ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ANALYTICKÉ GEOMETRII

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michaela Neužilová

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň, 2016

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 28. června 2016

....

vlastnoruční podpis

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce Mgr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a čas, který mi věnoval.

Zde se nachází originál zadání bakalářské práce.

Obsah

Úvod

Jak již z názvu vyplývá, tato práce se zaměřuje na shodná zaměření a jejich analytické vyjádření. Jde tedy o zobrazení v eukleidovském prostoru E_n.

Shodná zobrazení jsou zobrazení, která jsou založena na zobrazování bodů (vzorů) na nové body (obrazy).

S pojmem shodné zobrazení se člověk setká již na základní škole, ale tam se jedná pouze o řešení konstrukčních úloh při rýsování. Později se s tímto pojmem člověk opět setká na střední škole, ale i tam se jedná spíše o konstrukční úlohy než o samotné početní příklady. Teprve až na vysoké škole se člověk dostane spíše k početním příkladům než ke konstrukčním úlohám. A právě tady se člověk setkává se shodnými zobrazeními v analytické geometrii. Ujasňuje si získané poznatky z předchozích let a získává mnoho dalších užitečných poznatků.

Ve své práci se snažím sepsat ucelený text, který by obsahoval informace o shodných zobrazeních v analytické geometrii, jejich analytické vyjádření v rovině a prostoru, rozdělení na přímou a nepřímou shodnost a doplněný o ilustrativní příklady.

Pro větší přehlednost je práce rozdělena do několika částí, ve kterých je definována shodnost, grupa transformací, vyjádření shodnosti v eukleidovské rovině E_2 a v eukleidovském prostoru E_3 a jednotlivá shodná zobrazení.

V průběhu celé práce jsem se snažila u příkladů uvádět návod, jak postupovat při výpočtu, aby bylo snadnější pochopit danou problematiku.

Veškeré definice a věty jsem převzala doslovně nebo s menšími úpravami tak, aby odpovídaly pojmu shodné zobrazení, ze zdrojů, které jsou uvedeny v závěru práce v seznamu použité literatury.

Shodná zobrazení

Než si vysvětlíme, co to vlastně shodné zobrazí je, je potřeba, abychom si připomněli, že se budeme pohybovat v eukleidovském prostoru E_n a připomenuli si, co to vlastně eukleidovský prostor je.

Eukleidovským prostorem rozumíme afinní prostor, v jehož vektorovém zaměření je definován skalární součin dvou vektorů. Pomocí skalárního součinu lze definovat vzdálenost dvou bodů

$$|XY| = |y-x| = \sqrt{(y-x)^2}\ .$$

A nyní už se můžeme začít věnovat tomu, co jsou to shodná zobrazení.

Definice 1.1

Zobrazení Z v prostoru E_n je shodné zobrazení (stručněji shodnost, resp. izometrie), právě tehdy, když pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X′, Y′, kde X′= Z(X) a Y′= Z(Y) platí |X′Y′| = |XY|.

Věta 1.1

Každé shodné zobrazení je prosté.

Důkaz.

Pro libovolné dva body B, C ∈ E_n takové, že $B \neq C$ je $|BC| \neq 0$, potom ale

$$|BC| = |f(B)\, f(C)| \neq 0, \text{ a tedy } f(B) \neq f(C).$$

Z definice je tedy zřejmé, že zúžení shodného zobrazení na podprostor eukleidovského prostoru je opět shodné zobrazení. □

Věta 1.2

Každé shodné zobrazení je afinní zobrazení, tj. tři různé kolineární body zobrazí na tři různé kolineární body a zachová jejich dělící poměr.

Důkaz

Nechť jsou dány libovolné tři různé kolineární body B, C, D ∈ En takové, že $0 > \lambda = (D; B, C)$, což znamená, že bod D leží mezi body B, C. Potom $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{CD}$ a tedy $|BD| = |\lambda|\ |CD|$. Protože D leží mezi body B, C, potom je tedy $|BD| + |DC| = |BC|$ a pro shodné zobrazení f dostaneme $|f(B)\, f(D)| + |f(D)\, f(C)| = |f(B)\, f(C)|$, to ale znamená, že body f(B), f(C), f(D) jsou kolineární a f(D) leží mezi body f(B), f(C), z čehož plyne, že také dělící poměr $\lambda' = (f(D); f(B), f(C))$ je záporné číslo. Dále také platí

$\overrightarrow{f(B)f(D)} = \lambda' \overrightarrow{f(C)f(D)}$, a tedy $|f(B)f(D)| = |\lambda'||f(C)f(\mathrm{D})|$. Z rovností $|f(B)f(D)| = |BD|$ a $|f(C)f(D)| = |CD|$ tak dostaneme $|\lambda| = |\lambda'|$ a protože jsou obě hodnoty záporné je $\lambda = \lambda'$. □

Díky těmto větám jsme zjistily, že shodná zobrazení mají vlastnosti afinních zobrazení. Např. zobrazují podprostory na jiné podprostory a přitom zachovávají jejich rovnoběžnost. Protože je shodné zobrazení také prosté, je n ≤ m. Ke shodnému zobrazení dále můžeme definovat asociované lineární zobrazení předpisem $\varphi_f(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{f(X)f(Y)}$.

Pomocná věta 1.3

Asociované lineární zobrazení shodného zobrazení zachovává velikost vektorů, což znamená, že pro každý vektor u ∈ Z(E_n) platí $\|\varphi_f(u)\| = \|u\|$.

Důkaz.

Nechť $u = \overrightarrow{AB}$, potom máme $\|\varphi_f(u)\| = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = |f(A)f(B)| = |AB| = \|u\|$.□

Věta 1.4

Asociované lineární zobrazení shodného zobrazení zachovává skalární součin vektorů, tj. pro všechny vektory u, v ∈ Z(E_n) platí $(\varphi_f(\mathrm{u}), \varphi_f(v)) = (u, v)$, což znamená, že φ_f je ortogonální lineární zobrazení z Z(E_n) do Z(E'_m).

Důkaz

Z vlastností skalárního součinu dostáváme $(u+v, u+v) = (u,u) + 2(u,v) + (v,v)$,

$$\text{tj.}\quad 2(u,v) = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 .$$

Aplikací této rovnosti na vektory $\varphi_f(u), \varphi_f(\mathrm{v})$ a z Pomocné věty 3 dostaneme

$$\begin{aligned} 2(\varphi_f(u), \varphi_f(v)) &= \|\varphi_f(u) + \varphi_f(v)\|^2 - \|\varphi_f(u)\|^2 - \|\varphi_f(v)\|^2 \\ &= \|\varphi_f(u+v)\|^2 - \|\varphi_f(u)\|^2 - \|\varphi_f(v)\|^2 \\ &= \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \\ &= 2(u,v). \ \square \end{aligned}$$

Věta 1.5

Nechť je shodnost s asociovaným homomorfismem[1] φ v prostoru E_n a $\langle \vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n} \rangle$ je ortonormální báze zaměření prostoru E_n. Potom je ortonormální i báze $\langle \varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \ldots, \varphi(\vec{e_n}) \rangle$.

