlík rombokuboktaedru o osminu otáčky, dostaneme pseudorombokuboktaedr. Přestože jsou jeho vrcholy obklopeny stejnými pravidelnými mnohoúhelníky, vzhledem k mnohostěnu jako celku jsou dvojího druhu (SUTTON, 2011).

Mnohostěny, které vzniknou ořezáním hran či vrcholů pravidelných mnohostěnů – Archimedovská tělesa. Archimedes objevil těles 13 a čtrnácté Aškinuze (1957), který jej získal ořezáním krychle – rhombicuboctahedron. Nejznámějším tělesem je kubooktaedr, který vznikne ořezáním krychle nebo osmistěnu. Stěny tohoto mnohostěnu tvoří čtverce a rovnostranné trojúhelníky. Velmi používaným Archimedovským tělesem je komolý dvacetistěn – fotbalový míč, je tvořen z dvanácti pravidelných pětiúhelníků a z dvaceti pravidelných šestiúhelníků. Vznikl ořezáním pravidelného dvacetistěnu. Mezi polopravidelné mnohostěny řadíme také kolmé n-boké hranoly, jejichž podstavou je pravidelný mnohoúhelník a výška je rovna délce straně tohoto mnohoúhelníku, n-boké hranolce – podstavou je pravidelný mnohoúhelník a výška je rovna délce strany mnohoúhelníku, plášť je tvořen rovnostrannými trojúhelníky (PLATÓNSKÁ TĚLESA, 2016)

Osekaný osmistěn je z archimedovských těles jediné, jehož shodnými kopiemi se dá bez mezer vyplnit celý prostor. Skrývá také méně zjevné tajemství. Spojíme-li konce jedné z jeho hran s jeho středem, úhel u středu tělesa bude stejný, jako nejmenší úhel slavného pythagorejského trojúhelníka s poměrem stran 3 : 4 : 5, který měli v oblibě staroegyptští kameníci, protože určuje pravý úhel (SUTTON, 2011).

3.1 Duály

Tělesa duální k tělesům archimedovským popsal jako skupinu poprvé Eugène Catalan (1814-1894). Abychom vytvořili k archimedovskému tělesu jeho duál, vztyčíme kolmice k hranám v jejich středech tak, aby tvořily tečny ke kulové ploše dotýkající se hran tělesa. Tyto přímky jsou hranami duálního tělesa, body, kde se protnou, budou jeho vrcholy. Archimedovská tělesa mají jeden typ vrcholů a různé druhy stěn, jejich duály tudíž mají jeden typ stěn, ale různé druhy vrcholů.

Duály obou kvaziregulárních archimedovských těles, kuboktaedru a ikosododekaedru, jsou kosočtverečné a objevil je Kepler. Jejich stěnové úhlopříčky určují duál platónských těles, ze kterých jsou složena. Poměr délek těchto úhlopříček je $\sqrt{2}$ pro kosočtverečný dvanáctistěn a φ (zlatý řez) pro kosočtverečný (tzv. Keplerův) třicetistěn. Kepler vypozoroval, že třemi takovými kosočtverci s poměrem úhlopříček $\sqrt{2}$ zakončují včely buňky svých šestiúhelníkových pláství. Také popsal tři duální páry obsahující kvaziregulární tělesa, kde se krychle považuje za kosočtverečné těleso a osmistěn za kvaziregulární (SUTTON, 2011).

4 Ostatní mnohostěny

4.1 Keplerova tělesa

Stěny Keplerových těles tvoří pravidelné pentagramy (Schläfliho symbol $\left\{\frac{5}{2}\right\}$), které jsou cípy k sobě připojeny ve vrcholech. Klasickým způsobem konstrukce Keplerových těles, kterou použil i Kepler, je prodlužování hran platónského tělesa. První pětiúhelník, jehož strany jsou protaženy, je stěna dvanáctistěnu – nad každou stěnou pomyslně vznikne pětiboký jehlan, vzniklé pentagramy utvoří malý hvězdicový dvanáctistěn (obrázek 4.1.1). Pro velký hvězdicový dvanáctistěn (obrázek 4.1.2) jsou protaženy hrany dvacetistěnu, kdy výchozí pětiúhelník je vždy podstavou vrcholového jehlanu (ŠMÍD, 2012).

