

ZDE VLOŽIT LIST ZADÁNÍ

Z důvodu správného číslování stránek

ABSTRAKT

Diplomová práce je věnována problematice sledování trajektorie dvoukolového inverzního kyvadla. Je zde odvozen lineární matematický model, který popisuje dynamiku systému. Stabilizace a přímočarý pohyb dvojkolky jsou řešeny stavovou zpětnou vazbou. Rotace kolem svislé osy je řízena dynamickým PID regulátorem. Navržené řízení bylo otestováno na virtuálním modelu v systému Matlab/SimMechanics a následně implementováno na cílovou platformu.

KLÍČOVÁ SLOVA

sledování trajektorie, dvoukolové inverzní kyvadlo, stavová zpětná vazba, stavová zpětná vazba s integrací, PID regulátor

ABSTRACT

This thesis deals with the motion control of two-wheeled inverted pendulum. There is deduction of the linear state-space model that describes the dynamics of the system. Stabilization and linear motion are controlled by state-feedback controller. Yaw is controlled by dynamic PID controller. The controllers were tested on virtual model in Matlab/SimMechanics and then implemented on the target platform.

KEYWORDS

motion control, two-wheeled inverted pendulum, state feedback, state feedback with integration, PID controller

TICHÝ, Aleš *Návrh řídicího systému robustního sledování dané trajektorie pohybu dvojkolky*: diplomová práce. PLZEŇ: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra kybernetiky, 2012. 67 s. Vedoucí práce byl Prof. Ing. Miloš Schlegel, CSc.

PROHLÁŠENÍ

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

PLZEŇ

.....

(vlastnoruční podpis)

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu diplomové práce, panu Prof. Ing. Miloši Schlegelovi, CSc., za odborné vedení, poskytnuté rady a materiály potřebné pro řešení této práce. Dále bych rád poděkoval členům Katedry kybernetiky, kteří ochotně pomáhali s problémy spojenými s inovací modelu dvojkolky. Na závěr bych chtěl poděkovat své rodině za podporu v průběhu studia.

OBSAH

Úvod	8
1 Matematický model	10
1.1 Model dvojkolky	10
1.2 Pohon systému	19
1.2.1 Matematický model motoru	20
1.2.2 Dílčí přenosy motoru	22
1.2.3 Momentový regulátor	24
2 Experimentální identifikace parametrů	30
2.1 Odvození vztahů pro výpočet parametrů	30
2.1.1 Moment setrvačnosti kola	30
2.1.2 Viskózní tření	31
2.1.3 Poloha těžiště	32
2.1.4 Moment setrvačnosti kolem vodorovné osy rotace	34
2.1.5 Moment setrvačnosti kolem svislé osy rotace	34
2.2 Identifikované parametry	35
2.2.1 Moment setrvačnosti kol	36
2.2.2 Viskózní tření	37
2.2.3 Poloha těžiště kyvadla	37
2.2.4 Moment setrvačnosti kyvadla kolem vodorovné osy rotace	38
2.2.5 Moment setrvačnosti kolem svislé osy	38
2.3 Výsledný model systému	39
3 Metody sledování trajektorie	42
3.1 Modální řízení	42
3.1.1 Sylvestrova maticová rovnice	42
3.1.2 Modální řízení	44
3.2 Stavová zpětná vazba	46
3.3 Stavová zpětná vazba s integrací regulační odchylky	47
3.4 Řízení směru	49
4 Virtuální model	52
4.1 Analýza navrženého řízení	53
4.1.1 Řízení přímočarého pohybu	55
4.1.2 Řízení natočení systému	58
5 Implementace řízení na fyzický model	60

6 Závěr	65
Literatura	67

SEZNAM OBRÁZKŮ

1	Fotografie fyzického modelu dvojkolky	8
1.1	Model dvojkolky	10
1.2	Náhradní schéma elektromotoru s převodovkou a zátěží	20
1.3	Přechodová charakteristika otevřené smyčky momentového subsystému	26
1.4	Odezva uzavřené momentové regulační smyčky na harmonický signál .	28
1.5	Srovnání skokové odezvy rychlosti při zanedbání dynamiky momen- tové smyčky	29
1.6	Srovnání odezvy na harmonický signál při zanedbání dynamiky mo- mentové smyčky	29
2.1	Experimentální zjištění momentu setrvačnosti kola	30
2.2	Experimentální určení polohy těžiště	32
2.3	Experimentální určení momentu setrvačnosti kolem svislé osy	35
2.4	Analýza vlastních kmitů kola s referenčním kyvadlem	36
3.1	Stavová zpětná vazba	47
3.2	Stavová zpětná vazba s integrací	48
4.1	Schéma systému a řízení	53
4.2	Subsystém kola	53
4.3	Subsystém těla dvojkolky	54
4.4	Subsystém řízení	54
4.5	Norma vektoru zesílení stavové zpětné vazby F s parametry a a b . .	55
4.6	Norma vektoru zesílení stavové zpětné vazby F pro $a = 0.02$	56
4.7	Odezva systému s reálnými póly	57
4.8	Odezva systému s 1 dvojicí komplexních pólů	57
4.9	Odezva systému při změně parametrů	58
4.10	Přechodová charakteristika úhlu natočení δ	59
5.1	Schéma systému a řízení	60
5.2	Odezva systému s původním řízením	61
5.3	Schéma systému a řízení	62
5.4	Odezva systému s upraveným řízením a integrací odchylky pozice . .	62
5.5	Odezva systému bez integrace odchylky pozice	63
5.6	Průběh náklonu a úhlové rychlosti náklonu při pohybu po přímce . .	63
5.7	Otáčení systému konstantní rychlostí	64

ÚVOD

Tato práce pojednává o sledování trajektorie dvoukolové platformy se stabilizovaným inverzním kyvadlem. Fyzický model byl inspirován v posledních letech velmi známým dvoukolovým akumulátorovým vozítkem Segway. Náš systém však nelze využít jako dopravní prostředek, jedná se pouze o zmenšený model, který slouží především pro výukové a demonstrační účely, a není proto dimenzován na velká zatížení. Zařízení je autonomně stabilizováno v labilní rovnovážné poloze kyvadla. Cílem této práce je řídit pohyb dvojkolky generovaným signálem.

Reálný model dvojkolky zdánlivě připomíná klasické inverzní kyvadlo napojené prostou rotační vazbou s jedním stupněm volnosti na pohyblivý vozík, jehož pohybem je kyvadlo stabilizováno. Rotační vazbu mezi kyvadlem a koly u tohoto systému tvoří hřídele motorů, jejichž statory jsou pevně spojeny s tělem kyvadla. Kola i tělo dvojkolky, jak byl model pracovně nazván, má v této rotační vazbě volnost. Kvůli vzájemné interakci mezi rotorem a statorem není moment motoru přeměněn pouze na rotační pohyb kol, ale také na rotační pohyb těla dvojkolky, avšak v opačném směru. Tato vzájemná interakce je hlavní odlišností od klasického problému stabilizace inverzního kyvadla.



Obr. 1: Fotografie fyzického modelu dvojkolky

Cílem práce je návrh řízení pohybu dvojkolky tak, aby byla respektována stabilita inverzního kyvadla v průběhu pohybu. Kvůli podmínce stability kyvadla nelze k úloze řízení pohybu dvojkolky přistupovat jako k samostatnému problému, ale je

nutné respektovat dynamiku celého modelu. Toto je omezujícím faktorem především pro agresivitu navrhované regulace.

Fyzický model dvojkolky nebyl vytvořen pro účely této práce, ale již dříve. Pro naše účely byl však téměř kompletně přepracován. Původní prací, která je věnována problematice řízení tohoto systému je práce [2]. V roce 2011 byla ve spolupráci s autorem práce [4] provedena modernizace platformy. Na tuto práci zde bude navázáno.

Původní systém byl kromě motorů a řídicích jednotek vybaven na univerzitě vytvořenou elektronikou pro odesílání dat z IRC motorů, signálu z analogového ultrazvukového měřiče vzdálenosti, který sloužil k výpočtu úhlu náklonu kyvadla od svislé osy, a pro přijímání řídicího signálu pro elektromotory. Systém byl řízen v řídicím systému REX firmy REX Controls. Analýza dat a regulace soustavy však byla prováděna mimo platformu dvojkolky. Zpět na platformu byly bezdrátově odesílány pouze akční zásahy pro motory. Zpětná vazba tedy byla uzavřena bezdrátově, což přinášelo některá omezení pro regulační smyčku. Především nemohlo být dosaženo dostatečně krátké vzorkovací periody, ta se u původního systému pohybovala pouze kolem $20ms$. Tento fakt ztěžoval regulaci a systém dokonce posazoval téměř na samotnou hranici říditelnosti.

Ultrazvukové čidlo, z jehož signálu byl určován náklon systému a úhlová rychlost otáčení, bylo nahrazeno dvojicí nezávislých senzorů, které obě tyto veličiny měří přímo na základě fyzikálních principů. Konkrétně se jedná o náklonoměr, využívající technologii MEMS, tedy miniaturní mechanické kyvadlo, a o gyroskop jenž měří úhlovou rychlost náklonu.

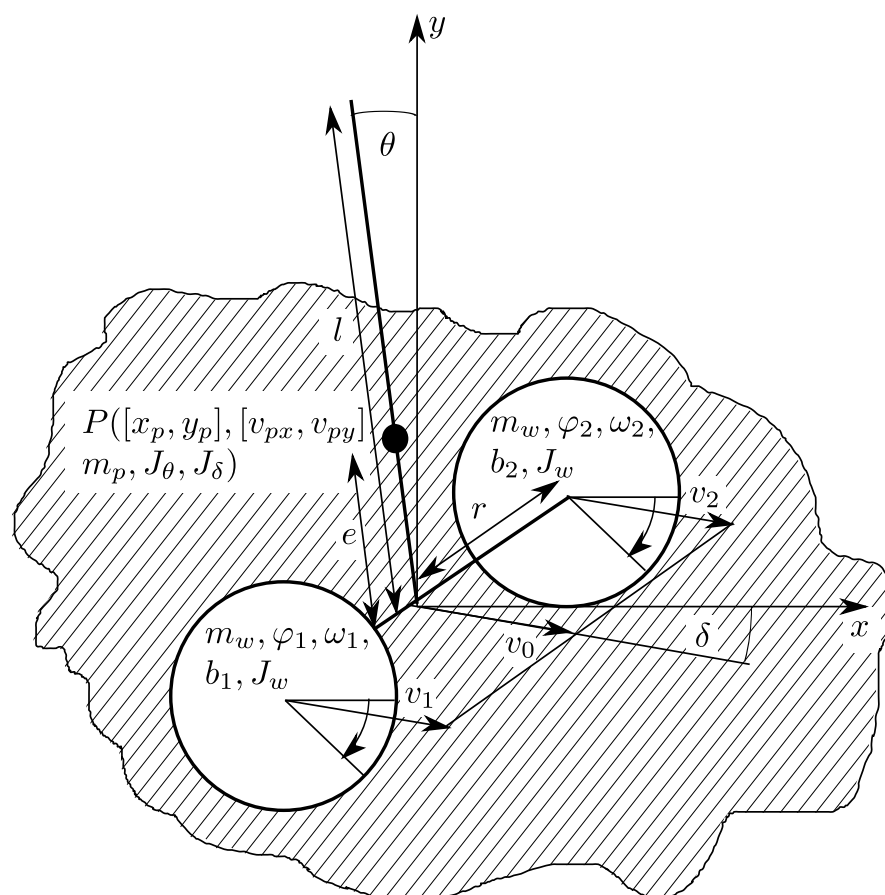
Na platformu bylo umístěno průmyslové PC s řídicím systémem REX firmy REX Controls. Toto řešení nově umožnilo odstranit bezdrátovou zpětnou vazbu a snížit tak vzorkovací periodu regulační smyčky na $1ms$. Se zařízením je nadále komunikováno bezdrátově, ale pouze kvůli ovládání. Platforma je nyní plně autonomní.

Změny se netýkají pouze hardware. Byla provedena nová analýza systému a model byl doplněn o vzájemné silové působení mezi rotorem a statorem. Odvození modelu je věnována první kapitola této práce.

1 MATEMATICKÝ MODEL

Jak bylo řečeno v úvodu této práce, cílem je vytvořit algoritmy pro sledování trajektorie dvojkolky. Systém je tvořen podvozkem se dvěma koly a inverzním kyvadlem, které je pevnou vazbou spojeno s tělem dvojkolky. Rotační vazbu mezi tělem modelu a koly tvoří hřídele motorů. Vzhledem k vzájemnému silovému působení mezi rotorem a statorem dochází přeměně momentu na rotační pohyb obou částí. Toto je důležitý poznatek a také hlavní odlišnost od klasického problému stabilizace inverzního kyvadla. Podívejme se nyní na daný systém z fyzikálního pohledu a odvoďme jeho matematický popis, jenž bude nezbytnou podmínkou pro návrh řídicích algoritmů v další části této práce.

1.1 Model dvojkolky



Obr. 1.1: Model dvojkolky

Na obrázku 1.1 si prohlédneme schématický náčrtek systému s vyznačenými parametry, které budou vystupovat v pohybových rovnicích. Některé z parametrů systému lze snadno měřit přímou metodou, některé však nelze přímo měřit ani analyticky vypočítat, typickým případem jsou například momenty setrvačnosti kolem rotačních os dvojkolky. Pro určení těchto parametrů bude zapotřebí navrhnout vhodné experimenty. Experimentálnímu zjištění parametrů dvojkolky bude později věnována samostatná kapitola.

Přejdeme nyní k odvození pohybových rovnic našeho systému, jehož náčrtek vidíme na obrázku 1.1.

Pro úlohu sledování trajektorie bude nezbytné odvodit pohybové rovnice systému s nezávislým pohybem jednotlivých kol. Nezávislý pohyb kol je oproti úloze stabilizace nutný pro rotační pohyb dvojkolky kolem svislé osy.

Nelineární pohybové rovnice zjednodušeného modelu fyzického systému budou odvozeny pomocí Lagrangeovy metody. Z těchto rovnic bude později vytvořen lineární stavový popis systému.

Obecný tvar pohybových rovnic získaných touto metodou bude vypadat následovně:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = F_i^e \quad (1.1)$$

kde L je takzvaný Lagrangerián, q_i jsou zobecněné souřadnice systému a F_i^e vnější síly působící na systém.

Lagrangerián je dále vyjádřen vztahem:

$$L \triangleq T - V \quad (1.2)$$

kde T značí celkovou kinetickou a V celkovou potenciální energii daného systému.

Celkovou energii dvojkolky lze určit jako součet energií jejích jednotlivých částí. Pro řešený systém bude tedy dána součtem energie "matematického kyvadla", které je zastoupeno hmotným bodem (těžištěm) P s hmotností m_p vzdáleným e od osy otáčení, charakterizovaným momentem setrvačnosti kolem vodorovné osy J_θ a momentem setrvačnosti kolem svislé osy J_δ , a energií kol charakterizovaných hmotnostmi m_w poloměrem R a momenty setrvačnosti J_w . Pro odvození rovnic předpokládejme schodné parametry obou kol, rychlost jednotlivých kol však bude obecně různá.

Pro celkovou kinetickou energii soustavy T platí:

$$T = T_P + T_{w1} + T_{w2} \quad (1.3)$$

Kde kinetická energie těžiště T_P je dána předpisem:

$$\begin{aligned}
T_P &= \frac{1}{2}m_p v_{px}^2 + \frac{1}{2}m_p v_{py}^2 + \frac{1}{2}J_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\delta \dot{\delta}^2 = \\
&= \frac{1}{2}m_p \left[(e\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}_0)^2 + (-e\dot{\theta}\sin\theta)^2 \right] + \frac{1}{2}J_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\delta \dot{\delta}^2 = \\
&= \frac{1}{2}m_p \left[e^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2e\dot{x}_0\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}_0^2 + e^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \right] + \frac{1}{2}J_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\delta \dot{\delta}^2 = \\
&= \frac{1}{2}m_p \left[e^2\dot{\theta}^2 + 2e\dot{x}_0\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}_0^2 \right] + \frac{1}{2}J_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\delta \dot{\delta}^2 \tag{1.4}
\end{aligned}$$

Kinetická energie prvního kola:

$$\begin{aligned}
T_{w2} &= \frac{1}{2}m_w v_1^2 + \frac{1}{2}J_w \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) v_1^2 = \frac{1}{2} \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) (\dot{x}_0 - r\dot{\delta})^2 = \\
&= \frac{1}{2} \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) (\dot{x}_0^2 - 2r\dot{x}_0\dot{\delta} + r^2\dot{\delta}^2) \tag{1.5}
\end{aligned}$$

Pro druhé kolo platí analogicky:

$$\begin{aligned}
T_{w1} &= \frac{1}{2}m_w v_2^2 + \frac{1}{2}J_w \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2} \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) v_2^2 = \frac{1}{2} \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) (\dot{x}_0 + r\dot{\delta})^2 = \\
&= \frac{1}{2} \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) (\dot{x}_0^2 + 2r\dot{x}_0\dot{\delta} + r^2\dot{\delta}^2) \tag{1.6}
\end{aligned}$$

Dosazením kinetických energií jednotlivých částí (1.4),(1.5) a (1.6) do vztahu (1.3) získáme celkovou kinetickou energii soustavy:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_p \left[e^2\dot{\theta}^2 + 2e\dot{x}_0\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}_0^2 \right] + \frac{1}{2}J_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\delta \dot{\delta}^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) (\dot{x}_0^2 - 2r\dot{x}_0\dot{\delta} + r^2\dot{\delta}^2) + \\
&+ \frac{1}{2} \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) (\dot{x}_0^2 + 2r\dot{x}_0\dot{\delta} + r^2\dot{\delta}^2) = \\
&= \frac{1}{2}m_p \left[e^2\dot{\theta}^2 + 2e\dot{x}_0\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}_0^2 \right] + \frac{1}{2}J_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\delta \dot{\delta}^2 + \\
&+ \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) (\dot{x}_0^2 + r^2\dot{\delta}^2) \tag{1.7}
\end{aligned}$$

Potenciální energie soustavy bude vztažena k vodorovné rovině procházející osou otáčení kol. Tato rovina bude uvažována jako nulová hladina potenciální energie. Vzdálenost těžiště P od popsané vodorovné roviny bude y_p . Tato vzdálenost je závislá na úhlu náklonu θ .