Důkaz

Báze $\langle \vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n} \rangle$ je ortonormální. Což znamená, že pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí $\vec{e_i}\vec{e_j} = \delta_{ij}$, kde $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Podle Věty 4 zachovává asociované zobrazení φ skalární součin, a proto i $\varphi\vec{e_i}\varphi\vec{e_j} = \delta_{ij}$. Z toho plyne, že báze $\langle \varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \ldots, \varphi(\vec{e_n}) \rangle$ je také ortonormální. □

Z těchto vlastností vyplývají další věty

Věta 1.6

Shodná transformace je jednoznačně určena dvojicí odpovídajících si bodů (tj. vzoru a obrazu) a asociovaným zobrazením, které zachovává skalární součin.

Věta 1.7 (O určení shodného zobrazení)

Nechť je v prostoru E_n dáno $n+1$ lineárně nezávislých bodů $M_0, M_1, \ldots, M_n$ a $n+1$ bodů $M'_0, M'_1, \ldots, M'_n$. Nutnou i postačující podmínkou pro existenci shodnosti f, která zobrazuje body $M_0, M_1, \ldots, M_n$ postupně po řadě na body $M'_0, M'_1, \ldots, M'_n$ je platností vztahů $|M_iM_j| = |M'_iM'_j|$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pokud jsou tyto vztahy splněny, pak existuje právě jedno zobrazení f s uvedenými vlastnostmi.

[1] Asociovaný homomorfismus je lineární zobrazení φ, které zobrazuje zaměření V prostoru A do zaměření V' prostoru A' : $\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(\mathrm{Y}) - f(X)$, kde X, Y jsou body z A, $\vec{u} \in V$, $f(X)$, $f(\mathrm{Y})$ jsou body z A' a $\varphi(\vec{u}) \in V'$.

Analytické vyjádření shodného zobrazení

Věta 2.1

Každé shodné zobrazení v eukleidovském prostoru E_n je při zvolené kartézské soustavě souřadnic jednoznačně určeno rovnicemi

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \text{ , kde } \quad i = 1, 2, \ldots, n, \text{ a přičemž } \sum_{r=1}^{n} a_{ri} a_{rj} = \delta_{ij}$$

Každé zobrazení v eukleidovském prostoru E_n, které je ve zvolené kartézské soustavě souřadnic takto vyjádřeno, je shodným zobrazením.

Důkaz

Mějme kartézskou soustavu určenou repérem[2] $\left\langle P, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n} \right\rangle$, pak $\vec{e_i}\vec{e_j} = \delta_{ij}$ a $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Afinita f je shodností v E_n právě tehdy, když asociované zobrazení zachovává skalární součin, specielně $\varphi(\vec{e_i})\varphi(\vec{e_j}) = \delta_{ij}$. Nyní položme $\varphi(\vec{e_j}) = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} \vec{e_s}$, potom $\delta_{ij} = \varphi(\vec{e_i})\varphi(\vec{e_j}) = \sum_{r=1}^{n} a_{ri}\vec{e_r} \sum_{s=1}^{n} a_{sj}\vec{e_s} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{ri}a_{sj}\vec{e_r}\vec{e_s} = \sum_{r=1}^{n} a_{ri}a_{rj}$.

Pokud obrátíme postup, dokážeme druhou část věty. □

Analytické vyjádření shodného zobrazení maticovým zápisem je ve tvaru

$$X' = A.X + B,$$

kde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, kde dále prvky matice A splňují vztahy $\sum_{r=1}^{n} a_{ri}a_{rj} = \delta_{ij}$. Každou takovou matici, jejíž prvky splňují tento vztah, nazveme ortogonální maticí (přesnější, avšak méně používanější název je ortonormální matice). Nyní si snadno ověříme, že matice A^{-1}, která je inverzní k ortogonální matici A, je rovna transponované matici A^T, tj. matici, která vznikne záměnou řádků za sloupce původní matice A. Kdy platí:

$$A^T A = AA^T = E,$$

[2] Repér je uspořádaná $(n+1)-tice$ $\langle O; e_1, \ldots, e_n \rangle$, kde $O \in A_n$ je pevně zvolený bod a $\{e_1, \ldots e_n\}$ je báze prostoru V.

přičemž z lineární algebry už víme, že E je jednotková matice. Dále pak asociovaný homomorfismus φ daného afinního zobrazení má stejnou matici A. Potom platí:

$$U' = AU,$$

kde $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ a $U' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix}$.

Příklad 1

Rozhodněte, zda je shodnost zobrazení f určené v kartézské soustavě souřadnic prostoru E_3 zadaná rovnicemi

$$x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 7$$

$$y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 4$$

$$z' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1.$$

Řešení: Vytvoříme si matice A a A^T a dokážeme, že platí vztah $AA^T = E$. Pokud bude tento vztah platit, znamená to, že se jedná o shodnost.

Pojďme tedy vytvořit matici A, kterou získáme tak, že do řádků matice sepíšeme koeficienty neznámých u jednotlivých rovnic, tedy matice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Stejným způsobem vytvoříme matici A^T, pouze s jednou změnou, tentokrát budeme koeficienty sepisovat do sloupců nikoli do řádků, tedy matice

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme dosazovat do vztahu $AA^T = E$.

$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Dokázali jsme, že $AA^T = E$,z čehož plyne, že se opravdu jedná o shodnost.

Shodné transformace

Shodná transformace eukleidovského prostoru E_n má analytické vyjádření

$$f : x' = Ax + b \text{ , kde } AA^T = E .$$

Dále pro každou ortogonální matici A platí vztah

$$\det(AA^T) = \det(A).\det(A^T) = (\det(A))^2 = \det(E) = 1 .$$

Díky tomu nastávají dva případy. Buď $\det(A) = +1$, a nebo $\det(A) = -1$. Z toho vyplývá, že shodnosti f zařazujeme mezi tzv. ekviafinity.

Shodnou transformaci nazveme přímou, je-li její determinant roven +1, tedy $\det(A) = +1$.

Přímá shodnost zachovává orientaci prostoru, to znamená, že každá báze zaměření prostoru a její obraz v asociovaném homomorfismu jsou souhlasně orientované.

Shodná transformace se nazývá nepřímá, je-li její determinant roven -1, tedy $\det(A) = -1$. Nepřímá shodnost mění orientaci v prostoru.

Příklad 2

Zobrazení f : $E_2 \longrightarrow E_3$ je dáno obrazy bodů P, A, B. Určete rovnice zobrazení a zjistěte, zda se jedná o shodné zobrazení. Co je $\mathrm{Im}(f)$?

$P = [0,0], A = [1,0], B = [0,1]$

$$P' = [1,3,-2], A' = \left[1, \frac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, \frac{-2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right], B' = \left[\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}, \frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}, \frac{-2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right]$$

Řešení:

Označme si, že

$x \in E_2, x' \in E_3$ $\qquad A' - P' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), B' - P' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

Dále si napíšeme rovnici zobrazení, která má tvar $f : x' = Ax + b$, kde A je matice $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ a dosadíme do rovnice. Tedy

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dále zobrazení je shodné pro $AA^T = E$, tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že rovnice obrazu E_2 má v E_3 parametrické vyjádření

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} s,$$

$$\mathrm{y} = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} t + \frac{1}{\sqrt{3}} s,$$

$$z = -2 + \frac{1}{\sqrt{2}} t - \frac{1}{\sqrt{3}} s.$$

Z první rovnice vyjádříme s, a dosadíme do zbývajících dvou rovnic, dostaneme

$s = \sqrt{3}(x-1)$ a

$\mathrm{y} = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} t + (x-1)$, $z = -2 + \frac{1}{\sqrt{2}} t - (x-1)$.

