

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta elektrotechnická  
Katedra technologií a měření

# **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**Elektrická analogie sdílení tepla vedením**

Plzeň 2012

Bc. Petr Císler



ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta elektrotechnická

Akademický rok: 2011/2012

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Petr CÍSLER**  
Osobní číslo: **E09N0008P**  
Studijní program: **N2612 Elektrotechnika a informatika**  
Studijní obor: **Komerční elektrotechnika**  
Název tématu: **Elektrická analogie sdílení tepla vedením**  
Zadávací katedra: **Katedra technologií a měření**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Uveďte základní vztahy pro elektrický model vedení tepla mezi tepelnými a elektrickými veličinami.
  2. Vytvořte analogii mezi rovnicí Fourier-Kirchhoffovou a rovnicí t.zv. telegrafní.
  3. Navrhňte reálný model s proměnnými elektrickými parametry (R, C).
  4. Uveďte možnosti využití software "TINA".
  5. Proveďte hodnocení se závěrem pro praktická využití elektrického modelu v kombinaci s TINOU.
-

Rozsah grafických prací: podle doporučení vedoucího  
Rozsah pracovní zprávy: 30 - 40 stran  
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická  
Seznam odborné literatury:


Student si vhodnou literaturu vyhledá v dostupných pramenech podle doporučení vedoucího práce.

Vedoucí diplomové práce: **Prof. Ing. Jiří Kožený, CSc.**  
Katedra elektroenergetiky a ekologie

Datum zadání diplomové práce: **18. října 2010**  
Termín odevzdání diplomové práce: **11. května 2012**

  
Doc. Ing. Jiří Hammerbauer, Ph.D.  
děkan



  
Doc. Ing. Vlastimil Skočil, CSc.  
vedoucí katedry

V Plzni dne 17. října 2011

## **Anotace**

Práce je zaměřena na vedení tepla a jeho analogické elektrické řešení. Popisuje vztahy mezi tepelnými a elektrickými veličinami. Dále je zkonstruován a analyzován elektrotepelný model stěny žíhací pece. Na závěr je srovnání typů řešení modelu pomocí PC programu Tina.

## **Klíčová slova**

Elektrická analogie, vedení tepla, elektrotepelný model, elektrický model, pec

**Annotation**

This work is focused on a heat conduction and analogical electric solution. It describes relations between heat quantities and electric quantities. Next is projected and analysed electric-heat model of a side of an annealing furnace. Finally are compared the types of a model constructions by using PC program Tina.

**Key words**

Electric analogy, heat conduction, electric-heat model, electric model, furnace

## **Prohlášení**

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této diplomové práce, je legální.

V Plzni dne 20.3.2012

.....

## **Poděkování**

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce Prof. Ing. Jiřímu Koženému, CSc. za cenné profesionální rady, připomínky a metodické vedení práce.



# Obsah

SEZNAM SYMBOLŮ .....	10
ÚVOD .....	12
<b>1 TEPLO A ŠÍŘENÍ TEPLA .....</b>	<b>13</b>
1.1 VEDENÍ .....	13
1.1.1 Stacionární pole .....	13
1.1.2 Teplotní gradient .....	14
1.1.3 Furierův zákon .....	15
1.1.4 Tepelná vodivost .....	15
1.1.5 Stejnorodá stěna .....	15
1.1.6 Složená stěna .....	19
1.2 SÁLÁNÍ .....	22
1.3 PROUDĚNÍ .....	23
<b>2 ANALOGIE MEZI TEPLOTNÍM A ELEKTRICKÝM POLEM .....</b>	<b>24</b>
2.1 ANALOGIE JEDNOROZMĚRNÉHO ŠÍŘENÍ ELEKTRICKÉHO PROUDU A TEPLA .....	29
2.1.1 Rezistory v sérii a rovinná stěna .....	29
2.1.2 Paralelní zapojení rezistorů a paralelní rovinná stěna .....	33
2.1.3 Přestup tepla na povrchu těles .....	36
2.1.4 Rezistory v sérii a rovinná stěna s blízkým okolím .....	38
<b>3 ANAOGIE MEZI FURIER-KIRCHHOFFOVOU A TELEGRAFNÍ ROVNICÍ .....</b>	<b>39</b>
3.1 NESTACIONÁRNÍ ŠÍŘENÍ TEPLA .....	39
3.1.1 Měrná tepelná kapacita $c$ .....	40
3.1.2 Teplotní vodivost $a$ .....	40
3.2 FURIER–KIRCHHOFFOVA ROVNICE .....	40
3.3 TELEGRAFNÍ ROVNICE .....	41
3.4 PODOBNOST FURIER–KIRCHHOFFOVY A TELEGRAFNÍ ROVNICE .....	41
3.5 APLIKACE ANALOGIE MEZI FURIER–KIRCHHOFFOVOU ROVNICÍ A TELEGRAFNÍ ROVNICÍ .....	44
3.6 ZPŮSOBY PROVEDENÍ MODELU .....	47
<b>4 NÁVRH ELEKTROTEPELNÉHO MODELU .....</b>	<b>49</b>
4.1 VÝPOČET PARAMETRŮ ELEKTROTEPELNÉHO MODELU .....	49
4.2 REALIZACE MODELU .....	54
4.3 ANALÝZA MODELU .....	56
<b>5 POUŽITÍ PROGRAMU TINA .....</b>	<b>59</b>
5.1 TESTOVÁNÍ ZAPOJENÍ $\Gamma$ , $\mathbf{T}$ .....	59
5.1.1 Zapojení $\mathbf{T}$ .....	59
5.1.2 Zapojení $\Gamma$ .....	65
5.1.3 Srovnání .....	70
<b>ZÁVĚR .....</b>	<b>72</b>
<b>POUŽITÁ LITERATURA .....</b>	<b>73</b>
<b>SEZNAM PŘÍLOH .....</b>	<b>I</b>

## Seznam symbolů

$a \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$	teplotní vodivost
$C[\text{F}]$	elektrická kapacita
$c \left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg}\cdot\text{K}} \right]$	měrná tepelná kapacita
$d[\text{m}]$	vzdálenost
$\mathbf{E}_e \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$	intenzita elektrického pole
$\mathbf{E}_t \left[ \frac{\text{K}}{\text{m}} \right]$	intenzita teplotního pole
grad, $\nabla$	operátor gradientu skalární funkce
$I[\text{A}]$	elektrický proud
$\mathbf{J} \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$	hustota elektrického proudu
$l[\text{m}]$	délka, tloušťka
$m[\text{kg}]$	hmotnost
$G[\text{S}]$	svod
$G_e[\text{S}]$	elektrická vodivost
$G_t \left[ \frac{\text{W}}{\text{K}} \right]$	tepelná vodivost
$P[\text{W}]$	tepelný tok
$Q[\text{Wh}];[\text{Ws}]$	množství tepla
$q \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$	hustota tepelného toku
$R_e[\Omega]$	elektrický odpor
$R_t \left[ \frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$	tepelný odpor
$S[\text{m}^2]$	průřez, plocha

$U_{\sim}$ [V]	střídavé elektrické napětí
$U$ [V]	stejnoseměrné elektrické napětí
$V$	elektrický potenciál
$V$ [m <sup>3</sup> ]	je objem
$x$ [m]	vzdálenost ve směru $x$
$\alpha$ $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$	součinitel přestupu tepla
$\gamma$ $\left[ \frac{\text{S}}{\text{m}} \right]$	konduktivita
$\lambda$ $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$	součinitel tepelné vodivosti
$\mu_p, \mu_l, \mu_\vartheta$	přepočítávací měřítka
$\vartheta$ [°C]; [K]	teplota
$\rho$ $\left[ \frac{\Omega}{\text{m}} \right]$	měrný elektrický odpor
$\rho$ $\left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	měrná hmota
$\tau$ [h]	čas
$\Theta$ [K]	termodynamická teplota
$\Gamma, \mathbf{T}, \mathbf{\Pi}$	značení tvaru RC článku

## Úvod

První část práce se zabývá teplem a jeho šířením. Problematika je zde rozebrána v souladu s hlavním cílem práce a to s důkladným zaměřením na vedení tepla. Stručněji jsou zde popsány způsoby šíření tepla sáláním a prouděním. Tyto dva případy, zejména sálání, je třeba uvažovat pro řešení přestupu tepla mezi povrchem tělesa a okolím.

Další část je věnována odvození analogie mezi teplotním a elektrickým polem. V kapitole se vychází z elementárních skutečností obou polí. Analogie se postupně rozvíjí až k případu náhrady jednorozměrné stěny elektrickým obvodem ve stacionárním poli. Obvod je složený z vhodně zapojených odporů a napájený stejnosměrným napětím.

Postupně se dostáváme do problematiky nestacionárního pole. Porovnáním telegrafní rovnice, jež popisuje poměry na elektrickém vedení a Fourier-kirchhoffovy rovnice, dojdeme k analogii mezi oběma rovnicemi. Získáme tak aparát pro převod mezi tepelnými a elektrickými veličinami.

V další části je řešen návrh elektrotepelného modelu stěny šachtové žhací pece. Jsou zde využity poznatky, teoretické předpoklady a výpočty z předchozích kapitol. Pec je složena ze tří vrstev vyzdívek z různých materiálů. V průběhu výpočtu jsou zjištěny hodnoty tepelných veličin a na závěr přepočteny na elektrické veličiny.

Získáním vypočtených hodnot se dostáváme ke stavbě elektrotepelného modelu. Tento model je složen z T-článků obsahující kapacitory a rezistory. Měření na tomto modelu jsou získány průběhy napětí, které jsou dále analyzovány a převedeny na průběhy teplot na rozhraní vyzdívek. Model bude dále sloužit jako učební pomůcka v laboratořích FEL.

Stejný případ žhací pece je řešen pomocí programu Tina. V tomto počítačovém prostředí je sestaven stejný obvod. Změření jsou získány průběhy napětí a jsou porovnány s průběhy změřenými na fyzickém modelu. Je zde hodnocen přínos počítačových programů umožňujících simulaci vedení tepla s porovnáním s elektrotepelným modelem.

Na závěr jsou testovány dva druhy zapojení RC – členů, jenž mohou vrstvy stěny nasimulovat. Jsou to již zmíněné T – články a dále  $\Gamma$  - články, které jsou jednodušší možností výroby modelu. Test je prováděn pro různý počet článků na jednu vrstvu. Tímto se mimo jiné ověří tvrzení, že s rostoucím počtem článků na jednu vrstvu roste přesnost a věrnost výsledné křivky napětí, respektive teplot.

# 1 Teplo a šíření tepla

Teplo popisuje množství mikroprocesů jako například srážky atomů a pohyby molekul, které v látce probíhají. Je to část vnitřní energie, kterou látka předává okolním látkám, a energie, kterou přijímá. Tepelnými ději se zabývá termodynamika [12].

Sdílením tepla se zabývá termokinetika. Popisuje šíření v prostoru a čase. Teplo, které protéká látkou, je vždy charakterizováno změnou teploty (kromě tzv. latentního tepla [12]). Při teplotě 0 kelvinů pohyb částic ustává a k žádnému šíření tepla nedochází. Podle druhého zákona termodynamiky je teplo nevratný proces. Zákon říká, že se teplo samovolně nepřenese z tělesa o nižší teplotě na těleso o vyšší teplotě, ale samovolně přechází z tělesa s vyšší teplotou na těleso s nižší teplotou. Samovolně proto, že při procesu není konána práce [2] [5] [7] [9].

Známe tři základní druhy šíření tepla: sáláním (radiace), prouděním (konvekce) a vedením (kondukce). Každý z případů je založen na jiných fyzikálních základech a závisí na prostředí. Nejčastěji se však setkáváme s jejich kombinací. V těchto případech nejsou všechny druhy šíření tepla zastoupeny rovnoměrně, ale jejich poměry se liší. Jestliže jeden typ šíření tepla výrazně převládá nad zbývajícími dvěma typy, usnadňuje se významně popis děje [1] [2] [5].

V této části bude nejvíce rozebrána část šíření tepla vedením. Protože cílem práce je sestavení modelu stěny žíhací pece, je tento způsob šíření tepla nejdůležitější. Neopomeneme se pozastavit nad sáláním a prouděním, které charakterizuje přechod tepla mezi vsázkou a stěnou pece a okolního prostředí a povrchu pece.

## 1.1 Vedení

Jediný způsob šíření tepla v tuhém tělese se nazývá vedení tepla neboli kondukce. Vyskytuje se také v kapalinách, které jsou v klidu, a v klidové plynné fázi hmoty. Vedení tepla je důsledkem kmitání částic hmoty a předávání energie pohybu na okolní částice [2] [5] [7].

### 1.1.1 Stacionární pole

V této kapitole bude vedení tepla řešeno ve stacionárním poli, kde se teplota s časem nemění. Je to časově stálé vedení tepla. Jedná se o jednorozměrné stacionární pole, protože

teplota je funkcí jen vzdálenosti ve směru  $x$ , rovnice (1). Pokud by teplota byla funkcí času, jednalo by se o nestacionární pole. [2] [5].

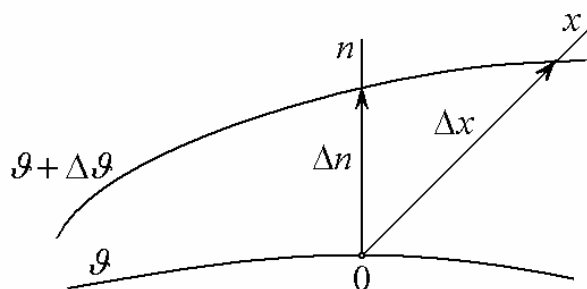
$$\vartheta = f(x) \quad (1)$$

Kde  $\vartheta$  je teplota,  $x$  je vzdálenost.

### 1.1.2 Teplotní gradient

Existují izotermické plochy, které v každém svém bodě mají stejnou teplotu. Tyto plochy se nemohou protínat, protože pro každý bod prostoru existuje jediná teplota. Ke změnám teploty nedochází ve směrech se stejnou teplotou, tedy ve směru izotermických ploch. Dochází k nim ve směrech protínajících jiné plochy. Plochy jsou uzavřené nebo mají své hranice omezeny povrchem těles [2].

Teplotní gradient je maximální vzrůst teploty k izotermické ploše ve směru normály  $n$  obr. 1.1. Směr vektoru se volí dle směru vzrůstající teploty [2] [5].



Obr. 1.1 teplotní gradient

Matematické vyjádření teplotního gradientu:

$$\text{grad } \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \quad (2)$$

Kde  $\vartheta$  je teplota,  $n$  je normála.

Teplotní spád je maximální pokles teploty k izotermické ploše ve směru normály  $n$ :

$$-\text{grad } \vartheta = -\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \quad (3)$$

Kde  $\vartheta$  je teplota,  $n$  je normála.

### 1.1.3 Furierův zákon

Je to základní zákon vedení tepla a je znázorněn níže (4). Hustota tepelného toku  $q$  je přímo úměrná času, teplotnímu spádu a průtokové ploše, která je kolmá na směr proudění tepla [1] [2].

$$q = -\lambda \cdot \text{grad} \vartheta \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (4)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\vartheta$  je teplota. Jednotky jsou W - watt na  $\text{m}^2$  – metr čtvereční.

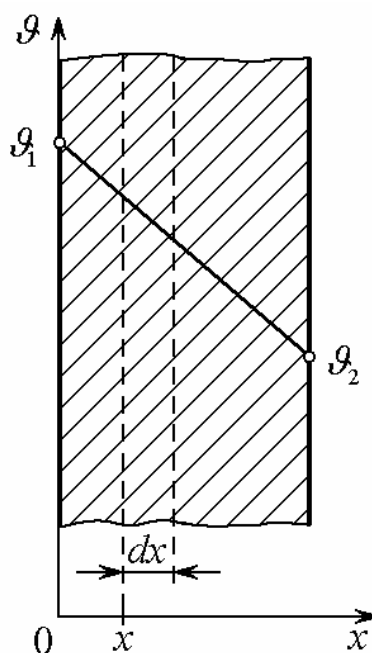
Hustota tepelného toku je vektor, který má směr stejný jako proudění tepla, ale opačný než teplotní gradient. Proto je ve vztahu (4) záporné znaménko [2].

### 1.1.4 Tepelná vodivost

Veličina součinitel tepelné vodivosti udává schopnost látky propustit teplo. Je značena  $\lambda$  o jednotkách W/m.K. V oblasti vedení tepla je jedním ze zásadních parametrů, který ovlivňuje chování tepla v látce. Jestliže má látka nízkou hodnotu součinitele tepelné vodivosti, jde o tepelný izolant. Naopak dobré tepelné vodiče, zejména kovy, charakterizuje vysoká hodnota součinitele [1] [2] [3]. Například azbest při 20°C má součinitel  $\lambda_{20}$  roven 0,12 W/m.K. Naproti tomu elektrolytická měď má hodnotu 395 W/m.K [8]. Určení tepelné vodivosti není snadné, protože je nestálá. Mění se s měrnou hmotností, strukturou, vlhkostí, teplotou a tlakem. Poměry těchto činitelů záleží na skupenství látky. Například tlak daleko více ovlivňuje tepelnou vodivost plynů než pevných látek. Hodnoty součinitele jsou často značeny například  $\lambda_{20}$  nebo  $\lambda_0$  dle teploty, při které byla změřena. Hodnota součinitele tepelné vodivosti látky se určí buď z tabulek nebo měřením [2].

### 1.1.5 Stejnorodá stěna

Nyní se budeme zabývat průchodem tepla rovinnou stěnou o tloušťce  $l$ , která má ve všech místech stejnou tepelnou vodivost  $\lambda$ . Na obrázku *obr. 1.2* jsou znázorněny povrchové teploty  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$ . Tyto teploty jsou udržovány na konstantní hodnotě, protože se pohybujeme ve stacionárním poli [2].



Obr. 1.2 průběh teplot jednovrstvé stěny

Pro výpočet hustoty tepelného toku  $q$  využijeme vzorce (5) vycházejícího z Furierova zákona (4).

$$q = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} \quad (5)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\vartheta$  je teplota,  $x$  je vzdálenost.

Rovnici upravíme:

$$d\vartheta = -\frac{q}{\lambda} dx \quad (6)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\vartheta$  je teplota,  $x$  je vzdálenost.

$$\vartheta = -\frac{q}{\lambda} x + C \quad (7)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\vartheta$  je teplota,  $x$  je vzdálenost,  $C$  je konstanta.

Z mezních podmínek víme, že  $x = 0$  a  $\vartheta = \vartheta_1$ . Dosadíme do rovnice (7)

$$\vartheta_1 = -\frac{q}{\lambda} \cdot 0 + C \quad (8)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\vartheta_1$  je teplota,  $C$  je konstanta.



a získáme integrační konstantu C

$$\vartheta_1 = C \quad (9)$$

Kde  $\vartheta_1$  je teplota, C je konstanta.

Když po ose x dojdeme k povrchu s teplotou  $\vartheta_2$ , je tedy  $x = l$  a  $\vartheta = \vartheta_2$ . Tyto hodnoty dosadíme do rovnice (7)

$$\vartheta_2 = -\frac{q}{\lambda}l + \vartheta_1 \quad (10)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  jsou teploty,  $l$  je tloušťka.

Po úpravě dostaneme:

$$q = \frac{\lambda}{l}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (11)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  jsou teploty,  $l$  je tloušťka. Jednotky jsou W - watt na  $\text{m}^2$  – metr čtvereční.

Rozdílem teplot získáme teplotní spád:

$$\Delta\vartheta = (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (12)$$

Kde  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  jsou teploty,  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot.

$$q = \frac{\lambda}{l} \Delta\vartheta \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (13)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot,  $l$  je tloušťka. Jednotky jsou W - watt na  $\text{m}^2$  – metr čtvereční.

Z výsledného vztahu vyplývá, že výsledek nezávisí na vnější a vnitřní teplotě, ale na jejich rozdílu, resp. teplotního spádu. Čím vyšší hodnotu má součinitel tepelné vodivosti, tím je výsledné množství tepla větší. Naopak při zvyšujících se tloušťce stěny se množství proteklého tepla snižuje. První činitel pravé strany  $\lambda/l$  se nazývá propustnost stěny. Jeho obrácená hodnota  $l/\lambda$  je izotermický odpor stěny [2].

Nyní určíme průběh tepla stěnou. Vyjdeme ze vztahu (14), kde  $Q$  je množství tepla prošlé za  $\tau$  hodin rovinnou stěnou o ploše  $S$ .

$$Q = q \cdot S \cdot \tau = \frac{\lambda}{l} \Delta \vartheta \cdot S \cdot \tau [\text{Wh}] \quad (14)$$

Kde  $Q$  je množství tepla,  $q$  je hustota tepelného toku,  $S$  je plocha,  $\tau$  je čas v hodinách,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\Delta \vartheta$  je rozdíl teplot,  $l$  je tloušťka. Jednotky jsou Wh – watt-hodiny.

Průběh tepla stěnami těles je většinou delšího trvání, proto je čas  $\tau$  v hodinách. Je možno počítat s časem  $t$  v sekundách. V tomto případě by jednotky byly watt-sekundy Ws což jsou jouly J.

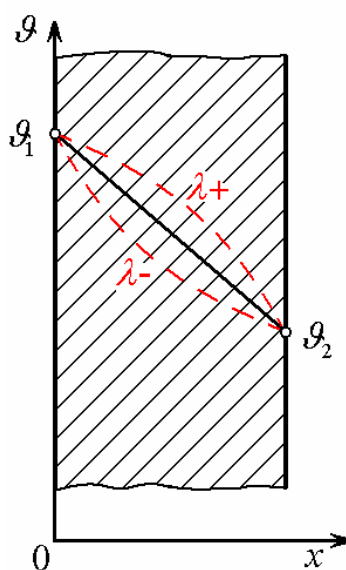
Z rovnice (13) dosadíme za  $q$ . Za integrační konstantu dosadíme opět  $\vartheta_1$ .

$$\vartheta_x = \vartheta_1 - \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{l} x \quad (15)$$

Kde  $\vartheta_x$  je teplota v bodě  $x$ ,  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  jsou teploty,  $l$  je tloušťka,  $x$  je vzdálenost.

Nyní máme výsledný vztah pro průběh teploty rovinnou stejnorodou stěnou. Mění se tedy dle rovnice přímky, ale jen pokud je součinitel tepelné vodivosti  $\lambda$  konstantní. Ve skutečnosti se ale  $\lambda$  s teplotou mění, a tak se průběh teplot  $\vartheta_x$  mění podle křivky [2].

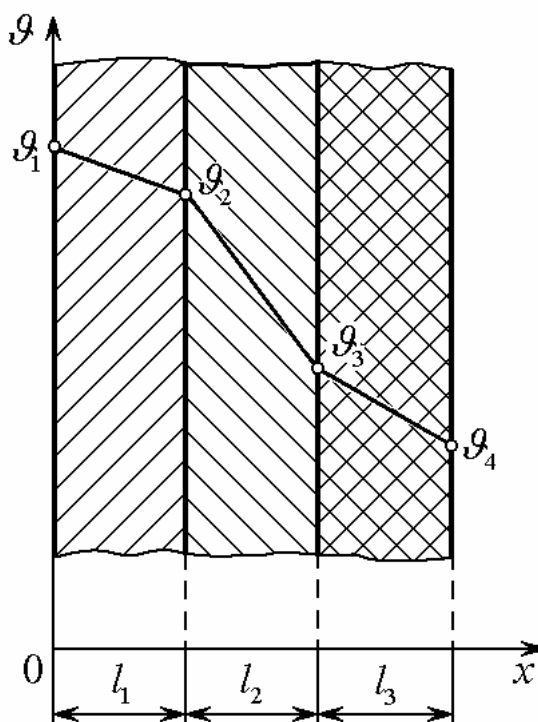
Vliv změny součinitele tepelné vodivosti  $\lambda$  v závislosti na teplotě je znázorněn na obr. 1.3. Čárkovaně jsou případy, kdy  $\lambda$  s teplotou roste nebo klesá, plná čára je pro konstantní  $\lambda$  [5].



Obr. 1.3 Vliv proměnlivosti  $\lambda$  na průběh teplot stejnorodou stěnou.  $\lambda+$  je součinitel tepelné vodivosti rostoucí s teplotou a  $\lambda-$  s teplotou klesá. Plná čára je pro konstantní  $\lambda$  v závislosti na teplotě [5].

### 1.1.6 Složená stěna

Stěna složená z dvou a více jednoduchých rovinných vrstev se nazývá složená nebo různorodá stěna. Průběh teplot procházejícího těmito stěnami se láme v závislosti na tepelné vodivosti jednotlivých stěn *obr. 1.4*. Každá vrstva těsně přiléhá na následující. Hustota tepelného toku  $q$  je při stacionárním šíření tepla pro každou stěnu spočtena dle rovnice (16).



Obr. 1.4 průběh tepla třívrstvou stěnou

Teploty  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_4$  jsou známy. Nejasné jsou zatím teploty  $\vartheta_2$  a  $\vartheta_3$ , jež jsou uvnitř systému stěn. Ty bude možné dopočítat později.

