

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

KATEDRA KYBERNETIKY

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

PLZEŇ, 2012

JAROSLAV MRÁZ

## **Prohlášení**

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

Dne 17. 5. 2012

.....

vlastnoruční podpis

## **Anotace**

V této diplomové práci je čtenář stručně seznámen se standardně používanými lokálními filtry, které odhadují stav nelineárních stochastických systémů. Konkrétně se jedná o rozšířený Kalmanův filtr, unscenovaný Kalmanův filtr a diferenční filtr. Čtenář je blíže seznámen s polynomiálními filtry, jakožto filtry, které využívají znalosti vyšších momentů náhodných veličin popisujících šumy působících na systém a měření. Podrobně je představen nejjednodušší zástupce polynomiálních filtrů, kvadratický filtr. Druhou skupinou podrobně představených filtrů jsou robustní filtry. Tyto filtry je vhodné použít pro odhad stavu systému, jehož přesný model není k dispozici. Čtenáři jsou také představeny dva základní typy nelineárních robustních filtrů. Kapitoly týkající se kvadratických a robustních filtrů jsou doplněny o simulační výsledky potvrzující funkčnost daných filtrů.

## **Klíčová slova**

Estimace, Kalmanův filtr, lokální nelineární filtr, stochastický systém, negaussovský šum, polynomiální filtr, kvadratický filtr, robustní filtr

## **Annotation**

This thesis briefly introduces the reader to ordinarily used local filters which estimate the state of nonlinear systems. Namely there are extended Kalman filters, unscented Kalman filter and divided difference filter. The reader gets familiar with polynomial filters which use higher moments of random variables that cover noises affecting the system and the measurement. The simplest kind of polynomial filters, quadratic filter, is introduced in detail. The second group of closely presented filters is robust filters. These filters can be suitable for the state estimation of the systems which are described by the uncertain model. To the reader are also introduced the two basic types of the nonlinear robust filters. The chapters about polynomial and robust filters are provided with the simulation results confirming the functionality of these filters.

## **Keywords**

Estimation, Kalman filter, local nonlinear filters, stochastic systems, non-gaussian noise, polynomial filter, quadratic filter, robust filter

## Obsah

1.	Úvod.....	3
1.1.	Cíle práce .....	4
1.2.	Vymezení základních pojmů.....	5
2.	Lokální filtry .....	7
2.1.	Kalmanův filtr .....	7
2.2.	Rozšířený Kalmanův filtr .....	8
2.3.	Unscentovaný Kalmanův filtr .....	9
2.3.1.	Unscentovaná transformace .....	9
2.3.2.	Unscentovaný Kalmanův filtr .....	10
2.4.	Diferenční filtr prvního řádu .....	11
3.	Polynomiální filtry .....	13
3.1.	Negaussovský systém .....	13
3.2.	Kroneckerův součin .....	13
3.3.	Optimální kvadratický filtr.....	14
3.4.	Polynomiální filtr vyššího řádu.....	24
3.5.	Výpočetní náročnost kvadratického filtru.....	25
4.	Robustní filtry .....	28
4.1.	Definování kritéria optimality robustního filtru.....	28
4.2.	Dynamická optimalizace .....	30
4.3.	Hledání optimálního kritéria robustního filtru .....	31
4.4.	Diskrétní robustní filtr.....	38
4.5.	Porovnání robustního a Kalmanova filtru.....	39
4.6.	Výpočetní nároky robustního filtru.....	48
4.7.	Nelineární robustní filtrace .....	49
4.7.1.	Rozšířený robustní filtr .....	50
4.7.2.	Unscentovaný robustní filtr.....	51

5. Závěr .....	53
Citovaná literatura .....	55
Příloha I. (Úprava kritéria robustního filtru) .....	57
Příloha II. (Úprava kovariance chyby odhadu KF) .....	63

# 1. ÚVOD

V této práci se budeme zabývat odhadem stavu stochastických systémů. Tato úloha se nazývá filtrace nebo estimace. Jedná se o velmi důležitou technickou činnost, která nalézá uplatnění v mnoha oborech, jakými jsou například syntéza řídicích systémů, detekce poruch, monitorování, rozhodování, ale také v netechnických oborech, například ekonomických. Odhad stavu je prováděn na základě měření výstupu stochastického systému. Pro dobré fungování navržených filtrů je nutné mít dobrý popis systémů, pro něž je filtr navrhován. S úlohou estimace je tak úzce spojena úloha identifikace systémů.

Proto, abychom mohli lépe docenit důležitost odhadování stavu systémů v současnosti, shrňme si nyní stručně historický vývoj [1] této vědecké disciplíny. Ačkoli největší rozvoj estimace stavu systému nastal v polovině 20. století, historie této činnosti je mnohem starší. Již na počátku 18. století zpracoval Roger Cotes práci zabývající se odhadem ve smyslu nejmenších čtverců. I když o kvalitě této práce mohou být pochybnosti, protože neobsahovala příklady použití a její autor zemřel dříve, než ji mohl rozvinout. Dalším rozvojem odhadu ve smyslu nejmenších čtverců se zabývali matematici Tobias Mayer, Leonarda Euler nebo Pierre Laplace. Rekurzivní nejmenší čtverce byly v podstatě definovány Karlem Gaussem v jeho práci, která byla publikována roku 1809. Díky ní přišel Gauss ve spolupráci s Adrienem Legendrem na způsob odhadu polohy vesmírných těles na základě nepřesných měření.

Výrazný vývoj estimace nastal ve 40. letech 20. století publikováním Wiener Kolgomorovy teorie [2], [3]. Tato teorie má společné rysy s Kalmanovým filtrem, ale nevyužívá stavového popisu systému, kdežto předpokládá, že signál i šum jsou stacionárními náhodnými procesy. Po nástupu stavové teorie systémů se začalo upouštět od klasické, frekvenční teorie. Na základě tohoto přístupu byl vypracován algoritmus pro sledování raket vytvořený roku 1956 na Johns Hopkins University. Zřejmě největším pokrokem na poli estimace ve 20. století bylo definování Kalmanova filtru [1], [4] roku 1960. V té době byla publikována řada prací navrhujeících filtry dosti podobné Kalmanovu filtru. Ten je však nejznámější a nejpoužívanější pro svoji obecnost a snadnou aplikovatelnost pomocí výpočetních prostředků, které se tou dobou začaly výrazněji rozvíjet. Obecnou popularitu přinesla Kalmanovu filtru jeho aplikace v projektech Apollo.

Krátce poté, co byl definován Kalmanův filtr, byl představen první z filtrů pro nelineární systémy, rozšířený Kalmanův filtr [5]. Jedná se zástupce lokálních filtrů. Mezi jejich další zástupce, definované v uplynulých 50 letech a nyní již standardně používané, patří například

unscentovaný Kalmanův filtr [6] či diferenční filtr [7]. Druhou skupinou filtrů pro nelineární systémy jsou globální filtry, které již neprovádí linearizaci v jednom bodě stavového prostoru, ale ve více bodech. Nejznámějším zástupcem globálních filtrů jsou particle filtry [8], [9]. V posledních letech jsou dále rozvíjeny polynomiální filtry [10], [11], [12], které jsou schopny využívat znalosti vyšších momentů šumů než je tomu u Kalmanova filtru a tím poskytují lepší odhady. Dalším zástupcem nových filtrů jsou robustní filtry [8], [13], [14] které minimalizují maximální chybu odhadu při nepřesné znalosti modelu systému. S těmito dvěma zástupci moderních filtrů se čtenář seznámí i v této práci.

## 1.1. CÍLE PRÁCE

Cílem této práce je stručně seznámit čtenáře se standardně používanými lokálními filtry a blíže mu představit filtry, které za určitých podmínek poskytují pro lineární systémy lepší odhady než Kalmanův filtr. Jmenovitě se bude jednat o polynomiální a robustní filtry.

V druhé kapitole budou shrnuty vztahy Kalmanova filtru, jakožto filtru poskytující nejlepší lineární odhad ve smyslu střední kvadratické chyby při popisu šumů pomocí prvních dvou momentů. Dále zde budou představeny běžně používané lokální filtry. Jmenovitě jimi bude rozšířený Kalmanův filtr, unscentovaný Kalmanův filtr a diferenční filtr.

V třetí kapitole bude čtenář seznámen s polynomiálním filtrem, poskytujícím optimální odhady stavu při nedodržení předpokladu Kalmanova filtru na gaussovost šumů. My se v této práci zaměříme zejména na nejjednodušší variantu polynomiálního filtru a to na kvadratický filtr. Ten využívá rozšíření vektoru stavu o svůj kvadrát v zájmu zlepšení kvality odhadu oproti Kalmanovu filtru. Do rozšířeného modelu systému je tak zahrnuta i znalost vyšších momentů šumů. Čtenář bude seznámen i s možnostmi aplikace polynomiálních filtrů vyšších řádů a také s úskalími, které plynou z jejich aplikace.

Ve čtvrté kapitole budou blíže představeny robustní filtry, které se vypořádávají s nedostatky Kalmanova filtru. Ty nepředpokládají platnost obecně těžko dosažitelného předpokladu na přesnou znalost modelu systému, jehož stav chceme odhadovat. Jejich aplikací tak lze dostat kvalitní odhady i pro systémy, jejichž model má chybné matice dynamiky nebo měření, či pokud uvažuje šумы popsané jinou hustotou pravděpodobnosti, než je jejich reálná. V závěru kapitoly bude čtenář seznámen se základními principy fungování robustních filtrů pro



nelineární systémy. Práce bude obsahovat i simulační ověření funkčnosti představených filtrů, a to jak v grafické podobě, tak numerickým výpisem příslušných chyb odhadů.

## 1.2. VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ

Pro jednodušší orientaci v následujícím textu si nyní shrňme a vysvětleme pojmy, které jsou v práci frekventované a bez jejichž znalosti nebude moci čtenář řádně porozumět dané problematice.

Stochastický systém: V práci budeme pro popis systémů používat stavové modely popsané rovnicemi

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k$$

$$y_k = h_k(x_k) + v_k$$

První rovnice se nazývá rovnicí dynamiky systému a druhá rovnicí měření. Proměnné  $w_k$  a  $v_k$  jsou náhodné veličiny reprezentující šumy. Tyto náhodné veličiny jsou dány se známou hustotou pravděpodobnosti, či alespoň se známou střední hodnotou a kovariancí. Dále předpokládáme znalost hustoty pravděpodobnosti popisující počáteční stav  $x_0$ . Jsou-li funkce  $f_k(\cdot)$  a  $h_k(\cdot)$  lineární, hovoříme o lineárním stochastickém systému. V případě nelineárních funkcí hovoříme o nelineárním stochastickém systému.

Kritérium kvality odhadu: Určuje, v jakém smyslu chceme nalézt optimální odhad stavu systému. Mezi nejčastěji používaná kritéria v estimaci patří maximální věrohodnost, maximální aposteriorní pravděpodobnost a další. My se v této práci budeme zabývat zejména odhadem ve minima střední kvadratické chyby odhadu, kdy je kritérium dáno jako

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \hat{x})^T (x - \hat{x}) p(x|z) dx$$

Náhodná veličina: Jedná se o funkci, která přiřazuje určitou hodnotu náhodnému experimentu

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

kde  $\Omega$  je pravděpodobnostní prostor a  $\mathbb{R}$  je topologický prostor.

Náhodný proces: Množina náhodných veličin na množině časových okamžiků, která je zpravidla nekonečná. Je-li konečná, nazýváme náhodný proces náhodným vektorem.

Gaussovská náhodná veličina: Veličina s gaussovským, jinak též normálním, rozložením hustoty pravděpodobnosti

$$p(x) = N(x; m, P) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} (\det P)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T P^{-1}(x-m)}$$

Lze jím aproximovat součet mnoha nezávislých proměnných se stejným rozložením pravděpodobností. Z tohoto důvodu je často používané k aproximativnímu popisu šumů systému a měření.

Stacionární proces: Proces, jehož vlastnosti jsou v čase neměnné. Rozlišujeme dva typy stacionarit, a to silnou a slabou. Pro silnou stacionaritu jsou hustoty pravděpodobnosti náhodných veličin stále stejné. Pro slabou stacionaritu je konstantní pouze střední hodnota a pro stejně dlouhé časové úseky i kovariance.

Bílý šum: Náhodný proces, jehož libovolné dvě různé časové realizace jsou vzájemně nezávislé. V bílém šumu jsou obsaženy frekvence se stejnou pravděpodobností, a proto se používá jako aproximace šumu obsahujícího všechny frekvence.

V práci se vyskytuje ještě celá řada pojmů, které mohou být čtenáři neznámé nebo nejasné. Četnost jejich výskytu je však výrazně nižší než u pojmů představených v této kapitole a jsou tedy vysvětleny až na konkrétním místě použití.

## 2. LOKÁLNÍ FILTRY

V této kapitole se budeme zabývat představením nejčastěji používaných filtrů, které poskytují optimální bodové odhady nelineárních stochastických systémů. Nejprve si ale uveďme vztahy Kalmanova filtru dle [2], [5].

### 2.1. KALMANŮV FILTR

Uvažujme stochastický, t-invariantní, diskrétní systém

$$x_{k+1} = Fx_k + w_k \quad (2.1.1)$$

$$y_k = Hx_k + v_k \quad (2.1.2)$$

kde  $\{w_k\}$  a  $\{v_k\}$  jsou procesy splňující pro  $k = 0, 1, 2 \dots$  následující předpoklady

- $\{w_k\}$  a  $\{v_k\}$  jsou bílé šумы
- $\{w_k\}$  a  $\{v_k\}$  jsou s nulovou střední hodnotou a známou kovariancí
- $\{w_k\}$  a  $\{v_k\}$  jsou nezávislé

proces  $\{w_k\}$  budeme nazývat šum systému a proces  $\{v_k\}$  šum měření. Kovarianci šumu systému budeme značit  $Q$  a kovarianci šumu měření  $R$ . Budeme uvažovat stacionární šумы. Jejich kovariance je tedy v čase neměnná. Posledním nutným předpokladem je znalost počátečního stavu systému, který je gaussovskou nezávislou náhodnou veličinou danou

$$x_0 \sim N(0, P_0)$$

Pro takto definovaný systém je aposteriorní odhad, jinak též nazývaný filtrační, dostaneme jako

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} H^T (H P_{k|k-1} H^T + R)^{-1} (y_k - H \hat{x}_{k|k-1}) \quad (2.1.3)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H^T (H P_{k|k-1} H^T + R)^{-1} H P_{k|k-1} \quad (2.1.4)$$

Apriorní, tedy prediktivní odhad je

$$\hat{x}_{k+1|k} = F \hat{x}_{k|k} \quad (2.1.5)$$

$$P_{k+1|k} = F P_{k|k} F^T + Q \quad (2.1.6)$$

Připomeňme, že při splnění daných podmínek a při lineárních maticích modelu systému dostaneme použitím Kalmanova filtru daného vztahy (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5) a (2.1.6) nejlepší lineární odhad podle střední kvadratické chyby. Při odvození Kalmanova filtru není použito

žádných aproximací a odhad stavu je tak lineární transformací měření. Není-li některý z předpokladů splněn, je vhodné uvážit použití jiného filtru. V tom případě se však již dopouštíme aproximací a to buď linearizací nelineárního systému, nebo aproximativním vyjádřením hustot pravděpodobnosti šumů. V této práci se budeme dále zabývat filtry, které poskytují optimální odhad v okolí bodu ve stavovém prostoru, v němž se dopouštíme aproximace. Tyto filtry se nazývají lokální filtry a jejich nejpoužívanějším zástupcem je rozšířený Kalmanův filtr.

## 2.2. ROZŠÍŘENÝ KALMANŮV FILTR

V této kapitole se oprostíme od předpokladu lineárního systému. Mějme model systému ve tvaru

$$x_{k+1} = f(x_k) + w_k \quad (2.2.1)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (2.2.2)$$

kde  $f(\cdot)$  a  $h(\cdot)$  jsou známé vektorové funkce. Pro jednoduchost uvažujme navíc časově invariantní, autonomní systém. Všechny ostatní předpoklady na systém jsou zachovány jako v případě Kalmanova filtru. Šumy jsou tedy nezávislé, s nulovou střední hodnotou a známou kovariancí. Počáteční stav je opět nezávislá náhodná gaussovská veličina se známou střední hodnotou a kovariancí.

Přirozeným přístupem, jak se zbavit nelinearit v maticích modelu systému, je daný model linearizovat použitím Taylorova rozvoje. Tím se však dopouštíme aproximace a získané odhady již nebudou přesné. Určení rekurzních vztahů rozšířeného Kalmanova filtru lze nalézt v [1] nebo [5] a my si je nyní shrňme. Vztahy pro výpočet filtračního odhadu jsou

$$h(x_k) \cong h(\hat{x}_{k|k-1}) + \underbrace{\frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k}}_{=H(\hat{x}_{k|k-1})} \Big|_{\hat{x}_{k|k-1}} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \quad (2.2.3)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} H^T(\hat{x}_{k|k-1}) (H(\hat{x}_{k|k-1}) P_{k|k-1} H^T(\hat{x}_{k|k-1}) + R)^{-1} (y_k - h(\hat{x}_{k|k-1})) \quad 2.2.4$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H^T(\hat{x}_{k|k-1}) (H(\hat{x}_{k|k-1}) P_{k|k-1} H^T(\hat{x}_{k|k-1}) + R)^{-1} H(\hat{x}_{k|k-1}) P_{k|k-1} \quad (2.2.5)$$

Výpočet prediktivního odhadu je dán vztahy

$$f(x_k) \cong f(\hat{x}_{k|k}) + \underbrace{\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} |_{\hat{x}_{k|k}}}_{=F(\hat{x}_{k|k})} (x_k - \hat{x}_{k|k}) \quad (2.2.6)$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k}) \quad (2.2.7)$$

$$P_{k+1|k} = F(\hat{x}_{k|k})P_{k|k}F^T(\hat{x}_{k|k}) + Q \quad (2.2.8)$$

Budeme-li požadovat vyšší kvalitu odhadu rozšířeného Kalmanova filtru, můžeme pro estimaci využít i vyšších členů Taylerova rozvoje funkcí  $f(\cdot)$  a  $h(\cdot)$ . Využijeme-li například i členů rozvoje druhého řádu, dostaneme takzvaný filtr druhého řádu. Dalším možným způsobem, jak zlepšit kvalitu odhadu, je několikanásobné využití měření v čase  $k$ . Je totiž zřejmé, že využitím měření  $y_k$  dostaneme přesnější střední hodnotu odhadu  $\hat{x}_{k|k}$ , než jako byla prediktivní střední hodnota odhadu  $\hat{x}_{k|k-1}$ . Určíme-li nyní novou aproximaci funkce  $h(x_k)$ , ale nyní již v bodě  $\hat{x}_{k|k}$ , můžeme tuto aproximaci využít k opětovnému výpočtu filtrační hustoty pravděpodobnosti odhadu. Protože je možno tímto způsobem iterativně zlepšovat kvalitu odhadu až do chvíle, kdy obdržíme další měření, je takovýto filtr označován jako iterační. Obdobným způsobem lze navíc zlepšit kvalita odhadu i pro ostatní představené lokální filtry.

EKF je nejhojněji využívaným lokálním filtrem. Jeho nevýhodou je, že výpočet derivací matic dynamiky systému a měření může být obtížný a při některých typech nelinearit může dávat špatné odhady stavu. Tento nedostatek by měl řešit následující filtr.