Vyloučením parametru t dostaneme $y - 3 - x + 1 = z + 2 + x - 1$.

Zjistili jsme, že se jedná o shodné zobrazení a obecné vyjádření $\mathrm{Im}(f)$ je tedy

$\rho \equiv 2x - y + z + 3 = 0$.

Dále platí, že když složíme dvě shodné transformace, $f: x' = Ax + b$, kde $(AA^T = \mathrm{E})$ a $\mathrm{g}: \mathrm{x}' = \mathrm{Cx} + \mathrm{d}$, kde $(\mathrm{CC}^T = E)$ vznikne shodná transformace $f \circ g: x' = (CA)x + (Cb + d)$, kde $(CA)(\mathrm{CA})^T = E$.

Inverzní zobrazení ke shodné transformaci $f: x' = Ax + b \ (AA^T = \mathrm{E})$ je shodná transformace, která má vyjádření $f^{-1}: x = A^{-1}x + (A^{-1}b)$, kde $A^{-1}(A^{-1})^T = E$.

Také existuje tzv. identita, což je shodná transformace, jejíž analytické vyjádření je $id_{E_n}: x' = Ex + o = x$.

Z těchto poznatků vyplývá, že množina všech shodných transformací prostoru E_n tvoří vzhledem k operaci skládání tzv. grupu shodností $\mathcal{G}_S$ (neboli eukleidovskou popř. izometrickou grupu). Přímé shodnosti potom tvoří tzv. podgrupu této grupy.

Grupa transformací

Definice 4.1

Nechť M je neprázdná množina (bodů) a T neprázdná množina transformací (bijekcí) f.

T je grupa transformací na M, jestliže jsou splněny následující podmínky:

$f \in T \Rightarrow f^{-1} \in T$

$fg \in T \Rightarrow g \circ f \in T$.

Příklad 3

A. Dokažte, že pro každou grupu G je $id \in G$.

Řešení: Z definice vyplývá, že G je neprázdná, což znamená, že existuje $f \in G$. Z toho plyne, že existuje i $f^{-1} \in G$. A podle $fg \in G$ je potom $id = f \circ f^{-1} \in G$.

B. Najděte všechny dvouprvkové podgrupy grupy $I_0[E_2]$, kde $I_0[E_2]$ je grupou všech izometrií, které zachovávají počátek.

Řešení: Víme, že každá dvouprvková grupa má tvar $\{id, f\}$, kde $f \neq id$. Protože podle $fg \in T \Rightarrow g \circ f \in T$ je $f^2 \in \{id, f\}$, nastává situace, že buď $f^2 = f$, nebo $f^2 = id$. Vztah $f^2 = f$ implikuje $f^2 = id$ a my dostáváme spor. Z čehož plyne, že f je nutně involuce.

V množině rotací existuje pouze jedna, která je involucí[3]. Jedná se o r_π, neboli o středovou souměrnost. V množině osových souměrností je každý prvek involucí. A tím jsou všechny možnosti zcela vyčerpány. Hledaná grupa je buďto $\{id, s_m\}$, kde m je libovolná přímka, která prochází počátkem, a nebo $\{id, r_\pi\}$.

Souměrnost podle nadroviny

Definice 5.1

Základní involutorní afinita v eukleidovském prostoru E_n, která má nadrovinu samodruhých bodů σ a směr afinity kolmý k této hadrovině se nazývá souměrnost podle nadroviny σ.

Nejprve si připomeňme, že v eukleidovském prostoru je možné rovnici nadroviny σ, která je určená normálovým vektorem $\vec{n}$ a bodem $M_0 \in \sigma$, zapsat ve tvaru:

$$\sigma : \left(X - M_0\right)\vec{n} = 0 .$$

Věta 5.1

Souměrnost podle nadroviny σ, která je určená v eukleidovském prostoru E_n normálovým vektorem $\vec{n}$ a bodem $M_0 \in \sigma$ má analytické vyjádření

$$X' = X - \frac{2\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}\left(\left(X - M_0\right).\vec{n}\right).$$

Věta 5.2

Souměrnost podle nadroviny $\sigma : \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$, má v dané kartézské soustavě souřadnic eukleidovského prostoru E_n analytické vyjádření

$$x'_k = x_k - \frac{2c_k}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\left(\sum_{j=1}^{3} c_j x_j + c_0\right), \text{ kde } k = 1, 2, ..., n .$$

Věta 5.3

Ke každé shodnosti f eukleidovského prostoru E_n existuje k souměrností podle nadrovin $f_1, f_2, ..., f_k$, kde $k \le n+1$, takových, že $f = f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_k$.

---

[3] Máme- li dva body A, B, pro které při daném zobrazení platí, že bod B je obrazem bodu A a současně je bod A obrazem bodu B tvoří involurorní dvojici. Zobrazení, které není identita a při kterém každý bod patří involutorní dvojici se nazývá involutorní zobrazení (zkráceně involuce).

Shodnosti v rovině

Shodná zobrazení v eukleidovské rovině E_2 jsou vyjádřena rovnicí $f: x' = Ax + b$. Přičemž z podmínky $AA^T = E$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

získáme vztahy

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 &= a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} &= 0 \end{aligned}.$$

Z rovnice $a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$ vyplývá, že existuje takový úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, že $a_{11} = \cos\varphi$ a $a_{12} = \sin\varphi$.

Je-li $\det(A) = +1$(jedná se o přímé shodnosti), pak vzhledem k tomu, že $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = +1$, vyplývá ze vztahu $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$ a ze vztahu $a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$, že $a_{12} = -\sin\varphi$ a $a_{22} = \cos\varphi$, tzn. $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A_\varphi^+$.

$$\begin{aligned} n &= (n_0, n_1, n_2) \\ n_0 &= -\frac{1}{2}\left(b_1 \sin\frac{\varphi}{2} - b_2 \cos\frac{\varphi}{2}\right) \\ n_1 &= \sin\frac{\varphi}{2} \\ n_2 &= -\cos\frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

Je-li $\det(A) = -1$(jedná se o nepřímé shodnosti), pak vzhledem k tomu, že $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -1$, vyplývá ze vztahu $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$ a ze vztahu $a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$, že $a_{12} = \sin\varphi$ a $a_{22} = -\cos\varphi$, tzn.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = A_\varphi^-.$$

Pro různé hodnoty $\varphi(0 \le \varphi < 2\pi)$ představují matice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A_\varphi^+ \text{ a } A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = A_\varphi^-$$

všechny možné ortonormální matice typu (2×2).

Přímé shodnosti jsou analyticky vyjádřeny

$$f : x' = A_\varphi^+ x + b\,,$$

kde A_φ^+ je matice ve tvaru $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ a soustava pro hledání samodružných bodů je

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Protože platí, že $\det(A - E) = (\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi = 2(1 - \cos\varphi)$, je zřejmé, že soustava má jediné řešení právě tehdy, když $\cos\varphi \neq 1$.