Obecně platí:

$$q = \frac{\lambda_n}{l_n} (\vartheta_n - \vartheta_{n+1}) \quad (16)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti pro  $n$ -tou vrstvu,  $l_n$  je tloušťka  $n$ -té vrstvy,  $\vartheta_n$  teplota povrchu  $n$ -té vrstvy blíže ke zdroji tepla,  $\vartheta_{n+1}$  je teplota  $n$ -té vrstvy dále od zdroje tepla.

Pro jednotlivé stěny tedy platí:

$$q = \frac{\lambda_1}{l_1} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (17)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_1$  je součinitel tepelné vodivosti první vrstvy,  $l_1$  je tloušťka první vrstvy,  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  jsou teploty.

$$q = \frac{\lambda_2}{l_2} (\vartheta_2 - \vartheta_3) \quad (18)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_2$  je součinitel tepelné vodivosti,  $l_2$  je tloušťka vrstvy,  $\vartheta_2$  a  $\vartheta_3$  jsou teploty.

$$q = \frac{\lambda_3}{l_3} (\vartheta_3 - \vartheta_4) \quad (19)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_3$  je součinitel tepelné vodivosti,  $l_3$  je tloušťka vrstvy,  $\vartheta_3$  a  $\vartheta_4$  jsou teploty.

Z rovnice (16) určíme poklesy teploty, obecně:

$$\vartheta_n - \vartheta_{n+1} = q \frac{l_n}{\lambda_n} \quad (20)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti pro  $n$ -tou vrstvu,  $l_n$  je tloušťka  $n$ -té vrstvy,  $\vartheta_n$  teplota povrchu  $n$ -té vrstvy blíže ke zdroji tepla,  $\vartheta_{n+1}$  je teplota  $n$ -té vrstvy dále od zdroje tepla.

Pro jednotlivé stěny platí:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = q \frac{l_1}{\lambda_1} \quad (21)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_1$  je součinitel tepelné vodivosti první vrstvy,  $l_1$  je tloušťka první vrstvy,  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  jsou teploty.

$$\vartheta_2 - \vartheta_3 = q \frac{l_2}{\lambda_2} \quad (22)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_2$  je součinitel tepelné vodivosti,  $l_2$  je tloušťka vrstvy,  $\vartheta_2$  a  $\vartheta_3$  jsou teploty.

$$\vartheta_3 - \vartheta_4 = q \frac{l_3}{\lambda_3} \quad (23)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_3$  je součinitel tepelné vodivosti,  $l_3$  je tloušťka vrstvy,  $\vartheta_3$  a  $\vartheta_4$  jsou teploty.

Rovnice sečteme a dostáváme tak souhrnný teplotní spád:

$$\vartheta_1 - \vartheta_4 = q \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3} \right) \quad (24)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  jsou součinitelé tepelné vodivosti,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  jsou tloušťky vrstev,  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_4$  jsou teploty.

Hustota tepelného toku je tedy:

$$q = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_4}{\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3}} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (25)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  jsou součinitelé tepelné vodivosti,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  jsou tloušťky vrstev,  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_4$  jsou teploty. Jednotky jsou W - watt na  $\text{m}^2$  – metr čtvereční.

Obecně pro  $n$  stěn platí:

$$q = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i}} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (26)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_i$  je součinitel tepelné vodivosti pro  $i$ -tou vrstvu,  $l_i$  je tloušťka  $i$ -té vrstvy,  $\vartheta_1$  je teplota první vrstvy blíže,  $\vartheta_{n+1}$  je teplota  $n$ -té vrstvy. Jednotky jsou W - watt na  $\text{m}^2$  – metr čtvereční.

Jmenovatel vztahu (26) je součtem všech tepelných odporů  $l_n/\lambda_n$  jednotlivých vrstev. Výsledný odpor je tedy součtem všech dílčích odporů vrstev. Vyšetříme hodnoty neznámých teplot  $\vartheta_2$  a  $\vartheta_3$ . Hodnotu  $q$  ze vztahu (25), která je nyní již známá, dosadíme například do rovnice (21). Tím získáme hodnotu  $\vartheta_2$ , rovnice (27).

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 - q \frac{l_1}{\lambda_1} [\text{°C}] \quad (27)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_1$  je součinitel tepelné vodivosti,  $l_1$  je tloušťka vrstvy,  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  jsou teploty. Jednotky jsou stupně celsia  $\text{°C}$ .

Zbývá určit  $\vartheta_3$ , kterou získáme z rovnice (22) nebo (23) [2]

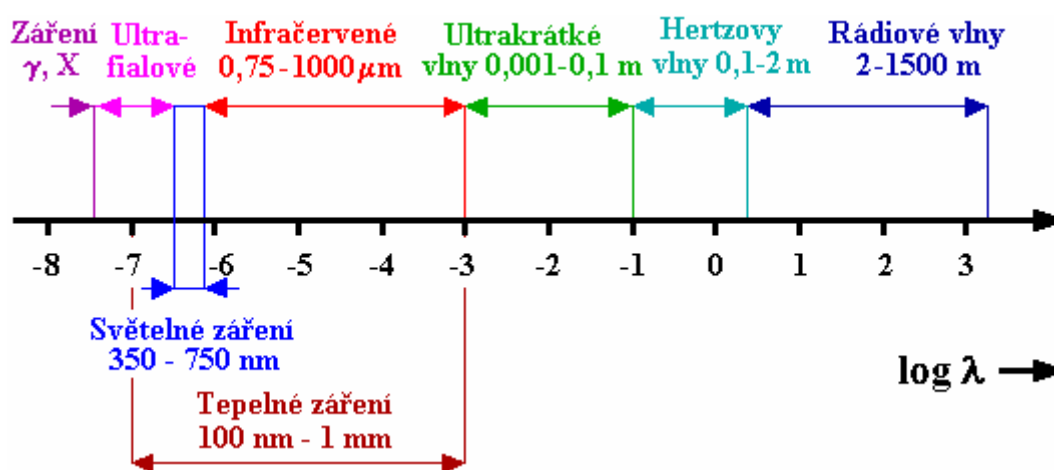
$$\vartheta_3 = \vartheta_2 - q \frac{l_2}{\lambda_2} [^{\circ}\text{C}] \quad (28)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda_2$  je součinitel tepelné vodivosti,  $l_2$  je tloušťka vrstvy,  $\vartheta_3$  a  $\vartheta_2$  jsou teploty. Jednotky jsou stupně celsia  $^{\circ}\text{C}$ .

## 1.2 Sálání

Každé těleso mající vyšší teplotu než 0 kelvinů působí na své okolí zářením. Toto záření vzniká zejména z tepelné energie tělesa. Část tepelné energie je přeměněna na zářivou energii a tudíž její množství závisí na teplotě tělesa. Toto záření je charakterizováno vlnovou délkou odpovídající rentgenovým, ultrafialovým, viditelným světelným paprskům, infračerveným paprskům atd. Nejvýznamnějším druhem v oblasti tepla jsou infračervené a světelné paprsky [1] [2].

Paprsky o vlnové délce přibližně 100nm až 1mm jsou tělesa schopna přijmout a přeměnit zpět na tepelnou energii [10]. Podle [10] je spektrum tepelného záření znázorněno na *obr. 1.5*. Sálání je tedy jedním druhem elektromagnetického vlnění. Proto se teplo vyzářené objektem v prostoru šíří dle zákona optiky. Sálání je jediným způsobem šíření tepla, který probíhá také ve vakuu. [1] [2] [5].



Obr. 1.5 Spektrum elektromagnetických vln, tepelné záření [10]

Teplo se šíří rovnoměrně všemi směry, pokud vlnění prochází plně průhledným prostředím. To znamená prostorem s nulovým odrazem. Pokud ovšem projde například poloprůhledným tělesem, je část tepla absorbována, část odražena zpět a část projde tělesem.

Přijatá energie se v tělese opět přemění na teplo. Všechny objekty jsou neustálým zdrojem a příjemcem tepelného záření [1] [2].

### **1.3 Proudění**

Tento způsob přenosu tepla popisuje přechod tepla mezi kapalinou nebo plynem do tělesa. Popisuje se velmi obtížně. Závisí na způsobu pohybu tekutin nebo plynů, které jsou často velice proměnlivé a na mnoha dalších vlivech [1] [2].

Proudění může probíhat volným nebo nuceným pohybem. Volný pohyb, neboli přirozená konvekce, je zapříčiněn rozdílem měrné hmotnosti teplejších a studenějších částic. Závisí na tepelných podmínkách, rozdílu teplot a prostoru, ve kterém se tekutina nebo plyn nachází [1] [2].

Pokud je proudění způsobeno vnějším činitelem, hovoříme o nuceném pohybu. Vnějšími činiteli jsou ventilátory, účinky větru nebo čerpadla. Závisí na fyzikálních vlastnostech kapaliny nebo plynu, na teplotě, na rozměrech a tvaru prostoru, ve kterém se děj odehrává, a rychlosti proudění [1] [2].

Oba případy nastávají současně v různých poměrech. Při vysoké rychlosti nuceného pohybu lze volný pohyb zanedbat [2].

## 2 Analogie mezi teplotním a elektrickým polem

Podobnost mezi teplotním a elektrickým polem je velice zajímavá. Téměř v každém ohledu jsme schopni najít analogickou spojitost. Obě pole jsou nevírová a zřídlová. Postupným dohledáním všech podobností dojdeme k úplné analogii mezi vedením tepla a elektřinou [1].

Elektrický potenciál  $V$  [V] je skalární veličina, nulová hodnota potenciálu je v nekonečnu. Stejně tak termodynamická teplota  $\Theta$  [K] je skalárem a její nulová hodnota je v absolutní nule 0K, což je  $-273,15^\circ\text{C}$  [1].

Rozdílem potenciálů je elektrické napětí rovnice (1), analogicky teplotní rozdíl jsou rovnice (2) a (3).

$$U = V_1 - V_2 \text{ [V]} \quad (1)$$

Kde  $U$  je elektrické napětí,  $V_1$  a  $V_2$  jsou elektrické potenciály. Jednotky jsou volty V.

$$\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2 \text{ [K]} \quad (2)$$

Kde  $\Delta\Theta$  je rozdíl teplot,  $\Theta_1$  a  $\Theta_2$  jsou teploty v kelvinech. Jednotky jsou kelviny K.

$$\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 \text{ [}^\circ\text{C]} \quad (3)$$

Kde  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  jsou teploty,  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot ve stupních celsia. Jednotky jsou stupně celsia  $^\circ\text{C}$ .

V elektrickém poli existují ekvipotenciální hladiny. Jsou to plochy, které spojují body se stejným potenciálem.

V teplotním poli jsou izotermické plochy (izotermy). Ty spojují body se stejnou teplotou.

Konduktivita  $\gamma$  (4) popisuje látku z hlediska vodivosti elektřiny. Součinitel tepelné vodivosti  $\lambda$  [W/m.K] určuje jak dobře látka vede teplo.

$$\gamma \left[ \frac{\text{S}}{\text{m}} = \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}} \right] \quad (4)$$

Kde  $\gamma$  je konduktivita. Jednotky jsou S – siemens, m – metr,  $\Omega$  - ohm.



Rezistivita  $\rho$  je převrácenou hodnotou konduktivity  $\gamma$  (5). Určuje tedy odolnost vůči průchodu elektrického proudu. Tepelný měrný odpor  $1/\lambda$  [m.K/W] určuje odolnost látky proti průchodu tepla.

$$\rho = \frac{1}{\gamma} [\Omega \cdot m] \quad (5)$$

Kde  $\rho$  je rezistivita,  $\gamma$  je konduktivita. Jednotky jsou m – metr,  $\Omega$  - ohm.

Elektrická vodivost  $G_e$  je konkrétní hodnotou vodivosti pro těleso o určitém průřezu  $S$  a délce  $l$ , vzorec (6). Vykrácením jednotek (7) ostatních veličin ve vzorci (6) dostáváme jednotku siemens S. Tepelná vodivost se značí také  $G_t$  a je hodnotou vodivosti pro konkrétní těleso o průřezu  $S$  a tloušťce  $l$  (8). Vykrácením jednotek (9) získáme jednotku tepelné vodivosti W/K.

$$G_e = \gamma \cdot \frac{S}{l} [S] \quad (6)$$

Kde  $G_e$  je elektrická vodivost,  $\gamma$  je konduktivita,  $S$  je plocha,  $l$  je délka. Jednotky jsou S – siemens.

$$\frac{1}{\Omega \cdot m} \frac{m^2}{m} = \frac{1}{\Omega} = S \quad (7)$$

Jednotky jsou S – siemens, m – metr,  $m^2$  – metr čtvereční,  $\Omega$  - ohm.

$$G_t = \lambda \cdot \frac{S}{l} \left[ \frac{W}{K} \right] \quad (8)$$

Kde  $G_t$  je tepelná vodivost,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $S$  je plocha,  $l$  je tloušťka. Jednotky jsou W – watt, K - kelvin.

$$\frac{W}{m \cdot K} \frac{m^2}{m} = \frac{W}{K} \quad (9)$$

Jednotky jsou m – metr,  $m^2$  – metr čtvereční, W – watt, K - kelvin.

Z obou vztahů (6) a (8) je patrné, že při zvyšujícím se průřezu vodivost stoupá. Zvětšuje-li se délka vodiče elektřiny nebo tepla, vodivost klesá.

Elektrický odpor  $R$ , stejně jako u elektrické vodivosti a konduktivity, charakterizuje konkrétnější podobu rezistivity, vzorec (10). Je to převrácená hodnota elektrické vodivosti  $G_e$ . Jeho protějšek v teplotním poli je tepelný odpor  $R$ . Je také převrácenou hodnotou tepelné vodivosti  $G_t$  a charakterizuje blíže vodivost pro materiál s průřezem  $S$  a délkou  $l$ .

$$R_e = \frac{l}{\gamma S} = \rho \frac{l}{S} [\Omega] \quad (10)$$

Kde  $R_e$  je elektrický odpor,  $\gamma$  je konduktivita,  $S$  je plocha (průřez vodiče),  $l$  je délka,  $\rho$  je rezistivita. Jednotky jsou  $\Omega$  - ohm.

$$R_t = \frac{l}{\lambda S} \left[ \frac{\text{K}}{\text{W}} \right] \quad (11)$$

Kde  $R_t$  je tepelný odpor,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $S$  je plocha,  $l$  je tloušťka. Jednotky jsou W – watt, K - kelvin.

Odvození jednotek pro elektrický odpor:

$$\frac{\text{m}}{\frac{1}{\Omega \cdot \text{m}} \text{m}^2} = \Omega \quad (12)$$

Jednotky jsou m – metr,  $\text{m}^2$  – metr čtvereční,  $\Omega$  - ohm.

Odvození jednotek pro tepelný odpor:

$$\frac{\text{m}}{\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \text{m}^2} = \frac{\text{K}}{\text{W}} \quad (13)$$

Jednotky jsou m – metr,  $\text{m}^2$  – metr čtvereční, W – watt, K - kelvin.

Intenzita elektrického pole  $\mathbf{E}_e$ , je vektor. Jde o potenciální rozdíl připadající na jednotku délky (14). Intenzita teplotního pole  $\mathbf{E}_t$  je velikost teplotního spádu (16), což je teplotní rozdíl připadající na jednotku tloušťky [1].

$$\mathbf{E}_e = -grad V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \left[ \frac{V}{m} \right] \quad (14)$$

Kde  $\mathbf{n}$  je normála k ekvipotenciální hladině,  $\mathbf{E}_e$  je intenzita elektrického pole,  $V$  je elektrický potenciál. Jednotky jsou V – volt, m – metr.

V homogenním poli je pak možno psát:

$$\mathbf{E}_e = \frac{U}{\mathbf{d}} \left[ \frac{V}{m} \right] \quad (15)$$

Kde  $\mathbf{E}_e$  je intenzita elektrického pole,  $\mathbf{d}$  je vzdálenost,  $U$  je elektrické napětí. Jednotky jsou V – volt, m – metr.

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{n}} = -grad \vartheta = -grad \Theta \left[ \frac{K}{m} \right] \quad (16)$$

Kde  $\mathbf{E}_t$  je intenzita teplotního pole,  $\mathbf{n}$  je normála k izotermické ploše,  $\vartheta$  je teplota ve stupních celsia,  $\Theta$  je teplota v kelvinech. Jednotky jsou m – metr, K - kelvin.

V případě homogenního teplotního pole je pak možno psát:

$$\mathbf{E}_t = \frac{\Delta \vartheta}{\mathbf{d}} = \frac{\Delta \Theta}{\mathbf{d}} \left[ \frac{K}{m} \right] \quad (17)$$

Kde  $\mathbf{E}_t$  je intenzita teplotního pole,  $\mathbf{d}$  je vzdálenost,  $\Delta \vartheta$  je rozdíl teplot ve stupních celsia,  $\Delta \Theta$  je rozdíl teplot v kelvinech. Jednotky jsou m – metr, K - kelvin.

Hustota elektrického proudu  $\mathbf{J}$  je proud na jednotku plochy. Je to vektor, má směr a velikost. Hustota proudu má stejný směr jako intenzita elektrického pole  $\mathbf{E}_e$ , a to je směr klesajícího potenciálu  $-grad V$ , vzorec (18). Směr určuje normála na ekvipotenciální plochu plynoucí ze vztahu pro intenzitu elektrického pole (14) [1].

$$\mathbf{J} = \gamma \cdot \mathbf{E}_e = \gamma (-grad V) = -grad V \left[ \frac{A}{m^2} \right] \quad (18)$$

Kde  $\mathbf{J}$  je hustota elektrického proudu,  $\gamma$  je konduktivita,  $\mathbf{E}_e$  je intenzita elektrického pole,  $V$  je elektrický potenciál. Jednotky jsou A – ampér,  $m^2$  – metr čtvereční.

Jednotky hustoty elektrického proudu získáme ze znalosti Ohmova zákona:

$$\frac{1}{\Omega \cdot \text{m}} \cdot \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{V}}{\Omega \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (19)$$

Jednotky jsou  $\Omega$  - ohm, V – volt, A – ampér, m – metr,  $\text{m}^2$  – metr čtvereční.

Hustota tepelného toku  $q$  udává tok tepla na jednotku plochy za jednotku času (20). Je to vektor. Má směr klesající teploty  $-\text{grad } \Theta$  a je určen normálou na izotermální plochu dle vzorce (16).

$$\mathbf{q} = \lambda(-\text{grad } \Theta) = -\lambda \text{grad } \Theta \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (20)$$

Kde  $\mathbf{q}$  je hustota tepelného toku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\Theta$  je teplota v kelvinech. Jednotky jsou  $\text{m}^2$  – metr čtvereční, W – watt.

Odvození jednotek pro hustotu tepelného toku  $\mathbf{q}$ :

$$\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \cdot \frac{\text{K}}{\text{m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (21)$$

Jednotky jsou m – metr,  $\text{m}^2$  – metr čtvereční, W – watt, K - kelvin.

Elektrický proud  $I$  není vektor, je skalárním součinem dvou vektorů (22). Je to tedy skalární veličina, která má jen velikost.

Tepelný tok  $P$  je také skalárním součinem dvou vektorů, je skalárem.

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \gamma \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{S} = \int_S -\gamma \text{grad } V \cdot d\mathbf{S} [\text{A}] \quad (22)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $\mathbf{J}$  je hustota elektrického proudu,  $\gamma$  je konduktivita,  $\mathbf{E}_e$  je intenzita elektrického pole,  $V$  je elektrický potenciál,  $S$  je plocha. Jednotky jsou A – ampéry.

Odvození jednotek elektrického proudu  $I$ :

$$\frac{1}{\Omega \cdot \text{m}} \cdot \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \text{m}^2 = \frac{\text{V}}{\Omega} = \text{A} \quad (23)$$

Jednotky jsou  $\Omega$  - ohm, V – volt, A – ampér, m – metr,  $\text{m}^2$  – metr čtvereční.

Ovažujeme-li homogenní elektrické pole:

$$I = \gamma \frac{S}{l} U = G_e \cdot U = \frac{U}{R_e} [\text{A}] \quad (24)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $S$  je plocha,  $\gamma$  je konduktivita,  $l$  je délka,  $G_e$  je elektrická vodivost,  $U$  je elektrické napětí,  $R_e$  je elektrický odpor. Jednotky jsou A – ampéry.

$$P = \int_S q \cdot dS = \int_S -\lambda \text{grad } \vartheta \cdot dS [\text{W}] \quad (25)$$

Kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\vartheta$  je teplota ve stupních celsia,  $S$  je plocha. Jednotky jsou W – watt.

Odvození jednotek tepelného toku  $P$ :

$$\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \cdot \frac{\text{K}}{\text{m}} \text{m}^2 = \text{W} \quad (26)$$

Jednotky jsou m – metr,  $\text{m}^2$  – metr čtvereční, W – watt, K - kelvin.

Uvažujeme-li homogenní elektrické pole:

$$P = \lambda \frac{S}{l} \Delta \vartheta = G_t \cdot \Delta \vartheta = \frac{\Delta \vartheta}{R_t} [\text{W}] \quad (27)$$

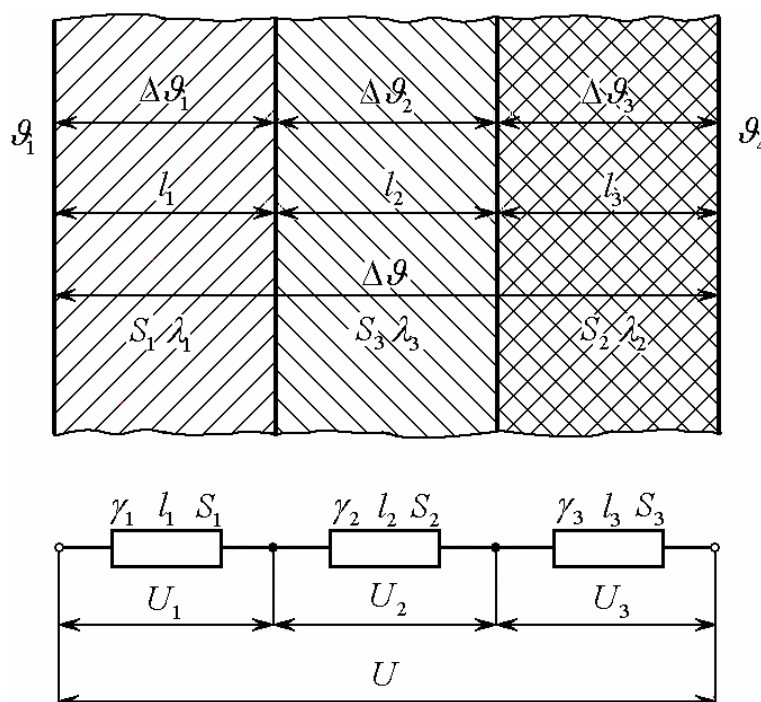
Kde  $P$  je tepelný tok,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\Delta \vartheta$  je rozdíl teplot ve stupních celsia,  $S$  je plocha,  $l$  je tloušťka,  $G_t$  je tepelná vodivost,  $R_t$  je tepelný odpor. Jednotky jsou W – watt.

## 2.1 Analogie jednorozměrného šíření elektrického proudu a tepla

Teplo se ve stěně šíří pouze jedním směrem. Stěnu nahradíme elektrickým obvodem složeným z elektrických odporů a napájeným stejnosměrným napětím.

### 2.1.1 Rezistory v sérii a rovinná stěna

Analogii popíšeme na  $n$  rezistorech zapojených do série a stěně o  $n$  vrstvách *obr. 2.1*. Napětí na každém rezistoru odpovídá rozdílu teplot příslušné stěny. Součet napětí  $U$  odpovídá součtu rozdílů teplot  $\Delta \vartheta$  [1].



Obr. 2.1 Náhrada třívrstvé stěny třemi elektrickými odpory

Pro každý rezistor platí:

$$R_{en} = \frac{l_n}{\gamma_n \cdot S_n} [\Omega] \quad (1)$$

Kde  $R_{en}$  je elektrický odpor  $n$ -tého rezistoru,  $l_n$  je délka vodiče  $n$ -tého rezistoru,  $\gamma_n$  je konduktivita  $n$ -tého rezistoru,  $S_n$  je průřez  $n$ -tého rezistoru. Jednotky jsou  $\Omega$  - ohmy.

Podobně platí pro každou vrstvu stěny:

$$R_m = \frac{l_n}{\lambda_n \cdot S_n} \left[ \frac{\text{K}}{\text{W}} \right] \quad (2)$$

Kde  $R_m$  je tepelný odpor  $n$ -té vrstvy stěny,  $l_n$  je tloušťka  $n$ -té vrstvy,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy,  $S_n$  je plocha  $n$ -té vrstvy. Jednotky jsou K – kelvin, W – watt.

