

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

PLZEŇ 2017

MICHAEL HRABĚ

Abstrakt

Cílem této diplomové práce je vytvoření metody, podle které bude nalezena množina všech vyhovujících regulátorů, jež zaručí stabilitu zpětnovazební smyčky, sledování periodického signálu a potlačení poruchy vzniklé interakcí periodického signálu s okolím. Pro tento účel je aplikováno repetitivní řízení s vnitřním modelem signálu obohaceným o frekvenční filtr s dolní propustí. Pro návrh repetitivního řízení je zvolena metoda smíšených citlivostních funkcí obohacená o požadavky na návrh řízení zajišťující stabilitu zpětnovazební smyčky. Výsledná metoda je aplikována na návrh PI regulátoru pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru.

Klíčová slova: sledování periodického signálu, potlačení poruchy, repetitivní řízení, vnitřní model periodického signálu, metoda smíšených citlivostních funkcí

Abstract

The aim of this diploma thesis is to create a method for finding such controllers set that satisfy feedback loop stability, track a periodic signal and reject a periodic disturbance. For this purpose a repetitive control using the intern model of the periodic signal with a low-pass filter is applied. The repetitive control is designed by mixed sensitivity method modified with the control design requirements for feedback loop stability. The new design method is used to design a PI controller in a speed loop of DC motor.

Keywords: tracking a periodic signal, reject a periodic disturbance, the repetitive control, the intern model of a periodic signal, mixed sensitivity method

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne _____

podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce, panu prof. Ing. Miloši Schlegelovi, CSc., za odborné vedení, konzultace a podnětné návrhy k práci. Rád bych též poděkoval své rodině za trpělivost a podporu při studiu.

OBSAH

Úvod	1
1 Repetitivní řídicí systém	2
2 Vnitřní model periodického signálu	3
2.1 Odvození vnitřního modelu pro periodický signál	3
2.2 Analýza vnitřního modelu periodického signálu	5
3 Řízený systém	7
3.1 Elektrický motor	7
3.1.1 Stejnoseměrný motor	7
3.1.2 Řízení stejnosměrného motoru	11
4 Návrh regulátoru v repetitivním řídicím systému	13
4.1 Požadavky na regulátor	13
4.2 Návrh kaskádové regulace pro stejnosměrný motor	15
4.2.1 Kaskádová regulace stejnosměrného motoru	15
4.2.2 PI regulátor	16
4.2.3 Regulace momentu	17
4.2.4 Regulace rychlosti	19
4.2.5 Regulace polohy	19
4.3 Metoda smíšených citlivostních funkcí	20
4.3.1 Popis metody	20
4.3.2 Geometrická interpretace metody	23
4.3.3 Metoda smíšených citlivostních funkcí pro PI regulátor	24
4.3.4 Ukázkový příklad pro návrh PI regulátoru s použitím metody smíšených citlivostních funkcí	26
5 Metoda návrhu repetitivního řídicího systému	28
5.1 Metoda návrhu PID regulátoru pro systém s vnitřním modelem peri- odického signálu	28
5.1.1 Aplikace metody návrhu PI regulátoru pro řízení rychlosti stejnoseměrného motoru	28
5.1.2 Popis algoritmy metody návrhu PI regulátoru pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru	37
5.1.3 Testování různých vstupních signálů	38
6 Výsledky práce	46

7	Diskuze	47
8	Závěr	48
	Literatura	49
	Seznam příloh	51
A	Řešení soustavy rovnic	52
B	Algoritmizace metody návrhu PI regulátoru pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru	60

SEZNAM OBRÁZKŮ

1	Blokové schéma repetitivního řídicího systému	2
2	Póly vnitřního modelu periodického signálu	5
3	Model vnitřního modelu periodického signálu	6
4	Řez stejnosměrným motorem [12]	7
5	Stejnoseměrný motor [14]	8
6	Schéma stejnosměrného motoru s permanentními magnety	9
7	Schéma stejnosměrného motoru	9
8	Napájení stejnosměrného motoru	11
9	Čtyřkvadrantový diagram činnosti motoru	12
10	Blokové schéma repetitivního řídicího systému s detailem vnitřního modelu	14
11	Blokové schéma repetitivního řídicího systému po aplikaci Small-Gain Theorem	14
12	Kaskádová regulace rychlosti a momentu stejnosměrného motoru . . .	15
13	Model stejnosměrného motoru	16
14	Model stejnosměrného motoru	17
15	Proudová smyčka případ A	17
16	Proudová smyčka případ B	18
17	Proudová smyčka případ C	18
18	Smyčka s regulací rychlosti	19
19	Smyčka s regulací polohy	19
20	Zpětná smyčka s perturbacemi	21
21	Klasický model s perturbacemi	22
22	Mixed sensitivity problem	22
23	Ověření geometrické interpretace metody smíšených citlivostních funkcí	27
24	Parametrická rovina k-ki pro různé parametry γ	27
25	Parametrická rovina k-ki	31
26	Parametrická rovina k-ki pro odlišné hodnoty γ	32
27	Ověření platnosti geometrické interpretace	32
28	Parametrická rovina k-ki	33
29	Parametrická rovina k-ki pro odlišné hodnoty γ	34
30	Ověření platnosti geometrické interpretace	34
31	Parametrická rovina k-ki	35
32	Parametrická rovina k-ki pro odlišné hodnoty γ	36
33	Ověření platnosti geometrické interpretace	36
34	Výběr bodu splňující kritéria v k-ki parametrické rovině	38
35	Referenční signál, který má být sledován	39

36	Regulační odchylka při použití vnitřního modelu vstupního signálu .	40
37	Regulační odchylka bez použití vnitřního modelu vstupního signálu .	40
38	Výběr bodu splňující kritéria v k-ki parametrické rovině	41
39	Referenční signál	42
40	Regulační odchylka při použití vnitřního modelu vstupního signálu .	42
41	Regulační odchylka bez použití vnitřního modelu vstupního signálu .	43
42	Výběr bodu splňujícího kritéria v k-ki parametrické rovině	44
43	Referenční signál	44
44	Regulační odchylka při použití vnitřního modelu vstupního signálu .	45
45	Regulační odchylka bez použití vnitřního modelu vstupního signálu .	45

SEZNAM TABULEK

1	Tabulka zvolených parametrů	30
---	---------------------------------------	----

ÚVOD

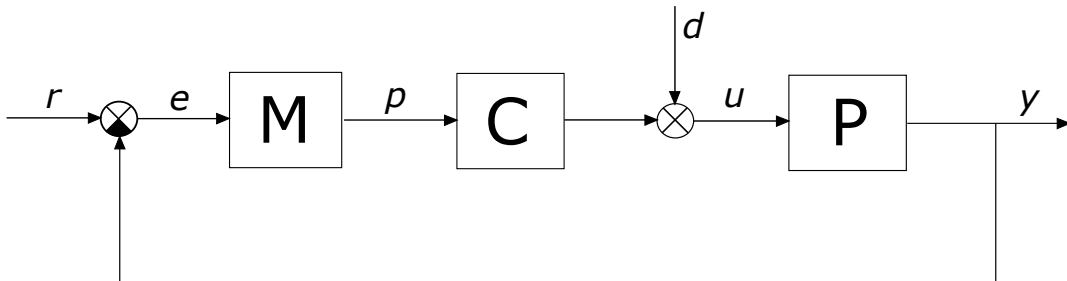
Mnoho signálů v průmyslovém odvětví je periodických anebo mohou být aproximovány periodickým signálem na dostatečně dlouhém časovém intervalu. Příkladem mohou být např. signály vyskytující se v oblasti elektrických motorů, generátorů, magnetický disků a obecně strojů, které vykonávají stále se opakující činnost. Při vykonávání činnosti dochází k nežádoucímu chování vlivem poruch. Nejčastěji je nežádoucí chování způsobeno např. poruchou materiálu nebo okolními vibracemi. V reálném světě nelze docílit absolutní izolace od okolí. Kvůli uvedeným případům a mnoho dalším dochází k výskytu opakující se poruchy u periodických signálů v průmyslových aplikacích. Kladeným požadavkem je sledování původního periodického signálu nezatíženého vnější poruchou a potlačení poruchy vzniklé v periodickém signálu při interakci s okolím.

Jedním z možných řešení je aplikace repetitivního řízení. Repetitivní řízení má za úkol sledování periodického signálu a potlačení nežádoucí poruchy, která vzniká vlivem interakce s okolním prostředím anebo v samotném řízeném systému. Existuje více postupů, jak docílit tohoto úkolu. Řešení uvedené v této práci je založeno na principu vnitřního modelu [5]. K řízenému systému je přidán vnitřní model periodického signálu (s pevnou periodou). Vnitřní model periodického signálu nabývá nekonečné dimenze, jelikož má nekonečně mnoho pólů na imaginární ose. Ke každému pólu na imaginární ose patří i komplexně sdružený pól až na výjimku pólu v nule. Dvojice vzestupně na imaginární ose představují signál o první harmonické frekvenci, druhé harmonické frekvenci a tak dále. Pól v nule představuje posunutí střední hodnoty signálu. Z důvodu fyzikální realizovatelnosti frekvenčního pásma je vnitřní model periodického signálu rozšířen o váhovou funkci, jež slouží jako frekvenční filtr s dolní propustí. Přítomnost váhové funkce stanovuje požadavky na návrh řízení, aby byla zaručena stabilita zpětnovazební smyčky.

Pro návrh repetitivního řízení je nutné stanovit metodu, podle které bude nalezena množina všech regulátorů, jež zaručí stabilitu zpětnovazební smyčky, která obsahuje řízený systém s vnitřním modelem periodického signálu. Pro tento účel byla vybrána metoda smíšených citlivostních funkcí, která je modifikována o požadavky na návrh řízení zajišťující stabilitu zapětnovazební smyčky. Výsledná metoda je aplikována na návrh PI regulátoru pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru.

1 REPETITIVNÍ ŘÍDICÍ SYSTÉM

Repetitivní řídicí systém použitý v této práci má podobu zachycenou v následujícím blokovém schématu.



Obr. 1: Blokové schéma repetitivního řídicího systému

Blok P představuje spojitý lineární systém konečné dimenze, který je časově neměnný. Blok C je spojitý regulátor, který je navržen tak, aby byl celý uzavřený systém stabilní. Blok M je vnitřním modelem [5] periodického signálu o pevné periodě T . Signál r je referenčním signálem, signál d představuje poruchu na vstupu systému P , signál p je vstupem do regulátoru C , signál u je řídicím signálem, signál y je výstupním signálem a signál e představuje regulační odchylku, jejíž hodnota má být nízká. Referenční signál r a poruchový signál d jsou periodické signály o pevné periodě T .

2 VNITŘNÍ MODEL PERIODICKÉHO SIGNÁLU

Vnitřní model periodického signálu je nedílnou součástí repetitivního řídicího systému. Klade požadavky na podobu citlivostní funkce repetitivního řídicího systému. Póly vnitřního modelu periodického signálu musí být zkráceny nulami citlivostní funkce, aby regulační odchylka konvergovala k nule.

2.1 Odvození vnitřního modelu pro periodický signál

Pro získání vnitřního modelu periodického signálu je nutné si uvědomit, co je požadováno od repetitivního řídicího systému. Úkolem je sledovat periodický signál na vstupu anebo potlačit periodickou poruchu. Tyto dva požadavky mohou být také vyjádřeny jako požadavek na nulovou regulační odchylku $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ pro řízený systém v ustáleném stavu. Pomocí věty 1 a lemma 2.1 je možné získat podobu vnitřního modelu periodického signálu při dodržení požadavku na nulovou regulační odchylku.