Potenciální energie kol je vzhledem k takto zvolené vztažné soustavě rovna:

$$V_{w1} = V_{w2} = 0 \quad (1.8)$$

Celková potenciální energie soustavy je tedy dána pouze potenciální energií těla kyvadla:

$$V = V_p = m_p g y_p = m_p g e \cos \theta \quad (1.9)$$

Dosazením vztahů (1.9) a (1.7) do (1.2) získáme Lagrangerián soustavy:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} m_p [e^2 \dot{\theta}^2 + 2e \dot{x}_0 \dot{\theta} \cos \theta + \dot{x}_0^2] + \frac{1}{2} J_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_\delta \dot{\delta}^2 + \\ & + \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) (\dot{x}_0^2 + r^2 \dot{\delta}^2) - m_p g e \cos \theta \end{aligned} \quad (1.10)$$

Zobecněné souřadnice systému jsou:

$$q = \begin{bmatrix} x_0 \\ \theta \\ \delta \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Provedeme derivace Lagrangeriánu potřebné ve vztahu (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_0} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} &= 2 \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) \dot{x}_0 + m_p \dot{\theta} e \cos \theta + m_p \dot{x}_0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} &= 2 \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) \ddot{x}_0 - m_p \dot{\theta}^2 e \sin \theta + m_p \ddot{\theta} e \cos \theta + m_p \ddot{x}_0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} &= m_p e \dot{x}_0 \dot{\theta} \sin \theta - m_p g e \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_p e^2 \dot{\theta} + m_p e \dot{x}_0 \cos \theta + J_\theta \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_p e^2 \ddot{\theta} - m_p e \dot{x}_0 \dot{\theta} \sin \theta + m_p e \ddot{x}_0 \cos \theta + J_\theta \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \delta} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} &= J_\delta \dot{\delta} + 2r^2 \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) \dot{\delta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} &= J_\delta \ddot{\delta} + 2r^2 \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) \ddot{\delta} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Vnější síly, působící na systém, jsou vyvolány dvojicí motorů, které soustavu pohánějí. Motory chceme řídit nezávisle, každý tedy obecně působí na soustavu jiným momentem. Odvození bude provedeno pro nenulové viskózní tření b , přičemž budeme předpokládat rozdílné tření pro každý motor.

Moment na výstupu prvního motoru vyjádříme vztahem:

$$M_1 = M_{K1} - b_1\dot{\varphi}_1 = M_{K1} - b_1\frac{v_1}{R} = M_{K1} - b_1\frac{\dot{x}_0 - r\dot{\delta}}{R} \quad (1.15)$$

Pro druhý motor platí analogicky:

$$M_2 = M_{K2} - b_2\dot{\varphi}_2 = M_{K2} - b_2\frac{\dot{x}_0 + r\dot{\delta}}{R} \quad (1.16)$$

Těmito momenty působí na systém jednotlivé motory. Dále potřebujeme určit působení na jednotlivé stavové veličiny.

Momenty je nutné přepočítat na síly s působištem v patričném místě.

Pro určení účinků momentů motorů na polohu systému x_0 je nutné tyto účinky přepočítat na sílu působící na osu otáčení kola.

Silové působení v ose kola je dáno součtem momentů působících na rameno R (poloměr kola):

$$F_{x_0} = \frac{M_1 + M_2}{R} = \frac{1}{R} \left(M_{K1} + M_{K2} - (b_1 + b_2) \frac{\dot{x}_0}{R} + (b_1 - b_2) \frac{r\dot{\delta}}{R} \right) \quad (1.17)$$

Na úhel náklonu θ působí motory přímo, avšak v opačném směru než je směr pohybových účinků:

$$F_\theta = -M_1 - M_2 = - \left(M_{K1} + M_{K2} - (b_1 + b_2) \frac{\dot{x}_0}{R} + (b_1 - b_2) \frac{r\dot{\delta}}{R} \right) \quad (1.18)$$

Na rotační pohyb kolem svislé osy motory působí následovně:

$$F_\delta = \frac{r}{R} (M_2 - M_1) = \frac{r}{R} \left(M_{K2} - M_{K1} + (b_1 - b_2) \frac{\dot{x}_0}{R} - (b_1 + b_2) \frac{r\dot{\delta}}{R} \right) \quad (1.19)$$

Byla odvozena silová působení na jednotlivé zobecněné proměnné. Odvozené vztahy dosadíme do rovnice (1.1).

Získané pohybové rovnice budou mít následující podobu:

$$\begin{aligned} 2 \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) \ddot{x}_0 - m_p \dot{\theta}^2 e \sin \theta + m_p \ddot{\theta} e \cos \theta + m_p \ddot{x}_0 &= \\ = \frac{1}{R} \left(M_{K1} + M_{K2} - (b_1 + b_2) \frac{\dot{x}_0}{R} + (b_1 - b_2) \frac{r \dot{\delta}}{R} \right) & \quad (1.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_p e^2 \ddot{\theta} - m_p e \dot{x}_0 \dot{\theta} \sin \theta + m_p e \ddot{x}_0 \cos \theta + J_\theta \ddot{\theta} - m_p e \dot{x}_0 \dot{\theta} \sin \theta + m_p g e \sin \theta &= \\ = - \left(M_{K1} + M_{K2} - (b_1 + b_2) \frac{\dot{x}_0}{R} + (b_1 - b_2) \frac{r \dot{\delta}}{R} \right) & \quad (1.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\delta \ddot{\delta} + 2r^2 \left(m_w + \frac{J_w}{R^2} \right) \ddot{\delta} &= \\ = \frac{r}{R} \left(M_{K2} - M_{K1} + (b_1 - b_2) \frac{\dot{x}_0}{R} - (b_1 + b_2) \frac{r \dot{\delta}}{R} \right) & \quad (1.22) \end{aligned}$$

Rovnice dále upravíme:

$$\begin{aligned} \left(m_p + 2m_w + 2\frac{J_w}{R^2} \right) \ddot{x}_0 - m_p e \sin \theta \dot{\theta}^2 + m_p e \cos \theta \ddot{\theta} &= \\ = \frac{1}{R} \left(M_{K1} + M_{K2} - (b_1 + b_2) \frac{\dot{x}_0}{R} + (b_1 - b_2) \frac{r \dot{\delta}}{R} \right) & \quad (1.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(J_\theta + m_p e^2 \right) \ddot{\theta} + m_p e \cos \theta \ddot{x}_0 - m_p g e \sin \theta &= \\ = - \left(M_{K1} + M_{K2} - (b_1 + b_2) \frac{\dot{x}_0}{R} + (b_1 - b_2) \frac{r \dot{\delta}}{R} \right) & \quad (1.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(J_\delta + 2r^2 m_w + 2r^2 \frac{J_w}{R^2} \right) \ddot{\delta} &= \\ = \frac{r}{R} \left(M_{K2} - M_{K1} + (b_1 - b_2) \frac{\dot{x}_0}{R} - (b_1 + b_2) \frac{r \dot{\delta}}{R} \right) & \quad (1.25) \end{aligned}$$

Nyní odvodíme stavový popis systému.

Rovnice zapíšeme maticově ve tvaru:

$$Z(z)\dot{z} = X(z) + Yu \quad (1.26)$$

$$Z(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_p + 2m_w + 2\frac{J_w}{R^2} & m_p e \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_p e \cos \theta & m_p e^2 + J_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_\delta + 2r^2 m_w + 2r^2 \frac{J_w}{R^2} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$X(z) = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta} \\ -(b_1 + b_2) \frac{\dot{x}_0}{R^2} + m_p e \sin \theta \dot{\theta}^2 + (b_1 - b_2) \frac{r \dot{\delta}}{R^2} \\ m_p g e \sin \theta + (b_1 + b_2) \frac{\dot{x}_0}{R} - (b_1 - b_2) \frac{r \dot{\delta}}{R} \\ \dot{\delta} \\ (b_1 - b_2) \frac{r \dot{x}_0}{R^2} - (b_1 + b_2) \frac{r^2 \dot{\delta}}{R^2} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ \frac{-r}{R} & \frac{-r}{R} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Vstupem systému bude moment jednotlivých motorů M_{K1} , M_{K2} . Psáno maticově:

$$u = \begin{bmatrix} M_{K1} \\ M_{K2} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Nelineární popis systému získáme úpravou do podoby:

$$\dot{z} = Z(z)^{-1} X(z) + Z(z)^{-1} Y u \quad (1.31)$$

kde

$$A(z) = Z(z)^{-1} X(z) = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta} \\ \frac{(m_p e^2 + J_\theta) x_3 - m_p e \cos \theta x_4}{\det_{z1}} \\ \frac{-m_p e \cos \theta x_3 + (2m_w + m_p + 2 \frac{J_w}{R^2}) x_4}{\det_{z1}} \\ \dot{\delta} \\ \frac{x_6}{\det_{z2}} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

a

$$\begin{aligned}
B(z) &= Z(z)^{-1}Y = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{(m_p e^2 + J_\theta) + R m_p \cos \theta}{R \det_{z1}} & \frac{(m_p e^2 + J_\theta) + R m_p \cos \theta}{R \det_{z1}} \\ \frac{-m_p \cos \theta - R(2m_w + m_p + 2\frac{J_w}{R^2})}{R \det_{z1}} & \frac{-m_p \cos \theta - R(2m_w + m_p + 2\frac{J_w}{R^2})}{R \det_{z1}} \\ 0 & 0 \\ \frac{-r}{R \det_{z2}} & \frac{r}{R \det_{z2}} \end{bmatrix} \quad (1.33)
\end{aligned}$$

Symboly x_3 , x_4 a x_6 jsou prvky matice (1.28) na patřičných indexech, prvky \det_{z1} a \det_{z2} jsou substitute:

$$\det_{z1} = (m_p e^2 + J_\theta) \left(2m_w + m_p + 2\frac{J_w}{R^2} \right) - m_p^2 e^2 \cos^2 \theta \quad (1.34)$$

$$\det_{z2} = J_\delta + 2r^2 m_w + \frac{2r^2 J_w}{R^2} \quad (1.35)$$

Rovnice je zapotřebí linearizovat v okolí rovnovážného bodu:

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

Při nulovém řízení u .

Linearizovaný stavový popis v okolí labilní rovnovážné polohy kyvadla bude mít podobu:

$$\dot{z} = Az + Bu \quad (1.37)$$

kde:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-R^2 m_p^2 e^2 g}{den_1} & \frac{-(b_1 + b_2) k_1}{den_1} & 0 & 0 & \frac{r(b_1 - b_2) k_1}{den_1} \\ 0 & \frac{m_p e g (2J_w + 2R^2 m_w + R^2 m_p)}{den_1} & \frac{(b_1 + b_2) k_2}{R den_1} & 0 & 0 & \frac{-r(b_1 - b_2) k_2}{R den_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{r(b_1 - b_2)}{den_2} & 0 & 0 & \frac{-r^2(b_1 + b_2)}{den_2} \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{Rk_1}{den_1} & \frac{Rk_1}{den_1} \\ -\frac{k_2}{den_1} & -\frac{k_2}{den_1} \\ 0 & 0 \\ \frac{Rr}{den_2} & \frac{Rr}{den_2} \end{bmatrix} \tag{1.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
den_1 &= R^2 (2m_w m_p e^2 + 2m_w J_\theta + m_p J_\theta) + 2m_p e^2 J_w + 2J_\theta J_w \\
den_2 &= R^2 J_\delta + 2R^2 r^2 m_w + 2r^2 J_w \\
k_1 &= m_p e^2 + J_\theta + Rm_p e \\
k_2 &= Rm_p e + 2J_w + 2R^2 m_w + R^2 m_p \tag{1.39}
\end{aligned}$$

Stručně se podívejme na získaný model. Za povšimnutí stojí především výskyt koeficientů tlumení b_1 , a b_2 . Koeficienty se v matici A vyskytují vždy v součtu nebo rozdílu. Tento fakt přináší za určitých podmínek zajímavé důsledky. Budeme-li uvažovat systém bez tření, tedy $b_1 = b_2 = 0$, v matici A budou vynulovány všechny pozice, na kterých se tyto koeficienty vyskytují. Pokud budeme uvažovat systém s tlumením, ale pro oba motory stejným, tedy $b_1 = b_2$, v matici se vynulují prvky na pozicích ve kterých tyto koeficienty vystupují v rozdílu.

Oba tyto případy znamenají zjednodušení návrhu řízení.

Tlumení motorů nechceme zcela zanedbat, oba motory jsou ale stejné, převodovky mají pouze jednu planetu, tlumení obou motorů proto budeme považovat za stejné nebo velmi podobné.

Tento předpoklad nám umožňuje rozdělit daný systém na dva subsystémy.

Subsystém stabilizace přímočarým pohybem popsaných maticemi:

$$\begin{aligned}
A_\theta &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-R^2 m_p^2 e^2 g}{den_1} & \frac{-(b_1 + b_2) k_1}{den_1} & 0 \\ 0 & \frac{m_p e g (2J_w + 2R^2 m_w + R^2 m_p)}{den_1} & \frac{(b_1 + b_2) k_2}{R den_1} & 0 \end{bmatrix} \\
B_\theta &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{Rk_1}{den_1} & \frac{Rk_1}{den_1} \\ -\frac{k_2}{den_1} & -\frac{k_2}{den_1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.40}$$

A subsystemém rotace kolem svislé osy:

$$\begin{aligned}
A_\delta &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-r^2 (b_1 + b_2)}{den_2} \end{bmatrix} \\
B_\delta &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{Rr}{den_2} & \frac{Rr}{den_2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Rozdělení systému je možné díky zániku vzájemných vazeb mezi systémy při zavedení podmínky $b_1 = b_2$. Zbývá dosadit hodnoty parametrů systému a pro oba systémy navrhnout vhodné řízení. Této problematice se budeme věnovat později.

Podívejme se dále na řízení systému u , které je popsáno vektorem (1.30). Vstupem systému jsou momenty jednotlivých motorů.

Regulace momentu motorů je však implementována v nižší úrovni řízení, konkrétně v řídicích jednotkách motorů.

Z nadřazeného řízení budeme posílat požadovaný moment, o jeho regulaci se ale stará elektronika v jednotkách, kde je však nutné vhodně nastavit integrovaný PI regulátor. Při nastavování parametrů regulátoru zabíháme do problematiky pohonů. Této problematice se budeme věnovat v následující části.

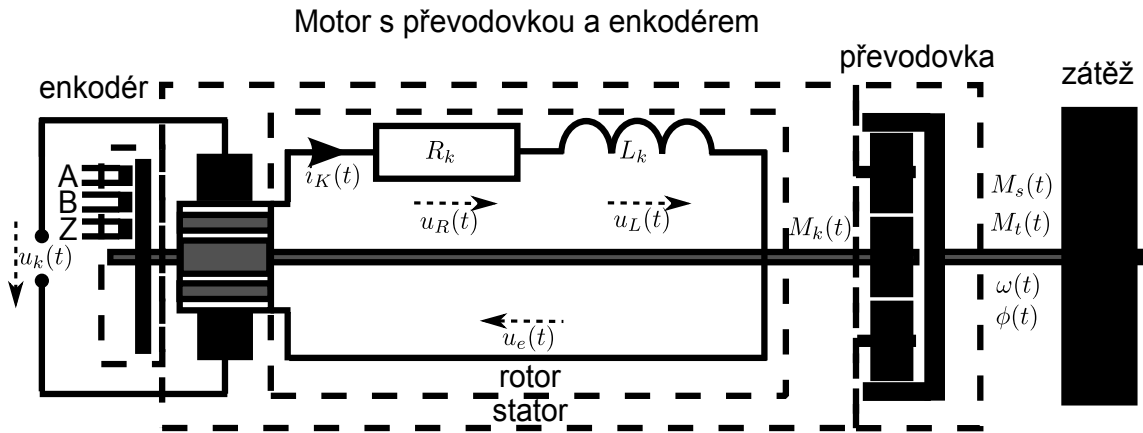
1.2 Pohon systému

Model je poháněn dvojicí stejnosměrných motorů. O regulaci elektrické části se stará momentový regulátor v řídicích jednotkách. Tento regulátor je ale zapotřebí vhodným způsobem nastavit.

Odvodme si tedy matematický model stejnosměrného motoru a modely jeho jednotlivých částí.

1.2.1 Matematický model motoru

Zjednodušené schéma motoru je zobrazeno na obrázku 1.2



Obr. 1.2: Náhradní schéma elektromotoru s převodovkou a zátěží

Význam vyznačených parametrů na obrázku 1.2 je následující:

$u_k(t)$ napětí na kotvě motoru (regulované napájecí napětí)

$i_k(t)$ proud na kotvě

R_k rezistence kotvy

L_k indukčnost kotvy

$u_R(t)$ napětí na rezistenci kotvy

$u_L(t)$ napětí na induktanci kotvy

$u_e(t)$ indukované protinapětí kotvy

$M_k(t)$ kroutící moment motoru

$\omega(t)$ úhlová rychlost otáčení hřídele

$\phi(t)$ úhel natočení hřídele

$M_s(t)$ setrvačný moment

$M_t(t)$ třecí moment

Při odvození modelu motoru vyjdeme z jeho elektrických a mechanických vlastností.

Pro náhradní elektrické schéma na obrázku musí platit Kirchhoffův zákon.

Konkrétně pro napětí v uzavřené smyčce rotoru platí:

$$u_L(t) + u_R(t) + u_e(t) = u_k(t) \quad (1.42)$$

Napětí na indukčnosti motoru:

$$u_L(t) = L_k \frac{di_k(t)}{dt} \quad (1.43)$$

Napětí na rezistenci motoru:

$$u_R(t) = R_k i_k(t) \quad (1.44)$$

Indukované napětí v obvodu kotvy:

$$u_e(t) = K_e \dot{\omega}(t) \quad (1.45)$$

Toto napětí vzniká v důsledku rotace kotvy v permanentním magnetickém poli statoru.

Dosazením předchozích vztahů do (1.42) získáme diferenciální rovnici popisující dynamiku elektrické části motoru:

$$L_k \frac{di_k(t)}{dt} + R_k i_k(t) + K_e \dot{\omega}(t) = u_k(t) \quad (1.46)$$

Pro mechanickou část motoru vyjdeme z rovnováhy momentů v soustavě.

Točivý moment motoru:

$$M_k(t) = K_m i_k(t) \quad (1.47)$$

kde K_m je momentová konstanta motoru.

Setrvačný moment je dán vztahem:

$$M_s(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (1.48)$$

Třecí moment je způsoben takzvaným viskózním třením, které vzniká na ložiskách motoru a převodovky a je popsáno koeficientem útlumu b . Velikost ztrát je nejčastěji popisována jako lineární závislost na úhlové rychlosti otáčení ω :

$$M_t(t) = b\omega(t) \quad (1.49)$$

Rovnováha momentů je matematicky vyjádřena vztahem:

$$M_s(t) + M_t(t) = M_k(t) \quad (1.50)$$

Dosazením získáme diferenciální rovnici popisující mechanickou část motoru:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) = K_m i_k(t) \quad (1.51)$$

Pokud chceme sledovat rychlost otáčení ω , máme vše potřebné, potřebujeme-li sledovat úhel natočení, uvedme ještě diferenciální rovnici, která popisuje známý vztah mezi úhlovou rychlostí a úhlem natočení:

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (1.52)$$

Z rovnic lze určit stavový popis systému.