Pro teplotní a elektrické pole platí tyto vztahy:

$$R_e = \sum_1^n \frac{l_n}{\gamma_n \cdot S_n} = \sum_1^n R_{en} [\Omega] \quad (3)$$

Kde  $R_e$  je celkový elektrický odpor,  $l_n$  je délka vodiče  $n$ -tého rezistoru,  $\gamma_n$  je konduktivita  $n$ -tého rezistoru,  $S_n$  je průřez  $n$ -tého rezistoru,  $R_{en}$  je elektrický odpor  $n$ -tého rezistoru. Jednotky jsou  $\Omega$  - ohmy.

$$R_t = \sum_1^n \frac{l_n}{\lambda_n \cdot S_n} = \sum_1^n R_{tn} \left[ \frac{\text{K}}{\text{W}} \right] \quad (4)$$

Kde  $R_t$  je celkový tepelný odpor,  $l_n$  je tloušťka  $n$ -té vrstvy,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy,  $S_n$  je plocha  $n$ -té vrstvy,  $R_{tn}$  je tepelný odpor  $n$ -té vrstvy stěny. Jednotky jsou K – kelvin, W – watt.

$$I = \frac{U}{\sum_1^n R_{en}} = \frac{U}{R_e} [\text{A}] \quad (5)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $U$  je elektrické napětí,  $R_{en}$  je elektrický odpor  $n$ -tého rezistoru,  $R_e$  je celkový elektrický odpor. Jednotky jsou A – ampéry

$$P = \frac{\Delta \vartheta}{\sum_1^n R_{tn}} = \frac{\Delta \vartheta}{R_t} [\text{W}] \quad (6)$$

Kde  $P$  je tepelný tok,  $\Delta \vartheta$  je rozdíl teplot  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_4$ ,  $R_{tn}$  je tepelný odpor  $n$ -té vrstvy,  $R_t$  je celkový tepelný odpor. Jednotky jsou W – watty.

Jestliže do vztahu (5) dosadíme za  $R_e$  dle vztahu (3), dostaneme obecnější tvar rovnice pro elektrický proud (7).

Totéž uděláme se vztahem pro tepelný tok (6) a za tepelný odpor  $R_t$  dosadíme ze vztahu (4). Dostáváme rovnici (8).

$$I = \frac{U}{\sum_1^n \frac{l_n}{\gamma_n \cdot S_n}} [\text{A}] \quad (7)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $U$  je elektrické napětí,  $l_n$  je délka vodiče  $n$ -tého rezistoru,  $\gamma_n$  je konduktivita  $n$ -tého rezistoru,  $S_n$  je průřez  $n$ -tého rezistoru. Jednotky jsou A - ampéry.

$$P = \frac{\Delta \vartheta}{\sum_1^n \frac{l_n}{\lambda_n \cdot S_n}} [\text{W}] \quad (8)$$

Kde  $P$  je tepelný tok,  $\Delta \vartheta$  je rozdíl teplot,  $l_n$  je tloušťka  $n$ -té vrstvy,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy,  $S_n$  je plocha  $n$ -té vrstvy. Jednotky jsou W – watty.

Nyní můžeme zjednodušit rovnici proudu  $I$  a tepelného toku  $P$  pro případ, kdy jsou plochy  $S$  stejné:

$$I = \frac{U \cdot S}{\sum_1^n \frac{l_n}{\gamma_n}} [\text{A}] \quad (9)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $U$  je elektrické napětí,  $S$  je průřez,  $l_n$  je délka vodiče  $n$ -tého rezistoru,  $\gamma_n$  je konduktivita  $n$ -tého rezistoru. Jednotky jsou A - ampéry.

$$P = \frac{\Delta \vartheta \cdot S}{\sum_1^n \frac{l_n}{\lambda_n}} [\text{W}] \quad (10)$$

Kde  $P$  je tepelný tok,  $\Delta \vartheta$  je rozdíl teplot,  $S$  je plocha,  $l_n$  je tloušťka  $n$ -té vrstvy,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy. Jednotky jsou W – watt.

Dále zavedeme střední hodnotu konduktivity  $\gamma_{avg}$ :

$$\gamma_{avg} = \frac{\sum_1^n l_n}{\sum_1^n \frac{l_n}{\gamma_n}} \left[ \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}} \right] \quad (11)$$

Kde  $\gamma_{avg}$  je střední hodnota konduktivity,  $l_n$  je délka vodiče  $n$ -tého rezistoru,  $\gamma_n$  je konduktivita  $n$ -tého rezistoru. Jednotky jsou  $\Omega$  - ohm, m - metr.

$$I = \frac{U \cdot S}{\sum_1^n \frac{l_n}{\gamma_n}} = \frac{U \cdot S}{\frac{\sum_1^n l_n}{\gamma_{avg}}} [\text{A}] \quad (12)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $U$  je elektrické napětí,  $S$  je průřez,  $l_n$  je délka vodiče  $n$ -tého rezistoru,  $\gamma_n$  je konduktivita  $n$ -tého rezistoru,  $\gamma_{avg}$  je střední hodnota konduktivity. Jednotky jsou A - ampéry.

Zavedeme střední hodnotu součinitele tepelné vodivosti  $\lambda_{avg}$ :

$$\lambda_{avg} = \frac{\sum_1^n l_n}{\sum_1^n \frac{l_n}{\lambda_n}} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right] \quad (13)$$

Kde  $\lambda_{avg}$  je střední hodnota součinitele tepelné vodivosti,  $l_n$  je tloušťka  $n$ -té vrstvy,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy. Jednotky jsou W – watt, m – metr, K - kelvin.

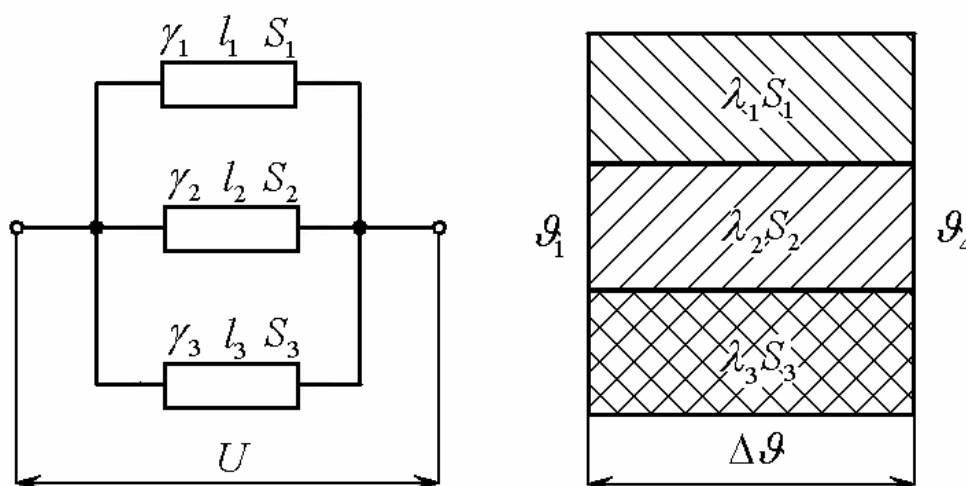


$$P = \frac{\Delta\vartheta \cdot S}{\sum_1^n \frac{l_n}{\lambda_n}} = \frac{\Delta\vartheta \cdot S}{\frac{1}{\lambda_{avg}} \sum_1^n l_n} \quad [\text{W}] \quad (14)$$

Kde  $P$  je tepelný tok,  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot,  $l_n$  je tloušťka  $n$ -té vrstvy,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy,  $S$  je plocha,  $\lambda_{avg}$  je střední hodnota součinitele tepelné vodivosti. Jednotky jsou W – watt.

### 2.1.2 Paralelní zapojení rezistorů a paralelní rovinná stěna

Na obr. 2.2. je vidět, že elektrické napětí  $U$  odpovídá rozdílu  $\Delta\vartheta$ . Pro další výpočty použijeme vzorce vodivosti  $G$  vhodné pro počítání v paralelním uspořádání.



Obr. 2.2 Náhrada stěny o různých vrstvách řazených pod sebe elektrickými odpory

Elektrická vodivost pro  $n$  členů:

$$G_{en} = \gamma_n \cdot \frac{S_n}{l_n} \quad [\text{S}] \quad (15)$$

Kde  $G_{en}$  je elektrický odpor  $n$ -tého rezistoru,  $l_n$  je délka vodiče  $n$ -tého rezistoru,  $\gamma_n$  je konduktivita  $n$ -tého rezistoru,  $S_n$  je průřez  $n$ -tého rezistoru. Jednotky jsou S - siemens.

Tepelná vodivost pro  $n$  členů:

$$G_m = \lambda_n \cdot \frac{S_n}{l_n} \left[ \frac{\text{W}}{\text{K}} \right] \quad (16)$$

Kde  $G_m$  je tepelná vodivost  $n$ -té vrstvy,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy,  $l_n$  je tloušťka  $n$ -té vrstvy,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy,  $S_n$  je plocha  $n$ -té vrstvy. Jednotky jsou W – watt, K - kelvin.

Elektrická vodivost celková:

$$G_e = \sum_1^n \gamma_n \cdot \frac{S_n}{l_n} = \sum_1^n G_{en} [\text{S}] \quad (17)$$

Kde  $G_e$  je celková elektrická vodivost,  $G_{en}$  je elektrický odpor  $n$ -tého rezistoru,  $l_n$  je délka vodiče  $n$ -tého rezistoru,  $\gamma_n$  je konduktivita  $n$ -tého rezistoru,  $S_n$  je průřez  $n$ -tého rezistoru. Jednotky jsou S - siemens.

Tepelná vodivost celková:

$$G_t = \sum_1^n \lambda_n \cdot \frac{S_n}{l_n} = \sum_1^n G_m \left[ \frac{\text{W}}{\text{K}} \right] \quad (18)$$

Kde  $G_t$  je celková tepelná vodivost,  $l_n$  je tloušťka  $n$ -té vrstvy,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy,  $S_n$  je plocha  $n$ -té vrstvy,  $G_m$  je tepelná vodivost  $n$ -té vrstvy,. Jednotky jsou W – watt, K - kelvin.

Rovnice elektrického proudu  $I$  a tepelného toku  $P$ :

$$I = U \cdot G_e [\text{A}] \quad (19)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $U$  je elektrické napětí,  $G_e$  je celková elektrická vodivost. Jednotky jsou A – ampéry.

$$P = \Delta\vartheta \cdot G_t [\text{W}] \quad (20)$$

Kde  $P$  je tepelný tok,  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot,  $G_t$  je celková tepelná vodivost. Jednotky jsou W – watty.

Do vztahu (19) dosadíme za  $G_e$  z rovnice (17). Dostáváme obecnější tvar rovnice proudu (21).

Do vztahu (20) dosadíme za  $G_t$  z rovnice (18). Dostáváme obecnější tvar rovnice proudu (22).

$$I = U \cdot \sum_1^n \gamma_n \cdot \frac{S_n}{l_n} [\text{A}] \quad (21)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $U$  je elektrické napětí,  $l_n$  je délka vodiče  $n$ -tého rezistoru,  $\gamma_n$  je konduktivita  $n$ -tého rezistoru,  $S_n$  je průřez  $n$ -tého rezistoru. Jednotky jsou A - ampéry.

$$P = \Delta \vartheta \cdot \sum_1^n \lambda_n \cdot \frac{S_n}{l_n} [\text{W}] \quad (22)$$

Kde  $P$  je tepelný tok,  $\Delta \vartheta$  je rozdíl teplot,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy,  $S_n$  je plocha  $n$ -té vrstvy,  $l_n$  je tloušťka  $n$ -té vrstvy. Jednotky jsou W – watt.

Pro případ, že je délka  $l$  stejná pro všechny  $n$  členy:

$$I = U \frac{\sum_1^n \gamma_n \cdot S_n}{l} [\text{A}] \quad (23)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $U$  je elektrické napětí,  $l$  je délka vodičů,  $\gamma_n$  je konduktivita  $n$ -tého rezistoru,  $S_n$  je průřez  $n$ -tého rezistoru. Jednotky jsou A - ampéry.

$$P = \Delta \vartheta \frac{\sum_1^n \lambda_n \cdot S_n}{l} [\text{W}] \quad (25)$$

Kde  $P$  je tepelný tok,  $\Delta \vartheta$  je rozdíl teplot,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy,  $S_n$  je plocha  $n$ -té vrstvy,  $l$  je tloušťka. Jednotky jsou W – watt.

Dále zavedeme střední hodnotu konduktivity  $\gamma_{avg}$  :

$$\gamma_{avg} = \frac{\sum_1^n \gamma_n \cdot S_n}{\sum_1^n S_n} \left[ \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}} \right] \quad (26)$$

Kde  $\gamma_{avg}$  je střední hodnota konduktivity,  $\gamma_n$  je konduktivita  $n$ -tého rezistoru,  $S_n$  je průřez  $n$ -tého rezistoru

$$I = U \cdot \gamma_{avg} \cdot \frac{\sum_1^n S_n}{l} [\text{A}] \quad (27)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $U$  je elektrické napětí,  $\gamma_{avg}$  je střední hodnota konduktivity,  $S_n$  je průřez  $n$ -tého rezistoru,  $l$  je délka vodičů. Jednotky jsou A - ampéry.

Zavedeme střední hodnotu součinitele tepelné vodivosti  $\lambda_{avg}$  :

$$\lambda_{avg} = \frac{\sum_1^n \lambda_n \cdot S_n}{\sum_1^n S_n} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m.K}} \right] \quad (28)$$

Kde  $\lambda_{avg}$  je střední hodnota součinitele tepelné vodivosti,  $\lambda_n$  je součinitel tepelné vodivosti  $n$ -té vrstvy,  $S_n$  je plocha  $n$ -té vrstvy. Jednotky jsou W – watt, m – metr, K – kelvin.

$$P = \Delta\vartheta \cdot \lambda_{avg} \frac{\sum_1^n S_n}{l} [\text{W}] \quad (29)$$

Kde  $P$  je tepelný tok,  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot,  $\lambda_{avg}$  je střední hodnota součinitele tepelné vodivosti,  $S_n$  je plocha  $n$ -té vrstvy,  $l$  je tloušťka. Jednotky jsou W – watt.

### 2.1.3 Přestup tepla na povrchu těles

V předchozích dvou kapitolách byla řešena elektrická analogie vedení tepla. V praxi se setkáváme s tím, že než dojde k vnějšímu styku tepla s povrchem materiálu, je teplo přenášeno sáláním a prouděním. Toto šíření tepla má charakter, který je znázorněn na obrázku *obr. 2.3*. Tento zjev popisuje Newtonův zákon. Podle tohoto zákona je tepelný tok spočten dle rovnice (30) [1].

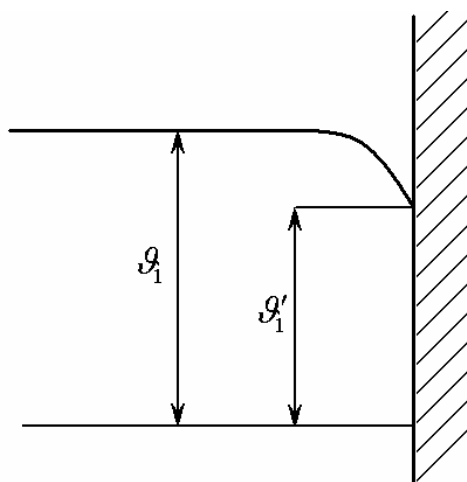
Je zde zaveden součinitel přestupu tepla  $\alpha$  [W/K.m<sup>2</sup>], jenž určuje, jak velký tepelný tok při teplotním rozdílu 1K projde jednotkovou plochou.

$$P = \alpha \cdot S \cdot \Delta\vartheta [\text{W}] \quad (30)$$

Kde  $P$  je tepelný tok,  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla,  $S$  je plocha povrchu,  $\Delta\vartheta$  dle rovnice (31) je rozdíl teplot. Jednotky jsou W – watt.

$$\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_1 [\text{K}] \quad (31)$$

Kde  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot,  $\vartheta$  je teplota okolí,  $\vartheta_1$  je teplota na povrchu tělesa, Jednotky jsou K – kelvin.



Obr. 2.3 přestup tepla na povrchu tělesa

Analogie elektrického odporu  $R_e$  a tepelného odporu  $R_t$  dle Newtonova zákona:

$$R_e = \frac{U}{I} [\Omega] \quad (32)$$

Kde  $R_e$  je elektrický odpor,  $I$  je elektrický proud,  $U$  je elektrické napětí. Jednotky jsou  $\Omega$  - ohm.

$$R_t = \frac{\Delta\vartheta}{P} = \frac{1}{\alpha \cdot S} \left[ \frac{\text{K}}{\text{W}} \right] \quad (33)$$

Kde  $R_t$  je tepelný odpor,  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot,  $P$  je tepelný tok,  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla,  $S$  je plocha. Jednotky jsou K – kelvin, W – watt.

Součinitel přestupu tepla  $\alpha$  obsahuje dvě složky (34). Součinitel přestupu tepla sáláním  $\alpha_s$  a součinitel přestupu tepla prouděním  $\alpha_p$  [1].

$$\alpha = \alpha_s + \alpha_p \left[ \frac{\text{W}}{\text{m.K}} \right] \quad (34)$$

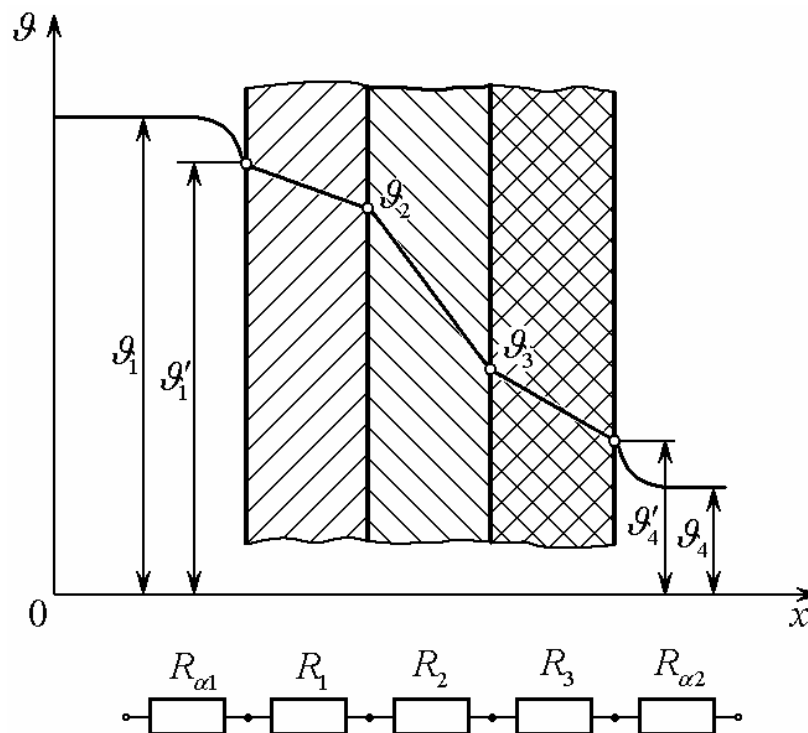
Kde  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla,  $\alpha_s$  je součinitel přestupu tepla sáláním,  $\alpha_p$  je součinitel přestupu tepla prouděním. Jednotky jsou W – watt, m – metr, K – kelvin.

Součinitel  $\alpha$  je velmi proměnlivý. Jeho změnu způsobuje mnoho příčin. Nejlepším způsobem je součinitel v daném prostředí měřit a pak zanést hodnotu do výpočtů. Lze ho také nalézt v různých tabulkách, ale je třeba dbát na to, za jakých fyzikálních okolností byly pořízeny. Zejména teplota je zásadním parametrem, který součinitel  $\alpha$  ovlivňuje. Například

při teplotách do 150°C je přítomno více  $\alpha_p$ , při vyšších teplotách u těles pak  $\alpha_s$  nabývá na významu. V určitých vysokých teplotách lze již  $\alpha_p$  zanedbat [1].

#### 2.1.4 Rezistory v sérii a rovinná stěna s blízkým okolím

Blízkým okolím je myšlena taková vzdálenost od povrchu tělesa, kde se ještě uplatňuje působení součinitele přestupu tepla  $\alpha$ . V takovém prostředí mějme stěnu o  $n$  vrstvách. Na vnitřním povrchu uvažujeme součinitel přestupu tepla  $\alpha_1$  a na vnějším povrchu  $\alpha_n$ . Sestrojíme elektrický model, kde vnější a vnitřní blízké okolí bude nahrazeno elektrickými odpory  $R_{\alpha 1}$  a  $R_{\alpha 2}$  obr. 2.4.



Obr. 2.4 Náhrada třívrstvé stěny a přestupových jevů na povrchu elektrickými odpory

### 3 Anaogie mezi Furier-Kirchhoffovou a telegrafní rovnicí

Roku 1934 se holandský vědec Dr.-Ing. ir. C.L.Beuken se svými kolegy zabýval účinností pecí pro keramický průmysl. Zjistili, že ztráty jsou 50 až 55% z prvotní energie dodané peci. Z těchto ztrát je v přes 70% procent způsobeno schopností stěn pece akumulovat a propouštět teplo [4].

Otázkou bylo, jak stěna o určité tloušťce a materiálu vede teplo. K řešení takového procesu nestacionárního vedení tepla je zapotřebí složité a časově velmi náročné matematické analýzy. Proto Beuken později roku 1934 uvažoval a hledal jiný způsob jak dojít ke stejnému cíli. Potřeboval dobře měřitelné veličiny, které mu teplotní pole ve vedení tepla neumožňovalo. Hledal jiný typ pole, kterým by mohl tepelné vedení nahradit. Výsledkem byl elektrický obvod složený z kapacit a rezistorů. Elektrický model, dnes známý také jako Beukenův. Elektrický proud a ostatní elektrické veličiny jsou výborně měřitelné i nastavitelné, tudíž představují výbornou alternativu pro modelování vedení tepla [4].

První model byl sestaven v elektrotepelné laboratoři v Maastrichtu roku 1935. Model neumožňoval nastavování hodnot rezistorů a kapacitorů [4].

Netrvalo dlouho a objev se začal ve světě hojně využívat. Podle Gustava Künzela [7] se kolem roku 1936 model realizoval na mnoha pracovištích v Evropě i USA. Sloužily k měření dynamiky vedení tepla stěn objektů jako jsou pece, budovy, výměníky tepla [7].

#### 3.1 Nestacionární šíření tepla

Je to neustálené pole z hlediska času, zdrojů tepla atd. V nestacionárním poli se teplota s časem mění, výpočet poměrů v takovém prostředí je složitější než v časově stálém poli. Tuto problematiku řeší obecná diferenciální rovnice [1].

$$\frac{\lambda}{\rho \cdot c} \nabla^2 \vartheta - \frac{\alpha}{\rho \cdot c} (\vartheta - \vartheta_0) \frac{\partial S_0}{\partial V} + \frac{\sigma}{\rho \cdot c} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (1)$$

Kde  $\vartheta$  je teplota v určitém bodě tělesa,  $\vartheta_0$  je teplota okolí,  $t$  je čas,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $c$  je měrná tepelná kapacita,  $\rho$  je měrná hmota,  $\nabla$  je gradient,  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla,  $S_0$  je plocha tělesa, kterou vytéká teplo do okolí,  $V$  je objem tělesa.

### 3.1.1 Měrná tepelná kapacita $c$

Tato veličina, dříve označována jako specifické teplo, představuje množství tepla potřebného k ohřátí jednoho kilogramu látky o jeden teplotní stupeň. Měrná tepelná kapacita má jednotky J/Kg.K. Vyjadřuje množství tepla, které je potřeba k ohřátí jednoho kilogramu látky o jeden teplotní stupeň. Je mírně teplotně závislá, proto je dobré uvádět k její hodnotě, jaké teplotě odpovídá.[11] [12].

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta \vartheta} \left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot \text{K}} \right] \quad (2)$$

Kde  $c$  je měrná tepelná kapacita,  $Q$  je množství tepla,  $m$  je hmotnost,  $\Delta \vartheta$  je rozdíl počáteční a konečné teploty. Jednotky jsou J – joule, Kg – kilogram, K – kelvin.

### 3.1.2 Teplotní vodivost $a$

Charakterizuje rychlost, se kterou se mění teplota. Pokud je  $a$  nízká, rychlost šíření tepla z jednoho bodu tělesa do druhého je malá. Vyšší hodnota teplotní vodivosti znamená vyšší rychlost šíření [1].

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (3)$$

Kde  $a$  je teplotní vodivost,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $c$  je měrná tepelná kapacita,  $\rho$  je měrná hmota. Jednotky jsou  $\text{m}^2$  - metry čtvereční, s – sekundy.

## 3.2 Fourier–Kirchhoffova rovnice

Je to zjednodušená rovnice obecné rovnice diferenciální. Fourier–Kirchhoffova rovnice (1) je pro případ jednorozměrného šíření tepla. V tomto případě se hodnoty  $\sigma$  a  $\alpha$  rovnají nule [1].

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (1)$$

Kde  $\vartheta$  je teplota,  $t$  je čas,  $a$  je teplotní vodivost,  $x$  je vzdálenost.