Věta 1 (Limitní věta o konečné hodnotě [4]). *Předpokládejme, že $x \in L^1_{\text{loc}}[0, \infty)$ a $x(t) = 0$ pro $t < 0$, potom platí*

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s), \quad (1)$$

kde $X(s)$ je dán Laplacovou transformací funkce $x(t)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} &= \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} - \int_0^{\infty} x(t)(-s)e^{-st} \\ &= x(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = sX(s) - x(0). \end{aligned}$$

Dále platí

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(\infty) - x(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0).$$

A tedy

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

□

Limita (1) nemusí vždy existovat. O existenci konečné hodnoty funkce $x(t)$ pro $t \rightarrow \infty$ rozhoduje poloha pólů charakteristického polynomu $X(s)$. Následující lemma říká, kdy existuje konečná hodnota funkce $x(t)$.

Lemma 2.1. Necht $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, potom existuje limita $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(\infty)$ právě tehdy, když

1. Všechny póly charakteristického polynomu $X(s)$, které nejsou v počátku ($s \neq 0$), leží v levé otevřené polorovině komplexní roviny.
2. Charakteristický polynom $X(s)$ má nanejvýš jeden pól v počátku ($s = 0$).

Pokud se striktně požaduje $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 = e(\infty)$, v lemma 2.1 platí pouze bod 1. Pokud by $X(s)$ ($E(s)$) obsahoval pól v počátku, hodnota $x(\infty)$ ($e(\infty)$) by byla sice konečná, ale nenulová obecně.

S využitím znalosti $\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = e(\infty)$ je možné využít následující větu 2.

Věta 2. Necht $r(t)$ je libovolná periodická funkce s periodou T (tj. $r(t + T) = r(t), \forall t \geq 0$ a $r(t) = 0$ pro $t < 0$) a $r \in L^1_{\text{loc}}[0, \infty)$, potom $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ právě tehdy, když $S = (1 - e^{-Ts})S_0$, kde S_0 je stabilní přenos (tj. nemá žádné póly v pravé uzavřené polorovině komplexní roviny).

Důkaz.

$$\begin{aligned} R(s) &= \int_0^{\infty} r(t)e^{-Ts} dt = \int_0^T r(t)e^{-Ts} dt + \int_T^{2T} r(t)e^{-Ts} dt + \int_{2T}^{3T} r(t)e^{-Ts} dt + \dots = \\ &= \int_0^T r(t)e^{-Ts} dt + e^{-Ts} \int_0^T r(t)e^{-Ts} dt + e^{-2Ts} \int_0^T r(t)e^{-Ts} dt + \dots = \\ &= (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots) \int_0^T r(t)e^{-Ts} dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T r(t)e^{-Ts} dt = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \tilde{R}(s). \end{aligned}$$

$\tilde{R}(s)$ je stabilní přenos a platí, že

$$E(s) = S(s)R(s) = S(s) \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \tilde{R}(s).$$

Limita $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ existuje právě tehdy, jestliže $E(s)$ je stabilní (tj. nemá žádné póly v pravé uzavřené polorovině komplexní roviny). Přenos $\frac{1}{1 - e^{-Ts}}$ má spočetně mnoho pólů na imaginární ose ($s = jk \frac{2\pi}{T}, k \in \mathbb{Z}$) a přenos $\tilde{R}(s)$ tyto póly v $E(s)$

obecně nezkrátí. Póly musí být zkráceny nulami citlivostní funkce S . Tedy S musí být ve tvaru

$$S = (1 - e^{-Ts})S_0.$$

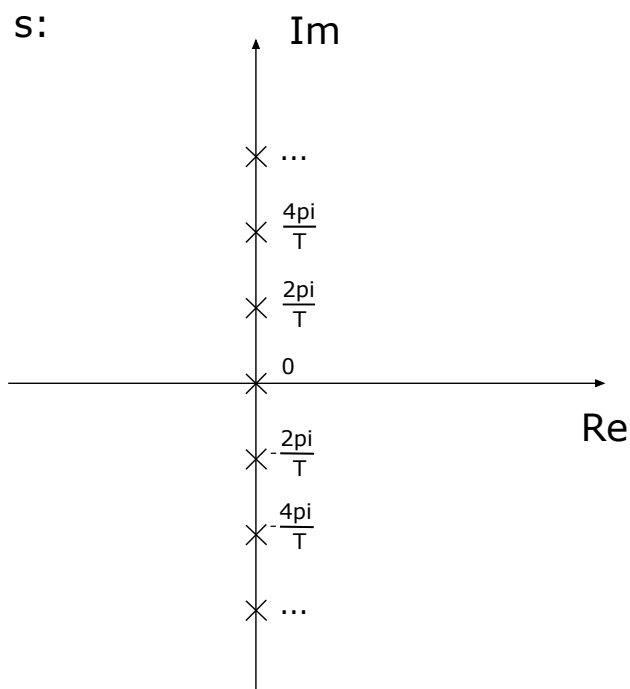
□

Z věty 2 vyplývá, že vnitřní model M periodického signálu musí být ve tvaru

$$M = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}. \quad (2)$$

2.2 Analýza vnitřního modelu periodického signálu

Vnitřní model periodického signálu M (2) má všechny póly na imaginární ose ($s = jk\frac{2\pi}{T}, k \in \mathbb{Z}$).

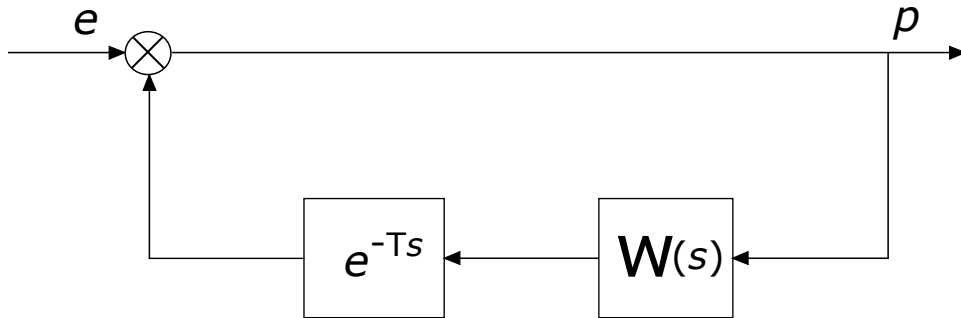


Obr. 2: Póly vnitřního modelu periodického signálu

Při realizaci přenosu, který obsahuje nekonečně mnoho pólů, je nutné z důvodu fyzikálního omezení ve frekvenčním spektru a robustnosti vůči dopravnímu zpoždění uvažovat filtr s dolní propustí. Přenos vnitřního modelu periodického signálu M (2) má tedy následující podobu:

$$M = \frac{1}{1 - e^{-Ts}W(s)}, \quad (3)$$

kde $W(s)$ je racionální lomená funkce, která splňuje podmínku $\|W(s)\|_{\infty} \leq 1$. Přenos (3) lze zobrazit pomocí blokového schématu (viz obr. 3).



Obr. 3: Model vnitřního modelu periodického signálu

3 ŘÍZENÝ SYSTÉM

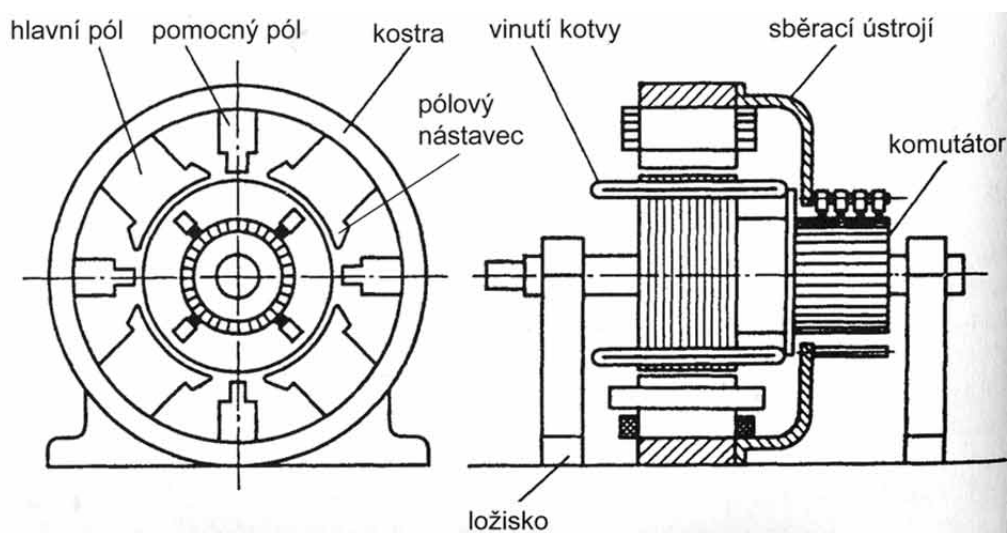
Řízený systém pro účely repetitivního řízení musí být takový systém, který vykonává periodickou činnost. Systém splňující tuto podmínku může být například elektrický motor, robotický manipulátor, magnetický disk, vačka a mnoho dalších. V této práci se uvažuje o stejnosměrném elektrickém motoru jako o řízeném systému.

3.1 Elektrický motor

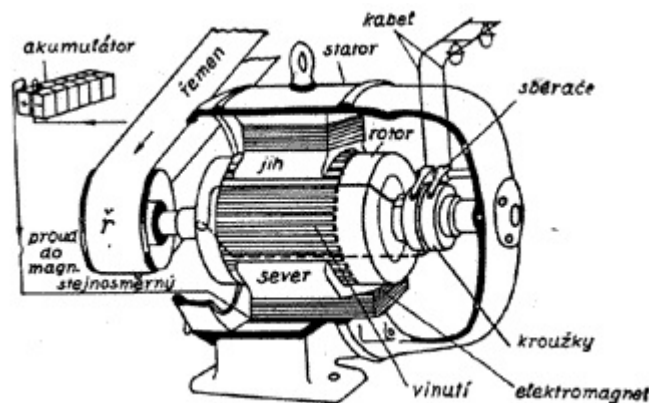
Elektrické motory představují širokou oblast akčních členů, které převádí elektrickou energii na mechanickou energii (pohyb, polohu nebo sílu). Spolu s výkonovými budiči a regulátory pak tvoří kompletní pohonné jednotky pro elektromechanické soustavy a procesy.

3.1.1 Stejnosměrný motor

Dříve byly stejnosměrné motory populárními přístroji pro aplikace vyžadující řízení rychlosti a polohy. Byly populární díky nízké pořizovací ceně a snadné implementaci řízení. Avšak nyní ztrácí na trhu oproti střídavým motorům, jelikož potřebují častou údržbu kartáčů a komutátoru. Dalším faktorem je pak cena, která u střídavých motorů začíná klesat a ve srovnání se stejnosměrnými motory už není tak rozdílná. I přes klesající zájem o stejnosměrné motory v průmyslu jsou stále hojně používány.



