ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ELIMINAČNÍ METODY – HISTORICKÝ POHLED

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Fronk

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň, 2016

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 15. dubna 2016

....

Michal Fronk

Děkuji své vedoucí bakalářské práce Mgr. Martině Kašparové, Ph.D. za ochotu, strávený čas a za velmi užitečné připomínky, které mi věnovala při psaní mé práce.

Obsah

Úvod

Matematika se skládá z mnoha disciplín, jejíž nedílnou součástí je i algebra. Tato práce popisuje nejrůznější eliminační metody, mezi něž patří úpravy soustav rovnic. Považujeme je za jednu z nejdůležitějších částí algebry.

Soustavy rovnic často popisují nejrůznější matematické problémy, a proto si myslíme, že patří k základům některé úpravy znát a dokázat je použít. Ať už se jedná o metodu substituční či metodu sčítací. Některé soustavy rovnic jsou velice složité a jen s technikami, které se učí na základních a středních školách, bychom při jejich řešení nemuseli uspět. Tato práce rozšiřuje pohled na jiné druhy eliminačních metod, podle kterých můžeme postupovat.

Pro svoji bakalářskou práci jsem si vybral téma *Eliminační metody – historický kontext*, abych rozšířil svoje vědomosti o další dovednosti při úpravách rovnic a chtěl jsem nahlédnout do historie této problematiky.

V první části práce se budeme snažit ukázat jednoduché úpravy při řešení soustavy rovnic, abychom čtenáře seznámili s tím, čemu se budeme věnovat na následujících stranách.

Další kapitoly budeme řadit chronologicky od nejstarších známých metod objevených v 17. století až k principům 18. století. Ukážeme postup Pierra de Fermata či Isaaca Newtona, kteří soustavy rovnic vyšších stupňů převedli na rovnici s nižším stupněm, kde každý využíval trochu jiného postupu. Dále se zmíníme, jak eliminoval neznámou z rovnic Johannes Hudde, aby našel největšího společného dělitele. Ukážeme techniky Gottfrieda Wilhelma Leibnize a v 18. století se zaměřím na Leonharda Eulera a Étienna Bézouta, kteří převáděli soustavy rovnic vyšších stupňů na soustavy lineárních rovnic. Závěrem se budeme snažit porovnat metody některých z nich na příkladech.

Zdroje, které používáme k psaní práce, jsou psané latinsky, rusky, francouzsky či anglicky a značení v nich jsou často původní a je složité jim porozumět a správně je pochopit. Nejvíce pramenů můžeme nalézt v internetových zdrojích, ale bohužel málo v českém jazyce.

Eliminační metody jsou značně rozsáhlým tématem a bohužel nemůžeme celou historii od 17. století až po současnost do bakalářské práce zařadit z důvodu jejího omezení. Budeme popisovat jen již zmíněné období a pro další postupy následujících století není prostor.

1. Úvodní příkladová část

Na začátku si ukážeme na jednoduchých příkladech různé eliminační postupy, které jsou dnes známé a používané.

Příklad č. 1.1: Najděte řešení soustavy dvou rovnic druhého stupně o jedné neznámé *x*.

$$1)\ x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$2)\ x^2 + 7x + 10 = 0$$

Řešení:

Pomocí sčítací metody:

Jedná se o jednoduchou soustavu dvou kvadratických rovnic, které můžeme řešit každou zvlášť vyjádřením kořenů příslušné rovnice. Můžeme je počítat pomocí užití diskriminantu nebo užitím Vietových vzorců. Následně bychom provedli průnik množin řešení obou rovnic a zjistili bychom, jestli tato soustava dvou rovnic má řešení. Použijeme však sčítací metodu na eliminaci kvadratického členu. Vynásobíme druhou rovnici (– 1) a dostaneme.

$$1)\ x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$2) - x^2 - 7x - 10 = 0$$

Pak sečteme první rovnici s druhou.

$$3) - x - 5 = 0$$

Snadno už spočteme *x* ($x = \mathbf{-5}$). Dosadíme do zadaných rovnic a zjistíme, že ($x = \mathbf{-5}$) je skutečně řešením obou rovnic. Tím provádíme i zkoušku, jestli jde o správnost výsledků.

$$1)\ L_1 = (-5)^2 + 6.(-5) + 5 = 0 = P_1$$

$$2)\ L_2 = (-5)^2 + 7.(-5) + 10 = 0 = P_2$$

$$1)\ L_1 = P_1$$

$$2)\ L_2 = P_2$$

Soustava dvou rovnic o jedné neznámé má jedno řešení ($x = \mathbf{-5}$).

V tomto příkladu jsme využili sčítací metodu, kterou můžeme výhodně zapsat maticově.

Pomocí matic:

Zapíšeme matici soustavy obsahující koeficienty na levých stranách.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Pomocí jednotlivých povolených řádkových úprav dostaneme odstupňovanou matici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Na první pohled se nám matice příliš nezměnila. Ale zmizel nám kvadratický člen. Dostáváme soustavu dvou rovnic.

$$1)\ x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$2) - x - 5 = 0$$

Z druhé rovnice vyjádříme *x* ($x = \mathbf{-5}$), které dosadíme do rovnice druhé a dostaneme.

$$0 = 0$$

Řešení je správné a souhlasí i s tím, co jsme vypočítali prvním způsobem.

Příklad č. 1.2: Najděte řešení soustavy dvou rovnic druhého stupně o jedné neznámé *x*.

$$1)\ 4x^2 + 3x + 3 = 5 - x$$

$$2)\ x^2 + 16x - 8 = 0$$

Řešení:

Pomocí sčítací metody:

Jedná se o soustavu dvou kvadratických rovnic, které můžeme řešit každou zvlášť vyjádřením kořenů příslušné rovnice jako v předchozím příkladu. Znovu však využijeme metodu sčítací, kdy eliminujeme kvadratický člen. V první rovnici uděláme jednoduchou úpravu a převedeme vše z pravé strany na stranu levou.

$$1)\ 4x^2 + 4x - 2 = 0\ (⧖)$$

$$2)\ x^2 + 16x - 8 = 0\ (⌂)$$

Vynásobíme druhou rovnici (– 4).

$$1)\ 4x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$2) - 4x^2 - 64x + 32 = 0$$

Sečteme první rovnici s druhou a dostaneme.

$$-60x + 30 = 0$$

Nyní dopočteme neznámou *x* ($x = \mathbf{\frac{1}{2}}$). Dosazením do obou rovnic ((⧖), (⌂)) ověříme, zda řešení soustavy dvou rovnic o jedné neznámé je správné. Tím provádíme i zkoušku.

$$1)\ L_1 = 4.\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 3.\left(\frac{1}{2}\right) + 3 \neq 5 - \frac{1}{2} = P_1$$

$$2)\ L_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 16.\left(\frac{1}{2}\right) - 8 \neq 0 = P_2$$

$$1)\ L_1 = \frac{11}{2} \neq \frac{9}{2} = P_1$$

$$2)\ L_2 = \frac{1}{4} \neq 0 = P_2$$

$$1)\ L_1 \neq P_1$$

$$2)\ L_2 \neq P_2$$

Tato soustava dvou rovnic o jedné neznámé nemá řešení.

Pomocí matice:

Jako u metody sčítací upravíme první rovnici, abychom měli na pravé straně nulu.

$$1)\ 4x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$2)\ x^2 + 16x - 8 = 0$$

Zapíšeme matici soustavy obsahující koeficienty na levých stranách.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 1 & 16 & -8 \end{pmatrix}$$

Pomocí jednotlivých povolených řádkových úprav dostaneme odstupňovanou matici.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 0 & -60 & 30 \end{pmatrix}$$

Eliminoval se nám kvadratický člen ve druhém řádku. Dostáváme velice podobnou soustavu dvou rovnic, jako v příkladu č. 1.

$$1)\ 4x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$2) - 60x + 30 = 0$$

Vyjádříme neznámou x z druhé rovnice ($x = \frac{1}{2}$). Můžeme dosadit do první rovnice a dostaneme.

$$1 \neq 0$$

Pomocí matice jsme potvrdili, že tato soustava nemá řešení.

Na příkladech dvou rovnic o jedné neznámé jsme si ukázali jednoduché principy eliminace. Využili jsme metodu sčítací, kde jsme jednotlivé rovnice upravili do příslušných tvarů, aby došlo k eliminaci kvadratického členu a nalezení řešení pro neznámou *x*. Dále pomocí zkoušky, respektive dosazení, jsme rozhodli, zda soustava dvou rovnic o jedné neznámé má řešení či nikoliv. Řešení jsme ukázali i s využitím matic.

Následující dva příklady se budou týkat soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

Příklad č. 1.3: Najděte řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých *x* a *y*.

$$1)\ 8x^2 + 2y^2 = 9\ (\triangleleft)$$

$$2)\ y = 2x + 3\ (\nabla)$$

Řešení:

Jedná se o dvě rovnice, kde první má dva členy kvadratické a druhá dva členy lineární. V tomto příkladu se nabízí použít metodu substituční a ne sčítací. Ve druhé rovnici již máme vyjádřenou neznámou y. Můžeme dosadit do rovnice první a dostaneme.

$$8x^2 + 2.(2x+3)^2 = 9$$

Postupně rovnici upravíme na kvadratickou rovnici.

$$16x^2 + 24x + 9 = 0$$

Rovnici jsme řešili pomocí vzorečku s využitím diskriminantu.[1] Ten vyšel nulový ($D = \mathbf{0}$).[2] Dostali jsme jedno dvojnásobné řešení rovnice o neznámé x ($x = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$). Dále postupujeme tak, že dosadíme x do druhé rovnice (∇) a spočítáme y.

$$y = 2.\left(-\frac{3}{4}\right) + 3$$

Vypočteme neznámou y ($y = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$). Pro kontrolu, jestli máme oba dva kořeny správné, dosadíme do obou rovnic ((◁), (∇)). Tím provádíme i zkoušku.

$$1)\ L_1 = 8.\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 2.\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 = P_1$$

$$2)\ L_2 = \frac{3}{2} = 2.\left(-\frac{3}{4}\right) + 3 = L_2$$

$$1)\ L_1 = 9 = 9 = P_1$$

$$2)\ L_2 = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = P_2$$

$$1)\ L_1 = P_1$$

$$2)\ L_2 = P_2$$

Rovnosti u obou rovnic máme stejné, takže výsledky jsou správné. Můžeme říci, že soustava dvou rovnic o dvou neznámých má jedno řešení $\left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right]$. Když vezmeme geometrický význam této úlohy, tak se jedná o vzájemnou polohu kuželosečky (elipsy) a přímky. Jelikož nám vyšlo jedno řešení, oba dva útvary mají jeden společný bod dotyku a zároveň můžeme tvrdit, že přímka ($y = 2x + 3$) je tečnou elipsy ($8x^2 + 2y^2 = 9$).

---

[1] Kvadratická rovnice se řeší pomocí vzorce ($x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$), kde výraz pod odmocninou se nazývá diskriminantu (D). Písmena a, b, c jsou koeficienty příslušné kvadratické rovnice ($ax^2 + bx + c = 0$).

[2] Diskriminant může vyjít buď záporný, kladný nebo bude roven nule. Pro kladný diskriminant bude mít dvě řešení, pro nulový má jedno řešení, a pro diskriminant záporný nemá řešení žádné.

Příklad č. 1.4: Najděte řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých *x* a *y*.

$$1)\ 2x^2 + 7y^2 + 10x - 2y - 5 = 0$$

$$2) - x + 6y = -12 + 2x$$

Řešení:

Jedná se o velice podobnou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jako v předchozím příkladu. Než začneme s využitím eliminačních metod, upravíme druhou rovnici.

$$1)\ 2x^2 + 7y^2 + 10x - 2y - 5 = 0$$

$$2)\ 6y - 3x = -12$$

Druhou rovnici vydělíme číslem tři a vyjádříme neznámou *x*.

$$1)\ 2x^2 + 7y^2 + 10x - 2y - 5 = 0$$

$$2)\ x = 4 + 2y$$

Dosadíme do první rovnice. Znovu využíváme metodu substituční.

$$2.(4 + 2y)^2 + 7y^2 + 10.(4 + 2y) - 2y - 5 = 0$$

Rovnici upravíme a dostáváme.

$$15y^2 + 50y + 67 \ = \ 0$$

Jedná se o kvadratickou rovnici s neznámou *y*, kterou vyřešíme pomocí diskriminantu. Ten vyšel záporný ($D = \mathbf{-1520}$). Závěrem můžeme říci, že tato soustava dvou rovnic o dvou neznámých *x* a *y* nemá řešení v R^2. V tomto příkladu se jedná opět o kuželosečku (elipsu) a přímku. Vzájemná poloha těchto geometrických útvarů neobsahuje žádný společný bod, jedná se o vnější přímku. Tyto dva příklady byly řešeny metodou substituční, což obnáší vyjádření jedné neznámé z jedné rovnice a dosazení do rovnice druhé. Tímto jsme vždy eliminovali jednu neznámou a tu druhou jsme následně vypočítali. V tomto případě jsme využili znalostí počítání kvadratických rovnic.

Na těchto jednoduchých příkladech jsme si ukázali, jak eliminovat neznámé pomocí substituční či sčítací metody. V další části této práce se budeme věnovat mnohem složitějším příkladům a postupům od 17. století.

2. Eliminační metody objevené v Evropě v 17. století

Počátky studia eliminačních metod sahají do 17. století. Principy eliminace se jako první zabýval Pierre de Fermat. Na jeho práci navázali v tomto století další matematici, jako Isaac Newton, Johannes Hudde či Gottfried Wilhelm Leibniz.

2.1 Pierre de Fermat (1601 - 1665)

Tento významný francouzský matematik studoval práva, která dokončil maturitou v roce 1631. Ze začátku se snažil působit v oblasti práva a politiky, od čehož postupně ustoupil a začal se plně věnovat matematice. Je považován za zakladatele teorie čísel, zajímal se o geometrii a také o eliminační postupy při úpravách rovnic, které popsal ve své práci *Novus secundarum et ulterioris radicum in analyticis usus*. Jeho snaha se upřela k nalezení vydavatele, který by byl ochoten jeho práci publikovat. V tomto úsilí mu mimo jiné pomáhali Pierre de Carcavy nebo Blaise Pascal, kteří disponovali vhodnými konexemi. Ani s touto pomocí se mu nepodařilo dílo vydat, a proto jeho práce nikdy oficiálně nevyšla. Části některých jeho děl byly zveřejňovány díky jeho přátelům, kterým posílal krátké dopisy či statě. Většina těchto prací byla vydána až po jeho smrti, například v roce 1679 *Varia opera*. Všechna jeho díla či poznámky můžeme souhrnně najít pod názvem Euvres de Fermat. Jedná se o soubor pěti knih, kde *Novus secundarum et ulterioris radicum in analyticis usus* zaujímá své místo v první knize a později se tak mohla stát velice důležitou a významnou pro algebru a analytickou geometrii. Konkrétně v ní najdeme první známou metodu eliminace, kde dochází k vyloučení neznámé ze dvou rovnic vyššího stupně a kterou pravděpodobně rozpracoval již v roce 1638.

Než přistoupíme k teoriím, je třeba ukázat na motivačním příkladu využití technik výpočtu dvou rovnic o dvou neznámých podle Fermata.

Příklad č. 2.1: Najděte řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

$$1)\ x^2 + 5xy + 2y^2 - 8x - 2y + 2 = 0$$

$$2)\ 2x^2 - 4xy - 3y^2 + 7x - 3y - 2 = 0$$

Upravíme levou stranu rovnic, kde nejdříve píšeme členy s neznámou *y*, pak s neznámou *x*.

$$1)\ 2y^2 + (5x - 2)y + x^2 - 8x + 2 = 0$$

$$2) - 3y^2 + (-4x - 3)y + 2x^2 + 7x - 2 = 0$$

V další kroku necháme všechny členy s neznámou *y* na levé straně a ostatní převedeme na pravou stranu.

$$1)\ 2y^2 + (5x - 2)y = -x^2 + 8x - 2$$

$$2) - 3y^2 - (4x + 3)y = -2x^2 - 7x + 2$$

Nyní můžeme levou stranu vydělit stranou pravou, abychom neměli mínus ve jmenovateli, vytkneme ho před zlomek a tím se nám změní znaménka v čitateli.

$$1)\ \frac{-2y^2-(5x-2)y}{x^2-8x+2}=1$$

$$2)\ \frac{3y^2+(4x+3)y}{2x^2+7x-2}=1$$

Na pravých stranách máme číslo jedna a vycházíme z principu, že když se pravé strany rovnic rovnají, budou se rovnat i strany levé. Obě rovnice dáme do rovnosti a navíc vynásobením obou rovnic výrazem $\left(\frac{1}{y}\right)$ můžeme mocniny u neznámé *y* v čitateli snížit. Dostáváme.

$$\frac{-2y-(5x-2)}{x^2-8x+2}=\frac{3y+(4x+3)}{2x^2+7x-2}$$

Pomocí úprav získáme lineární rovnici v tomto tvaru.

$$\left(\frac{-2}{x^2-8x+2}-\frac{3}{2x^2+7x-2}\right)y=\frac{4x+3}{2x^2+7x-2}+\frac{5x-2}{x^2-8x+2}$$

Přistoupíme k úpravám těchto zlomků, abychom dostali na levé straně jen neznámou *y*. Nejdříve převedeme výrazy na obou stranách na společného jmenovatele.

$$\left(\frac{-2(2x^2+7x-2)-3(x^2-8x+2)}{(x^2-8x+2)(2x^2+7x-2)}\right)y$$
$$=\frac{(4x+3)(x^2-8x+2)+(5x-2)(2x^2+7x-2)}{(2x^2+7x-2)(x^2-8x+2)}$$

Vydělíme celou rovnici výrazem na levé straně a dostaneme.

$$y=\left(\frac{\frac{(4x+3)(x^2-8x+2)+(5x-2)(2x^2+7x-2)}{(2x^2+7x-2)(x^2-8x+2)}}{\frac{-2(2x^2+7x-2)-3(x^2-8x+2)}{(x^2-8x+2)(2x^2+7x-2)}}\right)$$

Je zřejmé, že se nám zkrátí výrazy $((2x^2+7x-2).(x^2-8x+2))$. Po následném roznásobení a úpravách dostaneme vyjádřenou neznámou *y*.

$$y=\frac{14x^3+2x^2-40x+10}{-7x^2+10x-2}$$

Nyní již můžeme dosadit do jedné z rovnic a spočítat neznámou *x* a následně i *y*. Tato soustava dvou rovnice o dvou neznámých má celkem čtyři řešení: *[2; – 5]*, a zaokrouhlené *[0,26; – 0,01]*, *[1,43; 1,03]* a *[– 3,41; 3,27]*. Pro kontrolu uděláme zkoušku pro řešení *[2; – 5]*. Dosadíme do obou rovnic v zadání.

$$1)\ L_1=2^2+5.2.(-5)+2.(-5)^2-8.2-2.(-5)+2=0=P_1$$

$$2)\ L_2=2.2^2-\ 4.2.(-5)-3.(-5)^2+7.2-3.(-5)-2=0=P_2$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme.

$$1)\ L_1 = 0 = 0 = P_1$$

$$2)\ L_2 = 0 = 0 = P_2$$

$$1)\ L_1 = P_1$$

$$2)\ L_2 = P_2$$

Řešení *[2; – 5]* je správné.

Na tomto příkladu jsme si ukázali, jak se dá řešit soustava dvou rovnic o dvou neznámých pomoci technik, se kterými jako první přišel Pierre de Fermat. Zatím jsme ukázali jen praktický příklad, ze kterého vyplývá zřejmý postup. Následně se budeme věnovat teoretickým základům, jak obecně postupovat při jednotlivých příkladech.