### 3.3 Telegrafní rovnice

Telegrafní rovnice (2) popisuje přechodové jevy, které probíhají na elektrickém vedení.

$$\frac{\partial^2 U_-}{\partial x^2} = L_0 \cdot C_0 \frac{\partial^2 U_-}{\partial t^2} + (L_0 \cdot G_0 + R_0 \cdot G_0) \frac{\partial U_-}{\partial t} + R_0 \cdot G_0 \cdot U_- \quad (2)$$

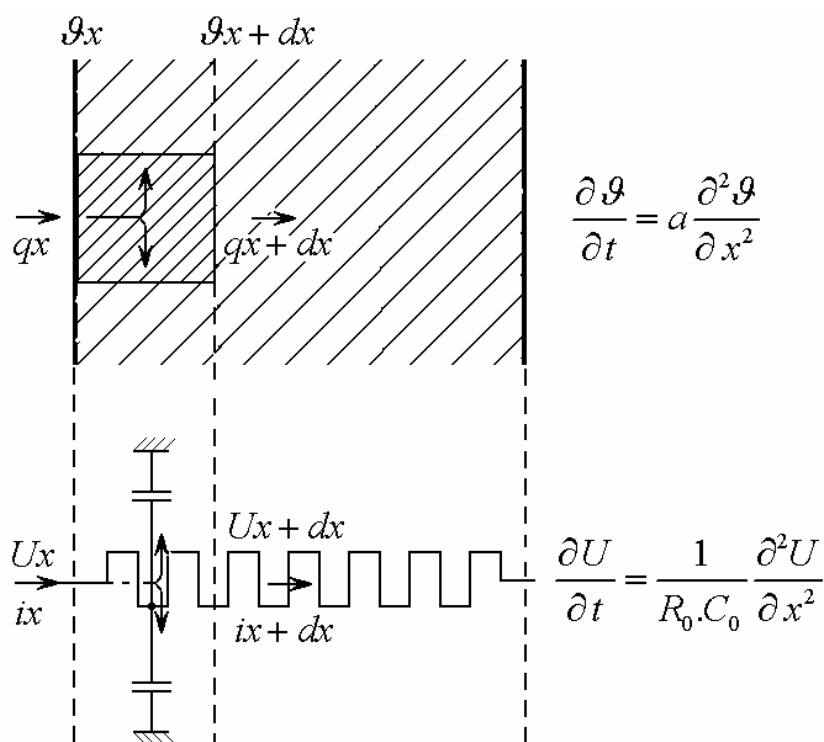
Kde  $U_-$  je střídavé elektrické napětí,  $x$  je vzdálenost,  $L_0$  je měrná indukčnost,  $C_0$  je měrná kapacita,  $R_0$  je měrný odpor,  $G_0$  je měrný svod,  $t$  je čas.

### 3.4 Podobnost Fourier–Kirchhoffovy a telegrafní rovnice

Předpokládejme, že pro stejnosměrné napětí lze na vedení zanedbat indukčnost  $L$  a svod  $G$ , dostáváme rovnici (3), která se podobá rovnici Fourier-Kirchhoffové (1).

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{R_0 \cdot C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3)$$

Kde  $U$  je stejnosměrné elektrické napětí,  $x$  je vzdálenost,  $C_0$  je měrná elektrická kapacita,  $R_0$  je měrný elektrický odpor,  $t$  je čas.



Obr. 3.1 Analogie mezi oběma rovnicemi podle Beukena [4]. Zvlněný vodič představuje elektrický odpor.

Porovnáme Fourier-Kirchhoffovu rovnici (1) a upravenou telegrafní rovnici (3). Z analogie mezi teplotním a elektrickým polem víme, že rozdíl teplot  $\vartheta$  je ekvivalentní

elektrickému napětí  $U$ . Z porovnání tedy plyne, že teplotní vodivost  $a$  je úměrná poměru  $1/R_0.C_0$ . Zde je  $R_0$  [ $\Omega/m$ ] elektrickým odporem vedení vztažen na jednotku délky a  $C_0$  [ $F/m$ ] je elektrickou kapacitou vedení vztaženou na jednotku délky.

Odvození jednotek teplotní vodivosti:

$$\frac{\frac{W}{m.K}}{\frac{J}{Kg} \cdot \frac{Kg}{m^3}} = \frac{W.Kg.K.m^3}{m.K.J.Kg} = \frac{W.m^2}{J} = \frac{W.m^2}{Ws} = \frac{m^2}{s} \quad (4)$$

Jednotky jsou  $W$  – watt,  $m^2$  - metr čtvereční,  $m^3$  - metr krychlový,  $s$  – sekundy,  $J$  – joule,  $Kg$  – kilogram,  $K$  – kelvin,  $Ws$  – watt-sekunda

Odvození jednotek pro vztah  $1/R_0.C_0$ :

$$\frac{1}{\frac{\Omega}{m} \cdot \frac{F}{m}} = \frac{m^2}{\Omega.F} = \frac{m^2}{\frac{m^2.Kg}{s^3.A^2} \cdot \frac{s^4.A^2}{m^2.Kg}} = \frac{m^2}{s} \quad (5)$$

Jednotky jsou  $m^2$  - metr čtvereční,  $A$  – ampér,  $\Omega$  - ohm,  $F$  – farad,  $m$  – metr,  $Kg$  - kilogram,  $s$  – sekundy.

Ze vztahů (4) a (5) je patrná shoda jednotek součinitele teplotní vodivosti a zlomku  $1/R_0.C_0$ . Můžeme tedy dále napsat rovnici

$$a = \frac{\lambda}{c.\rho} = \frac{1}{R_0 C_0} \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad (6)$$

Kde  $a$  je teplotní vodivost,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $c$  je měrná tepelná kapacita,  $\rho$  je měrná hmota,  $C_0$  je měrná elektrická kapacita,  $R_0$  je měrný elektrický odpor. Jednotky jsou  $m^2$  - metry čtvereční,  $s$  – sekundy.

Ze známosti podobnosti součinitele tepelné vodivosti  $\lambda$  s konduktivitou  $\gamma$  je ze vztahu (6) zřejmé, že  $\lambda$  odpovídá podílu  $1/R_0$ . Z toho plyne, že součin měrné tepelné kapacity a hustoty  $c.\rho$  je analogický k elektrické měrné kapacitě  $C_0$  [4].

Vlastnost materiálu s malým součinitelem tepelné vodivosti  $\lambda$ , který špatně vede teplo, je na elektrickém modelu interpretována jako velký elektrický odpor. Velká hodnota součinu  $c.\rho$  odpovídá na elektrickém modelu velké kapacitě. Toto je základní princip tvorby modelu [4].

Čím více kapacit a rezistorů je použito na jednu vrstvu stěny, tím je model přesnější. Blížíme se tak více poměrům na vedení. Výsledky měření a zanesené průběhy teplot jsou potom plynulejší a více se blíží skutečnosti [4].

Pro doplnění uvedeme vztah pro tepelnou kapacitu. Vyjdeme ze součinu  $c \cdot \rho$  ze vztahu (6).

$$c \cdot \rho = \frac{C_t}{V} \quad (7)$$

Kde  $C_t$  je tepelná kapacita,  $c$  je měrná tepelná kapacita,  $\rho$  je měrná hmota,  $V$  je objem.

Po úpravě:

$$C_t = c \cdot \rho \cdot V = c \cdot m \left[ \frac{\text{J}}{\text{K}} \right] \quad (8)$$

Kde  $C_t$  je tepelná kapacita,  $c$  je měrná tepelná kapacita,  $\rho$  je měrná hmota,  $V$  je objem,  $m$  je hmotnost. Jednotky jsou J – joule, K – kelvin.

Nyní určíme elektrickou kapacitu:

$$C_e = C_0 \cdot l [\text{F}] \quad (9)$$

Kde  $C_e$  je elektrická kapacita,  $C_0$  je měrná elektrická kapacita,  $l$  je délka. Jednotky jsou F – farad.

Tepelná kapacita  $C_t$  je rovna elektrické kapacitě  $C_e$ .

$$C_t = C_e \quad (10)$$

Kde  $C_t$  je tepelná kapacita,  $C_e$  je elektrická kapacita.

Elektrický odpor je:

$$R_e = R_0 \cdot l [\Omega] \quad (11)$$

Kde  $R_e$  je elektrický odpor,  $R_0$  je měrný elektrický odpor,  $l$  je délka. Jednotky jsou  $\Omega$  – ohm.

Analogicky pak je tepelný odpor  $R_t$  roven elektrickému odporu  $R_e$

$$R_t = R_e \quad (12)$$

Kde  $R_t$  je tepelný odpor,  $R_e$  je elektrický odpor.

### 3.5 Aplikace analogie mezi Fourier-Kirchhoffovou rovnicí a telegrafní rovnicí

V této kapitole odvodíme výpočet hodnot rezistorů a kapacitorů na základě analogie mezi oběma rovnicemi. O objektu, který chceme namodelovat, musí být známy některé nezbytné parametry. Omezíme se na stěnu o jedné vrstvě z jednoho materiálu.

Šíření tepla v tuhém tělese probíhá řádově hodiny. Na elektrickém modelu dojde ke značnému zkrácení trvání tohoto děje řádově na sekundy. Proto zavedeme vhodná měřítka pro přepočty tepelných veličin na elektrické a naopak (1), (2), (3), (4).

$$\mu_{\vartheta} = \frac{\Delta\vartheta}{U} \left[ \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{V}} \right] \quad (1)$$

Kde  $\mu_{\vartheta}$  je poměr pro převod rozdílu teplot na napětí,  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot,  $U$  je elektrické napětí. Jednotky jsou  $^{\circ}\text{C}$  – stupně celsia, V – volt.

$$\mu_t = \frac{t_t}{t_e} \left[ \frac{\text{hod}}{\text{s}} \right] \quad (2)$$

Kde  $\mu_t$  je poměr pro převod doby trvání průchodu tepla stěnou a doby průběhu napětí na modelu,  $t_t$  je čas průchodu tepla stěnou,  $t_e$  je čas průběhu napětí na modelu. Jednotky jsou hod – hodiny, s – sekundy.

$$\mu_P = \frac{P}{I} \left[ \frac{\text{W}}{\text{A}} \right] \quad (3)$$

Kde  $\mu_P$  je poměr pro převod mezi množstvím tepla  $P$  a elektrickým proudem  $I$ . Jednotky jsou W – watt, A – ampér.

$$\mu_l = \frac{l_t}{l_e} [-] \quad (4)$$

Kde  $\mu_l$  je poměr pro převod mezi tloušťkou stěny  $l_t$  a délkou elektrického vodiče  $l_e$ .

$$\mu_R = \frac{R_t}{R_e} \left[ \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{W}\cdot\Omega} \right] \quad (5)$$

Kde  $\mu_R$  je poměr pro převod mezi tepelným odporem  $R_t$  a elektrickým odporem  $R_e$ . Jednotky jsou  $^{\circ}\text{C}$  – stupně celsia, W – watt,  $\Omega$  – ohm.

Cílem řešení modelu je stanovení hodnot kapacit, odporů a napájecího napětí. Vyjdeme ze znalosti podobnosti mezi rovnicí elektrického proudu  $I$  (6) a tepelného toku  $P$  (7).

$$I = \frac{U}{R_e} [\text{A}] \quad (6)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $U$  je elektrické napětí,  $R_e$  je elektrický odpor. Jednotky jsou A - ampér.

$$P = \frac{\Delta\vartheta}{R_t} [\text{W}] \quad (7)$$

Kde  $P$  je tepelný tok,  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot,  $R_t$  je tepelný odpor. Jednotky jsou W – watt.

Obě rovnice dejme do poměru (8). Získáme tak rovnici (9) pro stanovení měrného elektrického odporu  $R_{e0}$ .

$$\frac{I}{P} = \frac{U}{\Delta\vartheta} \cdot \frac{R_{t0}}{R_{e0}} \quad (8)$$

Kde  $I$  je elektrický proud,  $U$  je elektrické napětí,  $R_{e0}$  je měrný elektrický odpor,  $P$  je tepelný tok,  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot,  $R_{t0}$  je měrný tepelný odpor.

$$R_{e0} = \frac{U}{\Delta\vartheta} \cdot \frac{P}{I} \cdot R_{t0} [\Omega] \quad (9)$$

Kde  $R_{e0}$  je měrný elektrický odpor,  $U$  je elektrické napětí,  $\Delta\vartheta$  je rozdíl teplot,  $P$  je tepelný, Kde  $I$  je elektrický proud,  $R_{t0}$  je měrný tepelný odpor. Jednotky jsou  $\Omega$  - ohm.

V rovnici (9) se objevily poměry  $U/\Delta\vartheta$  a  $P/I$ . Za ně dosadíme z rovnic (1) a (3) měřítka  $\mu_\vartheta$  a  $\mu_Q$ .

$$R_{e0} = \frac{\mu_P}{\mu_\vartheta} \cdot R_{t0} \left[ \frac{\Omega}{\text{m}} \right] \quad (10)$$

Kde  $R_{e0}$  je měrný elektrický odpor,  $\mu_P$  je poměr tepelného toku a elektrického proudu,  $\mu_\vartheta$  je poměr rozdílu teplot a napětí,  $R_{t0}$  je měrný tepelný odpor. Jednotky jsou  $\Omega$  - ohm, m – metr.

Hodnotu odporu  $R_{t0}$  rozepíšeme a získáme tak výsledný vztah pro  $R_{e0}$ , kde na pravé straně dostaneme jen známé veličiny.

$$R_{e0} = \frac{\mu_P}{\mu_\vartheta} \cdot \frac{1}{S_t \cdot \lambda} \left[ \frac{\Omega}{\text{m}} \right] \quad (11)$$

Kde  $R_{e0}$  je měrný elektrický odpor,  $\mu_P$  je poměr tepelného toku a elektrického proudu,  $\mu_\vartheta$  je poměr rozdílu teplot a napětí,  $S_t$  je plocha vrstvy,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti. Jednotky jsou  $\Omega$  - ohm, m – metr.

Stejný postup je při určení  $R_{e\alpha}$ :

$$R_{e\alpha} = \frac{\mu_p}{\mu_\vartheta} \cdot \frac{1}{S_t \cdot \alpha} [\Omega] \quad (12)$$

Kde  $R_{e\alpha}$  je elektrický odpor,  $\mu_p$  je poměr tepelného toku a elektrického proudu,  $\mu_\vartheta$  je poměr rozdílu teplot a napětí,  $S_t$  je plocha vrstvy,  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla. Jednotky jsou  $\Omega$  - ohm.

Pro určení velikosti kapacit vyjdeme ze vztahu

$$a \cdot \mu_t = \frac{1}{R_{e0} C_{e0}} \quad (13)$$

Kde  $a$  je teplotní vodivost,  $\mu_t$  je poměr doby trvání průchodu tepla stěnou a doby průběhu napětí na modelu,  $C_{e0}$  je měrná elektrická kapacita,  $R_{e0}$  měrný elektrický odpor.

$$C_{e0} = \frac{1}{a \cdot \mu_t \cdot R_{e0}} \left[ \frac{\text{F}}{\text{m}} \right] \quad (14)$$

Kde  $C_{e0}$  je měrná elektrická kapacita,  $a$  je teplotní vodivost,  $\mu_t$  je poměr doby trvání průchodu tepla stěnou a doby průběhu napětí na modelu,  $R_{e0}$  měrný elektrický odpor. Jednotky jsou F – farad, m – metr.

Určíme velikosti odporu a kapacity:

$$R = R_0 \cdot l_t [\Omega] \quad (15)$$

Kde  $R$  je elektrický odpor,  $R_0$  je měrný elektrický odpor,  $l_t$  je tloušťka vrstvy. Jednotky jsou  $\Omega$  – ohm.

$$C = C_0 \cdot l_t [\text{F}] \quad (16)$$

Kde  $C$  je elektrická kapacita,  $C_0$  je měrná elektrická kapacita,  $l_t$  je tloušťka vrstvy. Jednotky jsou F – farad.

Je-li objekt vícevrstvý, výpočty odporů a kapacit aplikujeme obdobně na ostatní vrstvy objektu.

Velikost napětí pro napájení modelu:

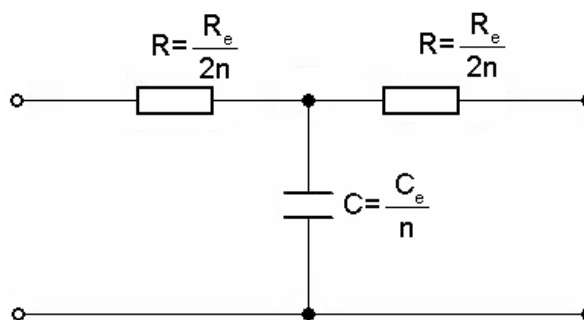
$$U = \frac{\Delta \vartheta}{\mu_\vartheta} [\text{V}] \quad (17)$$

Kde  $U$  je elektrické napětí,  $\Delta \vartheta$  je rozdíl teplot,  $\mu_\vartheta$  je poměr pro přepočítání mezi teplotním rozdílem a elektrickým napětím. Jednotky jsou V – volt.

### 3.6 Způsoby provedení modelu

Modely mohou být sestaveny třemi způsoby. Značí se dle charakteristického větvení obvodu T,  $\Gamma$  a  $\Pi$ . Každé zapojení se chová trochu jinak. Liší se výpočty elektrických prvků a výsledným charakterem průchodu proudu a napětí.

Nejvíce používaným je RC článek typu T *obr. 3.2*. Každá stěna je tedy sestavena z určitého počtu T-členů (podle požadované přesnosti).



Obr. 3.2 RC článek typu T

Zabývejme se nyní jen jednou vrstvou stěny, na kterou je použit pouze jeden T-člen. Je to příčně symetrický dvojbran, takže vypočtený odpor  $R$  (*viz. kapitola 3.4*) je dělen dvěma. Odporů jsou rozmístěny na ramena písmene T. Mezi nimi je paralelně svedena vypočtená kapacita  $C$  (*viz. kapitola 3.4*), která zůstává v tomto případě beze změny. Jde-li o stěnu složenou z více článků, je spočtený odpor dělen  $2n$  (1) a spočtená kapacita počtem článků  $n$  (2) [7].

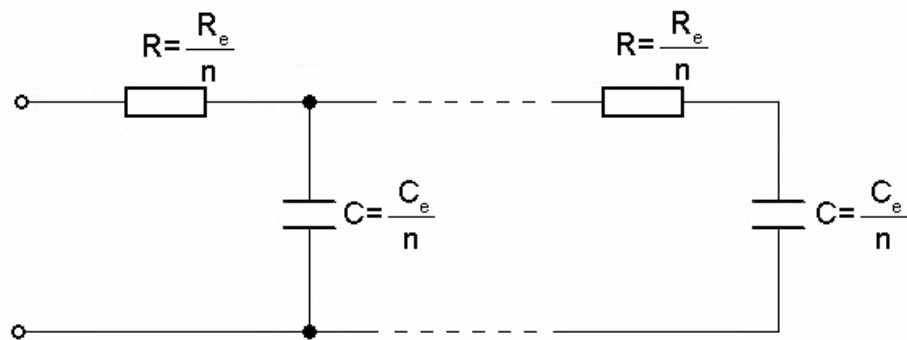
$$R = \frac{R_e}{2n} \quad (1)$$

Kde  $R$  je elektrický odpor modelu,  $R_e$  je vypočtený elektrický odpor.

$$C = \frac{C_e}{n} \quad (2)$$

Kde  $C$  je elektrická kapacita modelu,  $C_e$  je vypočtená kapacita.

Dalším je nesymetrický článek tvaru  $\Gamma$  *obr. 3.3*. Pro získání hodnot odporů a kapacit, vydělíme vypočtené hodnoty  $n$  - počtem  $\Gamma$ -členů (3) (4) [7].

Obr. 3.3 RC článek typu  $\Gamma$ 

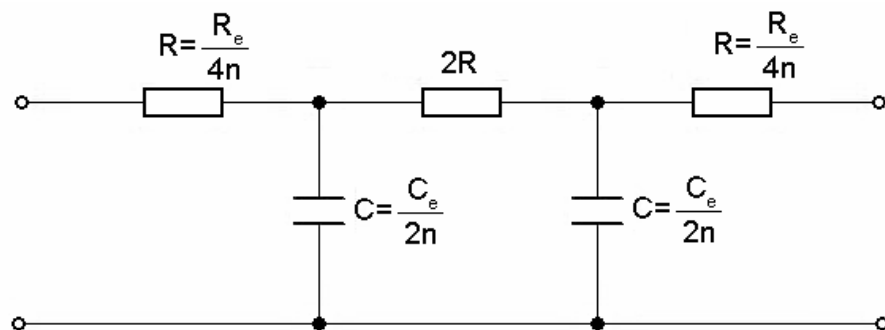
$$R = \frac{R_e}{n} \quad (3)$$

Kde  $R$  je elektrický odpor modelu,  $R_e$  je vypočtený elektrický odpor.

$$C = \frac{C_e}{n} \quad (4)$$

Kde  $C$  je elektrická kapacita modelu,  $C_e$  je vypočtená kapacita.

Posledním způsobem je sestavení  $\Pi$ -členu *obr. 3.4*. Obsahuje tři odpory a dvě kapacity spočtené dle rovnic (5) a (6) [7].

Obr. 3.4 RC článek typu  $\Pi$ 

$$R = \frac{R_e}{4n} \quad (5)$$

Kde  $R$  je elektrický odpor modelu,  $R_e$  je vypočtený elektrický odpor.

$$C = \frac{C_e}{2n} \quad (6)$$

Kde  $C$  je elektrická kapacita modelu,  $C_e$  je vypočtená kapacita.



## 4 Návrh elektrotepelného modelu

Elektrický model je určen pro získání průběhů teplot ve stěně šachtové žíhací pece. Konkrétně je řešen průchod tepla víkem pece. V této kapitole dojde k uplatnění teorií, analogií a teoretických výpočtů z kapitol předchozích. Výsledkem pak bude fyzický model pro laboratorní účely.

### 4.1 Výpočet parametrů elektrotepelného modelu

Výpočet je prováděn za předpokladu, kdy počáteční teploty vyzdivek jsou shodné s teplotou okolí 20°C. Určíme rozložení teplot  $\vartheta_2$ ,  $\vartheta_3$  a  $\vartheta_4$  na styčných plochách vyzdivek, hodnoty odporů a kapacit a napájecí stejnosměrné napětí.

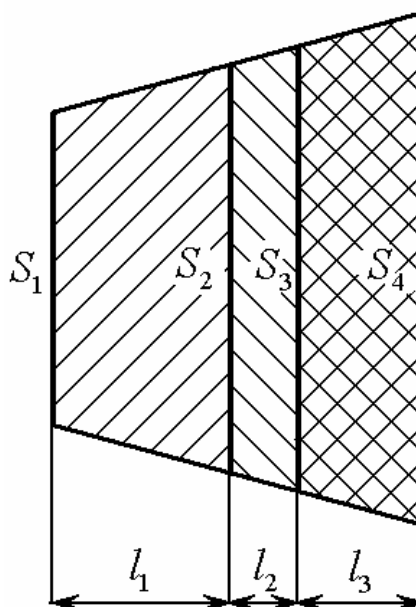
Pec je provozována při teplotě uvnitř pece  $\vartheta_1 = 640^\circ\text{C}$ . Požadavkem pro vnější plášť pece je teplota  $\vartheta_5 = 20^\circ\text{C}$ . Šachtová žíhací pec má víko složené ze tří vrstev různých materiálů. První vyzdívka je z lehčeného šamotu SL II, druhá je z termalitu T a třetí je ze struskové vlny. Šamot dobře odolává vysokým teplotám, ale bylo by neekonomické, aby byla stěna zhotovena pouze z něj. Je třeba vhodně doplnit o další plášť. Tyto vrstvy snesou nižší teplotu než šamot. Proto na přechodu dvou materiálů musí být teplota snesitelná pro následující materiál.

Hodnoty použitých materiálů jsou zaneseny v tabulce *tab.4.1*. Tabulka uvádí hodnoty součinitele tepelné vodivosti a měrné tepelné kapacity vztažených na stupně Celsia. Měřítka jsou volena  $\mu_p = 31^0\text{C/V}$ ,  $\mu_p = 10^8\text{W/A}$ ,  $\mu_t = 0,5\text{h/s}$ .

Tab. 4.1 Parametry vyzdivek

veličina	šamot SL II		termalit T		strusková vlna	
souč. tepelné vodivosti $\lambda$ [W/m °C]	$\lambda_1$	0,47	$\lambda_2$	0,157	$\lambda_3$	0,058
měrná tepelná kapacita $c$ [J/kg °C]	$c_1$	988,1	$c_2$	921,1	$c_3$	858,3
měrná hmota $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_1$	1100	$\rho_2$	500	$\rho_3$	185
tloušťka $l$ [m]	$l_1$	0,215	$l_2$	0,075	$l_3$	0,14

Geometrický tvar řezu víka *obr. 4.1* není obdélník, ale pravidelný lichoběžník rozevírající se od středu k vnějšku pece. Těsně na sebe přiléhající plochy vrstev se tedy od středu zvětšují:  $S_1 = 1,67\text{ m}^2$ ,  $S_2 = 3,67\text{ m}^2$ ,  $S_3 = 4,57\text{ m}^2$ ,  $S_4 = 6,2\text{ m}^2$ .