Obr. 4: Řez stejnosměrným motorem [12]



Obr. 5: Stejnospměný motor [14]

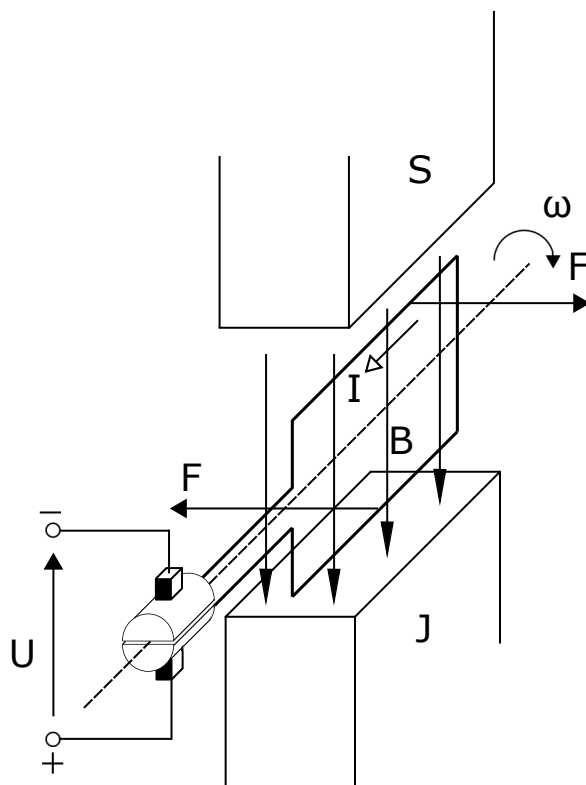
Stejnospměný motor znázorněný na obrázcích 4 a 5 je obecně systém převádějící vstupní elektrickou energii, kterou je stejnosměrný proud, na mechanickou energii. Elektrický motor může pracovat i v generátorovém nebo brzděném režimu, kdy převádí naopak mechanickou energii na elektrickou.

Stejnospměné stroje jsou stroje točivé (točí se s úhlovou rychlostí ω). Základní rozdělení je tedy na stator (nepohyblivá část) a rotor (pohyblivá část). Magnetické pole je tvořeno vnějším statorovým permanentním magnetem s magnetickou indukcí B (viz obr. 6) nebo elektromagnetem zapojeným v sérii, paralelně nebo nezávisle s proudovou cívkou vnitřního rotoru, který má v řezu obvykle tvar kotvy. Při roztočení rotoru vzniká zpětná reakce – indukované napětí, které působí proti napájecímu proudu a omezuje tak maximální otáčky bez zatížení. Směr rotace rotoru je dána směrem proudu, kterým je napájen motor.

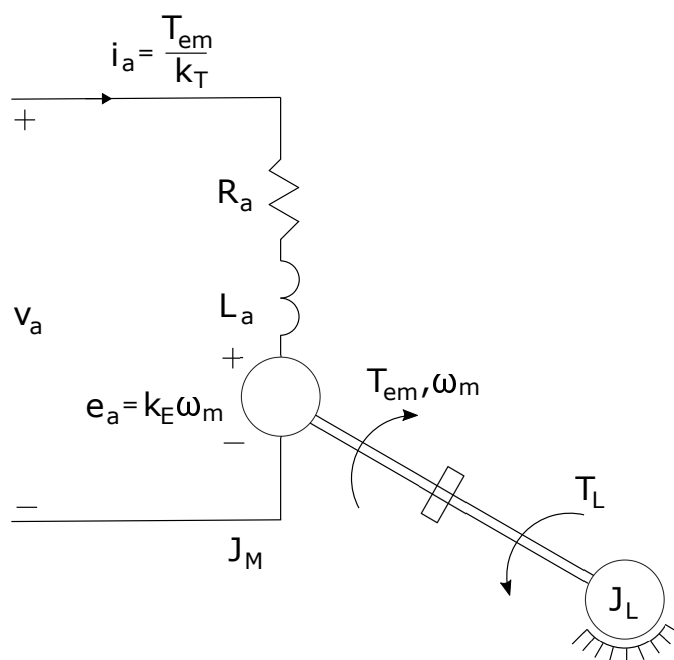
Pro výpočet síly, kterou způsobí otáčení rotoru, se využívá fyzikálního zákona o silových účincích F způsobených elektrickým proudem I protékající vodičem délky l . Vodič, jímž protéká elektrický proud, se nachází v magnetické poli s indukcí B s počtem vinutí n . Směr silových účinků je pak dán podle pravidla levé ruky.

$$F = nBIl. \quad (4)$$

Síla, resp. moment hybnosti motoru tedy přímo závisí na protékajícím proudu, a to kolmo k magnetickému toku. Rotační pohyb zajišťuje tangenciální složka síly, která mění s natočením velikost i znaménko. Kdyby však vodiči procházel trvale stejnosměrný proud, přestaly by se vodiče pohybovat po dosažení neutrální polohy - v ose mezi dvěma sousedními póly. Aby se kotva mohla otáčet dále původním směrem, musí se smysl proudu v nich po přechodu od jednoho pólu ke druhému změnit. Tuto změnu smyslu proudu ve vodičích rotorového vinutí obstarává komutátor.



Obr. 6: Schéma stejnosměrného motoru s permanentními magnety



Obr. 7: Schéma stejnosměrného motoru

Na obrázku 7 je zachyceno schéma stejnosměrného motoru. Toto schéma znázorňuje transformaci elektrické energie na mechanickou energii. Proud procházející

obvodem je označen jako i_a . Přítomnost proudu v obvodu produkuje elektromagnetický kroutící moment $T_{em} = k_T i_a$ nutný k rotaci mechanické zátěže na rotoru o úhlové rychlosti ω_m . Točení rotoru o úhlové rychlosti ω_m indukuje elektromotorické napětí dané jako $e_a = k_E \omega_m$. Vstupní napětí v_a předchází indukovanému elektromotorickému napětí e_a , a to umožňuje protékání proudu i_a . Pro celkové napětí ve smyčce platí

$$v_a = e_a + R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} \quad (5)$$

Pro mechanickou soustavu platí, že elektromagnetický kroutivý moment T_{em} vytvořený motorem předchází mechanickému točivému momentu T_L , a to způsobí úhlové zrychlení dané výrazem

$$J_{eq} \frac{d\omega_m}{dt} + b\omega_m = T_{em} - T_L, \quad (6)$$

kde J_{eq} je celková efektivní hodnota momentu setrvačnosti stejnosměrného motoru, b je vizkózní tření závislé na rychlosti otáčení hřídele motoru a T_L je mechanická zátěž na rotoru.

Stojí za povšimnutí, že elektrický systém a mechanický systém je vzájemně provázán. Elektromotorické napětí e_a v elektrickém systému (5) závisí na úhlové rychlosti ω_m . Točivý moment T_{em} mechanického systému (6) závisí na hodnotě elektrického proudu i_a . Elektrická energie absorbovaná stejnosměrným motorem je převedena na mechanickou energii a naopak. V rovnovážném stavu s napětím v_a a s mechanickým točivým momentem T_L platí

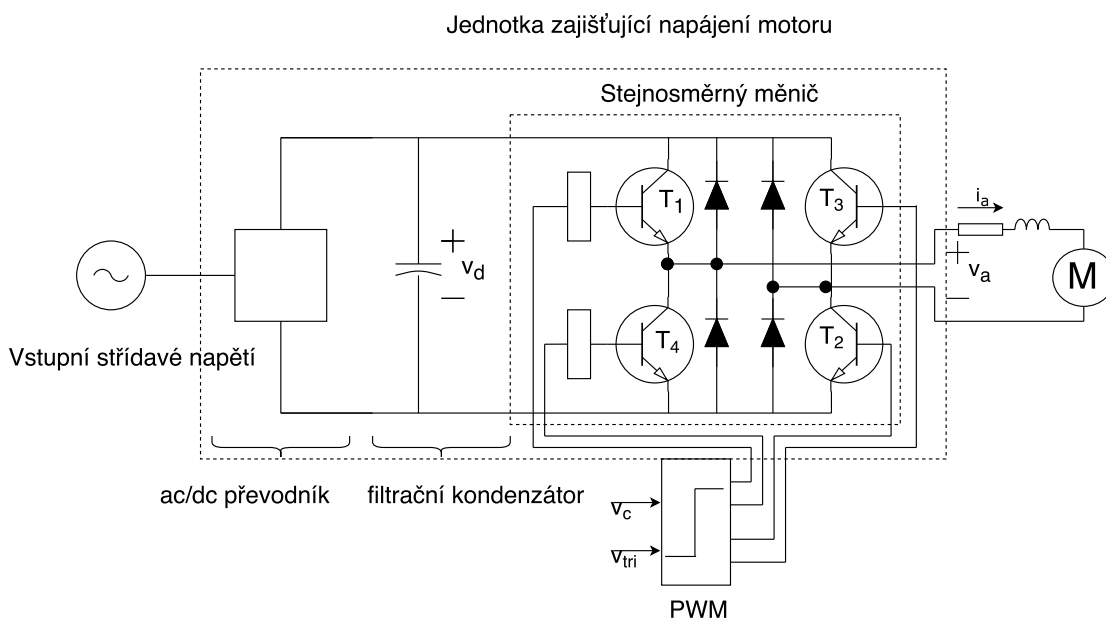
$$i_a = \frac{T_{em}(= T_L)}{k_T} \quad (7)$$

a

$$\omega_m = \frac{e_a}{k_E} = \frac{V_a - R_a I_a}{k_E}. \quad (8)$$

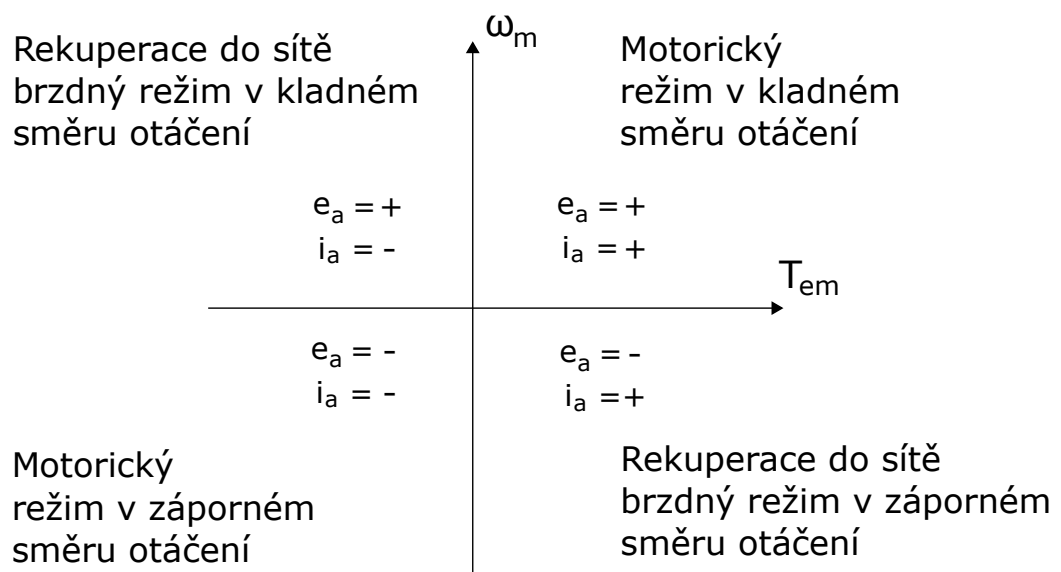
3.1.2 Řízení stejnosměrného motoru

Pro řízení motoru je nutné dodat napájení k motoru. Napájení motoru a řízení otáček a momentu obsluhuje impulsní (dvoustavové) řízené napájení stejnosměrného motoru pomocí proměnné šířky impulsu (v literatuře známé jako pulsně šířková modulace - PWM). Periodicky lze dodávat střední hodnotu napětí a proudu pomocí výkonového tranzistorového spínače. Jednotka zajišťující napájení motoru je zobrazena na obrázku 8.