Strany některých mnohoúhelníků se dají prodloužit, až se znovu protnou. Například strany pravidelného pětiúhelníku vytvoří pěticípou hvězdu, neboli pentagram. Tomuto postupu se říká ohvězdování. Johannes Kepler použil tento postup na mnohostěny a zjistil, že jsou dvě možnosti, jak je ohvězdovat: prodloužit hran nebo rozšířit stěny. Při použití první varianty na dvanáctistěn a dvacetistěn vznikly dva mnohostěny, které pojmenoval větší a menší dvacetistěnný ježek.

Jejich moderní názvy, malý hvězdicový dvanáctistěn a velký hvězdicový dvanáctistěn odhalují, že tyto mnohostěny jsou také dvěma ze stěnových ohvězdování dvanáctistěnu. Oba jsou vyrobeny z dvanácti stěn ve tvaru pentagramu, jeden z pěti a druhý ze tří na každý vrchol. Mají symetrie dvacetistěnu.

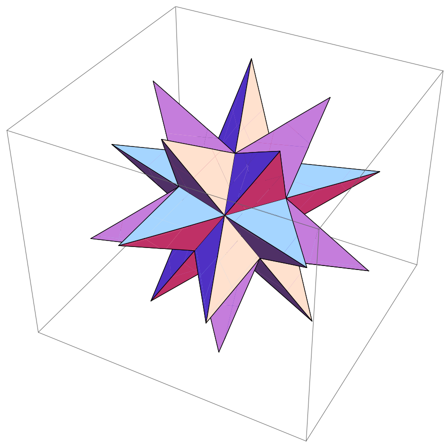
Přestože se pět stran pentagramu navzájem protíná, jsou to strany shodné a ve vrcholech svírají shodné úhly. Pentagram se tedy dá považovat za nekonvexní pravidelný mnohoúhelník. Stejně tak se i výše uvedené mnohostěny dají považovat za nekonvexní pravidelné mnohostěny (SUTTON, 2011).

4.2 Poinsotova tělesa

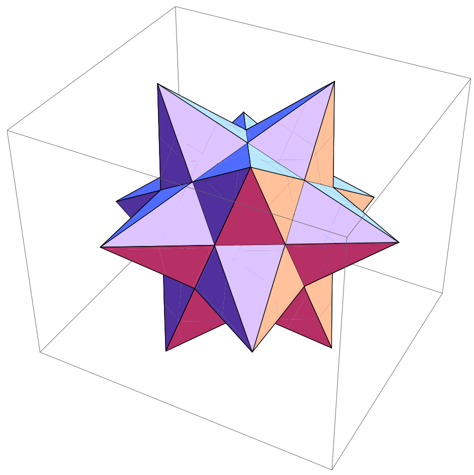
Nezávisle na Keplerovi studoval tělesa i Louis Poinsot (1777-1859). Objevil oba Keplerovy dvacetistěnné ježky a navíc ještě dva další mnohostěny: velký dvanáctistěn (obrázek 4.2.1) a velký dvacetistěn (obrázek 4.2.2). V obou mnohostěnech je pět stěn na vrchol, které se protínají a vytvářejí pentagram u vrcholů. Velký dvanáctistěn má dvanáct pětiúhelníkových stěn a je třetím stěnovým ohvězdováním dvanáctistěnu. Velký dvacetistěn má dvacet trojúhelníkových stěn a je jedním z neuvěřitelných padesáti devíti možných ohvězdování dvacetistěnu, mezi kterými jsou i složeniny pěti osmistěnů a pěti a deseti čtyřstěnů.

Nekonvexní pravidelný mnohostěn musí mít vrcholy uspořádané stejně jako některé z platónských těles. Spojování vrcholů mnohostěnu tak, aby vznikly jiné mnohoúhelníky, se říká fasetce. Možné fasetce platónských těles zahrnují složeniny dvou a deseti čtyřstěnů, složeninu pěti krychlí, dvě Poinsotova tělesa a dvě Keplerova hvězdicová tělesa (SUTTON, 2011).