Obr. 4.1 Řez stěny

Proto zavedeme střední plochy vyzdívek a celý výpočet tak zjednodušíme na známý obdélníkový tvar řezu:

$$S_I = \sqrt{S_1 \cdot S_2} = \sqrt{1,67 \cdot 3,67} = 2,48 \text{ m}^2 \quad (1)$$

Kde  $S_I$  je střední plocha vrstev,  $S_1$  a  $S_2$  plochy vrstev. Jednotky jsou  $\text{m}^2$  - metry čtvereční.

$$S_{II} = \sqrt{S_2 \cdot S_3} = \sqrt{3,67 \cdot 4,57} = 4,1 \text{ m}^2 \quad (2)$$

Kde  $S_{II}$  je střední plocha vrstev,  $S_2$  a  $S_3$  plochy vrstev. Jednotky jsou  $\text{m}^2$  - metry čtvereční.

$$S_{III} = \sqrt{S_3 \cdot S_4} = \sqrt{4,57 \cdot 6,2} = 5,32 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Kde  $S_{III}$  je střední plocha vrstev,  $S_3$  a  $S_4$  plochy vrstev. Jednotky jsou  $\text{m}^2$  - metry čtvereční.

Tepelný tok  $P$  (tepelné ztráty):

$$P = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_5}{\frac{l_1}{\lambda_1 \cdot S_I} + \frac{l_2}{\lambda_2 \cdot S_{II}} + \frac{l_3}{\lambda_3 \cdot S_{III}} + \frac{1}{\alpha \cdot S_4}} [\text{W}] \quad (4)$$

Kde  $P$  je tepelný tok,  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_5$  jsou teploty,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  jsou tloušťky vrstev,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  jsou součinitelé tepelné vodivosti,  $S_I$ ,  $S_{II}$ ,  $S_{III}$  jsou střední plochy vrstev,  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla,  $S_4$  je plocha vrstvy. Jednotky jsou W – watt.

$$P = \frac{640 - 20}{\frac{0,215}{0,47.2,48} + \frac{0,075}{0,157.4,1} + \frac{0,14}{0,058.5,32} + \frac{1}{5,28.6,2}} = 789,37 \text{ W} \quad (5)$$

Kde  $P$  je tepelný tok. Jednotky jsou W – watt.

Nyní můžeme zjistit zbylé teploty na okrajích vrstev  $\vartheta_2 - \vartheta_4$ :

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 - P \cdot \frac{l_1}{\lambda_1 \cdot S_I} = 640 - 789,37 \cdot \frac{0,215}{0,47.2,48} = 494,14^\circ\text{C} \quad (6)$$

$\vartheta_2$  a  $\vartheta_1$  jsou teploty,  $P$  je tepelný tok,  $l_1$  je tloušťka vrstvy,  $\lambda_1$  je součinitel tepelné vodivosti,  $S_I$  je střední plocha vrstev. Jednotky jsou  $^\circ\text{C}$  - stupně celsia.

$$\vartheta_3 = \vartheta_2 - P \cdot \frac{l_2}{\lambda_2 \cdot S_{II}} = 494,14 - 789,37 \cdot \frac{0,075}{0,157.4,1} = 402,07^\circ\text{C} \quad (7)$$

$\vartheta_3$  a  $\vartheta_2$  jsou teploty,  $P$  je tepelný tok,  $l_2$  je tloušťka vrstvy,  $\lambda_2$  je součinitel tepelné vodivosti,  $S_{II}$  je střední plocha vrstev. Jednotky jsou  $^\circ\text{C}$  - stupně celsia.

$$\vartheta_4 = \vartheta_3 - P \cdot \frac{l_3}{\lambda_3 \cdot S_{III}} = 402,07 - 789,37 \cdot \frac{0,14}{0,058.5,32} = 44,11^\circ\text{C} \quad (8)$$

$\vartheta_4$  a  $\vartheta_3$  jsou teploty,  $P$  je tepelný tok,  $l_3$  je tloušťka vrstvy,  $\lambda_3$  je součinitel tepelné vodivosti,  $S_{III}$  je střední plocha vrstev. Jednotky jsou  $^\circ\text{C}$  - stupně celsia.

Výpočet měrných odporů:

$$R_{01} = \frac{\mu_p}{\mu_\vartheta} \cdot \frac{1}{\lambda_1 \cdot S_I} = \frac{10^8}{31} \cdot \frac{1}{0,47.2,48} = 2,77 \frac{\text{M}\Omega}{\text{m}} \quad (9)$$

Kde  $R_{01}$  je měrný elektrický odpor,  $\mu_p$  je poměr tepelného toku a elektrického proudu,  $\mu_\vartheta$  je poměr rozdílu teplot a napětí,  $\lambda_1$  je součinitel tepelné vodivosti,  $S_I$  je střední plocha vrstev. Jednotky jsou  $\text{M}\Omega$  - megaohm, m – metr.

$$R_{02} = \frac{\mu_p}{\mu_\vartheta} \cdot \frac{1}{\lambda_2 \cdot S_{II}} = \frac{10^8}{31} \cdot \frac{1}{0,157.4,1} = 5,02 \frac{\text{M}\Omega}{\text{m}} \quad (10)$$

Kde  $R_{02}$  je měrný elektrický odpor,  $\mu_p$  je poměr tepelného toku a elektrického proudu,  $\mu_\vartheta$  je poměr rozdílu teplot a napětí,  $\lambda_2$  je součinitel tepelné vodivosti,  $S_{II}$  je střední plocha vrstev. Jednotky jsou  $\text{M}\Omega$  - megaohm, m – metr.

$$R_{03} = \frac{\mu_p}{\mu_v} \cdot \frac{1}{\lambda_3 \cdot S_{III}} = \frac{10^8}{31} \cdot \frac{1}{0,058.5,32} = 10,45 \frac{\text{M}\Omega}{\text{m}} \quad (11)$$

Kde  $R_{03}$  je měrný elektrický odpor,  $\mu_p$  je poměr tepelného toku a elektrického proudu,  $\mu_v$  je poměr rozdílu teplot a napětí,  $\lambda_3$  je součinitel tepelné vodivosti,  $S_{III}$  je střední plocha vrstev. Jednotky jsou  $\text{M}\Omega$  - megaohm, m – metr.

Výpočet elektrických odporů modelu:

$$R_1 = R_{01} \cdot l_1 = 2772,36.0,215 = 596,06 \text{ k}\Omega \quad (12)$$

Kde  $R_1$  je elektrický odpor,  $R_{01}$  je měrný elektrický odpor,  $l_1$  je tloušťka vrstvy. Jednotky jsou  $\text{k}\Omega$  – kilo-ohm.

$$R_2 = R_{02} \cdot l_2 = 5017,04.0,075 = 376,28 \text{ k}\Omega \quad (13)$$

Kde  $R_2$  je elektrický odpor,  $R_{02}$  je měrný elektrický odpor,  $l_2$  je tloušťka vrstvy. Jednotky jsou  $\text{k}\Omega$  – kilo-ohm.

$$R_3 = R_{03} \cdot l_3 = 10448,56.0,14 = 1462,8 \text{ k}\Omega \quad (14)$$

Kde  $R_3$  je elektrický odpor,  $R_{03}$  je měrný elektrický odpor,  $l_3$  je tloušťka vrstvy. Jednotky jsou  $\text{k}\Omega$  – kilo-ohm.

$$R_\alpha = \frac{\mu_p}{\mu_v} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot S_4} = \frac{10^8}{31} \cdot \frac{1}{5,28.6,2} = 98,54 \text{ k}\Omega \quad (15)$$

Kde  $R_\alpha$  je elektrický odpor,  $\mu_p$  je poměr tepelného toku a elektrického proudu,  $\mu_v$  je poměr rozdílu teplot a napětí,  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla,  $S_4$  je plocha vrstvy. Jednotky jsou  $\text{k}\Omega$  – kilo-ohm.

Teplotní vodivost:

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{c_1 \cdot \rho_1} \cdot 3600 = \frac{0,47}{988,1.1100} \cdot 3600 = 1,557 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \quad (16)$$

Kde  $a_1$  je teplotní vodivost,  $\lambda_1$  je součinitel tepelné vodivosti,  $c_1$  je měrná tepelná kapacita,  $\rho_1$  je měrná hmota. Jednotky jsou  $\text{m}^2$  - metry čtvereční, h – hodiny.

$$a_2 = \frac{\lambda_2}{c_2 \cdot \rho_2} \cdot 3600 = \frac{0,157}{921,1.500} \cdot 3600 = 1,227 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \quad (17)$$

Kde  $a_2$  je teplotní vodivost,  $\lambda_2$  je součinitel tepelné vodivosti,  $c_2$  je měrná tepelná kapacita,  $\rho_2$  je měrná hmota. Jednotky jsou  $\text{m}^2$  - metry čtvereční, h – hodiny.

$$a_3 = \frac{\lambda_3}{c_3 \cdot \rho_3} \cdot 3600 = \frac{0,058}{858,3 \cdot 185} \cdot 3600 = 1,315 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \quad (18)$$

Kde  $a_3$  je teplotní vodivost,  $\lambda_3$  je součinitel tepelné vodivosti,  $c_3$  je měrná tepelná kapacita,  $\rho_3$  je měrná hmota. Jednotky jsou  $\text{m}^2$  - metry čtvereční, h – hodiny.

Výpočet měrných kapacit:

$$C_{01} = \frac{1}{a_1 \cdot \mu_t R_{01}} = \frac{1}{1,557 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 2,77 \cdot 10^6} = 4,63419 \cdot 10^{-4} F = 463,42 \frac{\mu F}{\text{m}} \quad (19)$$

Kde  $C_{01}$  je měrná elektrická kapacita,  $a_1$  je teplotní vodivost první vrstvy,  $\mu_t$  je poměr doby trvání průchodu tepla stěnou a doby průběhu napětí na modelu,  $R_{01}$  měrný elektrický odpor. Jednotky jsou  $\mu F$  – mikrofarad, m – metr.

$$C_{02} = \frac{1}{a_2 \cdot \mu_t R_{02}} = \frac{1}{1,227 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 5,02 \cdot 10^6} = 3,24831 \cdot 10^{-4} F = 324,83 \frac{\mu F}{\text{m}} \quad (20)$$

Kde  $C_{02}$  je měrná elektrická kapacita,  $a_2$  je teplotní vodivost druhé vrstvy,  $\mu_t$  je poměr doby trvání průchodu tepla stěnou a doby průběhu napětí na modelu,  $R_{02}$  měrný elektrický odpor. Jednotky jsou  $\mu F$  – mikrofarad, m – metr.

$$C_{03} = \frac{1}{a_3 \cdot \mu_t R_{03}} = \frac{1}{1,315 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 10,45 \cdot 10^6} = 1,45564 \cdot 10^{-4} F = 145,56 \frac{\mu F}{\text{m}} \quad (21)$$

Kde  $C_{03}$  je měrná elektrická kapacita,  $a_3$  je teplotní vodivost třetí vrstvy,  $\mu_t$  je poměr doby trvání průchodu tepla stěnou a doby průběhu napětí na modelu,  $R_{03}$  měrný elektrický odpor. Jednotky jsou  $\mu F$  – mikrofarad, m – metr.

Reálné kapacity modelu:

$$C_1 = C_{01} \cdot l_1 = 463,42 \cdot 0,215 = 99,64 \mu F \quad (22)$$

Kde  $C_1$  je elektrická kapacita,  $C_{01}$  je měrná elektrická kapacita,  $l_1$  je tloušťka vrstvy. Jednotky jsou  $\mu F$  – mikrofarad.

$$C_2 = C_{02} \cdot l_2 = 324,83 \cdot 0,075 = 24,36 \mu F \quad (23)$$

Kde  $C_2$  je elektrická kapacita,  $C_{02}$  je měrná elektrická kapacita,  $l_2$  je tloušťka vrstvy. Jednotky jsou  $\mu F$  – mikrofarad.

$$C_3 = C_{03} \cdot l_3 = 145,56 \cdot 0,14 = 20,38 \mu\text{F} \quad (24)$$

Kde  $C_3$  je elektrická kapacita,  $C_{03}$  je měrná elektrická kapacita,  $l_3$  je tloušťka vrstvy. Jednotky jsou  $\mu\text{F}$  – mikrofarad.

Výpočet napájecího napětí:

$$U = \frac{\Delta t}{\mu_{\vartheta}} = \frac{620}{31} = 20 \text{ V} \quad (25)$$

Kde  $U$  je elektrické napětí,  $\Delta t$  je rozdíl teplot,  $\mu_{\vartheta}$  je poměr pro přepočítání mezi teplotním rozdílem a elektrickým napětím. Jednotky jsou V – volt.

## 4.2 Realizace modelu

Pro každou vrstvu stěny je použit jeden T-člen. Model je zakončen vnějším odporem  $R_{\alpha}$ . Jelikož se jedná o T-články, je nutné výsledné odpory dělit dvěma (1), (2), (3).

$$R_{1/2} = \frac{R_1}{2} = \frac{596,06}{2} = 298 \text{ k}\Omega \quad (1)$$

Kde  $R_{1/2}$  je odpor jedné větve T – článku,  $R_1$  je vypočtený odpor. Jednotky jsou k $\Omega$  - kilo-ohm.

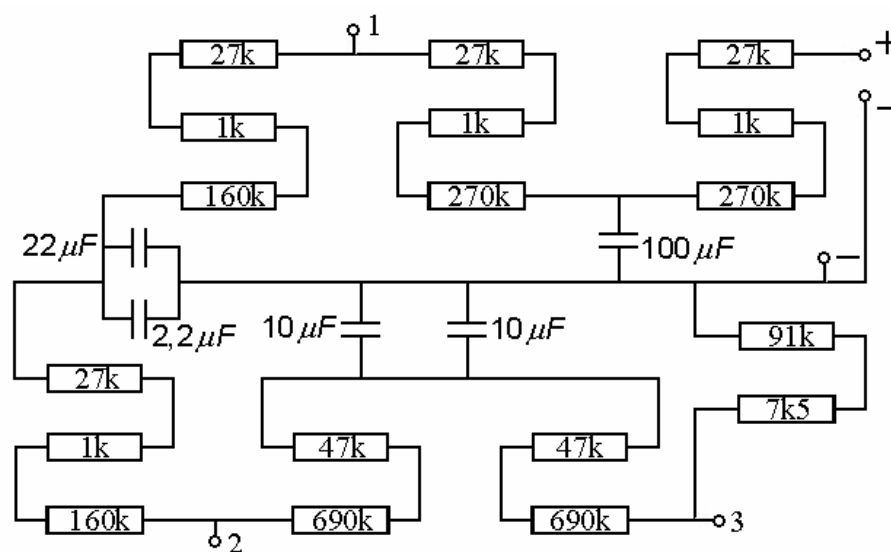
$$R_{2/2} = \frac{R_2}{2} = \frac{376,28}{2} = 188 \text{ k}\Omega \quad (2)$$

Kde  $R_{2/2}$  je odpor jedné větve T – článku,  $R_2$  je vypočtený odpor. Jednotky jsou k $\Omega$  - kilo-ohm.

$$R_{3/2} = \frac{R_3}{2} = \frac{1462,8}{2} = 731 \text{ k}\Omega \quad (3)$$

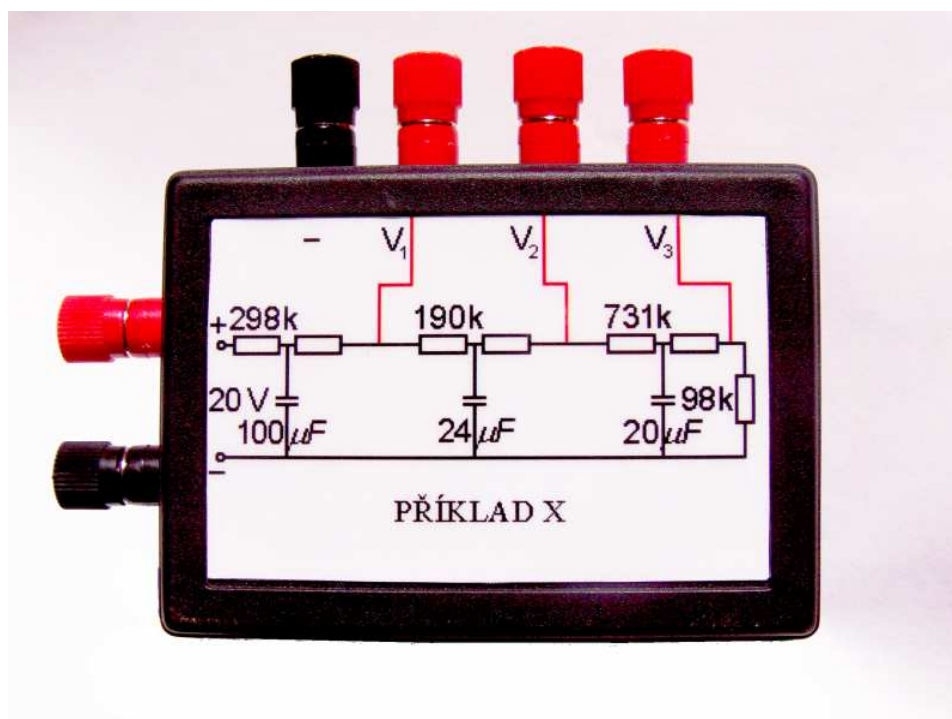
Kde  $R_{3/2}$  je odpor jedné větve T – článku,  $R_3$  je vypočtený odpor. Jednotky jsou k $\Omega$  - kilo-ohm.

Po přepočtení výkonové zátěže byly voleny elektrické součástky pro výkon do 0,4 W. Obrázek uspořádání na desce plošného spoje ze strany součástek je na obr. 4.2.

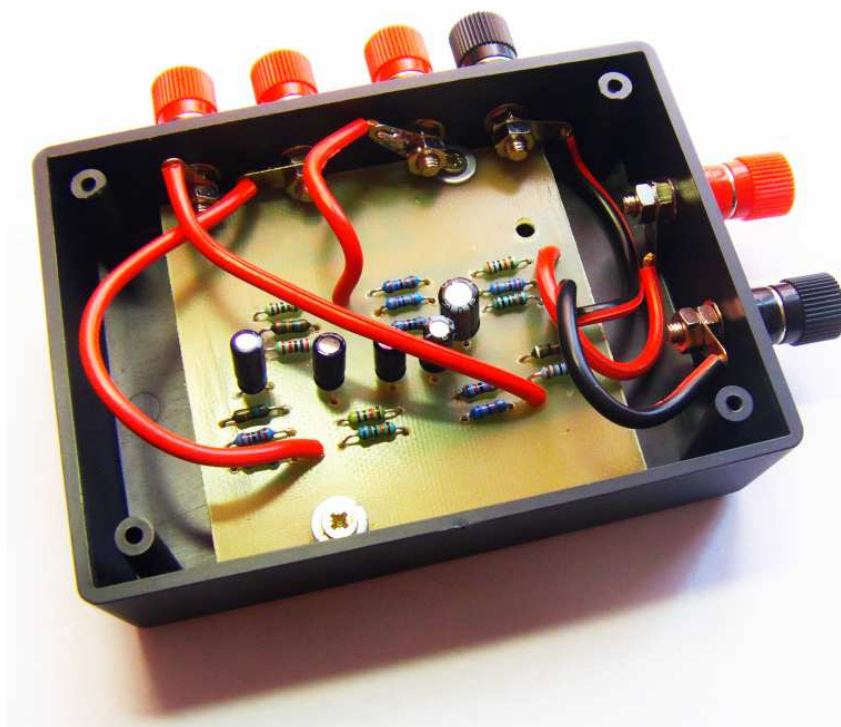


Obr. 4.2 Schéma zapojení obvodu na desce plošného spoje ze strany součástek. Vývody 1, 2, 3 a mínus vpravo uprostřed slouží k připojení ke svorkám za účelem měření. Vývody plus a mínus vpravo nahoře vedou na svorky napájení.

Model je navržen pro laboratorní účely. Jsou zde tedy vyvedeny svorky pro měření napětí po jednotlivých T-členech. Dále byl vyroben štítek na přední stranu pouzdra modelu pro rychlou představu, orientaci při měření a s označením úlohy obr. 4.3.



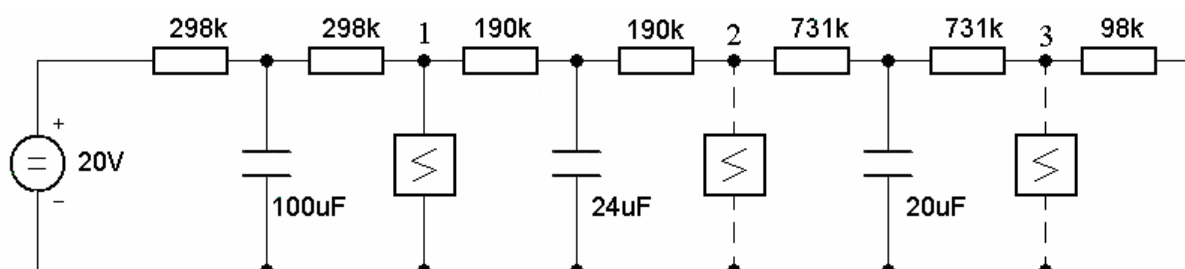
Obr. 4.3 Elektrotepelný model stěny šachtové žíhací pece s vývody pro napájení nalevo a vývody pro připojení záznamového zařízení nebo voltmetru.



Obr. 4.4 Pohled na vnitřní strukturu modelu.

### 4.3 Analýza modelu

Měření na modelu proběhlo v laboratořích Fakulty elektrotechnické na Západočeské univerzitě v Plzni. Jako záznamové zařízení pro průběhy dějů na modelu byl použit oscilograf. Schéma zapojení je uvedeno na obrázku obr. 4.5.



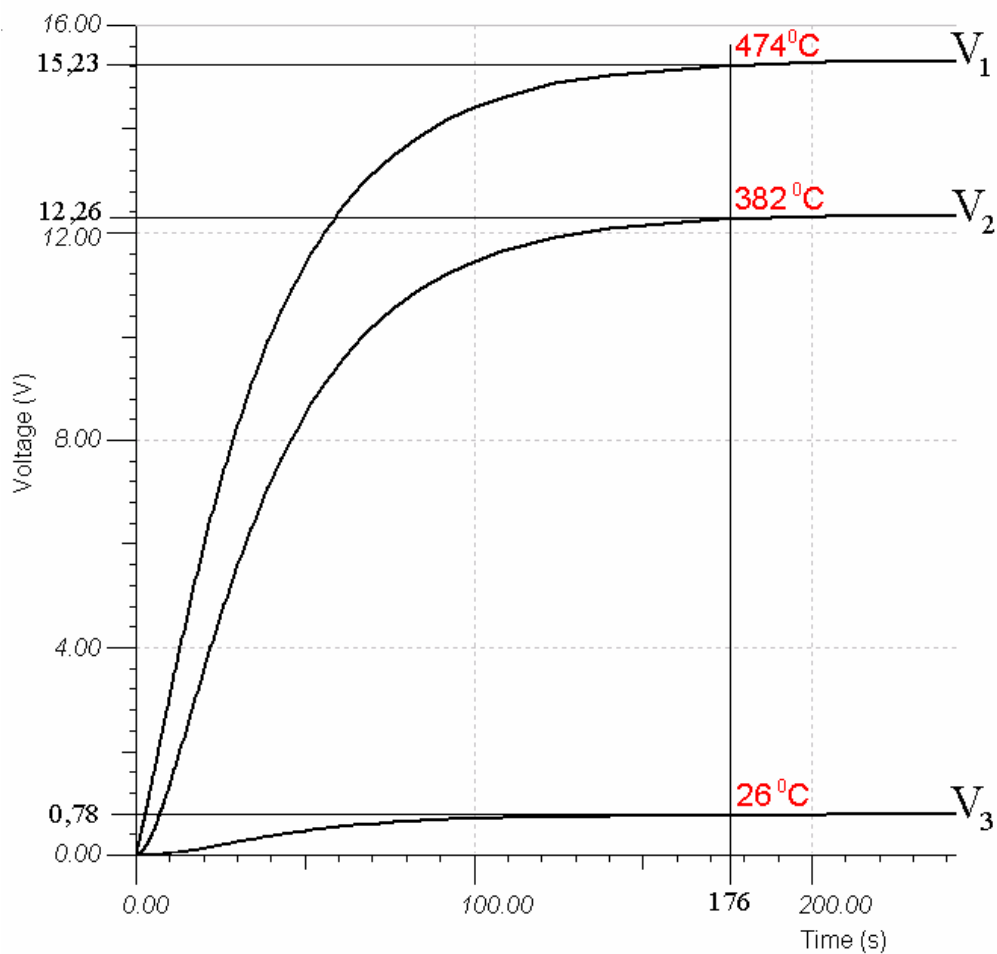
Obr. 4.5 Schéma zapojení modelu při měření napěťových charakteristik za jednotlivými T-členy. Jednotlivé RC členy oddělují uzly 1, 2, 3. Na obrázku je znázorněno zapojení měření za prvním T-členem (plná čára připojení oscilografu). Přerušované připojovací čáry představují následující druhé a třetí měření za druhým a třetím T-členem.