Obr. 8: Napájení stejnosměrného motoru

Pro kompletní 4-kvadrantové impulsní řízení motoru v obou polaritách s možností brzdění se používá 4-tranzistorový H-můstek (viz obr. 8). Při současném sepnutí T1 a T2 teče proud motorem v kladném směru zleva vpravo, při sepnutí T3 a T4 teče proud zpět a roztáčí motor opačně. Elektrický motor může pracovat i v generátorovém nebo brzdném režimu, kdy převádí naopak mechanickou energii na elektrickou. Existují čtyři pracovní režimy, které lze znázornit v tzv. čtyřkvadrantovém diagramu (viz obr. 9).



Obr. 9: Čtyřkvadrantový diagram činnosti motoru

4 NÁVRH REGULÁTORU V REPETITIVNÍM ŘÍDICÍM SYSTÉMU

Při návrhu regulátoru je nejprve důležité splnit tyto podmínky:

1. Navržený regulátor C je schopný ustabilizovat uzavřenou smyčku se systémem P bez vnitřního modelu periodického signálu ($M = 1$).
2. Přidání vnitřního modelu periodického signálu nezpůsobí nestabilitu uzavřené smyčky.

4.1 Požadavky na regulátor

Prvotním požadavkem při návrhu regulátoru v repetitivním řídicím systému je zaručení stability pro zpětnovazebnou smyčku. Zpětnovazební smyčka (viz obr. 1) má přenos

$$F_{cl}(s) = \frac{MCP}{1 + MCP}, \quad (9)$$

kde $M = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$ (2). Požadavek na zaručení stability pro zpětnovazebnou smyčku lze vyjádřit pomocí následující věty 3.

Věta 3 ([3]). *Pokud přenosová funkce C představující regulátor splňuje následující podmínky:*

- a) $(1 + PC)^{-1} \in H^\infty$
- b) *nedochází ke krácení nestabilních pólů s nestabilními nulami v přenosu PC*
- c) $\|W(1 + PC)^{-1}\|_\infty < 1$.

Pak zpětnovazební smyčka daná přenosem (9) na obr. 1 je stabilní.

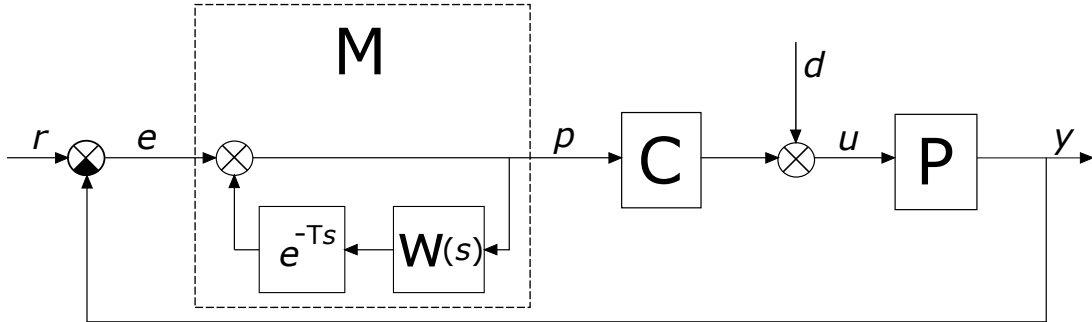
Důkaz. Podmínky a) a b) vychází z principu vnitřní stability [6] zpětnovazebního systému obsahujícího pouze regulátor C a řízený systém P . Vnitřní stabilita systému je zajištěna, pokud přenosová funkce $(1 + PC)$ nemá žádné nuly v oblasti pravé uzavřené poloroviny komplexní roviny a pokud v součinu PC nedochází ke krácení nul a pólů v oblasti pravé uzavřené poloroviny komplexní roviny.

Podmínku c) je nutné rozebrat podrobněji. Pro její důkaz je vhodné si zobrazit blokové schéma repetitivního řídicího systému (viz obr. 1) na podrobnější podobu s využitím blokového schématu vnitřního modelu periodického signálu (viz obr. 3).

S použitím věty Small-Gain Theorem [7] je možné blokové schéma na obr. 10 přepsat do podmínky:

$$\|F_{AB}(s)\|_{\infty} \cdot \|e^{-Ts}\|_{\infty} < 1, \quad (10)$$

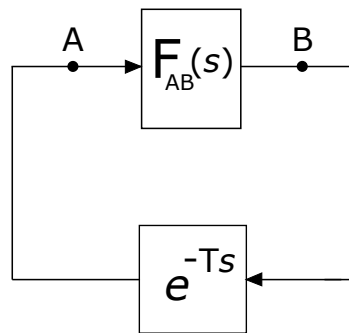
kde přenos F_{AB} je získán jako přenos z výstupu a vstupu bloku e^{-Ts} vyznačené body A a B (viz obr. 11).



Obr. 10: Blokové schéma repetitivního řídicího systému s detailem vnitřního modelu

Přenos F_{AB} lze ze schématu na obr. 10 vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned} F_{AB} &= W(s) + \frac{-C(s)P(s)W(s)}{1 + C(s)P(s)} = W(s) \left(1 - \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \right) = \\ &= W(s) \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = W(s) (1 + C(s)P(s))^{-1}. \end{aligned}$$



Obr. 11: Blokové schéma repetitivního řídicího systému po aplikaci Small-Gain Theorem

Upravením podmínky (10) platí:

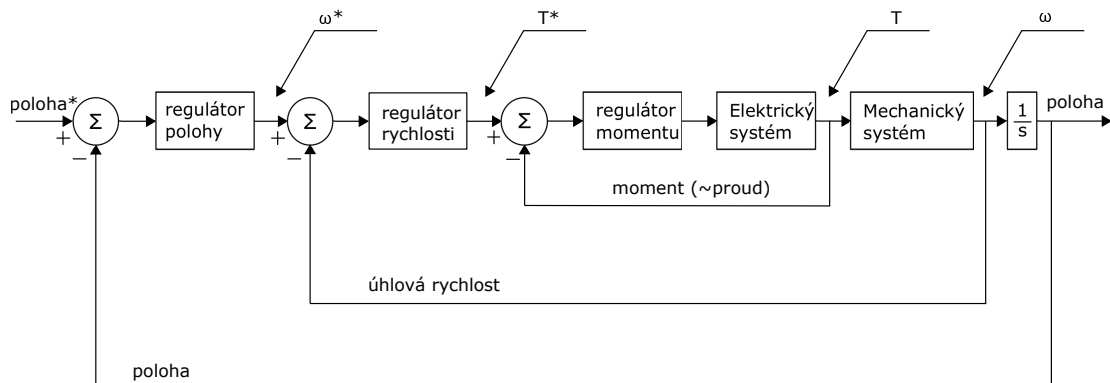
$$\|F_{AB}(s)\|_{\infty} \cdot \|e^{-Ts}\|_{\infty} = \|F_{AB}(s)\|_{\infty} \cdot 1 = \|W(s)(1 + C(s)P(s))^{-1}\|_{\infty} < 1.$$

□

4.2 Návrh kaskádové regulace pro stejnosměrný motor

4.2.1 Kaskádová regulace stejnosměrného motoru

Pro řízení stejnosměrného motoru se používá kaskádová regulační smyčka. Vnější smyčka reguluje polohu motoru, prostřední smyčka reguluje rychlost motoru a vnitřní proudová smyčka reguluje proud (moment) motoru. Vstupem do regulační smyčky je požadovaná poloha. Regulátor polohy vygeneruje požadovanou rychlost ω^* a regulátor momentu vygeneruje požadovaný moment T^* . Na výstupu motoru je pak možné sledovat aktuální hodnotu momentu, rychlosti a polohy. Kaskádová regulace je zachycena na obr. 12.

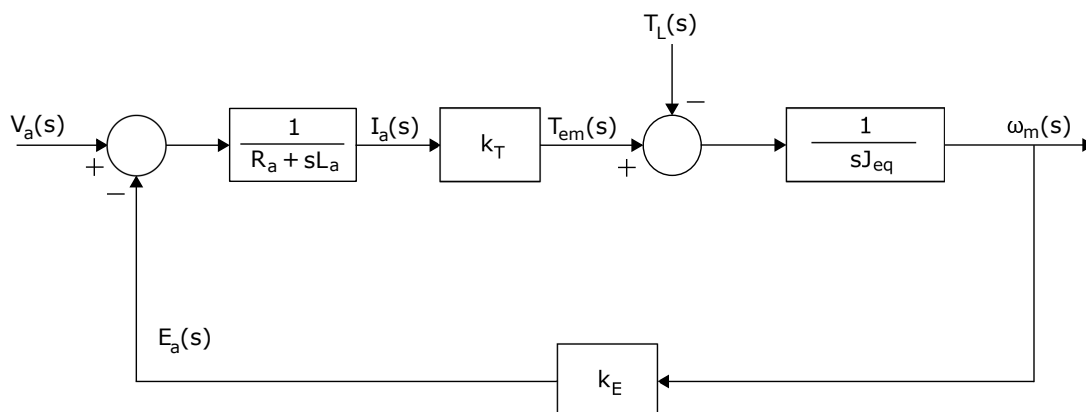


Obr. 12: Kaskádová regulace rychlosti a momentu stejnosměrného motoru

Modelování stejnosměrného motoru se zatížením může vypadat následovně. Využitím rovnic (5) a (6) a schématu na obr. 7 je možné sestavit blokový diagram popisující model stejnosměrného motoru se zátěží (viz obr. 13).

Celkový točivý moment ($J_{eq} = J_M + J_L$) je součtem momentu setrvačnosti motoru a momentu setrvačnosti zátěže. Po provedení Laplaceovy transformace na rovnice (5) a (6) obdržíme:

$$V_a(s) = E_a(s) + (R_a + sL_a)I_a(s) \quad (11)$$



Obr. 13: Model stejnosměrného motoru

a se zanedbáním točivého momentu zátěže $T_L(s)$

$$\omega_m(s) = \frac{T_{em}(s)}{sJ_{eq} + b}, \quad T_{em}(s) = k_T I_a(s). \quad (12)$$

Vyjádřením $I_a(s)$ se získá

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - E_a(s)}{R_a + sL_a}, \quad E_a(s) = k_E \omega_m(s). \quad (13)$$

Dále necht elektrická časová konstanta je definovaná jako $\tau_e = \frac{L_a}{R_a}$.