Rychlostní model motoru:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_k}{L_k} & -\frac{K_e}{L_k} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Tyto matice vyjadřují stavový popis motoru pokud je řídicí veličinou napětí na kotvě a výstupem úhlová rychlost ω .

Je-li zapotřebí sledovat polohu systému, bude předchozí popis doplněn o integrátor. Zvýší se tedy řád systému.

Polohový model motoru:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{\omega}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_k}{L_k} & -\frac{K_e}{L_k} & 0 \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Rovnice vyjadřuje lineární matematický model motoru řízený napětím kotvy pokud je výstupem systému úhel natočení.

1.2.2 Dílčí přenosy motoru

Elektrická část

V předchozí části byly odvozeny zjednodušené lineární matematické modely stejnosměrného motoru řízeného napětím na kotvě. V průmyslových aplikacích je ale často řízen proud kotvy. Moment, kterým motor působí na poháněný mechanismus je přímo úměrný proudu v kotvě. Proud v kotvě a tedy také moment je ale u motorů s permanentními magnety řízen právě změnou napětí v obvodu kotvy.

Momentový regulátor je základní regulátor, který bývá implementován v průmyslově využívaných servo driverech.

Tento regulátor se stará o regulaci napětí na kotvě tak, aby byl sledován požadovaný proud v obvodu kotvy.

Proudový přenos odvodíme z rovnováhy napětí v kotvě (1.46). Proudový regulátor se ladí se zablokovanou hřídelí motoru tedy $\omega(t) = 0$. Z rovnice tedy vypadne člen vyjadřující indukované proti-napětí rotující kotvy.

Pomocí jednoduchých matematických úprav a využití Laplaceovy transformace získáme přenos systému z napětí na proud v obvodu kotvy:

$$F_I(s) = \frac{I_k(s)}{U_k(s)} = \frac{1}{L_k s + R_k} \quad (1.55)$$

Jedná se o přenos systému prvního řádu popisující elektrickou část motoru.

Pokud chceme momentový přenos, musíme rovnici (1.55) vynásobit momentovou konstantou K_m , která však změní pouze zesílení původního systému. Přenos z napětí na moment:

$$F_M(s) = \frac{M_k(s)}{U_k(s)} = \frac{K_m}{L_k s + R_k} \quad (1.56)$$

Přenos ještě převedeme do tvaru

$$F_M(s) = \frac{\frac{K_m}{R_k}}{\frac{L_k}{R_k} s + 1}, \quad (1.57)$$

ze kterého je přímo patrné zesílení systému a také časová konstanta systému.

Časovou konstantu elektrické části systému lze tedy určit jako poměr indukčnosti a rezistence kotvy. Oba tyto údaje jsou uvedeny v parametrech motoru poskytnutých výrobcem. Indukčnost motoru se pohybuje v řádech mH , rezistence v Ω , lze tedy očekávat malou časovou konstantu systému - řádově v desetinách ms . Konkrétní údaje a výpočty budou uvedeny později.

Mechanická část

Matematický model systému řízeného pomocí napětí kotvy byl odvozen již dříve. Chceme-li řídit úhlovou rychlost $\omega(t)$ například pomocí kaskádní regulace s regulací momentu ve vnitřní smyčce, situace bude vypadat následovně.

Vyjdeme z rovnice(1.51), která vyjadřuje rovnováhu momentu v soustavě.

Obdobně jako v případě proudu provedeme Laplaceovu transformaci.

$$\omega(s)(Js + b) = K_m I_k(s) \quad (1.58)$$

Přenos systému z momentu na rychlost je popsán rovnicí:

$$F_\omega(s) = \frac{\omega(s)}{M_k(s)} = \frac{1}{Js + b} \quad (1.59)$$

V případě nenulového viskózního tření b se tedy opět jedná o statický systém prvního řádu.

1.2.3 Momentový regulátor

Momentový regulátor je základní regulátor implementovaný v systému.

Momentový subsystém je v tomto případě chápán jako elementární systém s jednotkovým přenosem.

V této části si ukážeme, že při správném nastavení momentového regulátoru, je zanedbání přechodových jevů momentového systému skutečně akceptovatelné a toto zanedbání má vzhledem k charakteru regulované soustavy minimální negativní vliv na kvalitu nadřazené regulace.

Pro správnou funkci nadřazené regulace musí být provedeno nastavení momentového regulátoru v řídicích jednotkách. Momentový subsystém má sám o sobě malou časovou konstantu, přesto je pro správnou funkci nadřazených regulačních smyček třeba naladit tak, aby výstupní veličina co nejrychleji sladovala požadované hodnoty. V ustáleném stavu budeme navíc požadovat nulovou regulační odchylku.

Za účelem regulace s těmito požadavky je pro nás výhodné použít PI regulátor, který je také implementován přímo v řídicích jednotkách.

Při hledání parametrů PI regulátoru vyjdeme z odvozeného přenosu (1.57). Vstupní veličinou systému je napětí na kotvě. O regulaci tohoto napětí se stará elektronika řídicí jednotky. Regulace je prováděna pomocí tranzistorových H můstků. Samozřejmě i zde se projevuje jistý přechodový děj, jehož popis a zohledňování však vzhledem k rychlostem ostatních systémů přesahuje potřeby této práce. Bude tedy počítáno se zanedbáním těchto jevů a budeme předpokládat, že přenos uzavřené smyčky z požadovaného napětí v kotvě motoru na skutečné napětí je roven 1.

Za těchto podmínek lze přenos (1.57) doplnit o PI regulátor s přenosem:

$$F_{PI}(s) = K \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \quad (1.60)$$

Zařazením PI regulátoru (1.60) před regulovaný momentový systém (1.57) získáme přenos otevřené smyčky:

$$F_{Mol}(s) = F_{PI}(s)F_M(s) = K \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \frac{K_m}{L_k s + R_k} \quad (1.61)$$

Přenos uzavřené smyčky je popsán vztahem:

$$F_{Mcl}(s) = \frac{F_{I,Uol}(s)}{1 + F_{I,Uol}(s)} = \frac{KK_m(\tau_I s + 1)}{\tau_I L_k s^2 + (KK_m + R_k)\tau_I s + KK_m} \quad (1.62)$$

Přenos dále upravíme do tvaru:

$$F_{Mcl}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\frac{\tau_I L_k}{KK_m} s^2 + \frac{KK_m + R_k}{KK_m} \tau_I s + 1} \quad (1.63)$$

Z přenosu uzavřeného systému je patrné jednotkové zesílení regulované soustavy a to nezávisle na parametrech PI regulátoru.

Otázkou zůstává jak co možná nejlépe umístit póly uzavřené momentové smyčky. Požadujeme co možná nejrychlejší odezvu systému, je pro nás proto důležitým regulačním kritériem časová odezva systému. Budeme tedy požadovat co možná nejmenší časové konstanty uzavřené smyčky.

Principiálně zde vystupují určitá omezení.

Vzorkovací frekvence řídicích jednotek motorů je $10kH$, vzorkovací frekvence nadřazeného řízení je $1kH$. Z těchto údajů plyne omezení na dobu regulace momentové smyčky.

Doba regulace nebude určitě kratší než $0.1ms$, což plyne z hardwarového omezení a naopak by měla být kratší než $1ms$, tak aby se v ideálním případě přechodový děj momentového subsystému nepromítal do kvality regulace nadřazeného řízení.

Ke konkrétním výpočtům potřebujeme znát parametry regulovaného systému:

$$\begin{aligned} R_k &= 0.198\Omega \\ L_k &= 0.0345mH \\ K_M &= 13.9mNmA^{-1} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Dosazením těchto parametrů do přenosu (1.57) získáme model konkrétního systému.

$$F_M(s) = \frac{\frac{K_m}{R_k}}{\frac{L_k}{R_k} s + 1} = \frac{0.0702}{0.000172s + 1} \quad (1.65)$$

Časová konstanta otevřené smyčky systému:

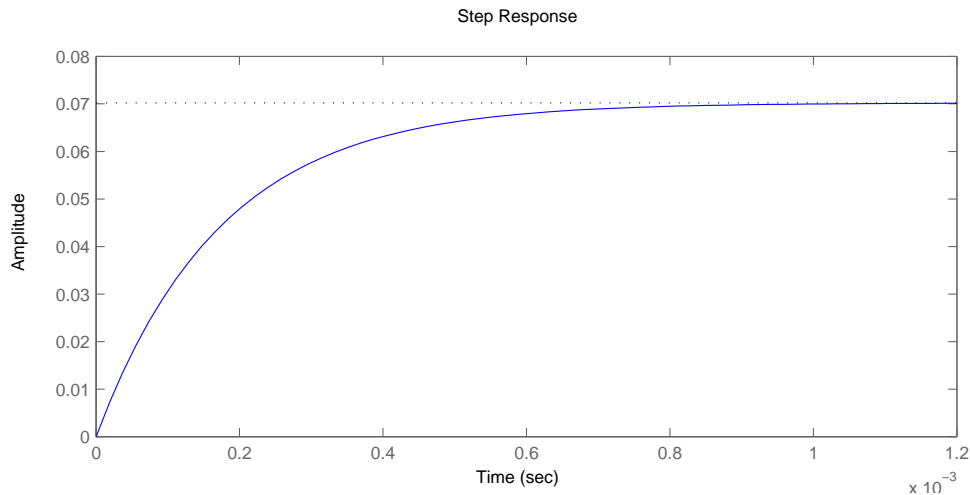
$$\tau_M = \frac{L_k}{R_k} = 0.000172 \quad (1.66)$$

Zesílení systému:

$$K = \frac{K_m}{R_k} = 0.0702 \quad (1.67)$$

Přechodová charakteristika tohoto systému je znázorněna na obrázku 1.3. Doba ustálení systému je přibližně 0.2ms . Rychlost odezvy subsystému není regulátorem nutno zásadně snižovat. Jak bylo nastíněno již dříve, odezvu systému kvůli hardwarovým omezením nemá význam snižovat pod 0.1ms .

Nezbytná pro další regulaci je ale úprava zesílení uzavřené smyčky subsystému. Zesílení otevřené smyčky je možné odečíst z čitatele přenosu (1.65) a také z grafu skokové odezvy na obr. 1.3. Uzavřená smyčka však musí mít jednotkové zesílení. Toto nám zajistí vhodně nastavený PI regulátor.



Obr. 1.3: Přechodová charakteristika otevřené smyčky momentového subsystému

Dle odvozeného přenosu uzavřené momentové smyčky (1.63), se obecně jedná o systém druhého řádu. PI regulátor je však možné nastavit takovým způsobem, aby nula regulátoru krátila pól přenosu systému. V takovémto případě získáme uzavřený systém prvního řádu.

Přenos otevřené smyčky regulačního obvodu:

$$F_M(s) = K \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \frac{K_m}{L_k s + R_k} \quad (1.68)$$

Ke krácení pólu systému dojde právě tehdy, když časová konstanta PI regulátoru bude rovna časové konstantě systému, tedy:

$$\tau_I = \frac{L_k}{R_k} \quad (1.69)$$

Přenos otevřené smyčky přejde do tvaru:

$$F_M(s) = \frac{KK_m}{R_k\tau_I s} \quad (1.70)$$

Přenos uzavřené smyčky:

$$F_M(s) = \frac{\frac{KK_m}{R_k}}{\tau_I s + \frac{KK_m}{R_k}} = \frac{1}{\frac{R_k\tau_I}{KK_m} s + 1} \quad (1.71)$$

Uzavřená momentová smyčka bude v tomto případě skutečně systém prvního řádu s požadovaným jednotkovým zesílením. Zároveň byl získán vztah pro integrační časovou konstantu, případně zesílení integrační části regulátoru (1.69).

Časová konstanta uzavřeného systému je po dosazení (1.69) dána vztahem:

$$\tau_M = \frac{R_k\tau_I}{KK_m} = \frac{L_k}{KK_m} \quad (1.72)$$

Urychlení či zpomalení původního systému je tedy dáno konstantou:

$$C = \frac{R_k}{KK_m} \quad (1.73)$$

V případě že chceme časovou konstantu původního systému zachovat, musí platit:

$$C = \frac{R_k}{KK_m} = 1 \quad (1.74)$$

tedy:

$$K = \frac{R_k}{K_m} \quad (1.75)$$

Získali jsme vztah pro druhý parametr PI regulátoru, K .

Díky požadavkům na vykrácení pólu systému a na zachování jeho časové konstanty byly získány jednoznačné vztahy pro nastavení PI regulátoru.

Dosazením parametrů (1.64) do vztahů (1.69) a (1.75) získáme jejich číselnou podobu:

$$\begin{aligned} \tau_I &= \frac{L_k}{R_k} = \frac{0.0000345}{0.198} = 0.0001742s \\ K &= \frac{R_k}{K_m} = \frac{0.198}{0.0139} = 14.245 \end{aligned} \quad (1.76)$$

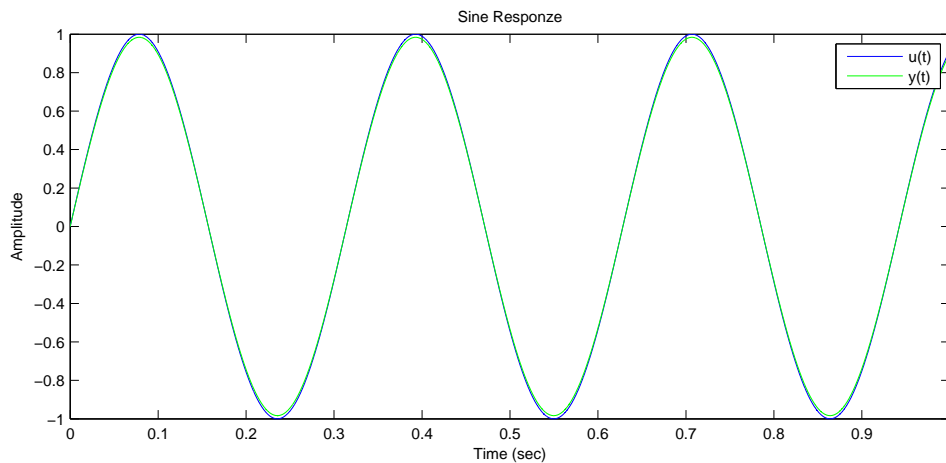
Integrační zesílení je dáno vztahem:

$$K_I = \frac{K}{\tau_I} = \frac{R_k^2}{L_k K_m} = 81751.642 \quad (1.77)$$

Vypočítaná hodnota integračního zesílení je hodně vysoká. Teoreticky systém splňuje naše požadavky, pro řídicí jednotky bude, ale integrační zesílení v řádech desetitisíců pravděpodobně neakceptovatelné.

Z tohoto důvodu byly parametry regulátoru laděny graficky pomocí webové utility [7].

Odezvu systému na harmonický signál s nastaveným PI regulátorem vidíme na obrázku 1.4.

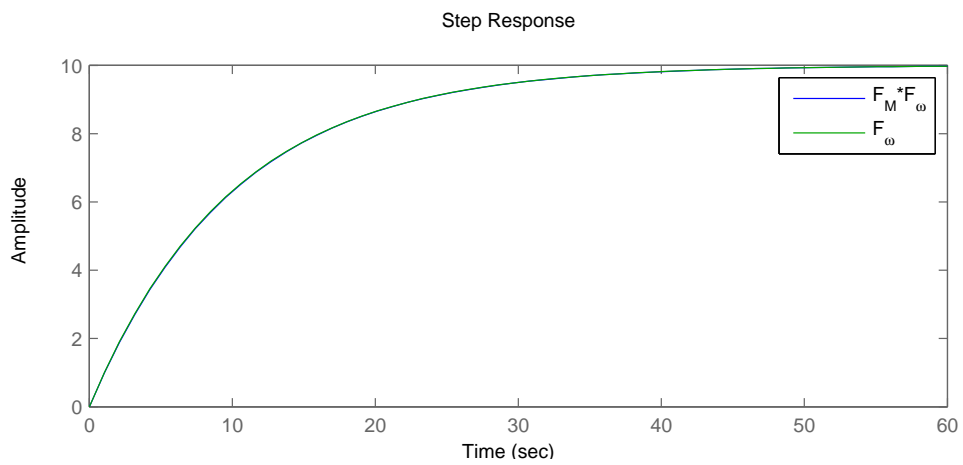


Obr. 1.4: Odezva uzavřené momentové regulační smyčky na harmonický signál

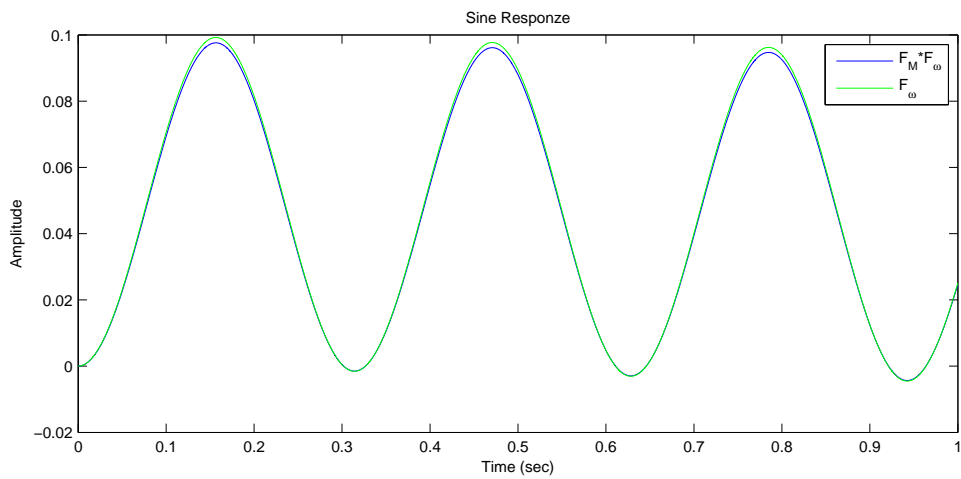
Odezva rychlostní smyčky

V případě dobře laděného regulátoru momentu má uzavřená momentová smyčka velmi rychlou odezvu. Přechodový děj systému nebude vzhledem ke vzorkovací periodě nadřazeného řídicího systému řízení příliš ovlivňovat, pro další kapitoly bude tedy dynamika uzavřené momentové smyčky zanedbána a bude předpokládáno, že přenos této smyčky je roven 1. Porovnání skokové odezvy rychlostního systému s podřízenou momentovou smyčkou a s momentovou smyčkou nahrazenou jednotkovým přenosem vidíme na obrázku 1.5. Odezva systému na skok obr. 1.5 i harmonický signál obr. 1.6 je v obou případech prakticky schodná.