Nejprve je oscilograf připojen na svorku 1 a na záporný pól obvodu. Bude tak zapisovat průběh napětí ze prvním T – článkem. S připojením napětí se současně zapíná oscilograf,

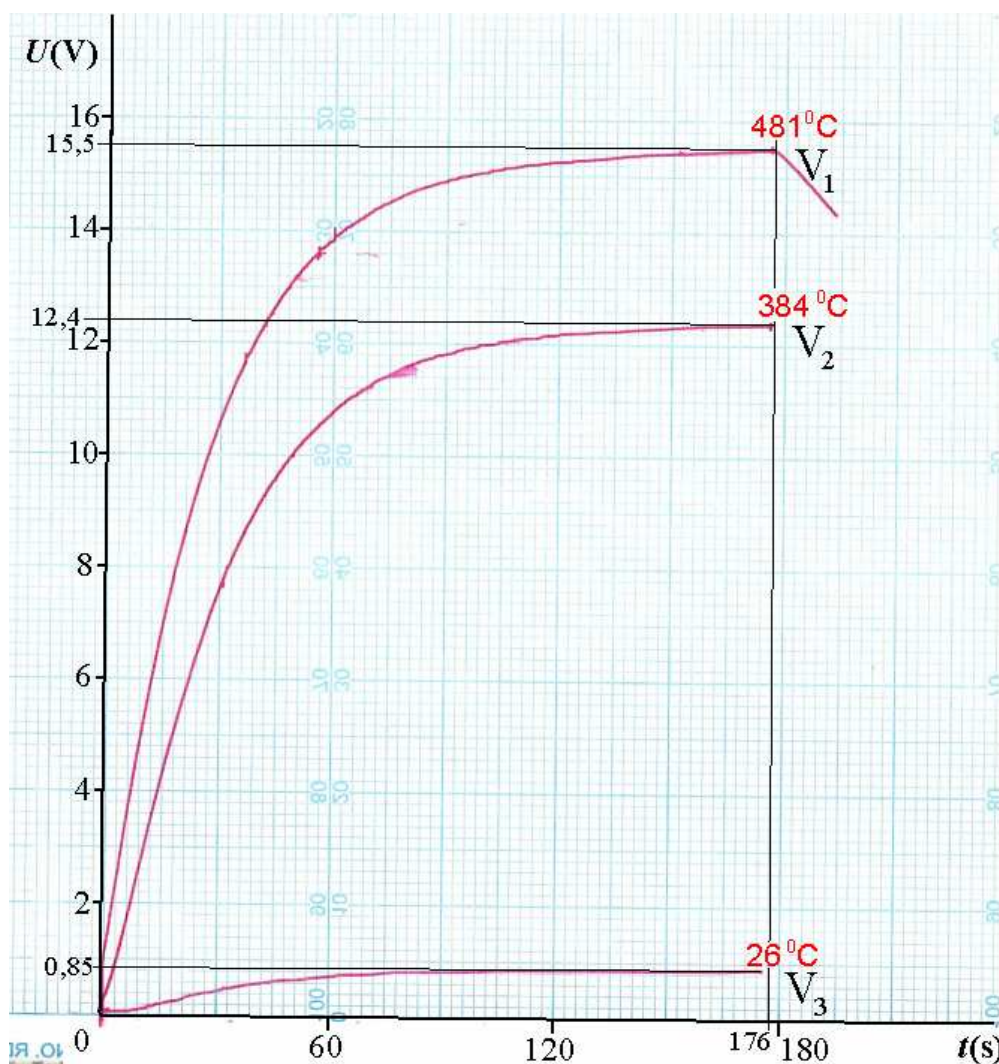


který začíná zapisovat na odvíjející se papír aktuální velikost napětí. Po třech minutách je měření na prvním členu hotové, protože je průběh dostatečně vykreslen.

Po vypnutí napájecího napětí je třeba vybit kapacitory, aby v nich nezůstalo žádné napětí. Navineme papír zpět a jehlu oscilografu posuneme na začátek prvního měření. Poté opakujeme měření s připojením kladného pólu oscilografu ke svorce 2 a dále ke svorce 3.



Obr. 4.6 Průběhy napětí v závislosti na čase změřené na modelu sestaveném v programu Tina. V čase  $t=176\text{s}$  jsou červeně znázorněny odpovídající teploty reálných vrstev pece.



Obr. 4.7 Průběhy napětí v závislosti na čase změřené na sestaveném modelu. V čase  $t=176s$  jsou červeně znázorněny odpovídající teploty reálných vrstev pece.

Vidíme, že průběhy jsou téměř totožné. Největším rozdílem je prudké navýšení napětí v oblasti za počátkem měření u reálného modelu na svorkách 1 a 2. Dále jsou pak průběhy téměř stejné. Minimálně se liší také hodnoty teplot určených téměř ve třech minutách obou měření. Model sestavený v programu Tina lze tedy považovat za věrný modelu reálnému.

Srovnáme-li oba způsoby simulace sdílení tepla vedením, je Tina mnohem méně časově náročná. Sestavení modelu v počítačovém prostředí trvá několik minut. Nastavení parametrů měření a měření samotné je ještě kratší. Lze zde poměrně snadno zasahovat do obvodu a měnit jeho parametry nebo odstraňovat chyby. Jsme schopni nastavit i okolní teplotu, což nám umožňuje simulaci prostředí, ve kterém je objekt umístěn. Fyzický model je pak vhodný hlavně jako laboratorní učební pomůcka.

## 5 Použití programu TINA

Program Tina od společnosti Designsoft je kompletní elektronická laboratoř pro PC. Využití tohoto programu v této problematice je velice příhodné. Pomocí Tiny jsme schopni nasimulovat a analyzovat jakýkoliv model sdílení tepla vedením, který je předem spočten.

### 5.1 Testování zapojení $\Gamma$ , T

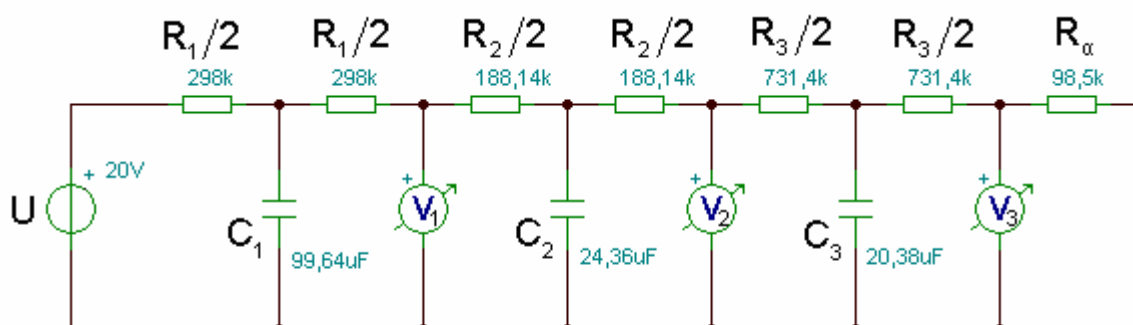
V této kapitole využijeme Tiny, pro její vysokou rychlost sestavování a úprav modelu. Provedeme testování obou typů RC členů. Dojde ke srovnání jednotlivých řešení z hlediska přesnosti, časové náročnosti přípravy a vlivu počtu členů  $n$  na jednu vrstvu.

Řešený případ je shodný s návrhem modelu z kapitoly 4. Výsledky velikosti napětí, rezistorů a kapacitorů jsou tedy vypočtené v kapitole 4.1.

#### 5.1.1 Zapojení T

Pod toto zapojení spadá i článek  $\Pi$ . Typ  $\Pi$  je tedy druhem T-článku. Použijeme-li na jednu vrstvu dva T-články, je to stejné jako bychom nahradili vrstvu jedním  $\Pi$ -článkem (v podstatě dva T-články v sérii). Každý sudý počet T-článků na vrstvu je tedy početně i realizačně shodný s odpovídajícím  $\Pi$ -článkem.

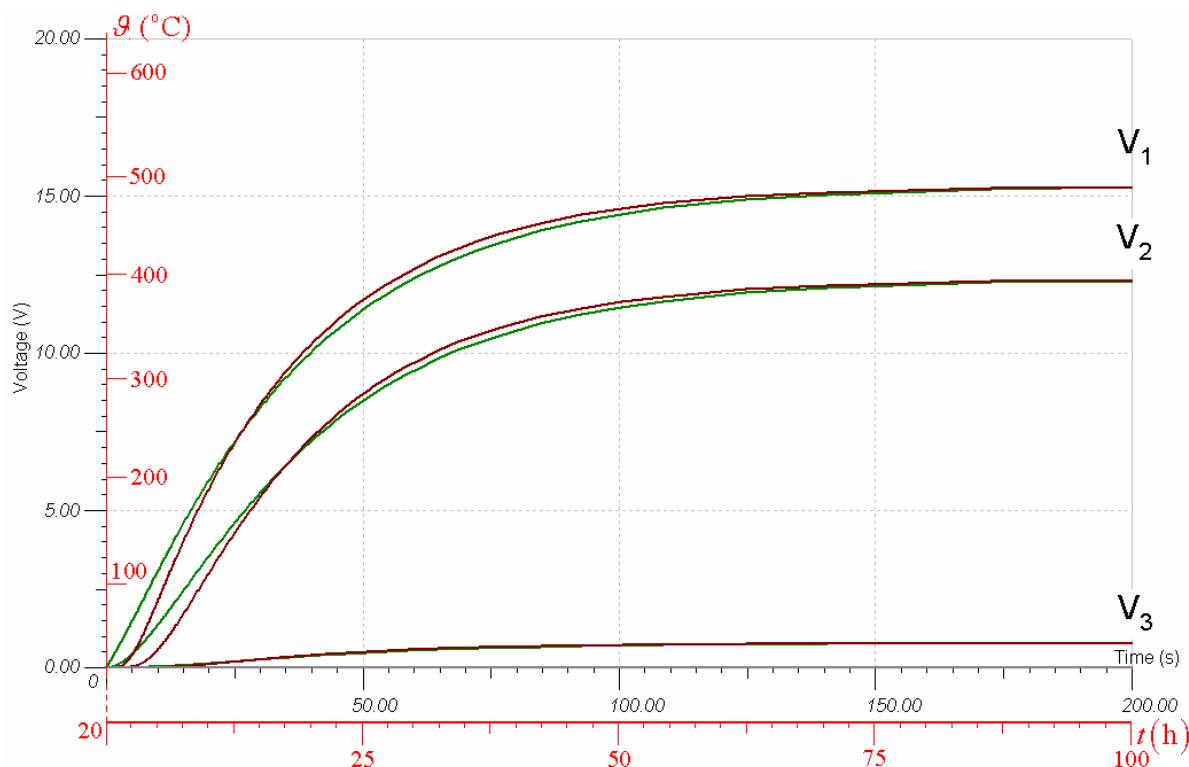
Prvním měřeným zapojením je obvod dle *obr. 5.1*. Je složen z jednoho T-členu na simulaci každé vrstvy.



Obr. 5.1 Schéma zapojení modelu stěny z T-článků pro  $n = 1$

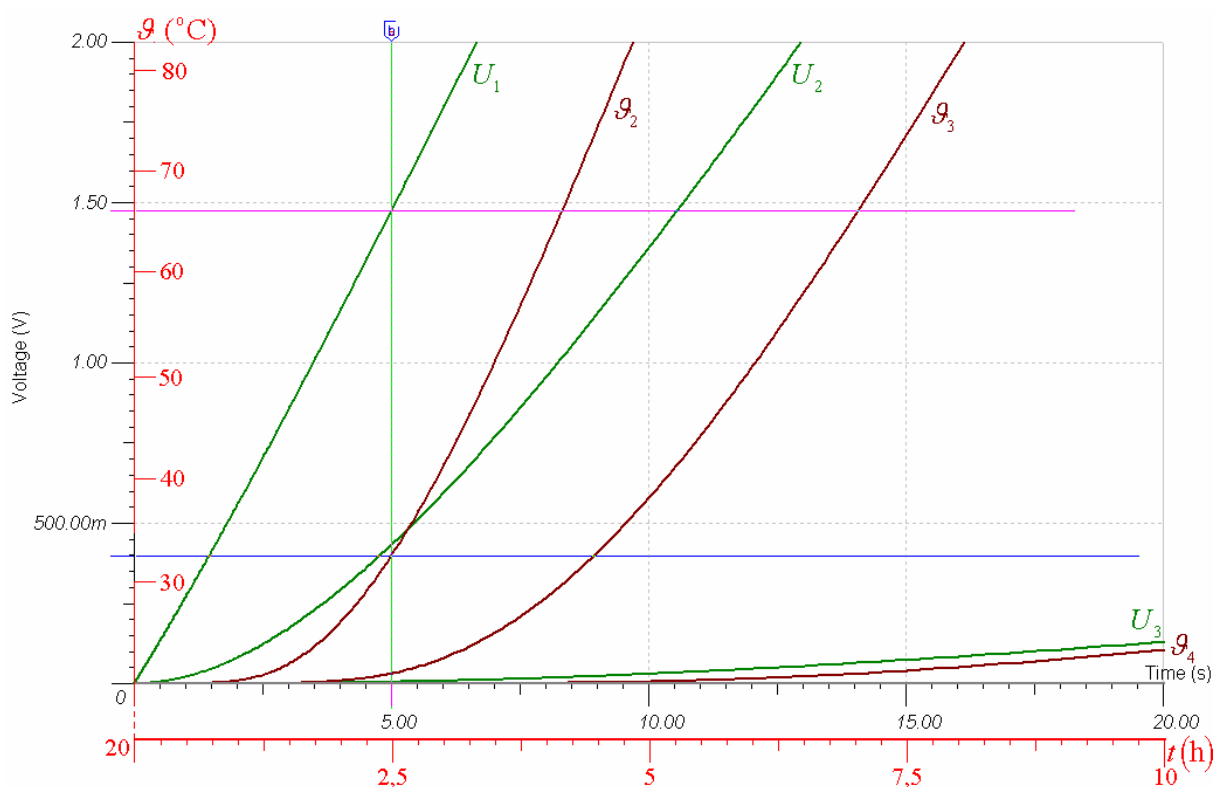
Simulace měření v programu trvá několik vteřin. Tina umožňuje zápis průběhů napětí měnicích se v čase. V laboratorních podmínkách bychom na současné zaznamenávání všech tří průběhů potřebovali tři oscilografy. Zápis hodnot z voltmetrů je uveden na *obr. 5.2*.

Obrázek má dva souřadné systémy. Černá osa y je napětí změřené na modelu, červená osa y je přepočítané napětí na stupně celsia dle měřítka (viz. kapitola 4.1). Červená osa vyjadřuje teplotní poměry uvnitř stěny. Počátek této osy začíná ve  $20^{\circ}\text{C}$ , což je počáteční teplota stěny. Podobně je černá osa x doba měření na modelu a červená osa x je přepočítaná doba pro průběh teplot stěnou modelu.



Obr. 5.2 Průběhy napětí změřené na třístěnném modelu sestaveném z T-členů. Počet členů na jednu vrstvu je  $n=1$ . Skutečný průběh tepla za každou vrstvu je znázorněn tmavě červenou barvou. Průběhy napětí na modelu jsou v grafu zeleně. Červený souřadný systém znázorňuje reálné hodnoty teplot měnících se ve stěně v závislosti na čase.

Z grafu obr.5.2. vyplývá, že největší odchylka od reálného průběhu nastává na počátku měření na voltmetrech  $V_1$  a  $V_2$ , kde je měřené napětí modelu vyšší než reálná hodnota. Dále pak v kolenní křivce je naopak napětí postupně nižší a přibližně po dvou a půl minutě dochází ke splynutí obou průběhů.

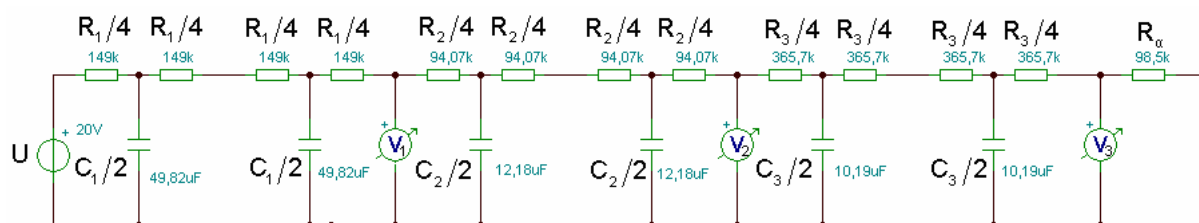


Obr. 5.3 Detail průběhu napětí změřeného na třístěnném modelu sestaveném z T-členů. Počet členů na jednu vrstvu je  $n = 1$ . Skutečný průběh tepla za každou vrstvou je znázorněn tmavě červenou barvou. Průběhy napětí na modelu jsou v grafu zeleně. Červený souřadný systém znázorňuje reálné hodnoty teplot měnících se ve stěně v závislosti na čase.

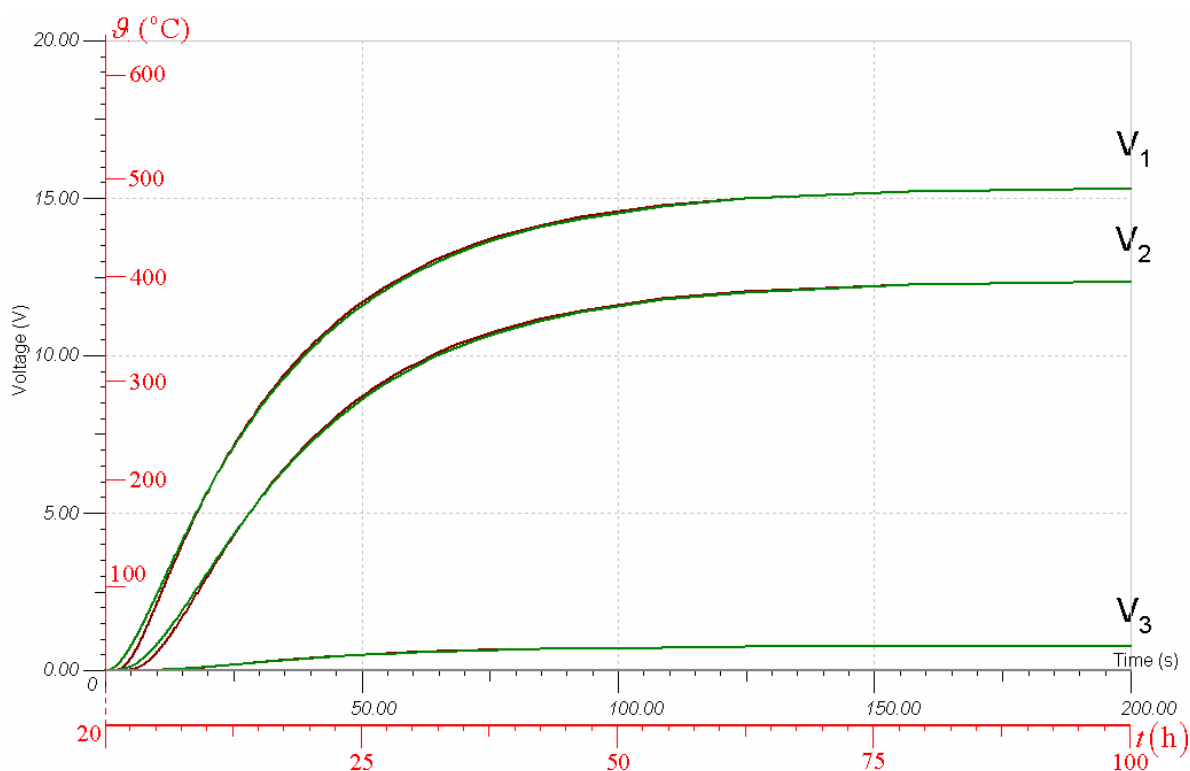
Z detailu obr. 5.3 je patrné, že charakter napětí  $U_1$  neodpovídá reálnému průběhu. Reálná teplota  $\vartheta_2$  (červeně) za první vrstvou se začíná zvyšovat až kolem jedné hodiny po začátku působení teploty. Podle tohoto modelu by teplota měla stoupat ihned při začátku působení teploty  $\vartheta_1 = 640^\circ\text{C}$ , což není pravda. Podobně je tomu s teplotou  $\vartheta_3$  a  $\vartheta_4$ .

Například zjištění teplot v čase 2,5h obr. 5.3 při ohřevu stěny je za první vrstvou teplota  $\vartheta_2 = 32,4^\circ\text{C}$ . Zelená křivka v tomtéž čase ukazuje téměř  $66^\circ\text{C}$ .

Obecně k největší nepřesnosti dochází za prvním T-členem. Čím dále od zdroje napětí jsou ostatní měřené úseky, tím je jejich odchylka od skutečnosti nižší.

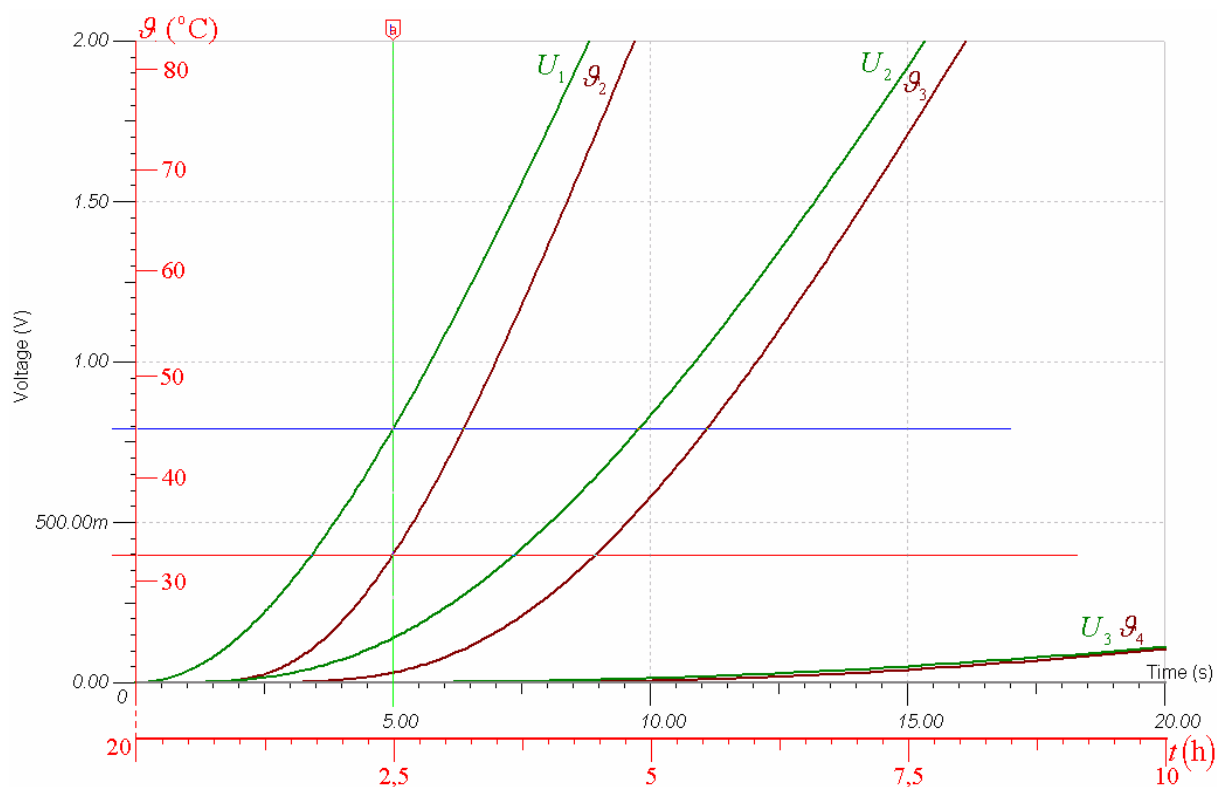
Obr. 5.4 Schéma zapojení modelu stěny z T-článků pro  $n=2$ 

Dále byl model sestaven pro  $n=2$ . Průběh napětí je znázorněn na obr. 5.5. Z grafu je patrné, že po přestavění modelu pro  $n=2$  došlo k velkému zlepšení a přiblížení se realitě. Menší odchylka je stále na počátku v prvních deseti hodinách.