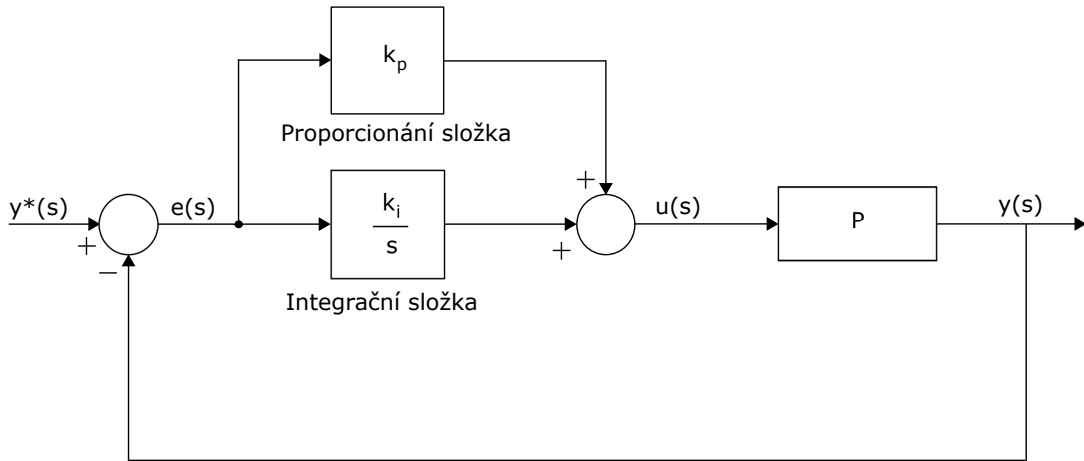
4.2.2 PI regulátor

V systémech řídicích pohyb se hojně používá proporciálně-integrační (PI) regulátor (viz obr. 14).

Při řízení rychlosti a momentu se využívá právě zmíněný PI regulátor. Kdyby byla použita pouze proporcionální část regulátor, vznikla by trvalá odchylka v ustáleném stavu jako odezva na jednotkový vstupní skok. Proto je proporcionální složka kombinována s integrační složkou.

Přenosová funkce PI regulátoru podle schématu na obr. 14 je

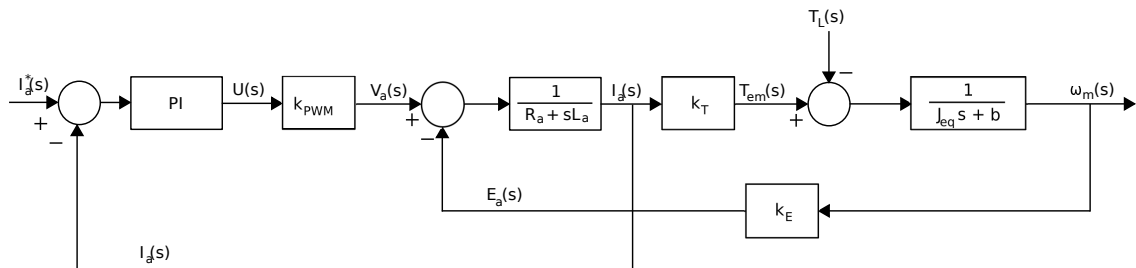
$$\frac{u(s)}{e(s)} = \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right) \quad (14)$$



Obr. 14: Model stejnosměrného motoru

4.2.3 Regulace momentu

Jak bylo již dříve zmíněno, vnitřní smyčkou je proudová smyčka (regulující moment). Proudová smyčka je řízena PI regulátorem (viz obr. 14. Proudová smyčka případ A na obr. 15 se získá pomocí odvozeného modelu stejnosměrného motoru na obr. 13. Tato smyčka, jak lze nahlédnout, obsahuje zpětnou vazbu na otáčky motoru. Jednoduchou úpravou lze docílit toho, aby vnitřní smyčka motoru byla závislá na výstupním proudu a ne na rychlosti motoru.

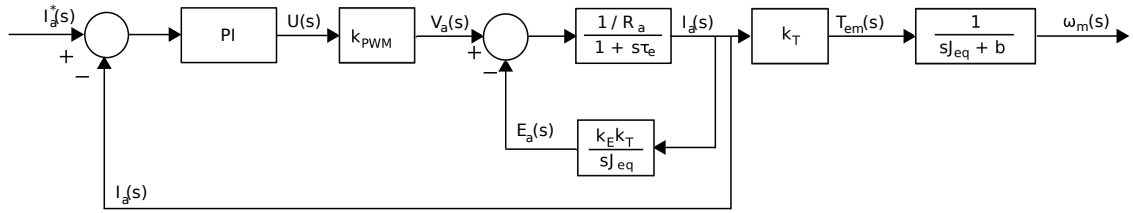


Obr. 15: Proudová smyčka případ A

Úprava vnitřní smyčky modelu je na obr. 16. Ve schématu na obr. 16 je zanedbán točivý moment zátěže T_L .

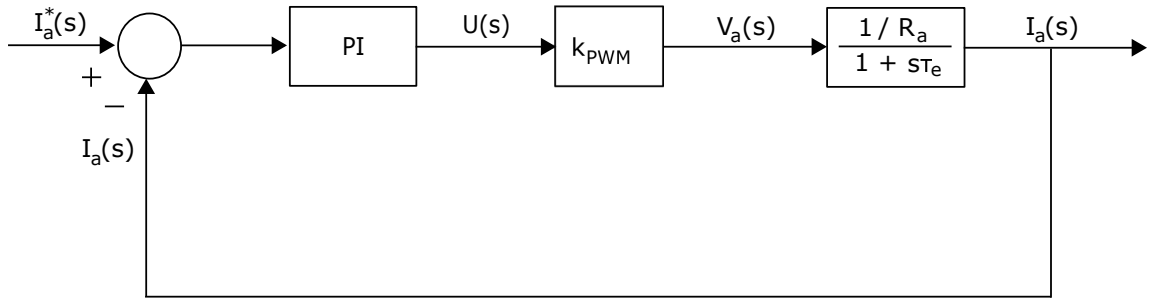
Přenos $E_a(s) = \frac{k_T k_E}{s J_{eq} + b} I_a(s)$ je zpětnou vazbou ve schématu na obr. 16. Je jasné, že tento přenos je nepřímo závislý na celkovém momentu setrvačnosti J_{eq} . Dále se předpokládá, že J_{eq} je dostatečně velký na to, aby vyrušil efekt zpětné vazby (zpětná vazba konverguje k nule). S tímto předpokladem lze schéma na obr. 16 upravit na schéma uvedené na obr. 17.

Schéma na obr. 17 již znázorňuje pouze smyčku s regulací momentu (proudu). Vstupem je požadovaná hodnota proudu a výstupem je aktuální hodnota proudu.



Obr. 16: Proudová smyčka případ B

Proud je přímo úměrný momentu motoru.



Obr. 17: Proudová smyčka případ C

Regulátor proudu na obr. 17 má proporcionální zesílení k a zesílení dané integračním členem k_I . Přenosová funkce otevřené smyčky je dána jako

$$F_{OL} = \frac{k_I}{s} \left(1 + \frac{s}{k_I/k} \right) k_{PWM} \frac{1/R_a}{1 + \frac{s}{1/\tau_e}} \quad (15)$$

Určením konstant k a k_I jako

$$\frac{k_I}{k} = \frac{1}{\tau_e} \quad (16)$$

vede ke zkrácení pólu v otevřené proudové smyčce na

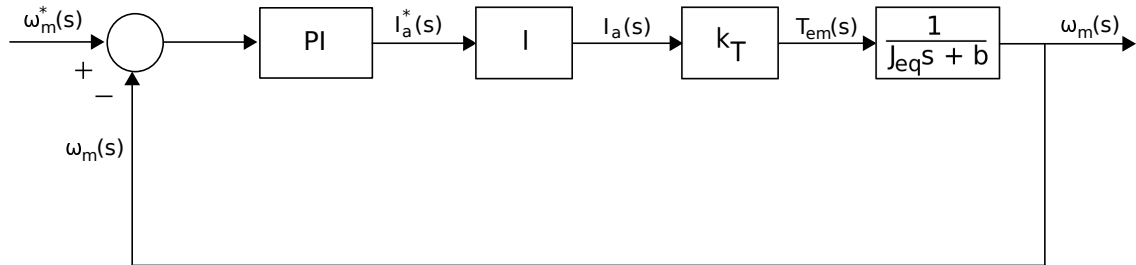
$$F_{OL} = \frac{k_I k_{PWM}}{R_a s} \quad (17)$$

Uzavřená smyčka je pak dána přenosem

$$F_{CL} = \frac{\frac{k_I k_{PWM}}{R_a s}}{1 + \frac{k_I k_{PWM}}{R_a s}} = \frac{k_I k_{PWM}}{R_a s + k_I k_{PWM}} \quad (18)$$

4.2.4 Regulace rychlosti

Regulátorem rychlosti je stejně jako u proudové smyčky PI regulátor. Schéma smyčky s regulací rychlosti je na obr. 18.



Obr. 18: Smyčka s regulací rychlosti

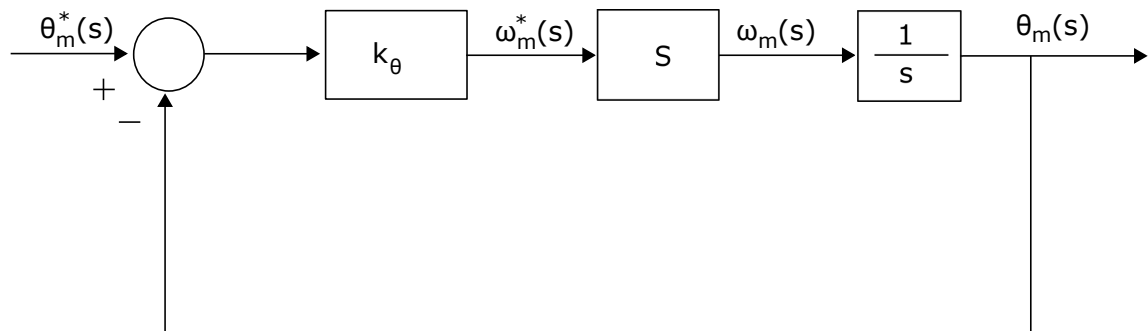
Přenos otevřené smyčky je dán jako

$$F_{OL} = \left(k + \frac{k_I}{s}\right) I \frac{k_T}{s J_{eq} + b}, \quad (19)$$

kde k a k_I jsou parametry PI regulátoru a I je přenos uzavřené proudové smyčky.

4.2.5 Regulace polohy

Regulátorem polohy je pouze P regulátor, a to z důvodu existence integrační složky v otevřené přenosové funkci uvedené na obr. 19. Není tedy potřeba zavádět PI regulátor jako tomu bylo u proudové a rychlostní smyčky.



Obr. 19: Smyčka s regulací polohy

Přenos otevřené smyčky je dán jako

$$F_{OL} = k_{\theta} S \frac{1}{s} \quad (20)$$

4.3 Metoda smíšených citlivostních funkcí

Metoda smíšených citlivostních funkcí [8] slouží k návrhu regulátoru, jehož strukturu je nutné předem popsat přenosovou funkcí C s volnými parametry. Například u PI regulátoru se hledá parametr K - zesílení proporcionální složky a parametr K_I - integrační konstanta. Na řízený systém popsaný nominálním přenosem P_0 je kladena podmínka stability přenosu P_0 a rozložitelnosti přenosu P_0 na reálnou část a imaginární část. Cílem metody je naléznout takové parametry regulátoru C , aby uzavřená smyčka byla robustní ve stabilitě.

