ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA EKONOMICKÁ

Diplomová práce

Vypracování souboru procedur s finančním zaměřením – především na oceňování opcí

Development of a set of financially oriented procedures – with focus on option pricing

Bc. Martin Blažek

Plzeň 2017

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta ekonomická
Akademický rok: **2016/2017**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Martin BLAŽEK**
Osobní číslo:	**K14N0001P**
Studijní program:	**N6209 Systémové inženýrství a informatika**
Studijní obor:	**Informační management**
Název tématu:	**Vypracování souboru procedur s finančním zaměřením - především na oceňování opcí**
Zadávající katedra:	**Katedra ekonomie a kvantitativních metod**

Zásady pro vypracování:

1. Zpracujte úvod do problematiky finanční matematiky.
2. Popište vybrané finanční instrumenty.
3. Zpracujte vybrané algoritmy.
4. Proveďte numerické experimenty.
5. Zhodnoťte provedené numerické výsledky - závěr.

Rozsah grafických prací:	
Rozsah kvalifikační práce:	**60 - 80 stran**
Forma zpracování diplomové práce:	**tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

- **BENNINGA, Simon.** *Financial modeling.* **3rd ed. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2008. ISBN 978-0-262-02628-4.**
- **CIPRA, Tomáš.** *Finanční a pojistné vzorce.* **Praha: Grada, 2006. ISBN 80-247-1633-X.**
- **FRIES, Christian.** *Mathematical finance: theory, modeling, implementation.* **Hoboken: Wiley-interscience, 2007. ISBN 978-0-470-04722-4.**
- **JIANG, Lishang.** *Mathematical modeling and methods of option pricing.* **Hackensack, NJ: World Scientific, 2005. ISBN 978-981-2563-699.**

Vedoucí diplomové práce:	**Doc. RNDr. Ing. Ladislav Lukáš, CSc.**
	Katedra ekonomie a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce:	**21. října 2016**
Termín odevzdání diplomové práce:	**24. dubna 2017**

Doc. Dr. Ing. Miroslav Plevný
děkan

L.S.
Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta ekonomická

Ing. Mgr. Milan Svoboda, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 21. října 2016

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma

„Vypracování souboru procedur s finančním zaměřením – především na oceňování opcí“

vypracoval samostatně pod odborným dohledem vedoucího diplomové práce za použití pramenů uvedených v přiložené bibliografii

Plzeň dne ………………… ……………………………

podpis autora

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat panu doc. RNDr. Ing. Ladislavu Lukášovi, CSc., za odborné vedení mé práce, jeho čas, trpělivost, ochotu a cenné rady, které mi poskytl pro vypracování této diplomové práce.

Obsah

Úvod

Finanční deriváty jsou velmi hojně využívané a obchodované finanční instrumenty, které mají poměrně dlouhou historii a jsou nedílnou součástí dnešního finančního světa. Slouží především jako zajištění proti rizikům spojeným s nepříznivým vývojem trhu nebo jako nástroje pro spekulanty pro získání co největšího rozdílu mezi nákupní a prodejní cenou finančního instrumentu.

Tato diplomová práce je primárně zaměřena na opční kontrakty, jejich charakteristiky, algoritmizaci základních modelů pro jejich oceňování a naprogramování těchto modelů pomocí softwarového prostředí Mathematica, Wolfram research, Inc.

Hlavním cílem práce je pak algoritmizace a naprogramování funkčních modelů pro ocenění evropských opcí pomocí sw Mathematica, provedení numerických experimentů pro zkoumání změn ve vývoji ceny opce a jejich zhodnocení. K dílčím cílům práce patří porozumění základům finanční matematiky, dále pak analýza, charakteristika a klasifikace finančních derivátů (především opcí) a porozumění jejich vlastnostem.

Náplní první části práce bude uvedení do problematiky finanční matematiky. Čtenář zde bude seznámen se základními pojmy finanční matematiky, základními principy a způsoby oceňování peněžních prostředků a finančních produktů. V neposlední řadě bude čtenář seznámen také se základními principy a kritérii investičního rozhodování.

Následující kapitola bude zaměřena na finanční deriváty. Stručně zde budou zmíněny forwardové kontrakty, futures a swapy, jejich rozdělení, charakteristika a případné využití. Hlavní důraz bude kladen na podrobné seznámení s opčními termínovými kontrakty, neboť jejich znalost je naprosto klíčová pro práci v dalších částech práce.

Ve třetí kapitole bude položen teoretický základ a algoritmizace modelů pro oceňování opcí. Stěžejní částí třetí kapitoly bude odvození vztahů binomického a Black-Scholesova modelu. Nejdříve bude odvozen vztah pro jednoduchý jednokrokový binomický model, který poslouží pro seznámení s oceňováním opcí a je velmi důležitý pro pochopení principu binomického modelu i chování opce po celou dobu její platnosti. Následně bude jednokrokový model rozšířen do podoby pro dvě období a obecného vztahu pro n období. Dále bude v této části práce čtenář seznámen s předpoklady Black-Scholesova modelu, procesy, které ho ovlivňují, a také se samotným odvozením Black-Scholesovy rovnice pro ocenění opce. Dále budou v této části definovány jednotlivé míry citlivosti opcí, které indikují citlivost opční prémie na změny různých faktorů, a také vztah mezi put a call opcí (tzv. put-call parita).

Čtvrtá část práce bude rozšiřovat předcházející části – lze zde nalézt odvození teoretických modelů pro ocenění opcí se dvěma a více podkladovými aktivy. Nejprve bude odvozen model pro opce se dvěma podkladovými aktivy, který bude poté rozšířen do obecné podoby pro více než dvě aktiva. Následovat bude ukázka toho, jak by vypadal binomický model pro opce se dvěma podkladovými instrumenty.

Poslední, pátá kapitola bude zaměřena na základní modely pro oceňování opcí – diskrétní binomický a spojitý Black-Scholesův model a jejich implementaci v prostředí sw Mathematica. Zdrojový kód naprogramovaných modelů bude v této části práce rozebrán a jednotlivé dílčí funkce a argumenty popsány a okomentovány. Dále budou v této kapitole provedeny a zhodnoceny vybrané numerické experimenty, např. vliv změny výše opční prémie na změnu jednotlivých faktorů nebo srovnání binomického a Black-Scholesova modelu.

1 Úvod do problematiky finanční matematiky

Téma finanční matematiky je v současné době více než aktuální, neboť v dnešní době asi každý člověk vlastní nebo se minimálně na denní bázi setkává s nějakým finančním produktem, ať je to běžný účet v bance či jiný finanční produkt, jako je např. spoření, hypoteční nebo spotřebitelský úvěr apod.

S finančními produkty jsou spojená i různá finanční rozhodování, která je potřeba čas od času udělat. Abychom mohli učinit správné finanční rozhodnutí, je potřeba nejprve pomocí matematických výpočtů zhodnotit investiční příležitosti. Finanční matematika je tedy soubor matematických metod uplatňovaných v oblasti financí a finančních produktů, zabývá se např. ukládáním nebo půjčováním peněz, odhady rizik, pojišťováním apod.

Jelikož je finanční matematika opravdu široký pojem, v této práci jsou zmíněny pouze základní pojmy a operace, potřebné k pochopení této problematiky. [11]

1.1 Základní pojmy

Úrok

Abychom si přiblížili pojem úrok, je nutné ho posuzovat ze dvou úhlů pohledu:

- Z pohledu *věřitele (investora)* je úrok odměna za poskytnutí peněžních prostředků druhé osobě. Tato odměna uvažuje dočasné pozbytí prostředků, pokles jejich hodnoty vlivem inflace a další rizika spojené s dočasným pozbytím peněz.
- Z *pohledu dlužníka* je úrok cena za získání finančních prostředků. I když musí dlužník platit často nemalé částky navíc, získání úvěru je pro něj i tak přínosem. Může si např. ihned opatřit nějakou pro něj nezbytnou věc, popř. může generovat zisk z podnikatelské činnosti, kterou mohl zrealizovat právě díky zapůjčeným prostředkům.

Úročení

Způsob započítání úroků k půjčenému kapitálu v čase. Úročením získáme budoucí hodnotu peněz ze současné hodnoty.

Úroková sazba (úroková míra)

Úroková sazba je relativní vyjádření úroku z hodnoty kapitálu. V případě, že investor zapůjčí dlužníkovi 100 Kč při úrokové sazbě 5 %, pak obdrží investor navíc 5 Kč.

Nominální úroková míra

Je to explicitně vyjádřená hodnota úrokové míry, uváděná na úvěrových smlouvách apod.

Reálná úroková míra

Reálná úroková míra je nominální úroková míra snížená o ztráty kupní síly peněz. Její hodnota tedy záleží na nominální úrok. míře a cenách – pokud roste cenová hladina, pak roste i míra inflace[1] a tím klesá hodnota reálné úrokové míry. Obecně se reálná úroková míra dá vyjádřit následovně:

$$i_{real} = \frac{i_{nom} - i_{infl}}{1 + i_{infl}} \tag{1.1}$$

kde i_{real} … reálná úroková míra,

i_{nom} … nominální úroková míra (neočištěná o inflaci),

i_{infl} … míra inflace.

Efektivní úroková míra

Je to nástroj, jehož pomocí lze porovnat různé nominální úrokové míry, které se liší svou absolutní velikostí či četností úročení. Vzorec efektivní úrokové míry tedy vypadá následovně:

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \tag{1.2}$$

kde i_{ef} … efektivní úroková míra,

j … nominální úroková míra,

m … počet úročení v roce.

Úrokovací období

Časový úsek, na který se vztahuje daná úroková míra. Označíme-li m jako frekvenci úročení, pak se nejčastěji úročí:

- ročně (per anum, p.a.) při $m = 1$,
- pololetně (per semestre, p. s.) při $m = 2$,
- čtvrtletně (per quartale, p. q.) při $m = 4$,

[1] Znehodnocování měny v důsledku růstu cen. [10]

- měsíčně (per mensem, p. m.) při $m = 12$,
- týdně (per septimanam, p. sept.) při $m = 52$,
- denně (per diem, p. d.) při $m = 365$.

Diskontování

Je to způsob, kterým lze získat současnou hodnotu peněz z jejich budoucí hodnoty.

Diskontní sazba

Diskontní sazba má 2 různé významy:

- Označení úrokové míry, za kterou centrální banka poskytuje úvěr komerčním bankám.
- Označení pro výnosovou míru, kterou je přepočítána budoucí hodnota peněz na hodnotu současnou. Pokud není uvedeno jinak, při zmínění v této práci je diskontní sazbou myšlen tento význam.

[10], [11], [17], [18]

1.2 Úročení

Úročení je způsob započítání úroků k půjčenému kapitálu v čase. V praxi se rozlišují čtyři základní typy úročení – *jednoduché, složené, smíšené* a *spojité*.

Jednoduché úročení

Jednoduché úročení je takové připisování úroků, při kterém se připsané úroky už dále neúročí (tudíž úročený kapitál narůstá lineárně). Využívá se hlavně pro úročení kratší než 1 rok. Pro výpočet výsledné hodnoty kapitálu za dobu t je zapotřebí znát hodnotu počátečního kapitálu, roční úrokovou míru a také dobu, po kterou se úročí. Pokud známe všechny tyto proměnné, podle následující rovnice (1.3) vypočteme výslednou hodnotu kapitálu:

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t) \tag{1.3}$$

kde K_t … kapitál za dobu t,

K_0 … počáteční kapitál,

i … roční úroková míra,

t … úroková doba.

Složené úročení

Složené úročení je takový způsob připisování úroků, kdy se připisované úroky dále úročí – úročený kapitál tedy narůstá exponenciálně. Typicky se složené úročení používá v případech, kdy úrokovací doba tvoří vícero celých úrokovacích období. Koncovou hodnotu kapitálu vypočteme následovně:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \qquad (1.4)$$

kde K_n … kapitál za dobu n,

n … počet ročních úrokovacích období.

Smíšené úročení

Smíšené úročení je kombinace předchozích dvou způsobů – jednoduchého a složeného úročení. Složené úročení se používá pro výpočet celých období, jednoduché úročení se pak používá pro výpočet prvního či posledního období, které bývají zpravidla neúplné. Vzorec pro výpočet vypadá následovně:

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t_1) \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot t_2) \qquad (1.5)$$

kde t_1 … neúplná část prvního ročního úrokovacího období,

t_2 … neúplná část posledního ročního úrokovacího období.

Spojité úročení

Toto úročení předpokládá připisování úroků v nekonečně malých intervalech, tzn. předpokládá narůstání frekvence úročení (limitně se frekvence blíží nekonečnu). Platí tedy, že čím častěji jsou úroky připisované, tím je výnos vyšší. Kapitál za dobu t tedy v tomto případě vyjádříme následující rovnicí (1.6):

$$K_t = K_0 \cdot e^{\delta t} \qquad (1.6)$$

kde δ … úroková intenzita[2],

t … úroková doba (v létech).

[1]

[2] Funkce, která představuje výši „průtoku“ úrokové míry v daném časovém okamžiku. [10]

Standardy úročení

„Standardy úročení jsou pravidla pro výpočet úrokové doby v rámci jednoduchého úročení (a jednoduchého diskontování).“ [1, s. 23]

Jelikož se tyto standardy používají pro jednoduché úročení, úrokovou dobu t vyjádříme ve formě zlomku roku. Tyto zlomky se pak liší podle jednotlivých standardů pro různé finanční produkty a podle jednotlivých zemí. Dle [1] jde o následující pravidla:

Standard act/act

Doba úročení i délka roku se počítají přesně podle kalendáře – používá se **skutečný počet kalendářních dnů a rok se skutečným počtem dnů**.

Standard act/360

Tento standard je také nazývaný jako *francouzská metoda* úročení. **Používá přesný počet dní v měsíci, ale uvažuje rok pouze s 360 dny.** V ČR se používá např. pro krátkodobé úročení bankovních depozit nebo pro operace s euroměnami.

Standard act/365

Taktéž nazývaný jako *anglická metoda* úročení. **Používá přesný počet dní v měsíci a uvažuje rok s délkou 365 dní** (a to i v případě přestupných roků). Jak jeho název napovídá, používá se ve Spojeném království nebo např. pro krátkodobé cenné papíry v Německu.

Standard 30E/360

Taktéž označovaný jako *německá metoda* úročení. **Používá měsíce se 30 dny a uvažuje rok s délkou 360 dní.** V případě, že počátek nebo konec úročení připadne na 31. den v měsíci, automaticky se přepíše na 30. den daného měsíce. V ČR se využívá např. pro úročení cenných papírů.

Standard 30A/360

Taktéž nazývaný jako *americká metoda* úročení. Stejně jako německá metoda uvažuje měsíc se 30 dny a rok se 360 dny. Rozdíl oproti německé metodě je ale ten, že pokud poslední den úročení připadá na 31. den v měsíci a první den úročení není 30. nebo 31. den v měsíci, tak americká metoda uvažuje i poslední (31.) den vkladu.

1.3 Diskontování

Diskontování je způsob, jak získat současnou hodnotu peněz z hodnoty budoucí. Je to tedy opačný proces k úročení (vypočítává budoucí hodnotu peněz ze současné).

Jednoduché diskontování

Je to operace používaná především pro krátkodobé finanční instrumenty se splatností do jednoho roku. Současnou hodnotu kapitálu pomocí jednoduchého diskontování vyjádříme pomocí následujícího vztahu (1.7):

$$K_0 = K_t \cdot (1 - d \cdot t) \tag{1.7}$$

kde K_0 … počáteční kapitál,

K_t … kapitál za dobu t,

d … roční diskontní míra,

t … diskontní doba.

Složené diskontování

Opačná operace ke složenému úročení. Složené diskontování se vypočte následovně:

$$K_0 = K_n \cdot (1 - d)^n. \tag{1.8}$$

Spojité diskontování

Obdobně jako u složeného diskontování se jedná o inverzní operaci k odpovídajícímu způsobu úročení, v tomto případě k úročení spojitému. Spojité diskontování pak vyjádříme rovnicí (1.9):

$$K_0 = K_t \cdot e^{-\delta t}. \tag{1.9}$$

[1]

1.4 Investiční rozhodování

Tato kapitola navazuje na předchozí části, kdy uplatníme znalosti pro výpočet budoucí nebo současné hodnoty při oceňování investic a rozhodování, zda tyto investice přijmout či nikoliv.

Investice jsou posuzovány podle rozdílných kritérií, především podle výnosnosti, rizika nebo likvidity. V této práci si přiblížíme některá základní kritéria investičního rozhodování, tj.:

- kritérium čisté současné hodnoty,
- kritérium vnitřního výnosového procenta,
- kritérium indexu ziskovosti,
- kritérium doby návratnosti.

Čistá současná hodnota

Čistá současná hodnota (Net Present Value, NPV) je jedním z nejpoužívanějších finančních kritérií pro hodnocení projektů. Je to ocenění předpokládaných budoucích finančních toků[3] (cash flow, CF) a současně uvažuje také časovou hodnotu peněz a alternativní náklady kapitálu. Vliv daní nebo inflace se neuvažuje.

Výhodou této metody je, že s ní lze popsat jakékoliv peněžní toky a jejím výsledkem je absolutní hodnota výnosu investice, tudíž je možné tyto absolutní hodnoty sčítat.

Následující vztah (1.10) je vztahem pro výpočet čisté současné hodnoty:

$$NPV = CF_0 + \frac{CF_1}{1+i_1} + \cdots + \frac{CF_n}{(1+i_n)^n} = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+i_t)^t} \tag{1.10}$$

kde CF_t … peněžní toky v roce t,

n … doba životnosti projektu,

i … oceňovací úroková míra sjednaná na t období.

Pokud budeme uvažovat i možné počáteční náklady na tuto investici, pak vypočteme čistou současnou hodnotu následovně:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+i_t)^t} - N \tag{1.11}$$

kde N … počáteční náklady na investici.

[3] Očekávané nebo realizované platby v určitých časových okamžicích finančních, investičních nebo obchodních transakcí. [1]

Další výhodou tohoto kritéria je jednoduchost vyhodnocení projektu – investici přijmeme v tom případě, že je NPV kladná. V opačném případě projekt nepřijímáme. Pokud mezi sebou porovnáváme více navzájem se vylučujících projektů (může být přijat nejvýše jeden), vybereme ten s nejvyšší (kladnou) hodnotou čisté současné hodnoty. [1], [19]

Vnitřní výnosové procento

Vnitřní výnosové procento (Internal Rate of Return, IRR) je dalším často používaným kritériem hodnocení projektů. Je to kritérium pro relativní výnos projektu, který během svého životního cyklu vytváří. Z výpočtu tedy není jasný zisk vytvořený projektem.

Definice vnitřního výnosového procenta zní následovně: „Vnitřní výnosové procento je oceňovací úroková míra, při níž současná hodnota příjmových CF je rovna současné hodnotě výdajových CF“ [1, s. 40]

Výpočet IRR je možný podle následujícího vzorce (1.12):

$$0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1 + IRR)^t} \qquad (1.12)$$

kde CF_t … peněžní toky v roce t,

IRR … vnitřní výnosové procento,

n … doba životnosti projektu.

Pokud porovnáme vztahy (1.10) a (1.12) pro výpočet NPV a IRR, můžeme si všimnout, že IRR se rovná takové diskontní sazbě, při které je NPV rovna nule.

Pro rozhodnutí, jestli investiční projekt přijmeme nebo ne, je potřeba porovnat výslednou hodnotu IRR a stanovenou minimální míru návratnosti:

- Je-li $IRR > stanovená\ míra\ návratnosti$ → investice firmě přináší přidanou hodnotu, a tudíž projekt přijímáme,
- je-li $IRR < stanovená\ míra\ návratnosti$ → investice firmě nepřináší přidanou hodnotu, a tudíž projekt nepřijímáme.

[1], [20]

Index ziskovosti

Index ziskovosti (Profitability Index, PI) vyjadřuje poměr výnosů k počátečním kapitálovým výdajům a je vhodný jako doplňkové kritérium k NPV.

Vzorec pro výpočet:

$$PI = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1 + i_t)^t} / I \tag{1.13}$$

kde I … počáteční kapitálový výdaj.

Výsledná hodnota PI vyjadřuje relativní obohacení firmy. Rozhodnutí, jestli projekt přijmout nebo nepřijmout podle tohoto kritéria, provedeme následovně:

- pokud je $PI > 1$, investiční projekt přináší firmě hodnotu, a tudíž ho přijímáme,
- pokud je $PI < 1$, investiční projekt zamítáme.

[21]

Doba návratnosti

Doba návratnosti (Payback Period, PP) je doba, za kterou příjmy, postupně se kumulující v čase, uhradí celkově investovaný kapitál. Pokud je hodnota PP menší než doba životnosti projektu, pak se náklady vynaložené na tento projekt vrátí ještě v době jeho trvání. Doba návratnosti je dána vztahem:

$$DN = k - 1 - \frac{S_{k-1}}{CF_k} \tag{1.14}$$

kde DN … doba návratnosti,

$S_j = \sum_{t=0}^{j} CF_t$,

k … první index, při němž hodnoty $S_0, S_1, \ldots$ začnou být kladné.

Tato metoda se používá spíše jako doplňková, nezohledňuje totiž finanční toky plynoucí z investice po dosažení doby její návratnosti.

Pokud porovnáváme několik navzájem se vylučujících projektů, pak vybereme ten s nejmenší dobou návratnosti (investované peníze se nám vrátí dříve a můžeme je dříve dále zhodnotit). [1], [22]

2 Úvod do termínových obchodů a finančních derivátů

Obchody můžeme rozdělit do několika kategorií podle toho, jakým způsobem jsou uzavřeny a jakými podmínkami se tyto obchody řídí. Jde o obchody promptní, budoucí a finanční deriváty.

2.1 Promptní (spotové) obchody

Jde o kontrakty, které se vyznačují krátkodobým plněním. Jinými slovy jsou to obchody, kdy se termíny sjednání a vypořádání obchodu shodují – zboží, které je předmětem obchodu, je bezprostředně (tzn. okamžitě, popř. maximálně po několika dnech) po uzavření kontraktu dodáno, převzato a zaplaceno. [1], [23]

2.2 Budoucí (termínové) obchody

Budoucí obchody jsou takové obchody, kdy je smluvně sjednán delší (i mnohaměsíční) časový odstup mezi uzavřením obchodu a jeho plněním. Jde tedy v podstatě o smlouvu o budoucím dodání. V momentu uzavření smlouvy mezi dvěma subjekty jsou sjednány neměnné náležitosti obchodu, jako je např.:

- stanovení povinnosti či práva koupit nebo prodat určené zboží,
- termín uskutečnění obchodu (datum splatnosti),
- předmět obchodu,
- množství aktiva, které je předmětem obchodu,
- cena dodávky (termínová cena) – cena v den splatnosti.

Velmi často se termínové obchody uzavírají z důvodu zajištění proti nepříznivému vývoji směnných kurzů mezi dvěma měnami, ale jsou také využívány spekulanty, kteří touží po získání co největšího rozdílu (zisku) mezi nákupní a prodejní cenou. [1], [24]

2.3 Finanční deriváty

Finanční deriváty (odvozené cenné papíry) vznikly odvozením od budoucích obchodů – je zde opět sjednán určitý budoucí datum plnění. Deriváty jsou cenné papíry, které jsou odvozeny od různých podkladových aktiv[4].

Podle těchto aktiv také rozdělujeme finanční deriváty na:

---

[4] Podkladová (základní) aktiva jsou taková aktiva, od kterých se návazně odvíjejí ceny finančních derivátů. Jsou to např. fyzické komodity, cizí měny, akcie, obligace, úrokové sazby, akciové indexy nebo jiné cenné papíry.

- *komoditní deriváty*: kontrakty na budoucí nákup nebo prodej fyzických komodit
- *měnové deriváty*: kontrakty na budoucí nákup nebo prodej určité měny
- *úrokové deriváty*: kontrakty na budoucí nákup nebo prodej úvěrů, dluhopisů aj.
- *akciové deriváty*: kontrakty na budoucí nákup nebo prodej akcií
- *deriváty na akciový index*: kontrakty na budoucí vývoj akciového indexu.

Dále můžeme finanční deriváty dělit podle vzájemného postavení obou účastníků obchodu:

Pevné (nepodmíněné) deriváty: obchod, kdy jsou oba účastníci povinni obchod uskutečnit k datu splatnosti, bez ohledu na to, jaká je aktuální tržní cena. Rozhodující je cena uvedená ve smlouvě. Nejčastěji se jedná o *forwardy, futures a swapy*.

Opční (podmíněné) deriváty: představují takový obchod, kdy jedna strana získává právo (ne povinnost) příslušný obchod k danému datu splatnosti uskutečnit – zaujímá tedy aktivní pozici. Druhá zainteresovaná strana zaujímá pasivní pozici, neboť závisí na rozhodnutí strany v aktivním postavení. Nejčastěji obchodovanými podmíněnými deriváty jsou *opce*. [1], [23]

2.3.1 Forwardy

2.3.1.1 Charakteristika forwardů

Forwardy jsou individuálně sjednané termínové obchody na budoucí nákup nebo prodej určitého podkladového aktiva. Podkladovým aktivem nejčastěji bývá buď cizí měna (poté se jedná o měnové forwardy), komodita nebo úroková míra (úrokové forwardy). Jelikož jde o individuálně sjednané, nikterak standardizované obchody, obchoduje se s nimi především na mimoburzovních (též OTC z anglického Over-the-counter) trzích.

Sjednáním forwardového obchodu se účastníci zavazují, že ke sjednanému datu se obchod uskuteční – držitel (kupující) forwardu je zavázán, že k datu splatnosti koupí dané podkladové aktivum za sjednanou cenu a prodávající se naopak zavazuje, že k datu splatnosti podkladové aktivum, jenž je předmětem forwardu, prodá.

Motivace pro uzavření kontraktu je zajistit se proti riziku nepříznivého vývoje budoucích cen nebo kurzů a vyloučit ze svých záměrů prvek nejistoty. Další motivací může být spekulace obou stran na vývoj cen podkladového aktiva – kupující forwardu spekuluje na nárůst ceny aktiva na trhu, než je aktuální sjednaná cena (může pak forward na trhu později výhodněji prodat), prodávající naopak spekuluje na pokles tržní ceny (vydělal prodejem forwardu). [1], [10], [13], [25]

2.3.1.2 Členění forwardů

Forwardy můžeme rozčlenit podle, toho, co je předmětem jejich výměny. Nejčastěji využívanými forwardy jsou forwardy úrokové a měnové, dále pak akciové, komoditní nebo úvěrové.

- *Úrokové forwardy*: umožňují zajistit pevnou úrokovou míru ze získaného úvěru (zajištění se proti růstu úrok. sazby) nebo depozita pro budoucí období (zajištění se proti poklesu).
- *Měnové forwardy*: sjednávají se na „výměnu pevné částky hotovosti v jedné měně za pevnou částku hotovosti v jiné měně k určitému datu v budoucnosti." [8, s. 179] Jinými slovy se používají pro zajištění měnového kurzu cizí měny v budoucím okamžiku.
- *Akciové forwardy*: k předem stanovenému budoucímu datu umožňují vyměnit pevně danou částku hotovosti za akcii.
- *Komoditní forwardy*: zajišťují výměnu pevně smluvené částky v hotovosti za určitý komoditní nástroj k předem stanovenému termínu v budoucnosti.

[9], [13]

2.3.2 Futures

Futures jsou de facto standardizované forwardy, které jsou zpravidla uzavírány na delší dobu. Díky standardizaci je možné s futures hojně obchodovat na burzách, což vede ke zvýšení jejich likvidity. Díky možnosti obchodování na burze se staly futures poměrně oblíbenými deriváty a používají se především ke spekulacím na trhu.

Hlavní důvody, proč došlo ke standardizaci forwardů:

- možnost odstoupení od kontraktu kdykoliv díky odprodeji derivátu na finančním trhu,
- eliminace rizika, které tkví v nedodržení smluvních podmínek jednou ze zainteresovaných stran,
- podkladové aktivum může nahradit index cenných papírů,
- možnost průběžného zúčtování zisků a ztrát každý obchodní den, a ne až v datu splatnosti obchodu.

Standardizace futures spočívá především v:

- přesném vymezení typu podkladového aktiva,
- specifikování množství podkladového aktiva,
- přesně vymezené ceně,
- standardizovaném a jasně definovaném datu splatnosti.