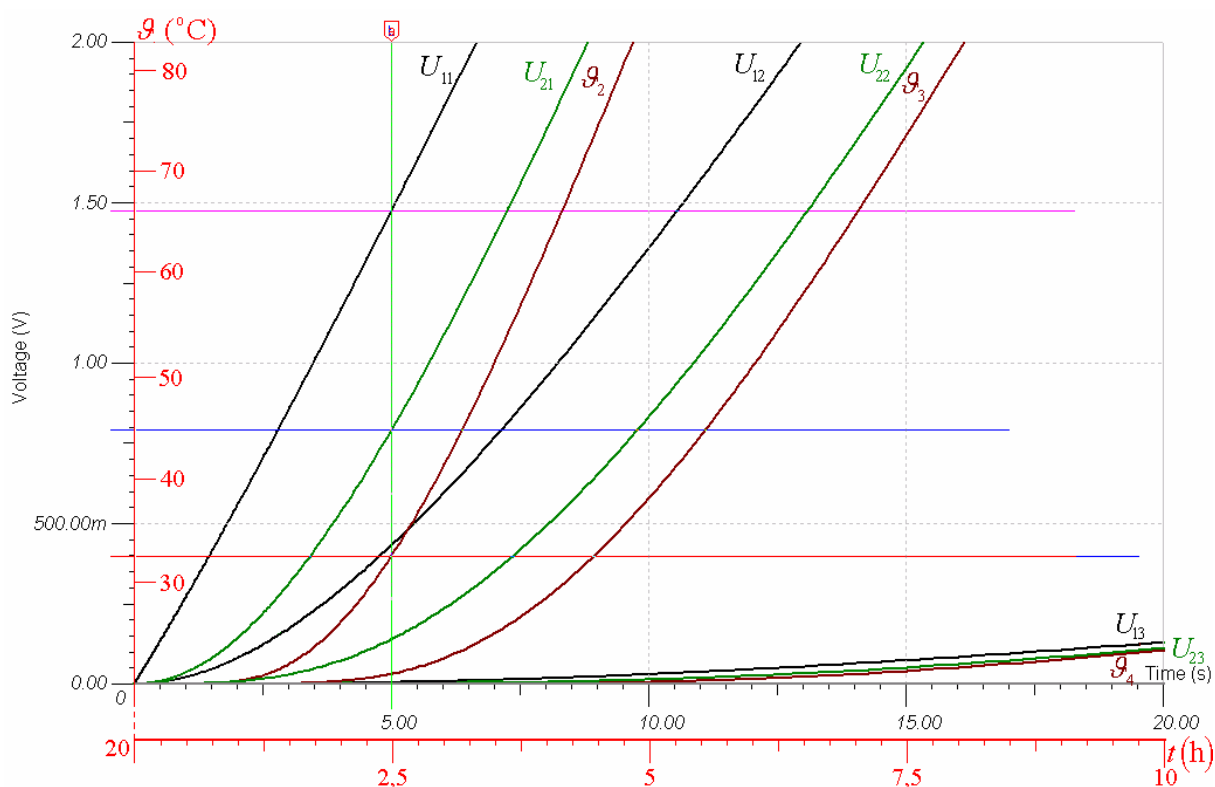
Obr. 5.5 Průběhy napětí změřené na třívrstevném modelu sestaveném z T-článků. Počet článků na jednu vrstvu je  $n=2$ . Skutečný průběh tepla za každou vrstvu je znázorněn tmavě červenou barvou. Průběhy napětí na modelu jsou v grafu zeleně. Červený souřadný systém znázorňuje reálné hodnoty teplot měnících se ve stěně v závislosti na čase.

Z detailu obr. 5.6. lze vyčíst podobný problém jako v případě pro  $n=1$ . I zde došlo k určitému zlepšení. Při 2,5 hodinách se teplota k realitě přiblížila na  $\vartheta_2 = 44,5^{\circ}\text{C}$ . Rozdíl se tedy snížil přibližně o  $22^{\circ}\text{C}$  obr. 5.7.



Obr. 5.6 Detail průběhu napětí změřeného na třívrstevném modelu sestaveném z T-členů. Počet členů na jednu vrstvu je  $n = 2$ . Skutečný průběh tepla za každou vrstvou je znázorněn tmavě červenou barvou. Průběhy napětí na modelu jsou v grafu zeleně. Červený souřadný systém znázorňuje reálné hodnoty teplot měnicích se ve stěně v závislosti na čase.

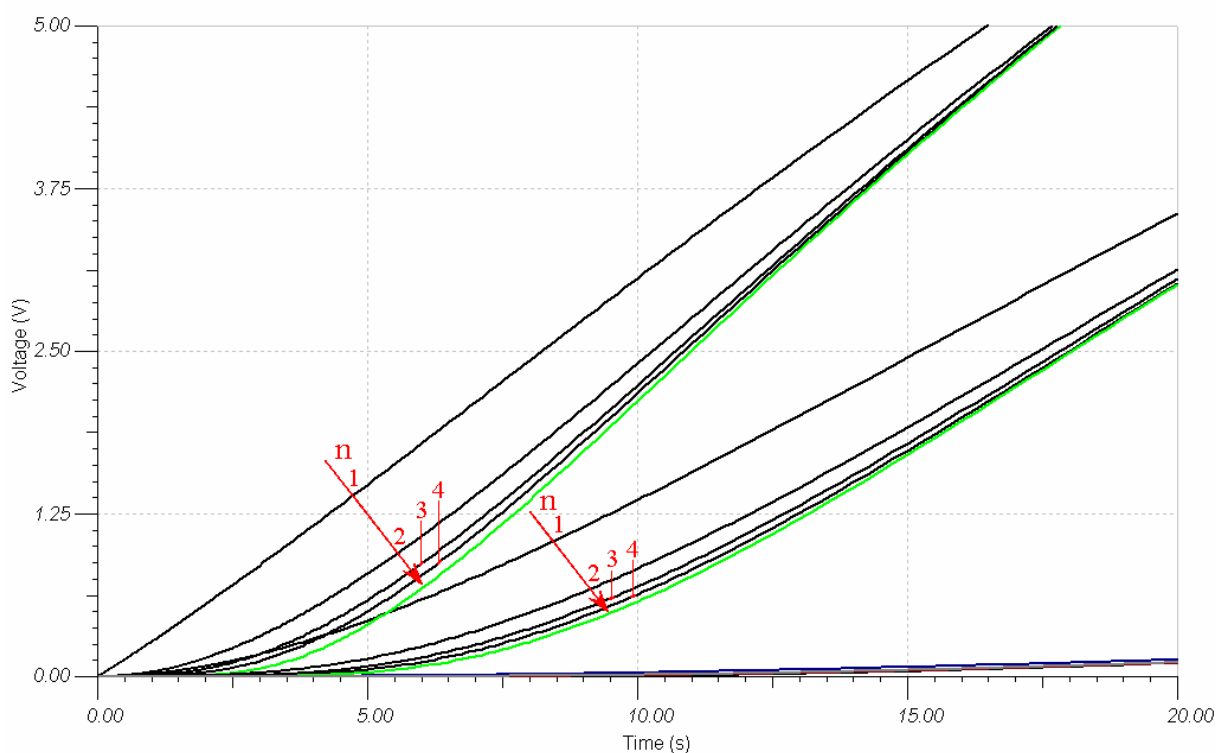
Tendence přibližování se reálnému průběhu při zvyšující se hodnotě  $n$  je znázorněna na obr. 5.7.



Obr. 5.7 Detail průběhů napětí změřeného na třístěnném modelu pro  $n=1$  černou barvou, pro  $n=2$  zeleně. Skutečný průběh tepla za každou vrstvou je znázorněn tmavě červenou barvou. Červený souřadný systém znázorňuje reálné hodnoty teplot měnících se ve stěně v závislosti na čase.

Obrázek obr. 5.8 znázorňuje zlepšující se tendenci průběhů při zvyšování  $n$ . Je zde uveden pouze detail, protože všechny články typu T se od reálného průběhu lišili pouze v tomto rozmezí času. Simulace měření bylo provedeno na člancích pro  $n=1, 2, 3, 4$ .

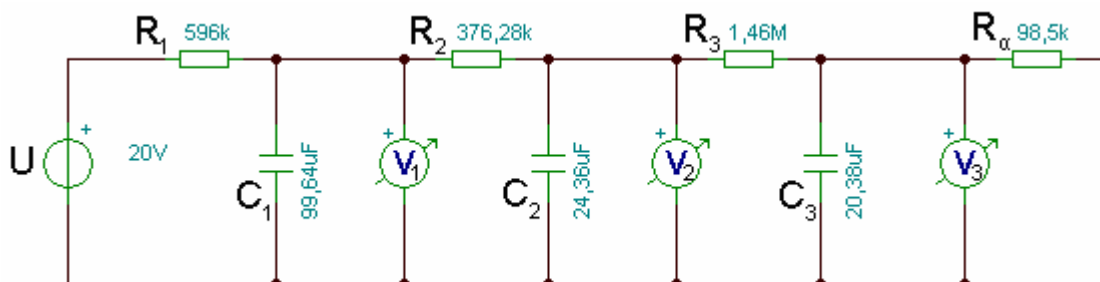




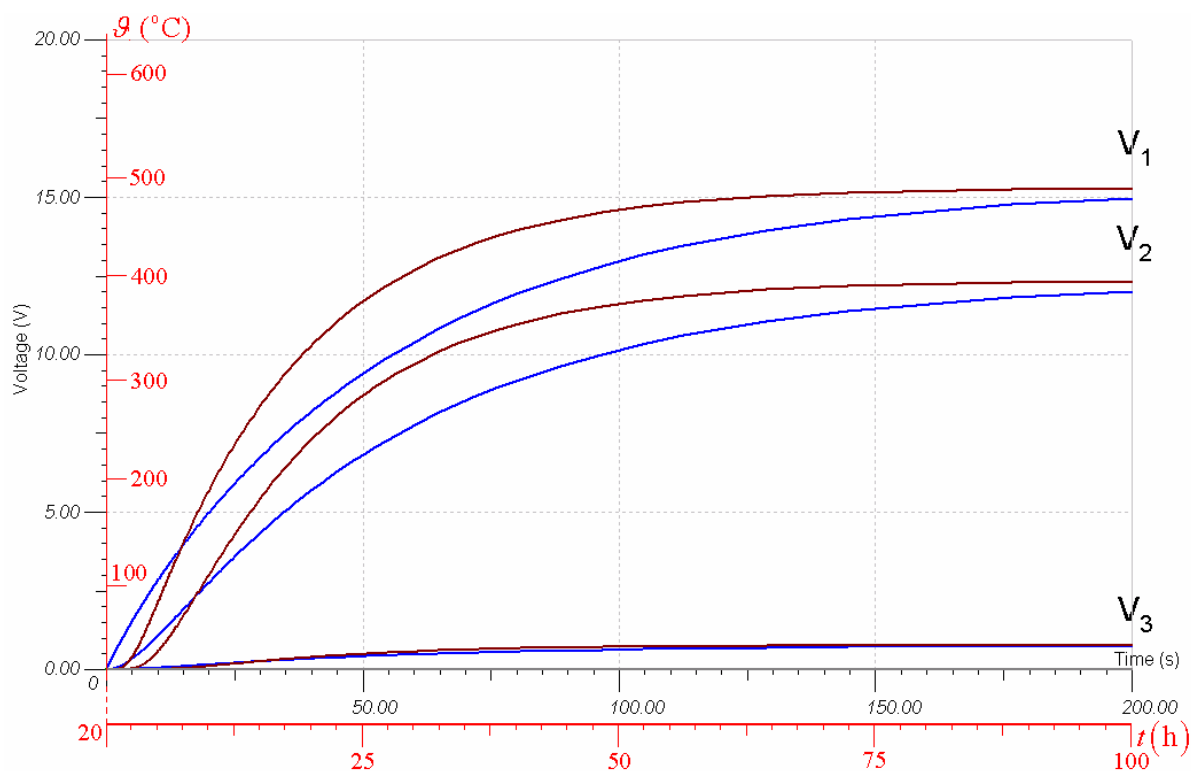
Obr. 5.8 Vliv počtu T-článků na simulaci jedné vrstvy stěny. Šipka naznačuje zvyšující se hodnotu  $n$ . Zeleně je znázorněn průběh reálných teplot.

### 5.1.2 Zapojení $\Gamma$

Toto zapojení je jednodušší. Nemíjí třeba přepočítávat odpory, ale pouze dělit počtem  $n$ . Schéma zapojení pro  $n=1$  je na obr. 5.9.

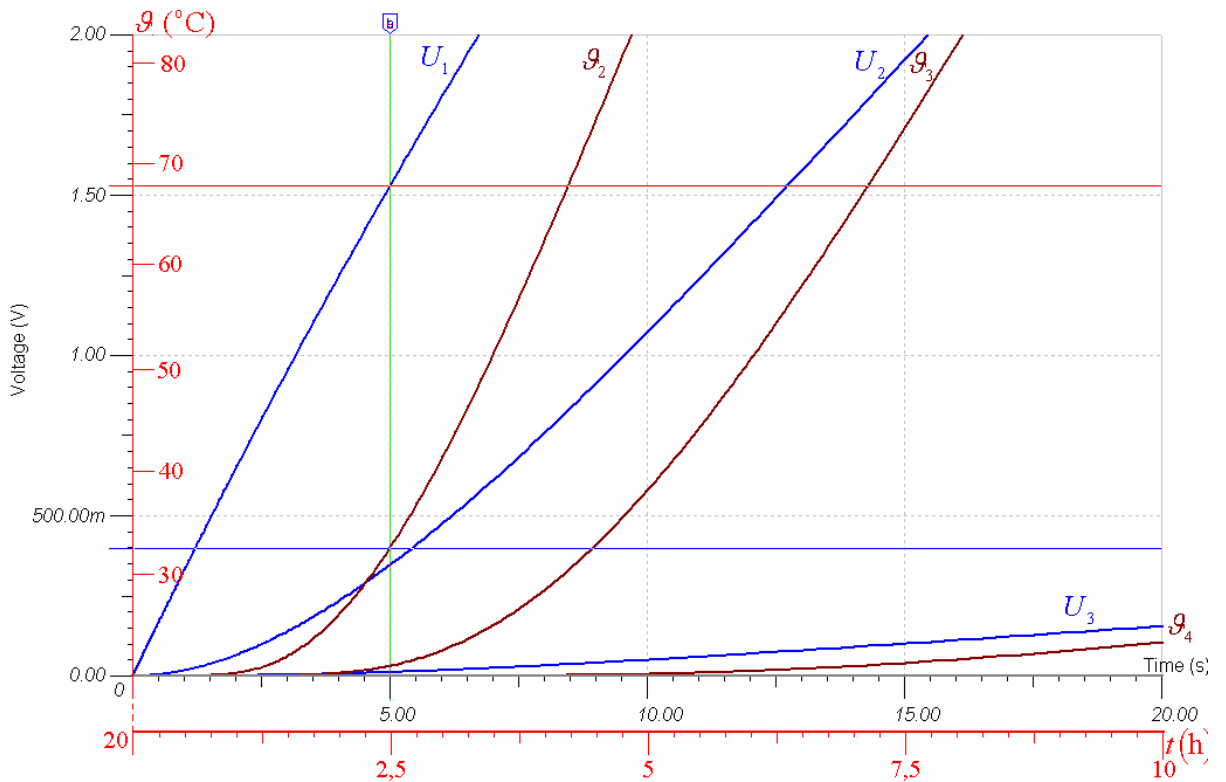


Obr. 5.9 Schéma zapojení modelu stěny z  $\Gamma$ -článků pro  $n=1$ .



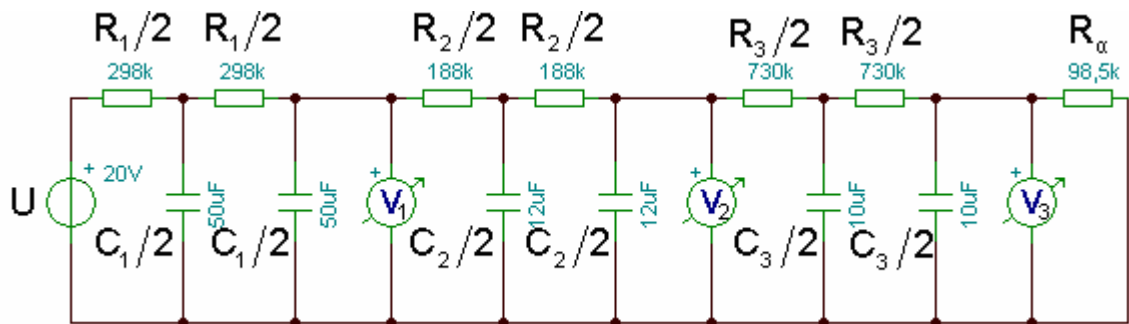
Obr. 5.10 Průběhy napětí změřené na třístěnném modelu sestaveném z  $\Gamma$ -členů. Počet členů na jednu vrstvu je  $n=1$ . Skutečný průběh tepla za každou vrstvou je znázorněn tmavě červenou barvou. Průběhy napětí na modelu jsou v grafu modře. Červený souřadný systém znázorňuje reálné hodnoty teplot měnících se ve stěně v závislosti na čase.

Z grafu obr. 5.10. je vidět, že podobně jako u zapojení T pro  $n=1$ , začíná křivka napětí stoupat hned zpočátku, což není pravdivé. Dále se křivka od desáté hodiny velmi rozchází od reálné hodnoty. V největší odchylce až o  $70^{\circ}\text{C}$ .

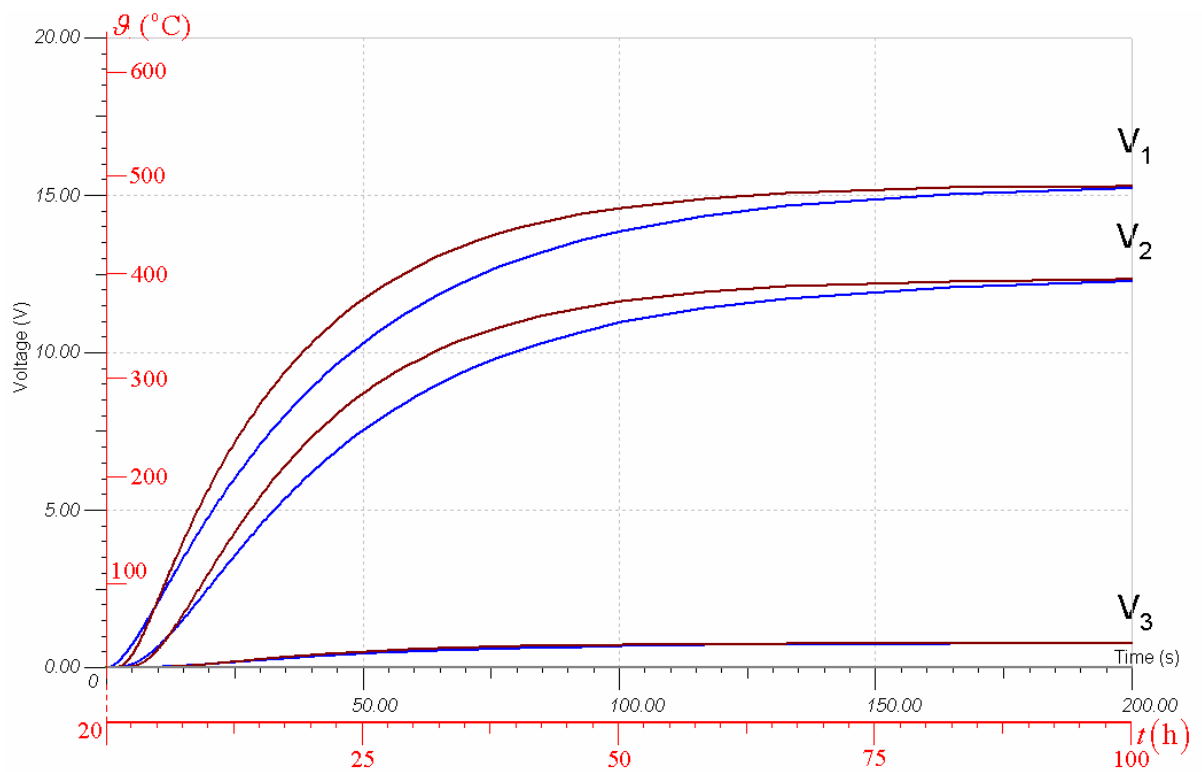


Obr. 5.11 Detail průběhu napětí změřeného na třístěnném modelu sestaveném z  $\Gamma$ -členů. Počet členů na jednu vrstvu je  $n=1$ . Skutečný průběh tepla za každou vrstvu je znázorněn tmavě červenou barvou. Průběhy napětí na modelu jsou v grafu modře. Červený souřadný systém znázorňuje reálné hodnoty teplot měnicích se ve stěně v závislosti na čase.

Zjištění teplot v čase 2,5h obr. 5.11 při ohřevu stěny je za první vrstvou teplota  $\vartheta_2 = 32,4^{\circ}\text{C}$ . Modrá křivka za prvním  $\Gamma$ -členem ukazuje téměř  $68^{\circ}\text{C}$ , což je  $35^{\circ}\text{C}$  rozdíl.

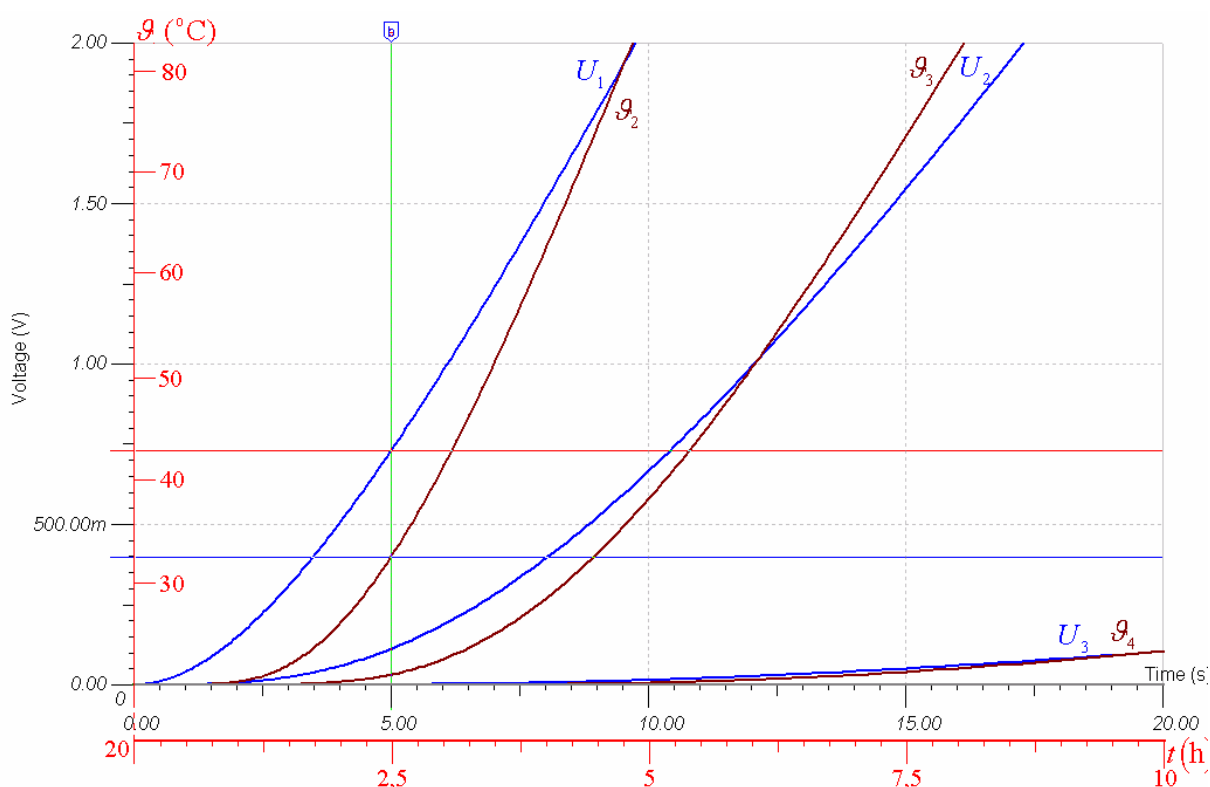


Obr. 5.12 Schéma zapojení modelu stěny z  $\Gamma$ -článků pro  $n=2$ .



Obr. 5.13 Průběhy napětí změřené na třístěnném modelu sestaveném z  $\Gamma$ -členů. Počet členů na jednu vrstvu je  $n=2$ . Skutečný průběh tepla za každou vrstvu je znázorněn tmavě červenou barvou. Průběhy napětí na modelu jsou v grafu modře. Červený souřadný systém znázorňuje reálné hodnoty teplot měnících se ve stěně v závislosti na čase.