### 2.3. UNSCENTOVANÝ KALMANŮV FILTR

Unscentovaný Kalmanův filtr (UKF) je další modifikací Kalmanova filtru pro odhad stavu nelineárních systémů. Tento filtr na rozdíl od EKF nelinearizuje funkce  $f(\cdot)$  a  $h(\cdot)$ . Místo toho využívá unscentovanou transformaci, jejíž princip je dle [6] následující:

#### 2.3.1. UNSCENTOVANÁ TRANSFORMACE

1. Uvažujme  $n$ -bodů vektoru  $x$  se známou střední hodnotou  $\bar{x}$  a kovariancí  $P_x$ . Tento soubor bodů budeme nazývat sigma-body. Pro známou nelineární transformaci  $y = h(x)$  chceme nalézt střední hodnotu  $\bar{y}$  a kovarianci  $P_y$  náhodné veličiny  $y$ .
2. Výběr  $2n$  sigma-bodů provedeme tak, aby platilo

$$x_0 = \bar{x} \quad (2.3.1)$$

$$x_i = \bar{x} + \left(\sqrt{(n + \kappa)P_x}\right)_i \quad \text{pro } i = 1, \dots, n$$

$$x_i = \bar{x} - \left(\sqrt{(n + \kappa)P_x}\right)_i \quad \text{pro } i = n + 1, \dots, 2n$$

s váhou jednotlivých bodů

$$W_0 = \frac{\kappa}{n + \kappa} \quad (2.3.2)$$

$$W_i = \frac{1}{2(n + \kappa)} \quad \text{pro } i = 1, \dots, 2n \quad (2.3.3)$$

kde  $\kappa \in R$  je uživatelem volený parametr,  $\left(\sqrt{(n + \kappa)P_x}\right)_i$  je  $i$ -tý sloupec odmocniny matice  $(n + \kappa)P_x$ , kdy platí

$$\left(\sqrt{(n + \kappa)P_x}\right)^T \left(\sqrt{(n + \kappa)P_x}\right) = (n + \kappa)P_x \quad (2.3.4)$$

Numericky lze  $\left(\sqrt{(n + \kappa)P_x}\right)$  získat například použitím Choleského rozkladu.

3. Provedme transformaci jednotlivých sigma-bodů, takže dostaneme soubor jejich transformovaných hodnot využitím vztahu

$$y_i = h(x_i) \quad \text{pro } i = 0, \dots, 2n \quad (2.3.5)$$

4. Střední hodnotu  $\bar{y}$  náhodné veličiny  $y$  dostaneme jako její vážený průměr

$$\bar{y} = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} W_i y_i \quad (2.3.6)$$

5. Kovarianci  $P_y$  náhodné veličiny  $y$  dostaneme jako

$$P_y = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} W_i (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^T \quad (2.3.7)$$

### 2.3.2. UNSCENTOVANÝ KALMANŮV FILTR

S takto definovanou unscentovanou transformací můžeme nyní definovat unscentovaný Kalmanův filtr pro systém definovaný v kapitole 2.2 se známou prediktivní hustotou pravděpodobnosti počátečního odhadu stavu systému

$$p(x_0) \sim N(x_0; \hat{x}_{0|-1}, P_{0|-1})$$

Filtrační odhad hustoty pravděpodobnosti získáme, aplikujeme-li pro známé hodnoty  $\hat{x}_{k|k-1}$  a  $P_{k|k-1}$  první tři kroky unscenované transformace z kapitoly 2.3.1. Kovarianci predikce měření a kovarianci mezi predikcí měření a prediktivním odhadem pak vypočteme jako

$$P_y = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} W_i (\hat{y}_{i_k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1}) (\hat{y}_{i_k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1})^T + R \quad (2.3.8)$$

$$P_{xy} = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} W_i (\hat{x}_{i_k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}) (\hat{y}_{i_k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1})^T \quad (2.3.9)$$

Vztahy pro získání filtračního odhadu jsou pak

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \underbrace{P_{xy} P_y^{-1}}_{K_k} (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (2.3.10)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_y K_k^T \quad (2.3.11)$$

Obdobným způsobem aplikujeme první dva kroky unscenované transformace z 2.3.1 pro  $\hat{x}_{k|k}$  a  $P_{k|k}$ . Dostaneme tak prediktivní odhad, který je dán následujícími vztahy

$$\hat{x}_{k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} W_i \hat{x}_{i_{k+1}|k} \quad (2.3.12)$$

$$P_{k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} W_i (\hat{x}_{i_{k+1}|k} - \hat{x}_{k|k}) (\hat{x}_{i_{k+1}|k} - \hat{x}_{k|k})^T \quad (2.3.13)$$

Takto definovaný UKF má oproti EKF některé výhody. Těmi nejdůležitějšími je větší přesnost odhadu střední hodnoty stavu, protože k jeho výpočtu používáme větší množství bodů. Další výhodou je nižší výpočetní náročnost pro některé systémy, protože odpadá nutnost výpočtu Jacobiho matice. Při použití UKF počítáme pouze transformace jednotlivých bodů sigma-výběru, což je výpočetně nenáročná operace.

## 2.4. DIFERENČNÍ FILTR PRVNÍHO ŘÁDU

Dalšími zástupci lokálních filtrů jsou diferenční filtry. Jejich anglický název je divided difference filters (DDF). Lze se setkat s DDF prvního a druhého řádu. V této práci se omezíme pouze na diferenční filtr prvního řádu podle [7], [9]. Princip jejich fungování je velmi podobný rozšířenému Kalmanovu filtru, s tím rozdílem, že místo derivací funkcí  $f(\cdot)$  a

$h(\cdot)$ , a tedy nutnosti počítání jejich Jacobyho matic, používají DDF diference. K linearizaci se využívá Stirlingovy interpolace prvního řádu. Funkce měření  $h(x_k)$ , potřebná k určení filtrační hustoty pravděpodobnosti je aproximovaná jako

$$\begin{aligned} y &= h(x_k) \\ &\cong h(\hat{x}_{k|k-1}) \\ &+ \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\kappa} \left( h_i(\hat{x}_{k|k-1} + \kappa s_{j_{k|k-1}}) - h_i(\hat{x}_{k|k-1} - \kappa s_{j_{k|k-1}}) \right) \right\}}_{\tilde{H}(i,j)} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

kde  $h_i$  je  $i$  - tá řádka funkce měření  $h(x_k)$ . Člen  $s_{j_{k|k-1}}$  je  $j$  - tý sloupec matice  $S_{k|k-1}$ , pro kterou platí  $(S_{k|k-1})(S_{k|k-1})^T = P_{k|k-1}$ . Matice  $\tilde{H}(i,j)$  se pak skládá ze členů na pozici  $(i,j)$ , daných řešením části rovnice v  $\{ \}$  pro  $i = 1, \dots, n$  a  $j = 1, \dots, n$ . Parametr  $\kappa$  je volen uživatelem a určuje délku interpolačního intervalu. Pro normální rozložení hustoty pravděpodobnosti je standardně volena jeho hodnota  $\kappa = \sqrt{3}$ . S využitím takto definované interpolace můžeme nyní definovat filtrační odhad hustot pravděpodobnosti pomocí DDF

$$K_k = S_{k|k} \tilde{H}^T(i,j) (\tilde{H}(i,j) \tilde{H}^T(i,j) + R)^{-1} \quad (2.4.2)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - h(\hat{x}_{k|k-1})) \quad (2.4.3)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k (\tilde{H}(i,j) \tilde{H}^T(i,j) + R) K_k^T \quad (2.4.4)$$

Obdobně jako jsme aproximovali funkci  $h(x_k)$ , můžeme aproximovat funkci  $f(x_k)$ .

$$f(x_k) \cong f(\hat{x}_{k|k}) + \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\kappa} \left( f_i(\hat{x}_{k|k} + \kappa s_{j_{k|k}}) - f_i(\hat{x}_{k|k} - \kappa s_{j_{k|k}}) \right) \right\}}_{\tilde{F}(i,j)} \quad (2.4.5)$$

Dostaneme pak následující prediktivní odhad hustoty pravděpodobnosti

$$\hat{x}_{k|k+1} = f(\hat{x}_{k|k}) \quad (2.4.6)$$

$$P_{k|k+1} = \tilde{F}(i,j) \tilde{F}^T(i,j) + Q \quad (2.4.7)$$



### 3. POLYNOMIÁLNÍ FILTRY

V této kapitole se budeme zabývat odhadem stavu lineárního systému, na který působí šumy popsané více jak dvěma momenty náhodné veličiny. K řešení této úlohy použijeme filtr zvaný kvadratický filtr [10].

#### 3.1. NEGAUSSOVSKÝ SYSTÉM

Při definování Kalmanova filtru v části 2.1 jsme uvažovali systém, jehož šumy byly popsány pomocí prvních dvou momentů náhodné veličiny. V případě, že budou tyto šumy mít gaussovské rozložení hustot pravděpodobnosti, budou úplně popsány pro známou střední hodnotu a kovariancí. Budou-li však na systém působit negaussovské šumy se známými i vyššími momenty, lze dosáhnout zlepšení oproti Kalmanovu filtru vhodnou volbou nelineárního filtru. V posledních letech byla tato problematika hojně řešena a existuje celá řada přístupů, jako například [12], [11], či [15], vedoucích k zlepšení odhadu stavu negaussovských systémů. V této práci se budeme zabývat kvadratickým filtrem.

Ten uvažuje stochastický systém se známým stavovým popisem a šumy popsány prvními čtyřmi momenty. Kvadratický filtr se snaží poskytnout lepší odhad stavu, než bychom dostali použitím libovolného lineárního filtru, ale přitom je zachována jednoduchost a rekurzivita výpočtu. Kritérium optimality je zvoleno ve smyslu střední kvadratické chyby. Opět předpokládáme, že šumy působící na systém jsou bílé, nezávislé, s nulovou střední hodnotou. Jak již bylo napsáno výše, na rozdíl od Kalmanova filtru již nepředpokládáme prvních dvou, ale čtyř momentů šumové náhodné veličiny, které musí být konečné. Pomocí nich rozšíříme stavový prostor systému využitím kvadrátu měření. Výsledný rozšířený prostor definujeme jako spojení původního, nerozšířeného stavového prostoru a druhé mocniny stavu.

#### 3.2. KRONECKERŮV SOUČIN

Protože při rozšiřování stavového prostoru v kvadratickém filtru budeme pracovat s maticemi a vektory, není možné použít jednoduché mocnění jednotlivých skalárních členů matic modelu systému, ale je třeba vypočítat Kroneckerův součin [15] pro vypočtení mocnin matic podle následující definice:

Mějme matici  $A$  velikosti  $n \cdot n$  a matici  $B$  velikosti  $m \cdot m$ . Kroneckerův součin je pak dán jako

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} b_{1,1}A & \dots & b_{1,m}A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1}A & \dots & b_{m,m}A \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

Jsou-li matice  $A$  a  $B$  čtvercové, pak je výsledná matice po Kroneckerově součinu opět čtvercová, a její dimenze je  $m \cdot n$ . V této práci bude mocnina matice získaná Kroneckerovým součinem značena

$$x_k^{[2]} = x_k \otimes x_k \quad (3.2.2)$$

V tomto případě se jedná o kvadrát vektoru stavu. Pro Kroneckerův součin dále platí

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \quad (3.2.3)$$

### 3.3. OPTIMÁLNÍ KVADRATICKÝ FILTR

Uvažujme následující lineární diskretní autonomní systém podle [10]

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k \quad (3.3.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (3.3.2)$$

pro který platí  $x_k \in R^n$ ,  $y_k \in R^m$ ,  $F_k \in R^{n \cdot n}$ ,  $H_k \in R^{m \cdot n}$ . Dále předpokládáme znalost počátečního stavu  $x_0$ , kdy platí  $E\{x_0\} = 0$ . Pro šумы platí, že se jedná o nezávislé náhodné veličiny, které jsou popsány známými prvními čtyřmi momenty. Šумы jsou taktéž nezávislé na počátečním stavu. Dále předpokládáme

$$E\left\{\|x_k^{[2]}\|^2\right\} < \infty \quad E\left\{\|w_k^{[2]}\|^2\right\} < \infty \quad E\left\{\|v_k^{[2]}\|^2\right\} < \infty$$

Pro takto definovaný systém můžeme zavést rozšíření vektoru stavu a vektoru měření jako

$$X_{Rk} = \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^{[2]} \end{bmatrix} \in R^{n+n^2}$$

$$Y_{Rk} = \begin{bmatrix} y_k \\ y_k^{[2]} \end{bmatrix} \in R^{m+m^2}$$

Pomocí takto definovaného rozšířeného vektoru stavu snadno vypočteme jeho vývoj v čase.

Vývoj  $x_k$  je definován vztahem (3.3.1). Vývoj členu  $x_k^{[2]}$  je dán jako

$$\begin{aligned}
x_{k+1}^{|2|} &= (F_k x_k + w_k)^{|2|} & (3.3.3) \\
&= \underbrace{F_k x_k \otimes F_k x_k}_{=F_k^{|2|} x_k^{|2|}} + F_k x_k \otimes w_k + w_k \otimes F_k x_k + w_k \otimes w_k
\end{aligned}$$

Rozšířenou matici dynamiky systému pak lze definovat jako

$$F_{Rk} = \begin{bmatrix} F_k & 0 \\ 0 & F_k^{|2|} \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

Rozšířený vektor stavového šumu pak lze zapsat jako

$$\begin{aligned}
W_{Rk} &= \begin{bmatrix} w_k \\ F_k x_k \otimes w_k + w_k \otimes F_k x_k + w_k \otimes w_k \end{bmatrix} & (3.3.5) \\
&= \begin{bmatrix} w_k \\ (I \otimes F_k)(w_k \otimes x_k) + (F_k \otimes I)(x_k \otimes w_k) + w_k^{|2|} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Analogickým výpočtem jako v případě (3.3.4) získáme matici rozšířenou výstupní matici systému

$$H_{Rk} = \begin{bmatrix} H_k & 0 \\ 0 & H_k^{|2|} \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

a matici šumu měření

$$\begin{aligned}
V_{Rk} &= \begin{bmatrix} v_k \\ H_k x_k \otimes v_k + v_k \otimes H_k x_k + v_k \otimes v_k \end{bmatrix} & (3.3.7) \\
&= \begin{bmatrix} v_k \\ (I \otimes H_k)(v_k \otimes x_k) + (H_k \otimes I)(x_k \otimes v_k) + v_k^{|2|} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Nyní odvodíme kovarianční matice rozšířených šumů. Začneme opět odvozením pro stavový šum

$$Q_{Rk} = E\{W_{Rk} W_{Rk}^T\} = \begin{bmatrix} \mu_2(w) & \mu_3(w) \\ \mu_3(w) & w^{\{4\}} \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

kde

$$\mu_2 = E[w_k w_k^T] \quad (3.3.9)$$

$$\begin{aligned}
\mu_3(w) &= E[w_k ((I \otimes F_k)(w_k \otimes x_k) + (F_k \otimes I)(x_k \otimes w_k) + w_k^{|2|})^T] & (3.3.10) \\
&= \underbrace{E[w_k (I \otimes F_k)(w_k \otimes x_k)]}_{=0} + \underbrace{E[w_k (F_k \otimes I)(x_k \otimes w_k)]}_{=0} \\
&+ E[w_k w_k^{|2|T}] = E[w_k w_k^{|2|T}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^{\{4\}} &= E\left[ \left( (I \otimes F_k)(w_k \otimes x_k) + (F_k \otimes I)(x_k \otimes w_k) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + w_k^{|2|} \right) \left( (I \otimes F_k)(w_k \otimes x_k) + (F_k \otimes I)(x_k \otimes w_k) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + w_k^{|2|} \right) \right] - E[\mu_2(w)]^2 \\
&= E[(I \otimes F_k)(w_k \otimes x_k)(w_k \otimes x_k)^T (I \otimes F_k)^T] \\
&\quad + E[(I \otimes F_k)(w_k \otimes x_k)(x_k \otimes w_k)^T (F_k \otimes I)^T] \\
&\quad + E[(F_k \otimes I)(x_k \otimes w_k)(w_k \otimes x_k)^T (I \otimes F_k)^T] \\
&\quad + E[(F_k \otimes I)(x_k \otimes w_k)(x_k \otimes w_k)^T (F_k \otimes I)^T] \\
&\quad + E[w_k^{|2|} w_k^{|2|T}] - \mu_2(w) \otimes \mu_2(w)^T \\
&= (I \otimes F_k)(\mu_2(w) \otimes P_k)(I \otimes F_k)^T \\
&\quad + (I \otimes F_k)(\mu_2(w) \otimes P_k)M^T (F_k \otimes I)^T \\
&\quad + (I \otimes F_k)(P_k \otimes \mu_2(w))M^T (I \otimes F_k)^T \\
&\quad + (F_k \otimes I)(P_k \otimes \mu_2(w))(F_k \otimes I)^T + \mu_4(w) \\
&\quad - \mu_2(w) \otimes \mu_2(w)^T
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

kde matice M je definovaná jako

$$M = \frac{y \otimes x}{x \otimes y} \tag{3.3.12}$$

Jedná se tedy o matici „prohazující“ řádky na pravé straně následujícího vztahu tak, aby platila jeho rovnost

$$E[(w_k \otimes x_k)(x_k \otimes w_k)^T] = (\mu_2 \otimes P_k)M^T \tag{3.3.13}$$

Matici  $P_k$  jsme získali výběrem submatice dimenze  $n$  z kovarianční matice odhadu rozšířeného stavu  $P_{R_k}$ . Analogicky jako jsme získali rozšířenou kovarianční matici stavového šumu  $Q_{R_k}$ , můžeme získat rozšířenou kovarianční matici výstupního šumu  $R_{R_k}$ , pouze nahradíme matici  $F_k$  maticí  $H_k$ , náhodnou veličinou  $w$  veličinou  $v$  a momenty náhodné veličiny  $\mu_i(w)$  momenty  $\mu_i(v)$ .

**Výsledný algoritmus kvadratického filtru je dán následovně:**

Nejprve uveďme vztahy pro výpočet filtračního odhadu

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{R_k|k} &= \hat{X}_{R_k|k-1} \\
&\quad + P_{R_k|k-1} H_{R_k} \left[ R_{R_k} + H_{R_k} P_{R_k|k-1} H_{R_k}^T \right]^{-1} \left[ Y_{R_k} \right. \\
&\quad \left. - H_{R_k} \hat{X}_{R_k|k-1} \right]
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

$$P_{R_k|k} = P_{R_k|k-1} - P_{R_k|k-1} H_{R_k} \left[ R_{R_k} + H_{R_k} P_{R_k|k-1} H_{R_k}^T \right]^{-1} H_{R_k} P_{R_k|k-1} \quad (3.3.15)$$

Vztahy pro výpočet prediktivního odhadu jsou

$$\hat{X}_{R_{k+1}|k} = F_{R_k} \hat{X}_{R_k|k} \quad (3.3.16)$$

$$P_{R_{k+1}|k} = F_{R_k} P_{R_k|k} F_{R_k} + Q_{R_k} \quad (3.3.17)$$

Optimální odhad stavu pak získáme výběrem prvních  $n$  složek z odhadu rozšířeného vektoru stavu  $\hat{X}_{R_k}$ .