Zanedbání přenosu uzavřené smyčky momentové regulace se tedy na kvalitě rychlostní smyčky projevuje jen minimálně.



Obr. 1.5: Srovnání skokové odezvy rychlosti při zanedbání dynamiky momentové smyčky



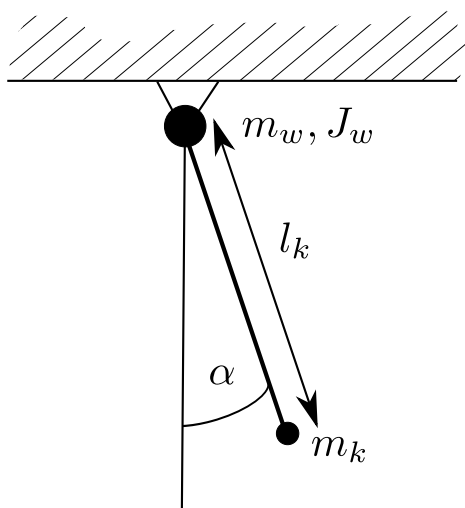
Obr. 1.6: Srovnání odezvy na harmonický signál při zanedbání dynamiky momentové smyčky

2 EXPERIMENTÁLNÍ IDENTIFIKACE PARAMETRŮ

V kapitole 1 byl odvozen linearizovaný matematický model idealizované dvojkolky. Ve stavovém popisu však vystupují parametry, které jsou analyticky velmi těžko zjistitelné. Tyto parametry bude nutné vhodným způsobem určit. Snadno měřitelné jsou hmotnosti jednotlivých částí, poněkud komplikovanějším úkolem však bude například určení momentů setrvačnosti kolem jednotlivých rotačních os modelu a poloha těžiště kyvadla. Pro zjištění těchto parametrů bude nutné navrhnout vhodné experimentální postupy.

2.1 Odvození vztahů pro výpočet parametrů

2.1.1 Moment setrvačnosti kola



Obr. 2.1: Experimentální zjištění momentu setrvačnosti kola

Moment setrvačnosti kola lze sice teoreticky určit výpočetně jako moment setrvačnosti disku. Kolo se však skládá z různých materiálů (hliník, guma), obrobek je nepravidelný a obsahuje otvory. Vhodnější tedy bude určit moment setrvačnosti experimentálně. Experiment pro tuto úlohu je založen na frekvenci kmitání známého referenčního kyvadla, které pevně spojíme s kolem v ose otáčení. Nákres experimentu vidíme na obrázku 2.1. Z periody vlastních kmitů soustavy lze odvodit moment setrvačnosti kola společně s momentem setrvačnosti rotačních částí motoru.

Pro výsledný moment kyvadla s kolem a rotujícími částmi platí:

$$J_s = J_w + J_k = J_w + m_k l_k^2 \quad (2.1)$$

Pohybová rovnice kmitání:

$$J_s \ddot{\alpha} + l_k m_k g \sin \alpha = 0 \quad (2.2)$$

Pro malé výchylky kmitů lze rovnici linearizovat.

Frekvence kmitů je dána rovnicí:

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{l_k m_k g \alpha}{J_s}} \quad (2.3)$$

Dosazením známého vztahu pro frekvenci kmitů

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.4)$$

do vzorce (2.3) získáme po úpravě vztah:

$$4\pi^2 J_s = T_s^2 l_k m_k g \quad (2.5)$$

S využitím (2.1) je moment setrvačnosti kola, rotoru a převodovky J_w popsán vztahem:

$$J_w = \frac{T_s^2 l_k m_k g}{4\pi^2} - m_k l_k^2 \quad (2.6)$$

2.1.2 Viskózní tření

Přenos momentu z motoru na systém není bohužel stoprocentní. Přeměna na pohybovou energii je zatížena mimo jiné třením na ložiskách. Toto tření je často popisováno lineární závislostí na úhlové rychlosti otáčení ω . Takto popsané tlumení lze určit z experimentu v části 2.1.1.

Řešení diferenciální rovnice tlumených harmonických kmitů má obecnou podobu:

$$y(t) = y_m e^{-bt} \cos(\omega(t + t_0)) \quad (2.7)$$

kde y_m je maximální výchylka a t_0 určuje počáteční fázi kmitů. Zajímat nás budou maxima funkce tedy okamžiky kdy je systém v rovnovážné poloze. Předpokládejme,

že funkce dosáhne prvního maxima v čase $t = t_0 = 0$ s amplitudou $y(t_0) = y_m$. Pro maxima dále platí $\cos(\omega(t_0 + kT)) = 1$.

Pro amplitudy maximálních výchylek tedy bude platit vztah:

$$y(kT) = y_m e^{-bkT} \quad (2.8)$$

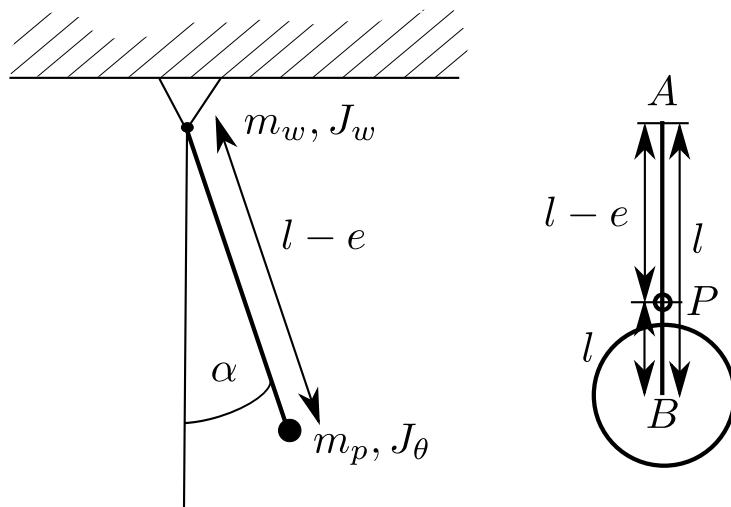
Úpravou vztahu získáme rovnici pro výpočet tlumení b :

$$b = \frac{\ln \frac{y_m}{y(kT)}}{kT} \quad (2.9)$$

K určení tlumení kmitů nám tedy postačí změření dvou maximálních výchylek a periody kmitů.

Lepším řešením, které bylo také použito, je zjištění všech extrémů naměřeného signálu a tyto body aproximovat exponenciální křivkou. Pro tento účel byl vytvořen skript v programu Matlab, jehož grafický výstup je zobrazen na obrázku 2.4.

2.1.3 Poloha těžiště



Obr. 2.2: Experimentální určení polohy těžiště

Dalším z parametrů potřebných k vytvoření konkrétního matematického modelu dvojkolky je moment setrvačnosti kolem vodorovné osy. Tato osa je tvořena hřídelemi motorů, které model pohánějí. Výpočetní metodou je tento parametr vzhledem ke složitosti rozložení hmoty a její nehomogenitě prakticky nemožné určit. Jsme zde tedy nuceni sáhnout po experimentální identifikaci. Tento experiment je založen na nahrazení soustavy matematickým kyvadlem. Experiment je zobrazen na obrázku

2.2. Soustava bude rozkývána ve 2 nezávislých bodech ležících na jedné přímce společně se středem hmotnosti soustavy. Ze známé vzdálenosti bodů a z period vlastních kmitů získaných rozkýváním modelu ve zvolených bodech lze určit přesnou polohu těžiště a momenty setrvačnosti v osách procházejících těmito body.

Reálný model bude rozkýván v ose otáčení kol, vůči které potřebujeme znát moment setrvačnosti a dále v ose procházející vrcholem kyvadla.

Pro momenty setrvačnosti v těchto bodech platí:

$$\begin{aligned} J_A &= J_\theta + m_p (l - e)^2 \\ J_B &= J_\theta + m_p e^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Diferenciální rovnice náhradních matematických kyvadel pro jednotlivé body:

$$J_A \ddot{\alpha} + (l - e) m_p g \sin \alpha = 0 \quad (2.11)$$

$$J_B \ddot{\alpha} + e m_p g \sin \alpha = 0 \quad (2.12)$$

Experimenty budou prováděny při malých výchylkách kyvadla, lze tedy využít lineární aproximaci funkce \sin .

Po linearizaci a dosazení (2.10) získáváme vztahy:

$$(J_\theta + m_p (l - e)^2) \ddot{\alpha} + (l - e) m_p g \alpha = 0 \quad (2.13)$$

$$(J_\theta + m_p e^2) \ddot{\alpha} + e m_p g \alpha = 0 \quad (2.14)$$

Jedná se o kmitavé systémy druhého řádu s frekvencemi:

$$\Omega_A = \sqrt{\frac{(l - e) m_p g}{J_\theta + m_p (l - e)^2}} \quad (2.15)$$

$$\Omega_B = \sqrt{\frac{e m_p g}{J_\theta + m_p e^2}} \quad (2.16)$$

Frekvence kmitů ponechme v kvadrátu a využijme známý vztah pro frekvenci kmitů:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.17)$$

Po vynásobení rovnic jmenovateli dostáváme:

$$T_A^2 m_p g l - T_A^2 m_p g e = 4\pi^2 J_\theta + 4\pi^2 m_p (l^2 - 2le + e^2) \quad (2.18)$$

$$T_B^2 m_p g e = 4\pi^2 J_\theta + 4\pi^2 m_p e^2 \quad (2.19)$$

Odečtením těchto rovnic se zbavujeme J_θ a získáváme lineární rovnici s neznámou e .

$$T_A^2 m_p g l - (T_A^2 + T_B^2) m_p g e = 4\pi^2 m_p (l^2 - 2le) \quad (2.20)$$

Vydělením výrazu hmotností m_p a jednoduchou úpravou získáváme předpis pro výpočet hledané vzdálenosti těžiště e .

$$e = \frac{4\pi^2 l^2 - T_A^2 g l}{8\pi^2 l - g(T_A^2 + T_B^2)} \quad (2.21)$$

2.1.4 Moment setrvačnosti kolem vodorovné osy rotace

Moment setrvačnosti kolem vodorovné osy otáčení J_θ lze určit dosazením (2.21) do vztahu (2.19). Úpravou výrazu získáme pro moment setrvačnosti vztah:

$$J_\theta = \frac{T_B^2 m_p g}{4\pi^2} \left(\frac{4\pi^2 l^2 - T_A^2 g l}{8\pi^2 l - g(T_A^2 + T_B^2)} \right) - m_p \left(\frac{4\pi^2 l^2 - T_A^2 g l}{8\pi^2 l - g(T_A^2 + T_B^2)} \right)^2 \quad (2.22)$$

2.1.5 Moment setrvačnosti kolem svislé osy rotace

Moment setrvačnosti J_δ , tedy moment setrvačnosti soustavy kolem svislé osy je zapotřebí pro řízení natočení dvojkolky. Analytický výpočet tohoto momentu setrvačnosti je prakticky nemožný, je tedy na místě navrhnout vhodný experiment.

Také v tomto případě bude experiment založen na vlastních kmitech soustavy. Dvojkolka bude zavěšena ve svislé poloze na dvojici rovnoběžných lan uvázaných na těle dvojkolky za osy motorů v místech kol. Experiment je znázorněn na obrázku 2.3. Soustava tvoří "torzní kyvadlo". Ze známých délek závěsů, jejich vzájemných vzdáleností a periody kmitů lze odvodit vztah pro hledaný moment setrvačnosti J_δ .

Tíhová síla působící na jednotlivé závěsy:

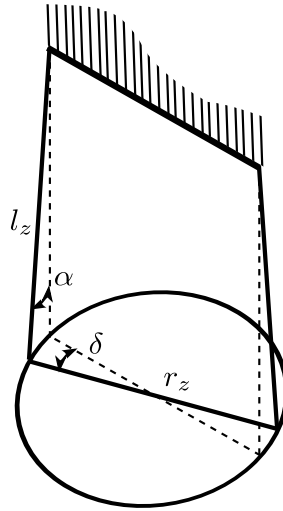
$$F = \frac{(m_p + 2m_w)g}{2} \quad (2.23)$$

Pohybová rovnice tohoto kyvadla bude mít podobu:

$$J_\delta \ddot{\delta} + (m_p + 2m_w) g r_z \sin \alpha = 0 \quad (2.24)$$

Úhel α lze dle obrázku vyjádřit aproximací:

$$l_z \alpha = r_z \delta \quad (2.25)$$



Obr. 2.3: Experimentální určení momentu setrvačnosti kolem svislé osy

Dosazením do (2.24) rovnice přejde do tvaru:

$$J_{\delta}\ddot{\delta} + (m_p + 2m_w) gr_z \frac{r_z \delta}{l_z} = 0 \quad (2.26)$$

Obdobně jako u předchozích experimentů lze z rovnice vyjádřit vztah pro kvadrát frekvence kmitů Ω :

$$\Omega^2 = \frac{(m_p + 2m_w) gr_z^2}{J_{\delta} l_z} \quad (2.27)$$

Do rovnice dosadíme frekvence kmitů (2.17) a úpravou získáme hledaný výraz pro výpočet momentu setrvačnosti J_{δ} :

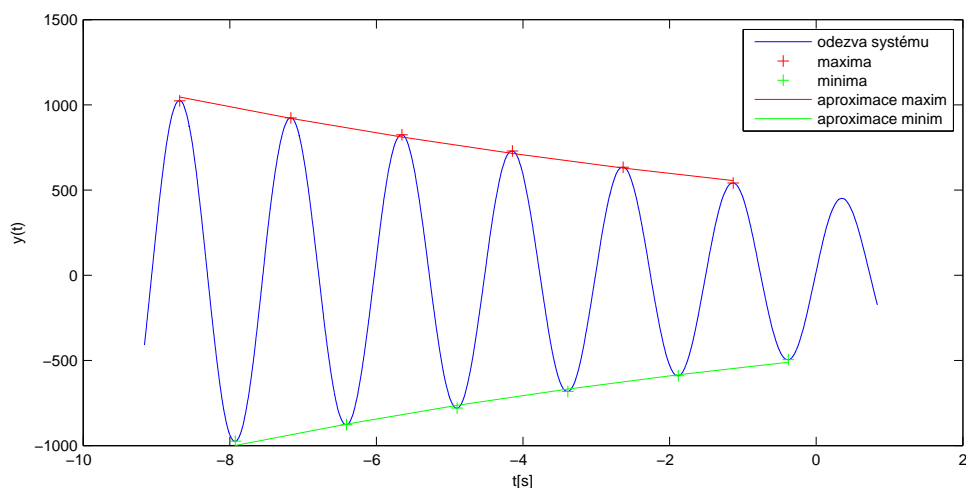
$$J_{\delta} = \frac{(m_p + 2m_w) gr_z^2 T_z^2}{4\pi^2 l_z} \quad (2.28)$$

2.2 Identifikované parametry

Vztahy pro experimentální výpočty neznámých parametrů byly odvozeny v předchozí části. Přejdeme tedy k samotným experimentům.

Experimentální identifikace parametrů je u tohoto systému ve všech případech založena na měření vlastní frekvence kmitů. Experimentálně získaná data jsou však samozřejmě zatížena poruchami. Z tohoto důvodu je nutné pro každý experiment získat dostatečně rozsáhlý soubor naměřených dat tak, aby bylo možné hledané parametry určit co možná nejpřesněji.

Vzhledem k množství naměřených dat lze jejich analýzu jen velmi těžko provádět bez využití výpočetních systémů. Za tímto účelem byl proto vytvořen jednoduchý skript v programu Matlab, který najde extrémní kmitů, z nichž je následně vypočítána průměrná perioda kmitů a aproximované tlumení kmitů, grafický výstup skriptu vidíme na obrázku 2.4.



Obr. 2.4: Analýza vlastních kmitů kola s referenčním kyvadlem

V následující tabulce najdeme parametry měřené přímou metodou.

Hmotnost těla dvojkolky $m_p=6.75\text{kg}$

Hmotnost kola $m_w=0.51\text{kg}$

Délka kyvadla $l=0.582\text{m}$

Poloměr kola $R=0.073\text{m}$

Polovina vzdálenosti kol $r=0.172\text{m}$

Tíhové zrychlení g používané ve výpočtech:

$$g = 9.81\text{kgms}^{-2} \quad (2.29)$$

2.2.1 Moment setrvačnosti kol

Moment setrvačnosti kola je měřen pomocí referenčního kyvadla. Pro výpočet je tedy nezbytné uvést jeho parametry:

Hmotnost kyvadla $m_k=0.22\text{kg}$

Redukovaná délka kyvadla $l_k=0.51\text{m}$

Experimentálně naměřené průměrné periody vlastních kmitů jednotlivých kol:

$$\begin{aligned}T_{s1} &= 1.514\text{s} \\ T_{s2} &= 1.510\text{s}\end{aligned}\tag{2.30}$$

Dosažením této periody a parametrů 2.2.1 do odvozeného vztahu 2.6 získáváme:

$$\begin{aligned}J_{w1} &= 0.00649\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \\ J_{w1} &= 0.00615\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}\end{aligned}\tag{2.31}$$

V modelu bude počítáno s průměrnou hodnotou obou setrvačností:

$$J_w = 0.00631\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}\tag{2.32}$$

2.2.2 Viskózní tření

Viskózní tření bylo určeno přímou analýzou naměřených dat. Data pro jedno z kol vidíme na obrázku 2.4.

Pro jednotlivá kola byly získány hodnoty:

$$\begin{aligned}b_1 &= 0.0867 \\ b_2 &= 0.0864\end{aligned}\tag{2.33}$$

Počítáno bude s průměrnou hodnotou tlumení: $b_1 = b_2 = 0.0866$.

2.2.3 Poloha těžiště kyvadla

Pozice kyvadla bude nalezena dle navrženého experimentu 2.1.3.