Máme v soustavě dvou rovnic dvě neznámé *y* a *x*, kde na vyloučení neznámé *y* ukážeme stejný postup, který byl použit u příkladu č. 2.1. Rovnice obsahují neznámou *y* a neznámou *x*, kde a_i, b_j jsou polynomy v neznámé *x*.

$$1)\ a_0y^m + a_1y^{m-1} + a_2y^{m-2} + \cdots + a_m = 0$$

$$2)\ b_0y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \cdots + b_n = 0$$

Členy bez neznámé *y* převedeme na pravou stranu a vydělíme levou stranu pravou a dostaneme tvar.

$$1)\ \frac{a_0y^m + a_1y^{m-1} + a_2y^{m-2} + \cdots + a_{m-1}y}{a_m} = 1$$

$$2)\ \frac{b_0y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \cdots + b_{n-1}y}{b_n} = 1$$

Na pravé straně máme jednotky a tím můžeme rovnice srovnat.

$$\frac{a_0y^m + a_1y^{m-1} + a_2y^{m-2} + \cdots + a_{m-1}y}{a_m} = \frac{b_0y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \cdots + b_{n-1}y}{b_n}$$

Neznámá *y* je na pravé i na levé straně. V čitateli můžeme *y* snížit o jeden stupeň. Pokud rovnice obsahuje neznámou *y* nejvýše ve druhé mocnině, tak tento postup provádíme jen jednou, protože však rovnice již žádnou neznámou *y* po úpravě nebude obsahovat, budeme jí mít tímto vyjádřenou. V případě, že rovnice bude obsahovat neznámou *y* ve vyšších stupních, musíme postup opakovat. Místo neznámé *y* můžeme stejným způsobem eliminovat neznámou *x*.

Pojďme se ještě podívat na originální vysvětlení tohoto problému, který popsal Pierre de Fermat ve svém díle *Novus secundarum et ulterioris radicum in analyticis usus*. Krásně rozepisuje celý problém postupně až k eliminaci neznámé. Vše dokládá i svým komentářem.

Na začátku se zmiňuje o redukci vyšších kořenů k prvním, což znamená dostat z nelineárních členů neznámé v první mocnině.

$$1)\ x^3 + y^3 = a^3\ (\triangle)$$

$$2)\ bx + y^2 + cy = d^2\ (\lozenge)$$

Dále provedl jen elementární úpravy, ve kterých členy obsahující y převedl na pravou stranu a zbývající ponechal nebo převedl na stranu levou. Musíme tento krok chápat jako polynom v neurčité y. Pro lepší přehlednost jsme použili ještě jeden mezikrok navíc oproti originálu.

$$1)\ x^3 + y^3 = a^3$$

$$1)\ x^3 - a^3 = -y^3$$

$$1`)\ a^3 - x^3 = y^3$$

A druhá rovnice má tvar.

$$2)\ bx + y^2 + cy = d^2$$

$$2)\ bx - d^2 = -y^2 - cy$$

$$2`)\ d^2 - bx = y^2 + cy$$

Fermat uvádí poměry k rovnicím: $a^3 - x^3\ \boldsymbol{k}\ y^3$ a $d^2 - bx\ \boldsymbol{k}\ y^2 + cy$. Vše popisuje včetně zdůvodnění převedením těchto poměrů na rovnici.

$$a^3y^2 - x^3y^2 + a^3cy - x^3cy = d^2y^3 - bxy^3$$

Pro naše účely a pro lepší pochopení převedeme na tvar, který ovšem v jeho písemnostech nenajdeme. Jen ho uvádíme pro větší přehled.

$$(a^3 - x^3)(y^2 + cy) = (d^2 - bx)y^3$$

V následujícím kroku zkrátil y, čímž dostaneme rovnici nižšího stupně.

$$3)\ a^3y - x^3y + a^3c - x^3c = d^2y^2 - bxy^2$$

Znovu převedeme na tvar, který není roznásobený.

$$(a^3 - x^3)(y + c) = (d^2 - bx).y^2$$

Dále rovnici upravuje, aby členy obsahující y a její mocniny byly na straně pravé a konstantní členy na straně levé.

$$3`)\ a^3c - x^3c = d^2y^2 - bxy^2 - a^3y + x^3y$$

Pak připomíná rovnici číslo 2) a to v upraveném tvaru.

$$2`)\ d^2 - bx = y^2 + cy$$

Opakoval úpravu, při které převedl rovnice na poměry za použití rovnic 3`) a 2`).

$$3`)\ (a^3c - x^3c) \qquad \boldsymbol{k} \qquad (d^2y^2 - bxy^2 - a^3y + x^3y)$$

$$2`)\ (d^2 - bx) \qquad \boldsymbol{k} \qquad (y^2 + cy)$$

Následně píše o vydělení neznámé y. Uvádí tvar před zkrácením.

$$a^3cy^2 + a^3c^2y - x^3cy^2 - x^3c^2y = d^4y^2 - d^2bxy^2 - d^2a^3y + d^2x^3y - bxd^2y^2 + b^2x^2y^2 + ba^3xy - bx^4y$$

Pro naši lepší přehlednost ji uvedeme i v jiném tvaru.

$$(a^3c - x^3c).(y^2 + cy) = (d^2y^2 - bxy^2 - a^3y + x^3y).(d^2 - bx)$$

Pak znovu zkrátil y.

$$4)\ a^3cy + a^3c^2 - x^3cy - x^3c^2 = d^4y - d^2bxy - d^2a^3 + d^2x^3 - bxd^2y + b^2x^2y + ba^3x - bx^4$$

Jako předtím napíšeme jiný tvar.

$$(a^3c - x^3c).(y + c) = (d^2y - bxy - a^3 + x^3).(d^2 - bx)$$

Dále se upravuje rovnice tak, že na straně levé máme členy bez y a na pravé straně členy s y.

$$4`)\ a^3c^2 - x^3c^2 + d^2a^3 - d^2x^3 - ba^3x + bx^4 = d^4y - d^2bxy - bxd^2y + b^2x^2y - a^3cy + x^3cy$$

Nyní už je y lineární, to znamená, že můžeme neznámou y vyjádřit jako podíl dvou mnohočlenů.

$$\frac{a^3c^2 - x^3c^2 + d^2a^3 - d^2x^3 - ba^3x + bx^4}{d^4y - d^2bxy - bxd^2y + b^2x^2y - a^3cy + x^3cy} = y\ (\diamondsuit)$$

Připomíná rovnici číslo 2).

$$2)\ bx - d^2 = -y^2 - cy\ (\heartsuit)$$

Slovně popisuje, že lze využít rovnici ($\heartsuit$) a rovnici číslo 4), která je lineární a vytvořit tím další lineární rovnici v y. Když máme dvě rovnice lineární, můžeme komparační metodou získat rovnici pouze v y. Rovněž uvádí, že je možné zlomek ($\diamondsuit$) dosadit do uvedených rovnic na začátku ((Δ), ($\Diamond$)). Tím získáme rovnice pouze v neznámé x. Ke shodnému výsledku jsme dospěli i v ukázkovém příkladu. Závěrem uvádí, že postup lze využít pro více než dvě rovnice v soustavě.

K této části své práce přidává dodatek, který poslal již zmíněnému Carcavymu v dopise z 20. 8. 1650. Odstraňuje v něm odmocniny z rovnic podle předchozího postupu, vše uvádí na příkladu.

$$\sqrt[3]{bx^2 - x^3} + \sqrt{x^2 + ax}\sqrt[4]{c^3x^2 - x^4} + \sqrt{ex - x^2} = d$$

Pak mění příklad a ukazuje na něm celý postup.

$$\sqrt[3]{ax^2 - x^3} + \sqrt[3]{x^3 + b^2x} = c$$

Tento výraz upravuje na jiný tvar. Přidáváme jeden krok navíc v podobě vynásobení (– 1).

$$-c + \sqrt[3]{x^3 + b^2x} = -\sqrt[3]{ax^2 - x^3}$$

$$c - \sqrt[3]{x^3 + b^2x} = \sqrt[3]{ax^2 - x^3}$$

V dalším postupu si jeden výraz označí jinak, a to písmenem *y* a předpokládá, že dospěje k výsledku.

$$\sqrt[3]{x^3 + b^2x} = y \ (⟠)$$

A dosadí do rovnice.

$$c - y = \sqrt[3]{ax^2 - x^3}$$

Umocní na třetí a dostane.

$$(c - y)^3 = ax^2 - x^3$$

A závorku následně upraví na tvar.

$$1)\ c^3 + 3cy^2 - 3c^2y - y^3 = ax^2 - x^3$$

Vrátí se k předchozímu předpokladu (⟠) a také ho umocní na třetí.

$$2)\ y^3 = x^3 + b^2x$$

Tyto dvě rovnice dále upravuje, aby na levé straně byly členy s neznámou *x* a na straně druhé s neznámou *y*.

$$1`) - ax^2 + x^3 + c^3 = -3cy^2 + 3c^2y + y^3$$

$$1`) ax^2 - x^3 - c^3 = 3cy^2 - 3c^2y - y^3$$

$$2`) - x^3 - b^2x = -y^3$$

$$2`) x^3 + b^2x = y^3$$

Jelikož jsou u neznámé *y* vyšší mocniny, navrhuje opakovat postup, aby se snížily mocniny, jako tomu bylo u rovnic bez odmocnin.

Na dalších stránkách se již zmiňuje pouze slovně, jak postupovat pro odmocniny vyšších stupňů. Neuvádí už další příklady k tomuto problému. Pouze poukazuje na dva problémy o počtu neznámých v rovnicích, kde buď počet neznámých je nižší anebo vyšší než počet rovnic.

Práce Fermata byly velice přínosné pro rozvoj matematiky. Navázali na něj další matematici, jako byl například Isaac Newton či James J. Sylvester. Na závěr připojujeme jednu stránku z práce Fermata *Novus secundarum et ulterioris radicum in analyticis usus*, kde ukazuje právě již zmíněný postup.

NOVUS SECUNDARUM

ET

ULTERIORIS ORDINIS RADICUM

IN ANALYTICIS USUS.

Reductio secundarum et ulterioris ordinis radicum ad primas, quæ maximi est in Algebraicis momenti, unicam pro fundamento agnoscit duplicatæ æqualitatis analogiam, eamque, quoties opus fuerit, iterandam progressus ipse quæstionis ostendit.

Proponatur

$$\text{A cubus} + \text{E cubo} \quad \text{æquari} \quad \text{Z solido};$$

item

$$\text{B in A} + \text{E quad.} + \text{D in E} \quad \text{æquari} \quad \text{N quad.}$$

Ut secunda radix devolvatur ad primam, hæc sunto præcepta :

Quæcumque a secunda radice adficientur homogenea in unam æquationis partem transeunto : ut, in superiori exemplo, quum

$$\text{A}c. + \text{E}c. \quad \text{æquetur} \quad \text{Z}s.,$$

ergo

$$\text{Z}s. - \text{A}c. \quad \text{æquabitur} \quad \text{E}c.$$

Similiter, quum

$$\text{B in A} + \text{E}q. + \text{D in E} \quad \text{æquetur} \quad \text{N}q.,$$

ergo

$$\text{N}q. - \text{B in A} \quad \text{æquabitur} \quad \text{E}q. + \text{D in E}.$$

In utraque igitur æquatione homogenea abs E (sive abs secunda radice) adfecta unam æquationis partem constituunt; si igitur duplicata

Obrázek 1: Ukázka první stránky z práce Pierra de Fermata

(**Zdroj:** *Euvres de Fermat, Book I.* Dostupné z:

http://science.larouchepac.com/fermat/Oeuvres_de_Fermat%201.pdf)

2.2 Johannes Hudde (1628 – 1704)

Tento holandský matematik, ale také politik se narodil v Amsterdamu 23. dubna 1628, kde v letech 1672 – 1703 byl také starostou. Mimo jiné byl guvernérem holandské Východoindické společnosti.

Při studiu práv na Univerzitě v Leidenu se Hudde začal věnovat matematice vlivem svého učitele Franse van Schootena. Byl členem jeho vznikající výzkumné školy v Leidenu, kde se společně s dalšími spolužáky van Heuraetem či Huygensem podíleli na rozvoji geometrie v 17. století. V tomto období van Schooten spolu se svými žáky vydávají známé dílo Reného Descartesa *La Geometrie* z roku 1649, které přeložili do latiny. V rámci tohoto díla přidávali postupně svoje vlastní práce a Hudde nebyl výjimkou. V jednom z několika vydání *La Geometrie* se objevují jeho myšlenky v souvislosti s teorií rovnic, se stanovením tečen nebo problém s nalezením maxim a minim.

Ve své práci týkající se maxim a minim tvrdí, že pokud rovnice má dvojnásobný kořen, můžeme jí vynásobit aritmetickou posloupností. Nalezená rovnice, která je dána součtem těchto částí musí mít kořeny stejné jako původní rovnice. Vezmeme libovolný mnohočlen.

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

a dále libovolnou aritmetickou posloupnost ve tvaru: *p, p+k, p+2k, p+3k, …*. Jejímiž členy postupně násobíme koeficienty polynomu *f (x),* dostaneme nový polynom.

$$f*(x) = pa_0x^0 + (p+k)a_1x^1 + (p+2k)a_2x^2 + \cdots (p+nk)a_nx^n$$
$$= pf(x) \ + \ kxf'(x)$$

Dále říká, že pokud je x_0 kořen $f\ (x) = 0$, tak je x_0 také kořenem rovnice $f^*(x) = 0$. Ve zvláštním případě, kdy $p = 0$, $k = 1$ je $f^*(x) = xf'(x)$, kde $f'(x)$ je derivace. Tento vztah používal k nalezení maxim a minim.

Johannes Hudde vedl diskuze s Isaacem Newtonem či Gottfriedem Wilhelmem Leibnizem. Oba dva ho pak zmiňovali ve svých pracích. Od roku 1663 se už matematikou tolik nezabývá, ale obohacuje svět o další příspěvky. Mezi ně můžeme zařadit stavbu dalekohledů, mikroskopů a nesmíme zapomenout na jeho studii rent v Holandsku. Jak už bylo řečeno, věnuje se i politice a střídá různé posty na městské radě v Amsterdamu. Johannes Hudde zemřel v roce 1704.

Pojďme přiblížit jeho práci v teorii eliminace. Jsou mu připisovány různé metody, jak postupovat při úpravě rovnic. Jednou z nich je porovnání nejvyšších mocnin neznámé podobně, jako jsme se s tím setkali u Newtona. Dále mu je připisovaná metoda postupné eliminace nejvyšší mocniny neznámé veličiny, která vedla na užití Eukleidova algoritmu pro výpočet největšího společného dělitele dvou polynomů. Jelikož se Hudde zabýval v oblasti matematiky geometrií, je možné, že jeho metoda eliminace byla inspirována pravidelnými mnohoúhelníky. Konkrétně se jedná o délku strany pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru jedna, kterou lze vyjádřit rovnicí ve čtvrtém a šestém stupni.

$$x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^6 - 6x^4 + 9x^2 - x - 2 = 0$$

Následnou sérií eliminací a vyloučení nejvyšší mocniny neznámé *x* lze získat rovnici menšího stupně a to přesněji druhého.

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Z té se zjistí kořeny rovnice, tj. délka strany pravidelného deseti-úhelníku.

Eliminace rovnic podle Johannese Huddeho slouží k nalezení největšího společného dělitele dvou, ale i více rovnic nebo kvantit. Na příkladech převzatých z jeho práce si ukážeme postup eliminace neznámých z rovnic, které využil k nalezení největšího společného dělitele.

<u>Příklad č. 2.8:</u> Nalezněte největšího společného dělitele ze soustavy dvou rovnic o čtyřech neznámých *a, b, c, d*.

$$1)\ d^3c - acd^2 + a^2bc - abcd = 0$$

$$2)\ d^4c - b^2cd^2 + a^2b^2c - a^2cd^2 = 0$$

Obě rovnice obsahují neznámou *c* v první mocnině, a proto obě dvě touto mocninou vydělíme.

$$1)\ d^3 - ad^2 + a^2b - abd = 0$$

$$2)\ d^4 - b^2d^2 + a^2b^2 - a^2d^2 = 0$$

Dále se snaží najít takovou neznámou, která je obsažená v obou rovnicích, tedy *a, b* nebo *d*. Volí neznámou d a upravuje rovnice tak, aby byly zapsány od největšího stupně vzhledem k *d*.

$$1)\ d^3 - ad^2 - abd + a^2b = 0$$

$$2)\ d^4 - b^2d^2 - a^2d^2 + a^2b^2 = 0$$

Z první rovnice vyjádříme *d* ve třetí mocnině a z druhé vyjádříme *d* ve čtvrté mocnině.

$$1)\ d^3 = ad^2 + abd - a^2b$$

$$2)\ d^4 = b^2d^2 + a^2d^2 - a^2b^2$$

První rovnici vynásobí neznámou d.

$$1)\ d^4 = ad^3 + abd^2 - a^2bd$$

$$2)\ d^4 = b^2d^2 + a^2d^2 - a^2b^2$$

Po vyjádření rovnic je můžeme navzájem srovnat.

$$3)\ ad^3 + abd^2 - a^2bd = b^2d^2 + a^2d^2 - a^2b^2$$

Za d^3 dosadíme výraz vyjádřený v první rovnici.

$$3)\ a(ad^2 + abd - a^2b) + abd^2 - a^2bd = b^2d^2 + a^2d^2 - a^2b^2$$

Upravíme.

$$3)\ a^2d^2 + a^2bd - a^3b + abd^2 - a^2bd = b^2d^2 + a^2d^2 - a^2b^2$$

Výsledná rovnice má následující tvar.

$$3)\ a^2b^2 - a^3b + abd^2 - b^2d^2 = 0$$

Vyjádříme si neznámou d ve druhé mocnině.

$$d^2 = \frac{a^3b - a^2b^2}{ab - b^2}$$

Nyní si šikovně za hodnotu d^2 zvolil dosazení a^2 ($d^2 = a^2$). Nikoli do vyjádřeného výrazu, ale do první rovnice.

$$1)\ d^3 - ad^2 + a^2b - abd = 0$$

$$1)\ a^2d - a^3 + a^2b - abd = 0$$

Pak dosazuje za d hodnotu a ($d = a$).

$$1)\ a^3 - a^3 + a^2b - a^2b = 0$$

$$1)\ 0 = 0$$

Vše se vyrušilo a v důsledku tohoto zjištění byli obě rovnice dělitelné výrazem $d – a$. Jako poznámku bychom uvedli, že výrazy $d^2 = a^2$ respektive $d = a$ nemusíme dosazovat jen do první rovnice, ale i do druhé či do rovnice třetí, kterou jsme upravovali. Vždy se nám vše vyruší. Výraz $d – a$ platí jen pro rovnice bez neznámé c. Proto největším společným dělitelem je ***c.(d – a)***.

To bylo ukázáno pro neznámou v písmenu d. Nyní vzal v potaz neznámou a. Postupoval obdobně, jako v předchozím případě, jen s tou výjimkou, že vyjádřil neznámou a ve druhé mocnině z obou rovnic.

$$1)\ d^3 - ad^2 + a^2b - abd = 0$$

$$2)\ d^4 - b^2d^2 + a^2b^2 - a^2d^2 = 0$$

$$1)\ a^2 = \frac{ad^2 + abd - d^3}{b}$$

$$2)\ a^2 = \frac{b^2d^2 - d^4}{b^2 - d^2}$$

Teď bychom obě rovnice porovnali.

$$3`)\ \frac{ad^2 + abd - d^3}{b} = \frac{b^2d^2 - d^4}{b^2 - d^2}$$

Upravíme.

$$3`)\ (ad^2 + abd - d^3)(b^2 - d^2) = (b^2d^2 - d^4)b$$

$$3`)\ ab^2d^2 + ab^3d - b^2d^3 - ad^4 - abd^3 + d^5 = b^3d^2 - d^4b$$

Znovu použil výraz $a^2 = d^2$. Dosadil ho do první vyjádřené rovnice. Může se však dosadit i do rovnice druhé nebo do nové třetí rovnice.

$$1)\ d^2 = \frac{ad^2 + abd - d^3}{b}$$

A znovu i tvar $a = d$.

$$1)\ d^2 = \frac{d^3 + bd^2 - d^3}{b}$$

Po úpravě rovnice nám všechny členy opět zmizí.

$$1)\ 0 = 0$$

Největším společným dělitelem je ***c.(d – a)***.

Nyní uvažuje rovnice k neznámé b. Z první rovnice vyjadřuje b a z druhé druhou mocninu písmena b.

$$1)\ d^3 - ad^2 + a^2b - abd = 0$$

$$2)\ d^4 - b^2d^2 + a^2b^2 - a^2d^2 = 0$$

$$1)\ b = \frac{d^3 - ad^2}{ad - a^2}$$

$$2)\ b^2 = \frac{d^4 + a^2d^2}{d^2 - a^2}$$

Hudde obě rovnice navzájem srovná, ale zjišťuje, že se výsledky nevyruší, protože není neznámá b mimo jiné ve stejné mocnině. Pokud bychom však první rovnici vynásobili neznámou b, dostaneme na levé straně neznámou ve druhé mocnině. Následné srovnání už můžeme udělat bez problémů.

$$3``)\ \frac{bd^3 - abd^2}{ad - a^2} = \frac{d^4 + a^2d^2}{d^2 - a^2}$$

Rovnici upravíme.

$$3``)\ (bd^3 - abd^2)(d^2 - a^2) = (d^4 + a^2d^2)(ad - a^2)$$

Roznásobíme a postupujeme, jako v předchozích případech, budeme dosazovat $a^2 = d^2$, posléze $a = d$. Dostaneme.

$$3``)\ a^5b - a^5b - a^5b + a^5b = a^6 - a^6 + a^6 - a^6$$

$$3``)\ 0 = 0$$

Výraz se vynuluje a tím dostaneme stejného největšího společného dělitele. Jak jsme uvedli, tak Johannes Hudde ve své práci tvrdí, že se členy nevyruší. Tímto způsobem by to bylo možné.