[1]

2.3.3 Swapy

2.3.3.1 Charakteristika swapů

Jde o termínovanou smlouvu, která **umožňuje dvěma zainteresovaným stranám periodickou budoucí výměnu cenných papírů, úrokových měr nebo finančních toků za předem stanovených podmínek.** Těmito podmínkami jsou myšleny především předem dohodnutý termín a způsob kalkulace peněžních toků. Na rozdíl od ostatních derivátů, jako jsou opce, forwardy nebo futures, jsou swapy deriváty s vypořádáním podkladových aktiv ve více okamžicích v budoucnu. Prakticky vzato jde o několik forwardů s postupným vypořádáním podkladových aktiv.

Obě strany obchodují se swapy především za účelem optimalizace úroků, optimalizace splatnosti u půjček nebo za účelem zajištění se proti nemožnosti splácet dluh. Stejně jako u forwardů se jedná spíše o individuálně nastavené obchody, neobchoduje se s nimi tedy na burze. [8], [23], [26]

2.3.3.2 Členění swapů

Swapy rozlišujeme, podobně jako u forwardů, podle toho, co je jejich předmětem výměny. Mezi základní typy patří např. úrokové, měnové nebo akciové swapy, dále také swapy komoditní, devizové nebo kreditní.

- *Měnové swapy*: jsou to „swapy, u kterých dochází nejen ke směně úrokových plateb, ale také příslušných kapitálových částek denominovaných v různých měnách“ [1, s. 81]
- *Úrokové swapy*: používají se především pro spekulace na vývoj úrokových sazeb. „Představují dohodu o budoucí směně úrokových plateb vztahujících se ke stejné kapitálové částce, ale definovaných odlišných způsobem.“ [1, s. 81]
- *Akciové swapy*: používají se pro výměnu pevně dané částky hotovosti za akciové nástroje, a to ke stanoveným budoucím datům.

- *Komoditní swapy*: sjednávají se k výměně pevně daných částek hotovosti za komoditní nástroje ke stanoveným budoucím datům. Zainteresované strany si navzájem platí rozdíly cen komodity nad pevně stanovenou částku.

2.3.4 Opce

Opce jsou termínové kontrakty, kde kupující (držitel) opce v dlouhé pozici[5] má právo (nikoliv povinnost) ve sjednaném termínu uskutečnit daný obchod a prodat nebo koupit podkladové (bazické) aktivum za předem stanovenou cenu. Naopak prodávající (upisovatel) opce se nachází v krátké pozici[6] a podřizuje se rozhodnutí držitele opce. Prodávající je tedy v nevýhodě, což je kompenzováno hned při sjednání opce a kupujícím je vyplacena cena opce, tzv. *opční prémie*.

Podkladovým aktivem bývají velmi často akcie, nicméně se na trzích obchoduje i s opcemi, jejichž podkladovým aktivem jsou např. dluhopisy, úrokové míry, cizí měny, indexy nebo futures. [1], [2]

Tabulka č. 1: Práva a povinnosti vyplývající z opcí

Druh pozice	**Typ opce**	
	Call opce	**Put opce**
Kupující **(Long pozice)**	- Právo koupit bazický instrument za realizační cenu - Povinnost zaplatit opční prémii	- Právo prodat bazický instrument za realizační cenu - Povinnost zaplatit opční prémii
Prodávající **(Short pozice)**	- Povinnost prodat bazický instrument za realizační cenu - Právo inkasovat opční prémii	- Povinnost koupit bazický instrument za realizační cenu - Právo inkasovat opční prémii

Zdroj: [5, s. 84]

[5] V dlouhé pozici investor očekává vzestup ceny cenného papíru, tudíž daný cenný papír koupí a plánuje ho v budoucnu prodat za vyšší cenu. Rozdíl mezi nákupní a prodejní cenou je investorův zisk. [27]

[6] V krátké pozici investor spekuluje na pokles ceny cenného papíru. Zpravidla prodává cenný papír, který později znovu odkoupí za nižší cenu. Pokud cenný papír koupí zpět za nižší cenu, než za kterou ho původně prodával, pak je tento rozdíl ziskem investora. [28]

2.3.4.1 Hodnota opce

Jak bylo zmíněno výše, opční prémie je cena, za kterou se opce prodává. Prémie se skládá ze dvou částí, a to z *vnitřní hodnoty* a *časové hodnoty*.

Vnitřní hodnota opce (intrinsic value)

Je to částka, kterou kupující obdrží, pokud by opci uplatnil. Je definována jako:

$$\max\,[S - X; 0] \text{ pro call opci,} \tag{2.1}$$

$$\max\,[X - S; 0] \text{ pro put opci,} \tag{2.2}$$

kde: S … spotová cena[7] podkladového aktiva na trhu,

X … realizační cena opce[8].

Časová hodnota opce (time value)

„Časová hodnota opce je vlastně investory oceněná šance, že v době, která ještě zbývá do expirace, podkladová akcie poroste (u call opce) nebo poklesne (u put opce). Tak, jak plyne čas, bude se obecně časová hodnota opce zmenšovat.“ [2, s. 6]

Výpočet časové hodnoty je definován jako:

$$časová\ hodnota\ opce = opční\ prémie - vnitřní\ hodnota\ opce \tag{2.3}$$

2.3.4.2 Základní členění opcí

Opce lze různě rozdělit podle jejich vlastností, typu podkladového aktiva, možností uplatnění apod.

Rozdělení opcí podle typu opce

Opce můžeme rozlišit podle jejich typu na *kupní (call)* opce a *prodejní (put)* opce:

Kupní (call) opce

Druh opce, jejíž **držitel má právo koupit dané podkladové aktivum** za předem stanovenou cenu. Upisovatel, který opci prodal (a inkasoval opční prémii), má povinnost na požádání dané podkladové aktivum prodat držiteli opce, bez ohledu na jeho aktuální

[7] Aktuální (promptní) cena v daném okamžiku.

[8] Předem sjednaná cena, za kterou má majitel opce právo opci využít. [5]

tržní cenu. Držitel call opce tedy obvykle spekuluje na pozdější nárůst ceny podkladového aktiva a prodávající se naopak snaží zajistit proti růstu ceny podkladového aktiva.

Call opci můžeme dále rozdělit podle toho, zda prodávající call opce dané podkladové aktivum, které je předmětem této opce, vlastní či nikoliv. V případě, že prodávající dané podkladové aktivum vlastní, tak se jedná o tzv. *krytý call*, v opačném případě o *nekrytý call*.

Prodejní (put) opce

Protiklad call opce. Její **držitel má právo prodat podkladové aktivum** za předem stanovenou cenu a prodávající má naopak povinnost takové podkladové aktivum od držitele opce koupit. Jelikož se při sjednávání obchodu opět předem stanoví cena podkladového aktiva, držitel put opce (s právem prodat podkladové aktivum) obvykle spekuluje na pozdější pokles jeho ceny.

Pro oba druhy opce (jak call, tak put) platí, že co jedna zainteresovaná strana ztratí, to druhá strana získá. Jde tedy o tzv. hru s nulovým součtem.
[1], [2], [4], [14]

Rozdělení opcí podle možnosti jejich uplatnění

Opce se dají dále rozlišit podle možnosti jejich uplatnění na *evropské* nebo *americké* opce.

Platnost opcí je od momentu jejich vzniku až do data splatnosti (předem sjednané datum, kdy práva a povinnosti jednotlivých subjektů vzhledem k opci vyprší). Zásadní rozdíl mezi těmito dvěma druhy opcí je, že **evropskou opci může prodávající uplatnit pouze v datu splatnosti**, ne dříve ani později.

Naproti tomu **americkou opci může prodávající uplatnit kdykoliv v čase od data uzavření obchodu do data splatnosti**. Z toho plyne, že americká opce může být výhodnější (nabízí velké množství okamžiků, kdy ji lze využít), a proto výše její opční prémie bývá zpravidla vyšší. [1], [2]

Rozdělení opcí podle vztahu realizační ceny a ceny podkladového aktiva

Dalším způsobem, jak rozčlenit opce, je rozdělit je podle vztahu *realizační ceny opce (strike price, X)* a *ceny podkladového aktiva v čase t (spotová cena, S_t)*. Porovnáním spotové a realizační ceny zjistíme, zda je výhodné opci uplatnit, či nikoliv.

Opce v penězích (in-the-money)

Označení pro takové opce, jejichž realizační cena je pro držitele výhodnější než spotová cena podkladového instrumentu, tedy

$$X < S_t \text{ pro call opce,}$$

$$X > S_t \text{ pro put opce.}$$

Opce v penězích mají pro držitele kladnou vnitřní hodnotu a je výhodné je využít, neboť při uplatnění investor získá peněžní prostředky.

Opce mimo peníze (out-of-the-money)

Out-of-the-money je označení pro opce, jejichž realizační cena je pro držitele opce méně výhodná než spotová cena podkladového instrumentu, tedy

$$X > S_t \text{ pro call opce,}$$

$$X < S_t \text{ pro put opce.}$$

Opce mimo peníze mají pro držitele zápornou vnitřní hodnotu a není výhodné opci využít – při uplatnění této opce by investor peněžní prostředky ztratil.

Opce na penězích (at-the-money)

At-the-money jsou to opce, jejichž realizační cena je rovna spotové ceně:

$$X = S_t \text{ pro call i put opce.}$$

Tyto opce nemají žádnou vnitřní hodnotu, ale stále mohou mít pro držitele časovou hodnotu.

[1], [4]

Rozdělení opcí podle podkladového instrumentu

Opce na indexy cenných papírů

Jsou to opce, jejichž podkladovým aktivem je koš (index), složený z vícero cenných papírů. Pokud je takováto opce uplatněna, při vypořádání nedochází na rozdíl od ostatních druhů opcí k dodání všech podkladových cenných papírů, ale je vyplacen rozdíl v hodnotě indexu. [9]

Akciová opce (equity option)

Jak název napovídá, podkladovým aktivem akciové opce je akcie. Jde o nejběžnější akciový derivát. Akciové opce jsou opce na výměnu pevné částky hotovosti za akciový nástroj k domluvenému datu v budoucnu a slouží k zajištění se proti riziku změny kurzu akcie na akciovém trhu. [3], [8]

Měnová opce (currency option)

Měnové opce jsou cenné papíry na výměnu pevně dané částky hotovosti v jedné měně za pevně danou částku hotovosti v jiné měně. Prakticky vzato si obě strany obchodu dohodnou měnový kurz, který bude platný k určitému datu v budoucnosti. Takovýto kurz nazýváme realizačním měnovým kurzem. Měnová opce slouží držiteli k zajištění se proti riziku negativní změny kurzu měny. [3], [8]

Komoditní opce (commodity option)

Opce, které se používají na výměnu pevné částky v hotovosti za komoditní nástroj k určitému datu v budoucnosti. Je to nástroj, který slouží k zajištění rizika plynoucího z růstu či poklesu ceny určité komodity. V případě call opce se kupující zajišťuje proti růstu ceny komodity (resp. proti poklesu ceny v případě put opce). [3], [8]

Úroková opce (interest rate option)

„Opce na výměnu pevně stanovené částky hotovosti v jedné měně za dosud neznámou částku v hotovosti či případně za dluhový cenný papír, úvěr, vklad nebo půjčku, a to v téže měně.“ [8, s. 338] U této opce tato neznámá částka nezávisí na rizikové úrokové míře jakéhokoliv subjektu. [3], [8]

Úvěrové opce (credit option)

Od úrokové opce se úvěrové liší tím, že proměnlivá platba závisí na rizikové míře určitého subjektu. Její součástí je tzv. opce úvěrového rozpětí (credit spread option), což je taková úvěrová opce, u níž platba závisí na velikosti úvěrového rozpětí dvou finančních aktiv. [3], [8]

Basket opce

Basket opce („košová“ opce, basket option) je **speciální druh opce na skupinu (portfolio) aktiv** a řadí se mezi tzv. exotické opce. Obdobně jako u klasických opcí přináší držiteli basket opce právo (nikoliv povinnost) prodat nebo koupit skupinu podkladových aktiv.

Hodnota basket opce se obvykle pohybuje pod hodnotou vícero standardních opcí na jedno aktivum – obecně je totiž levnější koupit jednu basket opci na koš aktiv než kupovat jednotlivé opce na stejná aktiva, která tvoří dotyčný koš. Navíc platí, že čím menší je korelace mezi jednotlivými aktivy tvořící koš, tím větší jsou úspory nákladů. [29], [30]

<u>Rainbow opce</u>

Rainbow je speciální druh **opce na dvě a více podkladových aktiv**, které na rozdíl od basket opcí netvoří žádný koš, ale rozlišují se každé zvlášť. Název těchto opcí vymyslel v roce 1991 Mark Rubinstein, který rainbow opce, jakožto kombinaci různorodých aktiv, přirovnal k duze (jenž je obdobně kombinací různých barev). Počet podkladových aktiv se proto nazývá *počet barev duhy*.

Jelikož rainbow opce obsahují mnoho podkladových aktiv, a tudíž i mnoho pohyblivých částí (např. ceny jednotlivých aktiv), je velmi složité takovéto opce analyzovat a ocenit. Hlavní myšlenkou, která pomáhá k ocenění těchto opcí, je, že všechna podkladová aktiva v opci se pohybují v tom „správném“ směru, aby se investice do opce vyplatila – tudíž v případě call opce bude hodnota aktiv stoupat, v případě put opce bude hodnota aktiv naopak klesat. V době expirace pak držitel opce vezme všechna podkladová aktiva, seřadí je podle výkonnosti a v souladu s výsledky a sjednanými podmínkami uplatní opci na nejvýhodnější aktivum. Nejdůležitějším aspektem, proč se rainbow opce využívají, je diverzifikace rizika – toho se docílí např. tím, že se jako podkladová aktiva zvolí aktiva ze zcela rozdílných a nesouvisejících trhů. [31], [32]

3 Základní modely oceňování opcí

Modely oceňování opcí jsou takové modely, které jsou vhodné pro určení ceny opční prémie v čase t. Podle [3] se standardně uvažuje šest hlavních faktorů, které mají vliv na hodnotu opční prémie:

- aktuální tržní cena podkladového aktiva,
- realizační cena opce,
- zbývající doba do data expirace opce,
- volatilita[9] očekávaných výnosů podkladového aktiva,
- dividendy či jiné platby podkladového aktiva,
- bezriziková úroková míra[10].

V této práci se zaměříme především na dva nejznámější a naprosto základní modely pro oceňování opcí – diskrétní binomický model a spojitý Black-Scholesův model. Nejdříve je ale potřeba si vysvětlit vztah mezi put a call opcí, tzv. put-call paritu opcí, který platí vždy, nezávisle na modelu pro ocenění.

3.1 Put-call parita opcí

Put-call paritou nazýváme vzájemný vztah mezi cenami navzájem si odpovídajících put a call opcí (tzn. opce se stejnou realizační cenou, dobou splatnosti a se stejným podkladovým aktivem). Tento vztah nám říká, že call a put opce jsou mezi sebou velmi těsně provázány – pokud známe hodnotu call opce, pak můžeme snadno určit také hodnotu put opce. Totéž platí i naopak. [2]

3.1.1 Put-call parita pro evropské opce

Vztah pro put-call paritu evropských opcí vychází z toho, že investiční varianty se shodným výnosem mají stejnou cenu. Odvození provedeme za předpokladu dvou portfolií – *portfolia A* (v čase t vlastníme evropskou call opci a bezrizikový diskontní dluhopis) a *portfolia B* (v čase t vlastníme evropskou call opci a jeden kus podkladového aktiva). Tím dostaneme obecný vztah (3.1), který není závislý na použitém oceňovacím modelu.

$$P_t + S_t = C_t + X \cdot e^{-rT}, \tag{3.1}$$

[9] Stálost ceny finančního instrumentu. Čím větší je hodnota volatility, tím větší je výše a frekvence změn ceny instrumentu a ten se tak stává rizikovějším.

[10] Úrokový výnos aktiva, který investorovi přináší nulové nebo jen velmi malé riziko.

kde P_t … put opce splatná v čase t,

C_t … call opce splatná v čase t,

S_t … cena podkladového aktiva v čase t,

X … realizační cena opce,

r … bezriziková úroková míra,

T … čas do expirace.

Rovnice (3.1) platí samozřejmě při uvažování určitých předpokladů. Podobně, jako u jednotlivých modelů v následujících kapitolách, jsou základní předpoklady např. neexistence možnosti arbitráže[11], transakčních nákladů a neexistence dalších omezení. [1], [2], [5]

Z rovnice (3.1) lze zajisté vyjádřit jednotlivé vztahy C_t a P_t pro výpočet hodnoty call a put opce:

$$C_t = P_t + S_t - X \cdot e^{-rT}, \tag{3.2}$$

$$P_t = C_t + X \cdot e^{-rT} - S_t. \tag{3.3}$$

3.1.2 Put-call parita pro americké opce

Pro americké opce existuje vztah obdobný vztahu (3.1), v podobě nerovnosti.

$$S_t - X \leq C_t - P_t \leq S_t - X \cdot e^{-rT}. \tag{3.4}$$

[1]

3.2 Binomický model oceňování opcí

Binomický model (též BOPM z anglického Binomial Options Pricing Model) je velmi používanou a snadno aplikovatelnou numerickou metodou oceňování opcí. Jeho autory je trojice John C. Cox, Stephen A. Ross a Mark Rubinstein[12]. Jelikož jde o model diskrétní (nespojitý), počítá s určitým zjednodušením reality. Navzdory jeho zjednodušení se ale

[11] Způsob obchodu, který využívá souběžných cenových rozdílů k dosažení zisku. Prakticky vzato účastníci nakoupí finanční instrumenty na jednom trhu za výhodnou cenu a prodají na jiném trhu za vyšší cenu. [33]

[12] Tato trojice publikovala v roce 1979 článek *Option pricing: A simplified Approach* v časopisu *Journal of Financial Economics*, kde binomický model oceňování opcí poprvé představili.

stále jedná o velmi důležitý nástroj, díky kterému je možné pochopit základní důležité aspekty související s opcemi. [2]

3.2.1 Předpoklady binomického modelu

Jak bylo zmíněno výše, binomický model počítá s určitým zjednodušením reality. Proto model vychází z následujících předpokladů:

- promptní trh podkladových aktiv je dokonalý (neexistují žádné transakční náklady, daně ani poplatky z provedení obchodu),
- neexistují žádná omezení (např. omezení krátké pozice),
- v období do splatnosti opce se nevyplácí žádné dividendy ani kupónové platby,
- na trhu existuje jednotná bezriziková úroková míra na celou dobu do splatnosti opce,
- neuvažuje se žádné časové zpoždění,
- podkladová aktiva i opce je možné libovolně a neomezeně dělit,
- trh je efektivní a neexistuje možnost arbitráže,
- akcie je neomezeně dělitelná.

[2], [6]

3.2.2 Binomický model pro jedno období

Binomický model pro jedno období (též jednokrokový model) je **model pro ocenění opční prémie pro evropskou call opci v okamžiku $\boldsymbol{t}$**. V modelu pracujeme pouze s diskrétním časem – předpokládáme, že cena podkladového aktiva se může změnit jen v diskrétních časových okamžicích. Doba do splatnosti opce je jen jedno období, tzn. opce je splatná v okamžiku $t+1$. Cena podkladového aktiva se tedy změní s pravděpodobností q $(0 \leq q \leq 1)$ o U procent nebo se s pravděpodobností $(1-q)$ změní o D procent. Budeme předpokládat, že U je větší změna a D změna menší, a tak dle [2] platí vztah:

$$D < r < U. \tag{3.5}$$

Dále definujme

$$u = (1 + U/100) \tag{3.6}$$

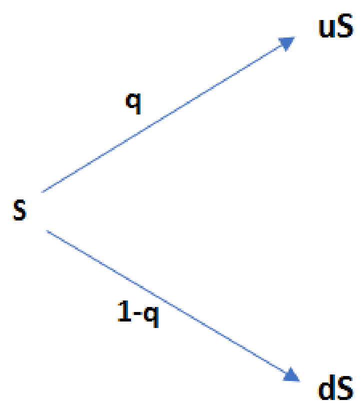
$$d = (1 + D/100) \tag{3.7}$$

kde: u … koeficient růstu,

d … koeficient poklesu.

V momentu splatnosti bude podkladové aktivum mít podle předpokladů jednu z dvou možných diskrétních hodnot uS nebo dS (viz Obrázek č.1):

Obrázek č. 1: Vývoj spotové ceny podkladového aktiva v jednokrokovém BOPM



Zdroj: vlastní zpracování dle zdroje [3], 2017

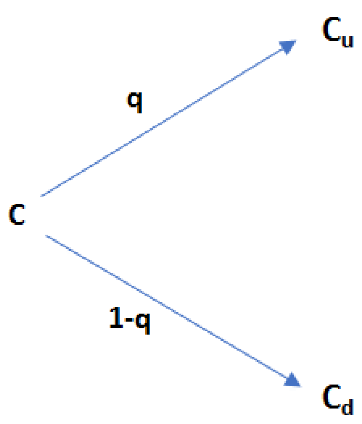
Odpovídající hodnota opční prémie call opce v čase $t+1$ se řídí vztahy (3.8) a (3.9):

$$C_u = \max(0, uS - X), \tag{3.8}$$

$$C_d = \max(0, dS - X). \tag{3.9}$$

Tyto vztahy musí zajišťovat podmínku nezápornosti (záporná hodnota opce by znamenala, že bychom obdrželi opci, a ještě za ní dostali zaplaceno, což v reálném světě rozhodně nehrozí).

Obrázek č. 2: Vývoj ceny call opce v jednokrokovém binomickém modelu



Zdroj: vlastní zpracování dle zdroje [3], 2017

Abychom získali hodnotu opce v čase t, je potřeba napodobit call opci sestavením takového portfolia, jehož výnos kopíruje výnos opce.

Předpokládejme tedy, že v čase t zakoupíme Δ akcií s cenou S, část prostředků B si vypůjčíme za bezrizikovou úrokovou míru a zbytek prostředků dodáme z vlastních zdrojů. Neznámé Δ a B určíme tak, aby hodnota portfolia v čase $t+1$ odpovídala hodnotě opce v čase $t+1$. Tím získáme soustavu rovnic:

$$uS \cdot \Delta + B(1+r) = C_u \tag{3.10}$$

$$dS \cdot \Delta + B(1+r) = C_d \tag{3.11}$$

kde Δ… počet nakoupených akcií,

B… množství hotovosti investované bezrizikově,

r… bezriziková úroková míra.

Řešením soustavy dvou rovnic (3.10) a (3.11) o dvou neznámých získáme vztahy pro výpočet hodnot proměnných Δ a B:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{uS - dS}, \tag{3.12}$$

$$B = \frac{C_d uS - C_u dS}{(uS - dS)(1+r)}\,. \tag{3.13}$$

Takto složené portfolio přináší v čase $t+1$ stejný výnos, jako evropská call opce. Jejich cena musí být shodná také v čase t, proto platí vztah:

$$C_t = \Delta \cdot S + B = \frac{\frac{(1+r)-d}{u-d} C_u + \frac{u-(1+r)}{u-d} C_d}{1+r}\,. \tag{3.14}$$

Pokud zavedeme substituci

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d}\,, \tag{3.15}$$

z níž následovně odvodíme vztah $1-p$:

$$1 - p = \frac{u-(1+r)}{u-d}, \tag{3.16}$$

dostaneme následující vztah (3.17):

$$C_t = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{1+r}. \tag{3.17}$$

Jelikož platí omezení $0 \leq p \leq 1$, můžeme proměnné p a $1-p$ chápat jako pravděpodobnosti. Nazýváme je **rizikově neutrální pravděpodobnosti růstu akcie.** Hodnotu opce lze zapsat jako diskontovanou střední hodnotu (viz vztah (3.17).

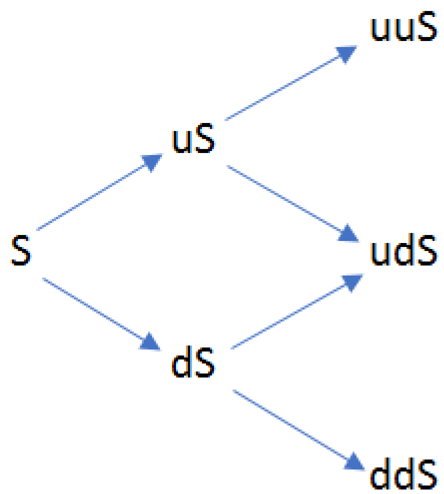
[2], [3], [6], [15]

3.2.3 Binomický model pro dvě období

Binomický model pro dvě období (též dvoukrokový binomický model) získáme rozšířením předchozího modelu o další období. Budeme tedy počítat s časovými okamžiky t, $t+1$ a $t+2$. V posledním jmenovaném okamžiku $t+2$ bude call opce expirovat.

Podkladové aktivum v momentu splatnosti bude podle [3] nabývat následujících tří diskrétních hodnot:

Obrázek č. 3: Vývoj spotové ceny podkladového aktiva v dvoukrokovém BOPM



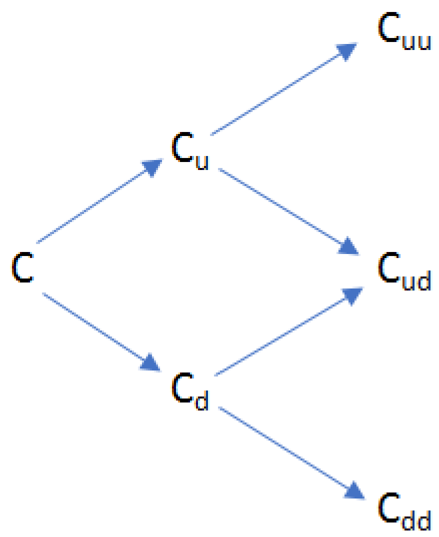
Zdroj: vlastní zpracování dle zdroje [3], 2017

Pravděpodobnosti poklesu a vzestupu ceny podkladového aktiva v každém časovém okamžiku jsou opět q a $1-q$, kdy se s pravděpodobností q zvýší cena o U procent, resp. se o D procent změnší s pravděpodobností $1-q$.

Pravděpodobnost stavu uuS je rovna q^2, pravděpodobnost stavu ddS odpovídá $(1-q)^2$ apod. Stav udS může být dosažen dvěma způsoby – nejprve růstem ceny akcie a následně jejím poklesem nebo opačně – nejprve poklesem ceny akcie a poté jejím růstem.

Na obrázku č. 4 je zobrazen vývoj odpovídající hodnoty opční prémie call opce. V průběhu dvou období bude dosahovat následujících tří hodnot:

Obrázek č. 4: Vývoj opční prémie call opce ve dvoukrokovém binomickém modelu



Zdroj: vlastní zpracování dle zdroje [3], 2017

V čase t je hodnota call opce neznámá. V době splatnosti, v čase $t + 2$, nabývá následujících hodnot:

$$C_{uu} = \max(0, uuS - X), \tag{3.18}$$

$$C_{ud} = \max(0, udS - X), \tag{3.19}$$

$$C_{dd} = \max(0, ddS - X). \tag{3.20}$$

Jak je možné vidět z Obrázku č. 4, hodnotu opce v přítomnosti vypočteme na základě znalosti všech tří koncových stavů ceny opce – C_{uu}, C_{ud} a C_{dd}. Z těchto stavů vypočteme nejprve hodnoty opce C_u a C_d v období $t + 1$.

V prvním případě získáme hodnotu call opce v období C_u jednoduše pomocí koncových stavů C_{uu} a C_{ud}, viz následující rovnice (3.21):

$$C_u = \frac{p \cdot C_{uu} + (1 - p) \cdot C_{ud}}{1 + r} \tag{3.21}$$

Obdobně odvodíme i vztah (3.22) pro hodnotu call opce v období C_d:

$$C_d = \frac{p \cdot C_{ud} + (1 - p) \cdot C_{dd}}{1 + r}. \tag{3.22}$$

Nyní je možné dosadit do rovnice (3.17), čímž vyjádříme hodnotu call opce v období t:

$$C_t = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{1+r} = \frac{p^2C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2C_{dd}}{(1+r)^2} \qquad (3.23)$$

Obdobně jako při vyjádření binomického modelu pro jedno období, i zde jsou použity rizikově neutrální pravděpodobnosti. Hodnotu opce dostaneme jako očekávanou hodnotu v čase $t+2$ diskontovanou přes dvě období. [2], [3], [6]

3.2.4 Binomický model pro více časových období

Úpravou binomického modelu pro dvě období získáme vztah pro vícero (n) období. Znovu předpokládáme, že v každém dalším období může cena podkladového aktiva opět klesat nebo růst. Vztah

$$u^j d^{n-j} S, \qquad (3.24)$$

značí cenu podkladového aktiva v n-tém období, jestliže jeho cena j-krát vzrostla a $n-j$ krát poklesla, přičemž nezáleží na pořadí vzestupů a poklesů.