Perioda kmitů kyvadla zavěšeném v ose kol:

$$T_B = 1.310\text{s}\tag{2.34}$$

Perioda kmitů kyvadla zavěšeném za vrchol:

$$T_A = 1.512\text{s}\tag{2.35}$$

Dosazením periody kmitů a ostatních potřebných parametrů do vztahu 2.21 získáme hledanou polohu těžiště e :

$$e = 0.0478m \quad (2.36)$$

2.2.4 Moment setrvačnosti kyvadla kolem vodorovné osy rotace

Periody z předchozí části dosadíme do vztahu 2.22 společně s ostatními parametry. Velikost momentu setrvačnosti J_θ bude:

$$J_\theta = 0.122kg \cdot m^{-2} \quad (2.37)$$

2.2.5 Moment setrvačnosti kolem svislé osy

Naměřená perioda kmitů torzního kyvadla:

$$T_z = 1.823s \quad (2.38)$$

Dosazením parametrů do vztahu 2.28 bude vypočten moment setrvačnosti J_δ :

$$J_\delta = 0.0996kg \cdot m^{-2} \quad (2.39)$$

2.3 Výsledný model systému

Připomeňme odvozený stavový popis systému z kapitoly 1 respektive pro nás důležitou matici dynamiky A a matici řízení B :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-R^2 m_p^2 e^2 g}{den_1} & \frac{-(b_1 + b_2) k_1}{den_1} & 0 & 0 & \frac{r(b_1 - b_2) k_1}{den_1} \\ 0 & \frac{m_p e g (2J_w + 2R^2 m_w + R^2 m_p)}{den_1} & \frac{(b_1 + b_2) k_2}{R den_1} & 0 & 0 & \frac{-r(b_1 - b_2) k_2}{R den_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{r(b_1 - b_2)}{den_2} & 0 & 0 & \frac{-r^2(b_1 + b_2)}{den_2} \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{Rk_1}{den_1} & \frac{Rk_1}{den_1} \\ \frac{k_2}{den_1} & -\frac{k_2}{den_1} \\ 0 & 0 \\ \frac{Rr}{den_2} & \frac{Rr}{den_2} \end{bmatrix} \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

kde:

$$\begin{aligned}
 den_1 &= R^2 (2m_w m_p e^2 + 2m_w J_\theta + m_p J_\theta) + 2m_p e^2 J_w + 2J_\theta J_w \\
 den_2 &= R^2 J_\delta + 2R^2 r^2 m_w + 2r^2 J_w \\
 k_1 &= m_p e^2 + J_\theta + R m_p e \\
 k_2 &= R m_p e + 2J_w + 2R^2 m_w + R^2 m_p \tag{2.41}
 \end{aligned}$$

Dosazením parametrů počítaných v části 2.2 do výše uvedených matic získáme konkrétní podobu matic A a B hledaného stavového popisu.

Matice systému mají po dosazení podobu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.799 & -4.060 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24.989 & 26.792 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.809 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.713 & 1.713 \\ -11.305 & -11.305 \\ 0 & 0 \\ -11.797 & 11.797 \end{bmatrix}$$

Povšimněme si, že pokud budou pro obě kola stejné koeficienty tlumení $b_1 = b_2$, v matici A se vynulují prvky na pozicích $a_{3,5}$ a $a_{4,5}$. Tato skutečnost znamená zjednodušení celého problému řízení. Nejen že lze systém separovat na dva jednodušší subsystémy, kde první představuje stabilizaci s přímočarým pohybem a druhý rotační pohyb kolem svislé osy, ale vhodnou transformací řízení lze také docílit zjednodušení řízení a systém řídit jedním vstupem. Tento fakt má velký význam pro pozdější výpočet parametrů stavové zpětné vazby. Pokud bude mít systém pouze jeden vstup, je problém přiřazení pólů stavovou zpětnou vazbou lineární. Existuje tedy jedno konkrétní řešení. V případě 2 vstupů systému se výpočet zpětné vazby komplikuje, protože v tomto případě má daný problém nekonečnou množinu řešení.

Povšimněme si matice B . V jednotlivých řádcích zde vystupují stejné koeficienty. V posledním řádku se liší znaménkem. Vhodně zvolenou transformační maticí T :

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

lze matici B transformovat do podoby

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.713 & 0 \\ -11.305 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 11.797 \end{bmatrix}$$

Nyní provedeme rozdělení systému na dílčí subsystémy.

Stavový popis systému stabilizace a přímočarého pohybu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.799 & -4.060 & 0 \\ 0 & 24.989 & 26.792 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.713 \\ -11.305 \end{bmatrix} M\theta \quad (2.43)$$

Umístění pólů otevřeného systému:

$$p = [0 \quad 4.750 \quad -6.001 \quad -2.808] \quad (2.44)$$

System je astatický s astatismem prvního řádu a obsahuje dva stabilní póly. Nestabilní pól a pól umístěný v nule budeme chtít vhodným způsobem umístit v levé komplexní polorovině.

Stavový popis subsystému otáčení:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4.809 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 11.797 \end{bmatrix} M\delta \quad (2.45)$$

Pro tyto dílčí subsystémy bude v následující kapitole navrženo řízení.

3 METODY SLEDOVÁNÍ TRAJEKTORIE

Tato část bude věnována úloze sledování trajektorie dvojkolky, jejíž matematický model byl odvozen a analyzován v předchozích částech práce. Řízení bude navrženo pro rozdělený systém popsany v 2.3. Řízení pohybu je problematické z důvodu požadovaného zachování stability inverzního kyvadla. V průběhu řešení této úlohy se ukázalo, že daný problém lze jen velmi těžko řešit odděleně samostatným návrhem regulace pohybu, ale že je nutné k danému problému přistupovat jako k celku. Stabilizace kyvadla je prováděna pomocí stavové zpětné vazby, pokusíme se tedy tuto metodu použít také pro řízení pohybu. K řízení pohybu použijeme nejen klasickou stavovou zpětnou vazbu, ale také stavovou zpětnou vazbu s integrací regulační odchylky.

Začneme ale nejprve teorií k problematice modálního řízení, do kterého spadá také úloha přiřazení pólů stavovou zpětnou vazbou.

3.1 Modální řízení

Problematice modálního řízení se podrobně věnuje práce [9], ze které bude v této kapitole čerpáno. Vzhledem k rozsahu práce zde budou uvedeny pouze základní vztahy a principy.

3.1.1 Sylvestrova maticová rovnice

Obsah této části má přípravný charakter. Závěry a důsledky budou dále využity pro odvození úlohy modálního řízení.

Sylvestrova rovnice je maticová rovnice ve tvaru

$$AX - XL + R = 0 \quad (3.1)$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times s}$ jsou zadané matice a $X \in \mathbb{R}^{n \times s}$ je neznámá matice. Uvažujme systém S_1

$$S_1 : \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Lx, \quad x(0) = x_0, \\ y &= Hx \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde $L \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $H \in \mathbb{R}^{m \times s}$, který řídí systém S_2

$$S_2 : \quad \dot{z} = Az + By, \quad z(0) = z_0 \quad (3.3)$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Souvislost stavů $z(t)$ systému S_2 a $x(t)$ systému S_1 je popsána větou:

Věta 3.1.1: *Nechť $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$, potom*

$$z(t) = Tx(t) + e^{At} (z_0 - Tx_0) \quad (3.4)$$

kde T je jediné řešení maticové rovnice

$$AT - TL + BH = 0 \quad (3.5)$$

Z (3.4) plyne, že stav $z(t)$ systému S_2 je za předpokladu stabilní matice A v ustáleném stavu lineární kombinací $Tx(t)$ stavu S_1 . Jestliže $z_0 = Tx_0$, pak je dokonce $z(t) = Tx(t)$ pro libovolné $t \geq 0$ a systém S_2 se chová tak, jako by obsahoval dynamiku systému S_1 . Toto je základní princip našeho přístupu k modálnímu řízení. Uvedme nyní podmínku řešitelnosti Sylvestrový rovnice (3.1) a podmínku, kdy existuje právě jedno řešení.

Věta 3.1.2: *Maticová rovnice (3.1) má řešení právě tehdy, když matice*

$$\begin{bmatrix} A & R \\ 0 & L \end{bmatrix} \quad a \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

jsou podobné.

Věta 3.1.3: *Nechť $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$. Pak ke každé matici R existuje právě jedno řešení X maticové rovnice (3.1)*

Uvažujme případ, kdy $R = BH$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $H \in \mathbb{R}^{m \times s}$, který nastal ve větě 3.1.1.

Věta 3.1.4: *Nechť $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$. Potom řešení maticové rovnice (3.1) pro $R = BH$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $H \in \mathbb{R}^{m \times s}$, tj. maticové rovnice*

$$AT - TL + BH = 0$$

je dáno vztahy

$$X = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} p_{n-1}I_m & p_{n-2}I_m & \dots & p_1I_m & I_m \\ p_{n-2}I_m & p_{n-3}I_m & \dots & I_m & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_1I_m & I_m & \dots & 0 & 0 \\ I_m & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ HL \\ \vdots \\ HL^{n-1} \end{bmatrix} [p_A(L)]^{-1} \quad (3.6)$$

$$X = [q_L(A)]^{-1} [B, AB, \dots, A^{s-1}B] \begin{bmatrix} q_{s-1}I_m & q_{s-2}I_m & \dots & q_1I_m & I_m \\ q_{s-2}I_m & q_{s-3}I_m & \dots & I_m & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_1I_m & I_m & \dots & 0 & 0 \\ I_m & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ HL \\ \vdots \\ HL^{s-1} \end{bmatrix} [p_A(L)]^{-1} \quad (3.7)$$

kde $p_A(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n$ a $q_L(\lambda) = \lambda^s + q_1\lambda^{s-1} + \dots + q_s$ jsou po charakteristické polynomy matic A a L .

Důsledek této věty:

Nechť $R = bh^T$, $b, h \in \mathbb{R}^n$, $s = n$, (A, b) je říditelná a (h^T, L) pozorovatelná dvojice, potom X je regulární.

3.1.2 Modální řízení

Cílem této části je odvození vztahu pro výpočet stavové zpětné vazby přiřazující požadované rozmístění pólů pomocí explicitního řešení Sylvestrové maticové rovnice. Obsah této části je čerpán z [9].

Bass - Guarův vztah

Uvažujme říditelný systém (A, b) , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ s charakteristickým polynomem

$$p(s) = \det(sI - A) = s^n + p_1s^{n-1} + \dots + p_n \quad (3.8)$$

Přejeme si modifikovat dynamické chování daného systému stavovou zpětnou vazbou tak, aby charakteristický polynom uzavřeného systému byl

$$q(s) = \det(sI - A - bf^T) = s^n + q_1s^{n-1} + \dots + q_n \quad (3.9)$$

Tento přístup spočívá ve využití explicitního řešení vhodné Sylvestrové maticové rovnice. Uvažujme maticovou rovnici

$$AX - XL + bh^T = 0 \quad (3.10)$$

kde $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^n$ jsou takové, že jsou splněny následující dvě podmínky:

1. $\det(sI - L) = q(s)$
2. dvojice (h^T, L) je pozorovatelná

Potom dle důsledku věty 3.1.4 je řešení maticové rovnice (3.10) regulární a vynásobením zprava maticí X^{-1} obdržíme

$$A + bh^T X^{-1} = XLX^{-1} \quad (3.11)$$

Tedy $f^T = h^T X^{-1}$ je hledaná stavová zpětná vazba, neboť podobné matice mají totožný charakteristický polynom.

Podle věty 3.1.4 má maticová rovnice (3.10) řešení

$$X = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} p_{n-1} & \dots & p_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_1 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^T \\ h^T L \\ \vdots \\ h^T L^{n-1} \end{bmatrix} [p(L)]^{-1} \quad (3.12)$$

a pro f^T tedy platí

$$f^T = h^T p(L) \left\{ [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} p_{n-1} & \dots & p_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_1 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^T \\ h^T L \\ \vdots \\ h^T L^{n-1} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \quad (3.13)$$

Výše uvedený vzorec (3.13) již udává explicitní vztah pro výpočet stavové zpětné vazby. Lze ho však dále zjednodušit vhodnou volbou L a h . Zvolme například

$$h^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ -q_n & \dots & \dots & \dots & -q_1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Podmínky kladené na dvojici (h^T, L) jsou touto volbou splněny. Dosazením (3.14) do (3.13) dostáváme Bass-Guarův vztah:

$$f^T = [p_n - q_n, p_{n-1} - q_{n-1}, \dots, p_1 - q_1] \begin{bmatrix} p_{n-1} & \dots & p_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_1 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1} \quad (3.15)$$

Uvedené odvození je dle předpokladů věty 3.1.4 správné pouze pro případ, že polynomy $p(s)$ a $q(s)$ jsou nesoudělné. Ze spojitosti však vyplývá, že (3.15) platí i pro případ, kdy $p(s)$ a $q(s)$ jsou soudělné.

Úloha modálního řízení

Uvažujme lineární stacionární systém

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.16)$$

kde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ je stav systému, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ je vektor řízení a A, B jsou reálné matice příslušných rozměrů. Dalším předpokladem bude říditelnost dvojice (A, B) a plná sloupcová hodnota B . Bude-li u systému (3.16) zavedena stavová zpětná vazba

$$u(t) = Fx(t) \quad (3.17)$$

potom bude mít vzniklý uzavřený systém podobu

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \quad (3.18)$$

Požadujeme, aby dynamické chování systému (3.18) bylo „podobné“ dynamickému chování systému $\dot{z}(t) = Lz(t)$, kde $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je vhodně zvolená matice. Definujme tedy množinu $\mathcal{F}(A, B, L)$

$$\mathcal{F}(A, B, L) \triangleq \{F \in \mathbb{R}^{m \times n} : A + BF \text{ je podobná } L\} \quad (3.19)$$

obsahující všechny stavové zpětné vazby F takové, že matice dynamiky systému (3.18) je podobná matici L . Pokud má systém (3.16) pouze jeden vstup, pak $\mathcal{F}(A, B, L)$ obsahuje nejvýše jednu zpětnou vazbu F . V obecném případě je však množina $\mathcal{F}(A, B, L)$ obecně nekonečná množina.

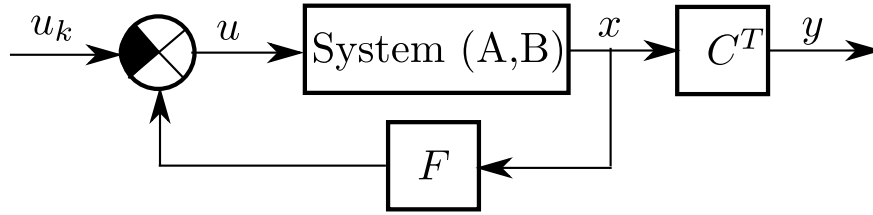
3.2 Stavová zpětná vazba

Jednou z konvenčních metod pro stabilizaci případně sledování trajektorie je stavová zpětná vazba, jejíž schéma vidíme na obrázku 3.1. Pomocí stavové zpětné vazby je řešena také úloha stabilizace dvojkolky. V průběhu řešení problému sledování trajektorie se ukázalo, že úlohu stabilizace a sledování trajektorie dvojkolky nelze řešit separabilně, ale že je zapotřebí k problému přistupovat jako k celku. Protože je systém stabilizován stavovou zpětnou vazbou, pokusme se modifikací této metody řídit také pohyb dvojkolky.

Výhodou stavové zpětné vazby je skutečnost, že v případě plné říditelnosti systému lze libovolně přiřadit všechny póly systému, přičemž nedochází ke změně jeho řádu. Zachování řádu systému vychází ze samotné podstaty stavové zpětné vazby. Jedná se vlastně o soustavu proporcionálních regulátorů.

Připomeňme si systém, pro který budeme navrhovat řízení.

Použijeme rozdělený model z části 2.3:



Obr. 3.1: Stavová zpětná vazba

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.799 & -4.060 & 0 \\ 0 & 24.989 & 26.792 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.713 \\ -11.305 \end{bmatrix} M\theta$$

Tento model popisuje subsystém stabilizace systému přímočarým pohybem, který budeme chtít řídit stavovou zpětnou vazbou. Systém je čtvrtého řádu, pomocí stavové zpětné vazby tedy potřebujeme vhodně umístit čtveřici pólů.

Nejprve ověříme nutnou podmínku pro přiřazení všech pólů stavovou zpětnou vazbou a sice plnou říditelnost systému.

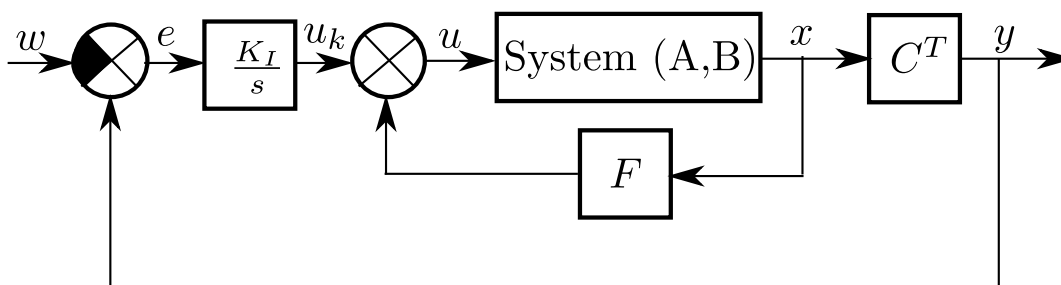
Matice říditelnosti pro daný systém má plnou řádkovou hodnost, systém je plně říditelný a stavovou zpětnou vazbou lze libovolně přiřadit všechny póly systému.

K parametrizaci a výpočtu stavové zpětné vazby bude využito skriptů pro program Maple, které byly vytvořeny v práci [5]. Parametrické vzorce zde vzhledem ke svému rozsahu nebudou uvedeny. Konkrétní výpočty koeficientů stavové zpětné vazby pro požadované umístění pólů budou uvedeny v podkapitole 4.1.

3.3 Stavová zpětná vazba s integrací regulační odchylky

Klasická stavová zpětná vazba systém uvádí do počátečního stavu - stavové veličiny reguluje na nulu. Lze očekávat že tento přístup bude bez větších problémů fungovat pro matematický model, pro který bylo řízení navrženo. Při implementaci na reálný systém však toto řízení nebude dosahovat takových kvalit jako v případě simulace. Rozdílné chování může být způsobeno několika příčinami. Matematický model je vždy do jisté míry nepřesný. Některé skutečnosti jsou kvůli zjednodušení úlohy modelování a návrhu řízení zanedbány, model je linearizován v okolí pracovního bodu, nelze zcela přesně určit parametry, které v modelu vystupují a v neposlední řadě

u reálného systému často vystupují nelinearity, které model neobsahuje a které lze jen obtížně popsat.



Obr. 3.2: Stavová zpětná vazba s integrací

V tomto případě stavová zpětná vazba uvede systém do rovnovážného stavu, tento stav ale nebude nulový jako v ideálním případě. U stavových veličin lze očekávat nenulovou regulační odchylku.

Pokud chceme omezit vliv nelinearit reálného systému a zajistit nulovou odchylku regulované veličiny v rovnovážném stavu, je možné systém rozšířit o integraci regulační odchylky výstupu systému a navrhnout stavovou zpětnou vazbu pro rozšířený systém. Díky této modifikaci máme zaručenu nulovou regulační odchylku v ustáleném stavu i u nepřesně namodelovaného systému.

Rozšířený systém, který je dle obrázku 3.2 popsán maticemi A , B a C^T , musí být pro libovolné přiřazení všech pólů systému stavovou zpětnou vazbou plně říditelný. Při zvýšení řádu astatismu se však můžeme dostat do konfliktu s podmínkou říditelnosti.

Naším záměrem byla přesná regulace rychlosti pohybu dvojkolky.