Závěrem už jenom vyvozuje důsledky pro vzájemné vztahy mezi všemi neznámými *a*, *b*, *c*, *d*.

Příklad č. 2.9: Nalezněte největšího společného dělitele ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

$$1)\ 12a^4 + 11a^2x^2 + x^4 - 4ax^3 - 20a^3x = 0$$

$$2)\ 12a^2x^2 - 3ax^3 + 24a^4 - 16a^3x + x^4 = 0$$

Nelze vydělit žádnou neznámou a tím zjednodušit obě rovnice. Jako neznámou bere *x*. Z první rovnice vyjádří x^4 a z druhé rovnice $(-x^4)$.

$$1)\ x^4 = 4ax^3 - 11a^2x^2 + 20a^3x - 12a^4$$

$$2)\ -x^4 = -3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4$$

Rovnice sečteme.

$$ax^3 + a^2x^2 + 4a^3x + 12a^4 = 0$$

Můžeme vydělit neznámou a. A zároveň si vyjádřit neznámou *x* ve třetí mocnině.

$$x^3 = -ax^2 - 4a^2x - 12a^3\ (\propto)$$

Tento výraz dosadil do první rovnice.

$$1)\ 12a^4 + 11a^2x^2 + x(-ax^2 - 4a^2x - 12a^3) - 4a(-ax^2 - 4a^2x - 12a^3) - 20a^3x = 0$$

A upravíme.

$$1)\ -4x^3 + 11a^2x^2 - 16a^3x + 60a^4 = 0$$

Rovnice obsahuje pořád x^3, a tak znovu za něj dosadíme vyjádřené x^3.

$$1)\ -a(-ax^2 - 4a^2x - 12a^3) + 11a^2x^2 - 16a^3x + 60a^4 = 0$$

Po úpravě dostaneme.

$$1)\ a^2x^2 - a^3x + 6a^4 = 0$$

Dále z této rovnice vyvodil výraz $x^2 = ax - 6a^2$, který dosadíme do rovnice $(\propto)$.

$$x.x^2 = -ax^2 - 4a^2x - 12a^3$$

$$x(ax - 6a^2) = -a(ax - 6a^2) - 4a^2x - 12a^3$$

Upravíme.

$$ax^2 = a^2x - 6a^3$$

Znovu se dosadí výraz za x^2.

$$1)\ a(ax - 6a^2) = a^2x - 6a^3$$

Znovu upravíme.

$$1)\ a^2x - 6a^3 = a^2x - 6a^3$$

$$1)\ 0 = 0$$

Rovnice se nám celá vyrušila a tím můžeme říci, že $x^2 - ax + 6a^2$ je největší společný dělitel obou polynomů odpovídajících daným rovnicím.

Eliminací soustavy dvou rovnic o dvou neznámých či více neznámých jsme si ukázali, jak nalézt největšího společného dělitele. Ve svém textu Johannes Hudde dále používá metodu eliminace při hledání polynomů, na něž lze daný polynom rozložit.

Příklad č. 2.10: Najděte polynom, který se objeví v rozkladu daného polynomu na součin.

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 7x - 3 = 0\ (ǂ)$$

Předpokládá, že jedním z činitelů v rozkladu polynomů na levé straně je polynom stupně druhého a to $x^2 + yx - 2 = 0$, v němž se může vyjádřit x^2. Pak tvar dosazuje postupně do zadané rovnice (ǂ) do té doby, dokud není neznámá x v první mocnině.

$$x(-yx + 2)^2 - 4(-yx + 2)^2 + 4x(-yx + 2) + \frac{3}{2}(-yx + 2) - 7x - 3 = 0$$

Po dosazení provedeme úpravu rovnice.

$$y^2x^3 - 4yx^2 + 4x - 4y^2x^2 + 16yx - 16 - 4yx^2 + 8x - \frac{3}{2}yx + 3 - 7x - 3 = 0$$

$$y^2x^3 - 4y^2x^2 - 8yx^2 + \frac{29}{2}yx + 5x - 16 = 0$$

Znovu dosadíme výraz $yx - 2$ za x^2.

$$y^2x(-yx + 2) - 4y^2(-yx + 2) - 8y(-yx + 2) + \frac{29}{2}yx + 5x - 16 = 0$$

A upravíme.

$$y^2(-yx^2 + 2x) + 4y^3x - 8y^2 + 8y^2x - 16y + \frac{29}{2}yx + 5x - 16 = 0$$

$$-y^3x^2 + 2y^2x + 4y^3x - 8y^2 + 8y^2x - 16y + \frac{29}{2}yx + 5x - 16 = 0$$

$$-y^3x^2 + 4y^3x + 10y^2x + \frac{29}{2}yx + 5x - 8y^2 - 16y - 16 = 0$$

Rovnice stále obsahuje x^2, a proto se znovu dosazuje pořád ten stejný výraz.

$$-y^3(-yx+2)+4y^3x+10y^2x+\frac{29}{2}yx+5x-8y^2-16y-16=0$$

Provedeme úpravy.

$$y^4x-2y^3+4y^3x+10y^2x+\frac{29}{2}yx+5x-8y^2-16y-16=0$$

Rovnice neobsahuje už neznámou x ve druhé mocnině. Dále provedl jednoduchou úpravu.

$$(y^4+4y^3+10y^2+\frac{29}{2}y+5)x-2y^3-8y^2-16y-16=0$$

Vytvoří si nové dvě rovnice. Koeficient u lineárního členu položí nule, stejně jako koeficient u absolutního členu.

$$3)\ y^4+4y^3+10y^2+\frac{29}{2}y+5=0$$

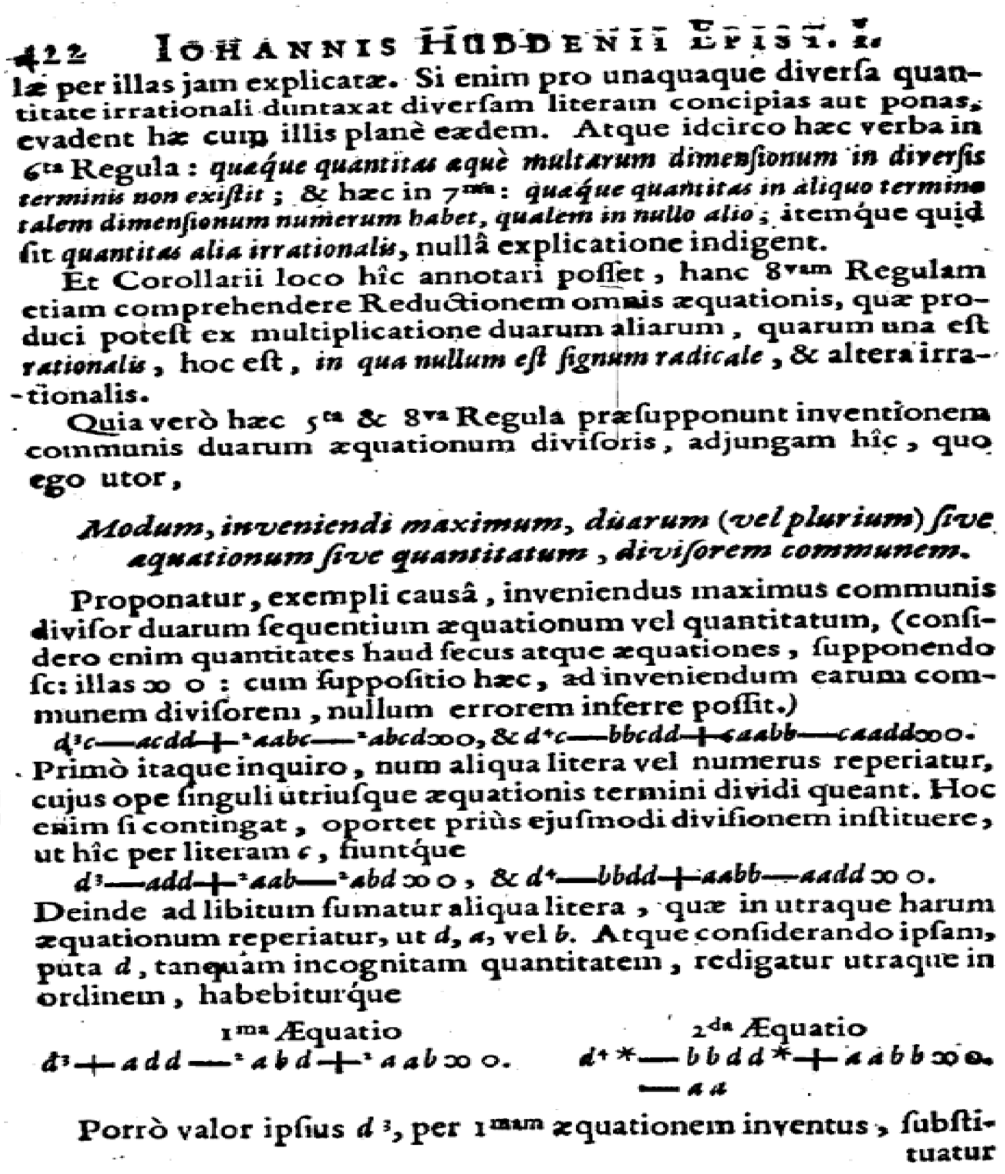
$$4)\ -2y^3-8y^2-16y-16=0$$

Druhou rovnici vydělí číslem (– 2).

$$3)\ y^4+4y^3+10y^2+\frac{29}{2}y+5=0$$

$$4)\ y^3+4y^2+8y+8=0$$

Pomocí stejné metody jako v příkladech č. 2.8 a č. 2.9 hledá největšího společného dělitele. Nachází $y+2=0$. Tímto dosazením se nám obě dvě rovnice vynulují a opravdu se jedná o největšího společného dělitele rovnic 3) a 4). My chceme ale najít polynom, který je daným polynomem dělitelný, respektive ten, který se objeví v rozkladu daného polynomu na součin polynomů. Dosazením $y=-2$ do výrazu $x^2+yx-2=0$ dostaneme $x^2-2x-2=0$, což je náš hledaný polynom.



422 IOHANNIS HUDDENII EPIST. 2.

læ per illas jam explicatæ. Si enim pro unaquaque diversa quantitate irrationali duntaxat diversam literam concipias aut ponas, evadent hæ cum illis planè eædem. Atque idcirco hæc verba in 6ta Regula: *quæque quantitas æquè multarum dimensionum in diversis terminis non existit*; & hæc in 7ma: *quæque quantitas in aliquo termino talem dimensionum numerum habet, qualem in nullo alio*; itemque quid sit *quantitas alia irrationalis*, nullâ explicatione indigent.

Et Corollarii loco hîc annotari posset, hanc 8vam Regulam etiam comprehendere Reductionem omnis æquationis, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una est *rationalis*, hoc est, *in qua nullum est signum radicale*, & altera irrationalis.

Quia verò hæc 5ta & 8va Regula præsupponunt inventionem communis duarum æquationum divisoris, adjungam hîc, quo ego utor,

Modum, inveniendi maximum, duarum (vel plurium) sive æquationum sive quantitatum, divisorem communem.

Proponatur, exempli causâ, inveniendus maximus communis divisor duarum sequentium æquationum vel quantitatum, (considero enim quantitates haud secus atque æquationes, supponendo sc: illas ꝏ 0: cum suppositio hæc, ad inveniendum earum communem divisorem, nullum errorem inferre possit.)

$d^3c - acdd + 2aabc - 2abcd \,ꝏ\, 0$, & $d^4c - bbcdd + caabb - caadd \,ꝏ\, 0$.

Primò itaque inquiro, num aliqua litera vel numerus reperiatur, cujus ope singuli utriusque æquationis termini dividi queant. Hoc enim si contingat, oportet priùs ejusmodi divisionem instituere, ut hîc per literam *c*, fiuntque

$d^3 - add + 2aab - 2abd \,ꝏ\, 0$, & $d^4 - bbdd + aabb - aadd \,ꝏ\, 0$.

Deinde ad libitum sumatur aliqua litera, quæ in utraque harum æquationum reperiatur, ut *d*, *a*, vel *b*. Atque considerando ipsam, puta *d*, tanquàm incognitam quantitatem, redigatur utraque in ordinem, habebiturque

1ma Æquatio	2da Æquatio
$d^3 + add - 2abd + 2aab \,ꝏ\, 0$.	$d^4 * - bbdd * + aabb \,ꝏ\, 0$.
	$- aa$

Porrò valor ipsius d^3, per 1mam æquationem inventus, substituatur

Obrázek 2: Ukázka z práce Johannese Huddeho

(**Zdroj:** JOHANNES, Hudde. De reductione aequationum. Dostupné z: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k57489c.r=De%20reductione%20aequationum)

2.3 Sir Isaac Newton (1643 - 1727)

Tento anglický fyzik, astronom a teolog se zabýval také matematikou a přispěl svými myšlenkami k jejímu rozvoji. Je považován za jednu z největších osobností své doby a asi není žádného člověka, který by ho neznal. Je známý pro své velké objevy hlavně v oblasti fyziky. Své myšlenky uplatnil v optice, kde objevil složení bílého světla. V mechanice jsou známy tři pohybové zákony a dále je autorem gravitačního zákona. K tomu se podle pověsti váže příběh o tom, jak na něj spadlo jablko ze stromu, pod kterým zrovna seděl. Jeho nejdůležitější počiny v matematice se vztahují k oblasti matematické analýzy, jednalo se mimo jiné o binomickou větu a zabývání se integrálním a diferenciálním počtem. V letech 1673 – 1683 přednášel algebru a teorii rovnic. V této době své myšlenky zřejmě přenesl i na papír a sepsal významnou práci v oblasti algebry. Nese název *Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber (Obecná aritmetika neboli kniha o aritmetické syntéze a analýze)*. Vydána je až o pár let později a to v roce 1707. V neposlední řadě bychom chtěli zmínit dílo *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* neboli *Matematické principy přírodní filozofie*, které je považováno za jedno z nejvýznamnějších děl v historii vědy.

Teď se už zaměříme na jeho tvorbu v oblasti teorie eliminace. Pro tento účel se musíme odkázat na práci *Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber (Obecná aritmetika neboli kniha o aritmetické syntéze a analýze)*, kde se v jedné části věnuje algebraickým rovnicím. Snaží se nacházet řešení všech lineárních a kvadratických dělitelů polynomů a samozřejmě, co nejvíce zjednodušovat rovnice a eliminovat neznámé. V jeho případě se jedná o redukci neboli eliminaci soustavy dvou rovnic o jedné neznámé, soustava obsahuje neznámé ve stupni dva, tři nebo čtyři. Ve skutečnosti je tato práce velice podobná práci Pierra de Fermata, ale místo eliminace konstantních členů, odstraňuje vyšší mocniny neznámé, díky čemuž dostane rovnici nižšího stupně. Zkoumal podmínku, kterou musí splňovat koeficienty polynomů, aby příslušná soustava rovnic měla řešení. Dnes toto vyjádření nazýváme rezultantem (eliminant)[3]. Ale v čem se lišil Fermat ve svých myšlenkách oproti Newtonovi? Bylo to ve způsobu provedení eliminace členů. Na rozdíl od eliminace konstantních členů odstraňoval nejvyšší mocniny neznámé. Výsledkem bylo snižování stupně rovnice. Touto metodou se zabýval Leonhard Euler v 18. století. Newton se svým vrstevníkem Gottfriedem Wilhelmem Leibnizem považoval za důležité vysvětlovat proces odstraňování rovnic

[3] Jedná se o polynom v jedné neznámé, ten položíme nule a vypočítáme hodnoty pro tuhle neznámou.

s vyššími stupni z důvodu práce s lineárními rovnicemi. Již bylo zmíněno slovíčko rezultant, z něhož vyvodil Isaac Newton jistou tabulku rezultantů pro dvě libovolné rovnice, kde jedna je nejvýše čtvrtého stupně a dále udává pravidlo, jak eliminovat neznámou x ze dvou rovnic, které jsou stupně dva až čtyři, jako neznámou volil x.

Pojďme se podívat na postup řešení soustav rovnic podle Isaaca Newtona v jeho díle. Práce obsahuje čtyři odstavce, v kterých popisuje eliminaci neznámých z rovnic.

První odstavec nese název: *„O úpravách dvou nebo většího počtu rovnic na jednu rovnici s cílem eliminovat neznámé veličiny.“* Tato část informuje o rovnicích, které budou obsahovat, co nejmenší počet neznámých veličin. Dále udává, že pokud je počet rovnic větší než dva, například tři a má několik neznámých, musí se rovnice navzájem porovnat, viz příklad č. 2.2. Tím dostane nové rovnice, kde je jedna z neznámých vyloučena.

Pro lepší pochopení ukážeme vše na příkladu třech lineárních rovnic o třech neznámých.

Příklad č. 2.2: Ze soustavy tří rovnic o třech neznámých x, y, z, eliminujte neznámé x, y.

$$1)\ 3x + y + 2z = 0$$

$$2)\ 2x + y - z - 1 = 0$$

$$3) - x - y + 2z + 6 = 0$$

Abychom dodrželi, co jsem uvedl teoreticky, musíme postupně porovnávat navzájem dvě rovnice. Ve všech třech rovnicích vyjádříme neznámou y.

$$1)\ y = -2z - 3x$$

$$2)\ y = z - 2x + 1$$

$$3)\ y = 2z - x + 6$$

Nyní můžeme spojit do jedné dvě libovolné rovnice. Konkrétně v tomto příkladu první s druhou a druhou s třetí rovnicí.

$$4)\ z - 2x + 1 = -2z - 3x$$

$$5)\ z - 2x + 1 = 2z - x + 6$$

Následně jen rovnice upravíme.

$$4)\ 3z + x + 1 = 0$$

$$5) - z - x - 5 = 0$$

Dostali jsme dvě rovnice o dvou neznámých a podařilo se nám eliminovat neznámou y. Dále budeme postupovat stejně. Vyjádřili bychom si z obou rovnic neznámou x a také je dali spolu do rovnosti. Zůstane nám jedna rovnice o jedné neznámé z, z níž je zřejmé, že rovnice neobsahující x a y, lze určit z = **2**. Dosazením za z v rovnici neobsahující y

dostaneme $x = -\mathbf{7}$ a konečně dosazením za x a z v některé z daných rovnic získáme $y = \mathbf{17}$. Jakmile tedy umíme ze soustavy rovnic vyloučit některé neznámé, umíme zpravidla určit řešení dané soustavy.

V Newtonově práci je postup přiblížen na příkladu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Tvrdí, že z každé rovnice můžeme vyloučit jednu neznámou. Když bude počet rovnic stejný jako počet neznámých veličin, může na konci zbýt jen jedna rovnice o jedné neznámé veličině, ale také nemusí. Máme dvě rovnice o dvou neznámých x, y.

$$x + 3y = 2\ (⌘)$$

$$3x + 9y = 6\ (⌘)$$

Po jednoduché úpravě je zřejmé, že dostaneme v rovnici rovnost o nula neznámých.

$$0x + 0y = 0$$

Tvrdí, že když se vyskytne o jednu neznámou více než je počet rovnic, ve výsledku můžeme, ale také nemusíme dostat jednu rovnici o dvou neznámých, platí podobně jako v předchozím tvrzení.

$$2x + 5y - z = 3\ (⌗)$$

$$3x - 10y + 2z = 1\ (⌗)$$

Po upravení rovnic a jejich sečtení, dostaneme jednu rovnici o jedné neznámé x.

$$7x = 7$$

Následně bychom spočítali řešení této soustavy. Závěrem této první části tedy zmiňuje, že může nastat situace, kdy pomocí dvou rovnic lze vyloučit najednou více než jednu neznámou veličinu, jak jsme si ukázali v příkladech ((⌘), (⌗)). Podle názoru Newtona takové případy pak naznačují, že otázka v daném problému je špatně sestavena nebo postup výpočtu je chybný či nešikovný.