Dále vyjádříme hodnotu opce na konci n-tého období vztahem

$$C_{u^j d^{n-j}} = \max\left(0, u^j d^{n-j} S - X\right). \qquad (3.25)$$

Pravděpodobnost změny podkladového aktiva v bezrizikovém prostředí by byla obdobně rovna vztahu

$$\frac{n!}{(n-j)!\,j!} p^j (1-p)^{n-j}. \qquad (3.26)$$

Pro n-té období platí, že v době splatnosti existuje $n+1$ možných cen podkladového aktiva (viz Obrázek č. 4). Toho využijeme při vyjádření současné hodnoty opce (v čase t). Ta je pro n období rovna:

$$C_t = \left\{ \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} p^j (1-p)^{n-j} \cdot C_{u^j d^{n-j}} \right\} \cdot (1+r)^{-n}. \qquad (3.27)$$

„Současná hodnota call opce podle (3.27) je rovna diskontované hodnotě očekávané hodnoty call opce s tím, že pravděpodobnost p je pravděpodobnost změny hodnoty akcie o U % v rizikově neutrálním prostředí s konstantní výnosností $(1+r)$.“ [2, s. 97]

Pokud označíme l jako nejmenší počet vzestupů hodnoty, při kterých bude opce ještě v penězích (tzn., že bude uplatněna), tudíž l bude nejmenší celé číslo takové, že platí

$$u^l d^{n-l} S > X. \tag{3.28}$$

Potom pro každé $j < l$ bude $C_{u^j d^{n-j}} = 0$, a pro všechna $j \geq l$ platí vztah

$$C_{u^j d^{n-j}} = u^j d^{n-j} S - X. \tag{3.29}$$

Rovnici (3.27) pak lze úpravami zapsat do výsledného tvaru

$$C_t = S\left\{\sum_{j=l}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} \hat{p}^j (1-\hat{p})^{n-j}\right\} - X \cdot (1+r)^{-n} \left\{\sum_{j=l}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} p^j (1-p)^{n-j}\right\}, \tag{3.30}$$

kde:

$$\hat{p} = \frac{u}{1+r} \cdot p, \qquad 1-\hat{p} = \frac{d}{r}(1-p).$$

Vztah (3.30) je konečným vztahem pro ocenění evropské call opce pomocí binomického modelu. Hodnota call opce se rovná rozdílu spotové ceny a diskontované realizační ceny, násobených výrazy ve složených závorkách. Tyto výrazy jsou formálně pravděpodobnosti nastání, obě jsou totiž kladná čísla, menší než 1 a zároveň je jejich součet roven 1.

Pro lepší srozumitelnost výsledného vzorce můžeme složené závorky chápat jako vyjádření takových pravděpodobností, kde l udává minimální počet období (z celkového počtu n období) vzrůstu podkladového aktiva o U % nutných k tomu, aby opce skončila v penězích, a p (resp. $\hat{p}$) je pravděpodobnost vzrůstu podkladového aktiva.

[2], [3], [6], [7]

3.2.5 Binomický model pro put opci

V předchozích částech zaměřených na binomický model oceňování opcí jsme se zaměřili na evropské call opce a odvození vzorce pro výpočet jejich ceny. Odvození vztahu pro výpočet ceny evropské put opce pro jedno období lze provést obdobným způsobem a za stejných předpokladů, jako v kapitole 3.2.1. Je pouze potřeba upravit základní vztahy (3.8) a (3.9), ze kterých vycházíme, do tvarů:

$$P_u = \max(0, X - uS), \tag{3.31}$$

$$P_d = \max(0, X - dS). \tag{3.32}$$

Obdobně jako u call opce je třeba sestavit portfolio složené z Δ akcií s cenou S a část prostředků si opět vypůjčíme za bezrizikovou úrokovou míru. Portfolio je opět složené tak, aby jeho hodnota v čase $t+1$ odpovídala hodnotě opce v čase $t+1$. Tím získáme soustavu rovnic

$$uS \cdot \Delta + B(1+r) = P_u \tag{3.33}$$

$$dS \cdot \Delta + B(1+r) = P_d, \tag{3.34}$$

z níž vyjádříme vztahy pro neznámé Δ a B, jenž jsou obdobou vztahů (3.12) a (3.13) pro call opci:

$$\Delta = \frac{P_u - P_d}{uS - dS}, \tag{3.35}$$

$$B = \frac{P_d uS - P_u dS}{(uS - dS)(1+r)}\,. \tag{3.36}$$

Vztahem pro výpočet ceny evropské put opce pomocí jednokrokového modelu by pak byl vztah

$$P_t = \Delta \cdot S + B\,. \tag{3.37}$$

Obdobně jako u call opce bychom odvodili obecnou rovnici pro výpočet evropské put opce pro n období. Tu vyjádříme ve tvaru:

$$P_t = \left\{ \sum_{j=0}^{j=n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} \cdot p^j (1-p)^{n-j} \cdot \max[0, X - u^j d^{n-j} S] \right\} \cdot (1+r)^{-n}. \tag{3.38}$$

[2]

3.3 Black-Scholesův model oceňování opcí

Black-Scholesův model (B-S model) je spojitý model[13] pro oceňování opcí. Jedná se o možná nejpopulárnější model ve finančním sektoru – relativně jednoduše se aplikuje a často nabízí adekvátní odhad cen (i komplikovanějších) opcí. Jeho autory jsou Fisher Black, Myron Scholes[14] a částečně i Robert Merton, který jejich model pro oceňování opcí rozšířil a zavedl pojem „Black-Scholesův model oceňování opcí".

Klasický B-S model je určen pro oceňování evropských call a put opcí bez výplaty dividendy. Existuje i několik různých rozšíření tohoto modelu, které umožňují ocenění např. amerických opcí, popř. i opce s výplatou dividend, které však nebudou v této práci podrobně rozebírány.

Nejdříve je potřeba zavést a přiblížit některé pojmy důležité k odvození B-S modelu. Mezi tyto pojmy patří Wienerův proces, který se používá k modelování náhodné složky pohybu ceny cenného papíru, logaritmický výnos a neposledně také stochastický proces chování ceny akcie. [3], [7]

3.3.1 Logaritmický výnos

Uvažujeme diskrétní časové okamžiky $t = (0, 1, 2, 3 \ldots)$. Logaritmický výnos mezi **následujícími** časovými okamžiky je

$$r_{t-1}^{t} = ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \tag{3.39}$$

Logaritmický výnos mezi **libovolnými** časovými okamžiky je pak roven

$$r_t^T = ln\left(\frac{S_T}{S_{t-1}}\right) = ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\frac{S_{t+1}}{S_t}\ldots\frac{S_T}{S_{t-1}}\right) = \sum_{k=t}^{T-1} ln\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}\right) = \sum_{k=t}^{T-1} r_k^{k+1}. \tag{3.40}$$

Logaritmický výnos za období $T - t$ se tedy rovná součtu logaritmických výnosů za jednotlivá po sobě jdoucí časová období. Pokud budou logaritmické výnosy nezávislé, se stejným rozdělením, střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, pak podle centrální limitní věty

[13] Spojitý model proto, že uvažuje čas jako spojitou veličinu.

[14] Tato dvojice poprvé představila svou metodu pro oceňování opcí v roce 1973 v článku s názvem *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, který vyšel ve vědeckém časopise Journal of Political Economy. Myron Scholes následně za přínos k oceňování opcí obdržel v roce 1997 Nobelovu cenu za ekonomii. Fisher Black se tohoto ocenění nedožil. [34]

platí, že logaritmický výnos r_t^T bude mít aproximativně normální rozdělení se střední hodnotou $\mu(T-t)$ a rozptylem $\sigma^2(T-t)$. [3]

Pokud bychom chtěli uvažovat spojitý čas, pak předpokládejme, že logaritmický výnos r_0^t za libovolný časový interval $\langle 0, t\rangle$ má normální rozdělení, tedy

$$r_0^t \approx N(\mu t, \sigma^2 t) \tag{3.41}$$

kde N … normální rozdělení,

μ … střední hodnota,

σ^2 … rozptyl.

Jelikož platí vztah $r_0^t = ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$, platí taktéž

$$S_t = S_0 e^{r_0^t}. \tag{3.42}$$

Cena akcie tedy bude mít v budoucnu logaritmicko-normální rozdělení. [3]

3.3.2 Wienerův proces

Jde o stochastický (náhodný) proces se spojitými trajektoriemi, definovaný na intervalu $\langle 0, \infty)$. Jeho hlavním znakem je, že proměnná se spojitě s časem mění a že tyto změny se řídí normálním rozdělením.

V matematice se Wienerův proces používá např. při řešení náhodných diferenciálních rovnic, ve finanční ekonomii se používá pro modelování náhodné složky chování cen akcií.

Základní vlastnosti Wienerova procesu W_t:

- Proces W_t začíná nulovou hodnotou, tudíž platí $W_0 = 0$.
- Přírůstky jsou normálně rozdělené se střední hodnotou 0 a rozptylem $t_2 - t_1$. Rozptyl tudíž závisí jen na rozdílu časových okamžiků. Tento vztah můžeme zapsat následovně:

  $$W_{t_2} - W_{t_1} \approx N(0, t_2 - t_1) \text{ pro každé } t_2 > t_1.$$
- Náhodné veličiny $W_{t_4} - W_{t_3}$ a $W_{t_2} - W_{t_1}$ jsou nezávislé pro $t_4 > t_3 \geq t_2 > t_1$.

Nezávislost přírůstků můžeme snadno dokázat. Uvažujme Wienerův proces v čase $t + \Delta t$:

$$W_{t+\Delta t} = W_t + \Delta W_t, \tag{3.43}$$

úpravou vztahu (3.43) dostaneme:

$$\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t. \tag{3.44}$$

Rovnice (3.44) dokazuje, že náhodná veličina ΔW_t (přírůstek procesu W_t za časový okamžik Δt) nezávisí na hodnotě procesu W_t. [3], [8]

3.3.3 Stochastický proces chování ceny akcie

Předpokládejme, že míra výnosu $\frac{\Delta S_t}{S_t}$ lze vyjádřit následujícím vztahem (3.45):

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t \tag{3.45}$$

kde: S_t… spotová cena akcie,

ΔS_t … přírůstek ceny akcie,

$\mu \Delta t$ … deterministická složka,

$\sigma \Delta W_t$ … náhodná složka.

Míra výnosu je tedy součet deterministické a náhodné složky. Tento vztah má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu \Delta t$ a rozptylem $\sigma^2 \Delta t$.

Úpravou rovnice (3.45) dostaneme vztah pro přírůstek ceny akcie:

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t. \tag{3.46}$$

Pokud se časový interval Δt limitně blíží nule, zapíšeme rovnici (3.42) v přírůstkovém tvaru jako stochastickou diferenciální rovnici:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{3.47}$$

[3]

3.3.4 Odhad volatility a bezrizikové úrokové míry

V případě oceňování opcí může nastat problém s odhadem volatility a bezrizikové úrokové míry, neboť ostatní parametry, jako jsou současná cena podkladového aktiva, čas do expirace nebo realizační cena opce, máme k dispozici. [3], [7]

Bezriziková úroková míra

Způsobem, jak lze určit bezrizikovou úrokovou míru, je např. určení z cen diskontovaných bondů (tzv. T-bills), které mají stejný čas do expirace, jako má oceňovaná opce. Jestliže B je cena bondu, který vyplatí za dobu T částku 1000$, pak platí vztah

$$B = e^{-r \cdot T}, \tag{3.48}$$

ze kterého odvodíme rovnici pro bezrizikovou úrokovou míru:

$$r = \frac{ln\left(\frac{1000}{B}\right)}{T}. \tag{3.49}$$

Volatilita

Při odhadu volatility se vychází z historické volatility, tedy na základě časové řady minulých cen podkladového aktiva. Jestliže S_t je posloupnost cen akcie za n období (typicky dnů nebo týdnů), pak je odhadovaná směrodatná odchylka rovna

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2} \tag{3.50}$$

kde:

$$r_i = ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right), \tag{3.51}$$

$$\bar{r_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{n}. \tag{3.52}$$

Jelikož využíváme spojité úročení, je nutno použít k výpočtu volatility logaritmický výnos akcie. Jeho nevýhodou ale je, že je vychýlený (tzn. $E(\hat{\sigma}) \neq \sigma$), a proto by se odhad měl násobit korekčním faktorem. Praxe však ukazuje, že ten lze zanedbat při počtu

pozorování časové řady větším než 20 (což nemusí být problém, neboť historie některých akciových kurzů sahá i několik desetiletí zpět).
Jiný způsob, jak odhadnout volatilitu je tzv. implikovaná volatilita. Ta vychází z již vypozorovaných cen opcí, které se dosadí na levou stranu Black-Scholesovy rovnice. Jedinou neznámou v rovnici je právě volatilita σ, ostatní parametry potřebné k výpočtu jsou buď známé (spotová cena akcie, realizační cena, čas do splatnosti) nebo lehce odhadnutelné (úroková míra).
Důležitým poznatkem je, že implicitní volatilita se liší jak pro opce s různým časem expirace, tak i pro opce se stejným časem expirace, ale různou realizační cenou. Tento jev nazýváme **volatility smile**.

3.3.5 Předpoklady Black-Scholesova modelu

Pro teoretickou konstrukci a pochopení B-S modelu, stejně jako pro konstrukci binomického modelu, je zapotřebí brát v potaz určité předpoklady. V případě ignorování následujících předpokladů by mohlo dojít k nesprávnému pochopení či chybám při použití modelu.

Základní předpoklady Black-Scholesova modelu:

- podkladovým aktivem je akcie, která nevyplácí dividendu,
- trh podkladových aktiv je dokonale konkurenční, neexistují na něm žádné poruchy (neexistují žádné transakční náklady pro prodeje a koupě, daně nebo poplatky z provedení obchodu),
- všechny cenné papíry jsou dokonale dělitelné,
- existuje jedna bezriziková úroková sazba, která je konstantní,
- neexistují žádná omezení (např. omezení obchodů nakrátko),
- neexistuje možnost bezrizikové arbitráže,
- ceny opcí se tvoří na základě stochastického procesu, tj. cena akcie S_t se řídí geometrickým Brownovým pohybem s konstantní odchylkou μ a s konstantním koeficientem volatility σ.

[2], [12]

3.3.6 Odvození vzorce Black-Scholesova modelu pro evropskou call opci

Pokud respektujeme všechna výše uvedená omezení, můžeme přistoupit ke konstrukci B-S modelu. Ten vyjadřuje cenu opce jako funkci pěti proměnných – spotové ceny akcie, realizační ceny opce, doby do splatnosti opce, volatility ceny akcie a bezrizikové úrokové míry.

Pro odvození Black-Scholesova modelu pro call opci nyní využijeme poznatky z předcházejících kapitol – v oddílu č. 3.3.3 jsme si odvodili vztah (3.47) stochastického procesu chování ceny akcie

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

jehož dosazením do Itôova lemmatu[15] získáme

$$dC_t = \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \mu S_t \cdot \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot {S_t}^2 \cdot \frac{\partial^2 C_t}{\partial {S_t}^2}\right) dt + \sigma \cdot S_t \cdot \frac{\partial C_t}{\partial S_t} dW_t \qquad (3.53)$$

kde S_t … cena akcie,

C_t … hodnota call opce,

μ … míra zisku akcie,

σ … volatilita ceny akcie,

W_t … Wienerův proces.

Vztah (3.53) nyní přepíšeme do přírůstkového tvaru

$$\Delta C_t = \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \mu S_t \cdot \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot {S_t}^2 \cdot \frac{\partial^2 C_t}{\partial {S_t}^2}\right) \Delta t + \sigma \cdot S_t \cdot \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \Delta W_t. \qquad (3.54)$$

Nyní budeme uvažovat portfolio tvořené krátkou call pozicí na akcii a $\frac{\partial C_t}{\partial S_t}$ kusů této akcie. Cenu takového portfolia vyjádříme jako

$$P = -C_t + \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \cdot S_t, \qquad (3.55)$$

přírůstek ceny tohoto portfolia během časového intervalu Δt je pak pomocí dosazení vztahů (3.46) a (3.54) dán rovnicí

[15] Itôovo lemma představuje způsob, jak odvodit diferenciál časově závislé funkce stochastického procesu. [37]

$$\Delta P = -\Delta C_t + \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \cdot \Delta S_t = \left(-\frac{\partial C_t}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot {S_t}^2 \cdot \frac{\partial^2 C_t}{\partial {S_t}^2} \right) \cdot \Delta t. \tag{3.56}$$

Tím jsme získali jednak vztah (3.56) pro výpočet přírůstku portfolia a zároveň jsme z něj odstranili náhodný člen Wienerova procesu ΔW_t.

Odstraněním náhodného členu jsme docílili toho, že se toto portfolio nyní chová deterministicky (bezrizikově), čímž lze k jeho popisu použít bezrizikovou míru r:

$$\Delta P = P \cdot r \cdot \Delta t\,. \tag{3.57}$$

Dosazením vztahů (3.55) a (3.56) dostaneme Black-Scholesovu diferenciální rovnici pro C_t:

$$rC_t = \frac{\partial C_t}{\partial t} + rS_t \cdot \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2 \cdot \frac{\partial^2 C_t}{\partial {S_t}^2}\,, \tag{3.58}$$

ze které úpravami získáme **Black-Scholesův výsledný vztah pro určení hodnoty evropské call opce**

$$C_t = S_t \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2), \tag{3.59}$$

kde: C_t … hodnota call opce v čase t

S_t … spotová cena podkladového aktiva v čase t

N … distribuční funkce normovaného normálního rozdělení,

X … realizační cena opce

r … bezriziková úroková míra,

T … čas do expirace.

K výpočtu hodnoty evropské call opce pomocí Black-Scholesova modelu už zbývá jen vyjádřit vztahy pro d_1 a d_2:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.60}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,. \tag{3.61}$$

[13]

3.3.7 Black-Scholesův model pro evropskou put opci

Pro vyjádření evropské put opce využijeme vztah (3.3) put-call parity z kapitoly 3.1.1, do kterého dosadíme již známou Black-Scholesovu rovnici (3.59) pro výpočet call opce, a tím dostaneme konečný vztah (3.62) pro ocenění evropské put opce:

$$P_t = X \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2) - S_t \cdot N(-d_1). \tag{3.62}$$

[8], [13], [16]

3.4 Citlivost opcí

Citlivost opcí na změnu určitých faktorů, které ovlivňují hodnotu opční prémie, se měří pomocí tzv. Greeks. Jsou to speciální ukazatele měřící riziko, plynoucí ze změny těchto ukazatelů. Svůj název získaly Greeks podle označení jednotlivých ukazatelů písmeny řecké abecedy.

Výpočet jednotlivých ukazatelů je poměrně jednoduchý, většinou se stanoví jako derivace ceny odhadnuté pomocí Black-Scholesova vzorce podle příslušného faktoru.

Základní citlivostní ukazatele jsou:

- *míra delta,*
- *míra gama,*
- *míra theta,*
- *míra vega,*
- *míra rho.*

[1]

3.4.1 Míra delta

Tato míra vyjadřuje citlivost ceny opce na změnu ceny bazického aktiva, za jinak nezměněných podmínek. Ukazuje tedy, o kolik se změní hodnota ceny opce, pří změně hodnoty podkladového aktiva o jednotku a vypočte se jako první parciální derivace ceny opce podle ceny podkladového aktiva.

Hodnota míra delta pro evropskou call opci:

$$\Delta_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = \Phi(d_1) \tag{3.63}$$

kde Δ_t^C … citlivost ceny call opce na změnu ceny bazického aktiva v čase t,

C_t … hodnota call opce v čase t,

S_t … cena podkladového aktiva v čase t,

Φ … distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Obdobně zapíšeme i hodnotu míry delta pro evropskou put opci:

$$\Delta_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial S_t} = \Delta_t^C - 1 = -\Phi(-d_1) \tag{3.64}$$

kde Δ_t^P … citlivost ceny put opce na změnu ceny bazického aktiva v čase t,

P_t … hodnota put opce v čase t.

[1], [2]

3.4.2 Míra gama

Míra gama popisuje citlivost míry delta na změnu ceny podkladového instrumentu. Ukazuje tedy, o kolik se změní hodnota míry delta, pokud se hodnota podkladového aktiva změní o jednotku (za jinak stejných podmínek).

Hodnota míry gama pro evropskou call opci:

$$\Gamma_t^C = \frac{\partial^2 C_t}{\partial {S_t}^2} = \frac{\varphi(d_1)}{\sigma \cdot S_t \cdot \sqrt{T-t}} \tag{3.65}$$

kde Γ_t^C … citlivost míry delta call opce na změnu ceny podkladového aktiva v čase t,

φ … hustota pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení,

T … datum splatnosti opce,

t … současné datum,

σ … volatilita ceny podkladového aktiva.

Analogicky vyjádříme i míru gama pro evropskou put opci:

$$\Gamma_t^P = \frac{\partial^2 P_t}{\partial {S_t}^2} = \Gamma_t^C, \tag{3.66}$$

kde Γ_t^P … citlivost míry delta put opce na změnu ceny podkladového aktiva v čase t. [1], [2]

3.4.3 Míra theta

Theta vyjadřuje citlivost hodnoty opční prémie na změnu doby do expirace opce. Ukazuje, o kolik procent se změní hodnota opční prémie, pokud se sníží doba do expirace opce o jeden den. Míra theta je definována jako záporná derivace hodnoty opce vzhledem k době do splatnosti opce.

Hodnota theta pro evropskou call opci:

$$\Theta_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial t} = -\frac{\sigma \cdot S_t}{2\sqrt{T-t}} \cdot \varphi(d_1) - r \cdot X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2) \tag{3.67}$$

kde Θ_t^C … citlivost ceny call opce na změnu doby do expirace opce,

r … bezriziková úroková míra,

X … realizační doba opce.

Obdobně theta pro evropskou put opci:

$$\Theta_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial t} = \Theta_t^C + r \cdot X \cdot e^{-r(T-t)} \tag{3.68}$$

kde Θ_t^P … citlivost ceny put opce na změnu doby do expirace opce.

[1], [2]

3.4.4 Míra vega

Citlivostní ukazatel vega (někdy označována jako míra lambda) měří citlivost opční prémie na změnu volatility ceny podkladového instrumentu. Vypočítá se jako první parciální derivace ceny call opce podle volatility podkladového aktiva.

Pokud roste volatilita podkladového aktiva, pak roste i cena opce (call i put). Jinými slovy, čím rizikovější podkladové aktivum bude, tím více si upisovatel opce nechá zaplatit. [2]

Hodnota vega pro evropskou call opci:

$$v_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = S_t \cdot \sqrt{T-t} \cdot \varphi(d_1) \tag{3.69}$$

kde $\quad v_t^C$ … citlivost ceny call opce na změnu volatility ceny podkladového aktiva v čase t.

Obdobně pro evropskou put opci:

$$v_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial \sigma} = vega_t^C \tag{3.70}$$

kde $\quad v_t^P$ … citlivost ceny put opce na změnu volatility ceny podkladového aktiva v čase t.

[1]

3.4.5 Míra rho

Míra rho popisuje citlivost ceny opce na změnu bezrizikové úrokové míry. Vyjadřuje tedy, o kolik se změní cena opce, dojde-li ke změně bezrizikové úrokové míry o jednotku.

Rho se vypočte jako první parciální derivace ceny opce podle bezrizikové úrok. míry.

Hodnota míry rho evropské call opce:

$$\rho_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial r} = (T-t) \cdot X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2) \tag{3.71}$$

kde $\quad \rho_t^C$ … citlivost ceny call opce na změnu bezrizikové úrok. míry v čase t.

Analogicky hodnota rho pro evropskou put opci:

$$\rho_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial r} = -(T-t) \cdot X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(-d_2) \tag{3.72}$$

kde $\quad \rho_t^P$ … citlivost ceny put opce na změnu bezrizikové úrok. míry v čase t.

[1], [2]

4 Modely pro opce s více podkladovými aktivy

Víceaktivové či *multi-asset opce* se od klasických druhů opcí liší tím, že zajišťují právo (nikoliv povinnost) koupit nebo prodat ne jedno, ale vícero podkladových aktiv. V této kapitole si přiblížíme matematické modely pro oceňování opcí tohoto druhu – tedy *víceaktivové* či *multi-asset* modely.

Nejprve bude popsán model pro ocenění opcí se dvěma podkladovými aktivy, který je následně rozšířen pro více aktiv. Jako poslední bude přiblížena podoba binomického modelu pro opci se čtyřmi aktivy.

4.1 Multi-asset model pro opce na dvě podkladová aktiva

Tento model se opírá o Black-Scholesovu teorii oceňování opcí, navíc používá myšlenku korelovaných náhodných procházek[16] a odpovídající vícefaktorové verzi Itôova lemmatu.

Model uvažuje evropskou opci, jejíž opční prémie, vyjádřená funkcí $f(S_1, S_2)$, závisí na dvou aktivech – aktivu S_1 a S_2.

V kapitole č. 3.3 byla pro model s jedním podkladovým aktivem uvažovaná míra výnosu jako náhodná procházka s logaritmicko-normálním rozdělením daný vztahem

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

kde S … cena podkladového aktiva,

t … časový okamžik,

μ … střední hodnota,

σ … směrodatná odchylka (volatilita ceny podkladového aktiva),

W … náhodný Wienerův proces.

Jelikož uvažujeme model se dvěma podkladovými aktivy, tento vztah je potřeba rozšířit pro dvě aktiva – S_1 a S_2:

$$\frac{dS_1}{S_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_1, \tag{4.1}$$

[16] Změny cen podkladových aktiv jsou učiněny náhodným směrem – tedy jsou nahodilé a nepředvídatelné.

$$\frac{dS_2}{S_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_2. \tag{4.2}$$

Ve vztazích (4.1) a 4.2) opět uvažujeme dW_i pro $i = \{1,2\}$ jako náhodné číslo, které se řídí normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou $dt^{1/2}$, viz následující vztah (4.3):

$$E(dW_i) = 0 \; a \; E[dW_i^2] = dt, \tag{4.3}$$

přičemž náhodná čísla dW_1 a dW_2 jsou korelována podle vztahu:

$$E[dW_1 dW_2] = \rho dt \tag{4.4}$$

kde ρ … korelační koeficient mezi dvěma náhodnými procházkami.

Stejně jako v Black-Scholesově modelu, i zde musíme pro vyjádření finálního vztahu sestrojit portfolio. Definujme si proto $V(S_1, S_2, t)$ jako hodnotu opce. Jelikož uvažujeme dvě podkladová aktiva, a tudíž i dva zdroje nejistoty, toto portfolio se bude skládat z jedné dlouhé pozice a dvou krátkých pozic určitých množství podkladových aktiv:

$$\Pi = V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2, \tag{4.5}$$

kde Π … hodnota portfolia,

V … hodnota opce,

Δ_1, Δ_2 … množství nakoupených podkladových aktiv,

S_1, S_2 … ceny podkladových aktiv.

Jelikož se předpokládá, že portfolio nebude nabývat záporných hodnot, rovnici portfolia (4.5) je potřeba vyjádřit v přírůstkovém tvaru:

$$d\Pi = dV - \Delta_1 dS_1 - \Delta_2 dS_2 \tag{4.6}$$

kde $d\Pi$ … přírůstek hodnoty portfolia,

dV … přírůstek hodnoty opce,

dS_1, dS_2 … přírůstky cen podkladových aktiv.

Dále je potřeba Itôovo lemma pro dvě proměnné:

$$dV = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right] dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2. \quad (4.7)$$

Vztah dvourozměrného Itôovo lemmatu může být odvozen použitím Taylorovy řady a známých pravidel (4.3) a (4.4):

$$dW_i^2 = dt, \text{ pro } i = \{1, 2\},$$

$$dW_1 dW_2 = \rho dt.$$

Stejně jako v případě Black-Scholesova modelu, je opět potřeba odstranit náhodné členy z rovnice, čímž dosáhneme deterministického (a tím i bezrizikového) chování. Proto uvažujme $\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial S_1}$ a $\Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial S_2}$. Dosazením do rovnice (4.6) dostaneme vztah

$$d\Pi = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right] dt \quad (4.8)$$

kde dt … přírůstek času.

Takto sestavené portfolio je bezrizikové a přináší bezrizikový výnos

$$d\Pi = r\Pi = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S_1} S_1 - \frac{\partial V}{\partial S_2} S_2\right) dt \quad (4.9)$$

kde r … bezriziková úroková míra.