### Příklad 3.1 (Skalární případ)

Uvažujme systém se stavovým modelem

$$x_{k+1} = 0,6x_k + w_k \quad (3.3.18)$$

$$y_k = 0,8x_k + v_k \quad (3.3.19)$$

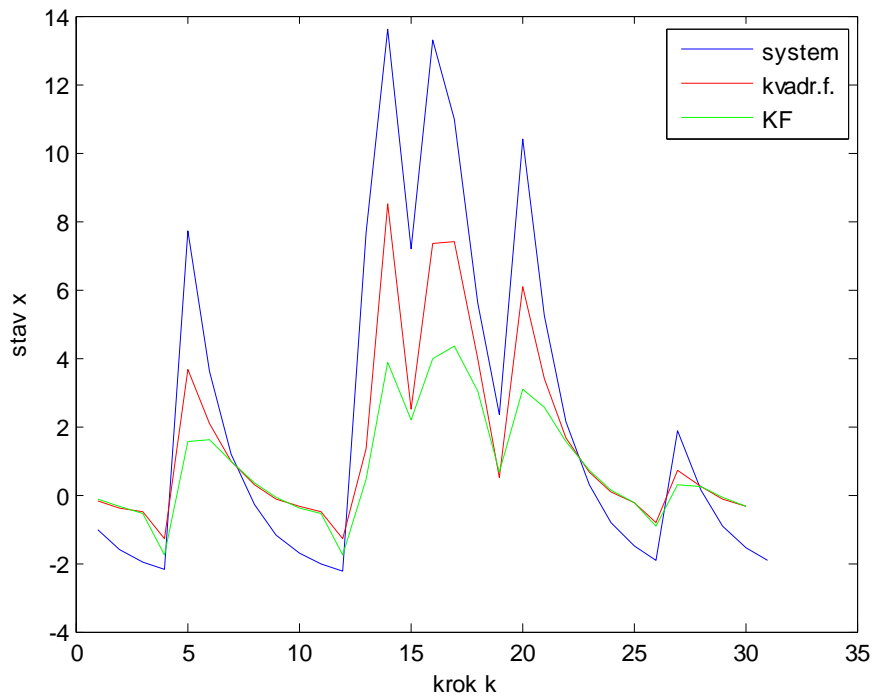
Šumy působící na systém jsou nezávislé s nulovou střední hodnotou. Jejich rozdělení pravděpodobnosti je dáno následující pravděpodobnostní funkcí.

$w_k$	-1	3	9
$p(w_k)$	$\frac{15}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

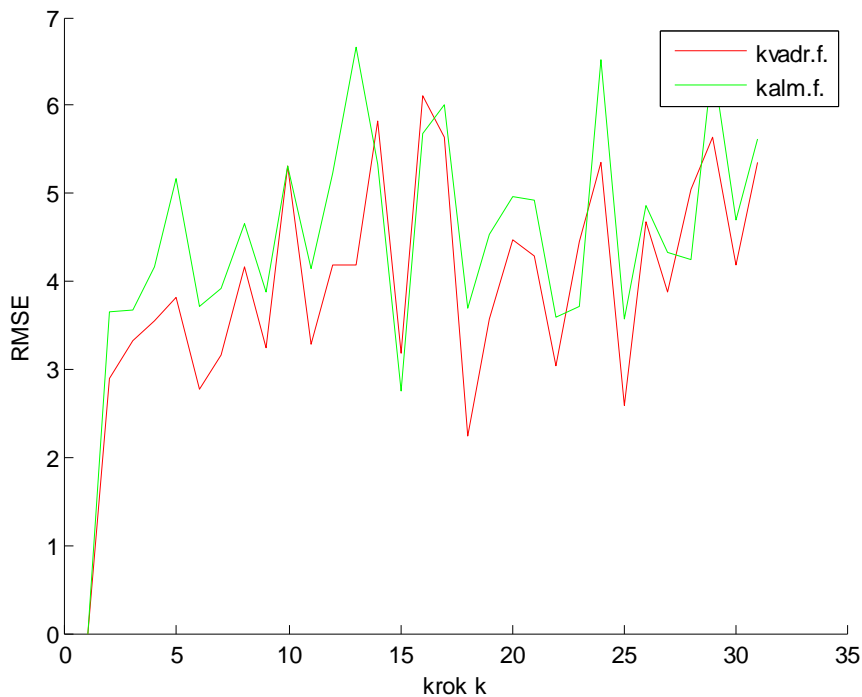
$v_k$	1	-3	-9
$p(v_k)$	$\frac{15}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

Tabulka 3.1: Pravděpodobnostní funkce šumů pro příklad 3.1

Na následujícím obrázku je zobrazen stav daného systému a jeho odhad použitím kvadratického filtru. Pro porovnání kvality filtrace je vykresleno porovnání s Kalmanovým filtrem. Dále jsou vykresleny průměrné střední kvadratické chyby odhadů pro sto simulací.



Obrázek 3.1: Odhad stavu skalárního systému použitím kvadratického filtru. Porovnání s Kalmanovým filtrem.



Obrázek 3.2: Průměrná kvadratická chyba odhadu stavu skalárního systému použitím kvadratického a Kalmanova filtru pro sto simulací

Pro numerické ověření kvality odhadu je v následující tabulce ještě vypsána střední kvadratická chyba odhadu průměrné realizace trvající 30 kroků.

	$E[\tilde{x}_1^2]$
<b>kvadratický filtr</b>	6,7
<b>Kalmanův filtr</b>	14,43

Tabulka 3.2: Střední kvadratická chyba odhadu kvadratického filtru a Kalmanova filtru

Z této tabulky je patrné, že použitím kvadratického filtru jsme dostali odhad systému s přibližně poloviční střední kvadratickou chybou odhadu než v případě použití Kalmanova filtru.

### Příklad 3.2 (Skalární případ s odchylkovým modelem)

Dalšího zlepšení kvality odhadu pro daný systém bylo dosaženo dle [10] zavedením odchylkového modelu

$$\tilde{X}_{R_{k+1}} = F_{R_k} \tilde{X}_{R_k} + W_{R_k} \quad (3.3.20)$$

$$\tilde{Y}_{R_k} = H_{R_k} \tilde{X}_{R_k} + V_{R_k} \quad (3.3.21)$$

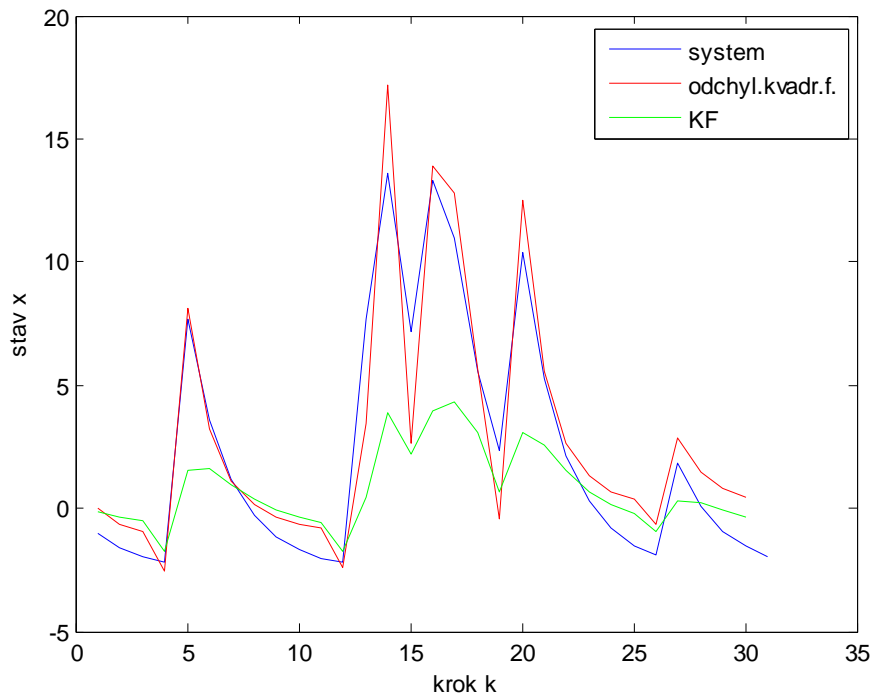
Nejprve určíme odchylku rozšířeného vektoru měření. Ta je daná vztahem

$$\tilde{Y}_{R_k} = \begin{bmatrix} y_k \\ y_k^{[2]} \end{bmatrix} - H_{R_k} L_k \quad (3.3.22)$$

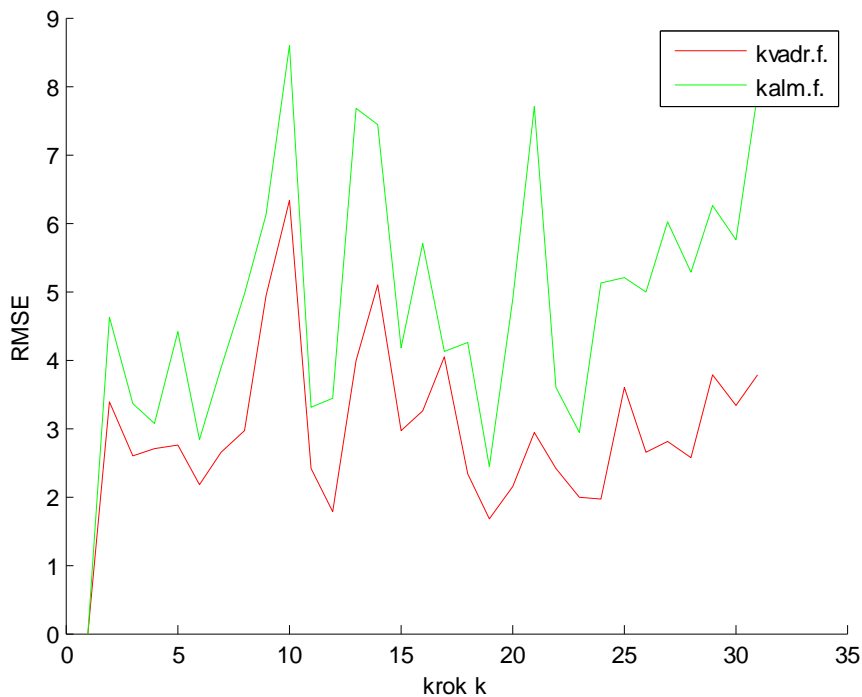
kde matice  $L$  představuje tzv. akumulátor stavu. Jedná se o hodnotu rozšířeného odhadnutého vektoru stavu z předchozího kroku simulace, tedy  $L_k = X_{R_{k-1}}$ . S takto získanou odchylkou měření provedeme odhad rozšířeného stavu systému stejně jako v příkladě 3.1 s tím rozdílem, že nyní dostaneme odchylku odhadu stavu  $\tilde{X}_{R_k}$ . Odhad rozšířeného stavu je pak dán jako

$$X_{R_k} = \tilde{X}_{R_k} + L_k \quad (3.3.23)$$

Z takto nalezeného rozšířeného stavu opět vybereme prvních  $n$  složek, které jsou odhadem původního, nerozšířeného stavu. Funkčnost odchylkového modelu ověříme na stejném systému jako v příkladě 3.1. Dostaneme tak následující odhady stavu a vývoje průměrných hodnot chyb pro oba filtry



Obrázek 3.3: Odhad stavu skalárního systému s využitím kvadratického filtru při využití odchylového modelu. Porovnání s Kalmanovým filtrem.



Obrázek 3.4: Vývoj průměrné kvadratické chyby odhadu stavu skalárního systému použitím kvadratického a Kalmanova filtru pro sto simulací při využití odchylového modelu



Opět vykreslíme tabulku s hodnotami středních kvadratických chyb obou filtrů pro průměrné realizace systému.

	$E[\tilde{x}_1^2]$
<b>kvadratický filtr</b>	3,01
<b>Kalmanův filtr</b>	14,43

Tabulka 3.3: Střední kvadratická chyba odhadu stavu skalárního systému použitím kvadratického filtru s odchylovým modelem a Kalmanova filtru

Z tabulky je patrné, že zavedením odchylového modelu se zlepšila kvalita odhadu přibližně dvakrát. Takovéto zlepšení však nebylo pro různé systémy pravidlem a je tedy na uvážení, zda je v dané úloze zavedení odchylového modelu prospěšné.

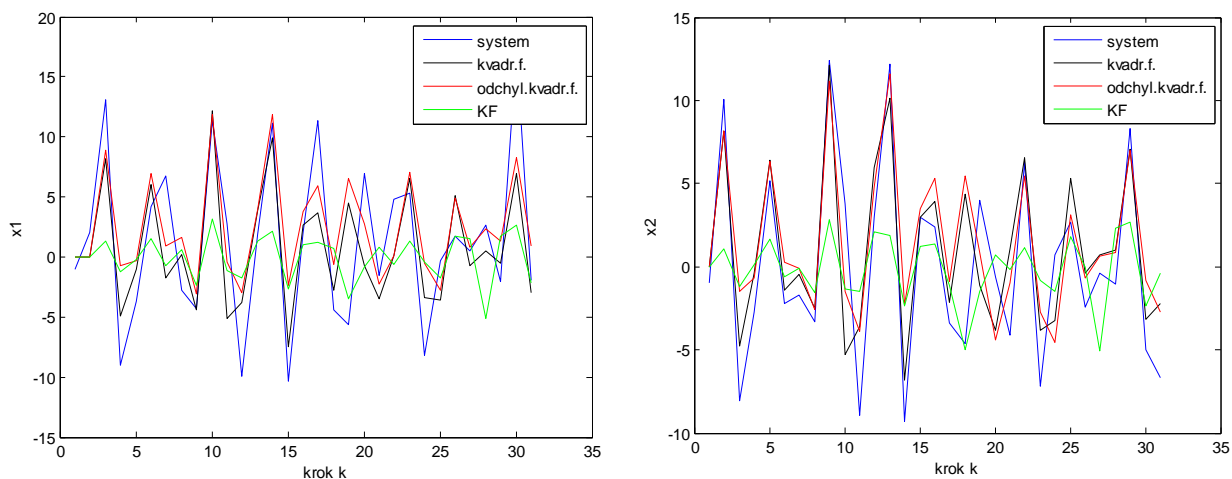
### Příklad 3.3 ( Vícerozměrný systém )

Nyní se oprostíme od představy skalárního systému a budeme se zabývat využitím kvadratického filtru pro odhad stavu vícerozměrného systému. Uvažujme systém s následujícím dvourozměrným stavovým modelem

$$\begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & -0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1_k} \\ w_{2_k} \end{bmatrix} \quad (3.3.24)$$

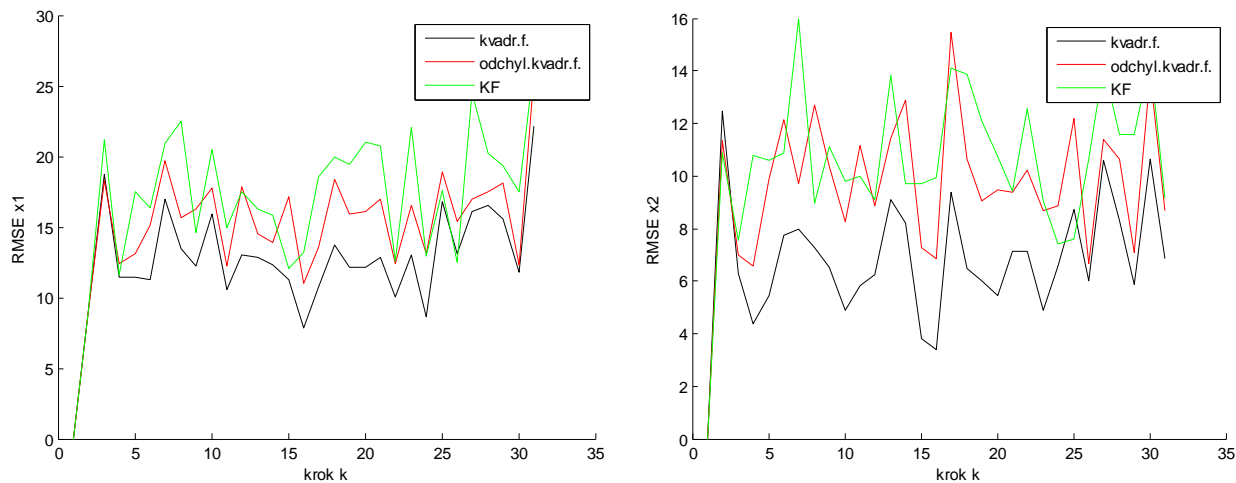
$$y_k = [0 \quad 0,3] \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + v_k \quad (3.3.25)$$

Šumy působící na systém jsou nezávislé s nulovou střední hodnotou. Jejich rozdělení pravděpodobnosti je dáno pravděpodobnostní funkcí podle tabulky 3.1. Aplikací filtru na takto definovaný systém při simulaci o třiceti krocích byly nalezeny odhady stavů, které jsou na následujícím obrázku. Pro odhad byl použit jak kvadratický filtr bez odchylového modelu, tak i filtr s odchylovým modelem. Pro porovnání byl použit Kalmanův filtr.



Obrázek 3.5: Odhad dvourozměrného stavu systému využitím kvadratického filtru, kvadratického filtru s odchylkovým modelem a Kalmanova filtru

Z obrázků je patrné, že použitím kvadratických filtrů jsme získali kvalitní odhady stavů systému. Tuto skutečnost potvrzují i obrázky vykreslující vývoj průměrné chyby odhadu pro sto simulací pro oba filtry i hodnoty středních kvadratických chyb průměrné realizace.



Obrázek 3.6: Vývoj průměrné chyby odhadu stavu dvourozměrného systému při využití kvadratického a Kalmanova filtru pro 100 simulací při využití odchylkového modelu

	$E[\tilde{x}_1^2]$	$E[\tilde{x}_2^2]$
<b>kvadratický filtr</b>	21,52	11,96
<b>kvadr.f. (odchylkový m.)</b>	22,91	13,29
<b>Kalmanův filtr</b>	38,28	23,65

Tabulka 3.4: Střední hodnota kvadrátu chyb při použití kvadratického filtru, kvadratického filtru s odchylkovým modelem a Kalmanova filtru

Použitím kvadratického filtru se, podobně jako ve skalárním případě, zmenšila střední hodnota kvadrátu chyby oproti Kalmanovu filtru přibližně na polovinu. Použitím odchylkového modelu jsme však nyní nezískali další zlepšení odhadu oproti kvadratickému filtru bez odchylkového modelu, tak jak tomu bylo ve skalárním případě. Použitím kvadratického filtru bez odchylkového modelu jsme vždy získali lepší odhady než z Kalmanova filtru, i když velikost zmenšení střední hodnoty kvadrátu chyby se měnila.

### **Příklad 3.4 (Šumy systému s rovnoměrnými rozděleními hustot pravděpodobnosti)**

V tomto příkladě se budeme zabývat odhadem stavu stejného systému, jako byl v předchozím příkladě, tedy popsaného rovnicemi (3.3.24) a (3.3.25) s tím rozdílem, že budeme uvažovat stavové šumy s rovnoměrnými hustotami pravděpodobnosti

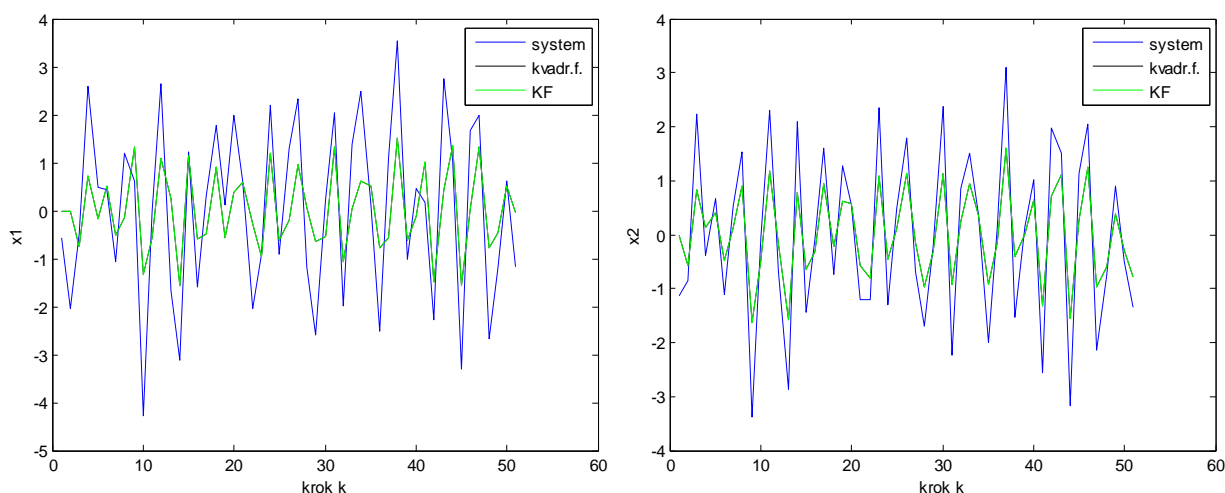
$$p(w_1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & w_1 \in (-1; 1) \\ 0 & w_1 \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \end{cases} \quad (3.3.26)$$

$$p(w_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & w_2 \in (-2; 2) \\ 0 & w_2 \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \end{cases} \quad (3.3.27)$$

stejně tak uvažujme šum měření s rovnoměrnou hustotou rozložení pravděpodobnosti

$$p(v) = \begin{cases} \frac{1}{4} & v \in (-2; 2) \\ 0 & v \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \end{cases} \quad (3.3.28)$$

Pro takto definovaný systém provedeme odhad vektoru stavu pomocí kvadratického filtru a Kalmanova filtru stejně jako v příkladě 3.3. Výsledek simulace je pak znázorněn na následujícím obrázku



Obrázek 3.7: Odhad dvourozměrného vektoru stavu kvadratickým a Kalmanovým filtrem při rovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti šumů.