4.3.1 Popis metody

Nechť nominální přenos systému P_0 je stabilní a přenos regulátoru je C , pak přenosová funkce otevřené smyčky L_0 je

$$L_0(j\omega) = C(j\omega)P_0(j\omega).$$

Z předpokladu stability L_0 neobkličuje bod $[-1, j0]$. Otázkou je, jak velká může být perturbace v otevřené smyčce $L(j\omega)$ tak, aby uzavřená smyčka zůstala stabilní. Podle Nyquistova kritéria vzdálenost mezi $L(j\omega)$ a $L_0(j\omega)$ musí být menší než vzdálenost mezi $L_0(j\omega)$ a bodem $[-1, j0]$ pro všechny frekvence ω . Jinými slovy platí

$$|L(j\omega) - L_0(j\omega)| < |L_0(j\omega) + 1|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

To je ekvivalentní s

$$\frac{L_0(j\omega)}{L_0(j\omega)} \frac{|L(j\omega) - L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega) + 1|} = \frac{|L(j\omega) - L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega)|} |T_0(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

kde T_0 je nominální přenosová funkce uzavřené smyčky. Relativní chyba otevřené smyčky může být omezena funkcí v danou

$$\frac{|L(j\omega) - L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega)|} \leq v(j\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Pokud platí

$$|v(j\omega)T_0(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

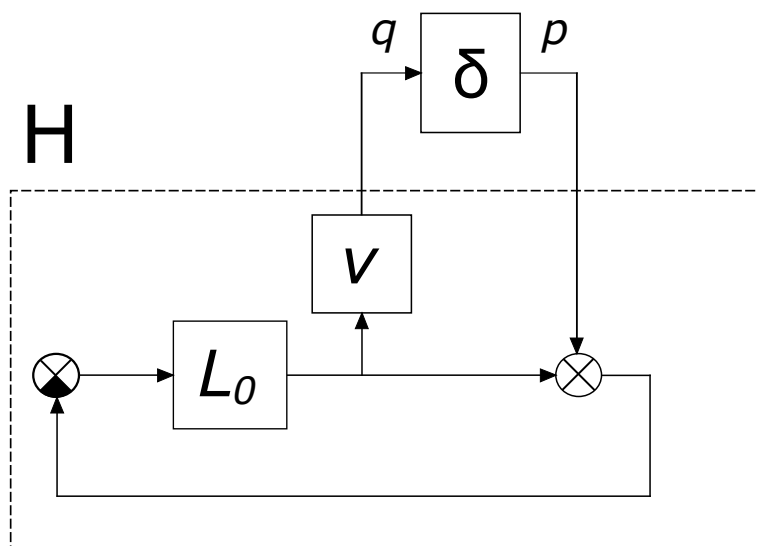
pak uzavřená smyčka je stabilní pro všechny perturbace splňující (21).

Otevřená smyčka splňující rovnici (21) může být zapsána ve tvaru $L = L_0(1 + \delta v)$, kde δ je funkce splňující $|\delta(j\omega)| \leq 1$. Uzavřená smyčka s přenosovou funkcí otevřené smyčky L je zobrazena na obr. 20, které je speciálním případem standardního modelu s perturbacemi (viz obr. 21). Dále ∞ -norma SISO systému $F(s)$ je definována jako $\|F\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathcal{R}} |F(s)|$. Necht $H = vT$ a γ je takové reálné kladné číslo, že

$$\|H\|_\infty < \gamma, \quad (23)$$

pak nutnou a postačující podmínkou pro stabilitu uzavřené smyčky pro všechny perturbace δ je

$$\|\delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}. \quad (24)$$

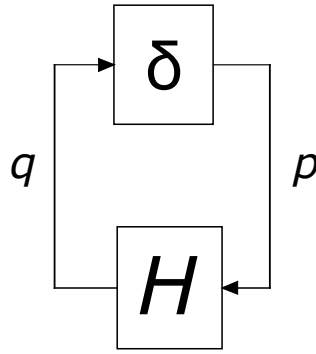


Obr. 20: Zpětná smyčka s perturbacemi

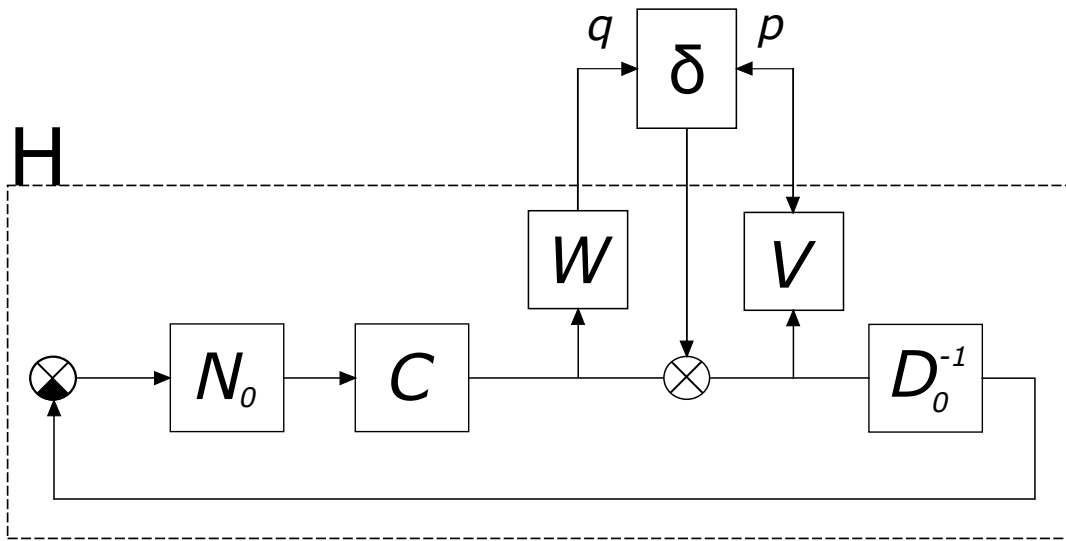
Metoda smíšených citlivostních funkcí [9] může být převedena do formy standardního modelu H s perturbacemi δ (viz obr. 21). Necht G je proces s perturbacemi ve jmenovateli i čitateli

$$G = \frac{N}{D} = \frac{N_0(1 + \delta_W W)}{D_0(1 + \delta_V V)}, \quad (25)$$

kde $G_0 = N_0/D_0$ představuje přenosovou funkci nominálního modelu, W a V jsou frekvenčně závislé funkce vyjadřující maximální přípustnou relativní chybu jmenovatele a čitatele a



Obr. 21: Klasický model s perturbacemi



Obr. 22: Mixed sensitivity problem

$$\delta_W = \frac{N-N_0}{N_0}, \quad \delta_V = \frac{D-D_0}{D_0} \quad (26)$$

jsou frekvenčně závislé funkce s amplitudou menší než 1.

Řídicí smyčka obsahující proces (25) může být vyjádřena jako schéma na obr. 22, kde H blok je vymezen přerušovanou čarou. Celý systém je popsán následujícími rovnicemi

$$[q_1 \ q_2]^T = Hp, \quad p = \delta[q_1 \ q_2]^T, \quad (27)$$

kde

$$H = \begin{bmatrix} \frac{V}{1+CG_0} \\ -\frac{VCG_0}{1+CG_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} VS_0 \\ -WT_0 \end{bmatrix}, \quad \delta = [-\delta_V \ \delta_W], \quad (28)$$

S_0 je nominální citlivostní funkce a T_0 je nominální komplementární citlivostní funkce. S_0 a T_0 jsou dané jako

$$T(s) \triangleq \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}, S(s) \triangleq \frac{1}{1 + G(s)C(s)} = \frac{1}{1 + L(s)}. \quad (29)$$

Použitím (23), (24) a (26) může být zavedeno následující lemma.

Lemma 4.1 ([10]). Uzavřená smyčka obsahující (25) je stabilní pro všechny perturbace splňující

$$\left[\frac{N(j\omega) - N_0(j\omega)}{N_0(j\omega)} \right]^2 + \left[\frac{D(j\omega) - D_0(j\omega)}{D_0(j\omega)} \right]^2 \leq \frac{1}{\gamma}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (30)$$

právě tehdy, když

$$|V(j\omega)S_0(j\omega)|^2 + |W(j\omega)T_0(j\omega)|^2 < \gamma, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (31)$$

kde γ je kladné reálné číslo.

Pro návrh regulátoru k SISO systému použitím metody smíšených citlivostních funkcí musí být nejprve zvoleny vhodné vážené funkce $V(j\omega)$ a $W(j\omega)$ a poté je určen stabilizující regulátor spočítáním minimalizujícího kritéria

$$\gamma = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |V(j\omega)S_0(j\omega)|^2 + |W(j\omega)T_0(j\omega)|^2. \quad (32)$$

Amplituda citlivostní funkce je obvykle požadována nízká na nižších frekvencích a amplituda komplementární citlivostní funkce je naopak požadována nízká na vyšších frekvencích. To může být docíleno zvolením vhodných vážených funkcí V a W .

4.3.2 Geometrická interpretace metody

kritérium (31) může být přepsáno do následující podoby

$$\frac{|V(j\omega)|^2}{|1 + L_0(j\omega)|^2} + \frac{|W(j\omega)|^2 |L_0(j\omega)|^2}{|1 + L_0(j\omega)|^2} < \gamma, \quad \forall \omega \geq 0,$$

kde $L_0(j\omega) = C(j\omega)G_0(j\omega)$ je nominální přenos otevřené smyčky. Výše uvedenou nerovnost je možné přepsat bez újmy na obecnosti do tvaru

$$\frac{p^2(\omega)}{[1 + u(\omega)]^2 + v^2(\omega)} + \frac{g^2(\omega)[u^2(\omega) + v^2(\omega)]}{[1 + u(\omega)]^2 + v^2(\omega)} < 1, \quad \forall \omega \geq 0, \quad (33)$$

kde

$$p(\omega) \triangleq \frac{|V(j\omega)|}{\sqrt{\gamma}}, \quad g(\omega) \triangleq \frac{|W(j\omega)|}{\sqrt{\gamma}}, \quad L_0(j\omega) \triangleq u(\omega) + jv(\omega). \quad (34)$$

Dále budou funkce závislé na ω uváděny bez argumentu. A tedy nerovnice (33) může být upravena na

$$(g^2 - 1) \left[\left(u - \frac{1}{g^2 - 1} \right)^2 + v^2 \right] < \frac{1 - (g^2 - 1)(p^2 - 1)}{g^2 - 1}, \quad \forall \omega \geq 0. \quad (35)$$

Pokud se na nerovnici (35) podívá jako na rovnici levé a pravé strany, je možné přejít k interpretaci rovnice jakožto rovnice kružnice se středem c a poloměrem r danými jako

$$c = \frac{1}{g^2 - 1}, \quad (36)$$

$$r^2 = \frac{1 - (g^2 - 1)(p^2 - 1)}{(g^2 - 1)^2}. \quad (37)$$

Zbývá určit, kde musí v komplexní rovině ležet $L_0(j\omega)$ splňující podmínku (35) v závislosti na hodnotě g .

- Pro $g \in (0, 1)$ platí, že $c \in \langle -1, -\infty \rangle$ a pravá strana rovnice (37) je vždy kladná. Protože $g^2 - 1 < 1$, nerovnost (35) změní směr a tedy $L_0(j\omega)$ musí ležet mimo kružnici se středem c a poloměrem r .
- Pro $g = 1$ kružnice degeneruje na přímku paralelní s imaginární osou procházející reálnou osou v bodě $0,5p^2 - 0,5$. $L_0(j\omega)$ musí ležet na pravé straně od přímky v komplexní rovině.
- Pro $g \in (1, \infty)$ platí, že $c \in (+\infty, 0)$. Pravá strana rovnice (37) je záporná pro $p > g/\sqrt{g^2 - 1}$. V takovém případě nerovnost (35) nemůže být splněna a bod $L_0(j\omega)$ splňující (35) musí ležet uvnitř kružnice o poloměru r a se středem c .