Pro systém rozšířený o integraci odchylky rychlosti dostáváme matice A a B tvaru:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.799 & -4.060 & 0 & 0 \\ 0 & 24.989 & 26.792 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.713 \\ -11.305 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Matice říditelnosti této soustavy má hodnost 4, systém je však pátého řádu, není splněna podmínka říditelnosti systému a pro dané rozšíření tedy nelze dále pokračovat.

Pokud ale budeme chtít regulovat s nulovou odchylkou pozice, situace bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.799 & -4.060 & 0 & 0 \\ 0 & 24.989 & 26.792 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.713 \\ -11.305 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Matice říditelnosti této soustavy má plnou řádkovou hodnost, systém je plně říditelný a stavovou zpětnou vazbou lze přiřadit všechny póly systému.

Pro parametrizaci a výpočet stavové zpětné vazby využijeme opět knihovnu v programu Maple. Konkrétní příklad bude uveden v podkapitole 4.1.

3.4 Řízení směru

Díky možnosti rozdělení systému lze k problému otáčení přistupovat samostatně. Rozdělení systému však nepřinese pouze zjednodušení návrhu řízení. Protože bylo ukázáno, že otáčení systému v ideálním případě neovlivňuje subsystém stabilizace kyvadla, je možné pro řízení směru využít agresivnější regulaci než pro systém pohybu vpřed a vzad, který stabilizaci zřejmě ovlivňuje. Pro tuto úlohu tedy využijeme dynamický PID regulátor, který bude mnohem lépe reagovat na nelinearity a na poruchy působící na reálný systém. V tomto ohledu je rozdělení systému velkou výhodou, protože směr a otáčení bude možné regulovat přesněji a rychleji než by umožňovalo využití stavové zpětné vazby v případě, že by systém nebylo možné rozdělit, nebo bychom jej dělit nechtěli.

Při hlubším zamyšlení se dostáváme k otázce, za jakých podmínek byl tento model odvozen. Jak bylo několikrát nastíněno, pro úlohu stabilizace a řízení pohybu byl systém zjednodušen. Předpokladem bylo, že stabilizace bude řešena přímočarým pohybem. Pro jednoduchost a snadnou řešitelnost stavové zpětné vazby bylo

předpokládáno, řízení systému jedním vstupem, tedy momentem potřebným pro stabilizaci kyvadla. Tento moment je později transformován na jednotlivá kola, přičemž na každé kolo chceme posílat polovinu vypočítaného momentu. Zde, ale začínáme tušit jisté komplikace. Systém předpokládá jeden vstup, ale je řízen dvěma motory. Kola systému nejsou pevně spojena hřídelí jak se předpokládá a je tedy možné nesyndronní otáčení. Navíc u reálného systému nemají kola ideální tvar a figuruje zde také tření. Systém se tedy nebude pohybovat po přímce a nebude mu dodána potřebná energie pro stabilizaci.

Pokud budeme chtít zatáčet, za určitých podmínek se tato situace stává ještě horší. Řízení je zapotřebí upravit. Jednou z možností je zachování přímočaré stabilizace a moment potřebný pro stabilizaci počítat z průměru pozice a rychlosti kol. Tento způsob nevede k nestabilitě. Pro řízení směru je však zapotřebí implementovat další regulátor. Vzhledem k faktu, že pro podobné koeficienty tlumení motorů b_1 a b_2 zatáčení systému neovlivňuje stabilitu, může být řízení směru provedeno rychlým dynamickým regulátorem, aniž abychom destabilizovali regulační smyčku kyvadla. Problémem tohoto přístupu je skutečnost, že je řízení pro stabilizaci a případný pohyb počítáno z pozice a rychlosti těžiště soustavy. Není tedy řízen stav jednotlivých kol, ale stav těžiště.

Druhou možností je transformovat řízení tak, že polohu a rychlost nebudeme průměrovat, ale budeme ji řešit pro každé kolo zvlášť, takto lze regulovat kola přímo a není zde zavedena odchylka ve stavu kol vzniklá průměrováním. Tato idea však není takto jednoduchá. Kola totiž ztrácí vazbu na polohu těžiště a díky charakteru systému se v případě, že jsou kola vychýlena proti sobě, systém snaží regulovat každé kolo zvlášť a zvětšit rychlost tak, aby bylo dosaženo potřebného náklonu kyvadla. Kyvadlo se však při rotaci nevychyluje a systém se nekontrolovatelně roztočí kolem svislé osy. Pro zachování stability je tedy nutné udržet vazbu mezi koly. Pro tuto úlohu se nabízí využití rychlé PID regulace.

Výhodou tohoto přístupu je přímá regulace stavu kol, což umožňuje přesnější pohyb.

Přejděme k nyní k jádru problému. Definujme nejprve výstup systému jako úhel natočení δ .

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Matice dynamiky a řízení:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4.809 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 11.797 \end{bmatrix} M\delta \quad (3.23)$$

Přenos systému, který odpovídá stavovému popisu (3.23) s výstupem (3.22) bude mít podobu:

$$F_{\delta, M_\delta} = \frac{11.797}{s^2 + 4.809s} \quad (3.24)$$

Pro daný přenos chceme navrhnout dynamický PID regulátor. Využit bude 2DOF PID regulátor, který je implementován v systému REX firmy REX Controls. Přenos tohoto regulátoru ve tvaru ISA:

$$U(s) = k \left\{ bW(s) - Y(s) + \frac{1}{T_i s} [W(s) - Y(s)] + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N}s + 1} [cW(s) - Y(s)] \right\} \quad (3.25)$$

Kde $U(s)$ značí obraz výstup regulátoru, $Y(s)$ obraz regulované veličiny, $W(s)$ obraz požadované hodnoty, T_i je integrační časová konstanta, T_d derivační časová konstanta, N parametr filtru derivační složky, b váhový koeficient proporcionální složky a c váhový koeficient derivační složky regulátoru. Pokud bude platit $b = c = 1$ přejde přenos do podoby 1DOF regulátoru.

Návrh regulátoru pro daný přenos bude proveden graficky ve webovém appletu dostupném na [7].

Nastavení parametrů bude uvedeno po představení virtuálního modelu dvojkolky.

4 VIRTUÁLNÍ MODEL

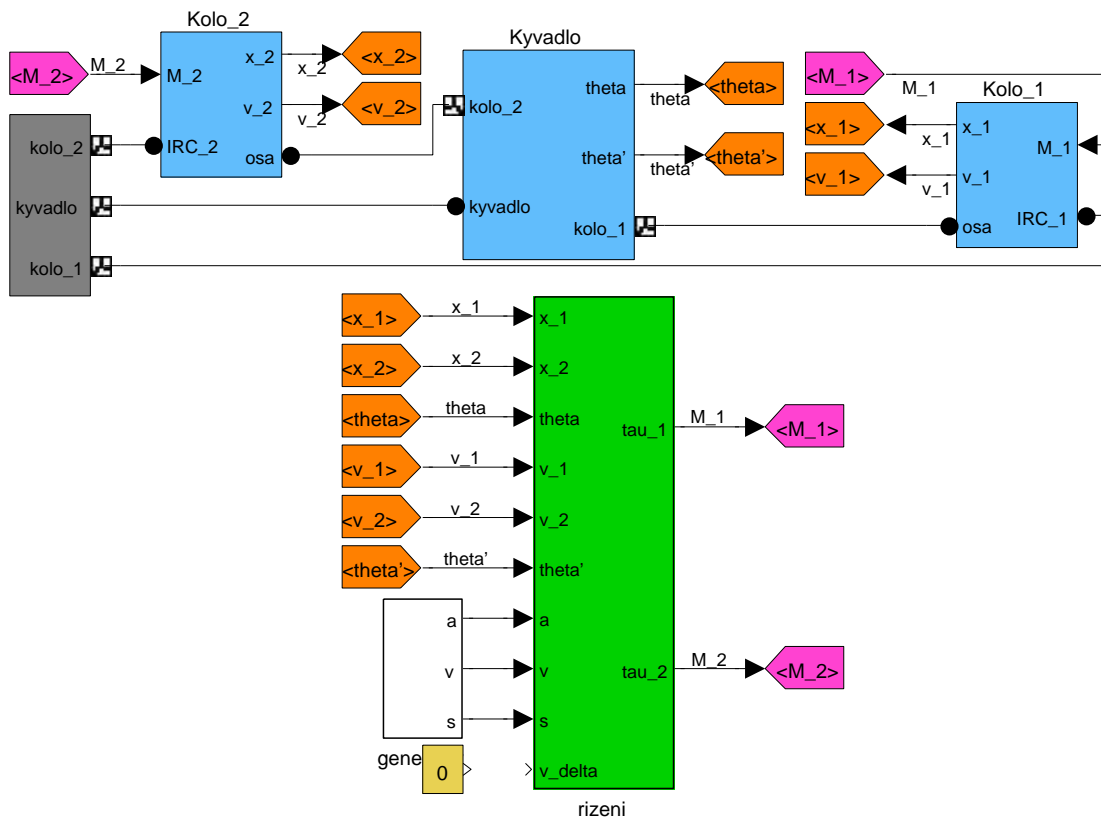
Navrhované algoritmy pro úlohu stabilizace a sledování trajektorie je nutné průběžně testovat a vylepšovat. Testování na reálném modelu je velmi náročné a nepraktické, v případě implementační chyby může dokonce dojít k poškození modelu nebo jiného vybavení laboratoře. Z tohoto důvodu je vhodné vytvořit počítačový model systému a funkčnost navržených algoritmů testovat virtuálně. Byl proto vytvořen matematický model v prostředí Matlab/SimMechanics. Výhodou tohoto řešení je skutečnost že systém není modelován matematicky, tedy pomocí vypočítaného stavového popisu, ale fyzickým vytvořením všech částí a vazeb, které v reálném modelu figurují. Navrhujeme tedy stejný systém jinou metodou a je tedy možné provést porovnání chování obou systémů a provést tak kontrolu správnosti matematické analýzy modelu. Pokud se chování obou modelů bude schodovat, máme větší pravděpodobnost správnosti řešení problému. Prohlédněme si nyní schéma modelu a stručně si jej popíšme.

Schéma modelu v programu Matlab/Simulink vidíme na obrázku 4.1. Schéma obsahuje subsystemy jednotlivých částí reálného systému a také subsystem řízení.

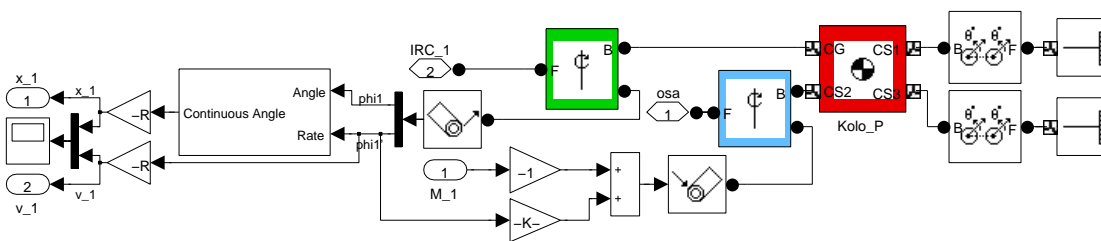
Na obrázku 4.2 si můžeme prohlédnout model jednoho z kol systému. Červenou barvou je vybarveno tělo vlastního kola, kde jsou pomocí parametrů zadány potřebné parametry. Modrou barvou je vytažena rotační vazba mezi kolem a tělem dvojkolky. Na tuto vazbu je aplikováno řízení v podobě momentu M_1 . Do modelu je také zaneseno viskózní tření na ložiskách motoru a převodovky. Koefficient tlumení je vyjádřen zesílením s parametrem K , kterým je násobena okamžitá úhlová rychlost kola. Výsledný moment je poté odečten od řízení. Zelenou barvou je zobrazena rotační vazba, která není z hlediska samotného modelu významná. Tato vazba slouží pro měření úhlu natočení kol vůči zemi. Z vazby mezi kolem a tělem dvojkolky lze totiž měřit pouze vzájemné natočení, což zavádí chybu při naklonění kyvadla.

Na obrázku 4.3 vidíme schéma těla dvojkolky. Červeně je zde opět znázorněn blok zastupující fyzické kyvadlo s patřičnými parametry, zeleně znázorněna pro model nevýznamná rotační vazba, která podobně jako u kola slouží pouze pro měření náklonu vůči svislé ose.

Řízení pohybu a stabilizaci si můžeme prohlédnout na obrázku 4.4. Stabilizace a pohyb vpřed a vzad jsou řízeny stavovou zpětnou vazbou s integrací odchylky polohy systému. Zpětná vazba je ve schématu zastoupena bloky $F(1)$ až $F(5)$. Rotace kolem svislé osy je řízena PID regulátorem. Pozice systému je počítána jako průměr součtu hodnot z IRC kol a úhel natočení jako průměr rozdílu pozice kol dělený poloměrem otáčení r . Výstup subsystemu představují momenty M_1 a M_2 , což jsou momenty posílané na jednotlivá kola. Tyto momenty jsou transformovány dle transformační matice (2.42).



Obr. 4.1: Schéma systému a řízení

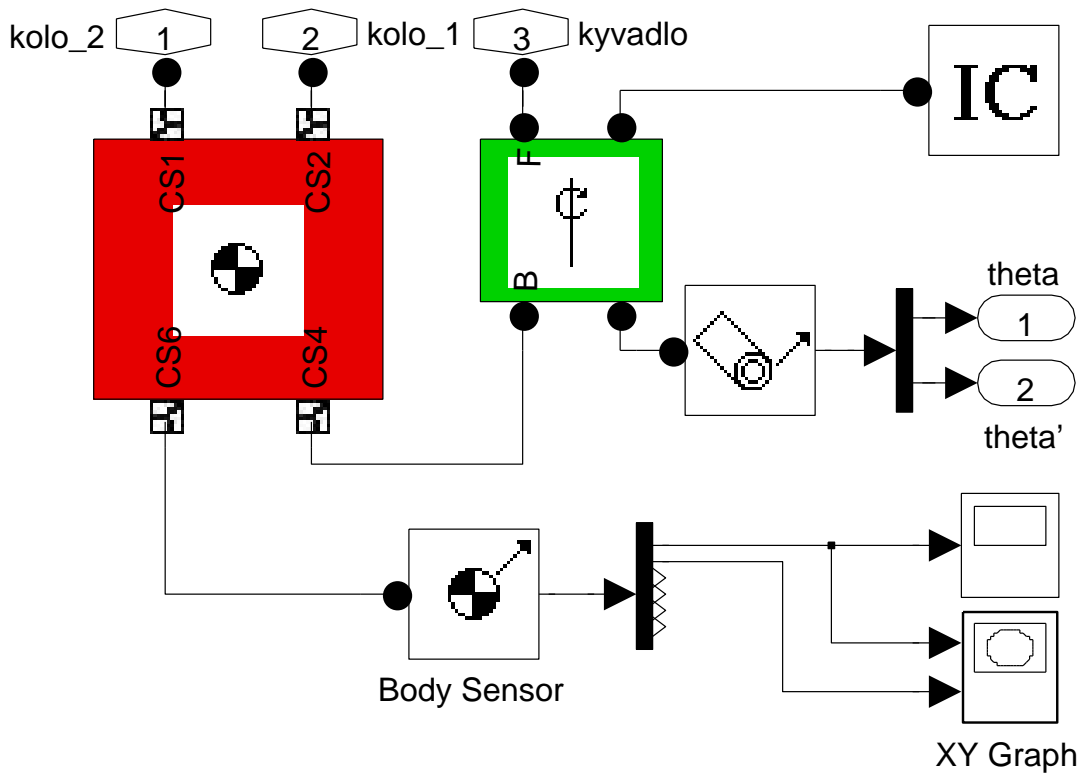


Obr. 4.2: Subsystem kola

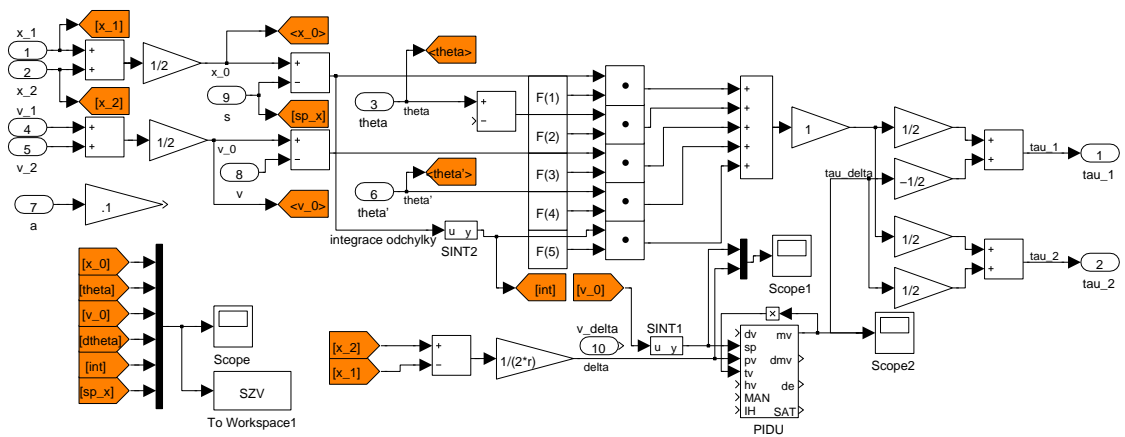
Na tomto modelu dále otestujeme funkčnost navrženého řízení.

4.1 Analýza navrženého řízení

V této kapitole provedeme analýzu a srovnání navržených regulačních strategií a jejich citlivost na změnu parametrů řízeného systému.