- Pokud je $\varphi = 0$, tzn. $\left(A_\varphi^+ = E\right)$ a $b = 0$, pak toto zobrazení nazveme identitou

  $id : x' = x$

- Pokud je $\varphi = 0$, tzn. $\left(A_\varphi^+ = E\right)$ a $b \neq 0$, pak toto zobrazení nazveme posunutím (translací) s vektorem posunutí $\vec{b}$

  $\mathcal{T} :\; x' = x + b$

- Pokud $\varphi \neq 0$ (tzn. existuje-li právě jeden samodružný bod[4] S), pak toto zobrazení nazveme otočením (rotací) kolem bodu S

$$s = -(A - E)^{-1} b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} \\ \dfrac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

  a úhlem otočení φ:

  $\mathcal{R}_{S,\varphi} :\; x' = A_\varphi^+ (x - s) + s$

- Pokud je specielně $\varphi = \pm\pi$, pak je zobrazení rotace středovou souměrností se středem S

$$x' = -x + 2s\,.$$

Nepřímé shodnosti jsou analyticky vyjádřeny

$$f : x' = A_\varphi^- x + b\,,$$

[4] Máme-li zobrazení f množiny A na množinu A', pak bod $S \in A \cap A'$ nazveme samodruhým bodem, pokud platí $f(S) = S$.

kde matice A_φ^- je ve tvaru $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ a soustava pro hledání samodružných bodů je

$\begin{pmatrix} \cos\varphi-1 & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Protože platí, že $\det(A-E) = (\cos\varphi-1).(-\cos\varphi-1) - \sin^2\varphi = 0$, je zřejmé, že soustava nemá nikdy pouze jedno řešení.

V rovině rozlišujeme následující typy nepřímých shodností:

- Pokud je $hod(A-E) = hod(A-E,b) = 1$, pak existuje přímka samodružných bodů o, která je v případě $\cos\varphi \neq 1$ (popř. $\cos\varphi = 1$) vyjádřena rovnicí

  $(\cos\varphi-1)x_1 + \sin\varphi x_2 + b_1 = 0$ (popř. $-2x_2 + b_2 = 0$);

  můžeme dokázat, že pro oba případy ($\cos\varphi \neq 1$ i pro $\cos\varphi = 1$) je má přímka o souřadnice $n = (n_0, n_1, n_2)$, kde

  $$\begin{aligned} n_0 &= -\frac{1}{2}\left(b_1 \sin\frac{\varphi}{2} - b_2 \cos\frac{\varphi}{2}\right) \\ n_1 &= \sin\frac{\varphi}{2} \\ n_2 &= -\cos\frac{\varphi}{2} \end{aligned} .$$

  Nepřímou shodnost zobrazení s přímkou samodružných bodů nazveme osovou souměrností $\mathcal{O}_o$ s osou o

- Pokud je $hod(A-E) = 1 \neq hod(A-E,b) = 2$, pak neexistuje žádný samodružný bod. Navíc ještě víme, že $hod(A_\varphi^2 - E, b) = 2$ právě tehdy, když

  $$b \neq m.\left(\sin\frac{\varphi}{2}, -\cos\frac{\varphi}{2}\right)^T.$$

  Nepřímou shodnost, která nemá samodružné body nazveme posunutou souměrností, neboli posunutým zrcadlením. Jedná se o složení osové souměrnosti $\mathcal{O}_o$: $x' = Ax + b'$ a translace $\mathcal{T}_u$: $x' = x + u$, kde $\vec{u} \parallel o$.

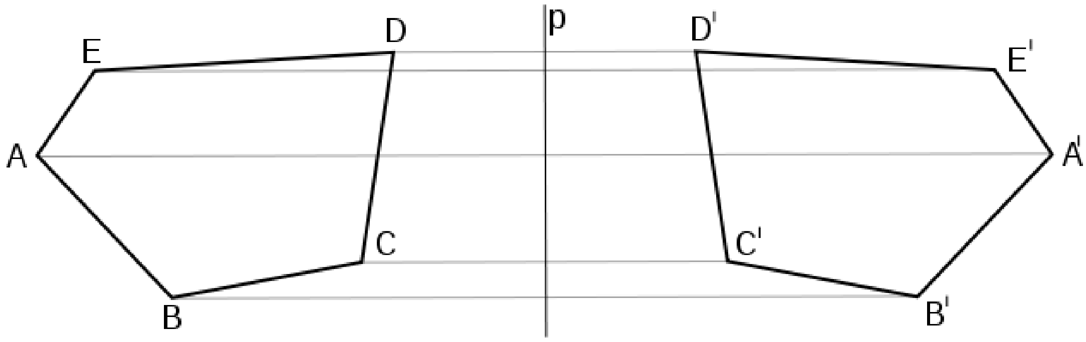
Analytická vyjádření shodných zobrazení v E_2

V eukleidovské rovině E_2 známe pět shodných transformací: osovou souměrnost, středovou souměrnost, otočení, posunutí a posunuté zrcadlení.

1. Osová souměrnost

Definice 7.1

Nechť je dána přímka o, která se nazývá osa souměrnosti. Potom pro obraz M' libovolného bodu M této přímky platí $M' \equiv M$. Ke každému bodu X, který náleží přímce o, sestrojíme obraz X' následujícím způsobem: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme jako X_0. Na polopřímce, která je opačná k polopřímce X_0X sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazveme osovou souměrností s osou o a je značeno $\mathcal{O}(o)$.



Obrázek 1: Osová souměrnost

Analytické vyjádření osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ v rovině:

Osová souměrnost s osou x:

$$x' = x$$
$$y' = -y$$

Osová souměrnost s osou y:

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

Ne vždy je možné osu souměrnosti výhodně umístit do jedné ze souřadnicových os. Proto existuje rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.

Osová souměrnost $\mathcal{O}(o)$ podle osy o s obecnou rovnicí $o: ax+by+c=0$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2+b^2}\left(ax+by+c\right)$$

$$y' = y - \frac{2b}{a^2+b^2}\left(ax+by+c\right)$$

Věta 7.1

Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.

Poznámky:

O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice souměrně sdružených bodů podle osy o.

Osová souměrnost je jedním z příkladů involuce (involutorního zobrazení).

Příklad 4

Bod A[1;3] zobrazte v osové souměrnosti dané přímkou p: x – 2y – 5 = 0.

Řešení: Máme zadanou přímku p: x – 2y – 5 = 0 a bod A, jehož souřadnice jsou $a_1 = 1$ a $a_2 = 3$. K této přímce vytvoříme kolmou přímku q, kterou vyjádříme pomocí parametru t. Tedy

$$q: \begin{array}{l} x = a_1 + at \\ y = a_2 + bt \end{array}$$, kde a, b jsou koeficienty neznámých přímky p.

Nyní dosadíme do rovnic jednotlivé složky. Tedy

$$\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \end{array}.$$

Průnikem přímek p, q (symbolicky $p \cap q$) nám vznikl bod S (symbolicky $S = p \cap q$). Pro tento bod platí, že pokud dosadíme vyjádření souřadnice x, y přímky q do rovnice přímky p, získáme hodnotu parametru t.