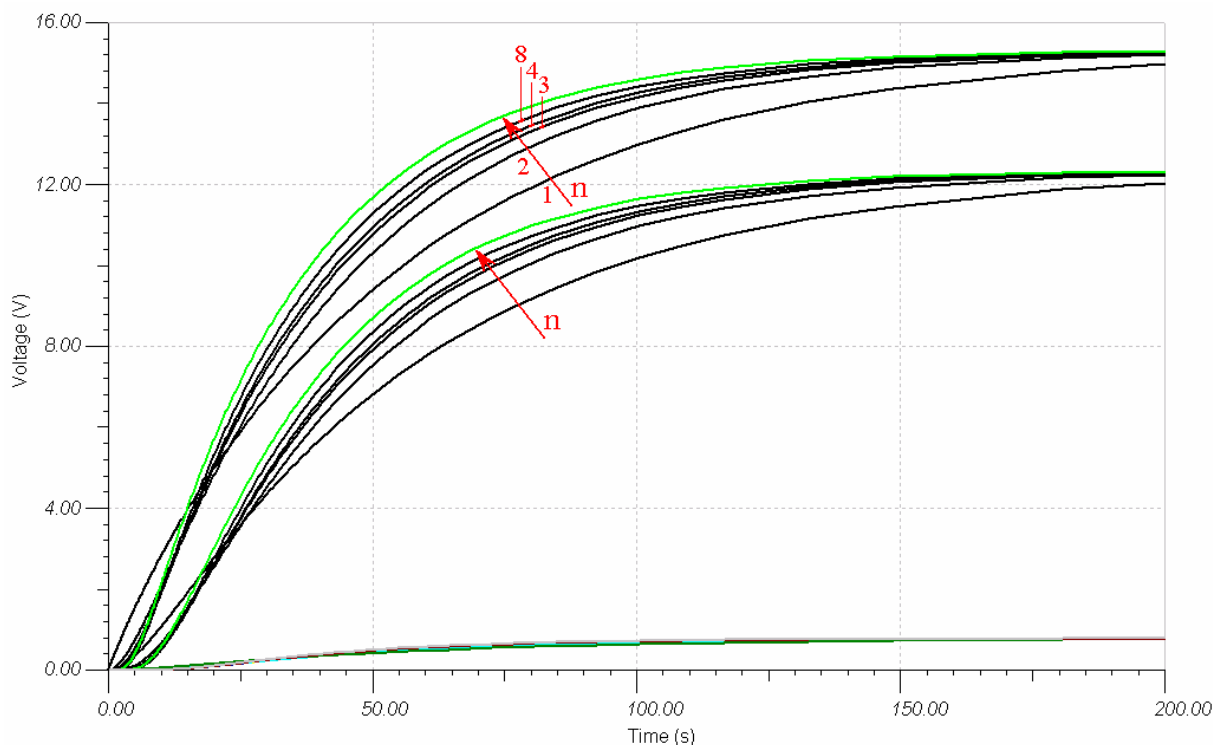
Z grafu obr. 5.13. je patrné zlepšení oproti zapojení pro  $n=1$ . Modrý průběh napětí za první vrstvou se znatelně přiblížila reálnému průběhu. Křivka se rozchází přibližně od šesté hodiny, kde v největší odchylce nabývá rozdíl přes  $30^{\circ}\text{C}$ .



Obr. 5.14 Detail průběhu napětí změřeného na třístěnném modelu sestaveném z  $\Gamma$ -členů. Počet členů na jednu vrstvu je  $n=2$ . Skutečný průběh tepla za každou vrstvou je znázorněn tmavě červenou barvou. Průběhy napětí na modelu jsou v grafu modře. Červený souřadný systém znázorňuje reálné hodnoty teplot měnících se ve stěně v závislosti na čase.

Teplota v čase 2,5h obr. 5.14 při ohřevu stěny je za první vrstvou  $\vartheta_2 = 32,4^{\circ}\text{C}$ . Modrá křivka za prvním  $\Gamma$ -členem ukazuje téměř  $42,4^{\circ}\text{C}$ , což je  $10^{\circ}\text{C}$  rozdíl. Oproti předchozímu zapojení je to tedy velké zlepšení.

Obrázek obr. 5.15 znázorňuje zlepšující se tendenci průběhů při zvyšování  $n$ . Simulace měření bylo provedeno na člancích pro  $n=1, 2, 3, 4$  a  $8$ .



Obr. 5.15 Vliv počtu  $\Gamma$ -článků na simulaci jedné vrstvy stěny. Šipka naznačuje zvyšující se hodnotu  $n$ . Zeleně je znázorněn průběh reálných teplot.

### 5.1.3 Srovnání

Věrnější průběh teplot umožňuje jednoznačně T-článek. První model sestavený z jednoho článku ( $n=1$ ), ukazuje průběh za první vrstvou kolem desáté hodiny ohřevu shodný s reálným průběhem teploty a pokračuje shodně až do stavu vrcholové teploty. Pokud je potřeba dostatečně přesně nasimulovat i počátek změn teplot, tedy od nuly do desáté hodiny, je nutné použít více článků pro jednu vrstvu. Použitím například čtyř článků na jednu vrstvu dosáhneme největší odchylky pouze  $3^{\circ}\text{C}$ .

$\Gamma$ -článek je méně vhodný. S rostoucím  $n$  se průběhy sice přibližují k reálnému průběhu, ale například při  $n=8$  ještě není průběh zcela totožný s reálným. Vyjma počáteční doby toto lépe dokáže model složený z T-členů pro  $n=1$ .

Velký počet členů na simulaci jedné vrstvy znamená také větší množství prvků v modelu. Je tedy na každém, jak přesný model potřebuje. Výpočet se pro jakýkoliv počet téměř nemění. V programu Tina jde pak poměrně rychle nasimulovat také jakýkoliv model. Při stavbě reálného modelu jde především, mimo cílenou přesnost, o počty součástek. V tomto ohledu

je lepší zase model se zapojením T, kde při nižším počtu součástek získáme velmi kvalitní průběh napětí. Další srovnávací grafy jsou umístěny v příloze A.

## **Závěr**

Objev elektrické analogie sdílení tepla vedením byl velkým pokrokem. Otázka vedení tepla v nestacionárním poli uvnitř tělesa byla výrazně zjednodušena. Výpočet tohoto procesu by byl jinak značně složitý. Využívání analogie našlo mnoho uplatnění v průmyslu, ve stavebnictví a jiných odvětvích. Simuluje přestupy tepla například ve výměníku tepla, stěn pecí nebo obálky budov.

S pomocí programu Tina jsme schopni model objektu velmi rychle realizovat. Prostředí programu umožňuje libovolné zasahování do elektrického obvodu a jeho opravy. Pokud se rozhodneme pro použití více článků na jednu vrstvu, tak po krátkém přepočtu rychle model přestavíme. Výsledné průběhy napětí lze dobře upravovat změnou rozsahu os nebo přiblížením. Zadáním bodů na průběhy získáme přesné údaje o jejich poloze podobně jako při práci s osciloskopem. Výsledky je pak možné vyexportovat do obrázku windows bitmap file nebo windows meta file. Ovšem umožňují uložit jen do rozlišení přibližně 640x480 pixelů. Proto je výhodnější využít „vyfocení obrazovky“ a získání tak hodnotnějšího obrázku. Dále je možno do změřených průběhů vložit jiné. Tím jsme schopni například porovnat dva a více různých řešení.

V dnešní době lze využít softwaru, který se specializuje přímo na sdílení tepla. Jedním takovým je program Rillfem, který byl vyvinut na Západočeské univerzitě v Plzni. Obsahuje již algoritmy, které vykreslí grafickou podobu změn teplot v tělese. Program obsahuje databázi používaných materiálů, ze kterých lze vybrat. Do vstupu jsou doplněny parametry materiálů jako je tloušťka a počáteční teploty povrchů. Jeden z grafických výstupů je uveden v příloze D.

Bez znalosti podobnosti mezi vedením tepla a elektřinou by se jen těžko docílilo ekonomičtějších a praktičtějších řešení.



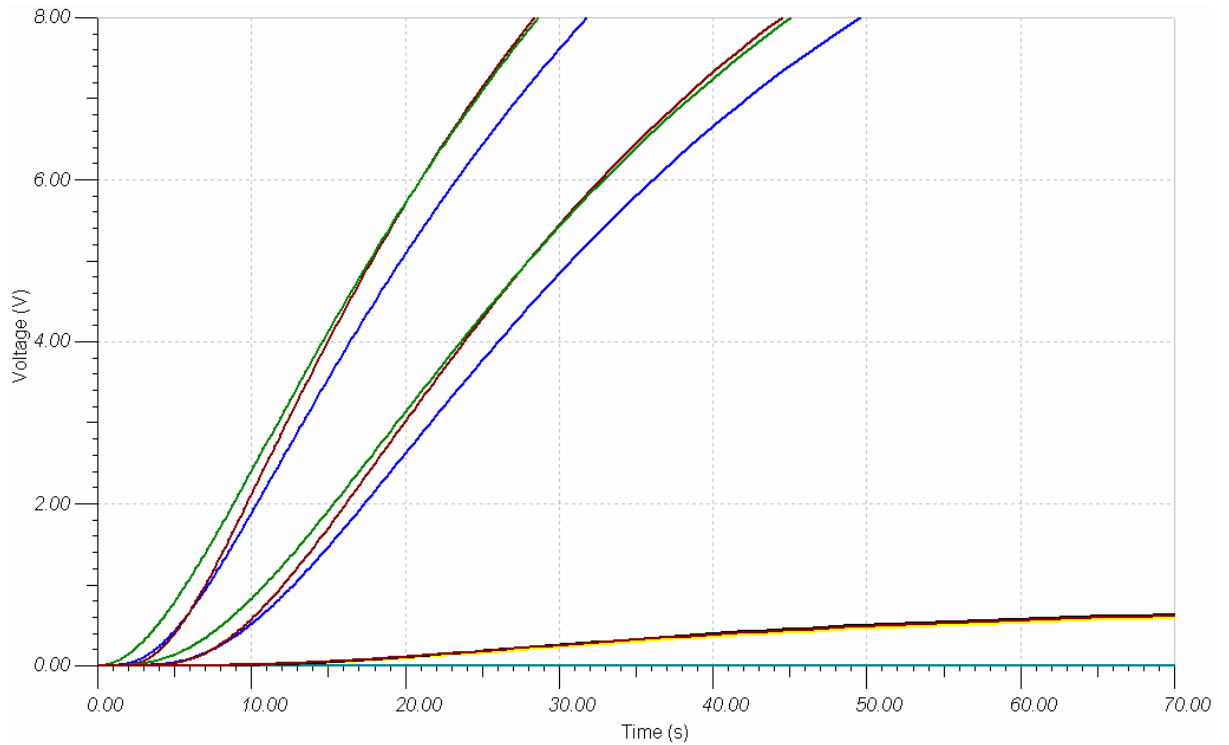
## Použitá literatura

- [1] Prof. Ing. Josef Rada, Csc. A kolektiv, Elektrotepelná technika. Nakladatelství technické literatury, Praha 1985
- [2] M.A.Michejev, Základy sdílení tepla. Průmyslové vydavatelství, Praha 1952
- [3] Internetové stránky ekologického serveru nazeleno.cz. [cit. únor 2012] K dispozici na stránkách [www.nazeleno.cz](http://www.nazeleno.cz).
- [4] Smeets, L.; Beuken, L.; Bovy, A.J.; Boer, J. de; Michalski, L.; Casanova, R. & Steenis, N.C. van, Werkzaamheden van het industriële elektrowarmtelaboratorium der N.V. Provinciale Limburgsche Electriciteits-maatschappij te Maastricht. Boosten & Stols N.V., Maastricht 1965
- [5] Doc. Ing. Miroslav Sazima, CSc., Prof. Ing. Dr. Vladimír Kmoníček, DrSc., Ing. Jiří Schneller, DrSc. a kolektiv, Teplo, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha 1989
- [6] S.N.Šorin, Sdílení tepla, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha 1968
- [7] Ing. Gustav Künzel, CSc., Matematické modely sdílení tepla v konstrukcích elektroniky, Academia – nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1990
- [8] RNDr. Jiří Mikulčák, CSc., doc. Ing. Dr. tech. Bohdan Klimeš, CSc., RNDr. Jaromír Široký, CSc., RNDr. Václav Šůla, RNDr. František Zemánek, Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1988
- [9] Podklady z Fakulty bezpečnostního inženýrství, VŠB-TU Ostrava[online]. [cit. leden 2012] K dispozici na [imhfyzikafbi.wz.cz/prednasky/fpdf/prenostepla.pdf](http://imhfyzikafbi.wz.cz/prednasky/fpdf/prenostepla.pdf)
- [10] Podklady ke studiu z VUT v Brně[online]. [cit. leden 2012] K dispozici na <http://ottp.fme.vutbr.cz/~pavelek/optika/0201.htm>
- [11] Vědecká encyklopedie[online]. [cit. leden 2012], K dispozici na <http://scienceworld.wolfram.com>
- [12] Internetová encyklopedie[online]. [cit. listopad 2011], K dispozici na <http://cs.wikipedia.org>.
- [13] Karel Teige, Vedení tepla a elektřiny v kovech [online]. [cit. říjen 2011] K dispozici na stránkách [dml.cz/bitstream/handle/10338.../CasPestMatFys\\_053-1924-2\\_7.pdf](http://dml.cz/bitstream/handle/10338.../CasPestMatFys_053-1924-2_7.pdf)

## **Seznam příloh**

- A**            **Porovnání průběhů napětí RC článků**
- B**            **Fotografie zapojení prvního modelu z roku 1934**
- C**            **Fotografie měření na nastavitelném modelu v laboratořích FEL**
- D**            **Grafické vyjádření teplot programem Rillfem**
- E**            **Příklady vlivu zateplení domů**

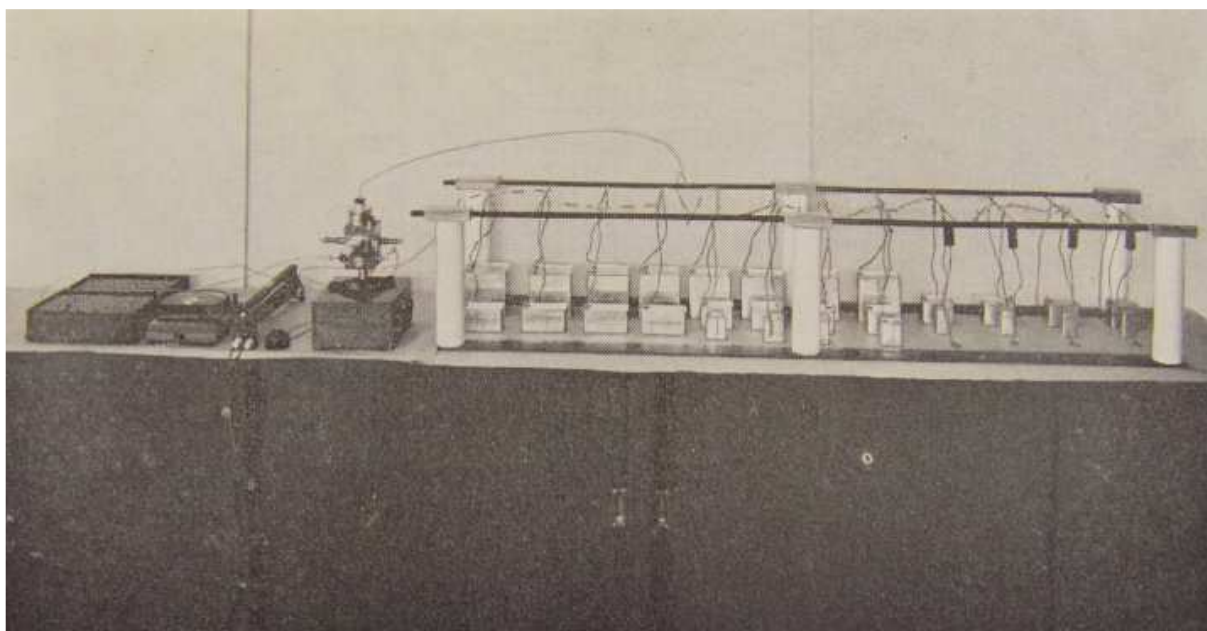
## Příloha A



Obr.1 Průběhy napětí a teplot. Zeleně je obvod z T-článků pro  $n=2$ , modře obvod z  $\Gamma$ -článků pro  $n=4$ , červeně je reálná teplota.

I přes větší počet členů na jednu vrstvu u  $\Gamma$ -článku je lepší použít T-články. Rozchod s reálnou křivkou je patrný brzy po začátku měření. Naopak u T-článku je patrný rychlý souběh.

## **Příloha B**



*Obr.2 Zapojení prvního modelu sdílení tepla na institutu v Maastrichtu v roce 1935 [1].*

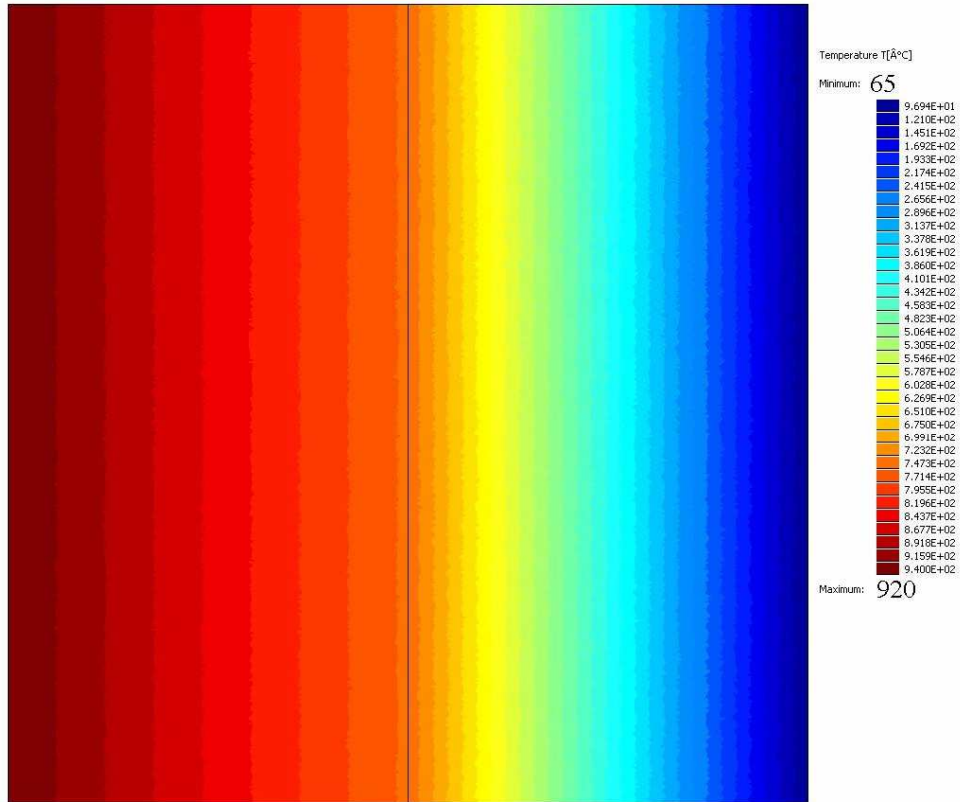
[1] Smeets, L.; Beuken, L.; Bovy, A.J.; Boer, J. de; Michalski, L.; Casanova, R. & Steenis, N.C. van, Werkzaamheden van het industriële elektrowarmtelaboratorium der N.V. Provinciale Limburgsche Electriciteits-maatschappij te Maastricht. Boosten & Stols N.V., Maastricht 1965

**Příloha C**



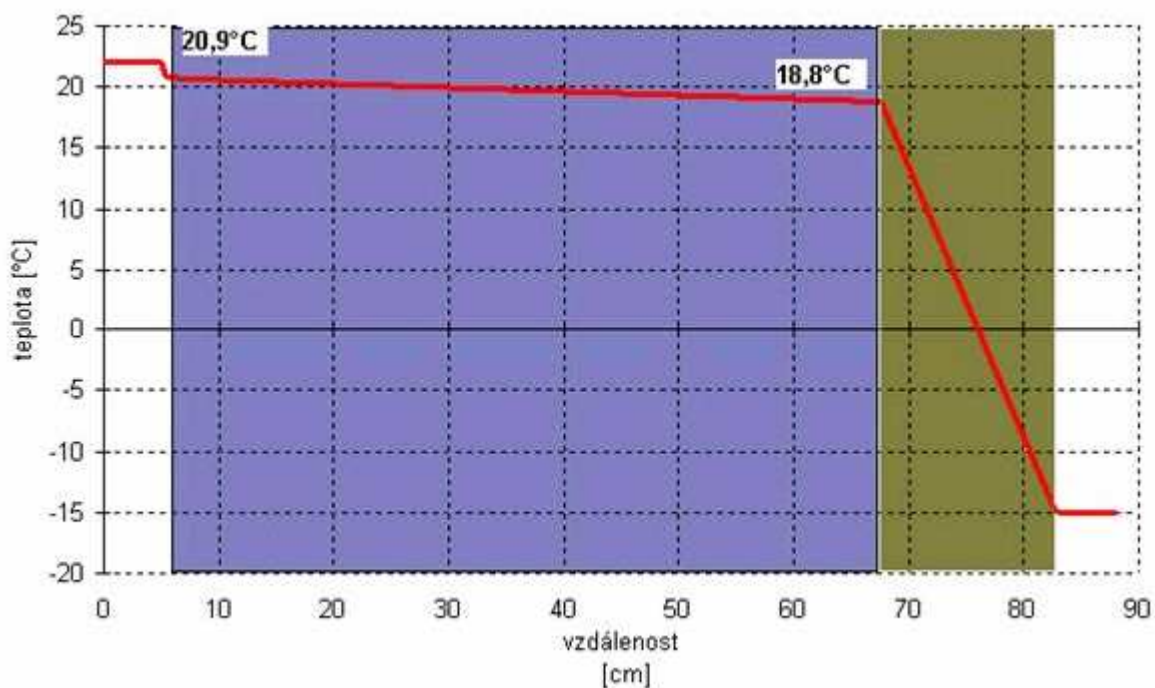
*Obr.3 Měření na nastavitelném modelu v laboratořích FEL. Čtyři velké bloky uprostřed představují nastavitelné T – členy. Napravo je připojeno záznamové zařízení – oscilograf.*

## Příloha D

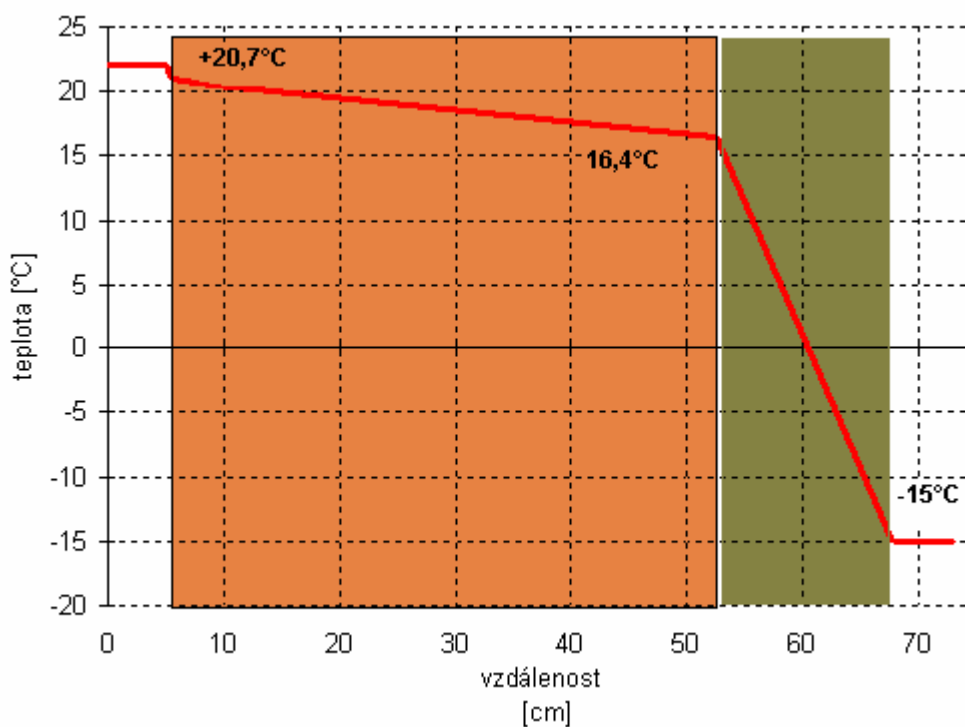


Obr.4 Grafické vyjádření teplot dvouvrstvou stěnou pece v programu Rillfem. Teplota uvnitř pece je 920°C a teplota pláště je 65°C.

## Příloha E



Obr.5 Průběh teploty v kamenné stěně, která je izolovaná minerální vlnou [1].



Obr.6 Průběh teploty v cihlové stěně, která je izolovaná 15cm minerální vlny [1].

[1] Internetové stránky o programu Hestia [online]. [cit. duben 2012] K dispozici na <http://hestia.energetika.cz/encyklopedie/3.htm>