V dalších třech odstavcích se zabývá dílčím problémem eliminace jedné neznámé veličiny ze dvou nelineárních rovnic. Druhý odstavec se jmenuje: *„Eliminace neznámé veličiny srovnáním jejích hodnot.“* V této kapitole představuje soubor pravidel platící pro eliminovanou veličinu, které jsou stupně větší než jedna v obou rovnicích. Tyto následující pravidla popisují, jak správně postupovat při úpravě rovnic. Eliminace pomocí srovnání jejich hodnot jsme již ukázali v příkladu č. 2.2. Newton postupy ukazuje na příkladech nelineárních rovnic o dvou a třech neznámých. Na konci prvního odstavce upozorňuje na fakt, že k dosažení stejného výsledku, můžeme vyjádřené hodnoty neznámých veličin od sebe odečíst a zbytek položit nule.

Předposlední odstavec má název: *„Eliminace neznámé veličiny dosazením jejích hodnot.“* Zde se jen krátce zmiňuje o postup, který můžeme použít, když stupeň eliminované neznámé je v jedné rovnici roven jedné. Potom z takové rovnice doporučuje Newton hodnotu eliminované neznámé vyjádřit a následně ji dosadit do rovnice druhé.

Příklad č. 2.3: Ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých *x, y* eliminujte neznámou *x*.

$$1)\ 2y^2x + 3y - 2x + 3 = 0$$

$$2)\ x^2 + 3xy - y^2 + 2 = 0$$

První rovnice je pouze lineární v neznámé *x*, proto lze vyjádřit *x* z první rovnice a dosadit do rovnice druhé.

$$\left(\frac{-3y-3}{2y^2-2}\right)^2 + 3\left(\frac{-3y-3}{2y^2-2}\right)y - y^2 + 2 = 0$$

Tím jsme vyloučili neznámou *x* ze soustavy a následně bychom obě dvě neznámé dopočítali.

V posledním odstavci, který nese pojmenování: *„Eliminace neznámé veličiny, která vystupuje v každé rovnici v několika stupních,“* se zabývá nejobecnějšími případy, které mohou nastat. Newton tvrdí, že by se měla v soustavě rovnic najít nejvyšší mocnina u neznámé eliminované veličiny a tu následně vyjádřit. Dále se výrazy porovnají a tím dostáváme novou rovnici, kde stupeň eliminované neznámé je menší. Když tento postup budeme opakovat, tak se nakonec neznámá z rovnic vyloučí. Co když rovnice nemají stejnou mocninu u neznámé, kterou chceme eliminovat? Pak se musí rovnice s nižším stupněm vynásobit vhodnou mocninou eliminované neznámé a dostaneme rovnice ve tvaru, kde máme stejnou nejvyšší mocninu eliminované veličiny. Dále již postupujeme stejně, jak bylo uvedeno. Vedle této metody navrhuje jednu mnohem kratší, ale jen v případě, pokud se jedná o rovnice, kde je eliminovaná neznámá zastoupena ve druhé mocnině. Následně najde kořeny rovnic v závislosti na zbývajících veličinách a tyto vzájemně porovná. Ukažme si tyto postupy na dvou příkladech.

Příklad č. 2.4: Ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých *x, y* eliminujte neznámou *x*.

$$1)\ x^2 + 2y^2 = 3x + 4$$

$$2)\ 2x^2 + 2 - 3xy = 0$$

Pokud budeme postupovat podle Newtona, tak z obou rovnic vyjádříme eliminovanou neznámou veličinu v nejvyšší mocnině. Pro nás neznámou bude *x*.

$$1)\ x^2 = -2y^2 + 3x + 4$$

$$2)\ x^2 = \frac{-2 + 3xy}{2}$$

Nyní provádíme eliminaci porovnáním, kde obě dvě rovnice obsahují na levé straně neznámou *x* ve stejné mocnině.

$$-2y^2 + 3x + 4 = \frac{-2 + 3xy}{2}$$

Snížila se mocnina u eliminované neznámé *x*.

$$-4y^2 + 6x + 8 = -2 + 3xy$$

$$6x - 3xy = 4y^2 - 10$$

$$x(6 - 3y) = 4y^2 - 10$$

$$x = \frac{4y^2 - 10}{6 - 3y}$$

V dalším kroku provádíme eliminaci dosazením, protože máme vyjádřenou neznámou *x*. Dosadíme do jedné ze zadaných rovnic, konkrétně my do rovnice první.

$$\left(\frac{4y^2 - 10}{6 - 3y}\right)^2 + 2y^2 = 3.\left(\frac{4y^2 - 10}{6 - 3y}\right) + 4$$

Po následných úpravách rovnice dostaneme konečný tvar.

$$34y^4 - 36y^3 - 116y^2 + 54y + 136 = 0$$

Pokud bychom chtěli pokračovat v řešení soustavy, tak bychom nyní spočítali hodnoty pro neznámou y a následně je dosadili do rovnice s vyjádřeným *x*. Celkem rovnice má čtyři řešení, kde dvě z toho odpovídají reálným kořenům.

Příklad č. 2.5: Eliminujte neznámou *x* ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

$$1)\ x^2 = 3x - 2y$$

$$2)\ x - 5y = y^2$$

Znovu je neznámou pro nás *x*, kterou eliminujeme. Nyní ji nemáme ve stejné mocnině, a proto ji musíme upravit podle postupu, který byl zmíněný. Druhou rovnici vynásobíme neznámou *x*, abychom dostali *x* v obou rovnicích ve stejné mocnině.

$$1)\ x^2 = 3x - 2y$$

$$2)\ x^2 - 5xy = y^2x$$

Nyní bychom postupovali stejně, jako v předchozím příkladu. Soustava dvou rovnic o dvou neznámých má čtyři reálná řešení.

Tento způsob, jak Newton uvádí je značně únavný, pokud nejsou rovnice ve stejných stupních. Pro ulehčení některých příkladů předložil čtyři pravidla pro eliminaci neznámé *x*, které se skládají ze soustavy dvou rovnic, v níž eliminujeme *x* z této soustavy, což povede na rovnici ve tvaru, která s nimi souvisí.

První pravidlo:

$$1)\ ax^2 + bx + c = 0$$
$$2)\ fx^2 + gx + h = 0$$
$$(ah - bg - 2cf)ah + (bh - cg)bf + (ag^2 + cf^2)c = 0 \text{ (⊰)}$$

Druhé pravidlo:

$$1)\ ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$2)\ fx^2 + gx + h = 0$$
$$\begin{aligned}(ah - bg - 2cf)ah^2 + (bh - cg - 2df)bfh + (ch - dg)(ag^2 + cf^2)\\ + (3agh + bg^2 + df^2)df = 0 \text{ (◊)}\end{aligned}$$

Třetí pravidlo:

$$1)\ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$
$$2)\ fx^2 + gx + h = 0$$
$$\begin{aligned}&(ah - bg - 2cf)ah^3 + (bh - cg - 2df)bfh^2\\ &\quad + (ch^2 - dgh + eg^2 - 2efh)(ag^2 + cf^2) + (3agh + bg^2 + df^2)dfh\\ &\quad + (2ah^2 + 3bgh - dfg + ef^2)ef^2 + (-bg - 2ah)efg^2 = 0\end{aligned}$$

Čtvrté pravidlo:

$$1)\ ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$2)\ fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$$
$$\begin{aligned}&(ah - bg - 2cf)(adh^2 - achk) + (ak + bh - cg - 2df)bdfh\\ &\quad + (-ak + bh + 2cg + 3df)a^2k^2\\ &\quad + (cdh - d^2g - c^2k + 2bdk)(ag^2 + cf^2)\\ &\quad + (3agh + bg^2 + df^2 - 3afk)d^2f + (-3ak - bh + cg + df)bcfk\\ &\quad + (bk - 2dg)b^2fk + (-b^2k - 3adh - cdf)agk = 0\end{aligned}$$

Tato pravidla usnadňují práci, pokud je soustava dvou rovnic v takovém tvaru. Ukažme si tato pravidla na příkladech.

Příklad č. 2.6: Ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých eliminujte neznámou *x*.

$$1)\ x^2 - 3x - 4 + 2y^2 = 0$$
$$2)\ 2x^2 - 3xy + 2 = 0$$

Soustava je ekvivalentní se soustavou v příkladu č. 2.4, abychom porovnali správnost výsledku. Podle tvaru poznáme, že použijeme první pravidlo. Nejdříve si vypíšeme koeficienty *a, b, c, f, g, h*, abychom věděli, co dosadit.

$$a = 1, b = -3, c = -4 + 2y^2, f = 2, g = -3y, h = 2$$

Dosadíme koeficienty do rovnice.

$$[1.2 - (-3.(-3y)) - 2.(-4 + 2y^2).2].1.2 + [-3.2 - ((-4 + 2y^2).(-3y))].(-3).2 + [1.(-3y)^2 + (-4 + 2y^2).2^2].(-4 + 2y^2) = 0$$

Rovnici upravíme a dostaneme výsledný tvar.

$$(2 - 9y + 16 - 8y^2).2 + (-6 - 12y + 6y^3).(-6) + (9y^2 - 16 + 8y^2)(-4 + 2y^2) = 0$$

$$34y^4 - 36y^3 - 116y^2 + 54y + 136 = 0$$

Získali jsme totožnou rovnici jako v příkladu č. 2.4.

<u>Příklad č. 2.7:</u> Ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých eliminujte neznámou *x*.

$$1)\ x^3 - 3x^2 + 2y = 0$$

$$2)\ x^2 - y^2x - 5y = 0$$

Použijeme druhé pravidlo a jako v předchozím příkladu si nejdříve vypíšeme jednotlivé koeficienty *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*.

$$a = 1, b = -3, c = 0, d = 2y, f = 1, g = -y^2, h = -5y$$

Dosadíme koeficienty do rovnice (0).

$$[1.(-5y) - (-3.(-y^2)) - 2.0.1].1.(-5y)^2 + [-3.(-5y) - 0.(-y^2) - 2.2y.1].(-3).1.(-5y) + [0.(-5y) - 2y.(-y^2)].[1.(-y^2)^2 + 0.1^2] + [3.1.(-y^2).(-5y) + (-3).(-y^2)^2 + 2y.1^2].2y.1 = 0$$

$$(-5y - 3y^2).25y^2 + (15y - 4y).15y + 2y^3.y^4 + (15y^3 - 3y^4 + 2y).2y = 0$$

$$-125y^3 - 75y^4 + 225y^2 - 60y^2 + 2y^7 + 30y^4 - 6y^5 + 4y^2 = 0$$

$$2y^7 - 6y^5 - 45y^4 - 125y^3 + 169y^2 = 0$$

Dostáváme výslednou rovnici, která je v sedmém stupni v neznámé *y*. V tomto případě by se hodila spíše eliminace neznámé y z dané soustavy, neboť první rovnice soustavy je v *y* pouze lineární a druhá rovnice je kvadratická, takže by postačila eliminace dosazením a tím by mohla být eliminace mnohem jednodušší.

Můžeme tedy říci, že Newtonova pravidla zrychlují práci při výpočtech. Jedná se pouze o univerzální výrazy, které můžeme použít jen v okamžiku, kdy máme zadanou soustavu dvou rovnic druhého stupně v eliminované neznámé (první pravidlo), dvou rovnic druhého stupně v eliminované neznámé (druhé pravidlo), dvou rovnic, z nichž jedna je třetího a druhá druhého stupně v eliminované neznámé (třetí pravidlo) nebo soustavu dvou rovnic, přičemž jedna je čtvrtého a druhá druhého stupně v eliminované neznámé (čtvrté pravidlo). Jsou-li rovnice v soustavě třetího stupně v eliminované neznámé, postupujeme podobně jako v příkladech č. 2.4 a č. 2.5. V průběhu výpočtu se obvykle dospěje k některé ze soustav, pro kterou už má Newton pravidlo.

Závěrem poznamenává, že tyto postupy jsou navrhované pro eliminaci jedné neznámé ze dvou rovnic a přidává, že pokud máme několik neznámých v několika rovnicích, musíme úpravy provést postupně.

2.4 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

Významný německý filozof, teolog, matematik, ale také politický poradce 17. století se narodil v roce 1646 v Německu. Byl vrstevníkem Isaaca Newtona, se kterým vedl souboje v oblasti diferenciálního a integrálního počtu.

V roce 1661 nastoupil na univerzitu v Lipsku jako student práv, kterou úspěšně dokončil po pěti letech. Chtěl pokračovat dál a dosáhnout doktorského titulu, ale bylo mu to zamítnuto z důvodu jeho nízkého věku. Získal jej až na univerzitě v Altdorfu. Při svém studiu byl ovlivňován filozofy, jako byli Aristoteles či Francis Bacon. Po studiu se nějakou dobu věnoval právu, politice, ale také zveřejňoval své filozofické myšlenky. Na přelomu let 1675/1676 položil základy diferenciálního počtu a integrálního kalkulu a zabýval se také mechanikou či dynamikou.

Leibniz v oblasti matematiky své poznámky moc nepublikoval, ty se začaly objevovat veřejně až v pozdějších letech. Mezi nimi se objevily takové myšlenky, které můžeme spojovat se základy teorie determinantů. Jeho práce, kterými se věnoval v matematice, můžeme rozdělit do tří okruhů.

1) Teorie nehomogenních lineárních rovnic

2) Rezultant dvou polynomů jedné neurčité

3) Eliminace jedné společné neznámé z algebraických rovnic o dvou a více proměnných.

V rukopisu *De Tollendis incognitis* neboli *O odstranění neznámé* se jedna z metod zabývá právě eliminací jedné společné neznámé. Tato část se datuje k období mezi lety 1679 – 1681. Leibniz zapsal soustavu dvou rovnic o jedné neznámé *x* takto.[4]

$$1)\ a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots = 0$$

$$2)\ l + mx + nx^2 + px^3 + qx^4 + \cdots = 0$$

Samozřejmě se snaží o eliminace jediné neznámé *x*. Danou soustavu rovnic nevyřešil, jen pro uvedený problém uvedl metodu, jak postupovat. Obě rovnice postupně násobí mocninami x, x^2, x^3 a dostává soustavu.

$$\begin{aligned}
(\dot{\Delta})\ 0 &= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \\
(\dot{\Delta})\ 0 &= \quad +ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 \\
(\dot{\Delta})\ 0 &= \qquad +ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + ex^6 \\
(\dot{\Delta})\ 0 &= \qquad\quad +ax^3 + bx^4 + cx^5 + dx^6 + ex^7
\end{aligned}$$

[4] Další postup odpovídá eliminaci neznámé *x* ze soustavy dvou rovnic čtvrtého stupně.

$$
\begin{aligned}
(\dot{\Delta})\ 0 &= l + mx + nx^2 + px^3 + qx^4 \\
(\dot{\Delta})\ 0 &= \qquad +lx + mx^2 + nx^3 + px^4 + qx^5 \\
(\dot{\Delta})\ 0 &= \qquad\qquad +lx^2 + mx^3 + nx^4 + px^5 + qx^6 \\
(\dot{\Delta})\ 0 &= \qquad\qquad\qquad +lx^3 + mx^4 + nx^5 + px^6 + qx^7
\end{aligned}
$$

Pro lepší přehlednost uvádí rovnice ve tvaru, kde stejné mocniny neznámé *x* jsou napsány pod sebou. K rovnicím dále nepodává žádná další vysvětlení, jak je řešit. Tuto metodu neustálého násobení mocninami neznámé *x* uveřejnil až v roce 1840 James Joseph Sylvester. Jedná se o tzv. dialytickou metodu, kterou v tom samém roce publikoval pod názvem *A method of Determining by Mere Inspection the Derivations from Two Equations of any Degree,* v časopise Philosophical. Ale ani on neuvedl pravidlo eliminace včetně zdůvodnění tohoto postupu. To provedl až Friedrich Julia Richelot v roce 1845. Sylvester podával jen návod, podle kterého se dalo počítat. Popisoval, jak správně koeficienty uspořádat do odpovídajícího determinantu. Toto označení použil až o rok později ve své práci *It Examples of the dialytic method of elimination as applied to ternary systems of equations*, kde navázal na svojí práci z roku 1840. Zde vyřešil soustavu tří rovnic o více neznámých.

Vrátíme-li se k soustavě dvou rovnic, které jsou obě dvě čtvrtého stupně, z nichž chceme *x* eliminovat, musíme v soustavě $(\dot{\Delta})$ považovat mocniny neznámé *x* za nové neznámé. Tuto myšlenku měl už Leibniz v roce 1678. Determinant takto vzniklé soustavy lineárních rovnic můžeme zapsat ve tvaru.

$$
\begin{vmatrix}
a & b & c & d & e & . & . & . \\
. & a & b & c & d & e & . & . \\
. & . & a & b & c & d & e & . \\
. & . & . & a & b & c & d & e \\
l & m & n & p & q & . & . & . \\
. & l & m & n & p & q & . & . \\
. & . & l & m & n & p & q & . \\
. & . & . & l & m & n & p & q
\end{vmatrix}
$$

Je to tzv. Sylvesterův determinant, a tedy rezultant polynomů. Pokud je roven nule, mají rovnice 1), 2) společné řešení.

Další metodu, kterou ve svých poznámkách Gottfried Wilhelm Leibniz použil, připomíná Bézoutův postup z roku 1764. Jedná se o myšlenku násobení pomocným polynomem. Leibniz uvádí obecný příklad, kde v levé části jsou Leibnizovy zápisy, v pravé části je dnešní zápis. Leibniz používal dvojitý index a uvažoval ho jako proměnnou. Tam, kde dnes napíšeme a_{43}, by Leibniz napsal jen 43.

Příklad č. 2.11: Upravte následující soustavu dvou kvadratických rovnic na lineární rovnice.

$$1)\ 10 + 11x + 12x^2 = 0 \quad \Big| \quad 1)\ a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 = 0$$

$$2)\ 20 + 21x + 22x^2 = 0 \quad \Big| \quad 2)\ a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 = 0$$

Kvadratické rovnice následně vynásobil dvěma polynomy ve tvarech 30 + 31*x* a 40 + 41*x* a sečetl je. Podmínka pro to, aby se v rovnici takto získané vyloučily členy obsahující x, vede k následující homogenní soustavě čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých 30 *(a_{30})*, 31 *(a_{31})*, 40 *(a_{40})*, 41 *(a_{41})*.

$$1)\ 10.30 + 20.40 + 0 = 0 \quad \Big| \quad 1)\ a_{10}.a_{30} + a_{20}.a_{40} + 0 = 0$$

$$2)\ 11.30 + 21.40 + (10.31 + 20.41) = 0 \quad \Big| \quad 2)\ a_{11}.a_{30} + a_{21}.a_{40} + (a_{10}.a_{31} + a_{20}.a_{41}) = 0$$

$$3)\ 12.30 + 22.40 + (11.31 + 21.41) = 0 \quad \Big| \quad 3)\ a_{12}.a_{30} + a_{22}.a_{40} + (a_{11}.a_{31} + a_{21}.a_{41}) = 0$$

$$4)\ 0 + 0 + 12.31 + 22.41 = 0 \quad \Big| \quad 4)\ 0 + 0 + a_{12}.a_{31} + a_{22}.a_{41} = 0$$

Aby měla soustava lineárních rovnic netriviální řešení, musí být determinant matice této soustavy roven nule.

$$\begin{vmatrix} a_{10} & 0 & a_{20} & 0 \\ a_{11} & a_{10} & a_{21} & a_{20} \\ a_{12} & a_{11} & a_{22} & a_{21} \\ 0 & a_{12} & 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Leibniz nikdy nenapsal, proč volí pomocný polynom. Věděl, že musí rovnici *i*-tého a druhou *f*-tého stupně násobit pomocnými polynomy *f – 1*-ního stupně a druhou polynomem *i – 1*-ního stupně tak, aby získal dostatečný počet rovnic pro pomocné veličiny (koeficienty pomocných polynomů. Dále ve stejné práci uvedl také pravidlo, jakého stupně má být pomocný polynom.

Leibnizovy metody jsou důležité a velice užitečné, neboť problém eliminace neznámé ze soustavy dvou rovnic vyššího stupně v eliminované neznámé převádí na výpočet determinantu matice soustavy lineárních rovnic. Problémy tohoto typu mohl řešit již od zmíněného roku 1678.

Na následující soustavě dvou rovnic třetího stupně ukážeme další Leibnizův postup eliminace, který odpovídá jedné z Eulerových metod.