Tedy

$$(1+t) - 2.(3-2t) - 5 = 0$$

$$1 + t - 6 + 4t - 5 = 0$$

$$5t = 10$$

$$t = 2\ .$$

Pokud nyní dosadíme vyjádřený parametr t do vyjádření přímky q, získáme souřadnice bodu S, který vznikl jako průnik přímek p, q.

$$\begin{aligned} x &= 1+2 \\ y &= 3-2.2 \end{aligned},$$

z toho vyplývá, že bod S má souřadnice $S[3,-1]$.

Dále víme, že bod A' musí mít od bodu A dvojnásobnou hodnotu parametru t, tedy $t=4$. Z toho nám plyne, že po dosazení do vyjádření přímky q, získáme následující hodnoty

$$\begin{aligned} x &= 1+4=5 \\ y &= 3-2.4=-5 \end{aligned}$$

Tyto získané hodnoty jsou souřadnice bodu A'.

Tedy zobrazili jsme bod $A[1,3]$ na bod $A'[5,-5]$.

Příklad 5

Zobrazte bod $A[1,2]$ v osové souměrnosti určené přímkou $p: 2x-y+3=0$.

Řešení: Máme zadanou přímku $p: 2x-y+3=0$ a bod $A[1,2]$, jehož souřadnice jsou $a_1=1$ a $a_2=2$. K přímce $p: 2x-y+3=0$ vytvoříme kolmou přímku q, kterou vyjádříme pomocí parametru t. Tedy

$q: \begin{aligned} x &= a_1+at \\ y &= a_2+bt \end{aligned}$, kde a,b jsou koeficienty neznámých přímky p.

Nyní dosadíme do rovnic jednotlivé složky. Tedy

$$\begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= 2-t \end{aligned}$$

Průnikem přímek p, q (symbolicky $p \cap q$) nám vznikl bod S (symbolicky $S = p \cap q$). Pro tento bod platí, že pokud dosadíme vyjádření souřadnice x, y přímky q do rovnice přímky p, získáme hodnotu parametru t.

Tedy

$$\begin{aligned} (1+2t)-(2-t)+3 &= 0 \\ 1+2t-2+t+3 &= 0 \\ 3t+2 &= 0 \\ 3t &= -2 \\ t &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Pokud nyní dosadíme vyjádřený parametr t do vyjádření přímky q, získáme souřadnice bodu S, který vznikl jako průnik přímek p, q.

$$x = 1 - \frac{4}{3}$$
$$y = 2 + \frac{2}{3}$$

Z toho vyplývá, že bod S má souřadnice $S\left[-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right]$.

Dále víme, že bod A' musí mít od bodu A dvojnásobnou hodnotu parametru t, tedy $t = -\frac{4}{3}$. Z toho nám vyplývá, že po dosazení do vyjádření přímky q, získáme následující hodnoty

$$x = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}$$
$$y = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

Tyto získané hodnoty jsou souřadnice bodu A'.

Což znamená, že jsme v osové souměrnosti určené přímkou $p: 2x - y + 3 = 0$ zobrazily bod $A[1,2]$ na bod $A'\left[-\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right]$.

Příklad 6

V E_2 je dána souměrnost podle přímky $p: 3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.

Řešení: Máme zadanou přímku $p: 3x - 4y + 1 = 0$ a známe obecné vyjádření rovnic souměrnosti

$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax + by + c).$$

Z přímky p vyčteme jednotlivé koeficienty a, b, c, které jsou rovny

$$a = 3$$
$$b = -4$$
$$c = 1.$$

Tyto koeficienty dosadíme do rovnic

$$x' = x - \frac{2.3}{3^2 + (-4)^2}(3x - 4y + 1)$$

$$y' = y - \frac{2.(-4)}{3^2 + (-4)^2}(3x - 4y + 1).$$

Tím získáme rovnice souměrnosti

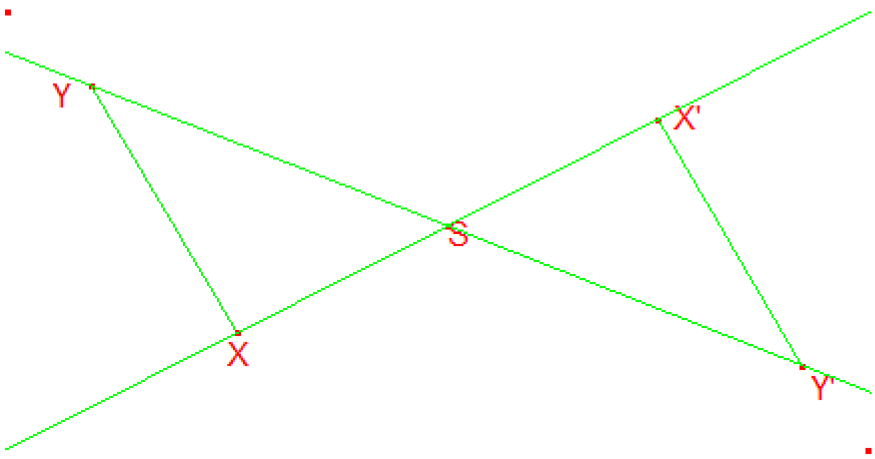
$$x' = x - \frac{6}{25}(3x - 4y + 1)$$

$$y' = y + \frac{8}{25}(3x - 4y + 1).$$

2. Středová souměrnost

Definice 7.2

Středová souměrnost se středem S je shodné zobrazení, které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' takový, že bod S je středem úsečky XX'. Toto zobrazení značíme $\mathcal{S}(S)$.



Obrázek 2: Středová souměrnost

Poznámka: Středovou souměrnost také můžeme chápat jako speciální případ rotace $\mathcal{R}(S,\alpha)$, kde $\alpha = \pi$, tzn. $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S,\pi)$.

Vlastnosti středové souměrnosti:

- Středovou souměrnost lze rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti S; jedna z os je volitelná.
- Středová souměrnost vznikne sloužením dvou libovolných osových souměrností, jejichž osy jsou na sebe kolmé (střed souměrnosti S odpovídá průsečíku těchto dvou os).
- Středová souměrnost je jednoznačně určena svým středem.
- Středová souměrnost je jedním z příkladů involuce (involutorního zobrazení).
- Středová souměrnost je přímou shodností.

- Středová souměrnost má jen jeden samodruhý bod, a to střed S, a všechny směry samodružné.

Věta 7.2

Ve středové souměrnosti podle středu S je obrazem každé přímky přímka, která je s ní rovnoběžná. Přímka procházející středem S je přímkou samodružnou.

Analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$ v rovině:

Souřadnice středu : $S=[s_1,s_2]$

$$x'=-x+2s_1$$
$$y'=-y+2s_2$$

Příklad 7

Napište rovnice středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$ se středem v bodě $S[-2,3]$.