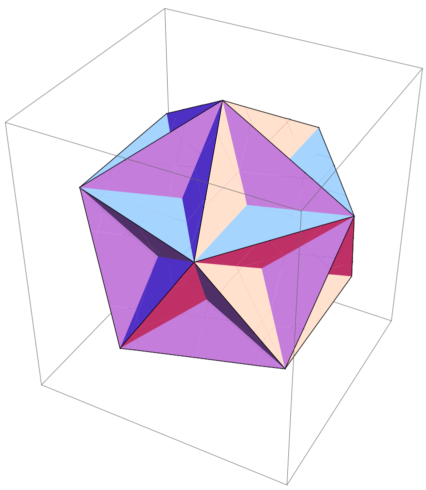
Obrázek 4.1.1 Hvězdicovitý dvacetistěn



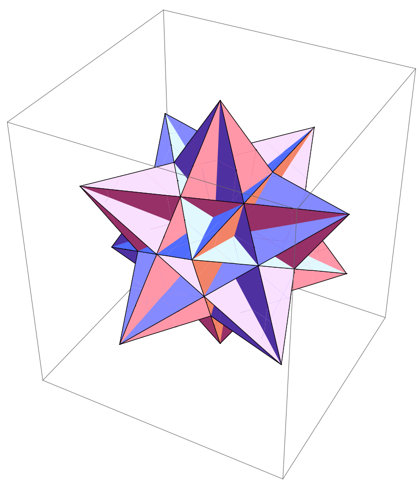
Obrázek 4.1.2 Hvězdicovitý dvanáctistěn



Obrázek 4.2.1 Velký dvanáctistěn



Obrázek 4.2.2 Velký dvacetistěn



Závěr

Cílem práce bylo objasnit zajímavé matematické téma pravidelných mnohostěnů, v podobě Platónských těles apod. Byla vysvětlena jejich terminologie a geometrická charakteristika těles, hlavní zájem byl veden na problematiku Platónských těles, která jsou velmi zajímavá.

V této práci je použit výstup softwarových možností programů GeoGebra a Wolfram Mathematica, které mají vynikající schopnosti zobrazovat mnohostěny a pracovat s vlastnostmi těles. V práci byla ověřena možnost výpočtu objemů, obsahů těles, tento výstup je možný k využití pro výuku na školách, kde bohužel je problematika pravidelných mnohostěnů přehlížena. Doufám, že i tato práce napomůže k propagaci tohoto zajímavého tématu, věřím, že bude touto formou vizualizace a seskupeného popsání vlastností.

Celkem tato práce byla pro mě důkladnějším poznáním pravidelných mnohostěnů. Dále naučení práce, pro mě s novým softwarem Wolfram Mathematica, který v sobě skýtá zajímavé úkoly s výpočty pravidelných mnohostěnů.

Seznam použité literatury

BEATTY, Richard a JACKSON, Tom. 2013. *Matematika: 100 objevů, které změnily historii.* Praha : Slovart, 2013. ISBN 978-80-7391-770-8.

JUCOVIČ, Ernest. 1981. *Konvexné mnohosteny.* 1. vyd. Bratislava : Veda, 1981.

KOUNOVSKÝ, Josef a František, VYČICHLO. 1956. *Deskriptivní geometrie.* Praha : Nakladatelství Československé akademie věd, 1956.

PAVLOVIČOVÁ, Eva. *Pravidelné mnohostěny a jejich vlastnosti*. Praha, 2014. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce doc. RNDr. Robová Jarmila, CSc.

PLATÓNSKÁ TĚLESA. [Online] [Citace: 29. února 2016.] www.matfyz.eu/dokumenty/zahady/platonska-telesa.pptx.

POMYKALOVÁ, Eva. 2009. *Matematika pro gymnázia.* 4. vyd. Praha : Prometheus, 2009. ISBN 978-80-7196-389-9.

PRAVIDELNÉ MNOHOSTĚNY. [Online] [Citace: 3. dubna 2016.] https://mks.mff.cuni.cz/library/PravidelneMnohostenyRK/PravidelneMnohostenyRK.pdf.

STEWART, Ian. 2014. *Krocení nekonečna: příběh matematiky od prvních čísel po teorii chaosu.* [překl.] Zdeněk KUBÍK. 1. vyd. Brno : CPress, 2014. ISBN 978-80-264-0295-4.