Úpravami dostaneme výslednou **rovnici pro ocenění opcí na dvě podkladová aktiva bez výplaty dividend** (4.10):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} - rV = 0. \quad (4.10)$$

Výraz (4.10) je definován oborem hodnot

$$\{S_1 > 0, S_2 > 0, t \in \langle 0; T)\},$$

a terminální podmínku výplatní funkce zapíšeme ve tvaru

$$V(S_1, S_2, t) = f(S_1, S_2). \quad (4.11)$$

Odpovídající terminální podmínky pro hodnoty opční prémie jsou:

$$f(S_1,S_2)\begin{cases}(max(S_1,S_2)-X)^+, pro\ maximum\ call\ opce,\\ (min(S_1,S_2)-X)^+, pro\ minimum\ call\ opce,\\ \left(X-max(S_1,S_2)\right)^+, pro\ maximum\ put\ opce,\\ \left(X-min(S_1,S_2)\right)^+, pro\ minimum\ put\ opce.\end{cases} \tag{4.12}$$

Rovnice (4.10) je matematickým řešením daného modelu. Praktické řešení by byla otázka pro numerickou matematiku, což není cílem této práce, proto se spokojíme s tímto řešením.

V případě, že bychom uvažovali model pro opce vyplácející dividendu, upravením vztahu (4.10) dostaneme rovnici

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_1^2S_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}+\rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1\partial S_2}+\frac{1}{2}\sigma_2^2S_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}+(r-q_1)S_1\frac{\partial V}{\partial S_1}+(r-q_2)S_2\frac{\partial V}{\partial S_2}-rV=0 \tag{4.13}$$

kde q_1 … dividendový výnos podkladového aktiva S_1,

q_2 … dividendový výnos podkladového aktiva S_2.

[35]

4.2 Multi-asset model pro více než dvě podkladová aktiva

Nyní se zaměříme na oceňování opcí s více než dvěma podkladovými aktivy a přiblížíme si model pro jejich ocenění, který navazuje na multi-asset model pro dvě podkladová aktiva z předchozí kapitoly. Opce s větším počtem podkladových aktiv mohou být např. basket opce (basket options) nebo rainbow opce. Pro demonstraci tohoto modelu uvažujme opci na čtyři podkladová aktiva ($n=4$).

Základem pro odvození modelu je předpoklad uvažování stochastického děje, který se řídí Wienerovým procesem

$$dS_i=\mu_iS_idt+\sigma_iS_idW_i \tag{4.14}$$

kde S_i … cena i-tého podkladového aktiva,

μ_i … směrodatná odchylka (volatilita) i-tého podkladového aktiva,

σ_i … volatilita i-tého podkladového aktiva,

dW_i … i-tý přírůstek geometrického Brownova pohybu,

$i = 1, 2, \dots, n.$

Přírůstek geometrického Brownova pohybu dW_i stále uvažujeme jako náhodné číslo řídící se normálním rozdělením se střední hodnotou rovné nule a směrodatnou odchylkou $dt^{1/2}$, tudíž platí vztah (4.3), který je pro připomenutí ve tvaru

$$E(dW_i) = 0 \; a \; E[dW_i^2] = dt,$$

přičemž náhodná čísla dW_i a dW_j jsou korelována a dána vztahem

$$E\left[dW_i dW_j\right] = \rho_{ij} dt, \tag{4.15}$$

kde ρ_{ij} … korelační koeficient mezi i-tou a j-tou náhodnou procházkou.

Nyní je potřeba vytvořit tzv. korelační matici, která je symetrická a pro kterou platí následující pravidla:

ρ_{ij} … vstup v i-tém řádku a j-tém sloupci,

$\rho_{ii} = 1,$

$\rho_{ij} = \rho_{ji}.$

Korelační matice tedy bude v tomto případě vypadat následovně:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Aby bylo možné pracovat s funkcí mnoha proměnných, je potřeba využít vícerozměrnou verzi Itôova lemmatu. Uvažujme funkci V proměnných $S_1, S_2, \dots, S_n$ a času t

$$V(S_1, S_2, \dots, S_n, t),$$

pro kterou aplikací Itôova lemmatu platí vztah

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} \right) dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial S_i} dS_i. \tag{4.17}$$

Nyní se dostáváme k samotné konstrukci modelu pro oceňování basket opcí. Jako při odvozování předchozích modelů, i zde je potřeba sestavení portfolia – v tomto případě uvažujme portfolio složené z jedné basket opce a krátké pozice složené z Δ_i počtu podkladových aktiv S_i.

Dále aplikujeme vícerozměrné Itôovo lemma, pro eliminaci rizika uvažujeme $\Delta_i = \frac{\partial V}{\partial S_i}$ a položíme výnos portfolia rovný bezrizikové úrokové míře. Těmito operacemi dostaneme konečné matematické řešení pro ocenění basket opce:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + \sum_{i=1}^{n}(r - q_i)S_i\frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0 \qquad (4.18)$$

kde r … bezriziková úroková míra,

q_i … dividendový výnos i-tého podkladového aktiva.

Pro kompletnost modelu je ještě nutno zapsat terminální podmínku výplatní funkce

$$V(S_1, S_2, \dots, S_n, t) = f(S_1, S_2, \dots, S_n). \qquad (4.19)$$

Vzorce (4.18) a (4.19) tedy tvoří kompletní model pro výpočet ceny multi-asset opce s více než dvěma podkladovými aktivy. Obdobně jako u předchozího modelu, odpovídající terminální podmínky pro hodnoty opční prémie jsou následující:

$$f(S_1, S_2, \dots, S_n)\begin{cases}(max(S_1, S_2, \dots, S_n) - X)^+, pro\ maximum\ call\ opce,\\ (min(S_1, S_2, \dots, S_n) - X)^+, pro\ minimum\ call\ opce,\\ \left(X - max(S_1, S_2, \dots, S_n)\right)^+, pro\ maximum\ put\ opce,\\ \left(X - min(S_1, S_2, \dots, S_n)\right)^+, pro\ minimum\ put\ opce.\end{cases} \qquad (4.20)$$

[H]

4.3 Binomický model oceňování opcí s více podkladovými aktivy

V této části pouze přiblížíme, jak by vypadalo rozšíření binomického modelu oceňování opcí, jenž byl odvozen v kapitole č. 3.2. Ten předpokládal opce s jedním podkladovým aktivem, nyní budeme uvažovat binomický model pro opce se dvěma aktivy.

Uvažujme tedy dvě podkladová aktiva S_1 a S_2, jejichž cena se bude pohybovat v diskrétních časových okamžicích – buď bude růst, nebo bude klesat. Cena podkladových aktiv S_1 a S_2 tedy v každém následujícím okamžiku bude

(S_1u_1, S_2u_2) s pravděpodobností p_1,

(S_1u_1, S_2d_2) s pravděpodobností p_2,

(S_1d_1, S_2u_2) s pravděpodobností p_3,

(S_1d_1, S_2d_2) s pravděpodobností p_4.

Hodnota opce se dvěma podkladovými aktivy by pak vypadala následovně:

$$\begin{aligned} V(S_1, S_2, t) = e^{-r\Delta t}[&p_1 V(S_1u_1, S_2u_2, t + \Delta t) + \\ &+p_2 V(S_1u_1, S_2d_2, t + \Delta t) \\ &+p_3 V(S_1d_1, S_2u_2, t + \Delta t) \\ &+p_4 V(S_1d_1, S_2d_2, t + \Delta t)] \end{aligned} \tag{4.21}$$

kde p_i pro $i = 1, 2, 3, 4$ … pravděpodobnost nastání,

u_i pro $i = 1, 2$ … koeficient růstu,

d_i pro $i = 1, 2$ … koeficient poklesu,

r … bezriziková úroková míra,

t … časový okamžik.

Navíc platí pro $i = \{1, 2\}$ platí

$$u_i = e^{\sigma_i \sqrt{\Delta t}} \tag{4.22}$$

$$d_i = \frac{1}{u_i} \tag{4.23}$$

kde σ_i … volatilita i-tého prvku.

Pro výpočet modelu jsou dále potřeba vztahy pro pravděpodobnosti $p_1 - p_4$:

$$p_1 = \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{r - q_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} + \frac{r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right)\sqrt{\Delta t} + \rho\right], \tag{4.24}$$

$$p_2 = \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{r - q_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} - \frac{r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right)\sqrt{\Delta t} - \rho\right], \tag{4.25}$$

$$p_3 = \frac{1}{4}\left[1 + \left(-\frac{r - q_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} - \frac{r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right)\sqrt{\Delta t} + \rho\right], \tag{4.26}$$

$$p_4 = \frac{1}{4}\left[1 + \left(-\frac{r - q_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} + \frac{r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right)\sqrt{\Delta t} - \rho\right]. \tag{4.27}$$

Pokud porovnáme binomické modely pro opce s jedním a dvěma podkladovými aktivy, je vidět, že s každým dalším aktivem exponenciálně roste množství výpočtů. Pro případy se čtyřmi a více podkladovými instrumenty už je prakticky nemožné k výpočtu binomický model použít. Pro finální odvození modelu by se dále využila simulace Monte Carlo[17], kterou však nebudeme dále do hloubky rozvádět, neboť přesahuje rámec této práce. [35]

[17] Analytická stochastická metoda využívající posloupnost náhodných čísel k simulaci experimentů nebo řešení komplikovaných úloh, např. složitých integrálů nebo diferenciálních rovnic. Principem metody je vytvoření nějakého stochastického děje a po proběhnutí dostatečného množství simulací tohoto děje se data můžou dále zpracovat. [36]

5 Modely oceňování opcí a numerické experimenty s využitím sw Mathematica

Doposud jsme se zabývali pouze teoretickými vlastnostmi opcí a ostatních finančních derivátů a zkonstruovali jsme modely pro jejich oceňování. Následující část práce se zaměřuje na aplikaci teoretických modelů na konkrétní příklady s konkrétními daty.

Pro zjednodušení matematické práce, simulace, tvoření grafů a další výpočty vznikly různé matematické programy. Pro další práci s modely je použito softwarového programu Mathematica, Wolfram Research, Inc. verze 10. Pomocí tohoto softwaru si namodelujeme teoretické vzorce pro výpočet ceny opcí a poté budeme s modely provádět vybrané numerické experimenty.

5.1 Ocenění evropské opce binomickým modelem

V této části se zaměříme na praktické výpočty cen evropských opcí pomocí binomického modelu. Nejdříve si ukážeme postupné jednodušší výpočty pro jednokrokový a dvoukrokový model, následně aplikujeme teoretický vzorec pro výpočet opční prémie pomocí složitějšího vícekrokového binomického modelu.

5.1.1 Jednokrokový binomický model

Pro opci trvající jedno období, jejíž hodnotu opční prémie budeme odhadovat pomocí jednokrokového binomického modelu, uvažujme následující vzorový příklad č. 1. Pro tento příklad bude v prostředí sw Mathematica naprogramován model, který bude sloužit kromě výpočtu také pro seznámení se softwarem – jednotlivé kroky pro výpočet budou detailně a postupně popsány. Kompletní model je pak k nalezení v příloze A.

<u>Ukázkový příklad č.1:</u>

- Uvažujme dva časové okamžiky: okamžik t, reprezentující dnešní datum a časový okamžik $t+1$, reprezentující jeden rok ode dneška.
- Dále uvažujme akcii nevyplácející dividendu, jejíž spotová cena je 100 EUR.
- Cena akcie v čase $t+1$ buď stoupne o $+\,9\%$ nebo klesne o $-\,3\%$.
- Bezriziková úroková míra je 4%.
- Datum splatnosti call opce je za jeden rok – v čase $t+1$.
- Realizační cena opce je 87 EUR.

- Naším úkolem je vypočítat cenu call opce v čase t.

<u>Řešení příkladu</u>

Pro řešení je potřeba využít vztahů z kapitoly č. 3.2.2. Nejprve je tedy potřeba vypočítat hodnotu akcie v čase $t + 1$. S pomocí programu Mathematica ceny akcie vypočteme pomocí námi nadefinovaných funkcí

```
stockPriceUp [S_, u_]
```

```
stockPriceDown [S_, d_],
```

které pracují s formálními argumenty **S_**, **u_** a **d_**:

S_ … spotová cena akcie,

u_ … míra vzrůstu ceny akcie,

d_ … míra poklesu ceny akcie.

Celá deklarace funkcí vypadá následovně:

```
stockPriceUp [S_, u_] := S * (1 + u);

stockPriceDown [S_, d_] := S * (1 - d);
```

Následně přiřadíme číselné hodnoty proměnným

```
stockPriceUp [100, 0.09]

stockPriceDown [100, 0.03]
```

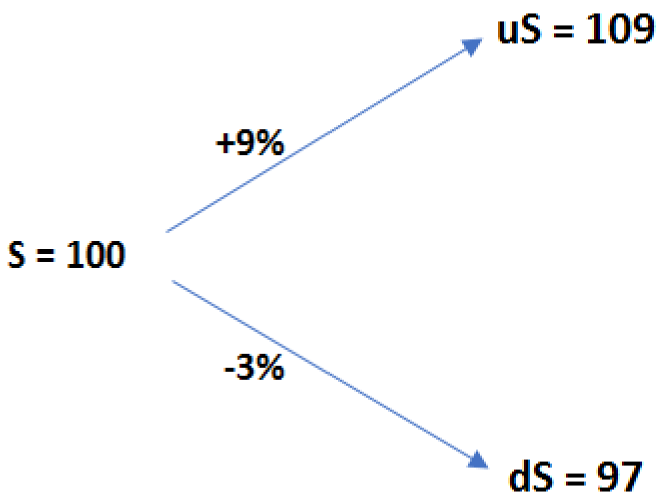
čímž jsme získali výsledné hodnoty akcie v čase $t + 1$:

$$uS(S, u) = 109$$

$$dS(S, d) = 97,$$

viz následující Obrázek č. 5:

Obrázek č. 5: Vývoj spotové ceny akcie v jednokrokovém BOTM (v EUR)



Zdroj: vlastní zpracování, 2017

Druhým krokem je výpočet ceny call opce v čase $t+1$. V softwaru Mathematica je proto potřeba definovat dvě funkce

```
callUp [S_, u_, X_]

callDown [S_, d_, X_]
```

kde **X_** … formální argument realizační ceny opce.

Pro deklaraci těchto funkcí bylo použito známých vztahů (3.8) a (3.9):

```
callUp [S_, u_, X_] := Max[0,stockPriceUp[S,u] - X];

callDown [S_, d_, X_] := Max[0,stockPriceDown[S,d]-X];
```

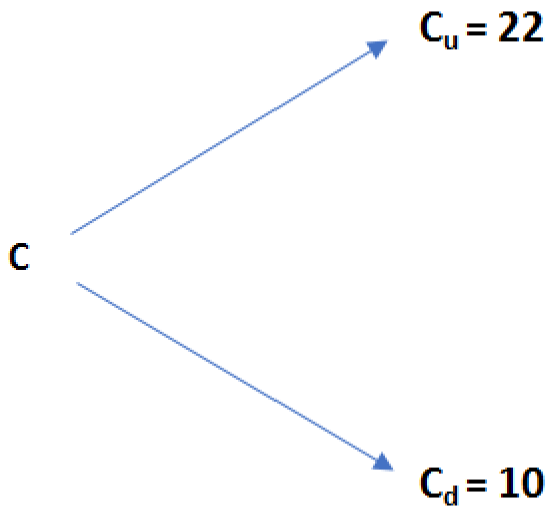
Jakmile máme funkce deklarované, nezbývá než jejich formálním argumentům přiřadit číselné hodnoty, čímž dostaneme výsledné hodnoty call opce v čase $t+1$:

$$C_u(S,u,x) = 22$$

$$C_d(S,d,x) = 10,$$

viz následující Obrázek č. 6:

Obrázek č. 6: Cena evropské call opce v období t+1 (v EUR)



Zdroj: vlastní zpracování, 2017

Třetím krokem je výpočet neznámých Δ a *B*, k čemuž jsou potřeba další dvě nové funkce

```
delta[S_, u_, d_, X_]
B[S_, u_, d_, r_, X_]
```

kde **r_** … formální argument bezrizikové úrokové míry.

Deklarace funkcí podle vzorců (3.12) a (3.13) vypadá následovně:

```
delta[S_, u_, d_, X_] :=
    (callUp[S, u, X] - callDown[S, d, X]) /
    (stockPriceUp[S, u] - stockPriceDown[S, d]);


B[S_, u_, d_, r_, X_] :=
    (callDown [S, d, X] * stockPriceUp [S, u] -
    callUp [S, u, X] * stockPriceDown [S, d]) /
    ((stockPriceUp[S, u] - stockPriceDown[S,d]) *
    (1+r));
```

Po naplnění formálních argumentů hodnotami získáme výsledné hodnoty proměnných Δ a B:

$$\Delta = 1,$$

$$B = -83.653846.$$

Nyní máme všechny potřebné mezivýpočty a již nám nic nebrání výpočtu hodnoty opční prémie v čase t podle vztahu (3.14). Nezbývá než definovat funkci pro finální výpočet opční prémie

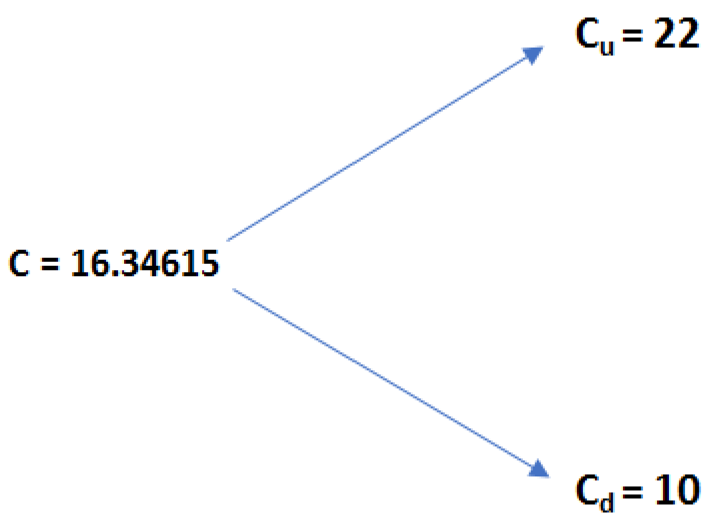
```
oneStepBinomEurCallPrice[S_,delta_,B_]:=S * delta + B;
```

do níž dosadíme dříve vypočítané hodnoty jejích formálních argumentů:

```
oneStepBinomEurCallPrice [100, 1, -83.65384615384615]
```

Tímto jsme získali výslednou cenu call opce v čase t pomocí jednokrokového binomického modelu, a to ve výši $\mathbf{16.34615}\ \boldsymbol{EUR}$ (viz následující Obrázek č. 7).

Obrázek č. 7: Vývoj opční prémie v jednokrokovém binomickém modelu (v EUR)



Zdroj: vlastní zpracování, 2017

5.1.2 Dvoukrokový binomický model

Nyní v prostředí Wolfram Mathematica naprogramujeme model pro ocenění opce se dobou do splatnosti dvě období, a to pomocí dvoukrokového binomického modelu. Ten navazuje na jednokrokový model a rozšiřuje ho o další období.

Sestavení modelu v softwaru Mathematica provedeme na základě stejného vzorového příkladu jako v předešlém případě, pouze s drobnými odchylkami týkajících se rozšíření počtu období na 2.

Ukázkový příklad č. 2:

- Uvažujme tři časové okamžiky: okamžik t, reprezentující dnešní datum, časový okamžik $t+1$, reprezentující jeden rok ode dneška a časový okamžik $t+2$, reprezentující dva roky ode dneška.
- Uvažujeme akcii nevyplácející dividendu, jejíž spotová cena je 100 EUR.
- Cena akcie stoupne o $+$ 9% nebo klesne o $-$ 3% než v předcházejícím období.
- Bezriziková úroková míra je 4%.
- Datum splatnosti call opce je za dva roky – v čase $t+2$.
- Realizační cena opce je 87 EUR.
- Naším úkolem je vypočítat cenu call opce v čase t.

Řešení příkladu

Pro řešení ocenění této opce navážeme na kapitolu 3.2.3. Jelikož hodnoty cen podkladové akcie v období $t+1$ jsou už známé z předchozího příkladu (uS = 109 EUR, dS = 97 EUR), je prvním krokem výpočet cen podkladové akcie v období $t+2$. K tomu deklarujeme následující funkce:

```
stockPriceUpUp [S_, u_] := S * (1 + u)^2;

stockPriceUpDown [S_, u_, d_] := S * (1 + u) * (1 - d);

stockPriceDownDown [S_, d_] := S * (1 - d)^2;
```

Dosazením hodnot formálních argumentů **S_**, **u_** a **d_**

```
stockPriceUpUp [100, 0.09]

stockPriceUpDown [100, 0.09, 0.03]

stockPriceDownDown [100, 0.03]
```

získáme výsledné hodnoty akcie v čase $t+2$:

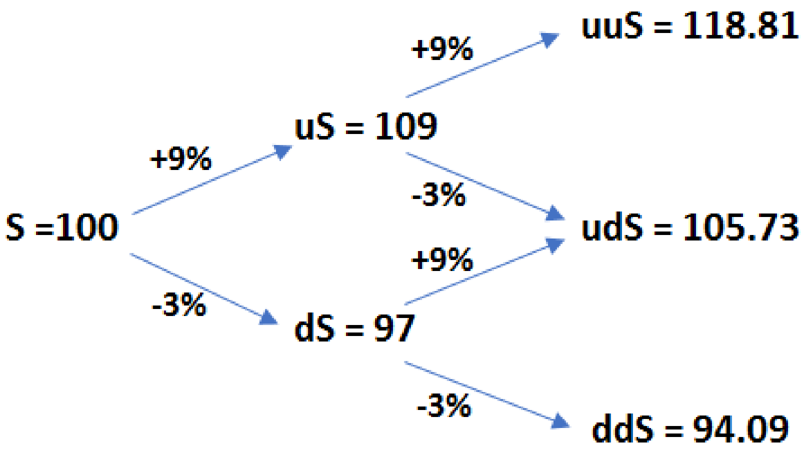
$$uuS(S,u) = 118.81$$

$$udS(S, u, d) = 105.73$$

$$ddS(S, d) = 94.09,$$

Viz následující Obrázek č. 8:

Obrázek č. 8: Vývoj spotové ceny akcie v dvoukrokovém BOTM (v EUR)



Zdroj: vlastní zpracování, 2017

Nyní pokračujeme obdobně jako v jednokrokovém modelu – je zapotřebí vypočítat ceny call opce v posledním období – v čase $t + 2$. V programu Mathematica tedy deklarujme funkce

```
callUpUp[S_,u_,X_]

callUpDown[S_,u_,d_,X_]

callDownDown[S_,d_,X_]
```

podle známých vztahů (3.18) – (3.20):

```
callUpUp[S_,u_,X_]:= Max[0, stockPriceUpUp[S, u] - X];

callUpDown[S_,u_,d_,X_]:=Max[0,stockPriceUpDown[S,u,d]
    - X];

callDownDown[S_,d_,X_]:= Max[0,stockPriceDownDown[S,d]
    - X];
```

Naplněním funkcí příslušnými hodnotami formálních argumentů

```
callUpUp [100, 0.09, 87]
```

```
callUpDown [100, 0.09, 0.03, 87]

callDownDown [100, 0.03, 87]
```

získáme všechny tři výsledné hodnoty call opce, které mohou v čase $t+2$ nastat:

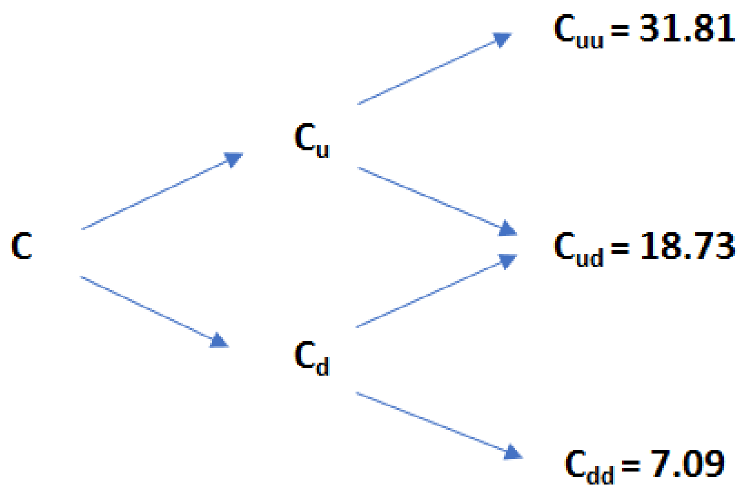
$$C_{uu}(S,u,X) = 31.81$$

$$C_{ud}(S,u,d,X) = 18.73$$

$$C_{dd}(S,d,X) = 7.09,$$

viz následující Obrázek č. 9:

Obrázek č. 9: Cena evropské call opce v období t + 2 (v EUR)



Zdroj: vlastní zpracování, 2017

V tomto momentě tedy máme všechny hodnoty opce v čase $t+2$. Abychom však mohli použít vzorec (3.23), je zapotřebí vypočítat, s jakou pravděpodobností nastanou hodnoty opce v jednotlivých krocích. K tomu je potřeba deklarovat funkci **probability**:

```
probability[u_, d_, r_] := (((1 + r) - d)) / ((u - d));
```

Po dosazení za formální argumenty ***u_***, ***d_*** a ***r_*** získáme výsledek

$$p = 0.58333333.$$

Nyní již máme k dispozici všechny vstupy potřebné pro použití vztahu (3.23), proto deklarujeme funkci **twoStepBinomEurCallPrice**:

```
twoStepBinomEurCallPrice[S_, u_, d_, r_, X_, p_] :=
     ((p^2 * callUpUp[S, u, X] + 2p * (1 - p) *
     callUpDown[S, u, d, X] + (1 - p)^2 *
     callDownDown[S, d, X])) / ((1 + r)^2);
```

do které opět dosadíme za veškeré její formální argumenty vypočítané hodnoty a hodnoty ze zadání příkladu:

```
twoStepBinomEurCallPrice[100,0.09,0.03,0.04,87,
     0.58333333]
```

Tím jsme se dostali ke konečnému výsledku a získali hodnotu opční prémie evropské call opce s použitím dvoukrokového binomického modelu, a to ve výši **19.5636 EUR.**

Pokud bychom chtěli zjistit také hodnoty call opce pro období $t+1$, pak využijeme odvozené vztahy (3.21) a (3.22). Funkce pro jejich výpočet by vypadaly následovně:

```
callUp [p_, S_, u_, d_, X_, r_] :=
     (p * callUpUp[S, u, X] + (1-p) *
     callUpDown[S,u,  d, X]) / (1 + r);

callDown [p_, S_, u_, d_, X_, r_] :=
     (p * callUpDown[S, u, d, X] + (1 - p) *
     callDownDown[S, d, X]) / (1 + r);
```

Zavoláním funkcí `callUp` a `callDown` a dosazením hodnot za formální argumenty

```
callUp[0.5833333333333334, 100, 0.09, 0.03, 87, 0.04]

callDown[0.5833333333333334, 100, 0.09, 0.03, 87, 0.04]
```

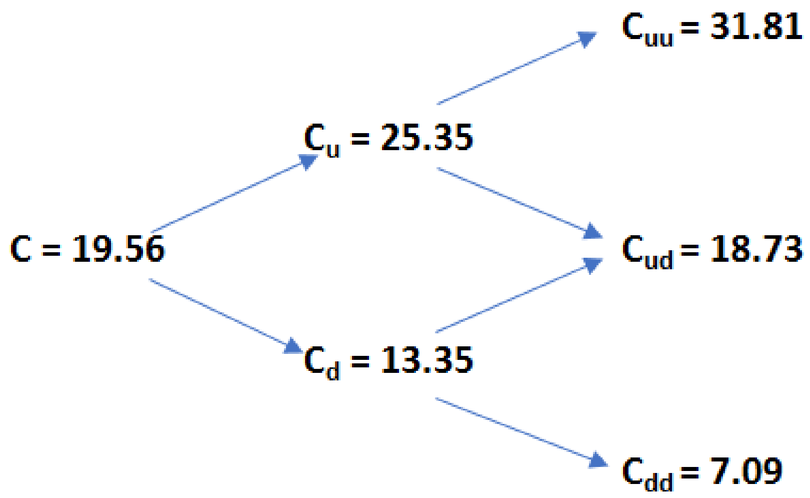
získáme výsledné hodnoty akcie v čase $t+1$:

$$C_u = 25.34616,$$

$$C_d = 13.34616,$$

viz následující Obrázek č. 10:

Obrázek č. 10: Vývoj ceny evropské call opce v dvoukrokovém BOPM (v EUR)



Zdroj: vlastní zpracování, 2017

Kompletní naprogramovaný dvoukrokový model je k nahlédnutí v příloze B.