4.3.3 Metoda smíšených citlivostních funkcí pro PI regulátor

Návrh regulátoru použitím metody smíšených citlivostních funkcí znamená nalezení takových parametrů regulátoru, které minimalizují hodnotu γ v kritériu (32) pro dané vážené funkce $V(j\omega)$ a $W(j\omega)$. Při návrhu regulátoru je požadováno, aby stabilita nominálního systému byla dodržena. Pro PI regulátor s přenosovou funkcí

$$C(s) = k \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \triangleq k + \frac{k_i}{s} = k + \frac{kd}{s} \quad (38)$$

je možné nalézt region v parametrické rovině $k - k_i$ [11] pro dostatečně vysokou hodnotu γ tak, že pro každý bod regionu platí, že řídicí smyčka splňuje nerovnost (31). Poté může být hodnota γ snižována do té doby, než se region stane bodem v parametrické rovině $k - k_i$.

Nechť $V(j\omega)$ a $W(j\omega)$ jsou dané hladké vážené funkce, $G_0(j\omega)$ je daný nominální přenos modelu systému a γ je kladné reálné číslo. Hledá se region v parametrické rovině $k - k_i$ takový, aby pro každý bod regionu byla splněna nerovnost (33). Pro body na hranici regionu musí platit rovnost (33) pro pevnou frekvenci ω_x . A pro body na hranici tedy platí

$$(u + 1)^2 + v^2 - p^2 - g^2(u^2 + v^2) = 0. \quad (39)$$

Jelikož funkce $V(j\omega)$, $W(j\omega)$ a $L(j\omega)$ jsou hladké a pro frekvenci ω_x musí mít levá strana nerovnice (33) extrém, platí

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{p^2}{(1+u)^2+v^2} + \frac{g^2(u^2+v^2)}{(1+u)^2+v^2} \right\} \Big|_{\omega=\omega_x} = \frac{[pp_1 + gg_1(u^2+v^2) + g^2(uu_1+vv_1)][(u+1)^2+v^2] - [p^2+g^2(u^2+v^2)][uu_1+u_1+vv_1]}{[(u+1)^2+v^2]^2} \Big|_{\omega=\omega_x} = 0$$

kde

$$\frac{d}{d\omega} p(\omega) \triangleq p_1, \quad \frac{d}{d\omega} g(\omega) \triangleq g_1, \quad \frac{d}{d\omega} L(j\omega) \triangleq u_1 + jv_1.$$

Využitím faktu, že levá strana nerovnice (33) je rovna jedné na frekvenci ω_x , plyne

$$pp_1 + gu^2g_1 + g^2uu_1 + gv^2g_1 + g^2vv_1 - u_1 - uu_1 - vv_1 = 0. \quad (40)$$

Dále se proměnné u , v , u_1 a v_1 nahradí rozepsáním výrazu

$$L(j\omega) = C(j\omega)G(j\omega) = \left(k - j\frac{kd}{\omega} \right) (a + jb)$$

v rovnicích (39) a (40). Výsledkem toho je následující soustava rovnic

$$\left(ak + \frac{bkd}{\omega} + 1 \right)^2 + \left(-\frac{akd}{\omega} + bk \right)^2 - p^2 - g^2 \left[\left(ak + \frac{bkd}{\omega} \right)^2 + \left(-\frac{akd}{\omega} + bk \right)^2 \right] = 0, \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ pp_1 + gg_1 \left[\left(ak + \frac{bkd}{\omega} \right)^2 + \left(-\frac{akd}{\omega} + bk \right)^2 \right] + \right. \\
& g^2 \left[\left(ak + \frac{bkd}{\omega} \right) \left(a_1k + \frac{b_1kd}{\omega} - \frac{bkd}{\omega^2} \right) + \left(-\frac{akd}{\omega} + bk \right) \left(-\frac{a_1kd}{\omega} + \frac{akd}{\omega^2} + b_1k \right) \right] \left. \right\} \\
& \left\{ \left(ak + \frac{bkd}{\omega} + 1 \right)^2 + \left(-\frac{akd}{\omega} + bk \right)^2 \right\} - \tag{42} \\
& \left\{ p^2 + g^2 \left[\left(ak + \frac{bkd}{\omega} \right)^2 + \left(-\frac{akd}{\omega} + bk \right)^2 \right] \right\} \left\{ \left(ak + \frac{bkd}{\omega} + 1 \right) \right. \\
& \left. \left(a_1k + \frac{b_1kd}{\omega} - \frac{bkd}{\omega^2} \right) + \left(-\frac{akd}{\omega} + bk \right) \left(-\frac{a_1kd}{\omega} + \frac{akd}{\omega^2} + b_1k \right) \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Problém řešení soustavy rovnic (41) a (42) pro neznámé parametry k a d může být převeden na nalezení kořenů polynomu 2. a 4. stupně (viz [15]). Řešení je uvedeno v příloze A.K úplnému vyřešení soustavy rovnic je nutno ještě zkontrolovat chování v limitních bodech $\omega \rightarrow 0^+$ a $\omega \rightarrow \infty^-$. Necht' reálné kořeny polynomů jsou ρ_l , $l = 1, 2, \dots, n$, pak dvojice ($k \triangleq k(\rho_l)$, $k_i \triangleq k(\rho_l)d(\rho_l)$), $l = 1, 2, \dots, n$ představují parametrické křivky dané parametrem ω , které reprezentují hranice regionů v parametrické rovině $k - k_i$. Pokud se tedy přesune bod ($k - k_i$) z jednoho regionu do jiného regionu, pak musí existovat alespoň jedna frekvence ω , pro niž platí rovnice (39) a (40).

4.3.4 Ukázkový příklad pro návrh PI regulátoru s použitím metody smíšených citlivostních funkcí

Cílem ukázkového příkladu je navrhnout PI regulátor pro nominální přenos systému prvního řádu s přenosovou funkcí:

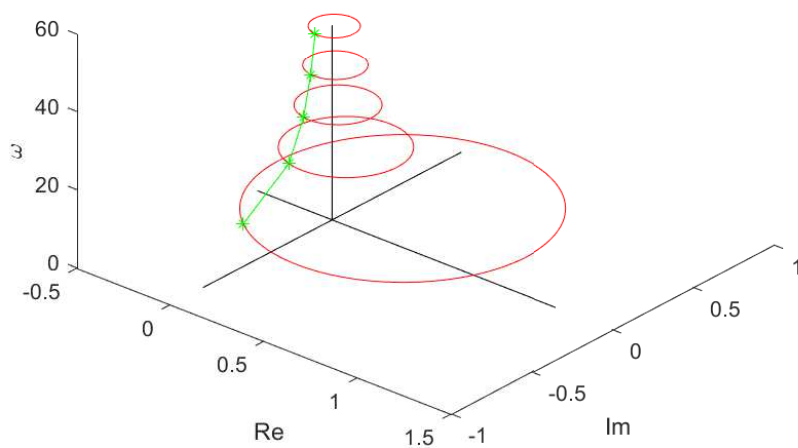
$$P(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{43}$$

s váhovými funkcemi:

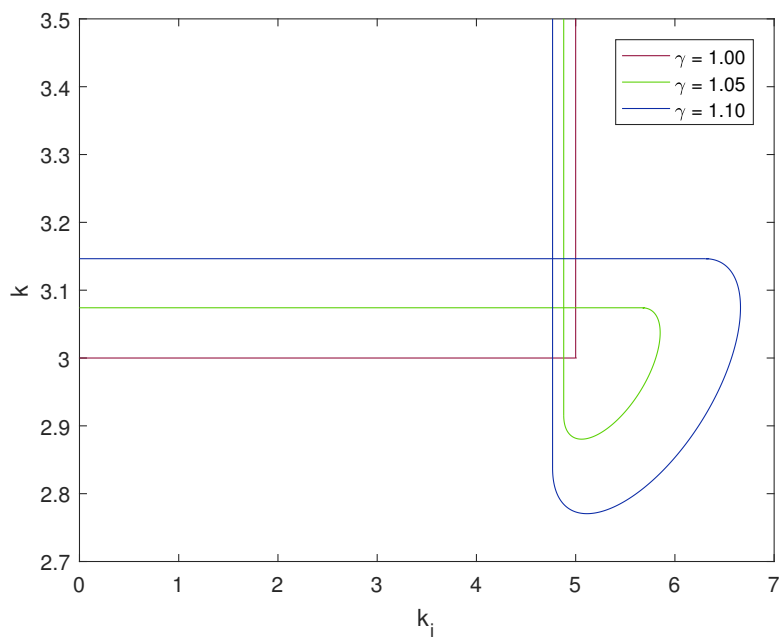
$$V(j\omega) = \frac{\omega_B}{j\omega}, \quad W(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_B} \tag{44}$$

kde $\tau = 0,6$ a $\omega_B = 5$. Ověření geometrické interpretace metody smíšených citlivostních funkcí (viz podkapitola 4.3.2) je na obr. 23. Body $L(j\omega)$ s vybranými parametry ω , pro které existuje řešení soustavy rovnic (41) a (42) se dotýkají kružnic se středem (36) a s poloměry danými rovnostmi (37).

Řešení v parametrické rovině $k - k_i$ je pro jednotlivé parametry γ zobrazeno na obr. 24. Pro parametr $\gamma = 1$ řešení nabývá pouze jedné hodnoty, a to $k = 3$ a $k_i = 5$.



Obr. 23: Ověření geometrické interpretace metody smíšených citlivostních funkcí



Obr. 24: Parametrická rovina k - k_i pro různé parametry γ

5 METODA NÁVRHU REPETITIVNÍHO ŘÍDÍCÍHO SYSTÉMU

5.1 Metoda návrhu PID regulátoru pro systém s vnitřním modelem periodického signálu

Tato metoda návrhu repetitivního řídicího systému pracuje s modelem na obr. 1. Cílem metody je navrhnout zpětnovazební PID regulátor stabilizující řízený systém zároveň s vnitřním modelem periodického signálu. Tato metoda využívá metodu smíšených citlivostních funkcí (viz podkapitola 4.3) a požadavky na regulátor zaručující stabilitu repetitivního řídicího systému ve zpětnovazební smyčce (viz podkapitola 4.1). Modifikací minimalizujícího kritéria (32) u metody smíšených citlivostních funkcí dojde k vynulování váhové funkce $W(j\omega)$. Pak nově vzniklé kritérium má následující podobu:

$$\gamma = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |V(j\omega)S_0(j\omega)|^2. \quad (45)$$

Pokud v kritériu (45) γ nabývá hodnot $\gamma \in [0, 1]$ a platí princip vnitřní stability pro smyčku bez uvažování vnitřního modelu periodického signálu, pak jsou splněny požadavky na regulátor zaručující stabilitu repetitivního řídicího systému ve zpětnovazební smyčce (viz podkapitola 4.1). Metodou smíšených citlivostních funkcí se získá řešení pro PID regulátor v podobě parametrické roviny $k - ki$. Pro nalezení optimálních parametrů k a k_i je nutné nalézt nejmenší možnou hodnotu γ tak, aby existovalo řešení v parametrické rovině $k - ki$. Nalezení takové hodnoty γ lze provést metodou půlení intervalů s žádanou přesností na parametr γ .