SUTTON, Daud. 2011. *Platónská a archimedovská tělesa: geometrie prostoru.* 1.vyd. v českém jazyce. Praha : Kosmas, 2011. ISBN 978-80-7363-349-3.

ŠMÍD, Radek. *Platónská tělesa*. Praha, 2012. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce doc. RNDr. Zhouf Jaroslav, Ph.D.

Seznam obrázků a tabulek

Resumé

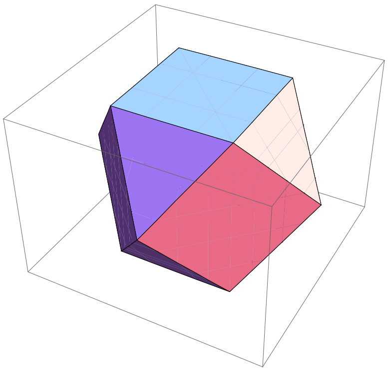
The aim was to clarify interesting mathematical topic of regular polyhedra - Platonic solid. She explained terminology and geometric characteristics of solids.

Was used GeoGebra and Wolfram Mathematica, which have an excellent ability to display polygons and work with them. It was verified the possibility of calculating the volumes, surfaces of solids, this output is possible to use for schools.

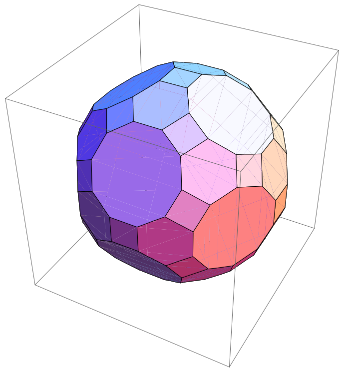
Keywords: Regular polyhedra, Platon, platonic solids, Wolfram Mathematica, dualism.

Přílohy

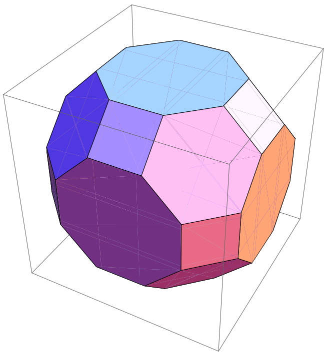
Obrázek 1 Kuboktaedr (Krychloktaedr) - Cuboctahedron



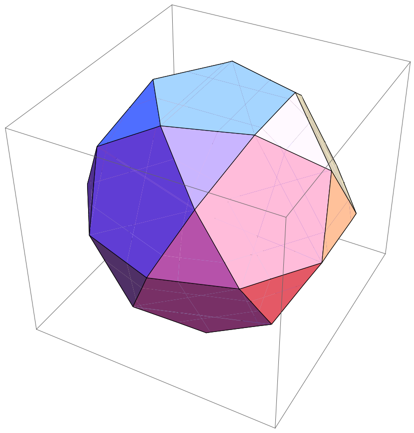
Obrázek 2 Komolý ikosidodekaedr (velký romboikosododekaedr) - Great Rhombicosidodecaedron



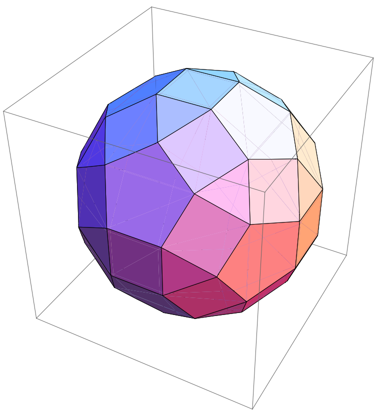
Obrázek 3 Komolý krychloktaedr (velký rombokuboktaedr) - Great Rhombicuboctahedron



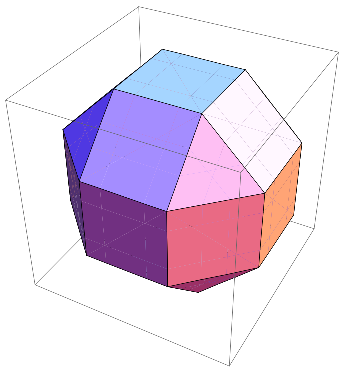
Obrázek 4 Ikosidodekaedr - Icosidodecahedron