Řešení: Máme zadaný bod $S[-2,3]$, jehož souřadnice jsou $s_1=-2$ a $s_2=3$. Dále známe rovnice vyjádření středové souměrnosti

$$x'=-x+2s_1$$
$$y'=-y+2s_2$$

Nyní stačí jen dosadit do rovnic souřadnice středu

$$x'=-x+2.(-2)$$
$$y'=-y+2.3$$

Tím získáme rovnice středové souměrnosti

$$x'=-x-4$$
$$y'=-y+6$$

Příklad 8

Napište rovnice středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$, která je určena vzorem $X[-1,3]$ a obrazem $X'[7,3]$.

Řešení: Máme zadaný bod $X[-1,3]$ (tj. vzor) a bod $X'[7,3]$(tj. obraz). Dále známe analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$, které je ve tvaru

$$x'=-x+2s_1$$
$$y'=-y+2s_2$$

Dále víme, že bod X má souřadnice $x=-1$ a $y=3$ a bod X' má souřadnice $x'=7$ a $y'=3$. Nyní můžeme jednotlivé souřadnice dosadit do rovnic. Tedy

$$7=1+2s_1$$
$$3=-3+2s_2$$

Vyjádřením souřadnic s_1 a s_2 získáme souřadnice středu $S[s_1,s_2]$. Tedy

$$s_1=3$$
$$s_2=3$$

Zjistily jsme, jaké souřadnice má střed $S[3,3]$

Nyní můžeme dosadit souřadnice středu do rovnic

$$x'=-x+2.3$$
$$y'=-y+2.3$$

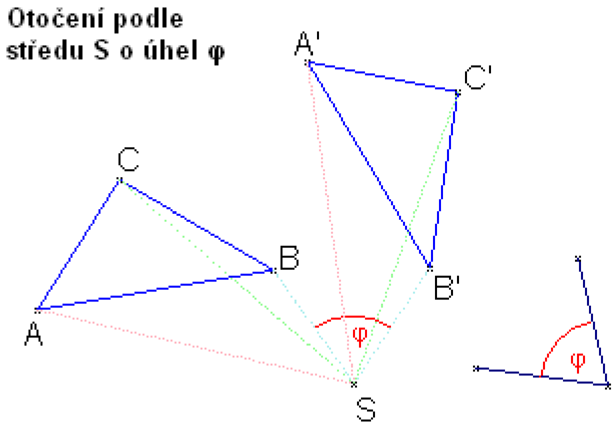
Po upravení získáme rovnice středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$

$$x'=-x+6$$
$$y'=-y+6$$

3. Otočení (rotace)

Definice 7.3

Otočení (neboli rotace) $\mathcal{R}(S,\alpha)$ v eukleidovské rovině E_2 kolem středu S o (orientovaný) úhel α je shodné zobrazení, při které, je obrazem bodu $A \neq S$ bod A', pro který platí $|SA|=|SA'|$ a velikost úhlu $\angle ASA'$ je α. Obrazem středu otočení S je opět bod S.



Obrázek 3: Otočení (Rotace)

Otočení (rotace) $\mathcal{R}(S,\alpha)$ se středem $S=[s_1,s_2]$:

$$x'=(x-s_1)\cos\alpha-(y-s_2)\sin\alpha+s_1$$

$$y'=(x-s_1)\sin\alpha+(y-s_2)\cos\alpha+s_2$$

Rovnice upravíme a získáme:

$$x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+s_1-s_1\cos\alpha+s_2\sin\alpha$$

$$y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+s_2-s_1\sin\alpha-s_2\cos\alpha$$

Příklad 9

Napište rovnice otočení se středem $S[1,-2]$ o úhel $\alpha=60^\circ$.

Řešení: Máme zadaný bod $S[1,-2]$, jehož souřadnice jsou $s_1=1$ a $s_2=-2$, dále známe úhel otočení $\alpha=60^\circ$. A známe analytické vyjádření otočení

$$x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+s_1-s_1\cos\alpha+s_2\sin\alpha$$

$$y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+s_2-s_1\sin\alpha-s_2\cos\alpha.$$

Nyní dosadíme do rovnic souřadnice středu a úhel otočení

$$x'=x\cos 60^\circ-y\sin 60^\circ+1-1\cos 60^\circ+(-2)\sin 60^\circ$$

$$y'=x\sin 60^\circ+y\cos 60^\circ+(-2)-1\sin 60^\circ-(-2)\cos 60^\circ.$$

Rovnice upravíme

$$x'=x\frac{1}{2}-y\frac{\sqrt{3}}{2}+1-1\frac{1}{2}-2\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y'=x\frac{\sqrt{3}}{2}+y\frac{1}{2}-2-1\frac{\sqrt{3}}{2}+2\frac{1}{2}$$

Získáme rovnice otočení

$$x'=\frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y+1-2\sqrt{3})$$

$$y'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y-2-\sqrt{3}).$$

Příklad 10

Určete souřadnice obrazu bodu $B[2,6]$ v otočení o úhel $\alpha=60^\circ$ kolem počátku.

Řešení: Máme zadaný bod $B[2,6]$ (vzor), úhel otočení $\alpha = 60°$ a známe souřadnice středu $S[0,0]$ (počátek). Budeme postupovat jako v předchozím příkladu.

Známe analytické vyjádření otočení

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha .$$

Víme, že bod B má souřadnice $x = 2$ a $y = 6$, souřadnice středu jsou $s_1 = 0$ a $s_2 = 0$ a úhel je $\alpha = 60°$. Nyní vše dosadíme do rovnic

$$x' = 2\cos 60^\circ - 6\sin 60^\circ + 0 - 0\cos 60^\circ + 0\sin 60^\circ$$

$$y' = 2\sin 60^\circ + 6\cos 60^\circ + 0 - 0\sin 60^\circ - 0\cos 60^\circ$$

Rovnice upravíme

$$x' = 2\frac{1}{2} - 6\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - 0\frac{1}{2} + 0\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y' = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\frac{1}{2} + 0 - 0\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\frac{1}{2}$$

A protože nula krát cokoli je nula, můžeme z rovnic vypustit všechny členy, které jsou nulou násobené a zároveň i přičtení nuly

$$x' = 2\frac{1}{2} - 6\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y' = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\frac{1}{2}$$

Teď už jen stačí vyjádřit x', y'

$$x' = 1 - 3\sqrt{3}$$

$$y' = \sqrt{3} + 3 .$$

Získali jsme souřadnice obrazu bodu $B[2,6]$, tj. bod $B'\left[1 - 3\sqrt{3}, \sqrt{3} + 3\right]$.

Příklad 11

Určete souřadnice obrazu bodu $C[1,5]$ v otočení o úhel $\alpha = 45°$ kolem počátku.

Řešení: Máme zadaný bod $C[1,5]$ (vzor), úhel otočení $\alpha = 45°$ a známe souřadnice středu $S[0,0]$ (počátek). Budeme postupovat jako v předchozím příkladu.