Příklad č. 2.12: Eliminujte neznámou *x* ze soustavy dvou kubických rovnic.

$$1)\ 10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = 0 \quad \Big| \quad a_{10}x^3 + a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13} = 0$$

$$2)\ 20x^3 + 21x^2 + 22x + 23 = 0 \quad \Big| \quad a_{20}x^3 + a_{21}x^2 + a_{22}x + a_{23} = 0$$

Nejdříve eliminuje neznámou *x* ve třetí mocnině tím, že první rovnici vynásobí 10 *(a_{10})* a druhou vynásobí (– 20) *(– a_{20})* a sečte je navzájem.

$$3)\ -11.20x^2 - 12.20x - 13.20 + 10.21x^2 + 10.22x + 10.23 = 0 \quad \Big| \quad -a_{11}.a_{20}x^2 - a_{12}.a_{20}x - a_{13}.a_{20} + a_{10}.a_{21}x^2 + a_{10}.a_{22}x + a_{10}.a_{23} = 0$$

Jedná se o součet dvou kvadratických rovnici, které můžeme rozdělit.

$$-11.20x^2 - 12.20x - 13.20 = 0 \quad \Big| \quad -a_{11}.a_{20}x^2 - a_{12}.a_{20}x - a_{13}.a_{20} = 0$$

$$10.21x^2 + 10.22x + 10.23 = 0 \quad \Big| \quad a_{10}.a_{21}x^2 + a_{10}.a_{22}x + a_{10}.a_{23} = 0$$

Koeficienty kvadratické rovnice přeznačil, takže místo 10.21 – 11.20 píše ((10 (a_{50})), 10.22 – 12.20 označil (11 (a_{51})) a 10.23 – 13.20 určil jako (12 (a_{52})).

$$4)\ (10)x^2 + (11)x + (12) = 0 \quad \Big| \quad a_{50}x^2 + a_{51}x + a_{52} = 0$$

Druhou kvadratickou rovnici získá tím, že absolutním členem v první rovnici vynásobí rovnici druhou a poté i absolutním členem ve druhé rovnici násobí první rovnici a odečte je. Absolutní členy se vyruší a výsledná rovnice je násobkem *x*. Krácením se získá druhá rovnice druhého stupně.

$$5)\ 10.23x^2 + 11.23x + 12.23 - 20.13x^2 - 21.13x - 22.13 = 0 \quad \Big| \quad a_{10}.a_{23}x^2 + a_{11}.a_{23}x + a_{12}.a_{23} - a_{20}.a_{13}x^2 - a_{21}.a_{13}x - a_{22}.a_{13} = 0$$

Opět se jedná o součet dvou kvadratických rovnic, které můžeme napsat jako dvě rovnice.

$$10.23x^2 + 11.23x + 12.23 = 0 \quad \Big| \quad a_{10}.a_{23}x^2 + a_{11}.a_{23}x + a_{12}.a_{23}$$

$$-20.13x^2 - 21.13x - 22.13 = 0 \quad \Big| \quad -a_{20}.a_{13}x^2 - a_{21}.a_{13}x - a_{22}.a_{13} = 0$$

Jako v předchozím postupu si přeznačil jednotlivé koeficienty. Místo 10.23 – 20.13 píše (20 (a_{60})), dále 11.23 – 21.13 značí jako (21 (a_{61})) a 12.23 – 22.13 zapisuje jako (22 (a_{62})).

$$4)\ (20)x^2 + (21)x + (22) = 0 \quad \Big| \quad a_{60}x^2 + a_{61}x + a_{62} = 0$$

Postup vyloučení členu nejvyššího stupně a absolutního členu by znovu opakoval pro dvě rovnice ve dvou neznámých, dokud nedostane lineární rovnici a následně i rovnici neobsahující neznámou *x*.

Leibnizova další metoda eliminace sahá do období mezi lety 1693/1694, kde v jeho rukopisech můžeme najít tzv. teorii explikací (teorie odvíjení). Uvažuje daleko obecnější případ polynomů různých stupňů, z nichž druhý má vyšší stupeň.

$$1)\ 10x^m + 11x^{m-1} + \cdots = 0 \quad \Big| \quad a_{10}x^m + a_{11}x^{m-1} + \cdots = 0$$

$$2)\ 20x^{m+n} + 21x^{m+n-1} + \cdots = 0 \quad \Big| \quad a_{20}x^{m+n} + a_{21}x^{m+n-1} + \cdots = 0$$

Vhodnou kombinací rovnic snižuje stupeň druhé rovnice. Tím se úloha zjednoduší a převede na předcházející příklad.

Leibniz ve svých poznámkách a studiích uvádí různá schémata, jak počítat koeficienty rovnic a z nich pramení různé jeho závěry. V letech 1692 – 1693 dospěl pro nás k závažným a velice důležitým výsledkům.

Věta 1: *Nechť jsou f a g dva polynomy stupně a a b. Rezultant je homogenní stupně b v koeficientech prvního polynomu a homogenní stupně a v koeficientech druhého polynomu.*

Věta 2: *Nechť jsou f a g dva polynomy stupně a a b. Každý člen rezultantu má stupeň a + b, součet indexů každého z členů je a.b.*

Tyto dvě věty nalezl Euler přibližně o 60 let později.

3. Eliminační metody objevené v Evropě v 18. století

Opustíme eliminační metody objevené v 17. století a pojďme se podívat na metody, které vznikaly matematiky v 18. století. Ti navazovali na svoje předchůdce a snažili se jejich postupy vylepšit, posunout dál či vymyslet svoje vlastní. V tomto století bychom se rádi zmínili o dvou pánech, kteří výrazně promluvili do teorie eliminace. Jedním byl Francouz Étienne Bézout a tím druhý Švýcar Leonhard Euler.

3.1 Leonhard Euler (1707 – 1783)

Švýcarský matematik a fyzik, který se narodil v roce 1707 v Basileji. Zajímal se o geometrii, mechaniku či teorii čísel, řešil problémy týkající se astronomie a vysvětloval, jak správně aplikovat matematiku na obory ve veřejných záležitostech.

Eulerovo znalosti a příspěvky v matematice byly už od jeho začátků obrovské a vysloužily si uznání i Johanna Bernoulliho, který ho vyučoval na univerzitě v Basileji. Zde také ukončil studium v roce 1726, aby se o rok později přestěhoval do Petrohradu a nastoupil pracovně na tamní Akademii věd. Jménem akademie publikoval velké množství knih, které se týkaly například integrálního kalkulu, logaritmických a trigonometrických funkcí. V roce 1735 mu začaly zdravotní problémy, v důsledku těžké horečky a únavy očí, začal hůře vidět na jedno oko. Eulerova prestiž se ještě více zvýšila po obdržení Velké ceny Pařížské akademie, kterou obdržel v letech 1738 a 1740. V roce 1741 se stal členem Akademie v Berlíně. O sedm let později vydal publikaci s názvem *Introductio in analysin infinitorum (Úvod do analýzy nekonečného)*. Jedná se o jedno z nejznámějších děl Leonharda Eulera. Zabýval se v ní přesného definování funkcí jako součástí matematické analýzy, logaritmy v kladných hodnotách a také eliminací soustavy rovnic. Mezi další jeho publikace patří *Institutiones calculi differentialis* a *Institutiones calculi integralis* z roku 1755, respektive z let 1768 – 1770, v kterých popisoval počítání diferenciálu, určitého integrálu a vyvozoval některé vzorce. Řešil jimi různé geometrické problémy a teorii lineárních diferenciálních rovnic, které se nejvíce uplatňují ve fyzice. Jeho problémy se zrakem se stále zhoršovaly, až úplně oslepne, přesto s pomocí pokračuje dále ve své práci. Mimo jiné se zabýval teorií čísel a vrcholem jeho snažení byl v roce 1783 zákon o kvadratické reciprocitě, který je považován za jeho největší objev. Leonhard Euler je pokládán za jednoho z nejlepších matematiků té doby. Umírá v roce 1783 v Petrohradu.

Euler za svůj život, jak už bylo řečeno, se zabýval různými pracemi v oboru matematiky. Věnoval se i teorii eliminace, ke které přispěl svými dvěma metodami. Jedna pojednává o vyloučení nejvyšší a nejnižší mocniny y, jako tomu bylo u Lebnize. V rámci této metody Euler hledal společné body dvou křivek, které popisoval pomocí rovnic. Ta druhá odpovídá eliminaci podle Bézouta.

Nejdříve představíme první metodu, kterou publikoval v roce 1748 v již zmíněné práci *Introductio in analysin infinitorum*. Jsou dány dvě algebraické křivky, které jsou popsány následujícími dvěma rovnice.

<u>Příklad č. 3.1:</u> Eliminujte neznámou *y* ze soustavy dvou rovnic.

$$1)\ P + Qy + Ry^2 = 0 \quad \Big| \quad 1)\ F(x,y) = f_0 + f_1 y + f_2 y^2$$

$$2)\ p + qy + ry^2 = 0 \quad \Big| \quad 2)\ G(x,y) = g_0 + g_1 y + g_2 y^2$$

Vlevo je popis Eulera a pro lepší přehlednost vpravo naše značení.[5]

Snaží se o hledání průniku křivek daný rovnicemi. Můžeme postupovat tak, že eliminujeme z rovnic neurčitou *y*, čímž se dostane výsledná rovnice pouze v *x*. Tu budeme značit jako *E(x)*. Pokud (x_0, y_0) je průsečíkem dvou křivek, pak x_0 je nulovým bodem rovnice $E(x) = 0$. Vhodnou kombinací $F.g_0 - G.f_0$, $F.g_2 - G.f_2$ a s využitím $y \neq 0$ lze získat rovnice, které jsou v *y* pouze lineární.

$$(Qp - Pq) + (Rp - \mathrm{Pr})y = 0 \quad \Big| \quad (f_1 g_0 - g_1 f_0) + (f_2 g_0 - g_2 f_0)y = 0 \ \ (*)$$

$$(Pr - Rp) + (Qr - Rq)y = 0 \quad \Big| \quad (f_0 g_2 - g_0 f_2) + (f_1 g_2 - g_1 f_2)y = 0 \ \ (*)$$

Následným porovnáním výrazů odpovídajícím neznámé *y* se z rovnic (*) dostane výsledná rovnice.

$$(Qp - Pq)(Qr - Rq) + (Rp - \mathrm{Pr})^2 = 0 \quad \Big| \quad 3)\ E(x) = (f_1 g_0 - g_1 f_0)(f_1 g_2 - g_1 f_2) + (f_2 g_0 - g_2 f_0)^2$$

Rovnici upravíme a dostaneme.

$$P^2 r^2 - 2PRpr + R^2 p^2 + Q^2 pr - PQqr - QRpq + PRq^2 = 0 \quad \Big| \quad E(x) = {g_2}^2 {f_0}^2 - 2 f_2 g_0 g_2 f_0 + {f_2}^2 {g_0}^2 + {f_1}^2 g_0 g_2 - f_1 g_0 g_1 f_2 - g_1 f_0 f_1 g_2 + {g_1}^2 f_0 f_2$$

Ukázali jsme na příkladu dvou křivek, jak vyloučit neznámou *y* z rovnic těchto křivek, když byly pouze kvadratické vzhledem k *y*.

Dalším příkladem jsou rovnice, kdy jedna obsahuje neznámou *y* ve třetí mocnině. Uvádíme již jen Eulerův postup.

<u>Příklad č. 3.2:</u> Eliminujte neznámou *y* ze soustavy dvou rovnic.

$$1)\ P + Qy + Ry^2 = 0$$

$$2)\ p + qy + ry^2 + sy^3 = 0$$

[5] Pro F(x,y) a G(x,y) platí, že f_i a g_i jsou funkce x ($f_i, g_i \in R(x)$) a $f_0 \neq 0$ a $g_0 \neq 0$.

První vynásobí p a druhou P.

$$1)\ Pp + Qpy + Rpy^2 = 0$$

$$2)\ Pp + Pqy + Pry^2 + Psy^3 = 0$$

Rovnice od sebe odečte a dostane.

$$3)\ (Pq - Qp)y + (Pr - Rp)y^2 + Psy^3 = 0$$

Následně vydělí neznámou y.

$$3)\ (Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + Psy^2 = 0$$

Tím se získá rovnice druhého stupně v y. První z daných rovnic je také druhého stupně v y, můžeme postupovat stejně jako v předchozí soustavě, tj. převést je na lineární rovnice a následně na rovnici neobsahující y a dostaneme tento tvar bez neznámé y.

$$(PQq - Q^2p - P^2r + PRp)(PQs - PRr + R^2p) + (PRq - QRp - P^2s) = 0$$

Úpravou získáme velice dlouhý výraz.

$$\begin{aligned} P^4s^2 - 2P^3Rqs - P^3Qrs + P^3Rr^2 + 3P^2QRps + P^2R^2q^2 + P^2Q^2qs - P^2QRqr \\ - 2P^2R^2pr - PQR^2pq - PQ^3ps + PQ^2Rpr + PR^3p^2 + Q^2R^2p^2 \\ - Q^2R^2p^2 = 0 \end{aligned}$$

Poslední dva členy se spolu vynulují a my už můžeme jen pomocí vydělení písmenem P upravit do konečné podoby.

$$\begin{aligned} P^3s^2 - 2P^2Rqs - P^2Qrs + P^2Rr^2 + 3PQRps + PR^2q^2 + PQ^2qs - PQRqr - 2PR^2pr \\ - QR^2pq - Q^3ps + Q^2Rpr + R^3p^2 = 0 \end{aligned}$$

Příklad č. 3.3: Ze soustavy dvou rovnic třetího stupně v y eliminujte neznámou y.

$$1)\ P + Qy + Ry^2 + Sy^3 = 0$$

$$2)\ p + qy + ry^2 + sy^3 = 0$$

Postupovalo by se podobně jako v příkladech č. 3.1 a č. 3.2, Euler již jen vyvozuje vztah, který znovu neobsahuje neznámou y.

$$\begin{aligned} S^3p^3 - 3PS^2p^2s + P^2Sr^3 + 2PR^2prs - P^2Rr^2s + P^2Qrs^2 + PRSq^2r - P^3s^3 \\ + 3P^2Sps^2 - R^3p^2s - 2PRSpr^2 + R^2Sp^2r - RS^2p^2q - Q^2Rprs \\ - PR^2q^2s - PQSqr^2 + PQRqrs + 3PS^2pqr - 3P^2Sqrs + PQSprs \\ + Q^2Spr^2 + QR^2pqs - QRSpqr - 3PQRps^2 + 3QRSp^2s - PRSpqs \\ + 2P^2Rqs^2 + 2PQSq^2s - PS^2q^3 - PQ^2qs^2 - 2QS^2p^2r - 2Q^2Spqs \\ + Q^3ps^2 + QS^2pq^2 = 0 \end{aligned}$$

V další části zmiňuje, jak postupovat s dvěma rovnicemi čtvrtého stupně v neznámé y. A připomíná výsledky z předchozích odstavců. Po tomto příkladu už vše popisuje teoreticky, jak si poradit s rovnicemi m-tého, respektive n-tého stupně v y.

$$1)\ Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \cdots = 0$$
$$2)\ py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \cdots = 0$$

Postup je odlišný od předchozích. První rovnici vynásobí následujícím polynomem.

$$py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + cy^{k-m-3} + \cdots \quad (\square)$$

A druhou rovnici polynomem.

$$Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + Cy^{k-n-3} + \cdots \quad (\circ)$$

Tím získá rovnice, které jsou obě stejného, *n*-tého stupně. Nyní předpokládá, že se součiny sobě rovnají.

$$(Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \cdots)(py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + cy^{k-m-3} + \cdots) = (py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \cdots)(Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + Cy^{k-n-3} + \cdots)$$

Koeficienty *A, B, C,…* respektive *a, b, c,…* určí z podmínky, aby se všechny členy obsahující neznámou *y* vyrušily. Dále píše, jak se má zvolit písmeno *k* a počet zavedených koeficientů (*A, B, C,…, a, b, c,…*). V první rovnici jich musí být *k – m* a ve druhé *k – n*. Když se tyto dva výrazy sečtou, dostaneme *2k – m – n* koeficientů, ale mělo by jich být *k – 1*. Následně tedy dostáváme jednoduchou rovnost: $2k - m - n = k - 1$, proto výsledkem je *k = m + n – 1*. Následně upravuje polynomy ((□), (○)) s již vhodným *k* a dostává.

$$py^{n-1} + ay^{n-2} + by^{n-3} + cy^{n-4} + \cdots$$
$$Py^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3} + Cy^{m-4} + \cdots$$

A násobí jimi první a druhou rovnici. Dostává následující výrazy.

$$1)\ (Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \cdots)(py^{n-1} + ay^{n-2} + by^{n-3} + cy^{n-4} + \cdots) = 0$$
$$2)\ (py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \cdots)(Py^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3} + Cy^{m-4} + \cdots) = 0$$

Po roznásobení začne srovnávat koeficienty u stejných mocnin neznámé *y* a dostane soustavu lineárních rovnic pro koeficienty *A, B, C,…, a, b, c,…*.

$$Pp = Pp \quad \Big|\, pro\ (y^{m+n-1})$$
$$Pa + Qp = pA + qP \quad \Big|\, pro\ (y^{m+n-2})$$
$$Pb + Qa + Rp = pB + qA + rP \quad \Big|\, pro\ (y^{m+n-3})$$
$$Pc + Qb + Ra + Sp = pC + qB + rA + sP \quad \Big|\, pro\ (y^{m+n-4})$$

atd.

Na konci této kapitoly již aplikuje svůj teoretický postup v praxi, konkrétně na libovolném polynomu druhého a třetího stupně v y.

Jak jsme říkali na začátku, v rámci této metody eliminace rovnic hledá počet společných bodů dvou křivek, které jsou popsány rovnicemi. Tento princip vyšel až v roce 1750 v článku *Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper (Důkaz týkající se počtu bodů, ve kterých se mohou protínat křivky libovolného stupně)* i přesto, že tento příspěvek uvedl Berlínské akademii již v roce 1748. Euler tvrdí, že pokud máme zadané dvě křivky, kdy jedna je *n*-tého stupně a ta druhá *m*-tého stupně můžou se protínat nejvýše v *m.n* bodech. Ne každý průsečík musí být nutně reálný, mohou existovat i imaginární. Obecně předpokládá rovnice křivek *n*-tého a *m*-tého stupně ve tvaru.

$$ay^m + (b + cx)y^{m-1} + (d + ex + fx^2)y^{m-2} + \cdots = 0$$

$$\alpha y^n + (\beta + \gamma x)y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x^2)y^{n-2} + \cdots = 0$$

Následně uvažuje, že pokud se z těchto rovnic bude snažit vyloučit jednu z proměnných *x*, *y*, měl by dostat jednu proměnou v nejvýše *m.n* stupni po eliminaci té druhé. Bohužel se často stane, že po eliminaci jedné proměnné se ta druhá objeví ve vyšším stupni než je *m.n*. Mohlo by se zdát, že toto Eulerovo tvrzení o počtu průsečíků není správné. Rovnice, která vznikla eliminací jedné proměnné, obsahuje činitele, o kterých nevíme, zda obsahují kořeny či nikoliv. Tedy jestli povedou k nalezení průsečíků.

Problémy s nadbytečnými činiteli ukazuje na následujícím příkladu dvou křivek třetího stupně.