5.1.3 Binomický model pro více časových období

Další model, který pomocí prostředí Mathematica naprogramujeme, je binomický model pro více (n) období. V této kapitole bude detailněji rozebrána jeho implementace, celý model je pak přiložený v příloze C.

Sestavení modelu v softwaru Mathematica budeme opět demonstrovat na vzorovém příkladu:

Ukázkový příklad č. 3:

- Uvažujme celkem 10 časových okamžiků.
- Uvažujeme akcii nevyplácející dividendu, jejíž spotová cena je 100 EUR.
- Bezriziková úroková míra je 4%.
- Datum splatnosti opce je 5 let.
- Realizační cena opce je 87 EUR.
- Volatilita ceny akcie je 30%.
- Naším úkolem je vypočítat cenu call a put opce v čase t.

Řešení příkladu

Pro řešení ocenění opce pomocí vícekrokového modelu navážeme na kapitolu 3.2.4. Nejprve je potřeba deklarovat esenciální funkce pro výpočet koeficientů růstu a poklesu, výpočet bezrizikové úrokové míry a pravděpodobnosti poklesu a růstu:

```
up[n_, sigma_, T_] :=  N[Exp[sigma * Sqrt[T / n]]];
down[n_, sigma_, T_] := N[1 / up[n, sigma, T]];
R[n_, Rf_, T_] := N[Exp[Rf * (T / n)]];
P[up_, down_, r_] := N[((r - down) / (up - down)) / r];
Q[up_, down_, r_] := N[1 / r - P[up, down, r]];
```

kde **up** … funkce pro výpočet koeficientu růstu,

down … funkce pro výpočet koeficientu poklesu,

sigma_ … formální argument volatility ceny podkladového aktiva,

Rf_ … formální argument vyjadřující zadanou bezrizikovou úrokovou míru,

up_ … formální argument vyjadřující koeficient růstu,

down_ … formální argument vyjadřující koeficient poklesu,

R … funkce pro výpočet úrokové míry,

P … funkce pro výpočet pravděpodobnosti růstu ceny aktiva,

Q… funkce pro výpočet pravděpodobnosti poklesu ceny aktiva,

N … nativní funkce sw Mathematica; vrací vždy numerickou hodnotu výrazu.

V dalším kroku je zapotřebí deklarovat funkci **binomOption**, která je základem celého modelu. Při jejím sestavováním se inspirujeme mj. vztahy (3.25) - (3.29):

```
binomOption[S_,sigma_,T_,Rf_,payoff_Function,n_] :=
    Module[{u = up[n, sigma, T], d = down[n, sigma,
    T],
    r = R[n, Rf, T], p, q},
    p = P[u, d, r];
```

```
q = Q[u, d, r];
Sum[Binomial[n, j] * p^j * q^(n - j) *
payoff[S * u^j * d^(n - j)], {j, 0, n}]];
```

kde **Module** … nativní funkce prostředí Mathematica, která umožňuje nastavit specifikované neznámé jako lokální proměnné,

Binomial … nativní funkce vracející binomický koeficient $\binom{n}{k}$,

Sum … nativní funkce; vezme součet všech možných stavů funkce, které mohou nastat.

Jako formální argumenty vstupují do funkce **binomOption** po řadě spotová cena akcie, volatilita akcie, čas do splatnosti opce, bezriziková úroková míra, výplatní funkce a počet období.

Ve funkci **binomOption** byly námi dříve deklarované funkce ***up, down, R, P*** a ***Q*** pomocí funkce **Module** nastaveny jako lokální proměnné (viz ***u, d, r, p, q***). To proto, abychom při každém jejich použití nemuseli psát celý jejich formální zápis (včetně formálních argumentů), což značně zlepší přehlednost a orientaci v modelu.

Třetím krokem je deklarace funkcí **binomEurCallPrice** pro výpočet evropské call a **binomEurPutPrice** pro výpočet evropské put opce. Deklaraci provedeme následovně:

```
binomEurCallPrice[S_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_]:=
    binomOption[S, sigma, T, Rf, Max[0, # - X]&, n];
binomEurPutPrice[S_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_]:=
    binomOption[S, sigma, T, Rf, Max[0, X - #]&, n];
```

Prakticky bychom mohli dosadit příslušné hodnoty formálních argumentů přímo do funkce **binomOption**, ta však byla záměrně deklarována tak, aby šla velmi snadno použít nejen pro evropskou call opci, ale také pro evropskou put opci.

Nyní je celý binomický model kompletní. Nezbývá než formálním argumentům funkce **`binomEurCallPrice`** a **`binomEurPutPrice`** přiřadit jejich hodnoty podle zadání ukázkového příkladu:

```
binomEurCallPrice[100, 87, 0.3, 5, 0.04, 10]

binomEurPutPrice[100, 87, 0.3, 5, 0.04, 10]
```

čímž jsme dostali konečné řešení pro náš příklad. **Hodnota opční prémie evropské opce v čase t s použitím binomického modelu pro více časových období** je ve výši

$\boldsymbol{C_t = 39.8384}$ **EUR** pro call opci, $\boldsymbol{P_t = 11.0679}$ **EUR** pro put opci.

5.2 Ocenění evropské opce Black-Scholesovým modelem

V nadcházející části se zaměříme na praktické výpočty cen evropských opcí pomocí Black-Scholesova modelu, jehož vzorec byl odvozen v kapitole 3.3.

Sestavení modelu v softwaru Mathematica provedeme na základě obdobného vzorového příkladu, jako u binomického modelu, pouze s drobnými rozdíly.

Ukázkový příklad č. 4

- Uvažujeme akcii nevyplácející dividendu, jejíž spotová cena je 100 EUR.
- Bezriziková úroková míra je 4%.
- Datum splatnosti opce je 5 let.
- Realizační cena opce je 87 EUR.
- Volatilita ceny akcie je 30%.
- Úkolem je vypočítat cenu call a put opce v čase t a srovnat je v grafu při měnící se spotové ceně podkladové akcie.

Řešení příkladu

Nejprve deklarujme esenciální funkce, které budeme dále používat a volat v dalších funkcích modelu. Jde o funkce

`d1[S_, X_, sigma_, r_, T_]` a

`d2[S_, X_, sigma_, r_, T_]`.

Do funkcí **d1** a **d2** vstupují jako formální argumenty (obdobně jako v předchozích modelech) po řadě spotová cena akcie, realizační cena opce, volatilita ceny akcie, bezriziková úroková míra a čas do splatnosti. Funkce naprogramujeme podle vztahů (3.60) a (3.61):

```
d1[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
    (Log[S / X] + T * (r + sigma^2 / 2)) / (sigma *
    Sqrt[T]);
d2[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
    d1[S, X, sigma, r, T] - (sigma * Sqrt[T]);
```

V druhém kroku je potřeba deklarovat distribuční funkci normovaného normálního rozdělení. V našem modelu byla pojmenována jako **normDistFunction**, která vezme hodnotu proměnné ***x*** a zkontroluje, jestli je hodnota této proměnné číselná. Pokud ano, pak vrátí hodnotu distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

```
normDistFunction[x_ ? NumberQ] :=
    CDF[NormalDistribution[], x];
```

kde **NumberQ** … nativní funkce sw Mathematica, která vrací **True**, pokud je daný výraz číslo a **False**, pokud výraz číslo není. Pokud je vrácena hodnota **False**, pak se funkce **normDistFunction** nevyhodnotí.

CDF … nativní funkce sw Mathematica pro výpočet hodnoty distribuční funkce,

NormalDistribution … funkce sw Mathematica pro výpočet hustoty pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení.

V tomto okamžiku již máme nadefinované všechny esenciální funkce, které jsou potřeba pro sestavení Black-Scholesova modelu, proto nezbývá než deklarovat poslední dvě funkce, a to **bsEurCallPrice** pro výpočet ceny call opce a **bsEurPutPrice** pro výpočet ceny put opce. Tyto funkce deklarujeme podle vztahů (3.59), resp. (3.62):

```
bsEurCallPrice[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
```

```
        S * normDistFunction[d1[S, X, sigma, r, T]] -
        X * Exp[-r * T] *
        normDistFunction[d2[S, X, sigma, r, T]];

    bsEurPutPrice[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
        X * Exp[-r * T] * normDistFunction[-
        d2[S, X, sigma, r, T]] - S * normDistFunction[-
        d1[S, X, sigma, r, T]];
```

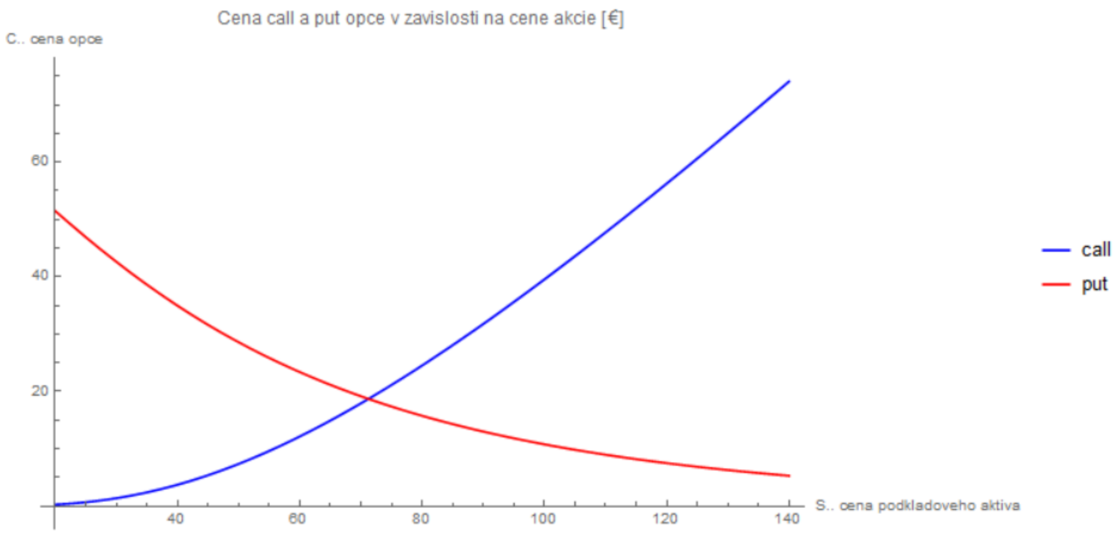
Nyní máme celý model kompletní. Formálním argumentům funkcí `bsEurCallPrice` a `bsEurPutPrice` přiřadíme číselné hodnoty podle zadání ukázkového příkladu:

```
    bsEurCallPrice[100, 87, 0.3, 0.04, 5]

    bsEurPutPrice[100, 87, 0.3, 0.04, 5]
```

čímž dostaneme výslednou hodnotu call a put opce pomocí Black-Scholesova modelu – $\boldsymbol{C_t = 39.5551\ EUR}$ pro call opci, $\boldsymbol{P_t = 10.7847\ EUR}$ pro put opci.

V následujícím obrázku je znázorněn vývoj ceny call a put opce v závislosti na změně ceny podkladové akcie.

Obrázek č. 11: Srovnání ceny evropské call a put opce v závislosti na ceně akcie (v EUR)



Zdroj: vlastní zpracování, 2017

Z Obrázku č. 11 je patrné, že spotová cena podkladového aktiva má na velikost opční prémie značný vliv. V případě call opce platí, že čím větší je spotová cena akcie, tím rychleji roste i hodnota opce. Naopak je tomu u put opce – u té platí, že čím vyšší je cena akcie, tím je menší velikost opční prémie. Značná symetričnost grafu obou opcí pak naznačuje obdobnou rychlost růstu ceny call opce a poklesu put opce.

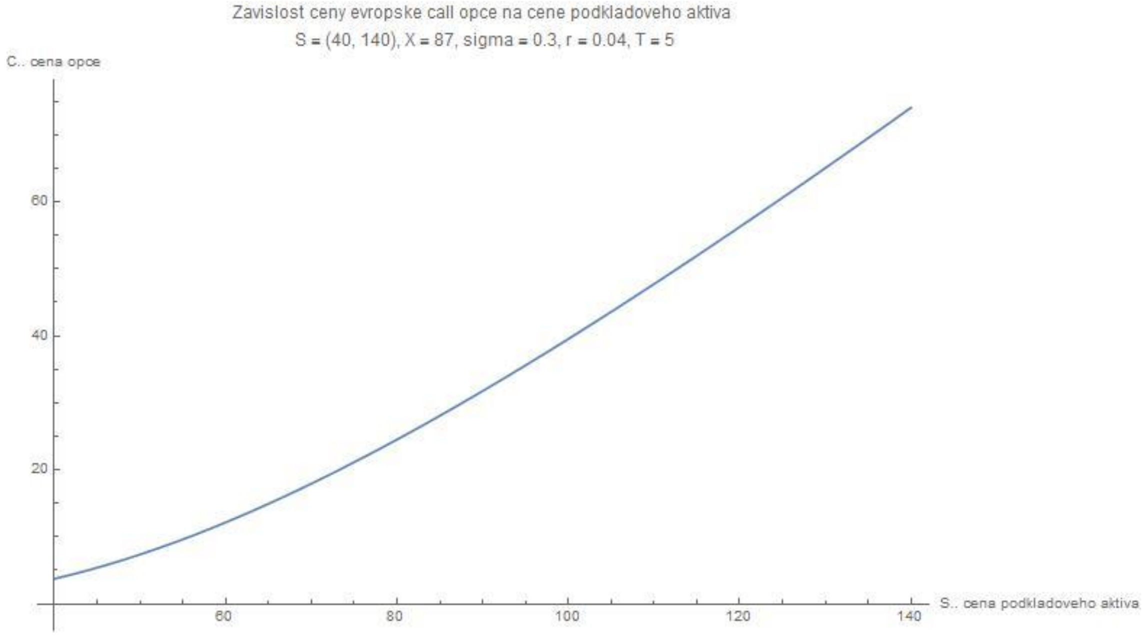
5.3 Cena opce v závislosti na změnách různých faktorů

Tato část práce bude zaměřena na citlivost opce na změnu faktorů, které ji ovlivňují. Jde o spotovou cenu akcie, realizační cenu opce, volatilitu podkladové akcie, bezrizikovou úrokovou míru a zbývající dobu do splatnosti opce. Jak změny všech těchto faktorů ovlivňují velikost opční prémie bude demonstrováno na evropské call opci pomocí Black-Scholesova modelu a graficky znázorněno pomocí programu Wolfram Mathematica. Opět budeme vycházet ze stejných hodnot parametrů, jako v ukázkových příkladech.

5.3.1 Závislost ceny evropské call opce na ceně podkladové akcie

Závislost ceny opce na podkladové akcii je znázorněna na Obrázku č. 12. Na první pohled lze z obrázku vidět, že čím větší je cena podkladové akcie, tím více se její cena promítá do ceny opce. Při nižších hodnotách ceny akcie roste cena opce pomaleji, ale zhruba od hodnoty 100 EUR za podkladovou akcii už je růst ceny opce spíše lineární.

Obrázek č. 12: Závislost výše opční prémie na ceně akcie (v EUR)

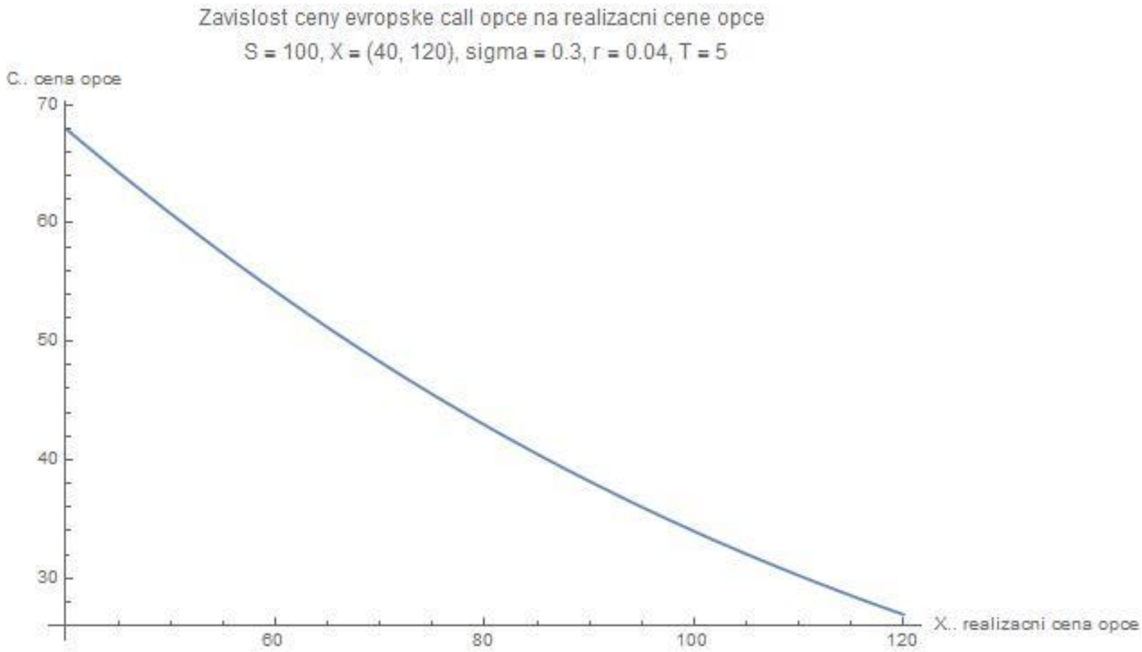


Zdroj: vlastní zpracování, 2017

5.3.2 Závislost ceny evropské call opce na realizační ceně opce

V následujícím Obrázku č. 13 nalezneme graf závislosti opční prémie na realizační ceně opce. Zde můžeme pozorovat, že čím větší je realizační cena opce, tím menší je výše opční prémie. To lze jednoduše zdůvodnit. Při rozhodování, jestli call opci uplatnit nebo ne, investor porovnává realizační cenu opce a spotovou cenu podkladového instrumentu. V případě, že je spotová cena podkladové akcie větší než realizační cena opce, call opci uplatní (viz kapitola 2.3.4.2). Je tedy větší šance, že cena akcie přesáhne nízkou realizační cenu opce (čímž bude call opce uplatněna) než realizační cenu vysokou. Proto nízká realizační cena opce zvyšuje hodnotu opční prémie.

Obrázek č. 13: Závislost výše opční prémie na realizační ceně opce (v EUR)

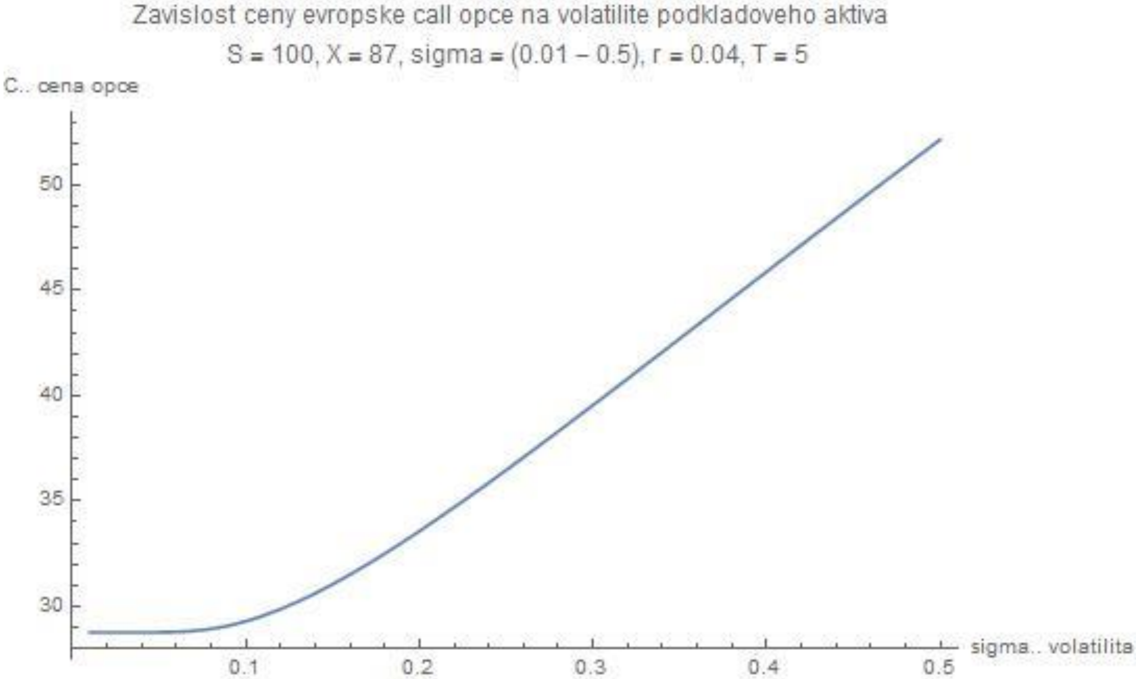


Zdroj: vlastní zpracování, 2017

5.3.3 Závislost ceny evropské call opce na volatilitě podkladové akcie

Jako třetí faktor, který vstupuje do B-S modelu a ovlivňuje tedy cenu opce, je volatilita podkladové akcie. Její vliv na změny ceny opce je znázorněný v Obrázku č. 14:

Obrázek č. 14: Závislost výše opční prémie na volatilitě podkladové akcie



Zdroj: vlastní zpracování, 2017

Jak můžeme z předchozího grafu vidět, zhruba do hodnoty 10 % volatilita zvyšuje cenu opce jen velmi nepatrně, naopak s rostoucí hodnotou volatility poměrně rychle roste i cena opce.

Takový vývoj je daný tím, že čím vyšší je hodnota volatility podkladové akcie, tím rozkolísanější je kurz akcie a zvyšuje se tím šance, že spotová cena akcie přesáhne realizační cenu opce, a opce bude uplatněna. Pokud má akcie malou volatilitu, pak se její cena pohybuje stále okolo stejné hodnoty a je tedy menší šance, že přesáhne realizační cenu opce a bude do její splatnosti uplatněna.

5.3.4 Závislost ceny evropské call opce na výši bezrizikové úrokové míry

Dalším faktorem, který ovlivňuje cenu opce, je bezriziková úroková míra. Jak ovlivňuje cenu opce je znázorněno na Obrázku č. 15:

Obrázek č. 15: Závislost výše opční prémie na bezrizikové úrok. míře

Zdroj: vlastní zpracování, 2017

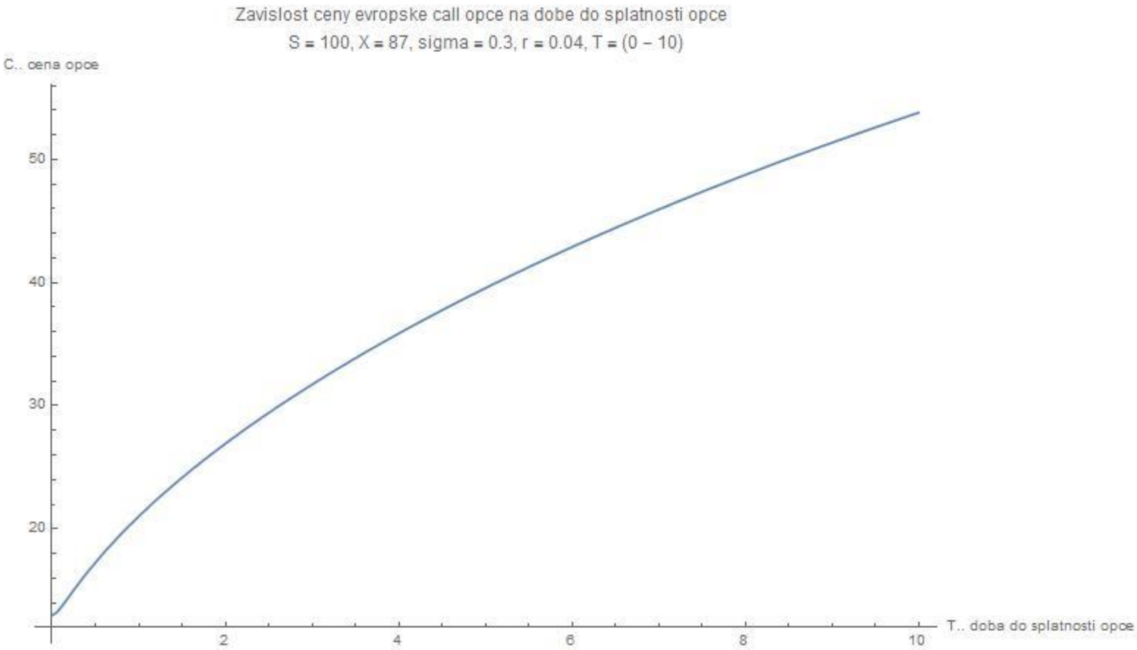
Z Obrázku č. 15 je vidět, že zhruba do hodnoty 10 % bezrizikové úrokové míry roste cena opce lineárně, poté růst ceny opce začíná mírně zpomalovat.

Pokud úrokové míry nabývají větších hodnot, investoři spíše, než aby vyčleněný kapitál použili přímo na koupi podkladového instrumentu, raději koupí call opci na tento podkladový instrument a zbytek kapitálu investují jinam, což jim ve finále přinese větší zisk. Důsledkem tohoto zvýšeného zájmu o opce z důvodu vyšší úrokových měr pak roste jejich cena.

5.3.5 Závislost ceny evropské call opce na době do splatnosti opce

Poslední faktor, který ovlivňuje cenu opce, je zbývající doba do splatnosti opce. Její vliv na výši opční prémie je znázorněn na Obrázku č. 16. Zde je možné pozorovat, že se zvětšující se dobou do splatnosti cena opce roste. Tento vývoj ceny opce koresponduje s definicí časové hodnoty opce, což je de facto oceněná šance, že v době do splatnosti může cena podkladové akcie u call opce ještě růst (a přesáhnout tedy realizační cenu opce a být uplatněna). Proto platí, že čím delší období do splatnosti, tím vyšší je i hodnota opční prémie.

Obrázek č. 16: Závislost výše opční prémie na době do splatnosti opce



Zdroj: vlastní zpracování, 2017

5.4 Srovnání binomického a Black-Scholesova modelu

Jak bylo zmíněno v kapitole 3.2, binomický model (na rozdíl od Black-Scholesova) uvažuje pouze diskrétní časové okamžiky. Z tohoto zjednodušení reality plyne, že by měl být také o něco méně přesný, a je na místě oba modely porovnat. To bude náplní následující části práce. Nejprve budou pomocí programu Wolfram Mathematica graficky porovnány oba modely pro call opci a následně také pro opci put.