Známe analytické vyjádření otočení

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha$$

Víme, že bod C má souřadnice $x = 1$ a $y = 5$, souřadnice středu jsou $s_1 = 0$ a $s_2 = 0$ a úhel je $\alpha = 45°$. Nyní vše dosadíme do rovnic

$$x' = 1\cos 45^\circ - 5\sin 45^\circ + 0 - 0\cos 45^\circ + 0\sin 45^\circ$$

$$y' = 1\sin 45^\circ + 5\cos 45^\circ + 0 - 0\sin 45^\circ - 0\cos 45^\circ$$

Rovnice upravíme

$$x' = 1.\frac{\sqrt{2}}{2} - 5.\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - 0.\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$y' = 1.\frac{\sqrt{2}}{2} + 5.\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - 0.\frac{\sqrt{2}}{2} - 0.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

A protože nula krát cokoli je nula, můžeme z rovnic vypustit všechny členy, které jsou nulou násobené a zároveň i přičtení nuly

$$x' = 1.\frac{\sqrt{2}}{2} - 5.\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$y' = 1.\frac{\sqrt{2}}{2} + 5.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teď už jen stačí vyjádřit x', y'

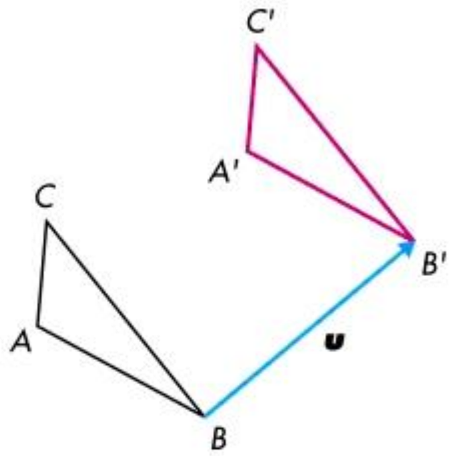
$$x' = -2\sqrt{2}$$
$$y' = 3\sqrt{2}$$

Získali jsme souřadnice obrazu bodu $C[1,5]$, tj. $C'\left[-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right]$

4. Posunutí (translace)

Definice7.4

Posunutí (translace) $\mathcal{T}\left(\vec{p}\right)$ v eukleidovské rovině E_2 je přímá shodnost, která každému bodu X roviny přiřazuje obraz X' takový, že platí $XX' = \vec{p}$, kde $\vec{p}$ je daný vektor, který se nazývá vektor posunutí, jeho délka udává délku posunutí a jeho směr určuje směr posunutí.



Obrázek 4: Posunutí (Translace)

Posunutí (translace) $\mathcal{T}\left(\vec{p}\right)$ určené vektorem $\vec{p} = [p_1, p_2]$:

$$x' = x + p_1$$
$$y' = y + p_2$$

Poznámky: Posunutí je jednoznačně určeno vektorem posunutí.

Posunutí nemá samodružné body; (slabě) samodružné jsou pouze všechny přímky rovnoběžné se směrem posunutí.

Je-li přímka p' obrazem dané přímky p v posunutí, potom jsou přímky p, p' rovnoběžné.

Příklad 12

Napište rovnice posunutí, které je určeno vzorem $A[-1,3]$ a jeho obrazem $A'[4,2]$.

Řešení: Známe bod, jeho obraz a analytické vyjádření posunutí

$$x' = x + p_1$$
$$y' = y + p_2$$

Souřadnice bodu A jsou $x = -1$ a $y = 3$, souřadnice bodu A' jsou $x' = 4$ a $y' = 2$. Posunutí je určené vektorem $\vec{p} = [p_1, p_2]$. Nyní můžeme dosadit do rovnic

$$4 = -1 + p_1$$
$$2 = 3 + p_2$$

Z rovnic zjistíme souřadnice vektoru $\vec{p} = [p_1, p_2]$

$$p_1 = 5$$
$$p_2 = -1$$

Nyní můžeme napsat rovnice posunutí určené vektorem $\vec{p} = [p_1, p_2]$

$$x' = x + 5$$
$$y' = y - 1$$

Příklad 13

Napište rovnice posunutí, které je určeno vzorem $X[3,4]$ a jeho obrazem $X'[5,1]$.

Řešení: Známe bod $X[3,4]$, jeho obraz $X'[5,1]$ a analytické vyjádření posunutí

$$x' = x + p_1$$
$$y' = y + p_2$$

Souřadnice bodu X jsou $x = 3$ a $y = 4$, souřadnice bodu X' jsou $x' = 5$ a $y' = 1$.

Posunutí je určené vektorem $\vec{p} = [p_1, p_2]$. Nyní můžeme dosadit do rovnic

$$5 = 3 + p_1$$
$$1 = 4 + p_2$$

Z rovnic zjistíme souřadnice vektoru $\vec{p} = [p_1, p_2]$

$$p_1 = 2$$
$$p_2 = -3$$

Nyní můžeme napsat rovnice posunutí určené vektorem $\vec{p} = [p_1, p_2]$

$$x' = x + 2$$
$$y' = y - 3$$

5. Posunuté zrcadlení (speciální případ posunutí)

Definice 7.5

Je dána přímka o. Zobrazení složené z posunutí ve směru přímky o a osové souměrnosti podle osy o se nazývá posunuté zrcadlení (neboli posunutá souměrnost).

Poznámky:Posunuté zrcadlení se dá složit z osové a středové souměrnosti, přičemž střed středové souměrnosti neleží na ose osové souměrnosti.

Posunuté zrcadlení nemá samodružné body.

Posunuté zrcadlení s osou v souřadnicové ose x a vektorem posunutí $\vec{p} = [p_1, 0]$:

$$x' = x + p_1$$
$$y' = -y$$

Shodnosti v prostoru

Shodná zobrazení v eukleidovském prostoru E_3 jsou určená rovnicí $f: x' = Ax + b$,

kde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ je ortonormální maticí, tzn. $AA^T = E$ a $\det(A) = \pm 1$.

Pro $\det(A) = +1$ je shodnost f:

- identita $id(A = E, b = 0)$
- translace $\mathcal{T}_b$ $(A = E, b \neq 0)$
- rotace $\mathcal{R}_{o,\varphi}$ kolem osy o o úhel φ (specielně pro $\varphi = \pm\pi$ je to osová souměrnost $\mathcal{O}_o$ podle osy o)
- šroubový pohyb $\mathcal{S}_{o,\varphi,u} = \mathcal{R}_{o,\varphi} \circ \mathcal{T}_u$ s osou o a parametrem p, kde $|\vec{u}| = p.\varphi$

Pro $\det(A) = -1$ je shodnost f:

- rovinová souměrnost Ω_ω s rovinou souměrnosti ω
- posunutá souměrnost $\mathcal{S}_{\omega,u} = \Omega_\omega \circ \mathcal{T}_u$, kde $\vec{u} \parallel \omega$
- otočená souměrnost $\mathcal{S}_{\omega,o,\,,\varphi} = \Omega_\omega \circ \mathcal{R}_{o,\varphi}$, kde $o \perp \omega$ (specielně pro $\varphi = \pm\pi$ se jedná o středovou souměrnost se středem $\{S\} = o \cap \omega$)

Rotace $\mathcal{R}_{o,\varphi}$ kolem osy o o úhel φ

Pro zjednodušení si nejprve zvolíme osu procházející počátkem

$o: x = tu$, kde $|u| = 1$.