Příklad č. 3.4: Ze soustavy dvou rovnic třetího stupně v *y* eliminujte neznámou *y*.

$$1)\ Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0$$

$$2)\ py^3 + qy^2 + ry + s = 0$$

Je zřejmé, že postupuje stejně jako v předcházejících příkladech. Musí dostat dvě rovnice druhého stupně. Jednu získá tím, že první rovnici vynásobí koeficientem *s* a druhou koeficientem *S*, následně je odečte a zkrátí *y*.

$$3)\ (Ps - pS)y^2 + (Qs - qS)y + (Rs - rS) = 0$$

Druhou rovnici dosáhne vynásobením první rovnice koeficientem *p* a druhou násobí koeficientem *P* a také je odečte.

$$4)\ (Qp - qP)y^2 + (Rp - rP)y + (Sp - sP) = 0$$

Postupuje stejně až do té doby dokud rovnice neobsahuje *y* a dostává výsledný tvar.

$$\begin{aligned}(Ps-pS)^4 &+ 2(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)^2 + (Rp-rP)(Qs-qS)(Ps-pS)^2 \\ &- (Qp-qP)(Qs-qS)^2(Ps-pS) + (Rs-rS)(Rp-rP)^2(Ps-pS) \\ &+ (Qp-qP)^2(Rs-rS)^2 - (Qp-qP)(Qs-qS)(Rp-rP)(Rs-rS) \\ &= 0\end{aligned}$$

Poslední dva členy neobsahují výraz *(Ps – pS)*, ale můžeme je upravit pomocí vytknutí na vhodný tvar. Abychom se neztráceli v zápisu rovnice, pro lepší orientaci budeme upravovat jen poslední dva členy.

$$(Qp-qP)(Rs-rS)[(Qp-qP)(Rs-rS)-(Qs-qS)(Rp-rP)]$$

V hranaté závorce budeme postupně výrazy upravovat.

$$(Qp-qP)(Rs-rS)[QRps-QSpr-PRqs+PSqr-QRps+QPsr+SRqp-PSqr]$$

Členy *PSqr a QRps* se vyruší a zůstane nám.

$$(Qp-qP)(Rs-rS)[-QSpr-PRqs+QPsr+SRqp]$$

Znovu šikovně vytkneme.

$$(Qp-qP)(Rs-rS)[Qr(Ps-pS)-Rq(Ps-pS)]$$

Objevuje se nám výraz *(Ps – pS)*, který hledáme. Uděláme poslední úpravu.

$$(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)(Qr-qR)$$

Dosadíme člen zpátky do rovnice.

$$\begin{aligned}(Ps-pS)^4 &+ 2(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)^2 + (Rp-rP)(Qs-qS)(Ps-pS)^2 \\ &- (Qp-qP)(Qs-qS)^2(Ps-pS) + (Rs-rS)(Rp-rP)^2(Ps-pS) \\ &+ (Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)(Qr-qR) = 0\end{aligned}$$

Tento výraz už obsahuje *(Ps – pS)* a jelikož se objevuje ve všech členech je zřejmé, že *Ps – pS = 0* a tento člen nevede k nalezení žádného průsečíku křivek, a proto jím můžeme krátit.

$$\begin{aligned}(Ps-pS)^3 &+ 2(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS) + (Rp-rP)(Qs-qS)(Ps-pS) \\ &- (Qp-qP)(Qs-qS)^2 + (Rs-rS)(Rp-rP)^2 + (Qp-qP)(Qr \\ &- qR)(Rs-rS) = 0\end{aligned}$$

Dále zdůvodňuje, že dvě křivky třetího stupně se mohou protínat až v devíti bodech. Vyvozuje z toho, že krácením vznikne rovnice, která je v neznámé *x* v devátém stupni.

Tento způsob úpravy je závislý na detailech eliminace. Otázkou pro něj zůstává, jak nalézt tu správnou metodu pro eliminaci rovnice, aby mu zbyly jen takové kořeny, které posléze povedou k nalezení průsečíků daných dvou křivek. Tato rovnice nesmí obsahovat činitele, které jsou v ní nadbytečné. Myšlenku související s kořeny rovnic křivek v dalším textu více rozvíjí. Má-li dvě rovnice, které jsou m-tého, respektive n-tého stupně v y, pak má první rovnice m kořenů $A, B, C, \ldots,$ a druhá n kořenů $a, b, c, \ldots$ a lze je zapsat ve tvaru.

$$(y-A)(y-B)(y-C)(y-D)(y-E)\cdots=0$$
$$(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)(y-e)\cdots=0$$

Dále uvádí, že pokud vezme například $y = B$, tak tento kořen musí vést k průsečíku dvou křivek. Aby to hodnota splňovala, musí odpovídat pro obě dvě rovnice zároveň. To znamená, že se musí rovnat některým z $a, b, c, \ldots$ a samozřejmě také kořenům $A, B, C, \ldots$ v první rovnici. Je třeba najít všechny možné případy, které mohou nastat, aby byly splněny právě pro obě rovnice. Po jejich nalezení bude výsledkem rovnice, kterou se snažíme dostat, aby hodnota y vyhovovala oběma rovnicím. Nyní sestavíme všechny možné kombinace.

$$(A-a)(A-b)(A-c)(A-d)(A-e)\cdots=0$$
$$(B-a)(B-b)(B-c)(B-d)(B-e)\cdots=0$$
$$(C-a)(C-b)(C-c)(C-d)(C-e)\cdots=0$$
$$(D-a)(D-b)(D-c)(D-d)(D-e)\cdots=0$$
$$(E-a)(E-b)(E-c)(E-d)(E-e)\cdots=0$$

atd.

Rovnice se může zapsat také ve tvaru.

$$(A^n-pA^{n-1}+qA^{n-2}-rA^{n-3}+sA^{n-4}-\cdots)=0$$
$$(B^n-pB^{n-1}+qB^{n-2}-rB^{n-3}+sB^{n-4}-\cdots)=0$$
$$(C^n-pC^{n-1}+qC^{n-2}-rC^{n-3}+sC^{n-4}-\cdots)=0$$
$$(D^n-pD^{n-1}+qD^{n-2}-rD^{n-3}+sD^{n-4}-\cdots)=0$$
$$(E^n-pE^{n-1}+qE^{n-2}-rE^{n-3}+sE^{n-4}-\cdots)=0$$

atd.

Respektive

$$(a^m-Pa^{m-1}+Qa^{m-2}-Ra^{m-3}+Sa^{m-4}-\cdots)=0$$
$$(b^m-Pb^{m-1}+Qb^{m-2}-Rb^{m-3}+Sb^{m-4}-\cdots)=0$$
$$(c^m-Pc^{m-1}+Qc^{m-2}-Rc^{m-3}+Sc^{m-4}-\cdots)=0$$
$$(d^m-Pd^{m-1}+Qd^{m-2}-Rd^{m-3}+Sd^{m-4}-\cdots)=0$$
$$(e^m-Pe^{m-1}+Qe^{m-2}-Re^{m-3}+Se^{m-4}-\cdots)=0$$

atd.

Takto nalezené rovnice neobsahují y, jedná se sice o několik rovnic, ale je to právě ta jedna důležitá rovnice, vzniklá po eliminaci, kterou se snaží najít. Problémem, ale zůstává nalezení kořenů *A, B, C,…, a, b, c,…,* tak aby vyhovovaly oběma rovnicím, jak již bylo řečeno.

Závěrem Euler píše, proč eliminuje jednu z neznámých jiným způsobem a proč stupeň této rovnice je v *x* nejvýše *m.n*-tého stupně.

Popisovali jsme první metodu eliminace podle Eulera a pojďme ukázat i jeho druhou metodu. Ta vyšla v článku *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations (Nová metoda pro eliminaci neznámých z rovnic)* roku 1766. Popisuje v ní některé problémy, které si žádají zavedení daleko více neznámých veličin a tím se musí řešit i několik rovnic obsahující tyto neznámé. Připomíná, že pokud máme dvě rovnice o stejném počtu neznámých, tak po následné eliminaci nám vznikne jedna rovnice s jednou neznámou. Pokud jsou stupně rovnic vyšší, eliminace bude tím složitější, jak jsme se již přesvědčili. Dále poznamenává, že výsledná rovnice obsahuje i činitele, které nepotřebuje ke zjištění společných řešení dvou rovnic. Tento postup, který popisuje, povede k řešení soustavy lineárních rovnic. Euler postup ukazuje na obecném příkladu rovnic druhého a třetího stupně.

Příklad č. 3.5: Ze soustavy dvou rovnic eliminujte neznámou z.

$$1)\; z^2 + Pz + Q = 0$$
$$2)\; z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

Musí najít společné řešení pro tyto dvě rovnice a to tím, že zjistí vztah mezi *P, Q, p, q, r* obsažených v rovnicích. Společné řešení označí řeckým písmenem *ω*, logicky bude kořenový činitel z – *ω*. Dostáváme rovnice v tomto tvaru.

$$1)\; z^2 + Pz + Q = (z - \omega)(z + A)$$
$$2)\; z^3 + pz^2 + qz + r = (z - \omega)(z^2 + az + b)$$

Abychom dostali jednu výslednou rovnici, musíme první rovnici vydělit výrazem obsaženým na pravé straně a druhou rovnici vydělit výrazem na straně levé.

$$1)\; \frac{z^2 + Pz + Q}{(z - \omega)(z + A)} = 1$$

$$2)\; \frac{z^3 + pz^2 + qz + r}{(z - \omega)(z^2 + az + b)} = 1$$

Nyní obě rovnice můžeme navzájem porovnat, neboť na pravých stranách máme jednotky. Pokud se pravé strany obou rovnic rovnají, tak se i levé strany rovnají. Používáme stejnou metodu, jako už používal Fermat či Newton.

$$\frac{z^2 + Pz + Q}{(z - \omega)(z + A)} = \frac{z^3 + pz^2 + qz + r}{(z - \omega)(z^2 + az + b)}$$

Rovnici vhodně vynásobíme a dostaneme tvar, který musí být splněn.

$$(z^2 + Pz + Q)(z^2 + az + b) = (z^3 + pz^2 + qz + r)(z + A)$$

Rovnici roznásobíme a uspořádáme do vhodného tvaru.

$$z^4 + (a + P)z^3 + (b + Pa + Q)z^2 + (Pb + Qa)z + Qb$$
$$= z^4 + (p + A)z^3 + (q + Ap)z^2 + (r + Aq)z + Ar$$

Porovnáním odpovídajících si členů pro neurčité koeficienty dostaneme lineární podmínky, které by se vyřešily. Po tomto příkladu naznačuje, jak by se postupovalo, kdybychom eliminovali rovnice m-tého a n-tého stupně v z. Na konci článku uvádí problematiku související se dvěma společnými řešeními pro dvě rovnice. Jak uplatnit stejný postup k nalezení podmínek na koeficienty příslušných rovnic. Znovu začíná s konkrétním příkladem.

<u>Příklad č. 3.6:</u> Ze soustavy dvou rovnic eliminujte neznámou z.

$$1)\ z^3 + Pz^2 + Qz + R = 0$$
$$2)\ z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = 0$$

Vzhledem k jistému problému uvažuje tento tvar.

$$1)\ z^3 + Pz^2 + Qz + R = (z + \alpha)(z + \beta)(z + A)$$
$$2)\ z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = (z + \alpha)(z + \beta)(z^2 + az + b)$$

A postupovalo by se obdobně jako předtím.

Nyní ve své práci ukazuje problém na obecném tvaru dvou rovnic libovolného stupně m a n. V úplném konci popisuje, že není problém nalézt obecné řešení, jak hledat podmínky pro koeficienty dvou rovnic, aby ve výsledku měli tři, čtyři a více společných řešení.

3.2 Étienne Bézout (1730 – 1783)

Francouzský matematik narozený 31. března 1730, se měl stát právníkem stejně jako jeho otec a dědeček. Nicméně se začal věnovat matematice potom, co ho oslovila práce Leonharda Eulera.

Bézout působil jako učitel na školách a spojil své znalosti s psaním učebnic pro studenty. Ty byly psané velmi srozumitelně, a proto není divu, že byly velice oblíbené a populární. V roce 1764 spojil svojí práci s reorganizaci studia námořních důstojníků a sepisování kurzů pro ně. V rámci toho vydává dvě učebnice, kde jedna nese název *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* a druhá *Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie*. Nevěnoval se jen školním záležitostem, ale také v rámci matematiky prováděl výzkumy. Ty byly v některých ohledech velice zvláštní a velmi specifické. Bézout stanovil některé obecné předpoklady, které následně více komplikoval, aby se dostal k pochopení problému. Po jejich nalezení mohl úlohu zjednodušit.

První publikace o teorii rovnic vyšla v roce 1762 a nesla pojmenování *Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique*. Práce se týká rovnice *n*-tého stupně o jedné neznámé. Jednu rovnici o jedné neznámé bere jako výsledek eliminace jedné neznámé ze dvou rovnic o dvou neznámých. Jestliže některá z rovnic o dvou neznámých má speciální tvar, můžeme určit řešení původní rovnice *n*-tého stupně. Příkladem může být rovnice.

$$3)\ x^6 + 18x^5 + 15x^4 + 60x^3 + 15x^2 + 18x + 1$$

Jedná se o rovnici šestého stupně v neznámé *x*. Rovnici můžeme převést na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých *x* a *y*.

$$1)\ y^6 - 2 = 0$$

$$2)\ y = \frac{(x-1)}{(x+2)}$$

Snadno můžeme určit neznámou *y* a následně i neznámou *x* a tím bychom mohli spočítat i původní rovnici šestého stupně. Místo řešení algebraické rovnice *n*-tého stupně, převádí problém na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých *x* a *y*.

V roce 1764 předkládá příspěvek královské akademii věd týkající se eliminace neznámé ze soustavy rovnic. Výsledkem eliminace je rovnice neboli rezultant, který obsahuje jen jednu neznámou. V úvodu zmiňuje své předchůdce Newtona a Eulera, kteří řešili stejný problém, ale docházeli k výsledkům, které obsahovaly nadbytečné činitele, které nemohly vést k řešení původní soustavy rovnic.

Další jeho významnou prací je *Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues*, kde využil determinanty pro řešení soustavy lineárních rovnic. V roce 1779 uvedl dílo *Théorie générale des équations algébraiques,* které pojednává o teorii rovnic a jedná se o takový soubor všech jeho poznatků, které postupně vydával k těmto problémům. Étienne Bézout zemřel v roce 1783 ve Francii.

V práci *Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique* můžeme najít několik studií, kterým se věnoval. Nejprve píše o sestavení determinantu soustavy lineárních rovnic. Soustavu řeší pomocí determinantu, kde jeho postup odpovídá Cramerovu pravidlu.[6] Dále počítá rezultant jako determinant soustavy rovnic a následně využívá tohoto postupu pro nalezení rezultantu dvou rovnic o dvou neznámých stupně většího než dva. Uvažuje rovnice v následujícím tvaru.

$$1)\ Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} + \cdots + V = 0$$
$$2)\ A'x^{m'} + B'x^{m'-1} + C'x^{m'-2} + D'x^{m'-3} + E'x^{m'-4} + \cdots + V' = 0$$

Jedná se o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kde první rovnice je stupně *m*-tého v neznámé x a druhá rovnice je stupně m'-tého v neznámé *x*. Koeficienty obsažené v rovnicích jako *A, B, C,...,* respektive *A´, B´, C´,...* jsou funkce neznámé *y*. Následně si určí polynomy v neurčité *x*.

$$Mx^n + Nx^{n-1} + Px^{n-2} + Qx^{n-3} + Rx^{n-4} + \cdots + T\ (\bullet)$$
$$M'x^{n'} + N'x^{n'-1} + P'x^{n'-2} + Q'x^{n'-3} + R'x^{n'-4} + \cdots + T'\ (\spadesuit)$$

Nyní vynásobí první rovnici prvním polynomem (•) a druhou rovnici polynomem druhým (♠) a navzájem je sečte. Po roznásobení, dostává konečnou rovnici.

$$\begin{aligned}
&AMx^{m+n} + BMx^{m+n-1} + CMx^{m+n-2} + DMx^{m+n-3} + EMx^{m+n-4} + \cdots + VT+ = 0\\
&+A'M'x^{m+n} + ANx^{m+n-1} + BNx^{m+n-2} + CNx^{m+n-3} + DNx^{m+n-4} + \cdots + V'T'\\
&+B'M'x^{m+n-1} + APx^{m+n-2} + BPx^{m+n-3} + CPx^{m+n-4} + \cdots\\
&+A'N'x^{m+n-1} + C'M'x^{m+n-2} + AQx^{m+n-3} + BQx^{m+n-4} + \cdots\\
&+B'N'x^{m+n-2} + D'M'x^{m+n-3} + ARx^{m+n-4} + \cdots\\
&+A'P'x^{m+n-2} + C'N'x^{m+n-3} + E'M'x^{m+n-4} + \cdots\\
&+B'P'x^{m+n-3} + D'N'x^{m+n-4} + \cdots\\
&+A'Q'x^{m+n-3} + C'P'x^{m+n-4} + \cdots\\
&+B'Q'x^{m+n-4} + \cdots\\
&+A'R'x^{m+n-4} + \cdots
\end{aligned}$$

[6] Cramerovo pravidlo říká, že dostáváme právě jedno řešení ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), kde $x_i = \frac{det\ A_i}{det\ A} = \frac{|A_i|}{|A|}$.

Aby se v tomto součtu vyrušily všechny členy s neznámou *x*, musí být splněna podmínka: $m + n = m' + n'$, týkající se stupňů polynomů ((•), (♠)). Členy se stejnou mocninou v neznámé *x* můžeme vyjádřit pomocí následujících rovnic. Tím dostáváme rovnice, které neznámou *x* neobsahují.

$$AM + A'M' = 0$$

$$AN + A'N' + BM + B'M' = 0$$

$$AP + A'P' + BN + B'N' + CM + C'M' = 0$$

$$AQ + A'Q' + BP + B'P' + CN + C'N' + DM + D'M' = 0$$

$$AR + A'R' + BQ + B'Q' + CP + C'P' + DN + D'N' + EM + E'M' = 0$$

$$\vdots$$

$$VT + V'T' = 0$$

Výsledná rovnice neznámou *x* neobsahuje v žádné mocnině.

Následně vyvozuje, jaký stupeň mají mít polynomy ((•), (♠)). Nejvyšším stupněm ve výsledné rovnici je $m + n$, proto bude mít polynom $m + n + 1$ členů. Polynomy ((•), (♠)), kterými násobíme rovnice, mají $n + 1$, respektive $n' + 1$ členů. Neurčité koeficienty polynomů ((•), (♠)) se při součinu s danými rovnicemi objeví v každém členu, musí tedy platit: $m + n + 1 = (n + 1) + (n' + 1)$. Navíc připomíná podmínku: $m + n = m' + n'$. Dostaneme dvě rovnice.

$$3)\ m + n + 1 = (n + 1) + (n' + 1)$$

$$4)\ m + n = m' + n'$$

Z nichž plyne n' a n.

$$n' = m - 1$$

$$n = m' - 1$$

Polynom, jímž se násobí první rovnice má stupeň $m' - 1$. Polynom, kterým se násobí druhá rovnice má stupeň $m - 1$.

V další části textu vyvozuje maximální stupeň rezultantu dvou rovnic a to pro tři, čtyři a pět rovnic o třech, čtyřech a pěti neznámých. Na konci se věnuje stupni rezultantu pro *m* rovnic o *m* neznámých.

Následně ve své práci uvádí, že pro rovnice s vysokým stupněm jsou výpočty příliš složité a ukazuje jiný postup. Opět uvažuje dvě rovnice.

$$1)\ Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \cdots + T = 0\ (\star)$$

$$2)\ A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} + \cdots + T' = 0\ (\circledast)$$

Ty má ve stupni m v neznámé x. První rovnici násobí polynomy stupně *0, 1, 2,…,* n a to s koeficienty, které jsou ve druhé rovnici *(A´, B´, C´,…)*. Podobným způsobem násobí druhou rovnici, akorát používá koeficienty z první rovnice *(A, B, C,…)*. Polynomy, které získá, od sebe odečítá. Bézout postup popisuje v několika krocích. Nejprve první rovnici (⋆) vynásobí *A´* a druhou rovnici (⊛) *A*.

$$1)\ AA'x^m + BA'x^{m-1} + CA'x^{m-2} + DA'x^{m-3} + \cdots + TA' = 0$$

$$2)\ A'Ax^m + B'Ax^{m-1} + C'Ax^{m-2} + D'Ax^{m-3} + \cdots + T'A = 0$$

Druhou rovnici odečte od první a dostane rovnici, která má snížený stupeň o m – *1*.

$$3)\ (BA' - B'A)x^{m-1} + (CA' - C'A)x^{m-2} + (DA' - D'A)x^{m-3} + \cdots + (TA' - T'A) = 0$$

V dalším kroku násobí rovnice lineárním polynomy – první rovnici (⋆) vynásobí *A´x + B´* a druhou rovnici (⊛) *Ax + B*.

$$1)\ AA'x^{m+1} + AB'x^m + BA'x^m + BB'x^{m-1} + CA'x^{m-1} + CB'x^{m-2} + DA'x^{m-2} + DB'x^{m-3} + \cdots + TA'x + TB' = 0$$

$$2)\ AA'x^{m+1} + A'Bx^m + B'Ax^m + BB'x^{m-1} + C'Ax^{m-1} + C'Bx^{m-2} + D'Ax^{m-2} + D'Bx^{m-3} + \cdots + T'Ax + T'B = 0$$

Opět druhou rovnici odečte od první a získá.

$$4)\ (A'C - AC')x^{m-1} + (CB' - BC' + DA' - D'A)x^{m-2} + (B'D - D'B)x^{m-3} + \cdots + (TA' - T'A)x + (TB' - T'B) = 0$$

Tato rovnice je také ve stupni *m – 1*. Poté by postupoval úplně stejně, jen by násobil rovnice ((⋆), (⊛)) výrazy $A'x^2 + B'x + C'$, respektive $Ax^2 + Bx + C$. Rovnice by od sebe odečetl a získá rovnici stupně *m – 1*. Takto by mohl pokračovat dále až by měl *n* rovnic, kde každá nová rovnice bude mít stupeň *m – 1*. Každou mocninu *x* považuje za neznámou. Dále vyvozuje podmínku, aby soustava měla řešení. Tato podmínka už nebude obsahovat neznámou *x*, bude dávat rovnici v neznámé *y*. Postup si můžeme ukázat na jeho příkladu.