Z obrázku je zřejmé, že použitím obou filtrů dostáváme stejné odhady stavu. Tento fakt nám potvrdil i výpočet středních kvadratických chyb odhadů. Tento jev je způsoben tím, že rovnoměrné rozdělení má třetí moment náhodné veličiny nulový. To způsobí, že matice rozšířeného Kalmanova zisku, daného maticí

$$K_{R_k} = P_{R_k|k-1} H_{R_k} \left[ R_{R_k} + H_{R_k} P_{R_k|k-1} H_{R_k}^T \right]^{-1} \quad (3.3.29)$$

je pokaždé blokově diagonální. Zpřesnění odhadu, které získáme rozšířením vektoru stavu využitím znalosti 3. a 4. momentu náhodné veličiny, se tedy nepromítne do odhadu původního, nerozšířeného vektoru stavu.

### 3.4. POLYNOMIÁLNÍ FILTR VYŠŠÍHO ŘÁDU

Principy odvození optimálního kvadratického filtru z kapitoly 3.3 lze obecně použít k odvození filtru vyššího řádu. Musíme si však uvědomit, že máme-li stav systému

$$x_k \in R^n$$

tak polynomiální filtr  $i$ -tého řádu bude používat rozšířený vektor stavu

$$X_{R_k} = \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^{[2]} \\ \vdots \\ x_k^{[i]} \end{bmatrix} \in R^{n+n^2+\dots+n^i} \quad (3.4.1)$$

Jestli tedy budeme chtít navrhnout například filtr čtvrtého řádu pro systém druhého řádu, pak rozšířený vektor stavu bude vypadat následovně

$$X_{R_k} = \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^{[2]} \\ x_k^{[3]} \\ x_k^{[4]} \end{bmatrix} \in R^{2+2^2+2^3+2^4} \quad (3.4.2)$$

a bude 30. řádu. Tento fakt by nám při dostatečném výpočetním výkonu nemusel obecně bránit v návrhu filtru. Je však třeba brát dále v potaz, jak by pro takový systém vypadaly rozšířené matice systému. Rozšířená matice dynamiky systému by pak byla

$$F_{R_k} = \begin{bmatrix} F_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_k^{[2]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_k^{[3]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k^{[4]} \end{bmatrix} \quad (3.4.3)$$

Rozšířený vektor stavového šumu je pak

$$W_{R_k} = \begin{bmatrix} w_k \\ F_k x_k \otimes w_k + w_k \otimes F_k x_k + w_k \otimes w_k \\ F_k^{[2]} x_k^{[2]} \otimes w_k + F_k x_k \otimes w_k \otimes F_k x_k + F_k x_k \otimes w_k^{[2]} + w_k \otimes F_k x_k \otimes w_k + w_k^{[2]} \otimes F_k x_k + w_k^{[3]} \\ (F_k x_k + w_k) \otimes (F_k x_k + w_k) \otimes (F_k x_k + w_k) \otimes (F_k x_k + w_k) \end{bmatrix} \quad (3.4.4)$$

Poslední člen rozšířeného vektoru stavového šumu již není pro přehlednost roznásoben. Pro návrh filtru čtvrtého řádu je nutné pro takto získané  $W_{R_k}$  určit kovarianční matici  $Q_{R_k}$ . Postup získání této matice je analogický jako v kapitole 3.3, avšak výsledná matice  $Q_{R_k}$  je natolik rozsáhlá, že jí zde nebudeme uvádět. Poznamenejme však, že bude využívat znalosti prvních osmi momentů šumové náhodné veličiny. Obecně můžeme tvrdit, že pro návrh filtru  $i$  –tého řádu požadujeme znalost prvních  $2i$  momentů náhodné veličiny.

### 3.5. VÝPOČETNÍ NÁROČNOST KVADRATICKÉHO FILTRU

Zvětšení kvality odhadu použitím kvadratického filtru má svoji cenu. Tou je požadavek na:

- Nutnost znalosti vyšších momentů náhodných procesů reprezentujících šumy
- Vyšší výpočetní nároky.

Míra omezení plynoucí z prvního požadavku je různá případ od případu a je na uvážení návrháře filtru, zda bude pro daný systém možné nalézt správné momenty náhodných veličin popisujících šumy. Pro dobře známé šumy bude tedy toto omezení takřka zanedbatelné. To o omezení plynoucím z vyšších výpočetních nároků říci nelze, protože to je nutno brát v úvahu vždy. Vypišme si nyní pro názornost časy porovnávající časovou náročnost Kalmanova a kvadratického filtru pro příklady použití představené v této práci. Začneme porovnáním pro skalární případ

	Čas [s]
<b>kvadratický filtr</b>	10,14
<b>Kalmanův filtr</b>	8,76

Tabulka 3.5: Časová náročnost kvadratického a Kalmanova filtru při odhadu 100 tis. stavů skalárního systému

Je patrné, že pro odhad stavu skalárního systému je zvýšení časové náročnosti kvadratického filtru oproti Kalmanovu filtru takřka zanedbatelné. Konkrétně se jedná o nárůst náročnosti o 15,75%, což je nárůst, který bude pro většinu aplikací při dnešních výpočetních výkonech akceptovatelný. Diametrálně odlišný případ nastává, budeme-li chtít odhadnout 100 tisíc stavů, ale tentokrát pro dvourozměrný systém. V tuto chvíli dostaneme následující časové náročnosti filtrů

	Čas [s]
<b>kvadratický filtr</b>	287
<b>Kalmanův filtr</b>	8,7

Tabulka 3.6: Časová náročnost kvadratického a Kalmanova filtru při odhadu 100 tis. stavů dvourozměrného systému

Časové náročnosti Kalmanova filtru jsou pro skalární a dvourozměrný případ takřka totožné. Mírně kratší doba výpočtu u dvourozměrného systému je zřejmě způsobena lepší optimalizací výpočetního skriptu, či nižším zatížením počítače v době výpočtu. Pro nás je však důležitější údaj o časové náročnosti kvadratického filtru pro tento případ. Nárůst času potřebného pro výpočet je oproti odhadu stavu skalárního systému 28 násobný. Z tohoto faktu lze usuzovat, o jak výrazné omezení při volbě filtru pro odhad stavu se jedná. Je nutno navíc podotknout, že další exponencionální nárůst časové náročnosti výpočtu by nastal v případě, že bychom měli systém vyššího řádu, či kdybychom chtěli použít polynomiální filtr vyššího řádu než je kvadratický filtr. Z tohoto důvodu lze vyvodit doporučení pro aplikaci polynomiálních filtrů

pouze u systémů, jejichž odhady stavu potřebujeme pouze s dostatečně velkou periodou. Budeme-li chtít tuto periodu snížit, bude muset být navýšení výpočetního výkonu zařízení, na němž poběží estimační algoritmus, velmi výrazné.

## 4. ROBUSTNÍ FILTRY

V této kapitole se seznámíme s dalším filtrem, který je alternativou ke Kalmanovu filtru. Jedná se o robustní filtr, který je jinak též označován jako  $H_\infty$  filtr<sup>1</sup>. Ten má oproti Kalmanovu filtru některé výhody:

- Nepředpokládá perfektní znalost modelu systému, jehož stav chceme odhadovat, což se projeví v robustnosti tohoto filtru. Požadavek na přesný model systému je značně náročný, protože v realitě je jejich zjišťování těžké, a tedy i drahé, a v řadě případů se nám přesný model nepovede nalézt.
- Neminimalizuje varianci chyby odhadu, ale maximální chybu odhadu. Z tohoto důvodu bývá též označován jako tzv. minimax filtr.

V praxi je Kalmanův filtr často aplikován i v případech, kdy nejsou splněny jeho požadavky, a přesto v řadě případů dostaneme použitelné odhady stavu. Použitím robustního filtru však můžeme dostat lepší výsledky a i z tohoto důvodu jsou robustní filtry v posledních dvaceti letech čím dále tím hojněji využívány a rozvíjeny.

### 4.1. DEFINOVÁNÍ KRITÉRIA OPTIMALITY ROBUSTNÍHO FILTRU

Nyní si podle [8] odvodíme robustní filtr pro diskrétní systém

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k \quad (4.1.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (4.1.2)$$

kde  $w_k$  a  $v_k$  jsou šumové signály. Jak již bylo poznamenáno výše, neplatí pro šумы předpoklady jako v případě Kalmanova filtru. Může se tedy jednat o náhodné procesy s neznámými rozděleními hustot pravděpodobnosti. Při návrhu filtru se budeme snažit minimalizovat kritériální funkci

$$J_1 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \|x_k - \hat{x}_k\|_{S_k}^2}{\|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} (\|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R_k^{-1}}^2)} \quad (4.1.3)$$

kde  $\hat{x}_k$  značí námi hledaný odhad, který minimalizuje kritérium. Symbolem  $\hat{x}_0$  značíme odhad počátečního stavu. Protože kritérium je zlomek, tak se jeho hodnota bude snižovat

---

<sup>1</sup> Písmeno H v názvu  $H_\infty$  značí Hardyho prostor, který je pojmenován po G. H. Hardy [13], který tento prostor definoval ve své práci z roku 1915. Značka nekonečna v názvu znamená, že filtr je navrhován tak, aby minimalizoval maximální chybu odhadu ve frekvenční oblasti pro všechny frekvence.



v případě, že jeho číselník se bude také snižovat. Na druhou stranu se bude hodnota kritéria zvětšovat vhodnou volbou norem parametrů  $\hat{x}_0$ ,  $w_k$  a  $v_k$  což jsou nástroje, jak nám příroda může bránit v našem snažení. Uživatel bude volit matice  $P_0$ ,  $Q_k$  a  $R_k$  pro konkrétní parametry. Tímto způsobem lze daný problém chápat jako minimax úlohu z teorie her, kdy neurčitost je reprezentovaná přírodou a ta je naším soupeřem, který se snaží co nejvíce zvětšit chybu odhadu  $x_k - \hat{x}_k$ . Jedná se tak o jiný přístup než v případě Kalmanova filtru, kdy jsou hustoty rozdělení pravděpodobnosti dané a příroda tak již nemá prostředek k aktivnímu zhoršování našeho odhadu.

Matice  $S_k$ ,  $Q_k$  a  $R_k$  jsou voleny návrhářem filtru podle konkrétní úlohy. Jedná se o symetrické pozitivně definitní matice, kdy matice  $Q_k$  a  $R_k$  by v případě Kalmanova filtru odpovídaly kovariantním maticím šumu systému a měření. V případě robustního filtru se jedná o hodnocení míry působení složek šumů na jednotlivé stavy či měření. Matice  $S_k$  nám dovoluje určit složky stavu, které jsou pro nás důležité a chceme je tedy odhadnout přesněji, tím že na příslušné pozici na diagonále  $S_k$  zvolíme větší hodnotu oproti ostatním diagonálním prvkům. Jsou-li matice stavového šumu a šumu měření známé, je-li známá i matice počáteční kovariance odhadu  $P_0$  a všechny tyto matice splňují požadavky Kalmanovu filtru, mohou být stejné matice použity v obou filtrech.

Bohužel přímá minimalizace kritériální funkce není možná, a proto zavedeme hranici kritéria  $\theta$ , kterou nesmí kritérium přesáhnout a pro kterou platí vztah

$$J_1 < \frac{1}{\theta}$$

Úpravou předchozího vztahu a použitím vztahu (4.1.3) dostaneme upravené kritérium optimality

$$J = -\frac{1}{\theta} \|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \|x_k - \hat{x}_k\|_{S_k}^2 - \frac{1}{\theta} \left( \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R_k^{-1}}^2 \right) \right] < 1 \quad (4.1.4)$$

Naším úkolem je tedy najít takový odhad  $\hat{x}_k$ , který minimalizuje kritérium  $J$  při daném počátečním stavu systému a při daných šumech. To lze vyjádřit pomocí následujícího vztahu

$$J^* = \min_{\hat{x}_k} \max_{w_k, v_k, x_0} J \quad (4.1.5)$$

kde  $J^*$  značí optimální hodnotu kritéria  $J$ . Je třeba si uvědomit, že výstup systému je jednoznačně určen počátečním stavem  $x_0$ , stavovým šumem  $w_k$  a výstupním šumem  $v_k$ . Lze tedy rovnici pro optimální hodnotu kritéria přepsat do tvaru

$$J^* = \min_{\hat{x}_k} \max_{w_k, y_k, x_0} J \quad (4.1.6)$$

Stejně jako byla v předchozím vztahu nahrazena proměnná  $v_k$  proměnnou  $y_k$ , tak provedeme záměnu i v kritériální funkci, protože platí následující vztah  $v_k = y_k - Hx_k$  a tedy

$$\|v_k\|_{R_k^{-1}}^2 = \|y_k - Hx_k\|_{R_k^{-1}}^2 \quad (4.1.7)$$

Kritérium optimality pak lze přepsat do tvaru

$$J = \frac{1}{\theta} \|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 \quad (4.1.8)$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \|x_k - \hat{x}_k\|_{S_k}^2 - \frac{1}{\theta} \left( \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|y_k - Hx_k\|_{R_k^{-1}}^2 \right) \right]$$

Tohoto tvaru využijeme při řešení minimax úlohy dané rovnicí (4.1.6). Bude tedy vhodné uvést nyní stručný návod k řešení optimalizační úlohy pro dynamické systémy.

## 4.2. DYNAMICKÁ OPTIMALIZACE

Předpokládejme, že máme diskrétní stochastický systém, jehož dynamiku lze popsat rovnicí

$$x_{k+1} = F(x_k, w_k) \quad (4.2.1)$$

Naším cílem je minimalizovat kritérium

$$J = \Phi(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L_k(x_k, w_k) \quad (4.2.2)$$

Pro nalezení řešení této úlohy si nadefinujeme Hamiltonovy kanonické funkce

$$H_k = L_k(x_k, w_k) + \lambda_{k+1}^T F(x_k, w_k) \quad (4.2.3)$$

pro  $k = 0, \dots, N-1$ . Proměnné  $\lambda_{k+1}^T$  se nazývají Lagrangeovy multiplikátory. Pro nalezení stacionárního bodu je nutné řešit následující Euler-Lagrangeovy rovnice

$$\left[ \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} \right]^T = F(x_k, w_k) = x_{k+1} \quad (4.2.4)$$

$$\left[ \frac{\partial H_k}{\partial x_k} \right]^T = \lambda_k^T = \frac{\partial}{\partial x} L_k(x_k, w_k) + \lambda_{k+1}^T \frac{\partial}{\partial x} F(x_k, w_k) \quad (4.2.5)$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial w_k} = \frac{\partial}{\partial w} L_k(x_k, w_k) + \lambda_{k+1}^T \frac{\partial}{\partial w} F(x_k, w_k) = 0 \quad (4.2.6)$$

s hraničními podmínkami, kdy počáteční stav  $x_0$  je znám a platí

$$\lambda_N^T = \frac{\partial \Phi(x_N)}{\partial x} \quad (4.2.7)$$

Pro studium dalších úloh dynamické optimalizace lze doporučit [16].

### 4.3. HLEDÁNÍ OPTIMÁLNÍHO KRITÉRIA ROBUSTNÍHO FILTRU

Nejprve nalezneme maximum kritériální funkce vzhledem k počátečnímu odhadu stavu  $x_0$  a vzhledem k stavovému šumu  $w_k$ . Budeme tedy hledat řešení následující rovnice

$$J^* = \max_{x_0, w_k} J \quad (4.3.1)$$

Definujme Hamiltonovu rovnici stejně jako v 4.2

$$\mathbf{H}_k = L(x_k, w_k) + \lambda_{k+1}^T (F x_k + w_k)$$

Pro zjednodušení dalších výpočtů zaměňme Lagrangeův multiplikátor tak, aby platil následující vztah pro Hamiltonovu rovnici

$$\mathbf{H}_k = L(x_k, w_k) + \frac{2\lambda_{k+1}^T}{\theta} (F x_k + w_k) \quad (4.3.2)$$

čímž jsme nikterak neovlivnili pravdivost této rovnice. Takto definovanou Hamiltonovu rovnici můžeme použít v rovnici kritéria dynamické optimalizace s tím rozdílem, že funkci  $\Phi(x_N)$  ohodnocující koncový stav nahradíme funkcí  $\Phi(x_0)$ , která ohodnocuje stav počáteční.