Rotace kolem osy otočení o o orientovaný úhel φ je shodností, která jakémukoli bodu X přiřadí bod X' podle předpisu $\mathcal{R}_{Sx,\ \varphi}$: $X \to X'$, kde $\mathcal{R}_{Sx,\ \varphi}$ je rotace v rovině $\rho (X \in \rho, \rho \perp o)$ se středem S_X $(\{S_X\} = \rho \cap o)$ o úhel φ.

Pro střed S_x dostaneme vztah

$$s_X = (u^T x)\mathrm{u} = \mathrm{u}(u^T x) = (\mathrm{uu}^T)x.$$

Dále si zvolíme v rovině ρ bod Y, a to vztahem

$\overrightarrow{S_X Y} = u \times \overrightarrow{S_X X}$, to znamená

$$x' = (uu^T)x + \cos\varphi\left[x - (uu^T)x\right] + \sin\varphi.A'x.$$

Tuto rovnici můžeme stručně psát

$$x' = A_{u,\varphi}.x, \text{ kde}$$

$$A_{u,\varphi} = uu^T + \cos\varphi(E - uu^T) + \sin\varphi.A'$$

je takzvanou maticí otočení.

Nechť v tuto chvíli $O \notin o$, což znamená, že

$$o: x = a + tu\text{, kde } |u| = 1.$$

V tom případě pro rotaci $\mathcal{R}_{o,\varphi}$ dostáváme vztah

$$x' - a = A_{u,\varphi}.(x - a)$$

$$x' = A_{u,\varphi}.x + (E - A_{u,\varphi}).a\text{, kde } (E - A_{u,\varphi}).a = b.$$

Ještě poznamenejme, že v případě $\varphi = \pm\pi$ (což znamená osovou souměrnost v E_3) nabývá matice $A_{u,\varphi}$ jednoduššího tvaru

$$A_{u,\pm\pi} = 2uu^T - E.$$

Je- li v opačném případě dána rotace kolem osy rovnicí $x' = A_{u,\varphi}.x + b$, potom rovnici osy (což znamená přímky samodružných bodů) určíme pomocí řešení soustavy $(A_{u,\varphi} - E)x = -b$ úhel φ získáme z matice $A_{u,\varphi}$.

Rovinová souměrnost Ω_ω

Mějme rovinu souměrnosti

$$\omega: nx + n_0 = 0\text{, kde } |n| = 1.$$

V první řadě si určíme patu P_X kolmice spuštěné z bodu X na rovinu ω

$$p_X = x - (n^T x + n_0)n = (E - nn^T)\mathrm{x} - \mathrm{n}_o\, n.$$

Pro každou dvojici souměrně sdružených bodů X, X' potom platí, že bod P_X je středem úsečky XX', a proto platí následující vztah

$$x' = 2p_X - x = 2((E - nn^T)x - n_0 n) - x.$$

Pro rovinovou souměrnost Ω_ω jsme tedy dostaly vyjádření

$$x' = Ax + b\text{, kde } A = E - 2nn^T \text{ a } b = -2n_0 n.$$

Pokud je v opačném případě určena rovinová souměrnost předpisem $x' = Ax + b$, potom rovnici roviny souměrnosti (jinak řečeno roviny samodružných bodů) určíme pomocí řešení soustavy

$$(A - E)x = -b.$$

Proč jsem podrobněji popsala pouze rotaci a rovinovou souměrnost? Protože jak z výše uvedených vlastností vyplývá, ostatní zobrazení jsou definovaná jako spojení těchto dvou zobrazení.

Analytická vyjádření shodných zobrazení v E_3

V eukleidovském prostoru E_3 známe šest shodných transformací: posunutí, otočení, středovou souměrnost, osovou souměrnost, rovinovou souměrnost a šroubový pohyb.

1. Posunutí

Posunutí určené vektorem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$:

$$x' = x + p_1$$
$$y' = y + p_2$$
$$z' = z + p_3$$

2. Otočení

Otočení o úhel α kolem osy z:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$
$$z' = z$$

3. Středová souměrnost

Souměrnost podle počátku $O = (0,0,0)$:

$$x' = -x$$
$$y' = -y$$
$$z' = -z$$

4. Osová souměrnost

Souměrnost podle osy z:

$$x' = -x$$
$$y' = -y$$
$$z' = z$$

5. Rovinová souměrnost

Rovinová souměrnost je (jako každá souměrnost) involutorním zobrazením, tzn. je sama sobě inverzním zobrazením.

Souměrnost podle roviny (x, y):

$$x' = x$$
$$y' = y$$
$$z' = -z$$

6. Šroubový pohyb (torze)

Šroubový pohyb vzniká složením dvou pohybů, tj. otočení kolem dané osy o a posunutí ve směru této osy. Velikost posunutí je přímo úměrná otočení. Konstantou této přímé úměrnosti je redukovaná výška závitu v_0.

Šroubový pohyb s parametrem v_0 (redukovanou výškou) a s osou v ose z:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + x\cos\alpha$$
$$z' = z + v_0\alpha$$

Závěr

Cílem této práce bylo podat ucelený přehled základních informací o shodných zobrazeních v analytické geometrii. Také příklady jsem zvolila tak, aby vhodně doplnily výklad a tím pomohly ke snadnějšímu pochopení dané problematiky.

Samozřejmě jsem ve své práci neobsáhla všechny otázky, které se týkají shodných zobrazení, ale to nebylo mým cílem. Záměrně jsem se více věnovala zobrazením v rovině, protože s touto problematikou se setkáváme již na střední škole, ale je pravda, že první poznatky o shodných zobrazeních získává člověk už na základní škole v konstrukčních úlohách při rýsování.

Resumé

How it is resulted of the topic, this thesis is concerned on one group of view: the same view. This is the same view in analytic geometry. These views are based on viewing points (patterns) on points (paintings). The aim of this paper is to provide a comprehensive summary of some basic properties of the same view and their inclusion in the system of geometric transformations.

The term congruent, definition and basic properties are gradually expanded chapters. Furthermore, there are different kinds of identical views, group transformations, direct and indirect commonality.

The work is complemented by worked examples. These examples should help you understand the proposition statements to the reader.

Instructions and explanations on how to proceed in the calculation are listed in most of these examples.

Seznam literatury

- LÁVIČKA, Miroslav. *KMA/G2 Geometrie 2: Pomocný učební text*. Plzeň: ZČU v Plzni, 2006. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~sir/soubory/G2_text.pdf
- HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Naďa STEHLÍKOVÁ. *Geometrické transformace (metoda analytická)*. Praha: Univerzita Karlova, 1997. ISBN 978-80-86039-25-1.
- STEHLÍKOVÁ, Naďa. *Analytická geometrie II: Geometrické transformace*. Praha: Univerzita Karlova, 2008. Dostupné z: http://www.cynyc.net/PedF/AG%20II/AG%20II%20skripta.pdf
- KONOPOVÁ, Jana. *Endomorfismy vektorových prostorů*. Plzeň, 2014. Bakalářská práce. ZČU v Plzni. Vedoucí práce Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.
- LEISCHNER, Pavel. *Geometrická zobrazení*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2010. ISBN 978-80-7394-243-4
- JUKL, Marek. *Analytická geometrie.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014. Dostupné z: http:// http://www.kag.upol.cz/data/upload/15/AG-Jukl.pdf

Seznam obrázků