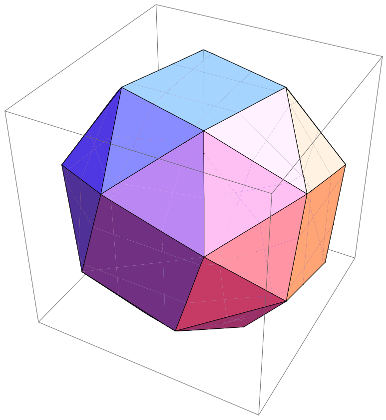
Obrázek 5 Rombický dodekaedr (Malý romboikosododekaedr) - Small Rhombicosidodecahedron



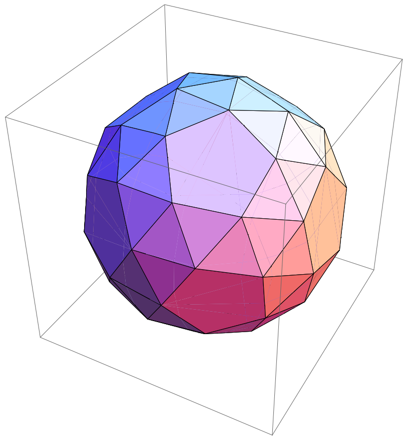
Obrázek 6 Rombická krychle (malý rombokuboktaedr)



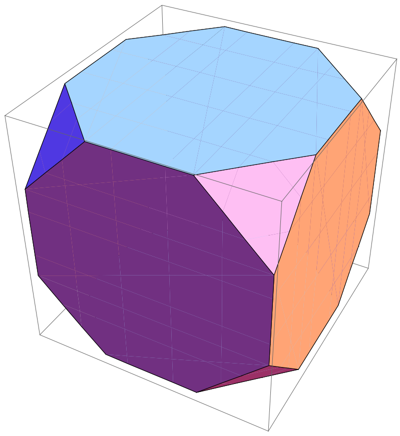
Obrázek 7 Přitlačená krychle (přitlačený šestistěn nebo otupěný kuboktaedr) - Snub Cube



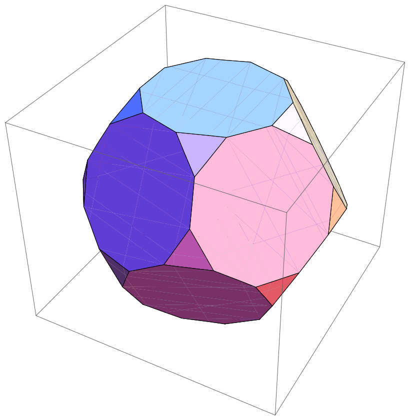
Obrázek 8 Přitlačený dvanáctistěn (otupěný ikosododekaedr) - Snub Dodecahedron



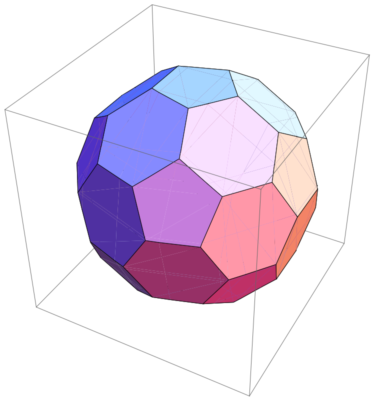
Obrázek 9 Komolá krychle (osekaný šestistěn) - Truncated Cube



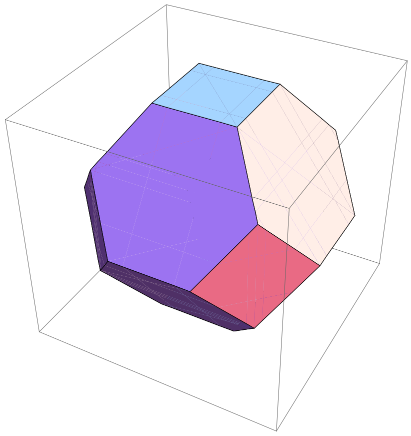
Obrázek 10 Komolý dvanáctistěn - Truncated Dodecahedron



Obrázek 11 Komolý dvacetistěn - Truncated Icosahedron



Obrázek 12 Komolý osmistěn - Truncated Octahedron



Obrázek 13 Komolý čtyřstěn - Truncated Tetrahedron