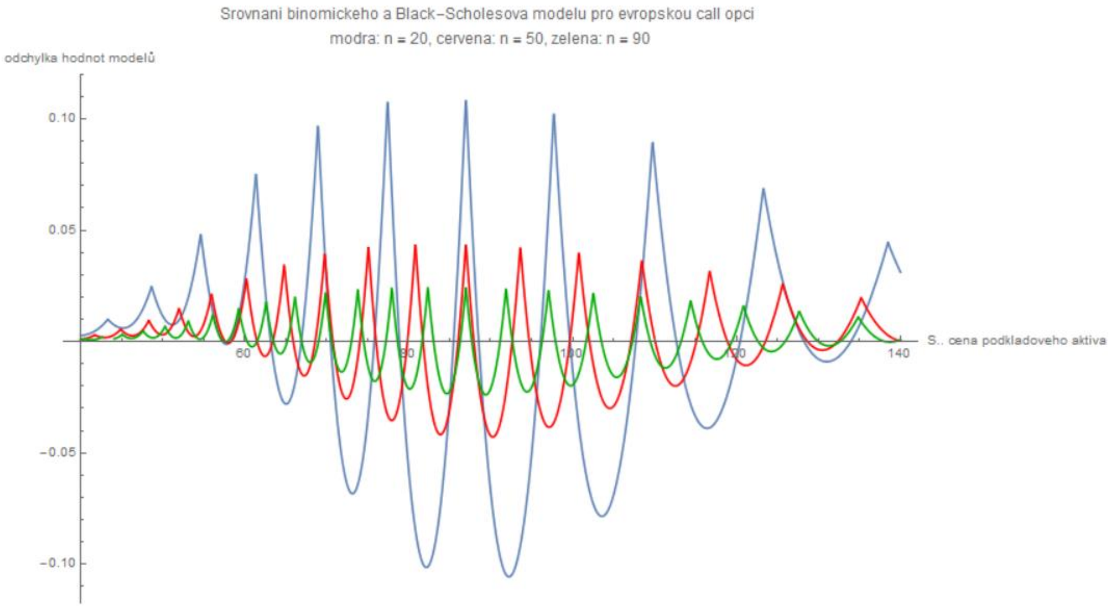
5.4.1 Srovnání pro evropskou call opci

Pro srovnání obou modelů použijeme data z předchozích ukázkových příkladů a v programu Mathematica sestrojíme pomocí funkce **`Plot`** postupně grafy pro 20, 50 a 90 období, na kterých budou znázorněny odchylky obou modelů (jednotlivé grafy jsou přiloženy v příloze E). Poté jsou pomocí nativní funkce **`Show`** všechny tři grafy zkombinovány do jednoho (viz Obrázek č. 17).

```
callComparison1=Plot[(-binomEurCallPrice[S,87,0.3,0.75,0.04,20]+
    bsEurCallPrice[S,87,0.3,0.04,0.75]),{S,40,140},
```

```
PlotRange→All, AxesLabel→{"S.. cena podkladoveho aktiva",
"odchylka hodnot modelů"}, PlotLabel→"Srovnani binomickeho
a Black-Scholesova modelu pro evropskou call opci \n n =
20"]

callComparison2=Plot[(-binomEurCallPrice[S,87,0.3,0.75,0.04,50]+
bsEurCallPrice[S,87,0.3,0.04,0.75]), {S,40,140},
PlotRange→All, PlotStyle→Red, AxesLabel→{"S.. cena
podkladoveho aktiva", "odchylka hodnot modelů"},
PlotLabel→"Srovnani binomickeho a Black-Scholesova modelu
pro evropskou call opci \n n = 50"]

callComparison3=Plot[(-binomEurCallPrice[S,87,0.3,0.75,0.04,90]+
bsEurCallPrice[S,87,0.3,0.04,0.75]), {S,40,140},
PlotRange→All, PlotStyle→Darker[Green],
AxesLabel→{"S.. cena podkladoveho aktiva", "odchylka hodnot
modelů" }, PlotLabel→"Srovnani binomickeho a Black-
Scholesova modelu pro evropskou call opci \n n = 90"]

Show[{callComparison1, callComparison2, callComparison3},
PlotRange→All, AxesLabel→{"S.. cena podkladoveho aktiva",
"odchylka hodnot modelů"}, PlotLabel→"Srovnani binomickeho
a Black-Scholesova modelu pro evropskou call opci \n modra:
n = 20, cervena: n = 50, zelena: n = 90"]
```

Obrázek č. 17: Srovnání BOPM a B-S modelu pro evropskou call opci (v EUR)



Zdroj: vlastní zpracování, 2017

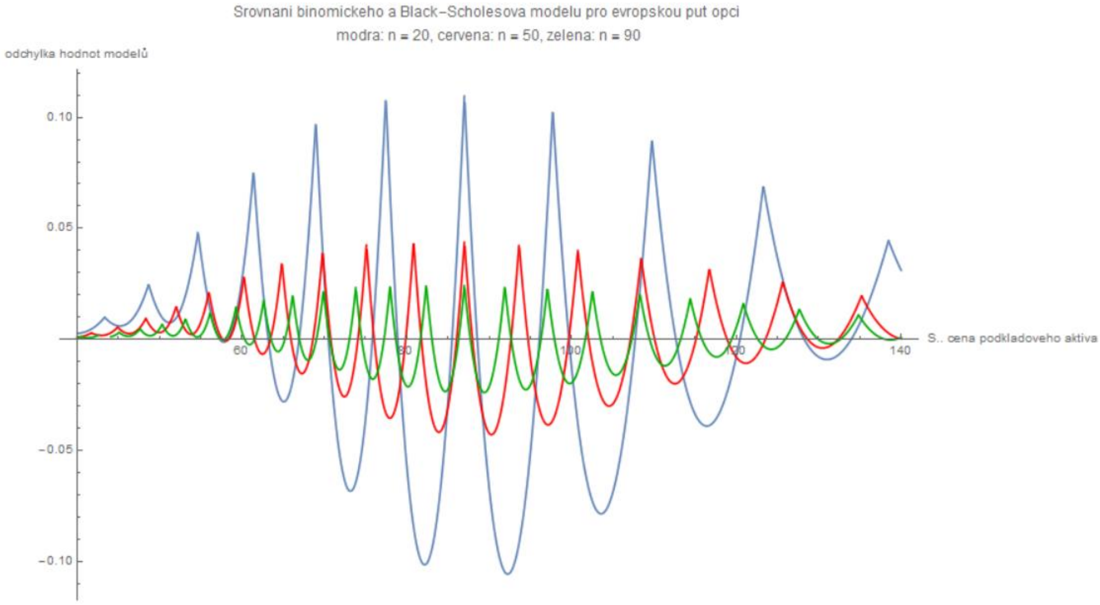
Z obrázku č. 17 je patrné, že s rostoucím počtem období se zmenšují rozdíly cen mezi oběma modely. Zatímco při n = 20 obdobích (v obrázku znázorněno modře) dosahovaly rozdíly až cca 11 %, kdežto při n = 90 obdobích (v obrázku znázorněno zeleně) už byly rozdíly maximálně 4-5 %.

5.4.2 Srovnání pro evropskou put opci

Pro srovnání binomického a Black-Scholesova modelu pro evropskou put opci použijeme stejný postup jako v kapitole 5.4.1 a pomocí funkce **Show** taktéž zkombinujeme grafy pro 20, 50 a 90 období.

```
Show[{putComparison1, putComparison2, putComparison3},
    PlotRange→All,AxesLabel→{"S.. cena podkladoveho aktiva",
    "odchylka hodnot modelů"}, PlotLabel→"Srovnani binomickeho
    a Black-Scholesova modelu pro evropskou put opci \n modra:
    n = 20, cervena: n = 50, zelena: n = 90"]
```

Obrázek č. 18: Srovnání BOPM a B-S modelu pro evropskou put opci (v EUR)



Zdroj: vlastní zpracování, 2017

Taktéž z obrázku č. 18 je možné pozorovat, že čím větší je počet období, tím menší jsou rozdíly mezi binomickým a Black-Scholesovým modelem. To je dané tím, že v našem ukázkovém příkladu binomický model na pětiroční opci s $n = 20$ vlastně povoluje jen tři změny kurzu akcie za měsíc, což v reálném světě úplně neplatí – zde se kurz akcie mění i několikrát denně, tudíž jde spíše o spojitý proces. Pokud tedy zvolíme dostatečně velké n, pak se spojitému procesu, a tedy i Black-Scholesovu modelu, přiblížíme.

Závěr

Tato práce je zaměřena na charakteristiku a oceňování finančních derivátů, především opčních kontraktů. V úvodní kapitole jsou definovány a vysvětleny základní pojmy finanční matematiky, jejichž znalost je naprosto nezbytná pro pochopení principů finanční matematiky. Dále jsou v této části práce vysvětlena základní kritéria pro investiční rozhodování, díky kterým lze rozhodnout, zda je daná investiční možnost výhodná či nikoliv.

Ve druhé části práce jsou obchody rozděleny podle způsobu jejich uzavření a podle podmínek jejich plnění. Jsou zde také přiblíženy jednotlivé nepodmíněné deriváty – forwardy, swapy a futures. Hlavní důraz je kladený především na popis podmíněných derivátů – opcí. V kapitole jsou popsány základní vlastnosti a charakteristiky opcí, vysvětlena hodnota opce a taktéž je provedeno rozdělení opcí podle různých faktorů – např. na opce kupní a prodejní, evropské a americké opce apod.

Zpracováním prvních dvou kapitol byly splněny definované dílčí cíle, a to porozumění základům finanční matematiky a analýza, charakteristika a klasifikace finančních derivátů s důrazem na opce. Splnění hlavních cílů – algoritmizace a naprogramování funkčních modelů pro ocenění evropských opcí, provedení numerických experimentů pro a jejich zhodnocení je směřováno do nadcházejících kapitol.

Třetí kapitola pojednává především o základních modelech pro oceňování opcí – diskrétním binomickém modelu a spojitém Black-Scholesovu modelu. Nejprve jsou definovány základní proměnné, které vstupují do modelů a ovlivňují tak cenu opcí. Poté jsou definovány předpoklady nutné k sestavení modelů a následně je provedeno samotné odvození obou modelů. U binomického modelu je nejprve odvozený jednokrokový model, který je velmi důležitý pro pochopení principu binomického modelu, chování opce a jejímu ocenění. Následně je jednokrokový binomický model rozšířen pro dvě období a poté je odvozen také obecný binomický model pro n období. V případě Black-Scholesova modelu byly popsány také pojmy a procesy důležité k jeho odvození – Wienerův proces, logaritmický výnos a stochastický proces chování ceny akcie. Ve třetí kapitole je také vysvětlen vztah mezi call a put opcí, tzv. put-call parita, a na závěr jsou vyjádřeny tzv. Greeks – míry citlivosti ceny opce na změnu různých faktorů.

Čtvrtá kapitola rozšiřuje předešlou část a v ní odvozené základní modely tím, že uvažuje opce pro dvě a více podkladových aktiv. Black-Scholesův model je zde rozšířen pro variantu opcí právě se dvěma podkladovými aktivy a následně i do obecné podoby pro více podkladových instrumentů. Dále kapitola nabízí základní odvození výpočtu opce se dvěma podkladovými aktivy pomocí binomického modelu. Řešení těchto složitých modelů však přesahuje rámec této práce, proto tyto modely nejsou použity pro výpočty a numerické experimenty.

Stěžejní kapitolou práce je pak poslední, pátá kapitola, které je dále členěna na čtyři části. V této kapitole jsou využity poznatky o opcích z teoretické části práce a odvozené základní modely jsou naprogramovány pomocí sw Mathematica, Wolfram Research, Inc. V prvních dvou částech této kapitoly jsou naprogramovány a na ukázkových příkladech řešeny všechny tři varianty diskrétního binomického modelu (jednokrokový, dvoukrokový a obecný pro více období) a také spojitý Black-Scholesův model. Veškeré funkce, které modely využívají, a formální argumenty, vstupující do modelů, jsou detailně popsány, takže čtenář získá nejen výsledné hodnoty opce z ukázkového příkladu, ale také získá přehled o tom, jak se s matematickým softwarem Mathematica pracuje. Ve třetí části této kapitoly jsou na Black-Scholesovu modelu graficky znázorněny dopady na cenu opce při změně jednotlivých proměnných, které do něj vstupují. Změny v hodnotě opční prémie jsou také vhodně okomentovány a jsou vyvozeny příčiny těchto změn. Posledním provedeným experimentem je provedení grafického srovnání obou modelů, na kterém je velmi zajímavé, že se zvyšujícím počtem období se rozdíly mezi oběma modely snižují a binomický model se tak přibližuje spojitému Black-Scholesovu modelu. Veškeré související modely, výpočty a grafy z této kapitoly jsou přehledně přiloženy v přílohách jako obtisky notebooků sw Mathematica. V příloze F je pak k nahlédnutí také znázornění jednotlivých Greeks pomocí 3D grafů.

Jako doporučení pro možné pokračování práce by mohlo být zaměření na složitější modely pro oceňování opcí, např. multi-asset modely z kapitoly č. 4.

Seznam tabulek a obrázků

Seznam tabulek

Seznam obrázků

Seznam použitých zkratek

BOPM	Binomický model oceňování opcí (Binomial Options Pricing Model)
B-S model	Black-Scholesův model
CF	Cash-flow
EUR	euro
IRR	Vnitřní výnosové procento (Internal Rate of Return)
NPV	Čistá současná hodnota (Net Present Value)
OTC	Mimoburzovní trh (Over-the-Counter)
PI	Index ziskovosti (Profitability Index)
PP	Doba návratnosti (Payback Period)
sw	Software

Seznam použité literatury

[1] CIPRA, Tomáš. Finanční a pojistné vzorce. Praha: Grada, 2006. Finanční trhy a instituce. ISBN 80-247-1633-X.

[2] AMBROŽ, Luděk. Oceňování opcí. Praha: C.H. Beck, 2002. C.H. Beck pro praxi. ISBN 80-717-9531-3.

[3] MÁLEK, Jiří. Opce a futures. Vyd. 2. Praha: Oeconomica, 2003. ISBN 80-245-0488-X.

[4] BENNINGA, Simon. a Benjamin. CZACZKES. Financial modeling. 2nd ed. Cambridge, Mass.: MIT Press, c2000. ISBN 02-620-2482-9.

[5] DVOŘÁK, Petr. Finanční deriváty. Vyd. 3. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1998. ISBN 80-707-9633-2.

[6] COX, John C., Stephen A. ROSS a Mark RUBINSTEIN. Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics. 1979, 7(3), 229-263.

[7] KŘESINA, Jakub. Modely oceňování akciových opcí. Plzeň, 2010. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd.

[8] JÍLEK, Josef. Finanční a komoditní deriváty. Praha: Grada, 2002. Finance (Grada). ISBN 80-247-0342-4.

[9] PAVLÁT, Vladislav. Finanční opce. Praha: Magnet-Press, 1994. ABK. ISBN 80-858-4719-1.

[10] CIPRA, Tomáš. Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. Vydání III., v Ekopressu II. Praha: Ekopress, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.

[11] BOHANESOVÁ, Eva. Finanční matematika I. Olomouc: Univerzita Palackého, 2006. ISBN 80-244-1294-2.

[12] BLACK, Fisher a Myron SCHOLES. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. The Journal of Political Economy. 1973, 81(3), 637-654.

[13] CIPRA, Tomáš. Matematika cenných papírů. Praha: Professional Publishing, 2013. ISBN 978-80-7431-079-9.

[14] GANGUR, Mikuláš. Studijní materiály k předmětu Základy analýzy kapitálových trhů (KEM/ZAKT). Plzeň: Fakulta ekonomická ZČU v Plzni.

[15] JIANG, Lishang. Mathematical modeling and methods of option pricing. Hackensack, NJ: World Scientific, 2005. ISBN 978-981-2563-699.

[16] FRIES, Christian. Mathematical finance: theory, modeling, implementation. Hoboken, N.J.: Wiley-Interscience, 2007. ISBN 978-0-470-04722-4.

[17] Diskontní sazba. Business center.cz [online]. 2017 [cit. 2017-03-30]. Dostupné z: http://business.center.cz/business/pojmy/p946-diskontni-sazba.aspx

[18] Co to jsou nominální a reálné úrokové sazby? Česká národní banka [online]. 2017 [cit. 2017-03-30]. Dostupné z: https://www.cnb.cz/cs/faq/ co_to_jsou_nominalni_a_realne_urokove_sazby.html

[19] Čistá současná hodnota. ManagementMania.com [online]. 2016 [cit. 2017-04-13]. Dostupné z: https://managementmania.com/cs/cista-soucasna-hodnota

[20] Vnitřní výnosové procento. ManagementMania.com [online]. 2016 [cit. 2017-04-13]. Dostupné z: https://managementmania.com/cs/vnitrni-vynosove-procento

[21] Index ziskovosti. ManagementMania.com [online]. 2016 [cit. 2017-04-13]. Dostupné z: https://managementmania.com/cs/index-ziskovosti

[22] Doba návratnosti. ManagementMania.com [online]. 2016 [cit. 2017-04-13]. Dostupné z: https://managementmania.com/cs/doba-navratnosti

[23] Finanční slovník. Saxo Bank [online]. 2017 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: https://www.home.saxo/cs-cz/financial-glossary/

[24] Termínové obchody, forwardy, opce. Akcenta.cz [online]. 2016 [cit. 2017-02-20]. Dostupné z: http://www.akcentacz.cz/terminove-obchody.html

[25] Forwardy. Peníze.cz [online]. 2017 [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: http://www. penize.cz/ 15935-forwardy

[26] Swap. ManagementMania.cz [online]. 2016 [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: https://managementmania.com/cs/swap

[27] Dlouhá pozice (Long position). Patria.cz [online]. 2016 [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: https://www.patria.cz/slovnik/32/dlouha-pozice-long-position.html

[28] Krátká pozice (short selling). Patria.cz [online]. 2017 [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: https://www.patria.cz/slovnik/46/kratka-pozice-short-selling.html

[29] Basket Option. Investopedia - Sharper Insight. Smarter Investing. [online]. [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: http://www.investopedia.com/terms/b/basketoption.asp

[30] Basket Option. The Financial Engineer [online]. [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: https://thefinancialengineer.org/options-futures-other-derivatives/exotic-options/basket-option/

[31] Rainbow Option. Investing Answers [online]. [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: http://www.investinganswers.com/financial-dictionary/options-derivatives/rainbow-option-6321

[32] BENHAMOU, Eric. Rainbow Options [online]. 2005 [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: http://www.ericbenhamou.net/documents/Encyclo/rainbow%20options.pdf

[33] Arbitráž. Finance.cz [online]. Mladá fronta, 2017 [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: http://slovnik.finance.cz/arbitraz/

[34] The Prize in Economic Sciences 1997 - Press Release. Nobelprize.org [online]. 1997 [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1997/press.html

[35] DAI, Min. Advanced Financial Mathematics: Chapter 4 [online]. 2007 [cit. 2017-04-01]. Dostupné z: http://www.math.nus.edu.sg/~matdm/ma4257/ chapter4.pdf. National University of Singapore, Faculty of Science, Department of Mathematics.

[36] GENEROVÁNÍ NÁHODNĚ PROMĚNNÝCH VELIČIN V METODĚ MONTE CARLO. In: GUŠTAR, Milan. Spolehlivost konstrukcí: téma: Rozvoj koncepcí posudku spolehlivosti stavebních konstrukcí: [sborník referátů konference, Ostrava 15.3.2000] [online]. Ostrava: Dům techniky, 2000, s. 5-8 [cit. 2017-04-22]. ISBN 80-02-01344-1.

[37] Ito's Lemma. QuantStart [online]. 2012 [cit. 2017-04-22]. Dostupné z: https://www.quantstart.com/articles/Itos-Lemma

Seznam příloh

Příloha A – Jednokrokový binomický model (Mathematica notebook)

Příloha B – Dvoukrokový binomický model (Mathematica notebook)

Příloha C – Binomický model pro více období (Mathematica notebook)

Příloha D – Black-Scholesův model (Mathematica notebook)

Příloha E – Srovnání binomického a Black-Scholesova modelu (Mathematica notebook)

Příloha F – Výpočty měr citlivosti opce – Greeks (Mathematica notebook)

Příloha A – Jednokrokový binomický model

```
In[1]:= (*      Mathematica notebook pro oceneni evropske
         call opce pomoci jednokrokoveho binomickeho modelu
        Tema DP: Vypracovani souboru procedur s financnim zamerenim -
           predevsim na ocenovani opci
        autor: Bc. Martin Blazek, K14N0001P *)

        stockPriceUp[S_, u_] := S * (1 + u);
        stockPriceDown[S_, d_] := S * (1 - d);

In[3]:= stockPriceUp[100, 0.09]

Out[3]= 109.

In[4]:= stockPriceDown[100, 0.03]

Out[4]= 97.

In[5]:= callUp[S_, u_, X_] := Max[0, stockPriceUp[S, u] - X];
        callDown[S_, d_, X_] := Max[0, stockPriceDown[S, d] - X];

In[7]:= callUp[100, 0.09, 87]

Out[7]= 22.

In[8]:= callDown[100, 0.03, 87]

Out[8]= 10.

In[9]:= delta[S_, u_, d_, X_] := (callUp[S, u, X] - callDown[S, d, X]) /
            (stockPriceUp[S, u] - stockPriceDown[S, d]);

        B[S_, u_, d_, r_, X_] :=
          (callDown[S, d, X] * stockPriceUp[S, u] - callUp[S, u, X] * stockPriceDown[S, d]) /
           ((stockPriceUp[S, u] - stockPriceDown[S, d]) * (1 + r));

In[11]:= delta[100, 0.09, 0.03, 87]

Out[11]= 1.

In[12]:= B[100, 0.09, 0.03, 0.04, 87]

Out[12]= -83.65384615

In[13]:= priceEurCalloption[S_, delta_, B_] := S * delta + B

In[14]:= priceEurCalloption[100, 1, -83.65384615384615]

Out[14]= 16.34615385
```

Příloha B – Dvoukrokový binomický model

```
(* Mathematica notebook pro oceneni evropske
 call opce pomoci dvoukrokoveho binomickeho modelu
Tema DP:Vypracovani souboru procedur s financnim zamerenim-
   predevsim na ocenovani opci
autor:Bc.Martin Blazek - K14N0001P *)

In[4]:= stockPriceUpUp[S_, u_] := S * (1 + u) ^2;
        stockPriceUpDown[S_, u_, d_] := S * (1 + u) * (1 - d);
        stockPriceDownDown[S_, d_] := S * (1 - d) ^2;

In[7]:= stockPriceUpUp[100, 0.09]

Out[7]= 118.81

In[8]:= stockPriceUpDown[100, 0.09, 0.03]

Out[8]= 105.73

In[9]:= stockPriceDownDown[100, 0.03]

Out[9]= 94.09

In[11]:= callUpUp[S_, u_, X_] := Max[0, stockPriceUpUp[S, u] - X];
         callUpDown[S_, u_, d_, X_] := Max[0, stockPriceUpDown[S, u, d] - X];
         callDownDown[S_, d_, X_] := Max[0, stockPriceDownDown[S, d] - X];

In[14]:= callUpUp[100, 0.09, 87]

Out[14]= 31.81

In[15]:= callUpDown[100, 0.09, 0.03, 87]

Out[15]= 18.73

In[16]:= callDownDown[100, 0.03, 87]

Out[16]= 7.09

In[17]:= probability[u_, d_, r_] := ((1 + r) - d) / (u - d);

In[18]:= probability[1.09, 0.97, 0.04]

Out[18]= 0.5833333333

In[20]:= twoStepBinomEurCallPrice[S_, u_, d_, r_, X_, p_] :=
           (p^2 * callUpUp[S, u, X] + 2 p * (1 - p) * callUpDown[S, u, d, X] +
              (1 - p) ^2 * callDownDown[S, d, X]) / (1 + r) ^2;

In[21]:= twoStepBinomEurCallPrice[100, 0.09, 0.03, 0.04, 87, 0.5833333333333334]

Out[21]= 19.56360947
```

In[22]:=
```
(* Vypocet Cu a Cd v case t+1 *)
callUp[p_, S_, u_, d_, X_, r_] :=
  (p * callUpUp[S, u, X] + (1 - p) * callUpDown[S, u, d, X]) / (1 + r);
callDown[p_, S_, u_, d_, X_, r_] :=
  (p * callUpDown[S, u, d, X] + (1 - p) * callDownDown[S, d, X]) / (1 + r);
```

In[24]:=
```
callUp[0.5833333333333334, 100, 0.09, 0.03, 87, 0.04]
```

Out[24]=
```
25.34615385
```

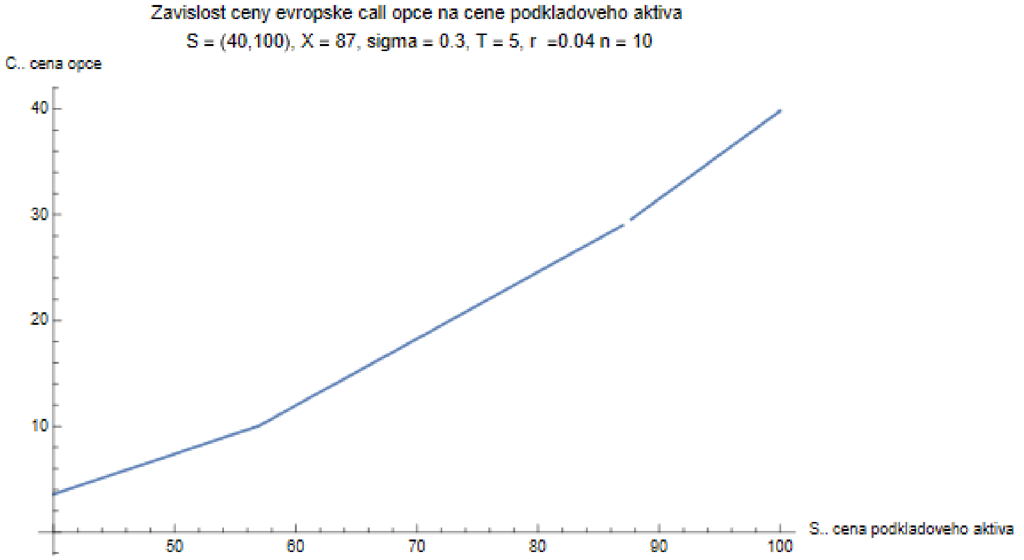
In[25]:=
```
callDown[0.5833333333333334, 100, 0.09, 0.03, 87, 0.04]
```

Out[25]=
```
13.34615385
```

Příloha C – Binomický model pro více období

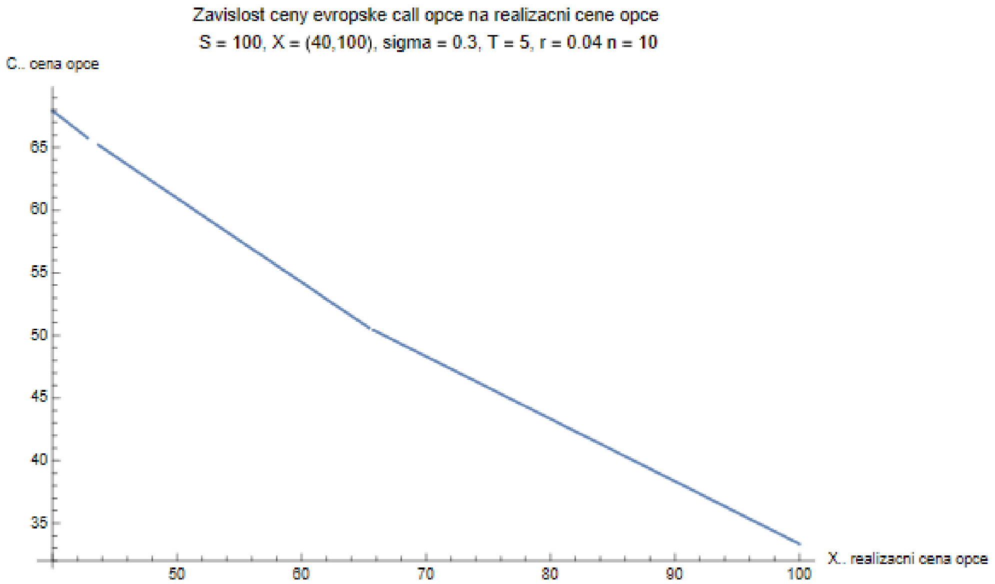
```
In[1]:= (* Mathematica notebook pro oceneni evropske
         call opce pomoci binomickeho modelu pro vice obdobi
        Tema DP:Vypracovani souboru procedur s financnim zamerenim-
           predevsim na ocenovani opci
        autor:Bc.Martin Blazek - K14N0001P *)

In[2]:= up[n_, sigma_, T_] := N[Exp[ sigma * Sqrt[T / n] ] ];
        down[n_, sigma_, T_] := N[Exp[ (-sigma) * Sqrt[T / n] ] ];
        R[n_, Rf_, T_] := N[Exp[Rf * (T / n)] ];
        P[up_, down_, r_] := N[ ((r - down) / (up - down)) / r];
        Q[up_, down_, r_] := N[1 / r - P[up, down, r]];

In[7]:= binomOption[S_, sigma_, T_, Rf_, payoff_Function, n_] :=
        Module[{u = up[n, sigma, T], d = down[n, sigma, T],
        r = R[n, Rf, T], p, q},
            p = P[u, d, r];
            q = Q[u, d, r];
            Sum[Binomial[n, j] * p^j * q^(n - j) * payoff[S * u^j * d^(n - j)], {j, 0, n}]];

In[8]:= binomEurCallPrice[ S_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_ ] :=
          binomOption[ S, sigma, T, Rf, Max[0, # - X] &, n];
        binomEurPutPrice[ S_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_ ] :=
          binomOption[ S, sigma, T, Rf, Max[X - #, 0] &, n];

In[10]:= binomEurCallPrice[100, 87, 0.3, 5, 0.04, 10]

Out[10]= 39.83837979

In[11]:= binomEurPutPrice[100, 87, 0.3, 5, 0.04, 10]

Out[11]= 11.06795531

In[12]:= (* Grafy zavislosti ceny all opce na zmene ruznych faktoru *)
         Plot[binomEurCallPrice[S, 87, 0.3, 5, 0.04, 10], {S, 40, 100},
          AxesLabel → {"S.. cena podkladoveho aktiva", "C.. cena opce"},
          PlotLabel → "Zavislost ceny evropske call opce na cene podkladoveho aktiva\n
             S = (40,100), X = 87, sigma = 0.3, T = 5, r  =0.04 n = 10"]
```