Obr. 4.3: Subsystem těla dvojkolky

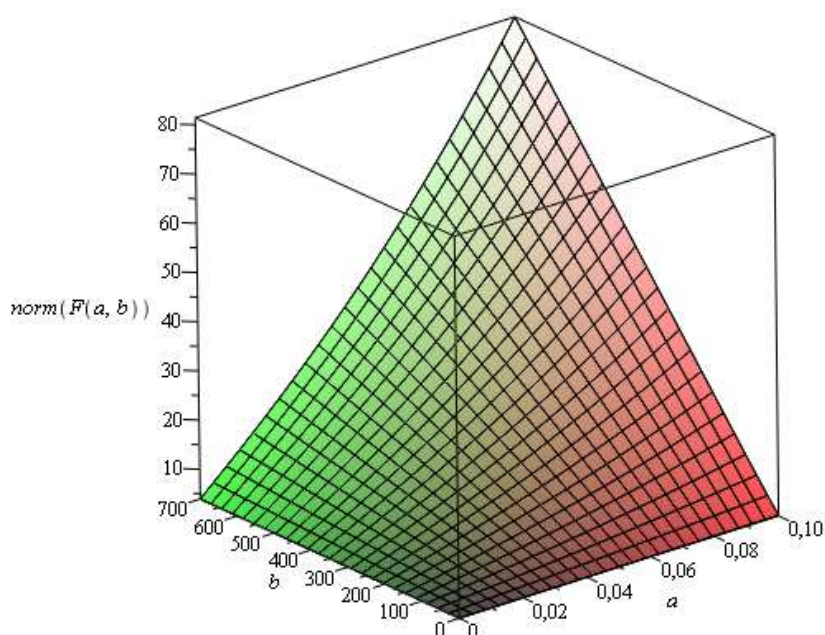


Obr. 4.4: Subsystem řízení

4.1.1 Řízení přímočarého pohybu

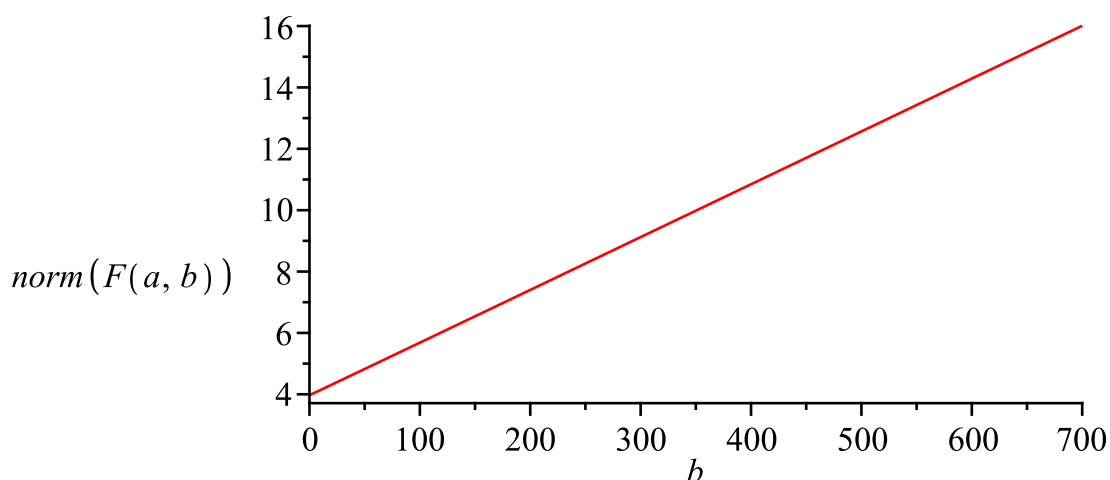
Přímocharý pohyb společně se stabilizací soustavy chceme řídit stavovou zpětnou vazbou. Otázkou ale zůstává, jakým způsobem vhodně umístit póly uzavřeného systému. U modelu lze póly umístit prakticky libovolně, u reálného systému však musí být brán ohled na systémová omezení daná použitým hardwarem.

Uvažujme nejprve případ, že chceme zachovat stabilní póly původního systému, tedy $p_1 = -2.81$ a $p_2 = -6.00$, zbývající 3 póly parametrizujme. V ideálním případě chceme nekmitavý uzavřený systém, budeme tedy požadovat reálné póly. Systém má astatismus druhého řádu, zvolme proto dvojnásobný pomalý nekmitavý pól z intervalu $p_3 = p_4 = a = (0, 1)$ a poslední rychlejší pól $p_5 = b \cdot a$. Pro takto parametrizované póly vykresleme graf Euklidovy normy vektoru koeficientů stavové zpětné vazby F závislé na parametrech a a b . Graf vidíme na obrázku 4.5.



Obr. 4.5: Norma vektoru zesílení stavové zpětné vazby F s parametry a a b

Z obrázku 4.5. je patrné, že pokud chceme minimální akční zásahy od řízení, je vhodné zvolit parametr a velmi blízko nuly. Zvolme tedy parametr a například $a = 0.02$. Graf normy vektoru pro parametr b je zobrazen na obrázku 4.6 vidíme že řez grafem 4.5.



Obr. 4.6: Norma vektoru zesílení stavové zpětné vazby F pro $a = 0.02$

Vykresleme nyní odezvu systému pro parametry $a = 0.02$ a $b = 1000$. Tyto hodnoty parametrů odpovídají pólům:

$$p = [-0.02 \quad -0.02 \quad -6.00 \quad -2.81 \quad -20] \quad (4.1)$$

Odpovídající zpětnovazební zesílení F pro toto umístění pólů bude:

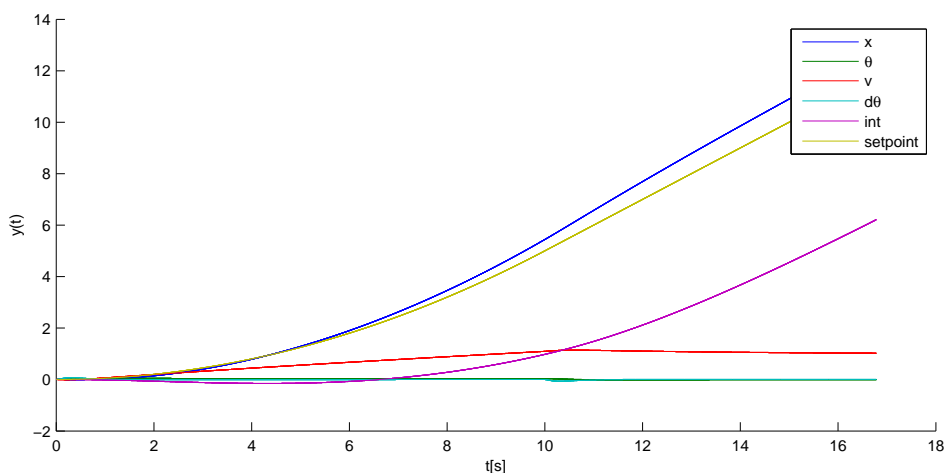
$$F^T = [2.15 \quad 17.15 \quad 11.68 \quad 3.64 \quad 0.02] \quad (4.2)$$

Z průběhu stavu pozice x_0 na obrázku 4.7 vidíme, že pro takto umístěné póly uzavřené smyčky nemá rozšíření systému o integrátor velký význam. Integrovační člen reaguje velmi pomalu. Chování systému je však stabilní, systém ale nemá jednotkové zesílení na polohu. Zesílení je možné kompenzovat, toto řešení je ale nerobustní. Kompenzaci je třeba přepočítat při každé změně parametrů systému.

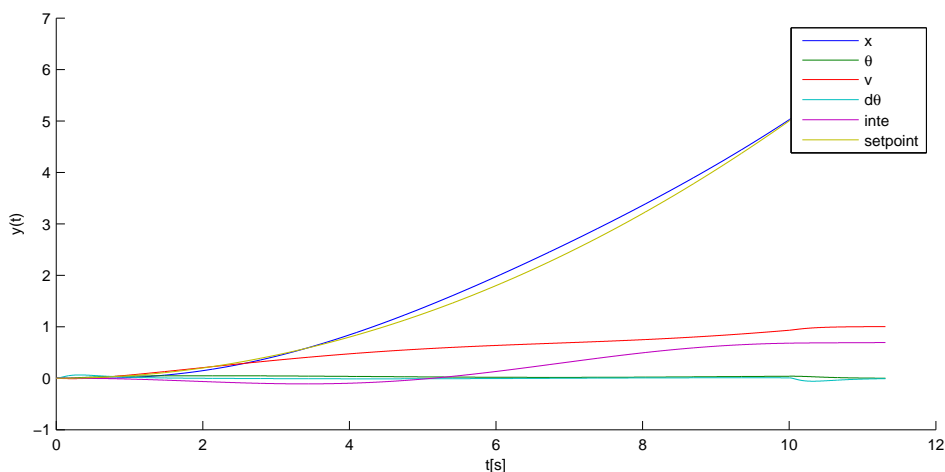
Zkusme nyní zavést do uzavřené smyčky kmitavé póly. Dva stabilní póly systému opět zachováme, namísto dvojice nulových pólů systému budeme požadovat velmi pomalé kmitavé póly a nestabilní pól nahradíme rychlým stabilním. Konkrétně zvolme hodnoty $p_1 = -2.81$, $p_2 = -6.00$, $p_3 = -0.0015 + 0.25I$, $p_4 = -0.0015 - 0.25I$ a $p_5 = -20$. Takto zvoleným pólům systému bude odpovídat následující vektor F :

$$F^T = [2.08 \quad 17.10 \quad 11.28 \quad 3.61 \quad 3.35] \quad (4.3)$$

Oproti předchozímu umístění pólů systému je patrné mnohonásobné zvýšení zesílení u integrovační vazby systému, přičemž u ostatních stavů se koeficienty téměř nezměnily.



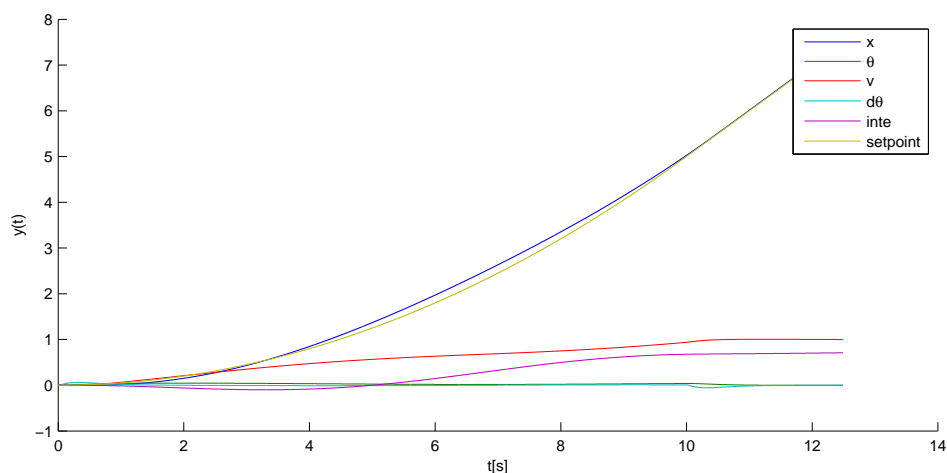
Obr. 4.7: Odezva systému s reálnými póly



Obr. 4.8: Odezva systému s 1 dvojicí komplexních pólů

Na obrázku 4.8 vidíme odezvu systému pro stejné řízení jako v předchozím případě 4.7. Na první pohled je patrné zlepšení sledování polohy x_0 . Zavedení kmitavých pólů do systému se tedy zdá být výhodné.

Na obrázku 4.9 můžeme vidět odezvu systému se změněnými parametry. Konkrétně pro $J_w = 0.004$, $J_\theta = 0.1$, $m_p = 6.5$ a $J_\delta = 0.12$. I přes více změn v parametrech není z grafu patrný žádný negativní vliv na odezvu systému. Navržené řízení se zdá být robustní. V ustáleném stavu je také dosaženo nulové regulační odchylky systému.



Obr. 4.9: Odezva systému při změně parametrů

4.1.2 Řízení natočení systému

Pro řízení rotace systému byl zvolen PID regulátor, parametry regulátoru byly pro daný přenos druhého řádu laděny ve webovém appletu dostupném na [7].

Naladěné parametry regulátoru jsou následující:

$$k = 5 \tag{4.4}$$

$$T_i = 0.5$$

$$T_d = 0.07$$

$$nd = 10$$

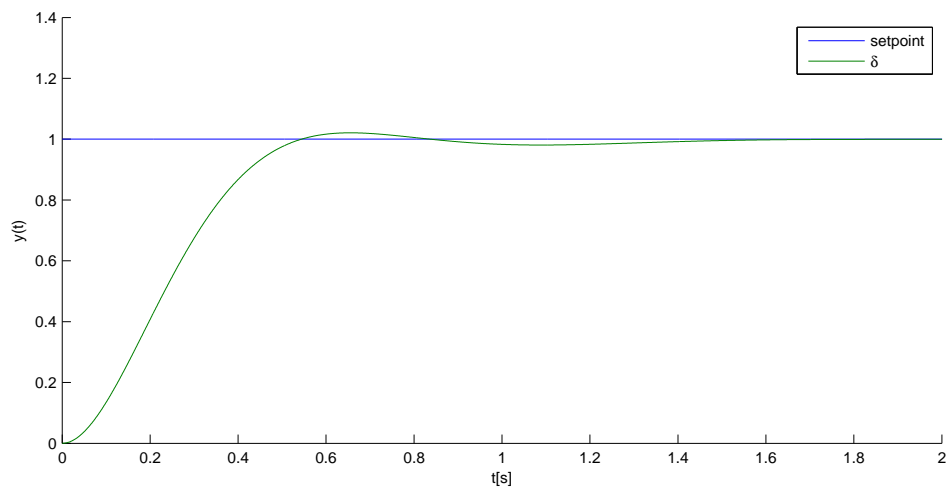
$$b = 0.5$$

$$c = 0.3$$

(4.5)

Přechodovou charakteristiku vidíme na obrázku 4.10. Doba regulace je přibližně 0.5s a překmit asi 2%. Takto rychlá regulace bude pro naše potřeby dostačující.

Po otestování řízení na virtuálním modelu můžeme přejít k samotné implementaci na cílovou platformu.

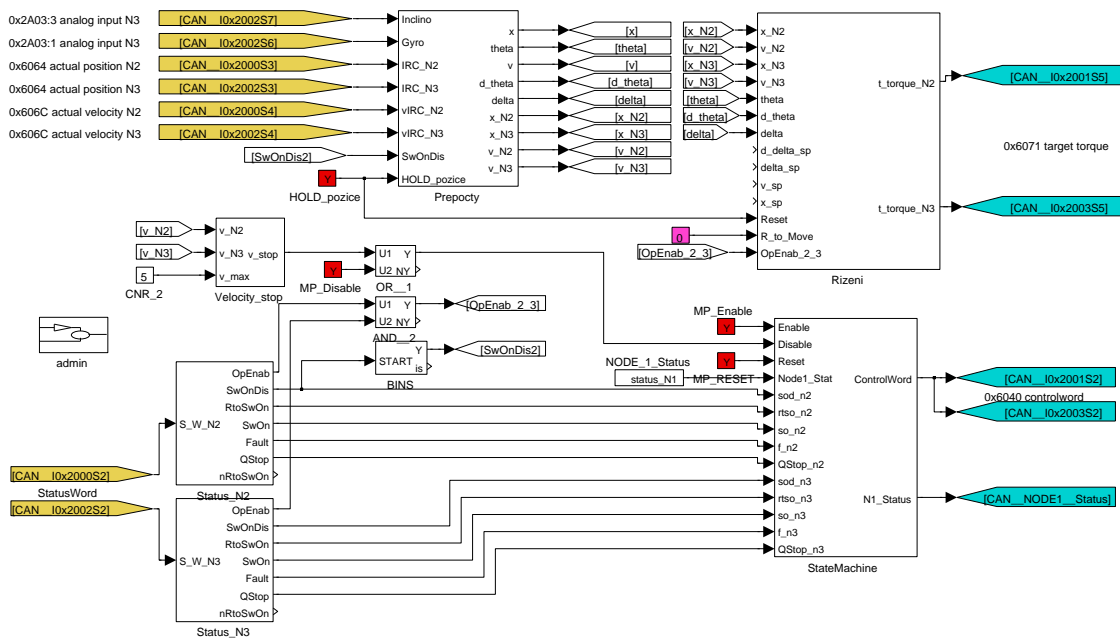


Obr. 4.10: Přebodová charakteristika úhlu natočení δ

5 IMPLEMENTACE ŘÍZENÍ NA FYZICKÝ MO- DEL

V této kapitole otestujeme řízení navržené na virtuálním modelu. Model je řízen řídicím systémem REX firmy REX Controls. Tento systém je kompatibilní s programem Matlab, řízení lze navrhnout pro model v SimMechanics a poté bez úprav přenést na cílovou platformu. Knihovny řídicího systému pro Matlab jsou dostupné na [8].

Bylo vytvořeno řídicí schéma, které vidíme na obrázku 5.1. Toto schéma však neobsahuje pouze samotný regulátor, ale také další subsystemy potřebné pro obsluhu dvojkolky.

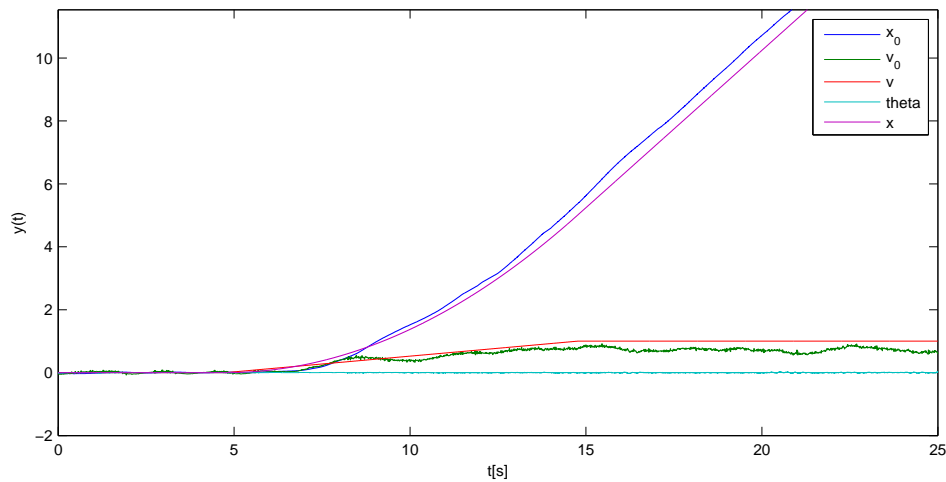


Obr. 5.1: Schéma systému a řízení

Stavové veličiny systému jsou měřeny prostřednictvím čidel. Data z těchto čidel je ale zapotřebí patřičným způsobem přepočítat tak, aby odpovídaly měřeným hodnotám. Nutná je také obsluha řídicích jednotek motorů. Po zapnutí jednotek musí být provedeny jednotlivé stavové přechody tak, aby byly jednotky uvedeny do provozu. Všechny tyto funkce jsou implementovány přímo ve schématu.

Na reálný model bylo nejprve aplikováno řízení z modelu v SimMechanics, ukázalo se však, že zpětnovazební zesílení, která byla pro model vypočítána, jsou příliš vysoká a vlivem nadměrného zesilování šumu v signálech by došlo k poškození převodovek. Bylo tedy nutné najít takové umístění polů systému, které bude respektovat

hardwarová omezení systému.