Dostaneme tak kritérium

$$\begin{aligned}
J_D &= \Phi(x_0) + \sum_{i=0}^{N-1} L(x_k, w_k) + \frac{2\lambda_{k+1}^T}{\theta} (Fx_k + w_k - x_{k+1}) & (4.3.3) \\
&= \Phi(x_0) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{N-1} L(x_k, w_k) + \frac{2\lambda_{k+1}^T}{\theta} (Fx_k + w_k) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{2\lambda_{k+1}^T}{\theta} x_{k+1} \\
&= \Phi(x_0) + \sum_{i=0}^{N-1} L(x_k, w_k) + \frac{2\lambda_{k+1}^T}{\theta} (Fx_k + w_k) - \sum_{i=0}^N \frac{2\lambda_k^T}{\theta} x_k \\
&\quad + \frac{2\lambda_0^T}{\theta} x_0
\end{aligned}$$

Tento vztah můžeme dále upravit při využití (4.3.2) do tvaru

$$\begin{aligned}
J_D &= \Phi(x_0) + \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{H}_k - \sum_{i=0}^N \frac{2\lambda_k^T}{\theta} x_k + \frac{2\lambda_0^T}{\theta} x_0 & (4.3.4) \\
&= \Phi(x_0) + \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{H}_k - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{2\lambda_k^T}{\theta} x_k - \frac{2\lambda_N^T}{\theta} x_N + \frac{2\lambda_0^T}{\theta} x_0 \\
&= \Phi(x_0) + \sum_{i=0}^{N-1} \left( \mathbf{H}_k - \frac{2\lambda_k^T}{\theta} x_k \right) + \frac{2\lambda_N^T}{\theta} x_N + \frac{2\lambda_0^T}{\theta} x_0
\end{aligned}$$

Stacionární bod musí splňovat tyto podmínky

$$\frac{\partial J_D}{\partial x_k} = 0 \quad \text{pro } k = 0, \dots, N \quad (4.3.5)$$

$$\frac{\partial J_D}{\partial w_k} = 0 \quad \text{pro } k = 0, \dots, N-1 \quad (4.3.6)$$

$$\frac{\partial J_D}{\partial \left( \frac{2\lambda_0^T}{\theta} \right)} = 0 \quad \text{pro } k = 0, \dots, N \quad (4.3.7)$$

Rozdělíme-li první z těchto rovnic na tři rovnice pro  $x_0$ ,  $x_N$  a  $x_k$  pro  $k = 1, \dots, N-1$  a následně budeme rovnici (4.3.4) derivovat podle všech proměnných, dostaneme následující výsledky

$$\frac{\partial \Phi(x_0)}{\partial x_0} + \frac{2\lambda_0^T}{\theta} = 0 \quad (4.3.8)$$

$$\frac{2\lambda_N^T}{\theta} = 0 \quad (4.3.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial x_k} - \frac{2\lambda_k^T}{\theta} = 0 \quad \text{pro } k = 1, \dots, N-1 \quad (4.3.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial w_k} = 0 \quad \text{pro } k = 0, \dots, N-1 \quad (4.3.11)$$

$$x_{k+1} - Fx_k - w_k = 0 \quad (4.3.12)$$

Poslední rovnice je rovnicí systému a je vždy splněna. Pomocí takto nalezených rovnic nyní budeme hledat stacionární bod maximalizující kritériální funkci  $J$  pro proměnné  $x_0$  a  $w_k$ . Začneme úpravou rovnice (4.3.8) s využitím znalosti počáteční kovariance odhadu  $P_0$

$$\frac{\partial \Phi(x_0)}{\partial x_0} + \frac{2\lambda_0^T}{\theta} = \frac{\partial \left( -\frac{1}{\theta} \|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 \right)}{\partial x_0} + \frac{2\lambda_0^T}{\theta} \quad (4.3.13)$$

$$= -\frac{2}{\theta} P_0^{-1}(x_0 - \hat{x}_0) + \frac{2\lambda_0^T}{\theta} = 0$$

$$-x_0 + \hat{x}_0 + P_0\lambda_0^T = 0 \quad (4.3.14)$$

čímž jsme dostali rovnici pro výpočet počátečního vztahu

$$x_0 = \hat{x}_0 + P_0\lambda_0^T \quad (4.3.15)$$

Z rovnice (4.3.9) dostáváme po úpravě rovnici pro konečnou hodnotu Lagrangeova multiplikátoru

$$\lambda_N = 0 \quad (4.3.16)$$

Dosazení do rovnice (4.3.11) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial w_k} &= \frac{\partial \left( L(x_k, w_k) + \frac{2\lambda_{k+1}^T}{\theta} (Fx_k + w_k) \right)}{\partial w_k} \quad (4.3.17) \\ &= \frac{\partial \left( \left( \|x_k - \hat{x}_k\|_{S_k}^2 - \frac{1}{\theta} \left( \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|y_k - Hx_k\|_{R_k^{-1}}^2 \right) \right) + \frac{2\lambda_{k+1}^T}{\theta} (Fx_k + w_k) \right)}{\partial w_k} \\ &= \frac{\partial \left( -\frac{1}{\theta} \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 \right)}{\partial w_k} + \frac{\partial \frac{2\lambda_{k+1}^T}{\theta} w_k}{\partial w_k} = -\frac{2}{\theta} Q_k^{-1} w_k + \frac{2\lambda_{k+1}^T}{\theta} = 0 \end{aligned}$$

Dostali jsme tak vztah definující šum systému pomocí kovariance šumu a multiplikátoru

$$w_k = Q_k \lambda_{k+1}^T \quad (4.3.18)$$

Takto definovaný šum můžeme vložit do rovnice systému a dostaneme

$$x_{k+1} = Fx_k + Q_k \lambda_{k+1}^T \quad (4.3.19)$$

Nyní dosadíme do rovnice (4.3.10)

$$\frac{\partial H_k}{\partial x_k} - \frac{2\lambda_k^T}{\theta} \quad (4.3.20)$$

$$= \frac{\partial \left( \left( \|x_k - \hat{x}_k\|_{S_k}^2 - \frac{1}{\theta} \left( \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|y_k - Hx_k\|_{R_k^{-1}}^2 \right) \right) + \frac{2\lambda_{k+1}^T}{\theta} (Fx_k + w_k) \right)}{\partial x_k}$$

$$- \frac{2\lambda_k^T}{\theta} = 2S_k(x_k - \hat{x}_k) + \frac{2}{\theta} H^T R_k^{-1} (y_k - Hx_k) + \frac{2}{\theta} F^T \lambda_{k+1}^T - \frac{2\lambda_k^T}{\theta} = 0$$

Po úpravě pak dostaneme

$$\lambda_k^T = F^T \lambda_{k+1}^T + H^T R_k^{-1} (y_k - Hx_k) + \theta S_k (x_k - \hat{x}_k) \quad (4.3.21)$$

Nyní zobecníme výsledek získaný v rovnici (4.3.15) pro všechny kroky  $k$ , přičemž využijeme rovnosti

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0 \quad (4.3.22)$$

Dostaneme

$$x_k = \bar{x}_k + P_k \lambda_k^T \quad (4.3.23)$$

přítom předpokládáme, že takto získaná hodnota  $x_k$  má konečnou hodnotu. Pomocí tohoto vztahu můžeme upravit rovnici (4.3.21) do tvaru

$$\begin{aligned} \lambda_k^T &= F^T \lambda_{k+1}^T + H^T R_k^{-1} (y_k - H(\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T)) \\ &\quad + \theta S_k (\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T - \hat{x}_k) \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Přesuneme-li všechny členy, v jejichž součinu se nachází  $\lambda_k^T$  na levou stranu, dostaneme

$$\lambda_k^T - \theta S_k P_k \lambda_k^T + H^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k^T \quad (4.3.25)$$

$$= F^T \lambda_{k+1}^T + H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) + \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)$$

$$\lambda_k^T (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k) \quad (4.3.26)$$

$$= F^T \lambda_{k+1}^T + H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) + \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)$$

Dostaneme tak upravený vztah pro výpočet Lagrangeových multiplikátorů

$$\begin{aligned} \lambda_k^T &= (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} (F^T \lambda_{k+1}^T + H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) \\ &\quad + \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)) \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Nyní upravme vztah (4.3.19) stejně jako vztah (4.3.23) a dostaneme tak

$$\bar{x}_{k+1} + P_{k+1}\lambda_{k+1} = F\bar{x}_k + FP_k\lambda_k + Q_k\lambda_{k+1} \quad (4.3.28)$$

Nyní upravíme rovnici (4.3.27)

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} + P_{k+1}\lambda_{k+1} &= F\bar{x}_k \\ &+ FP_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} (F^T \lambda_{k+1}^T \\ &+ H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) + \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)) + Q_k \lambda_{k+1} \\ &= F\bar{x}_k + FP_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} (F^T \lambda_{k+1}^T) \\ &+ FP_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} (H^T R_k^{-1} (y_k \\ &- H\bar{x}_k) + \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)) + Q_k \lambda_{k+1} \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

Převědeme-li všechny členy rovnice, jenž mají v součinu  $\lambda_{k+1}$  na pravou stranu, dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} - F\bar{x}_k - FP_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} (H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) \\ + \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)) &= (-P_{k+1} + FP_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} F^T \\ + Q_k) \lambda_{k+1} \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Tato rovnost platí jen tehdy, jsou-li členy na obou stranách rovnice rovny nule. Pro levou stranu tedy platí

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} - F\bar{x}_k - FP_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} (H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) \\ + \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} = F\bar{x}_k + FP_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} (H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) \\ + \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)) \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Stejně tak položíme pravou stranu (4.3.30) rovnu nule

$$(-P_{k+1} + FP_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} F^T + Q_k) \lambda_{k+1} = 0 \quad (4.3.33)$$

$$P_{k+1} = FP_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} F^T + Q_k \quad (4.3.34)$$

Tímto máme již všechny vztahy určující stacionární bod kritéria  $J$  vzhledem k proměnným  $x_0$  a  $w_k$ . Těchto vztahů nyní využijeme při hledání stacionárního bodu vzhledem k  $x_k$  a  $y_k$ . K tomu je nutno upravit vztah pro výpočet kritéria optimality tak, aby bylo závislé pouze na těchto dvou proměnných. Po úpravách, které jsou pro svoji rozsáhlost součástí přílohy I., jsme získali kritérium ve tvaru

$$\begin{aligned}
J = \sum_{k=0}^{N-1} & \left( (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T (S_k + \theta P_k S_k P_k) (\bar{x}_k - \hat{x}_k) \right. \\
& + 2(\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k P_k (I - \theta S_k P_k \\
& + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H \bar{x}_k) \\
& + \frac{1}{\theta} (y_k - H \bar{x}_k)^T (R_k^{-1} H P_k (I - \theta S_k P_k \\
& \left. + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} - R_k^{-1}) (y_k - H \bar{x}_k) \right)
\end{aligned} \tag{4.3.35}$$

Získali jsme tak kritérium závislé pouze na proměnných  $\hat{x}_k$  a  $y_k$ . Nyní se již můžeme pokusit nalézt stacionární bod kritéria  $J$  tím, že budeme řešit rovnice

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{x}_k} = 0 \tag{4.3.36}$$

$$\frac{\partial J}{\partial y_k} = 0 \tag{4.3.37}$$

Řešení těchto derivací je následující

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \hat{x}_k} = 2(S_k + \theta S_k P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} S_k) (\hat{x}_k - \bar{x}_k) \\
+ 2S_k P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (H \bar{x}_k - y_k) = 0
\end{aligned} \tag{4.3.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial y_k} = \frac{2}{\theta} (R_k^{-1} H P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} - R_k^{-1}) (y_k \\
- H \bar{x}_k) \\
+ (2R_k^{-1} H P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} S_k) (\bar{x}_k - \hat{x}_k) = 0
\end{aligned} \tag{4.3.39}$$

Tyto rovnice platí ve chvíli, kdy

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k \tag{4.3.40}$$

$$y_k = H \bar{x}_k \tag{4.3.41}$$

Získané vztahy potvrzují správnost našeho zobecnění vztahu (4.3.23) pro všechny časy. Musíme nyní určit, zda nalezený stacionární bod je minimem nebo maximem. K tomu potřebujeme určit druhou derivaci kritéria podle  $\hat{x}_k$  a  $y_k$ . Získáme tak

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \hat{x}_k^2} = 2(S_k + \theta S_k P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} S_k) \tag{4.3.42}$$



Protože matice  $S_k$  bude vždy volena pozitivně definitní, tak kritérium bude v bodě  $\hat{x}_k$  nabývat svého minima, pokud

$$|P_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1}|_i > 0 \quad (4.3.43)$$

kde  $i = 1, \dots, n$  a označuje  $i$ -tý minor dané matice. Dále víme, že je-li matice čtvercová, regulární a pozitivně definitní, pak se inverzí její definitnost zachovává. Platí tedy

$$|P_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)|_i > 0 \quad (4.3.44)$$

Vynásobme výraz maticí  $P_k^{-1}$  a dostaneme

$$|P_k^{-1} - \theta S_k + H^T R_k^{-1} H|_i > 0 \quad (4.3.45)$$

Matice  $P_k$ ,  $S_k$  a  $H$  jsou vždy pozitivně definitní. Stejně tak i skalární hodnota  $\theta$  je volena kladná. Podmínku (4.3.45) lze přepsat do tvaru

$$|P_k^{-1} + H^T R_k^{-1} H|_i > |\theta S_k|_i \quad (4.3.46)$$

Splnění této podmínky lze zajistit dvěma způsoby. Můžeme volit hodnotu hranice kritéria  $\theta$  dostatečně malou. Tím však zvyšujeme přijatelnou hodnotu kritéria a přicházíme o výhodu robustnosti navrhovaného filtru. Druhou možností je volba malé hodnoty členů matice  $S_k$ , která zavádí míru ohodnocující důležitost jednotlivých složek vektoru stavu. Ve většině případů však budeme chtít odhadovat všechny stavy se stejnou důležitostí a matici  $S_k$  budeme volit jako jednotkovou matici.

Pro návrh robustního filtru nám stačí nalezení hodnoty  $\hat{x}_k$ , která minimalizuje kritérium optimality. Pro úplnost však určíme i bod  $y_k$ , v němž kritériální funkce nabývá svého maxima. Druhá derivace  $J$  podle této proměnné je

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial y_k^2} &= \frac{2}{\theta} (R_k^{-1} H P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} - R_k^{-1}) \quad (4.3.47) \\ &= \frac{2}{\theta} R_k^{-1} (H P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T \\ &\quad - R_k) R_k^{-1} \\ &= \frac{2}{\theta} R_k^{-1} (H P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T \\ &\quad - R_k) R_k^{-1} \end{aligned}$$

Matice  $R_k$  je volena uživatelem obecně pozitivně definitní, čtvercová, s plnou hodností, tak i matice  $R_k^{-1}$  bude pozitivně definitní. Aby tedy nabývalo kritérium v  $y_k$  svého maxima, musí platit

$$|HP_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T - R_k|_i < 0 \quad (4.3.48)$$

kde  $i = 1, \dots, n$  a označuje  $i$ -tý minor dané matice. Z požadavku na minimum kritéria v bodě  $\hat{x}_k$  plyne, že matice  $P_k(I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1}$  bude pozitivně definitní. Jsou tedy opět dvě možnosti, které zaručí, že bude platit nerovnost (4.3.48). První z nich je mít velkou matici  $R_k$  ohodnocující šumy měření. V tomto případě bude výstup  $y_k$  systému, jehož stav chceme odhadovat, zatížen výrazným rušením. Druhou variantou, kdy bude maximalizována hodnota kritéria v závislosti na  $y_k$  je v případě, bude-li matice  $H$  malá. Bude se tedy přenášet je málo informace ze stavu na výstup a tedy i menší výstupní šum tuto informaci negativně ovlivní. Jinými slovy se sníží poměr užitečného signálu k šumu.

#### 4.4. DISKRÉTNÍ ROBUSTNÍ FILTR

Nyní využijme vztahů získaných v minulé kapitole podle [8], kdy jsme pro systém

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k \quad (4.4.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (4.4.2)$$

nalezli odhad stavu  $\hat{x}_k$ , při němž nabývá kritérium

$$J_1 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \|x_k - \hat{x}_k\|_{S_k}^2}{\|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} (\|w_k\|_{Q_k}^2 + \|v_k\|_{R_k}^2)} \quad (4.4.3)$$

svého minima, vzhledem k  $\hat{x}_0, y_k$  a  $w_k$ , při nichž je toto kritérium maximalizováno. Uživatel tyto proměnné popisuje pomocí pozitivních symetrických matic  $P_0, Q_k, R_k$  a  $S_k$ . Uživatel si dále volí hranici kritéria  $\theta$  tak, aby platila nerovnost

$$|P_k^{-1} - \theta S_k + H^T R_k^{-1} H|_i > 0 \quad (4.4.4)$$

tedy aby byla matice na levé straně nerovnosti pozitivně definitní. Odhad střední hodnoty stavu lze určit pomocí rovnice (4.3.32), do níž dosadíme podle (4.3.40). Dostaneme

$$\hat{x}_{k+1} = F \hat{x}_k + F P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H \hat{x}_k) \quad (4.4.5)$$

Vývoj kovariance odhadu je dán podle (4.3.34)

$$P_{k+1} = F P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} F^T + Q_k \quad (4.4.6)$$

#### 4.5. POROVNÁNÍ ROBUSTNÍHO A KALMANOVA FILTRU

Pokusme se nyní převést Kalmanův filtr definovaný v kapitole 2.1 do tvaru, který bude podobný získanému robustnímu filtru. Začneme úpravou vztahu pro výpočet filtrační střední hodnoty odhadu stavu

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \underbrace{P_{k|k-1}H^T(HP_{k|k-1}H^T + R)^{-1}}_{K_k} (\mathcal{Y}_k - H\hat{x}_{k|k-1}) \quad (4.5.1)$$

Využitím inverzního maticového lemma

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \quad (4.5.2)$$

při dosazení  $A = R$ ,  $B = H$ ,  $C = H^T$ ,  $D = P^{-1}$  lze upravit část Kalmanova zisku do tvaru

$$\begin{aligned} (HP_{k|k-1}H^T + R)^{-1} &= R^{-1} - R^{-1}H(P_{k|k-1}^{-1} + H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1} \\ &= R^{-1} - R^{-1}H(I + P_{k|k-1}H^TR^{-1}H)^{-1}P_{k|k-1}H^TR^{-1} \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Kalmanův zisk lze pak upravit do podoby

$$\begin{aligned} K_k &= P_{k|k-1}H^T \left( R^{-1} - R^{-1}H(I + P_{k|k-1}H^TR^{-1}H)^{-1}P_{k|k-1}H^TR^{-1} \right) \\ &= P_{k|k-1}H^TR^{-1} \\ &\quad - P_{k|k-1}H^TR^{-1}H(I \\ &\quad + P_{k|k-1}H^TR^{-1}H)^{-1}P_{k|k-1}H^TR^{-1} \\ &= \left( I \right. \\ &\quad \left. - P_{k|k-1}H^TR^{-1}H(I \right. \\ &\quad \left. + P_{k|k-1}H^TR^{-1}H)^{-1}P_{k|k-1}H^TR^{-1} \right) \\ &= \underbrace{\left( (I + P_{k|k-1}H^TR^{-1}H) - P_{k|k-1}H^TR^{-1}H \right)}_{=I} \left( I \right. \\ &\quad \left. + P_{k|k-1}H^TR^{-1}H \right)^{-1}P_{k|k-1}H^TR^{-1} \\ &= (I + P_{k|k-1}H^TR^{-1}H)^{-1}P_{k|k-1}H^TR^{-1} \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Filtrační odhad střední hodnoty stavu lze pak vyjádřit jako

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + (I + P_{k|k-1}H^TR^{-1}H)^{-1}P_{k|k-1}H^TR^{-1}(\mathcal{Y}_k - H\hat{x}_{k|k-1}) \quad (4.5.5)$$

Využijeme-li rovnosti

$$(I + P_{k|k-1}H^T R^{-1}H)^{-1}P_{k|k-1} = P_{k|k-1}(I + H^T R^{-1}HP_{k|k-1})^{-1} \quad (4.5.6)$$

dostaneme

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1}(I + H^T R^{-1}HP_{k|k-1})^{-1}H^T R^{-1}(y_k - H\hat{x}_{k|k-1}) \quad (4.5.7)$$

Dosadíme do prediktivního kroku odhadu

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= F\hat{x}_{k|k} \\ &= F\hat{x}_{k|k-1} \\ &\quad + FP_{k|k-1}(I + H^T R^{-1}HP_{k|k-1})^{-1}H^T R^{-1}(y_k - H\hat{x}_{k|k-1}) \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Získali jsme tak vztah podobný odhadu stavu pomocí robustního filtru (4.4.5)

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= F\hat{x}_{k|k} \\ &= F\hat{x}_{k|k-1} \\ &\quad + FP_k(I - \theta S_k P_{k|k-1} \\ &\quad + H^T R_k^{-1}HP_{k|k-1})^{-1}H^T R_k^{-1}(y_k - H\hat{x}_{k|k-1}) \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Porovnáním vztahů pro výpočet odhadu stavů pomocí Kalmanova filtru (4.5.8) a robustního filtru (4.5.9) můžeme zapsat rovnice pro filtrační a prediktivní odhad stavu robustním filtrem ve tvaru

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_k(I - \theta S_k P_{k|k-1} + H^T R_k^{-1}HP_{k|k-1})^{-1}H^T R_k^{-1}(y_k - H\hat{x}_{k|k-1}) \quad (4.5.10)$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = F\hat{x}_{k|k} \quad (4.5.11)$$

Úpravy pro získání filtrační kovariance chyby odhadu jsou relativně rozsáhlé, a proto jsou součástí Přílohy II. Výsledný vztah pro výpočet kovariance je

$$P_{k|k} = P_{k|k-1}(I + H^T R^{-1}HP_{k|k-1})^{-1} \quad (4.5.12)$$

Získali jsme tak vztah podobný jako v případě robustního filtru (4.4.6), jehož filtrační kovarianci odhadu lze tedy zapsat ve tvaru

$$P_{k|k} = P_{k|k-1}(I - \theta SP_{k|k-1} + H^T R^{-1}HP_{k|k-1})^{-1} \quad (4.5.13)$$

Prediktivní kovariance odhadu pro robustní filtr je stejná jako v případě Kalmanova filtru

$$P_{k+1|k} = FP_{k|k}F^T + Q \quad (4.5.14)$$

Porovnejme nyní vztahy pro výpočet filtrační střední hodnoty odhadu stavu pomocí Kalmanova filtru (4.5.8) a robustního filtru (4.5.9). Vidíme, že oba výrazy se liší pouze ve členu  $\theta SP_{k|k-1}$ , který zvyšuje hodnotu matice zesílení  $K_k$  robustního filtru a tím zvyšuje jeho robustnost. O stejný člen  $\theta SP_{k|k-1}$  se liší i filtrační kovarianční matice obou filtrů, které jsou dané vztahy (4.5.12) a (4.5.13). V tomto případě  $\theta SP_{k|k-1}$  zvyšuje kovarianci odhadu robustního filtru a tím snižuje věrohodnost přesnosti odhadu.