Out[12]=



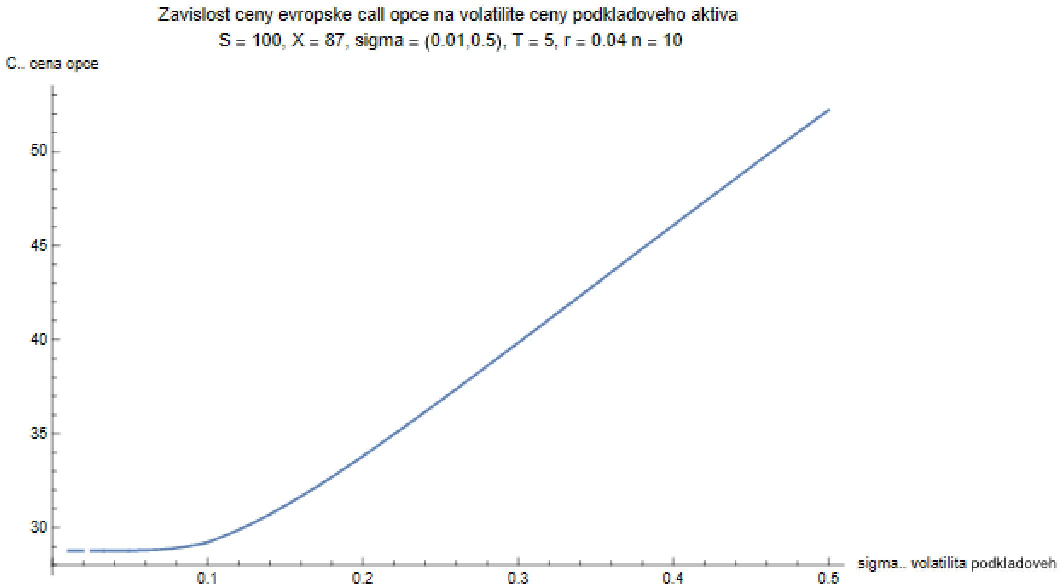
In[13]:=
```
Plot[binomEurCallPrice[100, X, 0.3, 5, 0.04, 10], {X, 40, 100},
 AxesLabel → {"X.. realizacni cena opce", "C.. cena opce"},
 PlotLabel → "Zavislost ceny evropske call opce na realizacni cene opce\n
   S = 100, X = (40,100), sigma = 0.3, T = 5, r = 0.04 n = 10"]
```

Out[13]=



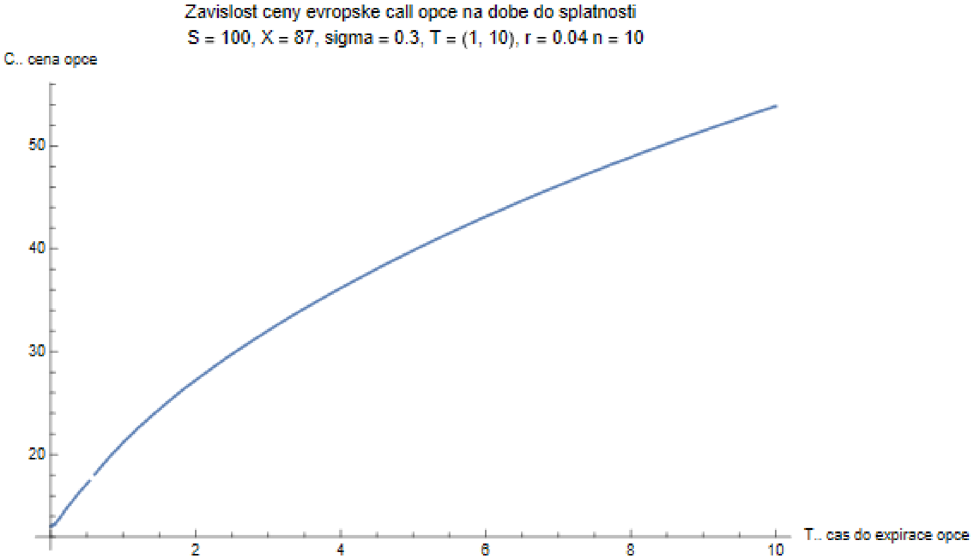
In[14]:=
```
Plot[binomEurCallPrice[100, 87, sigma, 5, 0.04, 10],
 {sigma, 0.01, 0.5}, AxesLabel →
  {"sigma.. volatilita podkladoveho aktiva", "C.. cena opce"}, PlotLabel →
  "Zavislost ceny evropske call opce na volatilite ceny podkladoveho aktiva\n
   S = 100, X = 87, sigma = (0.01,0.5), T = 5, r = 0.04 n = 10"]
```

Out[14]=



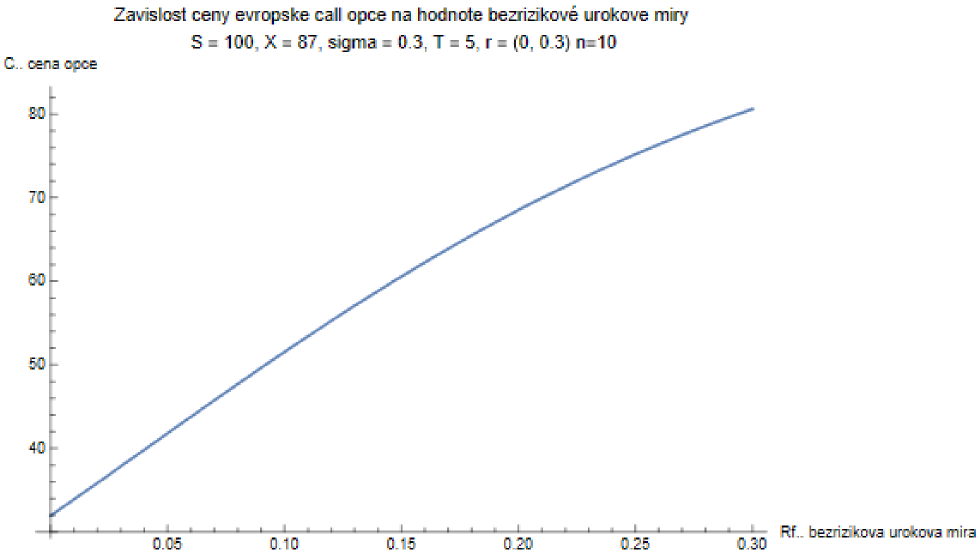
In[15]:=
```
Plot[binomEurCallPrice[100, 87, 0.3, T, 0.04, 10], {T, 0, 10},
 AxesLabel → {"T.. cas do expirace opce", "C.. cena opce"},
 PlotLabel → "Zavislost ceny evropske call opce na dobe do splatnosti
    \n S = 100, X = 87, sigma = 0.3, T = (1, 10), r = 0.04 n = 10"]
```

Out[15]=



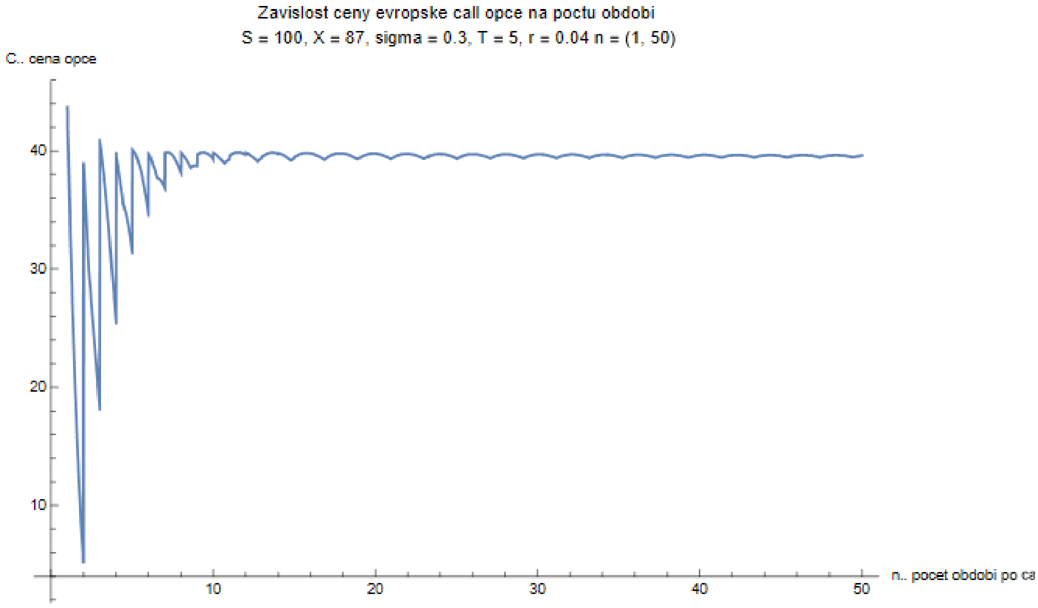
In[16]:=
```
Plot[binomEurCallPrice[100, 87, 0.3, 5, Rf, 10], {Rf, 0, 0.3},
 AxesLabel → {"Rf.. bezrizikova urokova mira", "C.. cena opce"},
 PlotLabel → "Zavislost ceny evropske call opce na hodnote bezrizikové urokove
    miry\n S = 100, X = 87, sigma = 0.3, T = 5, r = (0, 0.3) n=10"]
```

Out[16]=



In[18]:=
```
Plot[binomEurCallPrice[100, 87, 0.3, 5, 0.04, n], {n, 1, 50}, PlotRange → All,
 AxesLabel → {"n.. pocet obdobi po cas T", "C.. cena opce"},
 PlotLabel → "Zavislost ceny evropske call opce na poctu obdobi\n
   S = 100, X = 87, sigma = 0.3, T = 5, r = 0.04 n = (1, 50)"]
```

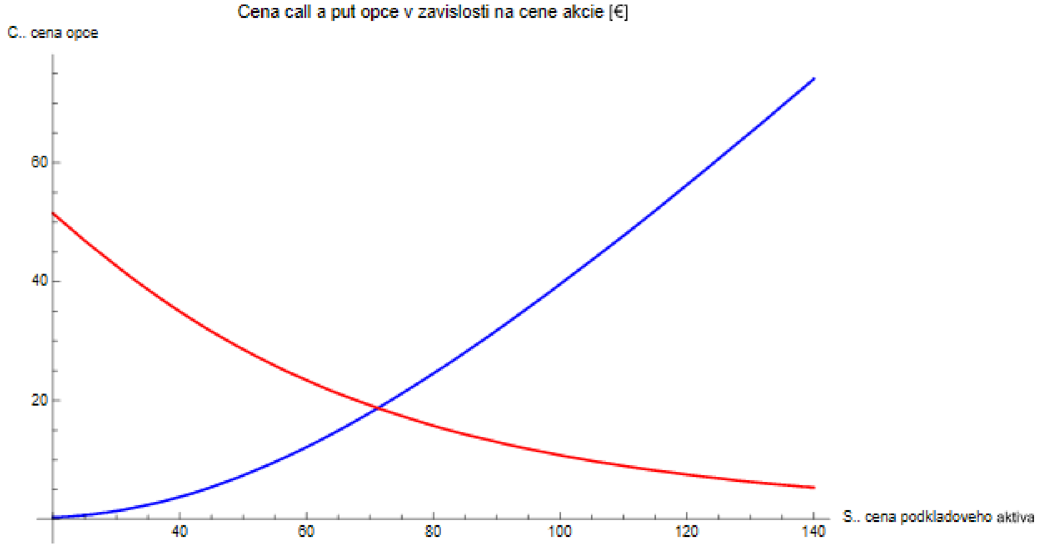
Out[18]=



Příloha D – Black-Scholesův model

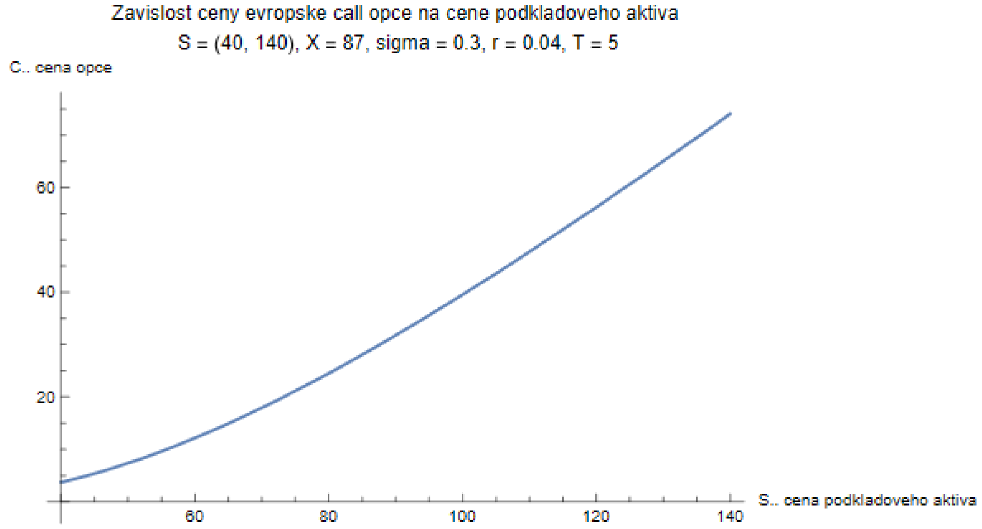
```
In[20]:= (* Mathematica notebook pro oceneni evropske call/put opce pomoci Black-
          Scholesova modelu
         Tema DP:Vypracovani souboru procedur s financnim zamerenim-
             predevsim na ocenovani opci
         autor:Bc.Martin Blazek - K14N0001P *)

In[21]:= d1[S_, X_, sigma_, r_, T_] := (Log[S / X] + T * (r + sigma^2 / 2)) / (sigma * Sqrt[T]);
         d2[S_, X_, sigma_, r_, T_] := d1[S, X, sigma, r, T] - (sigma * Sqrt[T]);

In[23]:= normDistFunction[x_?NumberQ] := CDF[NormalDistribution[], x];

In[24]:= bsEurCallPrice[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
           S * normDistFunction[d1[S, X, sigma, r, T]] -
            X * Exp[-r * T] * normDistFunction[d2[S, X, sigma, r, T]];
         bsEurPutPrice[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
           X * Exp[-r * T] * normDistFunction[-d2[S, X, sigma, r, T]] -
            S * normDistFunction[-d1[S, X, sigma, r, T]];

In[26]:= bsEurCallPrice[100, 87, 0.3, 0.04, 5]

Out[26]= 39.55514991

In[27]:= bsEurPutPrice[100, 87, 0.3, 0.04, 5]

Out[27]= 10.78472543

In[28]:= (* Srovnani vyvoje ceny evropske call a put opce v zavislosti na cene akcie *)

In[29]:= Plot[{bsEurCallPrice[S, 87, 0.3, 0.04, 5], bsEurPutPrice[S, 87, 0.3, 0.04, 5]},
          {S, 20, 140}, PlotRange → All,
          AxesLabel → {"S.. cena podkladoveho aktiva", "C.. cena opce"},
          PlotRange → All, PlotStyle → {Blue, Red}, PlotLegends → {call, put} ,
          PlotLabel → "Cena call a put opce v zavislosti na cene akcie [€]"]
```

Out[29]=



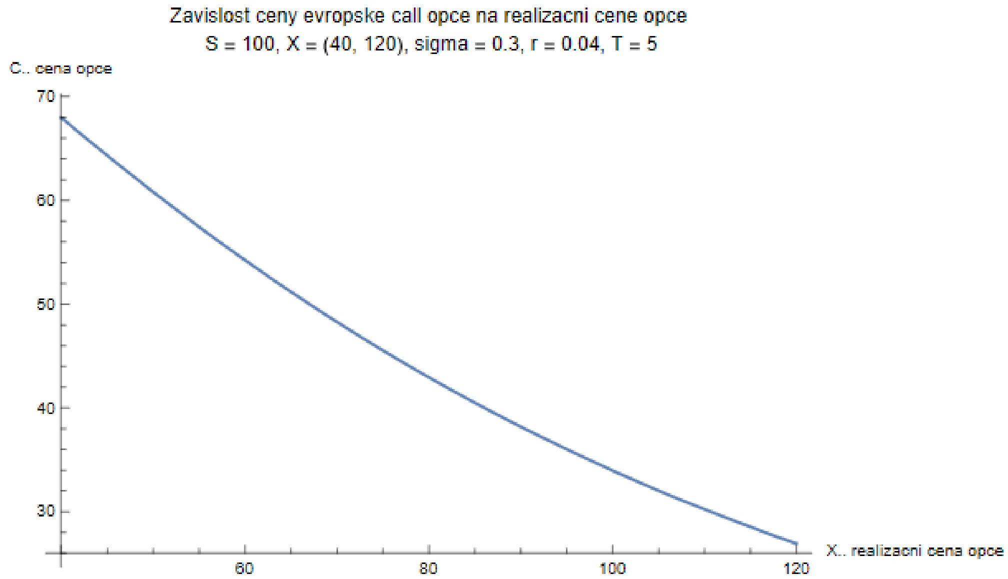
In[30]:=
```
Plot[bsEurCallPrice[S, 87, 0.3, 0.04, 5], {S, 40, 140},
 AxesLabel → {"S.. cena podkladoveho aktiva", "C.. cena opce"},
 PlotLabel → "Zavislost ceny evropske call opce na cene podkladoveho
   aktiva\n S = (40, 140), X = 87, sigma = 0.3, r = 0.04, T = 5"]
```

Out[30]=



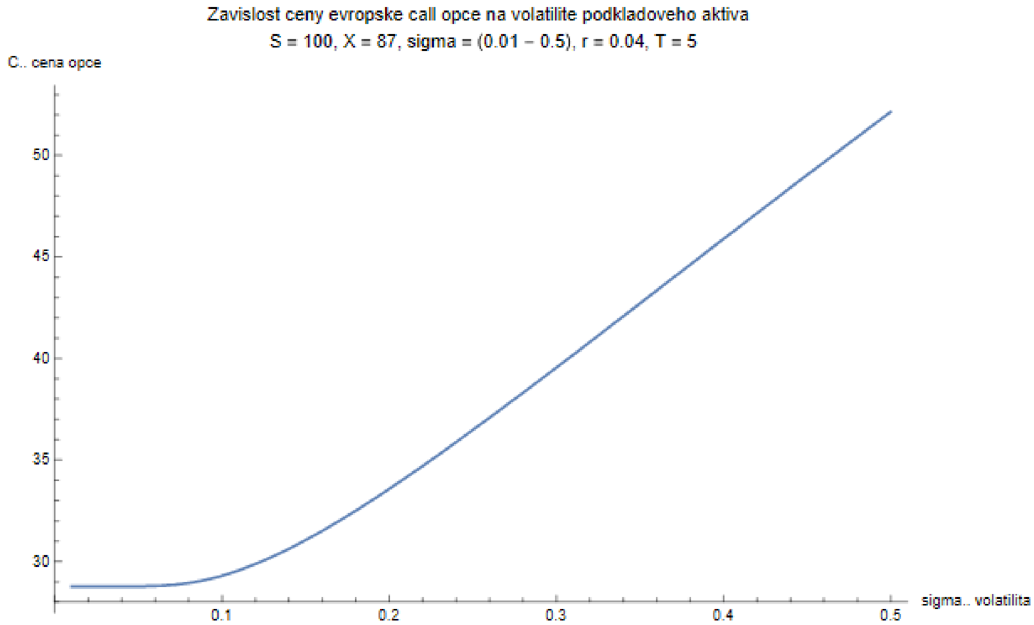
In[31]:=
```
Plot[bsEurCallPrice[100, X, 0.3, 0.04, 5], {X, 40, 120},
 AxesLabel → {"X.. realizacni cena opce", "C.. cena opce"},
 PlotLabel → "Zavislost ceny evropske call opce na realizacni cene
   opce\n S = 100, X = (40, 120), sigma = 0.3, r = 0.04, T = 5"]
```

Out[31]=



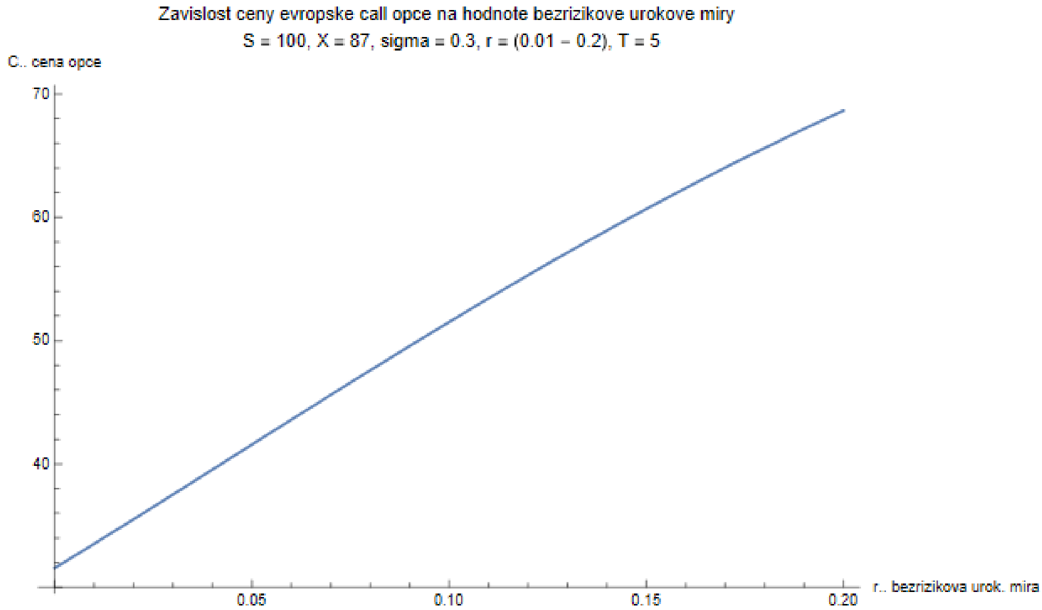
In[32]:=
```
Plot[bsEurCallPrice[100, 87, sigma, 0.04, 5], {sigma, 0.01, 0.5},
 AxesLabel → {"sigma.. volatilita", "C.. cena opce"},
 PlotLabel → "Zavislost ceny evropske call opce na volatilite podkladoveho
   aktiva \n S = 100, X = 87, sigma = (0.01 - 0.5), r = 0.04, T = 5"]
```

Out[32]=



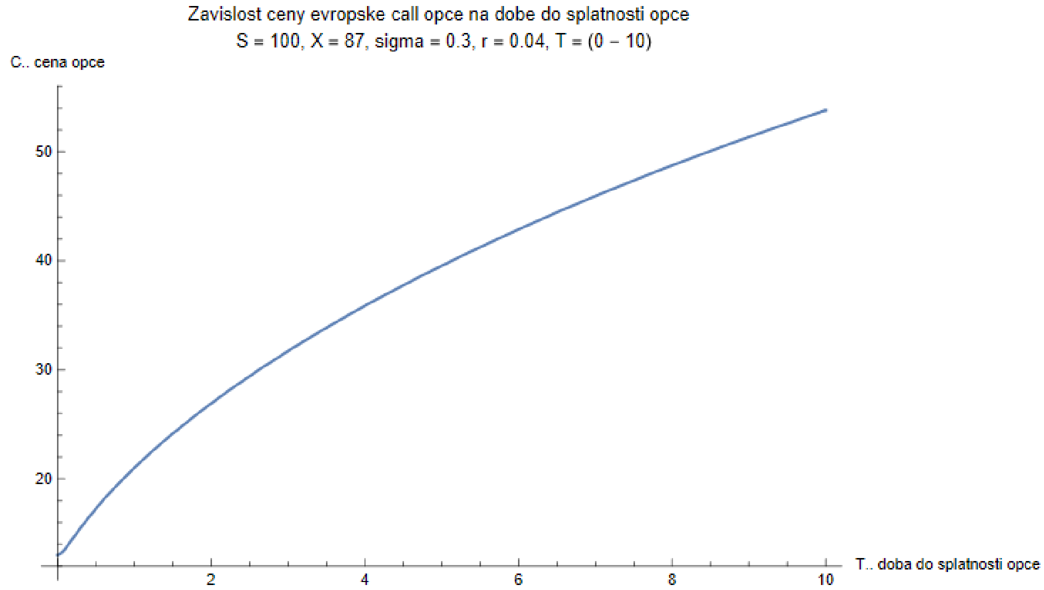
In[33]:=
```
Plot[bsEurCallPrice[100, 87, 0.3, r, 5], {r, 0, 0.2},
 AxesLabel → {"r.. bezrizikova urok. mira", "C.. cena opce"},
 PlotLabel → "Zavislost ceny evropske call opce na hodnote bezrizikove urokove
   miry \n S = 100, X = 87, sigma = 0.3, r = (0.01 - 0.2), T = 5"]
```

Out[33]=



In[34]:=
```
Plot[bsEurCallPrice[100, 87, 0.3, 0.04, T], {T, 0, 10},
 AxesLabel → {"T.. doba do splatnosti opce", "C.. cena opce"},
 PlotLabel → "Zavislost ceny evropske call opce na dobe do splatnosti
   opce \n S = 100, X = 87, sigma = 0.3, r = 0.04, T = (0 - 10)"]
```

Out[34]=

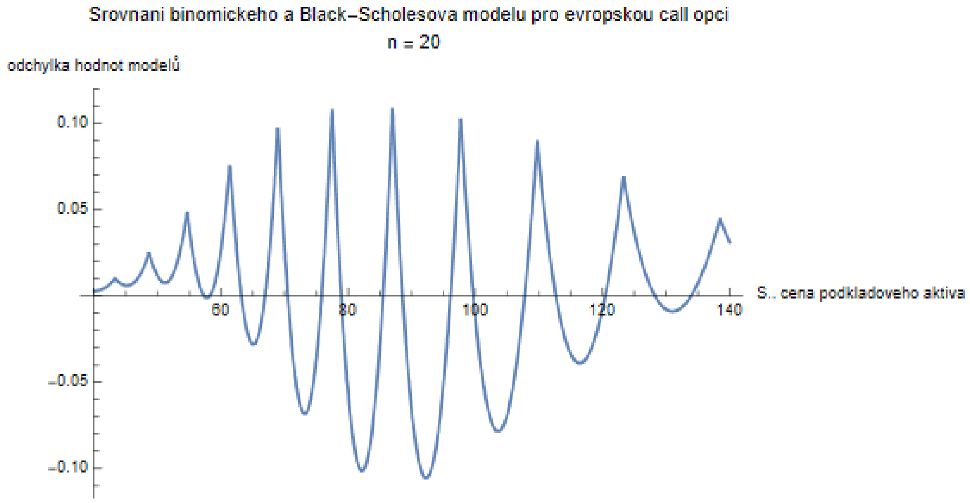


Příloha E – Srovnání binomického a Black-Scholesova modelu

In[35]:=
```
(*Srovnani binomickeho a Black-
 Scholesova modelu pro oceneni evropske call a put opce
Tema DP:Vypracovani souboru procedur s financnim zamerenim-
    predevsim na ocenovani opci
autor:Bc.Martin Blazek - K14N0001P *)
```

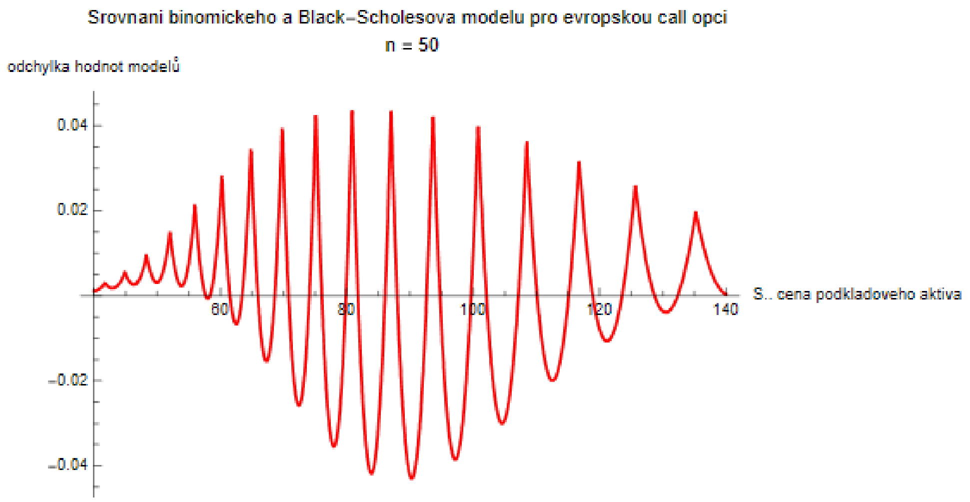
In[52]:=
```
callComparison1 = Plot[(-binomEurCallPrice[S, 87, 0.3, 0.75, 0.04, 20] +
    bsEurCallPrice[S, 87, 0.3, 0.04, 0.75]), {S, 40, 140}, PlotRange → All,
  AxesLabel → {"S.. cena podkladoveho aktiva", "odchylka hodnot modelů"},
  PlotLabel → "Srovnani binomickeho a Black-Scholesova
     modelu pro evropskou call opci \n n = 20"]
```