<u>Příklad č. 3.7:</u> Ze soustavy dvou rovnic eliminujte neznámou *x*.

$$Ax^2 + Bx + C = 0\ (\curlyvee)$$

$$A'x^2 + B'x + C' = 0\ (\ltimes\!\!\rtimes)$$

První rovnici vynásobí *A´* a druhou rovnici písmenem *A* a dostane.

$$1)\ A'Ax^2 + A'Bx + A'C = 0$$

$$2) A\,A'x^2 + AB'x + AC' = 0$$

Druhou rovnici odečte od první a získá novou rovnici.

$$3)\ (A'B - AB')x + A'C - AC' = 0$$

Následně vynásobí první rovnici (⋎) výrazem $A'x + B'$ a druhou rovnici (⋉) výrazem $Ax + B$.

$$1)\ AA'x^3 + AB'x^2 + BA'x^2 + BB'x + CA'x + CB' = 0$$

$$2)\ AA'x^3 + A'Bx^2 + B'Ax^2 + BB'x + C'Ax + C'B = 0$$

Znovu odečte druhou rovnici od první a získá druhou novou rovnici.

$$4)\ (A'C - AC')x + B'C - BC' = 0$$

Rovnice 3) a 4) převádí na rovnici, která neobsahuje neznámou x a je rovna nule.

$$(A'B - AB')(B'C - BC') - (A'C - AC')^2 = 0$$

Pak uvažuje dvě rovnice stupňů m a m', kde platí $m > m'$ v neznámé x. Postup pro rovnice stejného stupně se mírně upraví, přesněji rovnice s nižším stupněm se násobí stejným polynomem, ale zvětšeným o $x^{m-m'}$. Přesněji postupuje tak, že v prvním kroku vynásobí první rovnici koeficientem A' a druhou výrazem $Ax^{m-m'}$ a odečte druhý součin od prvního. V dalším kroku násobí první rovnici výrazem $A'x+B'$ a druhou rovnici vynásobí výrazem $Ax^{m-m'+1} + Bx^{m-m'}$ a znovu je od sebe odečte stejným způsobem. Ve třetím kroku vynásobí první rovnici $A'x^2 + B'x + C'$ a druhou výrazem $Ax^{m-m'+2} + Bx^{m-m'+1} + Cx^{m-m'}$ a pokračuje dál, dokud se nezíská n' rovnic každá stupně $m - 1$. Takto vytvořené rovnice se vynásobí neurčitým koeficientem a druhou ze zadaných rovnic vynásobí neurčitým polynomem $M'x^{m-m'-1} + N'x^{m-m'-2} + P'x^{m-m'-3} + \dots$, Tyto součiny se všechny sečtou a položí se rovny nule součty koeficientů každé mocniny x. Přesněji postup ukazuje na následujícím příkladu.

<u>Příklad č. 3.8:</u> Ze soustavy dvou rovnic eliminujte neznámou x.

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0\ (\curlywedge)$$

$$A'x^2 + B'x + C' = 0\ (\rtimes)$$

První rovnici vynásobí koeficientem A' a druhou výrazem Ax^2, protože se jedná o rovnici, která má nižší stupeň než první rovnice.

$$1)\ A'Ax^4 + A'Bx^3 + A'Cx^2 + A'Dx + A'E = 0$$

$$2)\ A'Ax^4 + B'Ax^3 + C'Ax^2 = 0$$

Následně od sebe rovnice odečte a dostane novou rovnici, která musí být ve stupni $m - 1$.

$$3)\ (A'B - AB')x^3 + (A'C - AC')x^2 + A'Dx + A'E = 0\ (\delta)$$

Nyní vynásobí první rovnici (⋏) výrazem $A'x+B'$ a druhou rovnici (⋊) $Ax^3 + Bx^2$.

$$1)\ AA'x^5 + AB'x^4 + BA'x^4 + BB'x^3 + CA'x^3 + CB'x^2 + AD'x^2 + DB'x + A'E + B'E = 0$$

$$2)\ AA'x^5 + A'Bx^4 + B'Ax^4 + BB'x^3 + C'Ax^3 + C'Bx^2 = 0$$

Znovu od sebe odečte druhou rovnici od první a dostane rovnici novou.

$$4)\ (A'C - AC')x^3 + (A'D + B'C - BC')x^2 + (A'E + B'D)x + B'E = 0\ (\psi)$$

Vzniklé rovnice vynásobí neurčitými koeficienty M a M'', navíc rovnici (⋊) vynásobí neurčitým polynomem $M'x + N'$. Dostane navíc ještě jednu novou rovnici.

$$3)\ M(A'B - AB')x^3 + M(A'C - AC')x^2 + MA'Dx + MA'E = 0$$

$$4)\ M''(A'C - AC')x^3 + M''(A'D + B'C - BC')x^2 + M''(A'E + B'D)x + M''B'E = 0$$

$$5)\ A'M'x^3 + A'N'x^2 + B'M'x^2 + B'N'x + C'M'x + C'N' = 0$$

Takto připravené rovnice sečetl a dostane.

$$M(A'B - AB')x^3 + M(A'C - AC')x^2 + MA'Dx + MA'E + M''(A'C - AC')x^3 + M''(A'D + B'C - BC')x^2 + M''(A'E + B'D)x + M''B'E + A'M'x^3 + A'N'x^2 + B'M'x^2 + B'N'x + C'M'x + C'N' = 0$$

Dále potřebuje, aby v rovnici neměl neznámou *x*, a proto všechny koeficienty členů třetího, druhého, prvního a nultého stupně budou rovny nule. Získá soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých M, M', M'', N'.

$$1`)\ M(A'B - AB') + M''(A'C - AC') + A'M' = 0$$

$$2`)\ M(A'C - AC') + M''(A'D + B'C - BC') + A'N' + B'M' = 0$$

$$3`)\ MA'D + M''(A'E + B'D) + B'N' + C'M' = 0$$

$$4`)\ MA'E + M''B'E + C'N' = 0$$

Soustavu rovnic vyšších stupňů převedl na soustavu lineárních rovnic. Takto připravené rovnice řeší pomocí determinantu, jehož postup odpovídá Cramerovu pravidlu, jak jsme již jednou uvedli.

Po uvedení obecného postupu i konkrétního příkladu, kde měl dvě rovnice různých stupňů $(m \neq m')$ se Bézout vrátil k původní metodě, v němž rezultant rovnic hledal s využitím součtu rovnic vynásobených neurčitými polynomy. Chce se vyhnout tomuto dlouhému postupu a snaží se přijít na lepší způsob eliminace, aby dostal lineární rovnici. Navrhl z druhé rovnice stupně m' vyjádřit $x^{m'}$ a dosadit za $x^{m'}, x^{m'+1}, \ldots, x^{m-1}$ do n' rovnic získaných pomocí neurčitých polynomů. Tím dostává n' rovnic, které jsou stupně $m' - 1$. Ty snadno už spočítá pomocí determinantu, protože soustavu lineárních rovnic mocniny *x* považuje za nové neznámé a tím i dostane rezultant, který už neobsahuje neznámou *x*. Postup si ukážeme na následujícím příkladu, který odpovídá příkladu č. 3.8.

Příklad č. 3.9: Ze soustavy dvou rovnic eliminujte neznámou *x*.

$$1)\ Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

$$2)\ A'x^2 + B'x + C' = 0$$

Z druhé rovnice, jak popisuje, se vyjádří nejvyšší mocnina.

$$2)\ x^2 = \frac{-B'x - C'}{A'}$$

A tento výraz dosadí do rovnic ((δ), (ψ)), které získal pomocí neurčitých polynomů.

$$x(A'B - AB')\left(\frac{-B'x - C'}{A'}\right) + (A'C - AC')\left(\frac{-B'x - C'}{A'}\right) + A'Dx + A'E = 0$$

$$x(A'C - AC')\left(\frac{-B'x - C'}{A'}\right) + (A'D + B'C - BC')\left(\frac{-B'x - C'}{A'}\right) + (A'E + B'D')x + B'E = 0$$

Pomocí úprav dostaneme.

$$-A'BB'x^2 + AB'x^2 - C'A'Bx + AB'C'x - B'A'Cx + B'AC'x - A'C'C - AC'^2 + A'^2Dx + A'^2E = 0$$

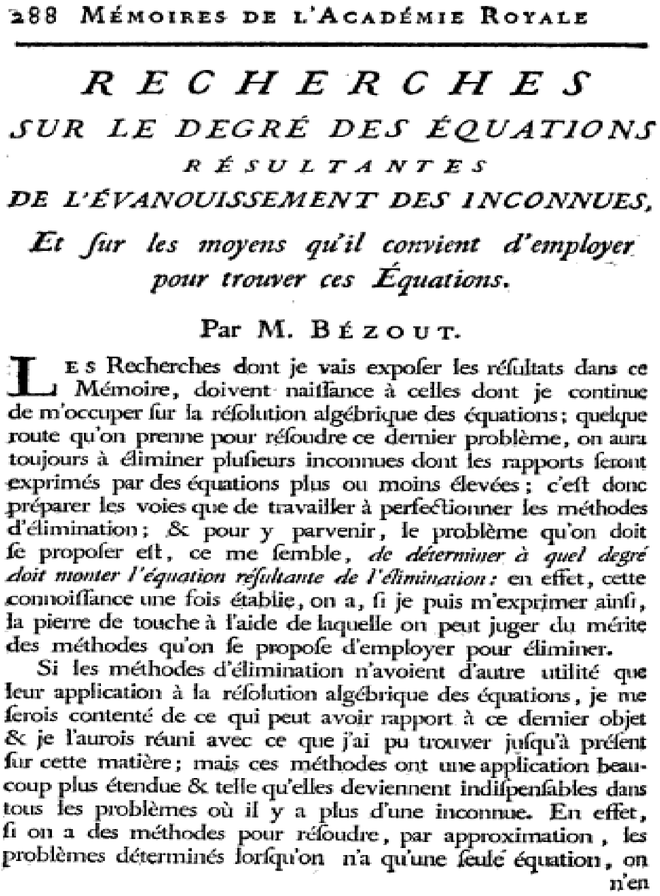
$$-B'A'Cx^2 + AC'B'x^2 - A'C'Cx + AC'^2x + A'DB'x + B'^2Cx - BB'C'x - A'DC' - B'C'C + BC'^2 + A'^2Ex + A'B'Dx + A'B'E = 0$$

Je zřejmé, že obě dvě rovnice nejsou lineární, a proto bychom znovu dosadili do rovnic za x^2. A vyšla by soustava dvou rovnic, kde neznámá x je v první mocnině. Následně by už sestavil determinant matice, jejímiž prvky jsou koeficienty těchto lineárních rovnic a určí výsledný rezultant.

Dále vyvozuje nedostatky tohoto postupu na příkladu dvou rovnic, kde jedna je devátého stupně a druhá stupně třetího. Dochází k názoru, že stupeň rezultantu, který dostal pomocí prvního postupu popsaného v příkladu č. 3.8 je menší než stupeň rezultantu získaného druhým postupem použit v příkladu č. 3.9. Zjistil, že druhou metodou dostane rezultant, který obsahuje nadbytečné činitele. Bézout proto vyvozuje tvar tohoto nadbytečného činitele, který je: $A'^{(m-m')(m'-1)}$. Z toho plyne, že pokud budeme mít soustavu dvou rovnic, které jsou v neznámé ve stejném stupni, můžeme použít první i druhou metodu a dostaneme vždy stejný rezultant. Pro soustavy, které mají rovnice v jiných stupních, neplatí toto tvrzení, viz příklady č. 3.8 a č. 3.9.

Následně píše o úvahách s rovnicemi ve třech a více neznámých. Konkrétně zmiňuje tři rovnice ve třech neznámých, které jsou vzhledem k x a ve stupních m, m', m'' ($m > m' > m''$). Ukazuje ty samé postupy jako v předchozích příkladech a vyhodnocuje, že výsledný rezultant obsahuje nadbytečné činitele poměrně vysokého stupně, ale podotýká, že je řada jiných postupů jak eliminovat neznámou x z takových tří rovnic, které by vedly k lepším výsledkům.

Závěrem už jen krátce popisuje, že uvedené postupy kombinování rovnic a polynomů můžou vést k nalezení největšího společného dělitele. Už Johannes Hudde využíval eliminace rovnic k nalezení největšího společného dělitele a později se tato myšlenka objevuje u J. J. Sylvestera v roce 1853.



288 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

RECHERCHES
SUR LE DEGRÉ DES ÉQUATIONS
RÉSULTANTES
DE L'ÉVANOUISSEMENT DES INCONNUES,
Et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces Équations.

Par M. BÉZOUT.

LES Recherches dont je vais exposer les résultats dans ce Mémoire, doivent naissance à celles dont je continue de m'occuper sur la résolution algébrique des équations; quelque route qu'on prenne pour résoudre ce dernier problème, on aura toujours à éliminer plusieurs inconnues dont les rapports seront exprimés par des équations plus ou moins élevées; c'est donc préparer les voies que de travailler à perfectionner les méthodes d'élimination; & pour y parvenir, le problème qu'on doit se proposer est, ce me semble, *de déterminer à quel degré doit monter l'équation résultante de l'élimination*: en effet, cette connoissance une fois établie, on a, si je puis m'exprimer ainsi, la pierre de touche à l'aide de laquelle on peut juger du mérite des méthodes qu'on se propose d'employer pour éliminer.

Si les méthodes d'élimination n'avoient d'autre utilité que leur application à la résolution algébrique des équations, je me serois contenté de ce qui peut avoir rapport à ce dernier objet & je l'aurois réuni avec ce que j'ai pu trouver jusqu'à présent sur cette matière; mais ces méthodes ont une application beaucoup plus étendue & telle qu'elles deviennent indispensables dans tous les problèmes où il y a plus d'une inconnue. En effet, si on a des méthodes pour résoudre, par approximation, les problèmes déterminés lorsqu'on n'a qu'une seule équation, on n'en

Obrázek 3: Jedna stránka z práce Étienna Bézouta

(**Zdroj:** Recherches sur le degree des equations resultantes de l'evanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces equations [online]. BÉZOUT, Étienne. Dostupné z: https://books.google.cz/ https://books.google.cz/books?id=K9H1kjz2U4QC&pg=PA288&lpg=PA288&dq=%22Recherches+sur+le+Degr%C3%A9+des+%C3%89quations+r%C3%A9sultantes+de+l'Evanouissement+des+Inconnues%22&source=bl&ots=IvxzfH5mzy&sig=46lowe-zWy0pTzL6EVD8URfggFc&hl=cs&sa=X&ved=0ahUKEwj7zpPahOzLAhWidpoKHXPdCFsQ6AEIGjAB#v=onepage&q=%22Recherches%20sur%20le%20Degr%C3%A9%20des%20%C3%89quations%20r%C3%A9sultantes%20de%20l'Evanouissement%20des%20Inconnues%22&f=false)

4. Závěrečná příkladová část

Popsali jsme postupy eliminace neznámé z rovnic matematiků v 17. a 18. století. Rádi bychom na příkladech ukázali srovnání metod podle Pierra de Fermata, Isaaca Newtona, Leonharda Eulera a Étienna Bézouta a budeme moci porovnat jejich metody a výsledky.

<u>**Příklad č. 4.1:**</u> Ze soustavy dvou rovnic eliminujte neznámou *x*.

$$1)\ Ax^2 + Bx + C = 0\ (\overline{\Phi})$$

$$2)\ A'x^2 + B'x + C' = 0\ (\underline{\underline{\triangle}})$$

<u>a) Pierre de Fermat a jeho postup:</u>

Členy neobsahující neznámou *x*, převedeme na pravou stranu.

$$1)\ Ax^2 + Bx = -\mathrm{C}$$

$$2)\ A'x^2 + B'x = -C'$$

Následně obě rovnice vydělíme jejich pravými stranami.

$$1)\ \frac{Ax^2 + Bx}{-C} = 1$$

$$2)\ \frac{A'x^2 + B'x}{-C'} = 1$$

Rovnice můžeme navzájem dát do rovnosti, protože když se pravé strany rovnají, tak se rovnají i strany levé.

$$3)\ \frac{Ax^2 + Bx}{-C} = \frac{A'x^2 + B'x}{-C'}$$

Pomocí úprav, které provedl v té době Fermat, dostaneme rovnici, kde je neznámá *x* v první mocnině.

$$3)\ \left(-\frac{C'A - A'C}{C'C}\right)x = -\frac{B'C - BC'}{C'C}$$

Můžeme vyjádřit *x* a dostaneme.

$$3)\ x = \frac{B'C - BC'}{C'A - A'C}$$

Dosadíme do první rovnice a dostáváme tento rezultant.

$$AB'^2C^2 - AB'BC'C - A'C^2B'B + B^2A'C'C + CC'^2A^2 - 2AA'C^2C' + A'^2C^2C = 0$$

Rovnici můžeme vydělit písmenem *C* a dostaneme tvar: $A^2C'^2 - BB'AC' - 2AA'CC' + B^2C'A' - CBB'A' + AB'^2C + C^2A'^2 = 0$. Postup podle Fermata obsahuje nadbytečný člen ***C***.

b) Isaac Newton a jeho postup:

Využijeme jedno z pravidel podle Newtona, konkrétně první pravidlo kde výsledná rovnice má tvar: $(ah - bg - 2cf)ah + (bh - cg)bf + (ag^2 + cf^2)c = 0$.

$$a = A, b = B, c = C, f = A', g = B', h = C'$$

Vypsali jsme jednotlivé koeficienty a můžeme je do rovnice dosadit.

$$(AC' - BB' - 2CA')AC' + (BC' - CB')BA' + (AB'^2 + CA'^2)C = 0$$

Konečná rovnice má následující tvar.

$$A^2C'^2 - BB'AC' - 2AA'CC' + B^2C'A' - CBB'A' + AB'^2C + C^2A'^2 = 0$$

c) Leonhard Euler a jeho postup:

Postupem podle Eulera dostaneme soustavu dvou lineárních rovnic.

$$1)\ Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$2)\ A'x^2 + B'x + C' = 0$$

$$1)\ (BC' - CB') + (AC' - CA')x = 0$$

$$2)\ (CA' - AC') + (BA' - AB')x = 0$$

Převedeme je na jednu rovnici, kde už neznámá *x* není obsažena.

$$(BC' - CB')(BA' - AB') + (AC' - CA')^2 = 0$$

Upravíme a dostaneme.

$$A^2C'^2 - BB'AC' - 2AA'CC' + B^2C'A' - CBB'A' + AB'^2C + C^2A'^2 = 0$$

d) Étienne Bézout a jeho postup:

První rovnici ($\overline{\Phi}$) vynásobíme *A´*, druhou rovnici (⍋) vynásobíme písmenem *A* a rovnice od sebe odečteme.

$$3)\ (BA' - B'A)x + (CA' - C'A) = 0$$

Ve druhém kroku první rovnici ($\overline{\Phi}$) násobíme výrazem *A´x* + *B´* a druhou rovnici (⍋) výrazem *Ax* + *B*.

$$4)\ (A'C - C'A)x + (CB' - C'B) = 0$$

Dostali jsme dvě lineární rovnice, které vyřešíme pomocí determinantu.

$$\begin{vmatrix} (BA' - B'A) & (CA' - C'A) \\ (A'C - C'A) & (CB' - C'B) \end{vmatrix} = 0$$

Spočítáním determinantu dostáváme výslednou rovnici po eliminaci neznámé *x*.

$$A^2C'^2 - BB'AC' - 2AA'CC' + B^2C'A' - CBB'A' + AB'^2C + C^2A'^2 = 0$$

Když se podíváme na výsledky, které jsme dostali, tak je zřejmé, že jen postupem Pierra de Fermata jsme dostali jeden nadbytečný faktor a to písmeno **C**. Ostatní tři postupy neobsahovaly žádné nadbytečné členy. Závěrem můžeme říci, že jeho postup je značně nevýhodný i z důvodu delšího postupu.

Na následujících konkrétních příkladech si ukážeme, zda se něco změní, pokud se mezi členy objeví neznámá *y*.