Budeme-li odhadovat všechny složky stavu se stejnou důležitostí, pak  $S = I$ . Jestli budou navíc šumy působící na systém a měření normální, s nulovou střední hodnotou, pak lze použít jejich kovarianční matice  $Q$  a  $R$  i v případě estimace pomocí robustního filtru. Odlišnost ve funkci robustního a Kalmanova filtru pak bude dána hraniční hodnotou kritéria  $\theta$ . V případě, že tuto hranici zvolíme nulovou, znamená to, že se oprostujeme od požadavku robustnosti filtru a robustní filtr bude totožný s Kalmanovým filtrem. Stejně tak, jako se zvětšila kovariance odhadu a matice zesílení robustního filtru zavedením vztahu  $\theta SP_{k|k-1}$ , lze dosáhnou zvětšení těchto matic, a tedy i robustnosti Kalmanova filtru tak, že budeme počítat s většími kovariantními maticemi šumů  $Q$  a  $R$ , než je jejich skutečná hodnota. Kalmanův filtr tak již nebude poskytovat nejlepší lineární odhady ve smyslu nejmenších čtverců, ale získané odhady budou robustnější.

#### **Příklad 4.1 (Skalární případ)**

Uvažujme nyní jednoduchý systém s modelem

$$x_{k+1} = x_k + w_k \quad (4.5.15)$$

$$y_k = x_k + v_k \quad (4.5.16)$$

Uvažujeme tedy matice systému  $F = I$  a  $H = I$ . Dále předpokládáme, že šumy  $w_k$  a  $v_k$  mají normální rozdělení hustot pravděpodobnosti s nulovou střední hodnotou a kovariancí  $Q = R = 1$ . Budeme chtít odhadovat všechny složky vektoru stavu se stejnou důležitostí, tedy  $S = 1$ . Hodnotu hranice kritéria  $\theta$  musí uživatel volit tak, aby byla splněna podmínka (4.4.4)

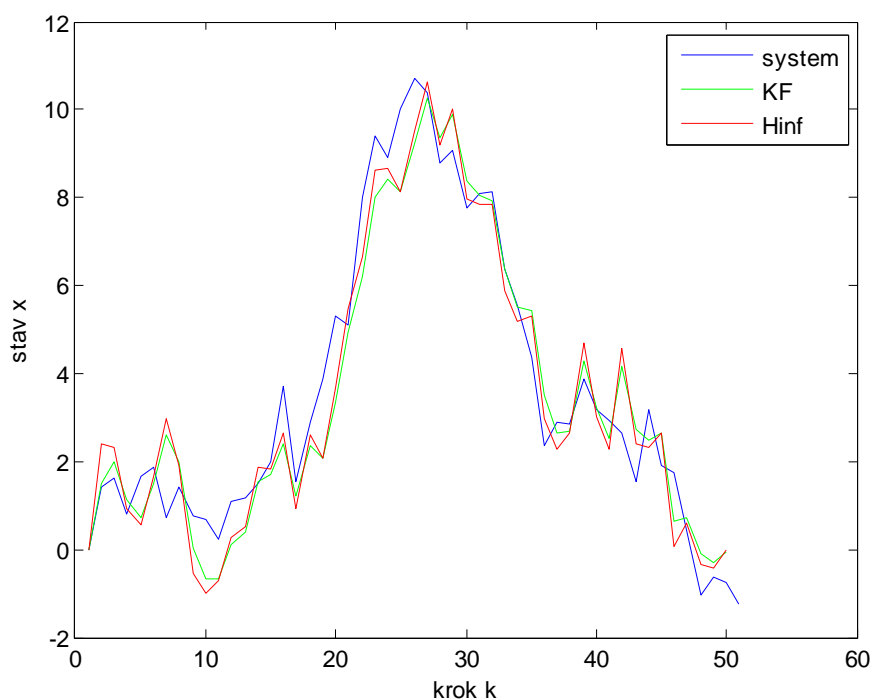
$$|P_k^{-1} - \theta S_k + H^T R_k^{-1} H|_i > 0$$

V našem skalárním případě můžeme tuto nerovnost přepsat do tvaru

$$P_k^{-1} - \theta S_k + H^T R_k^{-1} H > 0$$

$$P_k^{-1} - \theta + 1 > 0 \quad (4.5.17)$$

což je nerovnost splněná pro  $\theta \in \langle 0; 1 \rangle$ . Jak již bylo ukázáno v předchozí kapitole, pro  $\theta = 0$  se z robustního filtru stane Kalmanův filtr. Naopak je z rovnice (4.5.9) patrné, že bude-li se hodnota  $\theta$  blížit k jedné, pak se bude matice zesílení  $K_k$  zvětšovat k nekonečnu. Pro další simulační ověření funkčnosti volme  $\theta = 0,3$ . Nejprve vykresleme výsledek simulace, jestliže bude systém odpovídat přesně svému modelu. Pro porovnání vykresleme i porovnání s Kalmanovým filtrem



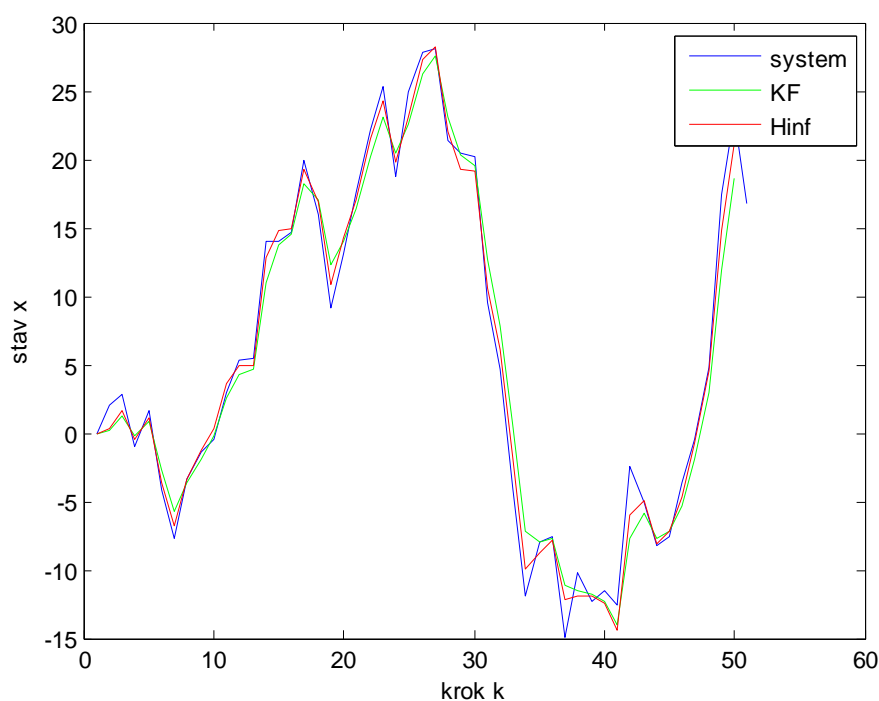
Obrázek 4.1: Odhad stavu skalárního systému při využití robustního filtru. Porovnání s Kalmanovým filtrem.

Z tohoto obrázku je patrné, že při přesné znalosti modelu systému poskytuje robustní filtr horší odhady než Kalmanův filtr. Tento fakt potvrzuje i výpočet střední kvadratické chyby a maximální absolutní chyby odhadu obou filtrů, jejichž hodnota je zapsána v následující tabulce. Zvětšení těchto chyb je způsobeno větší maticí zesílení  $K_k$  robustního filtru oproti Kalmanovu filtru, tak jak je vysvětleno v kapitole 4.5.

	$E[\tilde{x}^2]$	$\max \tilde{x} $
<b>robustní filtr</b>	0,88	1,98
<b>Kalmanův filtr</b>	0,85	2,25

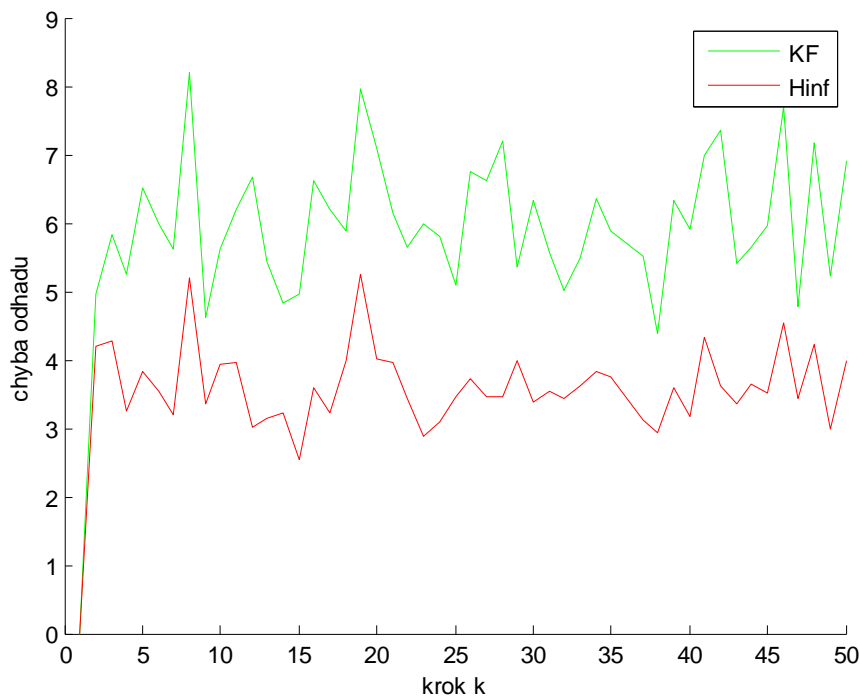
Tabulka 4.1: Střední kvadratická chyba a maximální absolutní chyba odhadu robustního a Kalmanova filtru při přesném modelu systému

Nyní se pokusme využít výhody robustnosti u robustního filtru a uvažujme nepřesný model systému. Konkrétně budeme uvažovat chybnou kovarianci šumu systému. Místo  $Q = 1$ , což je hodnota uvažovaná modelem, bude  $Q = 5$ . V tomto případě dostaneme odhad stavu systému znázorněný na následujícím obrázku.



Obrázek 4.2: Odhad stavu skalárního systému použitím robustního a Kalmanova filtru při nepřesné hodnotě kovariance šumu systému.

Z tohoto obrázku není přímo patrné zlepšení odhadu aplikací robustního filtru, a proto vykresleme i vývoje maximální hodnoty absolutní chyby pro sto simulací.



Obrázek 4.3: Maximální hodnota absolutní chyby odhadu stavu skalárního systému s nepřesným modelem pro sto simulací při použití robustního a Kalmanova filtru

Nyní je již patrné, že robustní filtr nám poskytuje přesnější výsledky než Kalmanův filtr. Tento fakt potvrdíme ještě tabulkou s chybami odhadů pro průměrnou realizaci.

	$E[\tilde{x}^2]$	$\max \tilde{x} $
<b>robustní filtr</b>	1,64	2,81
<b>Kalmanův filtr</b>	4,26	4,18

Tabulka 4.2: Střední kvadratická chyba a maximální absolutní chyba odhadu robustního a Kalmanova filtru při nepřesné kovarianci šumu systému

Poznamenejme, že robustní filtr poskytoval lepší odhady stavu systému než Kalmanův filtr i při dalších nepřesnostech modelu systému, jako je strannost šumů či nepřesné hodnoty matic  $F$  a  $H$ .

#### Příklad 4.2 ( Vícerozměrný případ )

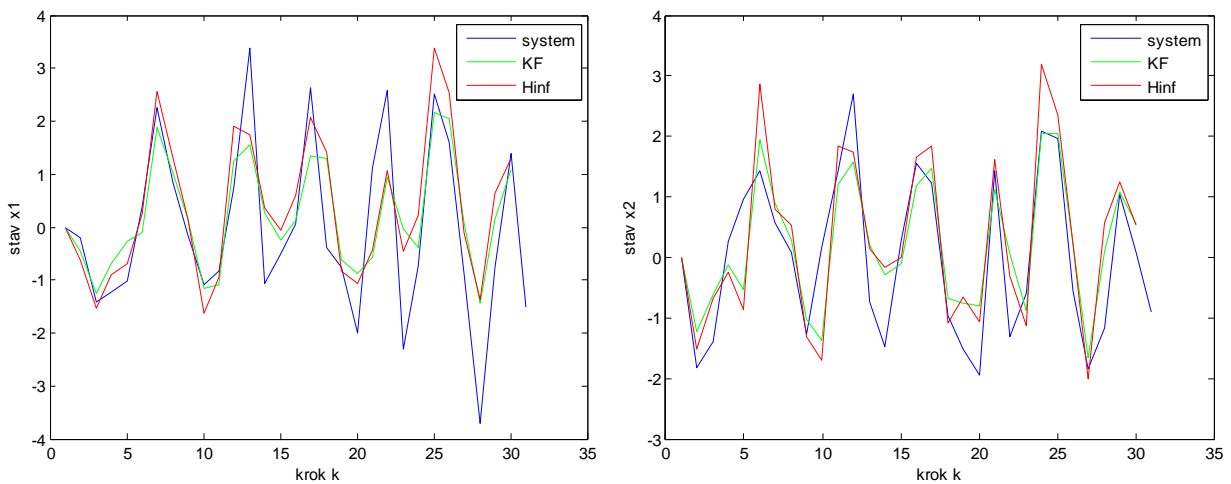
Uvažujme nyní systém popsaný modelem druhého řádu

$$\begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1_k} \\ w_{2_k} \end{bmatrix} \quad (4.5.18)$$

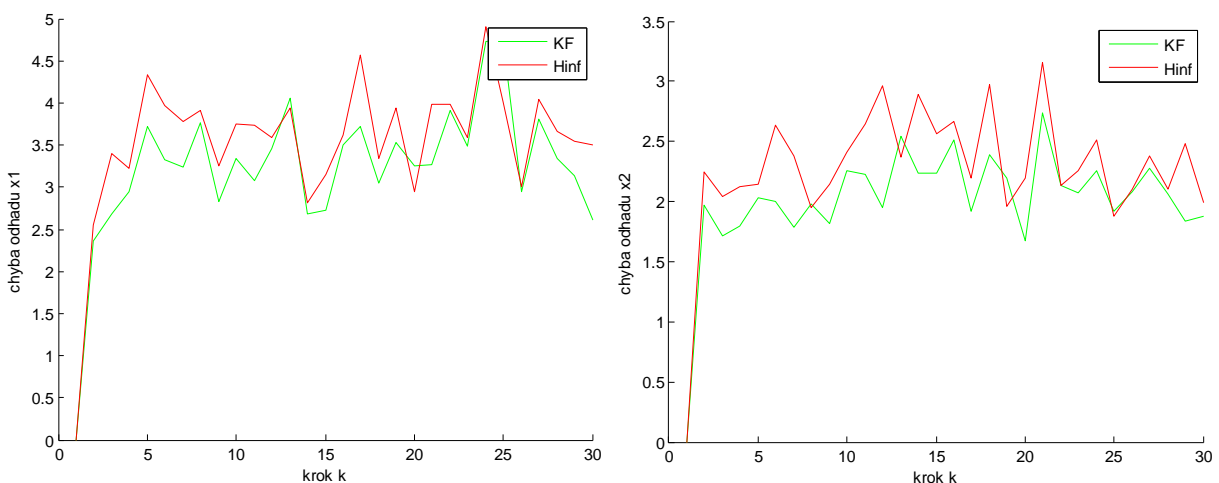


$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} + v_k \quad (4.5.19)$$

přičemž uvažujme šумы  $w_1$ ,  $w_2$  a  $v_k$  bílé, s normálním rozložením hustot pravděpodobnosti, nulovou střední hodnotou a kovariancí rovnou jedné. Dále předpokládejme, že jsou šумы vzájemně nezávislé. Apriorní odhad stavu je dán opět normálním rozložením s  $\bar{x}_0 = 0$  a  $cov(x_0) = 1$ . Hraniční hodnotu kritéria volme stejně jako v předchozím případě  $\theta = 0,3$ . Tím tato hodnota splňuje kritérium (4.4.4) pro všechny časy. Vykresleme nyní vývoj odhadu filtrační střední hodnoty stavu, jestliže bude model přesně odpovídat pozorovanému systému, a vykresleme i porovnání maximálních absolutních chyb odhadu robustního a Kalmanova filtru pro sto simulací.

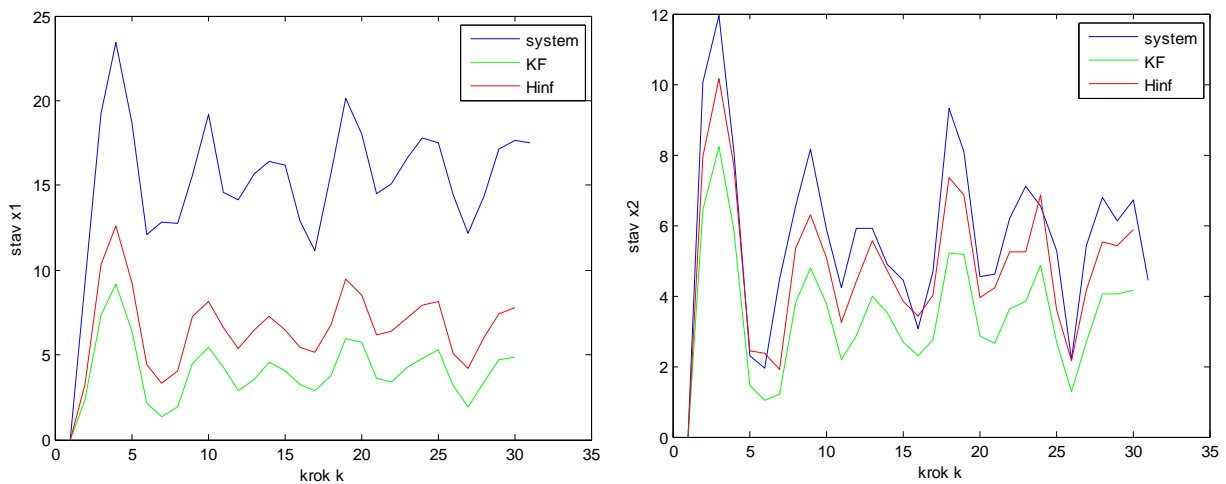


Obrázek 4.4: Vývoj odhadu stavu vícerozměrného systému pomocí robustního a Kalmanova filtru při přesném modelu systému

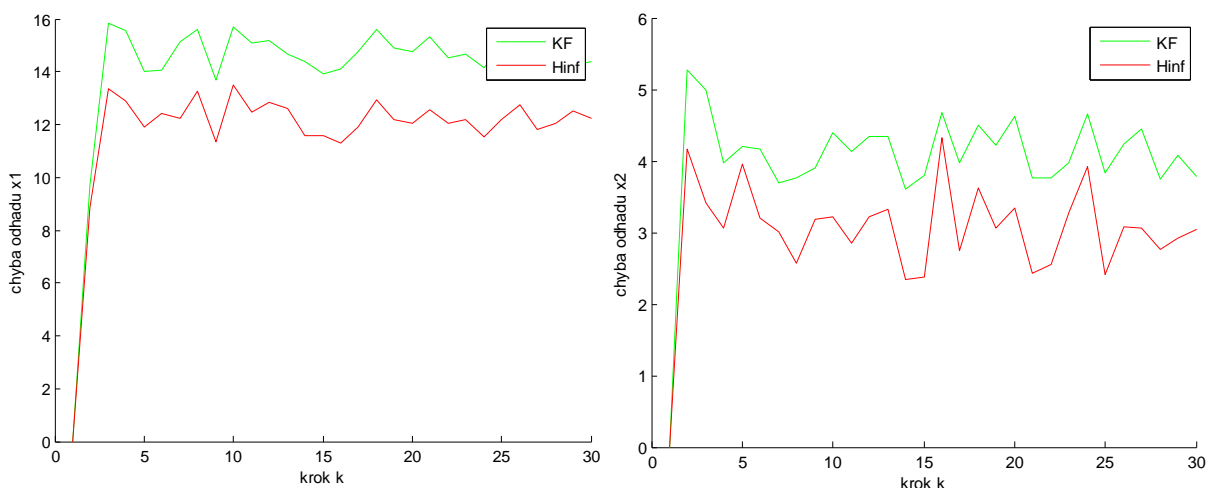


Obrázek 4.5: Maximální absolutní chyba odhadu stavů vícerozměrného systému použitím robustního a Kalmanova filtru pro sto simulací

Opět se nám potvrdilo, že při přesném modelu systému dostaneme použitím Kalmanova filtru lepší odhady stavu než použitím robustního filtru. Uvažujme nyní, že střední hodnota hustot pravděpodobností šumů systému není nulová, ale platí pro ně  $\bar{w}_1 = \bar{w}_2 = 10$ . V tuto chvíli by se měla potvrdit výhodnost použití robustního filtru, který přiřkládá větší důležitost měření, než je tomu v případě Kalmanova filtru. Vykresleme nyní stejné obrázky jako při použití přesného modelu systému.