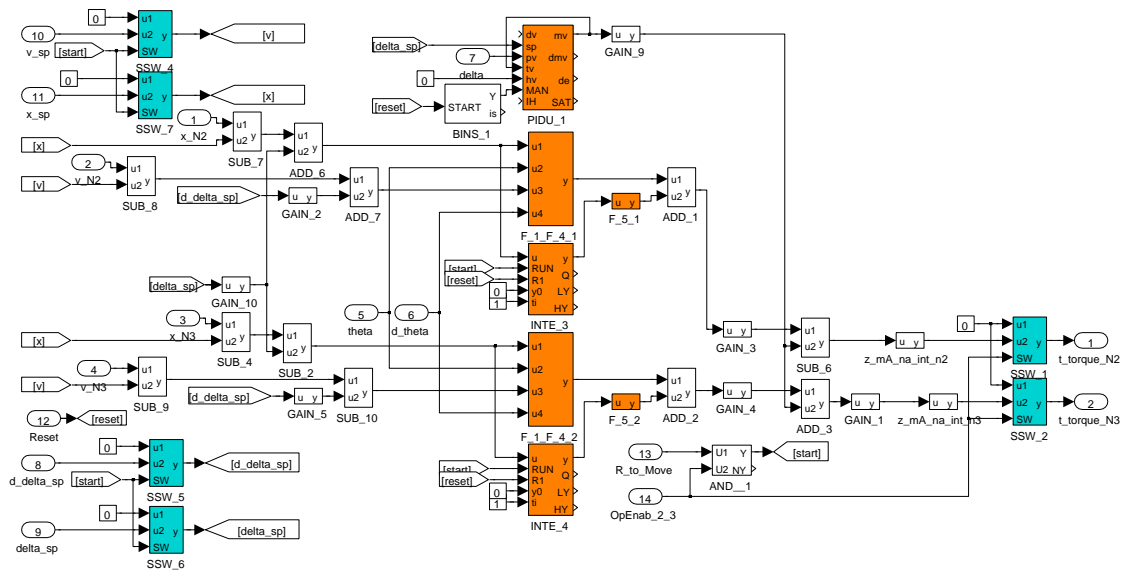
Obr. 5.2: Odezva systému s původním řízením

Po nalezení vhodných parametrů byly naměřeny odezvy systému na vstupní signál. Výsledek pro řízení z virtuálního modelu, ovšem s upraveným zesílením vidíme na obrázku 5.2. Z tohoto grafu je patrné špatné sledování generované pozice a rychlosti, přestože je model rozšířen o integraci regulační odchylky. Zesílení integrace odchylky je však vzhledem k nutným změnám v umístění pólů poměrně malé, pomalá reakce systému byla tedy očekávána. S tímto výsledkem jsme však nebyli spokojeni, proto bylo řízení transformováno do složitější podoby diskutované v části 3.4. Poloha a rychlost systému je řízena nezávislými stavovými zpětnými vazbami jednotlivých kol. Těto variantě odpovídá reálné řídicí schéma na obrázku 5.3.

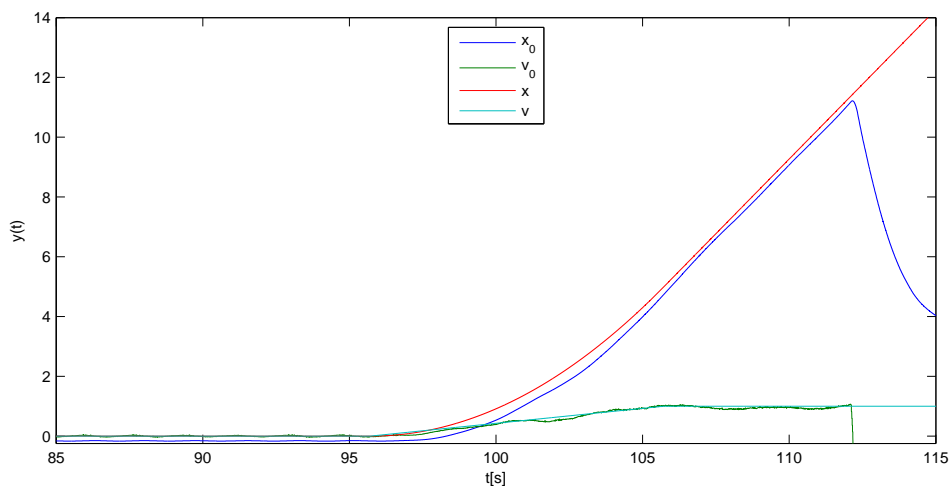
Po aplikaci tohoto řízení byly provedeny nové experimenty. Odezvu rychlosti a polohy systému pro tuto variantu řízení vidíme na obrázku 5.4. Je zde patrné jisté zlepšení oproti předchozí odezvě 5.2. Poloha systému na počátku pohybu není nulová, tento jev je způsoben nevyvážeností těla dvojkolky, integrační vazba je příliš slabá na to, aby tuto regulační odchylku eliminovala. V případě nulové počáteční pozice systému by si signály téměř odpovídaly.

Ukažme si ještě rozdíl mezi odezvou systému s integrací odchylky rychlosti a bez integrace. Jak již bylo poukázáno, integrační zesílení je poměrně hodně nízké, velký rozdíl v odezvách systému není předpokládán. Odezvu systému bez integrační vazby se zachovanými koeficienty zesílení ostatních stavů vidíme na obrázku 5.5. Nutno podotknout, že se při pouhém rozpojení integrační vazby změní také umístění pólů tohoto systému.

Mezi odezvami těchto dvou řízení ale není patrný téměř žádný rozdíl. Vzhledem



Obr. 5.3: Schéma systému a řízení

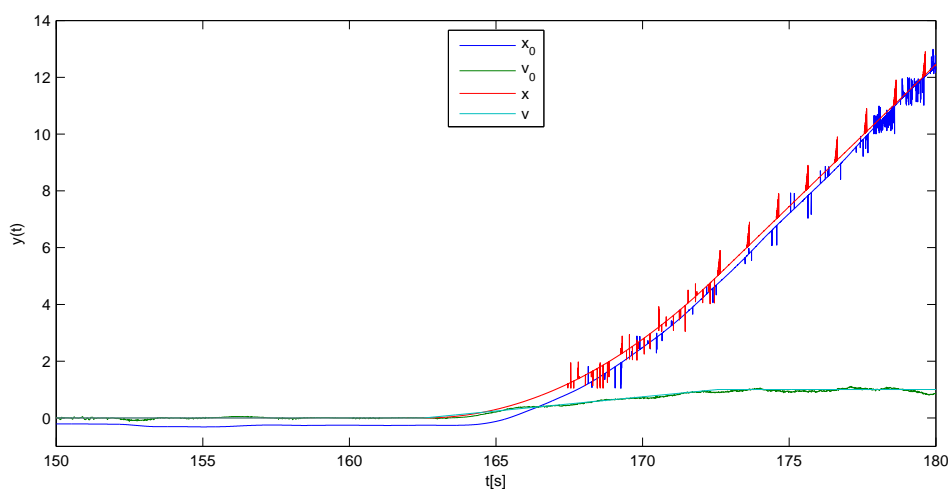


Obr. 5.4: Odezva systému s upraveným řízením a integrací odchylky pozice

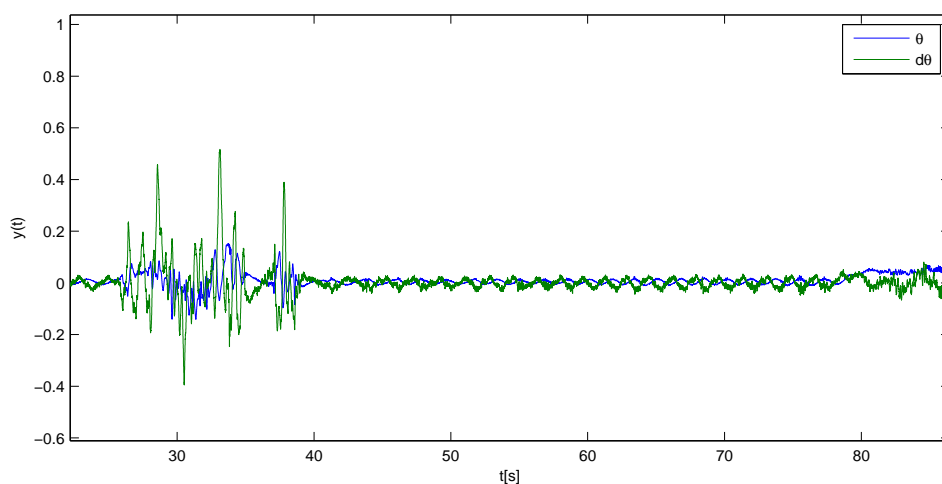
k možným různým podmínkám při pokusech lze jen těžko vyslovit jednoznačný závěr, který by byl řádně podložen. Obě řízení mají velmi podobný charakter.

Požadavkem pro řízení pohybu bylo zachování stability inverzního kyvadla. Časový průběh náklonu a úhlové rychlosti náklonu během přímočarého pohybu vidíme na obrázku 5.6.

Ukažme si také odezvu rotační části systému. Na vstup systému d_delta_sp byl přiveden skokový signál rychlosti otáčení o amplitudě $1\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Tento signál byl



Obr. 5.5: Odezva systému bez integrace odchylky pozice

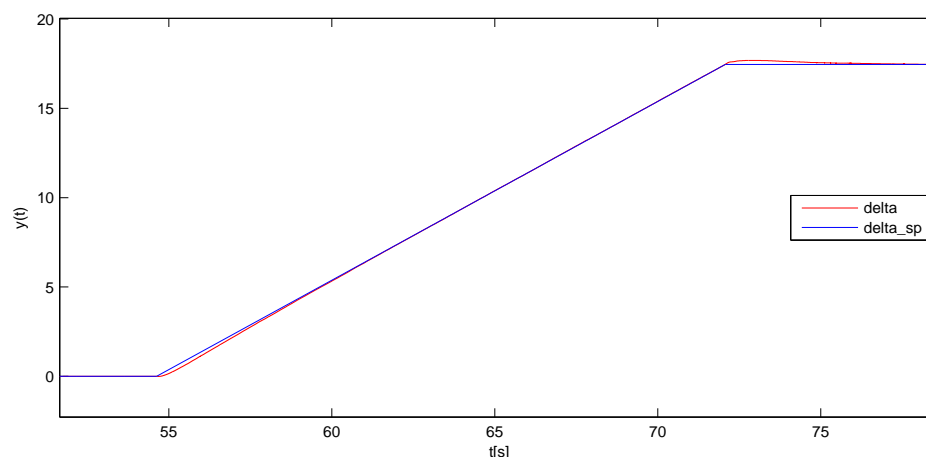


Obr. 5.6: Průběh náklonu a úhlové rychlosti náklonu při pohybu po přímce

integrován a přiveden také na vstup úhlu natočení $delta_sp$. Odezvu systému na tuto rampu se směrníci 1 vidíme na obrázku 5.7.

Rotační subsystém má díky dynamické PID regulaci rychlejší a přesnější odezvu než přímočarý pohyb, který je s ohledem na nutnost stabilizace inverzního kyvadla řízen stavovou zpětnou vazbou.

Omezení systému představují především použité senzory a rozlišení převodníků. U senzorů není upotřeben celý jejich pracovní rozsah, což vzhledem k poměrně nízkému rozlišení převodníků snižuje přesnost měření. Osazením převodníků s vyšším rozlišením případně senzory s menším rozsahem by mohlo být aplikováno vyšší zpět-



Obr. 5.7: Otáčení systému konstantní rychlostí

novazební zesílení a řízení by mohlo být agresivnější. Aplikovaná zesílení především pro úhlovou rychlost a úhel natočení kyvadla jsou však v současné době maximální možná. Při vyšších zesíleních se šum z převodníků přenáší do motorů, což se projevuje nadměrným hlukem převodovek a kmitáním systému. Pokud bude v budoucnu požadováno zlepšení chování systému, bude s největší pravděpodobností nezbytný zásah do řídicího hardware.

Řízení systému bylo dále upraveno také pro ovládání pohybu pomocí mobilního telefonu a pomocí zařízení Kinect, což představuje zajímavé praktické využití především pro studenty.

Možným uplatněním systému při výuce může být například generování požadované trajektorie modelu a její transformace na řídicí veličiny systému.

Provoz dvojkolky prozatím předpokládá vodorovný povrch, pohyb ani stabilizace na nakloněných rovinách nebyla prozatím uvažována ani testována, také zde je prostor pro další výzkum a vývoj.

6 ZÁVĚR

Účelem této práce byla modernizace stávajícího laboratorního modelu dvojkolky, který slouží především k výukovým a demonstračním účelům. Modernizace se netýkala pouze nového řízení, ale zásadním způsobem byl obměněn také hardware dvojkolky. Hlavní změnou oproti původnímu systému je odstranění bezdrátové zpětné vazby. Tato změna umožňuje plně autonomní provoz dvojkolky. Bezdrátová Wi-Fi komunikace nyní slouží pouze pro ovládání pohybu a obsluhu dvojkolky. Dále byla instalována nová čidla, která provádí přímé měření stavových veličin, přesněji úhlu a úhlové rychlosti náklonu kyvadla.

Prvotním úkolem byla analýza fyzického modelu a návrh a výběr elektroniky a čidel, která jsou zapotřebí pro řešení úlohy stabilizace inverzního kyvadla. Následně byl odvozen matematický model systému, který nově zohledňuje vzájemné silové působení mezi rotorem a statorem motoru a viskózní tření na motorech. Toto tření snižuje účinnost pohonů a zmenšuje tak moment dodávaný soustavě. Model dále popisuje rotační pohyb kolem svislé rotační osy dvojkolky. Pro určení nepřímě měřitelných parametrů modelu bylo nutné navrhnout a realizovat patřičné experimenty. Bylo ukázáno, že za jistých podmínek lze rotační subsystém regulovat samostatně, což v praxi znamená nejen zjednodušení návrhu stavové zpětné vazby, ale díky využití dynamického PID regulátoru pro tuto úlohu především přesnější a rychlejší řízení natočení, které navíc bude méně citlivé na nelinearity a poruchy působící na systém.

V průběhu návrhu řízení se ukázalo, že pohyb dvojkolky a její stabilizaci nelze jednoduchým způsobem řešit odděleně. Na danou problematiku musí být tedy nahlíženo jako na celek. Z tohoto důvodu byl pro řízení pohybu navržen stavový regulátor, který byl doposud implementován také pro úlohu stabilizace dvojkolky. Aby byla v ustáleném stavu zaručena nulová regulační odchylka, byl systém nejprve rozšířen o integraci regulační odchylky polohy a stavová zpětná vazba byla navržena pro tento nový systém. Původním záměrem bylo rozšíření systému o integraci odchylky rychlosti, zde však nebyla splněna nutná podmínka pro přiřazení pólů stavovou zpětnou vazbou, tedy plná říditelnost systému, a toto řešení nebylo možné.

Při implementaci řízení na reálný systém bohužel z důvodu nadměrného zesílení šumu z převodníků nemohla být aplikována zesílení, která byla použita pro virtuální model. Bylo proto navrženo jiné umístění pólů uzavřeného systému tak, aby koeficienty zesílení stavů respektovaly systémová omezení. Při daných omezeních se bohužel nepodařilo najít takové parametry stavové zpětné vazby, pro které by lépe fungovala navržená integrace regulační odchylky polohy. Její funkce se při řízení takřka neprojeví.

V průběhu řešení této praktické úlohy byly postupně řešeny jednotlivé úkony

od prvotní analýzy systému, návrhu a výběru potřebných čidel a hardware, přes odvození matematického modelu systému a identifikaci parametrů, až po uvedení systému do provozu a implementaci navrženého řízení na reálný systém. Byly tak získány cenné praktické zkušenosti.

Další výzkum by mohl směřovat ke stabilizaci a pohybu dvojkolky na nakloněných rovinách, to by však znamenalo nahrazení současných motorů za silnější. Pokud bude síla motorů řešena převodovkou s vyšším převodovým poměrem, s největší pravděpodobností nebudou motory tlumeny stejně a dle odvozeného modelu nebude možné rozdělení systému na stabilizační a rotační část. Úloha přiřazení pólů se tak zkomplikuje nejen kvůli řádu systému, ale také kvůli dvěma vstupům systému. Úloha přiřazení pólů stavovou zpětnou vazbou se tak stane nelineární a bude zde větší prostor pro hledání zpětnovazebních zesílení.

LITERATURA

- [1] ÅKESSON, J.; BLOMDELL, A.; BRAUN, R. Design and Control of YAIP: An Inverted Pendulum on Two Wheels Robot. In *Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE*. Munich, 4-6 October, 2006. s. 2178-2183. ISBN 0-7803-9797-5, 10.1109/CACSD-CCA-ISIC.2006.4776978.
- [2] BLÁHA, L. *Stabilizace a automatické řízení pohybu dvoukolky*. Plzeň, 2007. 110 s. Diplomová práce. Západočeská univerzita. Fakulta aplikovaných věd.
- [3] CHING-CHIH, T.; YUAN-PAO, H.; BOR-CHIH, L. Direct Adaptive Fuzzy-Basis-Function-Network Motion Control for Self-Balancing Two-Wheeled Transporters. In *Systems Man and Cybernetics (SMC), 2010 IEEE International Conference on*. Istanbul, 10-13 Oct. 2010. s. 1191-1197. ISBN 978-1-4244-6586-6, ISSN 1062-922X, 10.1109/ICSMC.2010.5642381.
- [4] JÁGER, A. *Návrh řídicího systému robustní stabilizace dvojkolky*. Plzeň, 2011. 70 s. Diplomová práce. Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd.
- [5] KÖNIGSMARKOVÁ, J. *Přiřazení pólů lineárnímu dynamickému systému výstupní zpětnou vazbou*. Plzeň, 2010. 74 s. Bakalářská práce. Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd.
- [6] REX Controls s.r.o. *Funkční bloky systému REX. Referenční příručka* [online]. 26.3.2012, Verze 2.05, [cit. 2012-05-14]. Dostupné z URL: <http://www.rexcontrols.cz/media/documents/manuals/cz/BRef_CZ.pdf>.
- [7] REX Controls s.r.o. *PID Controller Laboratory 3.0 - PIDlab* [online]. 2012 [cit. 2012-05-14]. Dostupné z URL: <<http://www.pidlab.com/applety.php?id=11>>.
- [8] REX Controls s.r.o. *REX Controls* [online]. 2012 [cit. 2012-05-14]. Dostupné z URL: <<http://www.rexcontrols.cz/>>.
- [9] SCHLEGEL, M. *Modální řízení konečněrozměrných lineárních systémů*. Plzeň, 1984. 95 s. Dizertační práce. VŠSE v Plzni. Dostupné z URL: <http://schlegel.zcu.cz/soubory/modal_contr.pdf>.
- [10] SCHLEGEL, M.; KÖNIGSMARKOVÁ, J. *PARAMETRIC JORDAN FORM ASSIGNMENT REVISITED*. IFAC World Congress 2011, Milano