<u>Příklad č. 4.2:</u> Ze soustavy dvou rovnice o dvou neznámých *x* a *y*, eliminujte neznámou *x*.

$$1)\ x^2 + 4xy - 2 = 0 \ (\mp)$$

$$2)\ 2x^2 - xy + 3y = 0 \ (⏏)$$

<u>a) Pierre de Fermat a jeho postup:</u>

Budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladu. Převedeme členy, které neobsahují neznámou *x* na pravou stranu.

$$1)\ x^2 + 4xy = 2$$

$$2)\ 2x^2 - xy = -3y$$

Levou stranu obou rovnic vydělíme výrazy na jejich levých stranách.

$$1)\ \frac{x^2 + 4xy}{2} = 1$$

$$2)\ \frac{2x^2 - xy}{-3y} = 1$$

Následně je můžeme srovnat.

$$3)\ \frac{x^2 + 4xy}{2} = \frac{2x^2 - xy}{-3y}$$

Upravíme rovnici a vyjádříme si neznámou *x*.

$$3)\ x = \frac{2y - 12y^2}{3y + 4}$$

Dosadíme do první rovnice.

$$\left(\frac{2y - 12y^2}{3y + 4}\right)^2 + 4y\left(\frac{2y - 12y^2}{3y + 4}\right) = 2$$

Když jí upravíme, dostaneme tvar.

$$-216y^3 + 18y^2 - 48y - 32 = 0$$

Po zkrácení (– 2) bychom dostali rovnici: $108y^3 - 9y^2 + 24y + 16 = 0$, to znamená, že nadbytečným členem je číslo **(– 2)** podle postupu Fermata.

<u>b) Isaac Newton a jeho postup:</u>

Využijeme první pravidlo úpravy podle Newtona jako v příkladu č. 4.1. Vypíšeme si jednotlivé koeficienty z rovnic.

$$a = 1, b = 4y, c = -2, f = 2, g = -y, h = 3y$$

Dosadíme do tvaru rovnice: $(ah - bg - 2cf)ah + (bh - cg)bf + (ag^2 + cf^2)c = 0$.

$$(3y + 4y^2 + 8)3y + (12y^2 - 2y)8y + (y^2 - 8)(-2) = 0$$

Po úpravě dostaneme výslednou rovnici.

$$108y^3 - 9y^2 + 24y + 16 = 0$$

c) Leonhard Euler a jeho postup:

Budeme postupovat stejně jako v příkladu č. 4.1, abychom dostali dvě lineární rovnice.

$$1)\ x^2 + 4yx - 2 = 0$$

$$2)\ 2x^2 - yx + 3y = 0$$

$$1)\ (12y^2 - 2y) + (3y + 4)x = 0$$

$$2)\ (-4 - 3y) + (8y + y)x = 0$$

Soustavu dvou rovnic o jedné neznámé převedeme na rovnici, kde už neznámá *x* není obsažena.

$$(12y^2 - 2y)(9y) + (3y + 4)^2 = 0$$

Výsledná rovnice má tvar.

$$108y^3 - 9y^2 + 24y + 16 = 0$$

d) Étienne Bézout a jeho postup:

První rovnici (∓) vynásobíme číslem dva, druhou rovnici jednotkou a druhou rovnici odečteme od první.

$$3)\ 9xy - 3y - 4 = 0$$

Opakujeme postup jen s tím, že první rovnici vynásobíme výrazem 2*x* – *y* a druhou rovnici výrazem *x* + 4*y*.

$$4)\ (-4 - 3y)x + 12y - 12y^2 = 0$$

Rovnice č. 3) a 4) budeme počítat pomocí determinantu.

$$\begin{vmatrix} 9y & (-3y - 4) \\ (-4 - 3y) & (12y - 12y^2) \end{vmatrix} = 0$$

Po úpravě dostaneme výslednou rovnici.

$$108y^3 - 9y^2 + 24y + 16 = 0$$

Podle výsledků nám vyšlo, že nadbytečným členem je **(– 2)** u Pierra de Fermata. Můžeme říci, že přidáním neznámé *y* do soustavy dvou rovnic, které jsou stejného stupně v neznámé *x*, se nám výsledky nezměnily. Ostatní postupy jako v příkladu č. 4.1 vyšly stejně bez nadbytečných faktorů.

Příklad č. 4.3: Ze soustavy dvou rovnice o dvou neznámých *x* a *y*, eliminujte neznámou *x*.

$$1)\ x^3 + 2x^2y - x + 3 = 0\ (☊)$$

$$2)\ x^2 + y^2x - 2y = 0\ (∫)$$

V tomto případě se jedná o rovnice, kde jedna je ve třetím stupni a druhá ve stupni druhém u neznámé *x*.

a) Pierre de Fermat a jeho postup:

Jelikož nejsou rovnice ve stejném stupni, budeme postupovat jinak. Upravíme si rovnice a vytvoříme poměry mezi nimi.

$$1)\ x^3 + 2x^2y - x = -3$$

$$2)\ x^2 + y^2x = 2y$$

$$1)\ x^3 + 2x^2y - x \quad \boldsymbol{k} \quad -3$$

$$2)\ x^2 + y^2x \quad \boldsymbol{k} \quad 2y$$

Vytvoříme novou rovnici pomocí poměrů, které jsme si připravili.

$$3)\ (x^3 + 2x^2y - x)2y = (x^2 + y^2x)(-3)$$

Po úpravách dostaneme.

$$3)\ -2y + 3y^2 = -3x - 2yx^2 - 4xy^2$$

Tato rovnice je už ve druhém stupni vzhledem k neznámé *x*. Využijeme novou třetí rovnici a druhou rovnici (⎍) ze zadání a budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladu u postupu Fermata. Pomocí úprav, kde rovnice bude mít tvar lineární, si vyjádříme neznámou *x*.

$$4)\ x = \frac{3y^4 + 6y^3 + 6y}{-7y^2 + 2y}$$

Dosadíme do druhé rovnice (⎍) za neznámou *x* a pomocí úprav dostáváme výslednou rovnici ve tvaru.

$$-12y^8 + 48y^6 - 104y^5 + 140y^4 - 8y^3 + 36y^2 = 0$$

V tomto příkladu je nadbytečným členem **($-$ 4$\boldsymbol{y^2}$)**, protože jím můžeme ještě rovnici zkrátit a dostaneme: $3y^6 - 12y^4 + 26y^3 - 35y^2 + 2y - 9 = 0$.

b) Isaac Newton a jeho postup:

V tomto případě použijeme druhé pravidlo podle Newtona. Rovnice, na kterou budeme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých převádět, má tvar: $(ah - bg - 2cf)ah^2 + (bh - cg - 2df)bfh + (ch - dg)(ag^2 + cf^2) + (3agh + bg^2 + df^2)df = 0$.

Vypíšeme si znovu jednotlivé koeficienty z první (⌓) i z druhé (⎍) rovnice a dosadíme.

$$a = 1, b = 2y, c = -1, d = 3, f = 1, g = y^2, h = -2y$$

$$(-2y - 2y^3 + 2)4y^2 + (-3y^2 + y^2 - 6)(-4y^2) + (2y - 3y^2)(y^4 - 1) + (-6y^3 + 2y^5 + 3).3 = 0$$

Rovnici upravíme a dostáváme výsledný rezultant, který neobsahuje neznámou *x*.

$$3y^6 - 12y^4 + 26y^3 - 35y^2 + 2y - 9 = 0$$

c) Leonhard Euler a jeho postup:

Abychom mohli využít Eulerova postupu, musíme rovnice ((☊), (ʃ)) upravit. První rovnici vynásobíme výrazem (– 2*y*) a druhou rovnici vynásobíme číslem tři.

$$1)\ -2yx^3 - 4x^2y^2 + 2xy - 6y = 0$$

$$2)\ 3x^2 + 3y^2x - 6y = 0$$

Rovnice od sebe odečteme, vydělíme neznámou *x* a dostaneme rovnici.

$$3)\ \ -2yx^2 + (-4y^2 - 3)x + (2y - 3y^2) = 0$$

Rovnici (ʃ) a novou třetí rovnici máme ve stejném stupni a můžeme už použít Eulerovu metodu.

$$2)\ x^2 + y^2x - 2y = 0$$

$$3)\ \ -2yx^2 + (-4y^2 - 3)x + (2y - 3y^2) = 0$$

$$2)\ (-6y^3 - 3y^4 - 6y) + (2y - 7y^2)x = 0$$

$$3)\ (7y^2 - 2y) + (-2y^3 + 4y^2 + 3)x = 0$$

Následně převedeme na jednu rovnici, kde neznámá *x* už není.

$$(-6y^3 - 3y^4 - 6y)(-2y^3 + 4y^2 + 3) + (2y - 7y^2)^2 = 0$$

Po úpravách dostaneme rovnici.

$$6y^7 - 24y^5 + 52y^4 - 70y^3 + 4y^2 - 18y = 0$$

Nyní bychom mohli rovnici vydělit výrazem (2*y*) a dostaneme: $3y^6 - 12y^4 + 26y^3 - 35y^2 + 2y - 9 = 0$. Postupem podle Eulera dostáváme tedy nadbytečný člen **(2*y*)**.

d) Étienne Bézout a jeho postup:

První rovnici (☊) nenásobíme a necháme jí ve stejném tvaru, ale druhou rovnici (ʃ) vynásobíme písmenem *x* a navzájem je od sebe odečteme.

$$3)\ (2y - y^2)x^2 + (-1 + 2y)x + 3 = 0$$

Nyní první rovnici vynásobíme výrazem $x + y^2$ a druhou rovnici výrazem $x^2 + 2yx$, znovu odečteme rovnice od sebe a dostaneme.

$$4)\ (-1 + 2y)x^2 + (3y^2 + 3)x + 3y^2 = 0$$

První rovnici (☊) vynásobíme výrazem $x^2 + y^2x - 2y$ a druhou rovnici (ʃ) výrazem $x^3 + 2x^2y - x$ a odečteme je od sebe.

$$5)\ x^2 + y^2x - 2y = 0$$

Takto tři připravené kvadratické rovnice můžeme spočítat pomocí determinantu.

$$\begin{vmatrix} (2y - y^2) & (-1 + 2y) & 3 \\ (-1 + 2y) & (3y^2 + 3) & 3y^2 \\ 1 & y^2 & -2y \end{vmatrix} = 0$$

Konečná rovnice nám vyjde v následujícím tvaru.

$$3y^6 - 12y^4 + 26y^3 - 35y^2 + 2y - 9 = 0$$

V soustavě dvou rovnic o dvou neznámých x a y, kde jedna rovnice je v jiném stupni nám opět vyšel nadbytečný faktor u Fermata **(– 4$\boldsymbol{y^2}$)**, ale nově i u postupu podle Eulera **(2$\boldsymbol{y}$)**. O rovnicích, které jsou každá jiného stupně, můžeme říci, že i Eulerova metoda přináší nadbytečné členy. Stupeň rezultantu je vysoký a postupy při řešení této soustavy jsou komplikovanější. Newton má postup díky pravidlům, která zavedl daleko kratší a nejméně náročné.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s eliminačními metodami z historického pohledu a ukázat postupy, se kterými se běžně nesetkáváme při práci se soustavou rovnic.

V první kapitole ukazujeme na příkladech nejčastěji používané metody v současnosti, mezi které patří sčítací a substituční metoda. Dále jsme ukázali, že některé soustavy rovnic můžeme řešit pomocí matic.

V další části práce jsme zkoumali jednotlivé eliminační metody od 17. století. Začali jsme prvním známým matematikem, který se úpravám rovnic věnoval. Byl jím Pierre de Fermat, který soustavy dvou rovnic řešil pomocí eliminace jedné neznámé a tím dospěl k jedné rovnici o jedné neznámé. Johannes Hudde byl dalším matematikem, kterému jsme se věnovali. Způsoby eliminace neznámých z rovnic využil k hledání největšího společného dělitele. Podobné metody jako Fermat použil i Isaac Newton, který snižoval stupně rovnic od vyšších k nižším. Myslím si, že důležitým počinem v jeho práci bylo nalezení čtyř pravidel, podle kterých můžeme převést soustavu dvou rovnic o dvou neznámých na rovnici o jedné neznámé. Poslední osobností v této kapitole je Gottfried Wilhelm Leibniz, který neznámé ze soustavy dvou rovnic vyššího stupně v eliminované neznámé převádí na výpočet determinantu matice soustavy lineárních rovnic.

V předposlední kapitole jsme se zaměřili na práci Leonharda Eulera a Étienna Bézouta, kteří upravovali soustavy dvou rovnic různých stupňů na soustavu lineárních rovnic. Každý z nich využívá jiných postupů k jejímu nalezení. Zvlášť metody, které využívá Bézout jsou velice zajímavé.

V poslední části srovnáváme eliminační metody Fermata, Newtona, Eulera a Bézouta na konkrétních příkladech a zjišťujeme, zda výsledky jsou pro všechny postupy stejné či nikoliv.

Eliminačními metodami se v 18. století rovněž zabývali například G. Cramer, J-L. Lagrange nebo A-T Vandermonde, kteří se věnovali stejnému problému jako Euler a Bézout. V 19. století nemůžeme opomenout taková jména spojená s eliminačními postupy, jako byli J. J. Sylvester či C. G. J. Jacobi a F. S. Macaulay či W. Gröbner ve 20. století.

Práce byla psaná s cílem získat nové poznatky v řešení soustavy rovnic. Překvapilo mě, jakými způsoby došli k řešení matematici již v 17. a 18. století. I z těchto postupů můžeme dnes stále čerpat, a proto je moje práce i přínosem pro ostatní čtenáře.

Resumé

This work is devoted to elimination methods and their development during the seventeenth and the eighteenth century. It is described how to modify system of equations and how to eliminate the unknown from the equations.

In the first part are covered modifications on examples which are known and most used nowadays. Another part talks about elimination methods in the seventeenth century. There are shown steps of Pierre de Fermat, Isaac Newton, Johannes Hudde and Gottfried Wilhelm Leibniz. The third chapter deals with methods of Leonhard Euler and Étienne Bézout. For better understanding examples are stated bellows every theory. The last part compares methods of Fermat, Newton, Euler and Bézout on examples and discovers if each method leads to the same result.

Seznam literatury

[1] ALFONSI, Liliane. Étienne Bézout : Analyse algébrique au siècle des Lumières. *Rev. Hist. Math* [online]. 2008, **14**(2), 211-287 [cit. 2016-04-11]. Dostupné z: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0910/0910.3641.pdf

[2] BASTL, Bohumír. *Aplikace geometrie 2: Pomocný učební text. Plzeň*, 2007.

[3] BELAVAL, Yvon. Gottfried Wilhelm Leibniz. In: *Encyclopædia Britannica* [online]. 2016 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://www.britannica.com/biography/Gottfried-Wilhelm-Leibniz

[4] BÉZOUT, É. Cours de mathématiques à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine. *Gallica The Bibliothèque nationale de France* [online]. Paris, 1766 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6104150x.r=Bezout%2C%20%C3%89tienne

[5] BÉZOUT, E.: Recherches sur le degree des equations resultantes de l'evanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces equations. *Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences* [online]. 1764, 288–338 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=K9H1kjz2U4QC&pg=PA288&lpg=PA288&dq=%22Recherches+sur+le+Degr%C3%A9+des+%C3%89quations+r%C3%A9sultantes+de+l'Evanouissement+des+Inconnues%22&source=bl&ots=IvxzfH5mzy&sig=46lowe-zWy0pTzL6EVD8URfggFc&hl=cs&sa=X&ved=0ahUKEwj7zpPahOzLAhWidpoKHXPdCFsQ6AEIGjAB#v=onepage&q=%22Recherches%20sur%20le%20Degr%C3%A9%20d es%20%C3%89quations%20r%C3%A9sultantes%20de%20l'Evanouissement%20des%20Inconnues%22&f=false

[6] BÉZOUT, É.: Théorie générale des équations algébriques.Paris. *Gallica The Bibliothèque nationale de France* [online]. 1779 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k106053p.r=B%C3%A9zout

[7] BOYER, Carl B. Leonhard Euler. In: *Encyclopædia Britannica* [online]. 2016 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://www.britannica.com/biography/Leonhard-Euler

[8] BOYER, Carl B. Pierre de Fermat. In: *Encyclopædia Britannica* [online]. 2016 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://www.britannica.com/biography/Pierre-de-Fermat

[9] EULER, Leonhard. Caput XIV. De curvatura linearum curvarum. In: *Introductio in analysin infinitorum* [online]. 1748 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://www.e-rara.ch/zut/content/structure/2447569

[10] EULER, Leonhard. Demonstration sur le nombre des points, ou deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper. *Memoires de l'academie des sciences de Berlin*. 1750, 4, 234-248.

[11] EULER, Leonhard. Nouvelle methode d'eliminer les quantites inconnues des equations. *Memoires de l'academie des sciences de Berlin*. 1766, 20, 91-104.

[12] GERICKE, Helmuth. *Mathematik im Abendland: von den römischen Feldmessern bis zu Descartes*. New York: Springer, 1990. ISBN 03-875-1206-3.

[13] HUDDE, J., De reductione aequationum. In Descartes, R., Géométrie. *Gallica The Bibliothèque nationale de France* [online]. 1695, 401-516 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k57489c.r=De%20reductione%20aequationum

[14] Johannes Hudde. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. 2001- [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Hudde

[15] KLINE, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times: von den römischen Feldmessern bis zu Descartes*. New York: Oxford University Press, 1972. ISBN 01-950-1496-0.

[16] KNOBLOCH, Eberhard. Unbekannte Studien von Leibniz zur Eliminations - und Explikationstheorie. *Archive for History of Exact Sciences*. 1974, **12**(2), 142–173.

[17] KNOBLOCH, Eberhard. Déterminants et élimination chez Leibniz / Determinants and elimination in Leibniz. *Revue d'histoire des sciences* [online]. 2001, **54**(2), 143-164 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://www.persee.fr/docAsPDF/rhs_0151-4105_2001_num_54_2_2116.pdf

[18] NEWTON, Isaac. Universal Arithmetic. In: *Mathematics and Mathematical Astronomy* [online]. 1720 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://www.wilbourhall.org/pdfs/newton/UniversalArithmetick1720EnglishWH.pdf

[19] O'CONNOR, John Joseph a Edmund Frederick ROBERTSON. Étienne Bézout. In: *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. 2001 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bezout.html

[20] O'CONNOR, John Joseph a Edmund Frederick ROBERTSON. Johann van Waveren Hudde. In: *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. 2008 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hudde.html

[21] O'CONNOR, John Joseph a Edmund Frederick ROBERTSON. Leonhard Euler. In: *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. 1998 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html

[22] Pierre de Fermat, A history of light: Euvres de Fermat. *Larouchepac* [online]. 2015 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://science.larouchepac.com/fermat/Oeuvres_de_Fermat%201.pdf

[23] PENCHÈVRE, Erwan. L’élimination en algèbre aux XVIIe et XVIIIe siècles. *Historia scientiarum* [online]. 2004, **14**(2), 101-117 [cit. 2016-04-11]. Dostupné z: http://images.math.cnrs.fr/IMG/pdf/penchevre-04-elimination.pdf

[24] PODHÁJSKÝ, Radek. *Maticové metody řešení soustav nelineárních algebraických rovnic*. Plzeň, 2005. Diplomová práce.

[25] REHÁKOVÁ, Hana. *Soustavy polynomiálních rovnic se dvěma neznámými*. Plzeň, 2014. Bakalářská práce.

[26] SALMOND, George. *Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen*. Leipzig: B. G. Teubner. 1877.

[27] SERFATI, Michel. Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz / Mathematics and symbolic thought in Leibniz. *Revue d'histoire des sciences* [online]. 2001, 54(2), 165-222 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://www.persee.fr/docAsPDF/rhs_0151-4105_2001_num_54_2_2117.pdf

[28] UHROVÁ, Veronika. *Úlohy vedoucí na soustavy polynomiálních rovnic a metody jejich řešení v dějinách evropské matematiky*. Plzeň, 2013. Diplomová práce.

[29] Viletněr, G. *Istorija matěmatiky ot Děkarta do serediny XIX. stoletija. Gosudarstvěnnoje izdatělstvo těchniko-těoretičeskoj literatury*. Moskva: Izdatělstvo fiziko – matěmatičeskoj litěratury, 1960.

[30] WESTFALL, Richard S. Sir Isaac Newton. In: *Encyclopædia Britannica* [online]. 2016 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://www.britannica.com/biography/Isaac-Newton

[31] WIMMER, Harald K., On the History of the Bezoutian and the Resultant Matrix. *Linear Algebra and its Applications*. 1990, 128, 27–34.

Seznam obrázků