Obrázek 4.6: Odhad stavu vícerozměrného systému použitím robustního a Kalmanova filtru při nepřesném modelu systému



Obrázek 4.7: Maximální absolutní chyba odhadu stavu vícerozměrného systému použitím robustního a Kalmanova filtru při nepřesném modelu systému pro sto simulací

Z těchto obrázků je patrné, že robustní filtr funguje dle předpokladu lépe než Kalmanův filtr. Robustní filtr lze aplikovat i pro odhad stavu systémů, jejichž modely jsou zatíženy menšími

nepřesnostmi, než je v našem případě výrazná chyba uvažovaných středních hodnot stavových šumů. Naší motivací pro volbu takto výrazné chyby modelu bylo názorné potvrzení přínosu robustního filtru.

### **Příklad 4.3 (Model systému s nepřesnou maticí dynamiky)**

V tomto příkladě se pokusíme dokázat výhodnost použití robustního filtru pro odhad stavu systému, jehož model má nepřesnou matici dynamiky  $F$ . Konkrétně budeme uvažovat model systému stejný jako v předchozím příkladě popsaný rovnicemi (4.5.18) a (4.5.19)

$$\begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1_k} \\ w_{2_k} \end{bmatrix}$$

$$y_k = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + v_k$$

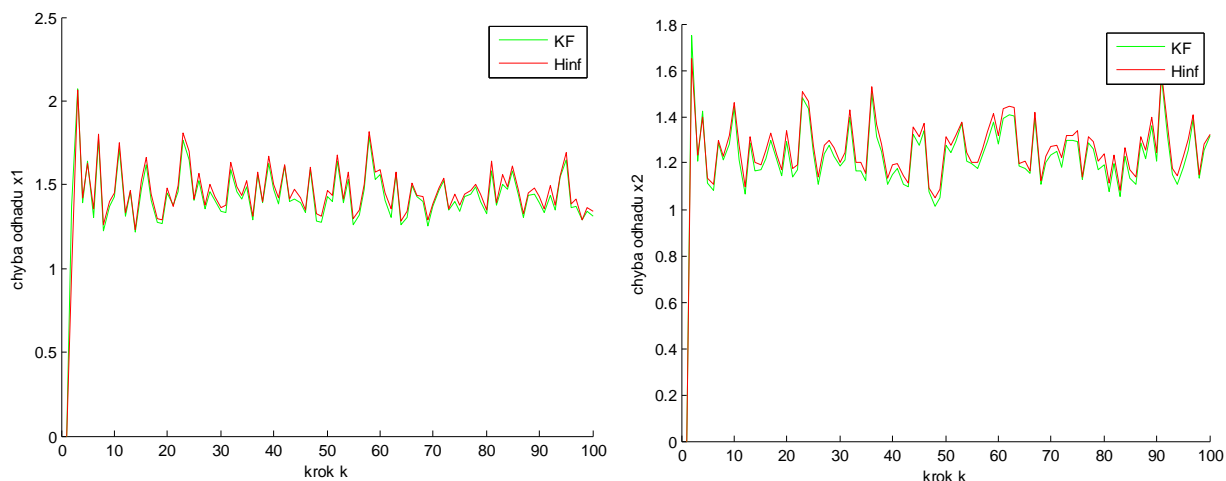
Matici kovariance šumů systému volme na rozdíl od předchozího příkladu jako

$$Q = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Tuto změnu modelu jsme provedli proto, abychom potlačili působení stavových šumů a mohli tak lépe demonstrovat funkčnost robustního systému pro danou nepřesnost modelu systému. Matice dynamiky reálného systému, který chceme tímto modelem popsat, je mírně odlišná. Konkrétně budeme uvažovat matici  $F$

$$F \sim \begin{bmatrix} N(0; 0,1) & N(1; 0,1) \\ N(-0,4; 0,1) & N(0,5; 0,1) \end{bmatrix}$$

Všechny členy matice reálné dynamiky systému jsou tedy náhodné veličiny s normálním rozdělením hustot pravděpodobnosti, s danou střední hodnotou a kovariancí. Aplikujme robustní a Kalmanův filtr pro takto definovaný systém při využití chybného modelu pro 2000 různých realizací reálného systému. Na následujícím obrázku vykreslíme maximální chyby odhadu stavů pro všechny realizace. Hraniční hodnotu kritéria volme  $\theta = 0,1$ .



Obrázek 4.8: Maximální absolutní chyba odhadu stavu vícerozměrného systému použitím robustního a Kalmanova filtru při nepřesné matici dynamiky systému pro 2000 realizací

Z těchto obrázků není zcela patrný přínos robustního filtru. Vypišme si tedy maximální chybu odhadu stavů průměrné realizace pro oba filtry

	$\max \tilde{x}_1 $	$\max \tilde{x}_2 $
<b>robustní filtr</b>	0,37	0,33
<b>Kalmanův filtr</b>	0,38	0,35

Tabulka 4.3: Maximální chyba odhadu stavu průměrné realizace systému při použití robustního a Kalmanova filtru

Z této tabulky je již lépe patrné, že použitím robustního filtru dostáváme dle předpokladu odhady stavu systému s menší maximální chybou odhadu. Bohužel není možné získat výrazně prokazatelnější výsledky potvrzující výhodnost použití robustního filtru pro nepřesnou matici dynamiky modelu systému. Je to dáno faktem, že k tomu, aby byly výsledky prokazatelnější, bychom museli model systému zatížit výrazněji chybami. Tím by se však mohly některé realizace systému stát nestabilními. Stejně tak je třeba pro tento příklad vhodné volit hraniční hodnotu kritéria  $\theta$  volit obezřetně a raději menší.

#### 4.6. VÝPOČETNÍ NÁROKY ROBUSTNÍHO FILTRU

Stejně jako jsme v kapitole 3.5 diskutovali výpočetní náročnost kvadratického filtru, tak se nyní zabývejme rozбором numerické složitosti robustního filtru. Vysoká výpočetní náročnost

by pak mohla být překážkou pro aplikaci filtru. Nejprve uveďme dobu potřebnou pro odhad 100 tis. stavů skalárního systému z příkladu 4.1 pomocí robustního a Kalmanova filtru.

	Čas [s]
<b>robustní filtr</b>	8,07
<b>Kalmanův filtr</b>	10,96

Tabulka 4.4: Časová náročnost robustního a Kalmanova filtru při odhadu 100 tis. stavů skalárního systému

Dostali jsme tak takřka totožné doby trvání výpočtu odhadů pomocí obou filtrů. Mírně kratší čas, který byl potřeba k určení odhadů pomocí robustního filtru, je dán vhodnou volbou matic ohodnocujících šumy a nelze obecně tvrdit, že by byl robustní filtr méně výpočetně náročný než Kalmanův filtr. Uveďme ještě dobu potřebnou pro odhad stavů oběma filtry pro dvourozměrný model systému z příkladu 4.2.

	Čas [s]
<b>robustní filtr</b>	8,82
<b>Kalmanův filtr</b>	8,1

Tabulka 4.5: Časová náročnost robustního a Kalmanova filtru při odhadu 100 tis. stavů dvourozměrného systému

Z tabulky je zřejmé, že ani při odhadu stavu dvourozměrného systému nejsou mezi oběma filtry výraznější rozdíly v čase potřebném pro výpočet. Lze tedy tvrdit, že na rozdíl od kvadratického filtru, který vykazoval výraznou časovou náročnost při odhadování stavu vícerozměrného systému, robustní filtr nevykazuje žádný výrazný nárůst výpočetní náročnosti oproti Kalmanovu filtru. Bude-li se tedy návrhář rozhodovat, který z filtrů je pro daný problém výhodnější, nebude muset brát v potaz výpočetní náročnost obou filtrů.

#### 4.7. NELINEÁRNÍ ROBUSTNÍ FILTRACE

V předchozí části této kapitoly jsme se zabývali odvozením a ukázkou aplikace robustního filtru pro lineární systémy. Systémy, jejichž stavy chceme odhadnout, však obecně lineární nejsou. V kapitole 2 jsme si představili nejčastěji používané lokální filtry založené na modifikaci Kalmanova filtru. V případě, že nebudeme znát přesný model nelineárního systému či budeme-li chtít minimalizovat maximální chybu odhadu filtru, můžeme k odhadu

použít některý z robustních filtrů pro nelineární systémy. Dva nejčastěji používané z těchto filtrů budou představeny v této části práce. Stejně jako u lokálních filtrů založených na Kalmanově filtru, i nyní budou nelineární matice modelu systému nahrazeny jejich lineárními aproximacemi.

#### 4.7.1. ROZŠÍŘENÝ ROBUSTNÍ FILTR

Tento filtr, jak již název napovídá, je velmi podobný rozšířenému Kalmanovu filtru (EKF). Vydeme-li z [17], či [18] a z porovnání tvaru Kalmanova a robustního filtru v kapitole 4.5, pak je zřejmé, že rozšířený robustní filtr lze určit analogicky jako rozšířený Kalmanův filtr, který jsme odvodili v kapitole 2.2. Uvažujme nelineární systém popsany stejným modelem

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k) + w_k \\ y_k &= h(x_k) + v_k\end{aligned}$$

Filtrační odhad rozšířeného robustního filtru pak lze vypočítat pomocí rovnic

$$h(x_k) \cong h(\hat{x}_{k|k-1}) + \underbrace{\frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k}}_{=H(\hat{x}_{k|k-1})} \Big|_{\hat{x}_{k|k-1}} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \quad (4.7.1.1)$$

$$\hat{x}_{k|k} \quad (4.7.1.2)$$

$$\begin{aligned}&= \hat{x}_{k|k-1} \\ &+ P_k (I - \theta S_k P_{k|k-1} \\ &+ H^T(\hat{x}_{k|k-1}) R_k^{-1} H(\hat{x}_{k|k-1}) P_{k|k-1})^{-1} H^T(\hat{x}_{k|k-1}) R^{-1} (y_k \\ &- h(\hat{x}_{k|k-1}))\end{aligned}$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} (I - \theta S P_{k|k-1} + H^T(\hat{x}_{k|k-1}) R^{-1} H(\hat{x}_{k|k-1}) P_{k|k-1})^{-1} \quad (4.7.1.3)$$

Prediktivní odhad je pak stejně jako v případě EKF, tedy vztahy (2.2.6), (2.2.7) a (2.2.8)

$$f(x_k) \cong f(\hat{x}_{k|k}) + \underbrace{\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k}}_{=F(\hat{x}_{k|k})} \Big|_{\hat{x}_{k|k}} (x_k - \hat{x}_{k|k})$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k})$$

$$P_{k+1|k} = F(\hat{x}_{k|k}) P_{k|k} F^T(\hat{x}_{k|k}) + Q$$

Poznamenejme, že takto navržený rozšířený robustní filtr má stejné vlastnosti jako rozšířený Kalmanův filtr. Je tedy opět třeba určit Jacobiány matic modelu systému. Dále není opět

zaručena dobrá kvalita odhadu pro některé typy nelinearit. Rozšířený robustní filtr vykazuje mírně vyšší výpočetní náročnost než EKF.

#### 4.7.2. UNSCENTOVANÝ ROBUSTNÍ FILTR

I druhý z představených robustních filtrů pro nelineární systémy vykazuje výraznou podobnost s lokálním filtrem představeným v kapitole 2.3. Uvedme si nyní vztahy potřebné pro určení odhadu stavu pomocí unscentovaného robustního filtru podle [19]. Prediktivní odhady dostaneme analogicky jako v 2.3.2 aplikací prvních dvou kroků unscentované transformace z kapitoly 2.3.1 pro známé filtrační odhady  $\hat{x}_{k|k}$  a  $P_{k|k}$ . Dostaneme tak vztahy totožné s (2.3.12) a (2.3.13)

$$\hat{x}_{k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} W_i \hat{x}_{i_{k+1|k}}$$

$$P_{k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} W_i (\hat{x}_{i_{k+1|k}} - \hat{x}_{k|k}) (\hat{x}_{i_{k+1|k}} - \hat{x}_{k|k})^T$$

Pro nalezení filtračních odhadů použijeme první tři kroky unscentované transformace pro známe  $\hat{x}_{k|k-1}$  a  $P_{k|k-1}$ . Vypočteme kovariance podle vztahů (2.3.8) a (2.3.9)

$$P_y = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} W_i (\hat{y}_{i_{k|k-1}} - \hat{y}_{k|k-1}) (\hat{y}_{i_{k|k-1}} - \hat{y}_{k|k-1})^T + R$$

$$P_{xy} = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} W_i (\hat{x}_{i_{k|k-1}} - \hat{x}_{k|k-1}) (\hat{y}_{i_{k|k-1}} - \hat{y}_{k|k-1})^T$$

Prediktivní odhad měření je

$$\hat{y}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n} W_i \hat{y}_{i_{k|k-1}}$$

Filtrační odhad je pak dán jako

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{xy} P_y^{-1} (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (4.7.2.1)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - [P_{xy} \quad P_{k|k-1}] \begin{bmatrix} P_y & P_{xy}^T \\ P_{xy} & -\frac{I}{\theta} + P_{k|k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_{xy}^T \\ P_{k|k-1}^T \end{bmatrix} \quad (4.7.2.2)$$

Unscenovaný robustní filtr má oproti rozšířenému robustnímu filtru stejné výhody, jako má UKF oproti EKF. Nemusíme tedy řešit derivace matic systému a je výpočetně méně náročný pro některé systémy.



## 5. ZÁVĚR

Tato práce se věnuje odhadu stavu stochastických systémů, neboli estimaci či filtraci. Jedná se o hojně rozvíjenou oblast kybernetiky, která je důležitá pro další možnost návrhu řízení systémů na základě odhadnutého stavu. Dalšími možnostmi využití estimace je monitorování systémů, odhadování neznámých parametrů modelů nebo řešení úloh rozhodování. Tato práce byla koncipována tak, aby poskytla čtenáři ucelený náhled do základních částí dané problematiky, a dále se zaměřuje na bližší seznámení s vybranými filtry. Začíná proto nejprve stručným úvodem seznamujícím čtenáře se základními pojmy, nutnými pro pochopení základů problematiky estimace a s jejím stručným historickým vývojem.

Druhá kapitola se zabývá nyní již standardně používanými lokálními filtry, tedy filtry poskytujícími optimální bodové odhady stavu nelineárního systému. Pro jejich lepší pochopení jsou na začátku kapitoly shrnuty rekurzivní vztahy Kalmanova filtru. Poté jsou již ve stručnosti představeny spolu vybrané lokální filtry, kterými jsou rozšířený Kalmanův filtr, unscenovaný Kalmanův filtr a diferenční filtr.

Následuje třetí kapitola nazvaná Polynomiální filtry. Jedná se o filtry, které na rozdíl od Kalmanova filtru neuvažují šumy systému popsané pouze prvními dvěma momenty. Místo toho využívají i znalosti vyšších momentů šumových náhodných veličin. Svůj název mají proto, že k zahrnutí těchto vyšších momentů do filtru využívají polynomiálního rozšíření vektoru stavu. My se v této práci zabýváme zejména kvadratickým filtrem [10], jakožto nejjednodušší variantou polynomiálního filtru. Kvadratický filtr rozšiřuje vektor stavu pouze o svůj kvadrát. V práci odvozený diskretní kvadratický filtr je následně použit k odhadu stavu několika různých systémů. Simulačně se nám tak potvrdil teoretický předpoklad, že díky lepšímu popisu šumů poskytuje kvadratický filtr lepší odhady stavu systému než kalmanův filtr při negaussovských šumech. V kapitole je dále diskutována možnost aplikace polynomiálních filtrů vyšších řádů. Závěrečná část kapitoly se pak zabývá analýzou výpočetní náročnosti kvadratického filtru. Zde je odhalen jeden ze základních problémů zabraňující hojnějšímu využití polynomiálních filtrů, a tím je výrazný nárůst času potřebného pro odhad stavu oproti Kalmanovu filtru, a to zejména pro systémy vyšších řádů.

S druhým z detailněji představených filtrů se čtenář seznámí ve čtvrté kapitole. Jedná se o robustní filtry. Ty na rozdíl od Kalmanova filtru neminimalizují střední kvadratickou chybu odhadu, ale minimalizují maximální chybu odhadu. Pro odvození algoritmu diskretního robustního filtru je řešena minimax úloha známá z teorie her podle [8]. Návrhář, který se

rozhodne aplikovat robustní filtr, musí zvolit hraniční hodnotu kritéria  $\theta$  a matici  $S$  ohodnocující míru důležitosti jednotlivých složek vektoru stavu. Dále ještě musí volit matice  $Q$  a  $R$ , které ohodnocující šumy. V případě, že mají šumy systému normální rozložení hustot pravděpodobnosti, jedná se o kovarianční matice šumů stejně jako u Kalmanova filtru. V práci jsou diskutovány i další podobnosti robustního a Kalmanova filtru. V kapitole jsou dále řešeny příklady prokazující výhodnost použití robustního filtru pro různé nepřesnosti v modelu systému, a to jak pro nepřesný popis šumů, tak pro nepřesnou matici dynamiky systému. V kapitole je opět diskutována výpočetní náročnost zkoumaného filtru, která je v tomto případě srovnatelná s Kalmanovým filtrem. V závěru práce je čtenář seznámen se základními robustními filtry pro nelineární systémy. Konkrétně se jedná o rozšířený robustní filtr a unscenovaný robustní filtr.