Out[52]=



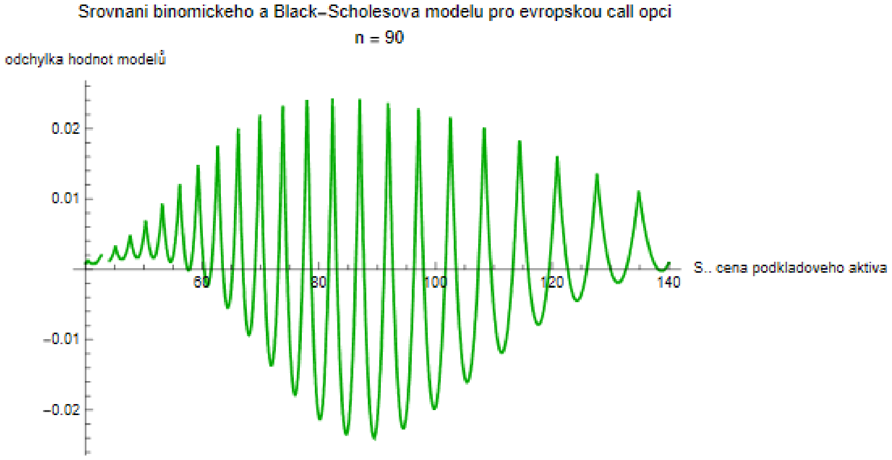
In[53]:=
```
callComparison2 =
 Plot[(-binomEurCallPrice[S, 87, 0.3, 0.75, 0.04, 50] + bsEurCallPrice[S,
     87, 0.3, 0.04, 0.75]), {S, 40, 140}, PlotRange → All, PlotStyle → Red,
  AxesLabel → {"S.. cena podkladoveho aktiva", "odchylka hodnot modelů"},
  PlotLabel → "Srovnani binomickeho a Black-Scholesova
     modelu pro evropskou call opci \n n = 50"]
```

Out[53]=



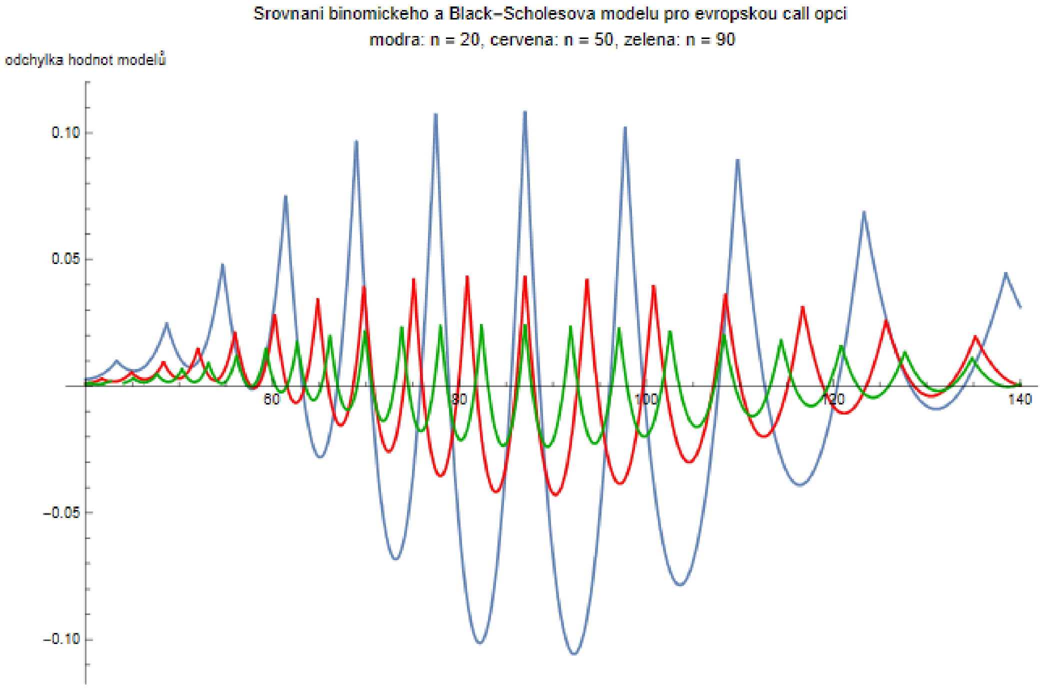
In[54]:=
```
callComparison3 = Plot[(-binomEurCallPrice[S, 87, 0.3, 0.75, 0.04, 90] +
    bsEurCallPrice[S, 87, 0.3, 0.04, 0.75]),
  {S, 40, 140}, PlotRange → All, PlotStyle → Darker[Green],
  AxesLabel → {"S.. cena podkladoveho aktiva", "odchylka hodnot modelů"},
  PlotLabel → "Srovnani binomickeho a Black-Scholesova
    modelu pro evropskou call opci \n n = 90"]
```

Out[54]=



In[55]:=
```
Show[{callComparison1, callComparison2, callComparison3}, PlotRange → All,
 AxesLabel → {"S.. cena podkladoveho aktiva", "odchylka hodnot modelů"},
 PlotLabel → "Srovnani binomickeho a Black-Scholesova modelu pro evropskou
    call opci \nmodra: n = 20, cervena: n = 50, zelena: n = 90"]
```

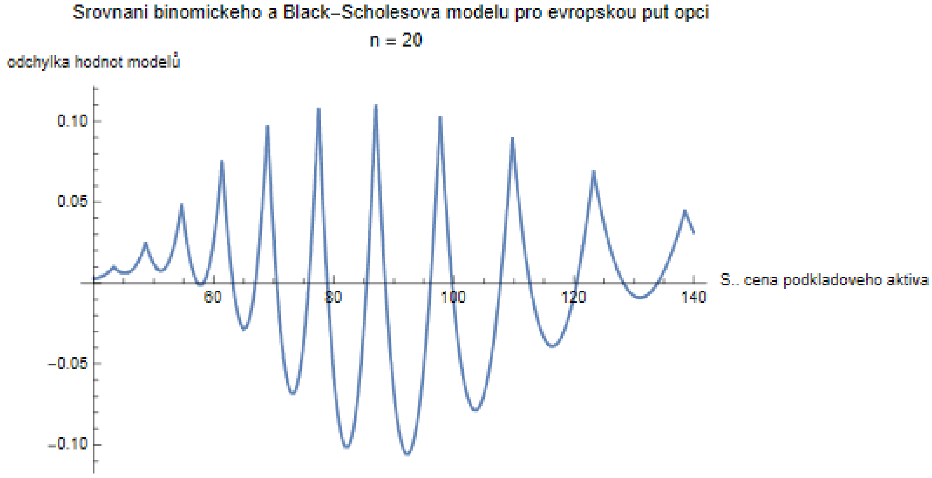
Out[55]=



In[56]:= (*Srovnani put opce*)

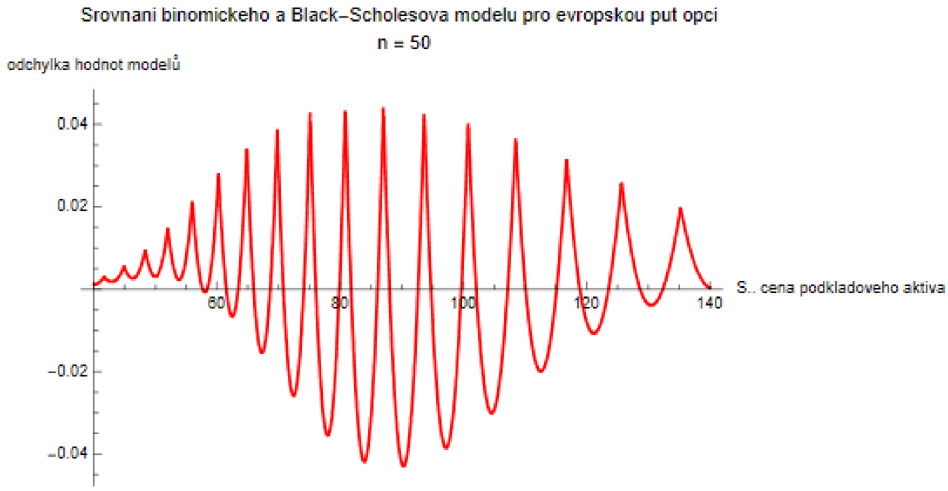
In[57]:=
```
putComparison1 = Plot[(-binomEurPutPrice[S, 87, 0.3, 0.75, 0.04, 20] +
     bsEurPutPrice[S, 87, 0.3, 0.04, 0.75]), {S, 40, 140}, PlotRange → All,
   AxesLabel → {"S.. cena podkladoveho aktiva", "odchylka hodnot modelů"},
   PlotLabel → "Srovnani binomickeho a Black-Scholesova
      modelu pro evropskou put opci \n n = 20"]
```

Out[57]=



In[58]:=
```
putComparison2 =
  Plot[(-binomEurPutPrice[S, 87, 0.3, 0.75, 0.04, 50] + bsEurPutPrice[S, 87,
      0.3, 0.04, 0.75]), {S, 40, 140}, PlotRange → All, PlotStyle → Red,
   AxesLabel → {"S.. cena podkladoveho aktiva", "odchylka hodnot modelů"},
   PlotLabel → "Srovnani binomickeho a Black-Scholesova
      modelu pro evropskou put opci \n n = 50"]
```

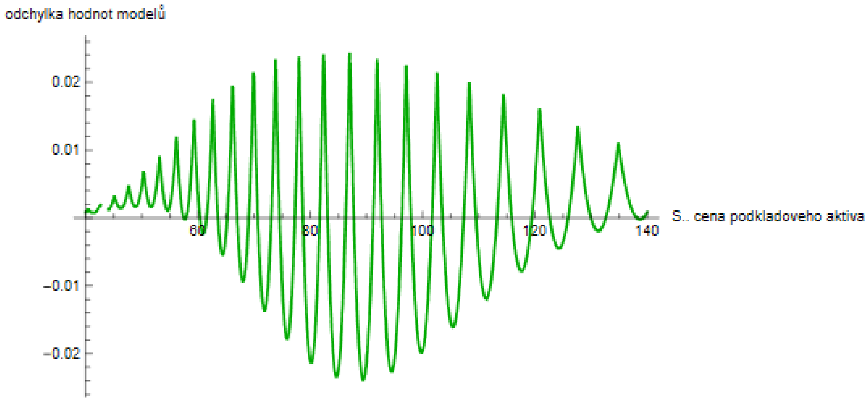
Out[58]=



```
In[59]:= putComparison3 = Plot[(-binomEurPutPrice[S, 87, 0.3, 0.75, 0.04, 90] +
      bsEurPutPrice[S, 87, 0.3, 0.04, 0.75]),
   {S, 40, 140}, PlotRange → All, PlotStyle → Darker[Green],
   AxesLabel → {"S.. cena podkladoveho aktiva", "odchylka hodnot modelů"},
   PlotLabel → "Srovnani binomickeho a Black-Scholesova
     modelu pro evropskou put opci \n n = 90"]
```

Srovnani binomickeho a Black–Scholesova modelu pro evropskou put opci
n = 90

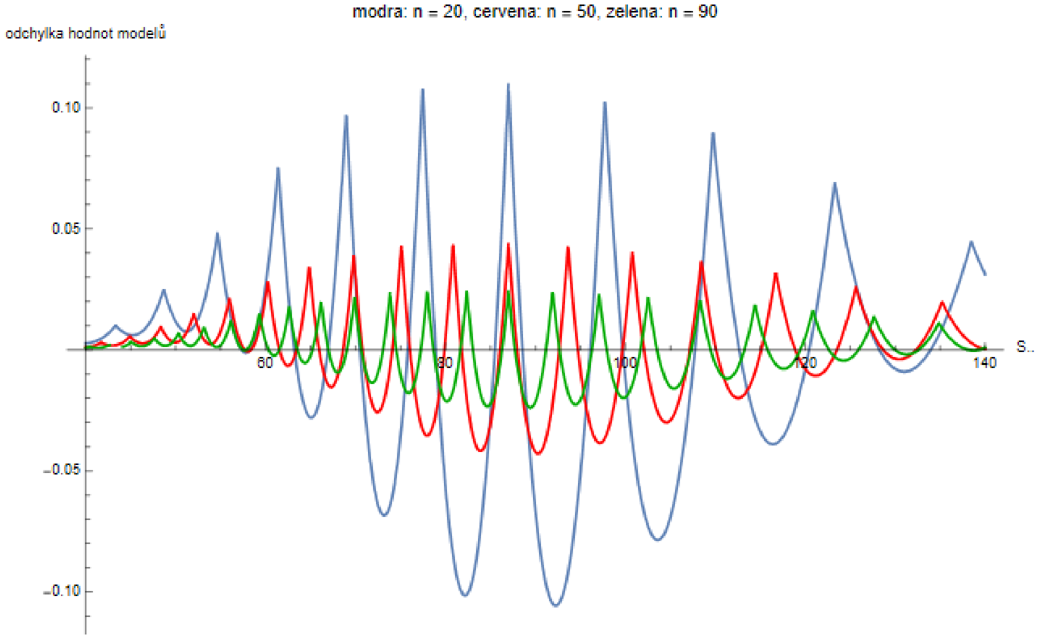
Out[59]=




```
In[60]:= Show[{putComparison1, putComparison2, putComparison3}, PlotRange → All,
  AxesLabel → {"S.. cena podkladoveho aktiva", "odchylka hodnot modelů"},
  PlotLabel → "Srovnani binomickeho a Black-Scholesova modelu pro evropskou
     put opci \nmodra: n = 20, cervena: n = 50, zelena: n = 90"]
```

Srovnani binomickeho a Black–Scholesova modelu pro evropskou put opci
modra: n = 20, cervena: n = 50, zelena: n = 90

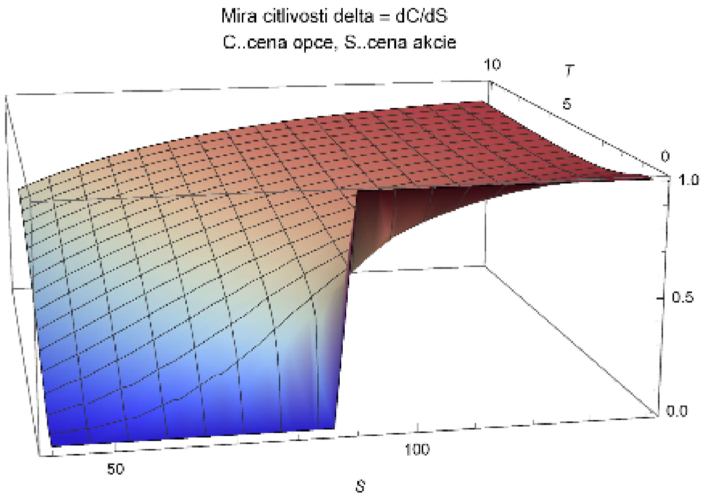
Out[60]=



Příloha F – Výpočty měr citlivosti opce – Greeks

```
(* Mathematica notebook pro vypocet citlivosti
 opci na zmenu urcitych faktoru pomoci Greeks
Tema DP:Vypracovani souboru procedur s financnim zamerenim-
   predevsim na ocenovani opci
autor:Bc.Martin Blazek - K14N0001P *)

(*Deklarace Black-Sholesova modelu*)

In[1]:= d1[S_, X_, sigma_, r_, T_] := (Log[S / X] + T * (r + sigma^2 / 2)) / (sigma * Sqrt[T]);
d2[S_, X_, sigma_, r_, T_] := d1[S, X, sigma, r, T] - (sigma * Sqrt[T]);
normDistFunction[x_?NumberQ] := CDF[NormalDistribution[], x];

bsEurCallPrice[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
  S * normDistFunction[d1[S, X, sigma, r, T]] -
   X * Exp[-r * T] * normDistFunction[d2[S, X, sigma, r, T]];
bsEurPutPrice[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
  X * Exp[-r * T] * normDistFunction[-d2[S, X, sigma, r, T]] -
   S * normDistFunction[-d1[S, X, sigma, r, T]];

(*Deklarace funkci pro vypocet jednotlivych Greeks a jejich 3D zobrazeni*)

(*Mira citlivosti delta-
 citlivost ceny opce na zmenu ceny podkladoveho aktiva v case*)

In[6]:= deltaCall[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
  Module[{s}, D[bsEurCallPrice[s, X, sigma, r, T], s] /. s ↦ S];
deltaPut[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
  Module[{s}, D[bsEurPutPrice[s, X, sigma, r, T], s] /. s ↦ S];

In[8]:= Plot3D[deltaCall[S, 87, 0.3, 0.04, T], {S, 40, 140}, {T, 0, 10},
 PlotLabel -> "Mira citlivosti delta = dC/dS \n C..cena opce, S..cena akcie",
 AxesLabel → {"S..cena akcie", "T..cas do splatnosti"},
 ImageSize → Medium, ColorFunction → "ThermometerColors"]
```

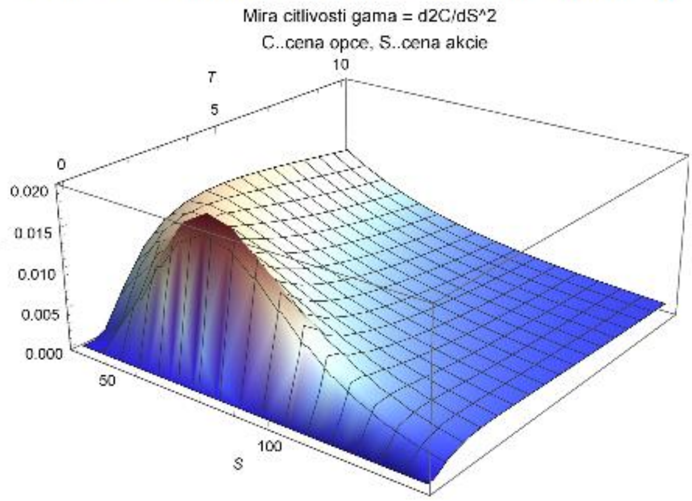
Out[8]=



In[9]:= gammaCall[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
```
gammaCall[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
  Module[{s}, D[bsEurCallPrice[s, X, sigma, r, T], {s, 2}] /. s ⧴ S];
gammaPut[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
  Module[{s}, D[bsEurPutPrice[s, X, sigma, r, T], {s, 2}] /. s ⧴ S];
```

In[11]:=
```
Plot3D[gammaCall[S, 87, 0.3, 0.04, T], {S, 40, 140}, {T, 0, 10},
 PlotLabel -> "Mira citlivosti gama = d2C/dS^2 \n C..cena opce, S..cena akcie",
 AxesLabel → {"S..cena akcie", "T..cas do splatnosti"},
 ImageSize → Medium, ColorFunction → "ThermometerColors"]
```

Out[11]=

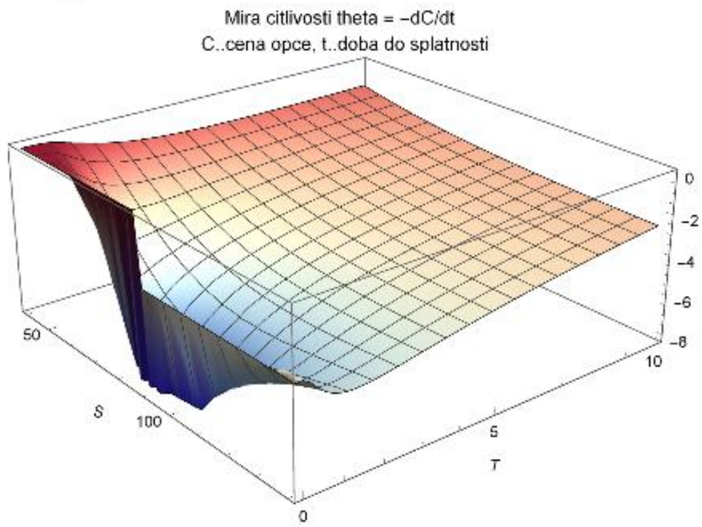



```
(*Mira citlivosti theta - citlivost ceny opce na zmenu doby do expirace*)
```

In[12]:=
```
thetaCall[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
  Module[{t}, -D[bsEurCallPrice[S, X, sigma, r, t], t] /. t ⧴ T];
thetaPut[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
  Module[{t}, -D[bsEurPutPrice[S, X, sigma, r, t], t] /. t ⧴ T];
```

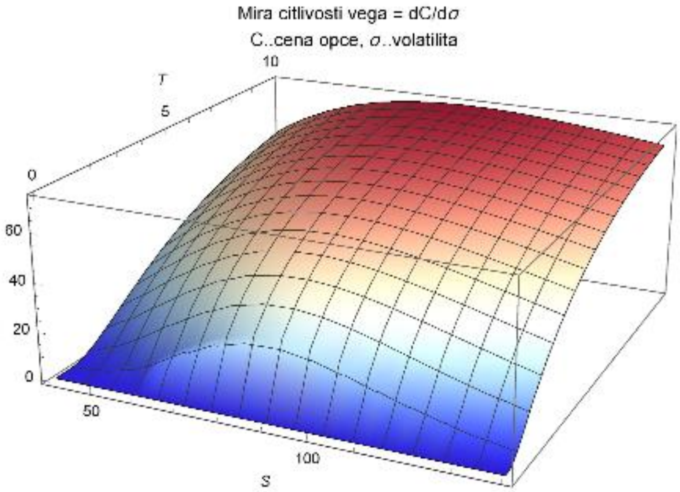
In[14]:=
```
Plot3D[thetaCall[S, 87, 0.3, 0.04, T], {S, 40, 140}, {T, 0, 10}, PlotLabel ->
  "Mira citlivosti theta = -dC/dt \n C..cena opce, t..doba do splatnosti",
 AxesLabel → {"S..cena akcie", "T..cas do splatnosti"},
 ImageSize → Medium, ColorFunction → "ThermometerColors"]
```

Out[14]=



```
(*Mira citlivosti vega-
 citlivost ceny opce na zmenu volatility ceny podkladoveho aktiva*)

In[15]:= vegaCall[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
   Module[{σ}, D[bsEurCallPrice[S, X, σ, r, T], σ] /. σ ↦ sigma];
 vegaPut[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
   Module[{σ}, D[bsEurPutPrice[S, X, σ, r, T], σ] /. σ ↦ sigma];

In[17]:= Plot3D[vegaCall[S, 87, 0.3, 0.04, T], {S, 40, 140}, {T, 0, 10}, ImageSize → Medium,
  PlotLabel → "Mira citlivosti vega = dC/dσ \n C..cena opce, σ..volatilita",
  AxesLabel → {"S..cena akcie", "T..cas do splatnosti"},
  ColorFunction → "ThermometerColors"]
```

Out[17]=

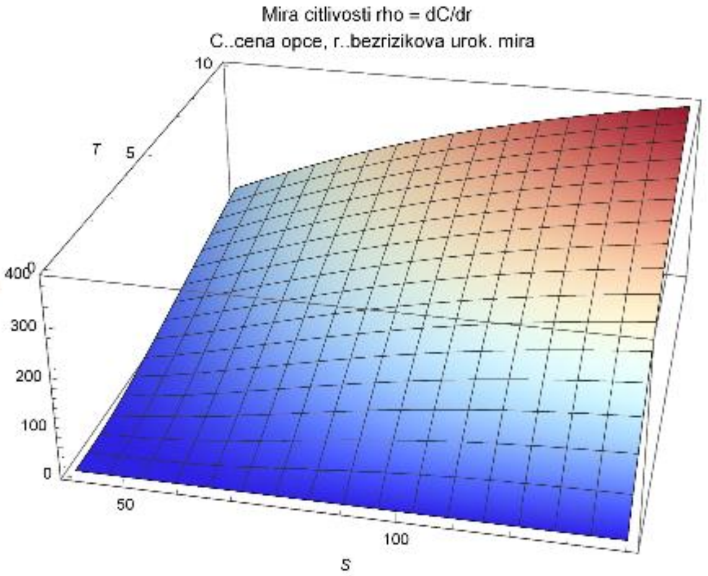



```
(*Mira citlivosti rho-citlivost ceny opce na zmenu bezrizikove urokove miry*)
```

In[18]:=
```
rhoCall[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
  Module[{Rf}, D[bsEurCallPrice[S, X, sigma, Rf, T], Rf] /. Rf :→ r];
rhoPut[S_, X_, sigma_, r_, T_] :=
  Module[{Rf}, D[bsEurPutPrice[S, X, sigma, Rf, T], Rf] /. Rf :→ r];
```

In[20]:=
```
Plot3D[rhoCall[S, 87, 0.3, 0.04, T],
 {S, 40, 140}, {T, 0, 10}, ImageSize → Medium, PlotLabel →
  "Mira citlivosti rho = dC/dr \n C..cena opce, r..bezrizikova urok. mira",
 AxesLabel → {"S..cena akcie", "T..cas do splatnosti"},
 ColorFunction → "ThermometerColors"]
```

Out[20]=



Abstrakt

BLAŽEK, Martin. *Vypracování souboru procedur s finančním zaměřením – především na oceňování opcí*. Plzeň, 2017. 87 s. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta ekonomická.

Klíčová slova: finanční deriváty, opce, oceňování opcí, binomický model, Black-Scholesův model

Předložená práce je zaměřena na charakteristiku a klasifikaci opčních derivátů a na modely pro jejich oceňování. Teoretická část se zaměřuje na vysvětlení základních pojmů finanční matematiky, analýzu a charakteristiku finančních derivátů a odvození modelů pro ocenění opcí. V praktické části jsou pak pomocí matematického softwaru Mathematica, Wolfram Research, Inc. modely pro oceňování opcí naprogramovány a s jejich pomocí jsou provedeny numerické experimenty.

Práce je dělená celkem do pěti kapitol. V úvodní kapitole jsou definovány základní pojmy finanční matematiky, sloužící pro pochopení problematiky investičního rozhodování, oceňování peněžních prostředků a jiných finančních produktů. Druhá kapitola je věnována finančním derivátům, jejich charakteristice a klasifikaci. Důraz je kladený především na popis základních vlastností, klasifikaci a charakteristiku opcí. Třetí kapitola je zaměřena na základní modely oceňování opcí – diskrétní binomický a spojitý Black-Scholesův model. Nejprve jsou popsány základní proměnné vstupující do modelů, poté jsou definovány předpoklady nutné k jejich sestavení a následně je provedeno samotné odvození obou modelů. V této kapitole je také popsán vztah mezi put a call opcí a jsou odvozeny vztahy pro výpočet citlivosti ceny opce na změnu různých faktorů. Ve čtvrté kapitole jsou odvozeny modely pro ocenění opcí na více podkladových instrumentů. V poslední kapitole jsou v prostředí Mathematica naprogramovány a na ukázkových příkladech řešeny oba základní modely – binomický a Black-Scholesův. Dále jsou provedeny a zhodnoceny vybrané numerické experimenty.

Abstract

BLAŽEK, Martin. *Development of a set of financially oriented procedures – with focus on option pricing*. Plzeň, 2017. 87 s. Dipoma thesis. University of West Bohemia. Faculty of Economics.

Key words: financial derivatives, options, option pricing, binomial model, Black-Scholes model

The presented work is focused on the characterization and classification of option derivatives and models for their pricing. The theoretical part focuses on explanation of basic concepts of financial mathematics, analysis and characterization of financial derivatives and derivation of option pricing models. In the practical part, option pricing models are programmed using mathematical software Mathematica, Wolfram Research, Inc. and numerical experiments are performed with these models.

Diploma thesis is divided into five chapters. The very first chapter defines the basic concepts of financial mathematics, which serve to understand the issues of investment decision making, valuation of money and other financial products. The second chapter is dedicated to financial derivatives, their characteristics and classification. Emphasis is placed mainly on the description of the basic features, the classification and the characteristics of options. The third chapter focuses on basic option pricing models - the discrete binomial and continuous Black-Scholes model. Firstly, the basic variables entering the models are described, then the assumptions necessary for their assembling are defined, and then the derivation of both models is made. This chapter also describes the relation between put and call options and derived relations for calculating the sensitivity of the option price to changing the various factors. In the fourth chapter, models for pricing the options on multiple underlying instruments are derived. In the last chapter, the Mathematica software is used for programming of the two basic models – binomial and Black-Scholes, that are solved on the sample examples. Selected numerical experiments are also performed and evaluated.