## CITOVANÁ LITERATURA

- [1]. **Šimandl, M.** Identifikace systémů a filtrace, skripta. Plzeň : KKY, ZČU v Plzni, 2011.
- [2]. **Havlena, V.- Štecha, J.** Moderní teorie řízení, skripta. Praha : ČVUT, 1999.
- [3]. **Mitter, S. K.** Filtering and Stochastic Control: A Historical perspective. 1996.
- [4]. **Welch, G.- Bishop, G.** An Introduction to the Kalman Filter. Chapel Hill : University of North Carolina, 2006.
- [5]. **Riberio, M. I.** Kalman and Extended Kalman filters: Concept, derivation and properties. Lisboa : Instituto Superior Técnico, 2004.
- [6]. **Simon, J. J. - Uhlmann J. K.** A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear systems. Oxford : The University of Oxford, 2003.
- [7]. **Straka, O. a al., et.** Truncation nonlinear filters for state estimation with nonlinear inequality constraints. Automatica. 2011.
- [8]. **Simon, D.** Optimal state estimation: Kalman, H infinity and Nonlinear Approaches. Hoboken, New Jersey : John Wiley and Sons, 2006. ISBN 13 978-0-471-70858-2.
- [9]. **Shi, Y.-Chongzhao, H.** The Divided Difference Particle Filter. Xi'an : Engr Xi'an Jiaotong, China, 2007.
- [10]. **Santis, A.- Germani, A.- Raimondi, M.** Optimal quadratic filtering of linear discrete-time non-gaussian systems. IEEE. 1995.
- [11]. **Nakamori, S.- Caballero-Áquila, R.- Hermoso-Carazo, A.- Linares-Pérez, J.** Second-order polynomial estimators from uncertain observations using covariance information. Applied Mathematics and Computation 143. (642-653) : Elsevier, 2003.
- [12]. **Carravetta, F.- Germani, A.- Raimondi, M.** Polynomial filtering of discrete-time stochastic linear systems with multiplicative state noise. transactions on automatic control. (1106-1127) : IEEE, 1997.
- [13]. **Grimble, M. J.** Robust industrial control systems: Optimal design approach for polynomial systems. Chichester : IEEE , 2006.

- [14]. **Huaizhong, L.- Minyue, F.** A linear matrix inequality approach to robust H-infinity filtering. transactions on signal processing, VOL. 45, NO. 9., (2338-2351) : IEEE, 1997.
- [15]. **Nakamori, S.- Caballero-Áquila, R.- Hermoso-Carazo, A.-Jiménez-López, J.- Linares-Pérez- J.** Least-squares mth-order polynomial estimation of signals from observations affected by non-independent uncertainty. Applied Mathematics and Computation 176. (319-338) : Elsevier, 2006.
- [16]. **Poulsen, N.K.** Dynamic Optimization. København : The Technical University of Denmark, 2007.
- [17]. **Souto, R. F.- Ishihara, J. Y.- Borges, G. A.** A Robust Extended Kalman Filter for Discrete-time Systems with Uncertain Dynamics, Measurements and Correlated Noise. St. Louis, MO, : American Control Conference, 2009.
- [18]. **Shaked, U.- Berman, N.** H-infinity nonlinear filtering of discrete-time process. Transaction on signal processing, vol. 43. Tel Aviv : IEEE, 1995.
- [19]. **Wenling, L.- Yingmin, J.** H-infinity filtering for a class of nonlinear discrete-time systems based on unscented transform. Signal Processing. Beijing : Elsevier, 2010.
- [20]. **Xiong, J.** An introduction to stochastic filtering theory. New York : Oxford university press, 2008. ISBN 978-0-19-921970-4.

## PŘÍLOHA I. (ÚPRAVA KRITÉRIA ROBUSTNÍHO FILTRU)

V této příloze se budeme zabývat úpravou kritéria optimality, tak aby bylo závislé pouze na proměnných  $\hat{x}_k$  a  $y_k$ . Ze vztahu (4.3.15) si vyjádříme hodnotu multiplikátoru

$$\lambda_0^T = P_0^{-1}(x_0 - \hat{x}_0) \quad (\text{I. 1})$$

Určíme-li kvadratickou normu  $\lambda_0^T$  pro počáteční kovarianci  $P_0$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \|\lambda_0^T\|_{P_0}^2 &= \lambda_0^T P_0 \lambda_0 = (x_0 - \hat{x}_0)^T (P_0^{-1})^T P_0 P_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) \\ &= (x_0 - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) = \|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 \end{aligned} \quad (\text{I. 2})$$

přičemž jsme využili předpokladu symetričnosti matice  $P_0$ . Můžeme tak upravit kritérium (4.1.8) tak, že

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{\theta} \|\lambda_0^T\|_{P_0}^2 \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \left( \|x_k - \hat{x}_k\|_{S_k}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\theta} \left( \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|y_k - Hx_k\|_{R_k^{-1}}^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{I. 3})$$

Nahradíme-li ještě  $x_k$  podle vztahu (4.3.23) a  $w_k$  podle (4.3.18), získáme

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{\theta} \|\lambda_0^T\|_{P_0}^2 \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \left( \|\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T - \hat{x}_k\|_{S_k}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\theta} \left( \|Q_k \lambda_{k+1}^T\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|y_k - H(\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T)\|_{R_k^{-1}}^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{I. 4})$$

Z rovnice (4.3.16) víme, že  $\lambda_N^T = 0$ , a tedy musí platit

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^N \lambda_k^T P_k \lambda_k - \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k^T P_k \lambda_k = \lambda_0^T P_0 \lambda_0 + \sum_{k=1}^N \lambda_k^T P_k \lambda_k - \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k^T P_k \lambda_k \\ &= \lambda_0^T P_0 \lambda_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{k+1}^T P_{k+1} \lambda_{k+1} - \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k^T P_k \lambda_k \\ &= -\frac{1}{\theta} \|\lambda_0^T\|_{P_0}^2 - \frac{1}{\theta} \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda_{k+1}^T P_{k+1} \lambda_{k+1} - \lambda_k^T P_k \lambda_k) \end{aligned} \quad (\text{I. 5})$$

Čímž dostaneme rovnost

$$\|\lambda_0^T\|_{P_0}^2 = - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda_{k+1}^T P_{k+1} \lambda_{k+1} - \lambda_k^T P_k \lambda_k) \quad (\text{I. 6})$$

kteřou můžeme využít k dosažení do vztahu.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\theta} \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda_{k+1}^T P_{k+1} \lambda_{k+1} \\ &\quad - \lambda_k^T P_k \lambda_k) \sum_{k=0}^{N-1} \left( \|\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T - \hat{x}_k\|_{S_k}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\theta} \left( \|Q_k \lambda_{k+1}^T\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|y_k - H(\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T)\|_{R_k^{-1}}^2 \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left( \|\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T - \hat{x}_k\|_{S_k}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\theta} \left( \|\lambda_{k+1}^T\|_{Q_k}^2 + \|y_k - H(\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T)\|_{R_k^{-1}}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\theta} (\lambda_{k+1}^T P_{k+1} \lambda_{k+1} - \lambda_k^T P_k \lambda_k) \right) \end{aligned} \quad (\text{I. 7})$$

Tuto rovnici můžeme dále upravit, protože platí

$$w_k^T Q_k^{-1} w_k = \lambda_{k+1}^T Q_k^T Q_k^{-1} Q_k \lambda_{k+1}^T = \lambda_{k+1}^T Q_k \lambda_{k+1}^T = \|\lambda_{k+1}^T\|_{Q_k}^2 \quad (\text{I. 8})$$

přičemž jsme využili předpokládané symetričnosti  $Q_k$ . Nyní můžeme dosadit do kritéria a to dále upravit

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{k=0}^{N-1} \left( \|\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T - \hat{x}_k\|_{S_k}^2 \right. & (I. 9) \\
&\quad - \frac{1}{\theta} \left( \|\lambda_{k+1}^T\|_{Q_k}^2 + \|y_k - H(\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T)\|_{R_k^{-1}}^2 \right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{\theta} (\lambda_{k+1}^T P_{k+1} \lambda_{k+1} - \lambda_k^T P_k \lambda_k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left( (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k) + 2(\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k P_k \lambda_k^T \right. \\
&\quad + \lambda_k P_k^T S_k P_k \lambda_k^T - \frac{1}{\theta} \lambda_{k+1} Q_k \lambda_{k+1}^T + \frac{1}{\theta} \lambda_{k+1} P_{k+1} \lambda_{k+1}^T \\
&\quad - \frac{1}{\theta} \lambda_k P_k \lambda_k^T - (y_k - H\bar{x}_k)^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) \\
&\quad \left. + \frac{2}{\theta} (y_k - H\bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k^T - \frac{1}{\theta} \lambda_k P_k^T H^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k^T \right)
\end{aligned}$$

Zabývejme se nyní úpravou části této rovnice

$$-\frac{1}{\theta} \lambda_{k+1} Q_k \lambda_{k+1}^T + \frac{1}{\theta} \lambda_{k+1} P_{k+1} \lambda_{k+1}^T = \frac{1}{\theta} \lambda_{k+1} (P_{k+1} - Q_k) \lambda_{k+1}^T \quad (I. 10)$$

Za člen  $P_{k+1}$  můžeme dosadit z rovnice (4.3.34). Zanedbejme přitom člen  $\frac{1}{\theta}$

$$\begin{aligned}
&\lambda_{k+1} (P_{k+1} - Q_k) \lambda_{k+1}^T & (I. 11) \\
&= \lambda_{k+1} ((F P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} F^T + Q_k) \\
&\quad - Q_k) \lambda_{k+1}^T \\
&= \lambda_{k+1} (F P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} F^T) \lambda_{k+1}^T
\end{aligned}$$

Upravme si rovnici (4.3.24)

$$\begin{aligned}
F^T \lambda_{k+1}^T &= \lambda_k^T - H^T R_k^{-1} (y_k - H(\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T)) & (I. 12) \\
&\quad - \theta S_k (\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T - \hat{x}_k)
\end{aligned}$$

a dosadme do vztahu (I. 11)

$$\begin{aligned}
& \lambda_{k+1}(P_{k+1} - Q_k)\lambda_{k+1}^T \\
&= \left( \lambda_k^T - H^T R_k^{-1} (y_k - H(\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T)) \right. \\
&\quad \left. - \theta S_k (\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T - \hat{x}_k) \right)^T (P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1}) \left( \lambda_k^T \right. \\
&\quad \left. - H^T R_k^{-1} (y_k - H(\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T)) - \theta S_k (\bar{x}_k + P_k \lambda_k^T - \hat{x}_k) \right) \\
&= \left( \lambda_k^T (I - H^T R_k^{-1} P_k H - \theta S_k P_k) - H^T R_k^{-1} (y_k - H \bar{x}_k) \right. \\
&\quad \left. - \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k) \right)^T (P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1}) \left( \lambda_k^T (I - H^T R_k^{-1} P_k H \right. \\
&\quad \left. - \theta S_k P_k) - H^T R_k^{-1} (y_k - H \bar{x}_k) - \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k) \right) \\
&= \lambda_k^T P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} P_k \lambda_k - \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T P_k \lambda_k \\
&\quad - (y_k - H \bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k^T - \theta \lambda_k^T P_k S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k) \\
&\quad + \theta^2 S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k) \\
&\quad + \theta (y_k - H \bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k) \\
&\quad - \lambda_k^T P_k H^T R_k^{-1} (y_k - H \bar{x}_k) \\
&\quad + \theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H \bar{x}_k) \\
&\quad + (y_k - H \bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H \bar{x}_k)
\end{aligned}$$

Při splnění předpokladu, že matice  $P_k$  a  $S_k$  jsou symetrické a  $\theta$  je skalární, budou všechny členy v poslední části výrazu skalární. Díky tomu můžeme výraz přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}
& \lambda_{k+1}^T (P_{k+1} - Q_k) \lambda_{k+1} \tag{I. 13} \\
&= \lambda_k^T (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k) P_k \lambda_{k+1} \\
&\quad - 2\theta (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k P_k \lambda_k - 2(y_k - H \bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k \\
&\quad + \theta^2 S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T P_k (I - \theta S_k P_k \\
&\quad + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k) \\
&\quad + 2\theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T P_k (I - \theta S_k P_k \\
&\quad + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H \bar{x}_k) \\
&\quad + (y_k - H \bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k (I - \theta S_k P_k \\
&\quad + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H \bar{x}_k)
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že

$$P_k^{-1} (I - P_k \theta S_k + P_k H^T R_k^{-1} H) = (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k) P_k^{-1} \tag{I. 14}$$

První člen na pravé strany rovnice (I. 13) lze upravit do tvaru

$$\begin{aligned}
& \lambda_k^T (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k) P_k \lambda_{k+1} \tag{I. 15} \\
&= \lambda_k^T P_k \lambda_{k+1} - \theta \lambda_k^T P_k S_k P_k \lambda_k + \lambda_k^T P_k H^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k
\end{aligned}$$

Dosaďme zpět do (I. 13) a dostaneme



$$\begin{aligned}
& \lambda_{k+1}^T (P_{k+1} - Q_k) \lambda_{k+1} \\
&= \lambda_k^T P_k \lambda_{k+1} - \theta \lambda_k^T P_k S_k P_k \lambda_k + \lambda_k^T P_k H^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k - 2\theta (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k P_k \lambda_k \\
&\quad - 2(y_k - H\bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k \\
&\quad + \theta^2 S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k) \\
&\quad + 2\theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) \\
&\quad + (y_k - H\bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k)
\end{aligned}$$

Takto získanou rovnicí využijeme k úpravě kritéria podle (I. 9)

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{k=0}^{N-1} \left( (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k) + 2(\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k P_k \lambda_k^T + \lambda_k P_k^T S_k P_k \lambda_k^T - \frac{1}{\theta} \lambda_{k+1} Q_k \lambda_{k+1}^T \right. \\
&\quad + \frac{1}{\theta} \lambda_{k+1} P_{k+1} \lambda_{k+1}^T - \frac{1}{\theta} \lambda_k P_k \lambda_k^T - (y_k - H\bar{x}_k)^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) \\
&\quad \left. + \frac{2}{\theta} (y_k - H\bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k^T - \frac{1}{\theta} \lambda_k P_k^T H^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k^T \right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left( (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k) + 2(\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k P_k \lambda_k^T + \lambda_k P_k^T S_k P_k \lambda_k^T \right. \\
&\quad + \lambda_k^T P_k \lambda_{k+1} - \theta \lambda_k^T P_k S_k P_k \lambda_k + \lambda_k^T P_k H^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k - 2\theta (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k P_k \lambda_k \\
&\quad - 2(y_k - H\bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k \\
&\quad + \theta^2 S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k) \\
&\quad + 2\theta S_k (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) \\
&\quad + (y_k - H\bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) \\
&\quad - \frac{1}{\theta} \lambda_k P_k \lambda_k^T - (y_k - H\bar{x}_k)^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) + \frac{2}{\theta} (y_k - H\bar{x}_k)^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k^T \\
&\quad \left. - \frac{1}{\theta} \lambda_k P_k^T H^T R_k^{-1} H P_k \lambda_k^T \right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left( (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T (S_k + \theta P_k S_k P_k) (\bar{x}_k - \hat{x}_k) \right. \\
&\quad + 2(\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H\bar{x}_k) \\
&\quad + \frac{1}{\theta} (y_k - H\bar{x}_k)^T (R_k^{-1} H P_k (I - \theta S_k P_k + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} \\
&\quad \left. - R_k^{-1}) (y_k - H\bar{x}_k) \right)
\end{aligned}$$

Dostali jsme tak kritérium ve tvaru závislém pouze na proměnných  $\hat{x}_k$  a  $y_k$ .

$$\begin{aligned}
J = \sum_{k=0}^{N-1} & \left( (\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T (S_k + \theta P_k S_k P_k) (\bar{x}_k - \hat{x}_k) \right. \\
& + 2(\bar{x}_k - \hat{x}_k)^T S_k P_k (I - \theta S_k P_k \\
& + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} (y_k - H \bar{x}_k) \\
& + \frac{1}{\theta} (y_k - H \bar{x}_k)^T (R_k^{-1} H P_k (I - \theta S_k P_k \\
& \left. + H^T R_k^{-1} H P_k)^{-1} H^T R_k^{-1} - R_k^{-1}) (y_k - H \bar{x}_k) \right)
\end{aligned} \tag{I. 16}$$

## PŘÍLOHA II. (ÚPRAVA KOVARIANCE CHYBY ODHADU KF)

V této příloze se budeme zabývat úpravou vztahu pro výpočet filtrační kovariance chyby odhadu Kalmanova filtru dané vztahem

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k H P_{k|k-1} \quad (\text{II. 1})$$

Dosadíme-li Kalmanův zisk získaný v (4.5.4)

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= P_{k|k-1} - (I + P_{k|k-1} H^T R^{-1} H)^{-1} P_{k|k-1} H^T R^{-1} H P_{k|k-1} \\ &= P_{k|k-1} - (P_{k|k-1}^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} H P_{k|k-1} \end{aligned} \quad (\text{II. 2})$$

Aplikujeme na výraz v závorce inverzní maticové lemma

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= P_{k|k-1} - \left( P_{k|k-1} \right. \\ &\quad - P_{k|k-1} H^T (R \\ &\quad + H P_{k|k-1} H^T)^{-1} H P_{k|k-1} \left. \right) H^T R^{-1} H P_{k|k-1} \\ &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H^T R^{-1} H P_{k|k-1} \\ &\quad + P_{k|k-1} H^T (R \\ &\quad + H P_{k|k-1} H^T)^{-1} H P_{k|k-1} H^T R^{-1} H P_{k|k-1} \\ &= P_{k|k-1} \left( I - H^T R^{-1} H P_{k|k-1} \right. \\ &\quad \left. + H^T (R + H P_{k|k-1} H^T)^{-1} H P_{k|k-1} H^T R^{-1} H P_{k|k-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{II. 3})$$

Opětovnou aplikací inverzního maticového lemma na výraz  $(R + H P_{k|k-1} H^T)^{-1}$  dostaneme

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= P_{k|k-1} \left( I - H^T R^{-1} H P_{k|k-1} \right. \\ &\quad \left. + H^T (R^{-1} - R^{-1} H (P_{k|k-1}^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1}) H P_{k|k-1} H^T R^{-1} H P_{k|k-1} \right) \\ &= P_{k|k-1} \left( I - H^T R^{-1} H P_{k|k-1} + H^T R^{-1} H P_{k|k-1} H^T R^{-1} H P_{k|k-1} \right. \\ &\quad \left. - H^T R^{-1} H (P_{k|k-1}^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} H P_{k|k-1} H^T R^{-1} H P_{k|k-1} \right) \\ &= P_{k|k-1} \left( I - H^T R^{-1} H P_{k|k-1} + (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^2 \right. \\ &\quad \left. - H^T R^{-1} H (P_{k|k-1}^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^2 \right) \\ &= P_{k|k-1} \left( I - H^T R^{-1} H P_{k|k-1} + (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^2 \right. \\ &\quad \left. - H^T R^{-1} H P_{k|k-1} (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^{-1} (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^2 \right) \end{aligned}$$

což lze upravit do tvaru

$$\begin{aligned}
P_{k|k} &= P_{k|k-1} \left( I - H^T R^{-1} H P_{k|k-1} + (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^2 \right. \\
&\quad \left. - (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^3 (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^{-1} \right) \\
&= P_{k|k-1} \left( (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1}) - H^T R^{-1} H P_{k|k-1} (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1}) \right. \\
&\quad \left. + (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^2 (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1}) \right. \\
&\quad \left. - (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^3 (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^{-1} \right)
\end{aligned}$$

Po roznásobení dostaneme

$$\begin{aligned}
P_{k|k} &= P_{k|k-1} \left( (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1}) - H^T R^{-1} H P_{k|k-1} (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1}) \right. \\
&\quad \left. + (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^2 (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1}) \right. \\
&\quad \left. - (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^3 (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^{-1} \right) \\
&= P_{k|k-1} \left( I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1} - H^T R^{-1} H P_{k|k-1} - (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^2 \right. \\
&\quad \left. + (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^2 + (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^3 \right. \\
&\quad \left. - (H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^3 (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^{-1} \right) \\
&= P_{k|k-1} (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^{-1}
\end{aligned}$$

Kovariance chyby pro filtrační odhad je tedy dána vztahem

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} (I + H^T R^{-1} H P_{k|k-1})^{-1} \quad (\text{II. 4})$$