5.1.1 Aplikace metody návrhu PI regulátoru pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru

Pro návrh PI regulátoru k řízení rychlosti stejnosměrného motoru se použije metoda uvedená v podkapitole 5.1. Přenosová funkce systému (viz přenos otevřené smyčky (19)) je dána jako:

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= I \frac{k_T}{sJ_{eq} + b} \\ &= \frac{k_I k_{PWM} k_T}{(R_a s + k_I k_{PWM})(sJ_{eq} + b)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Dále je potřeba rozdělit přenos motoru (46) na reálnou část označenou jako a a imaginární část označenou jako b . Výsledné a a b jsou

$$a(\omega) = \frac{k_I k_{PWM} k_T (k_I k_{PWM} b - R_a J_{eq} \omega^2)}{(-R_a J_{eq} \omega^2 + k_I k_{PWM} b)^2 + (R_a b + k_I k_{PWM} J_{eq})^2} \quad (47)$$

a

$$b(\omega) = -\frac{k_I k_{PWM} k_T (R_a b + k_I k_{PWM} J_{eq}) \omega}{(-R_a J_{eq} \omega^2 + k_I k_{PWM} b)^2 + (R_a b + k_I k_{PWM} J_{eq})^2}. \quad (48)$$

Člen $a_1(j\omega)$ se spočte jako $a_1(j\omega) = \frac{da(j\omega)}{d\omega}$ a člen $b_1(j\omega)$ se spočte jako $b_1(j\omega) = \frac{db(j\omega)}{d\omega}$. Po dosazení vyjde

$$a_1(\omega) = \frac{-(2k_I k_{PWM} k_T \omega (-J_{eq}^3 R_a^3 \omega^4 + 2J_{eq}^2 R_a^2 b k_I k_{PWM} \omega^2 + J_{eq}^2 b k_I^3 k_{PWM}^3))}{(J_{eq}^2 \omega^2 + b^2)^2 (R_a^2 \omega^2 + k_I^2 k_{PWM}^2)^2} + \frac{-(2k_I k_{PWM} k_T \omega (J_{eq} R_a b^2 k_I^2 k_{PWM}^2 + R_a^2 b^3 k_I k_{PWM}))}{(J_{eq}^2 \omega^2 + b^2)^2 (R_a^2 \omega^2 + k_I^2 k_{PWM}^2)^2} \quad (49)$$

a

$$b_1(\omega) = \frac{k_I k_{PWM} k_T (R_a b + J_{eq} k_I k_{PWM})}{(J_{eq}^2 \omega^2 + b^2)^2 (R_a^2 \omega^2 + k_I^2 k_{PWM}^2)^2} \cdot \frac{(3J_{eq}^2 R_a^2 \omega^4 + J_{eq}^2 k_I^2 k_{PWM}^2 \omega^2 + R_a^2 b^2 \omega^2 - b^2 k_I^2 k_{PWM}^2)}{(J_{eq}^2 \omega^2 + b^2)^2 (R_a^2 \omega^2 + k_I^2 k_{PWM}^2)^2}. \quad (50)$$

Z kritéria (45) je nutné stanovit váhovou funkci $V(j\omega)$. Jelikož citlivostní funkce nabývá nízkých hodnot pro nízké frekvence a vyšších hodnot pro vyšší frekvence, váhová funkce $V(j\omega)$ musí být filtr s dolní propustí, aby bylo splněné kritérium (45). Jako filtr s dolní propustí $V(j\omega)$ byl vybrán Butterworthův filtr, který je navržen tak, aby měl co nejhladší průběh v propustném pásmu v porovnání s ostatními filtry. Pro testovací účely byly vybrány Butterworthovy filtry 1., 2. a 3. řádu s následujícími normovanými přenosy:

$$V_1(s) = \frac{1}{s + 1}, \quad (51)$$

$$V_2(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4142s + 1}, \quad (52)$$

$$V_3(s) = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)}, \quad (53)$$

kde $s = \frac{j\omega}{\omega_c}$ a ω_c je zlomová frekvence.

Pak $p(j\omega)$ a $p_1(j\omega)$ budou pro $V_1(s)$

$$p(\omega) = \frac{1}{((\omega/\omega_c)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}, \quad (54)$$

$$p_1(\omega) = -\frac{(\omega/\omega_c)}{((\omega/\omega_c)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}, \quad (55)$$

pro $V_2(s)$

$$p(\omega) = \frac{1}{((\omega/\omega_c)^4 + 4(\omega/\omega_c)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}, \quad (56)$$

$$p_1(\omega) = -\frac{2((\omega/\omega_c)^3 + 2(\omega/\omega_c))}{((\omega/\omega_c)^4 + 4(\omega/\omega_c)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}} \quad (57)$$

a pro $V_3(s)$

$$p(\omega) = \frac{1}{((\omega/\omega_c)^6 + 1)^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}, \quad (58)$$

$$p_1(\omega) = -\frac{3(\omega/\omega_c)^5}{((\omega/\omega_c)^6 + 1)^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}. \quad (59)$$

Volba parametrů

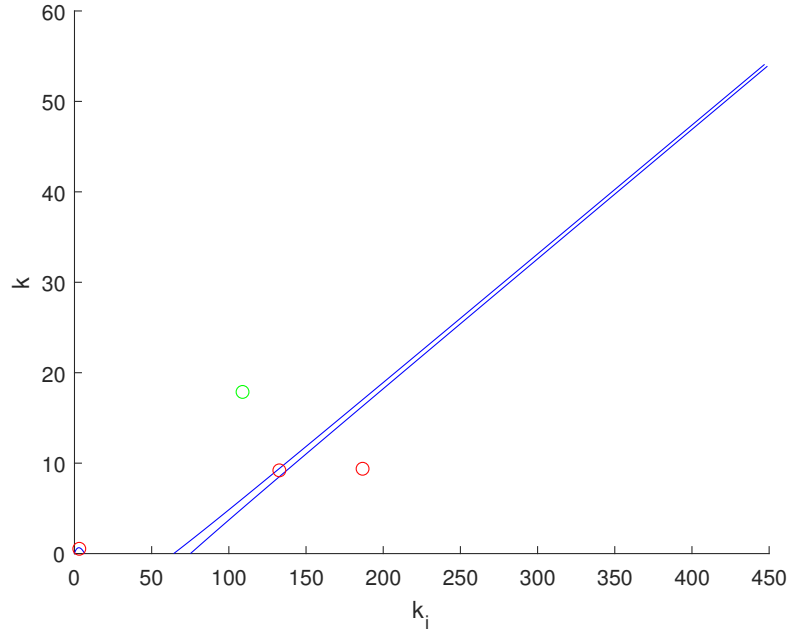
Volba parametrů je vybrána vzhledem k fyzikálně možným hodnotám. Pro přesné zvolení je nutné identifikovat parametry testovaného motoru.

Tab. 1: Tabulka zvolených parametrů

Parametr	Hodnota	Jednotka	Popis
k_{PWM}	1	-	zesílení PWM
R_a	1	[<i>Ohm</i>]	odpor rezistoru
L_a	0.5	[<i>H</i>]	indukčnost cívky
J_{eq}	0.02	[<i>Kg · m²</i>]	celkový moment setrvačnosti
k_e	0.01	[<i>V/rad/s</i>]	elektromotorická konstanta
k_T	0.01	[<i>N · m/A</i>]	torzní konstanta motoru
b	0.1	[<i>N · m · s</i>]	konstanta viskozního tření hřídele
t_e	L_a/R_a	[<i>H/Ohm</i>]	elektrická časová konstanta
k_I	$1/t_e$	[<i>Ohm/H</i>]	zesílení dané PI regulátorem v proudové smyčce

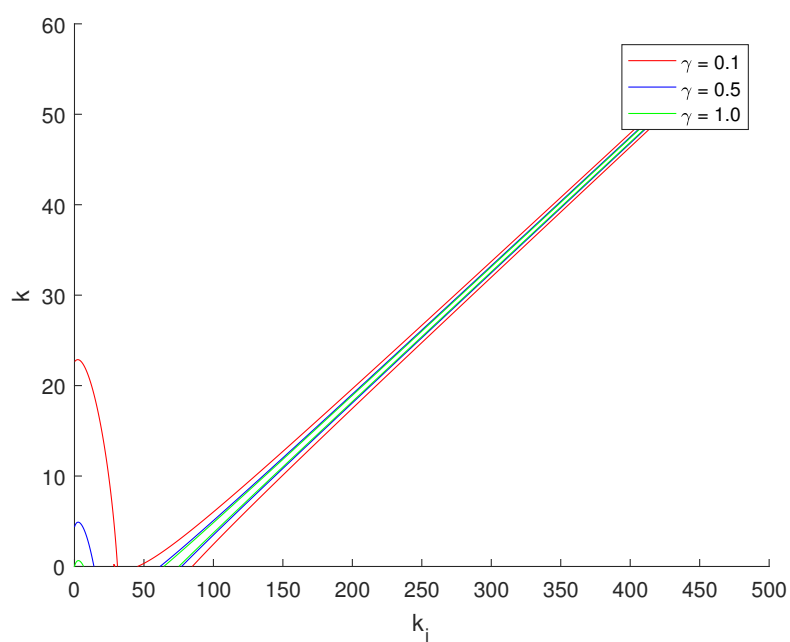
Parametrická rovina k-ki

Řešení získané metodou smíšených citlivostních funkcí představuje parametrickou rovinu $k - ki$. Volbou filtru $W_3(s)$ se zlomovou frekvencí $\omega_c = 1$ a pro $\gamma = 1$ vypadá parametrická rovina $k - k_i$ následovně



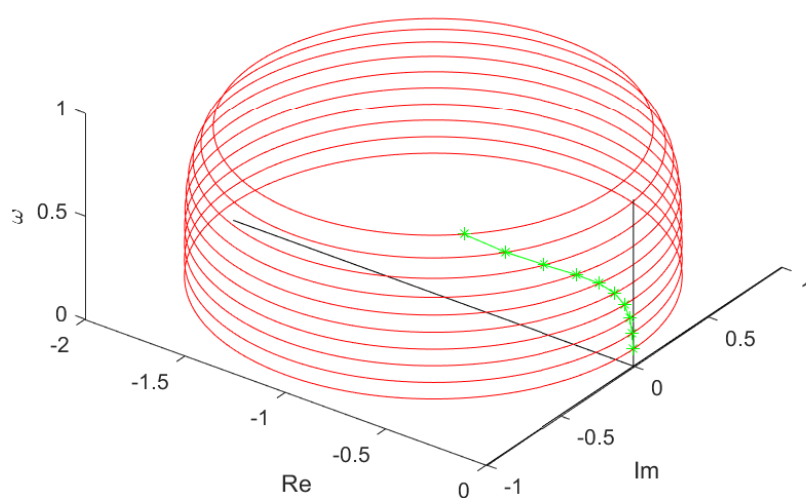
Obr. 25: Parametrická rovina k-ki

V grafu na obr. 25 jsou vidět 4. oblasti vymezené parametrickými křivkami. Pro každou oblast (region) stačí vzít jeden jeho libovolný vnitřní bod a spočítat pro něj kritérium (32) a stabilitu otevřené smyčky dle Nyquistova kritéria [13]. Body splňující kritérium a stabilitu jsou vykreslené zelenou barvou. Graf na obr. 26 znázorňuje změnu regionů v parametrické rovině $k - k_i$ vzhledem k parametru γ . Je možné si všimnout, že s klesajícím parametrem γ vymezují regiony nesplňující kritérium (32) a stabilitu otevřené smyčky větší plochu v parametrické rovině $k - k_i$.



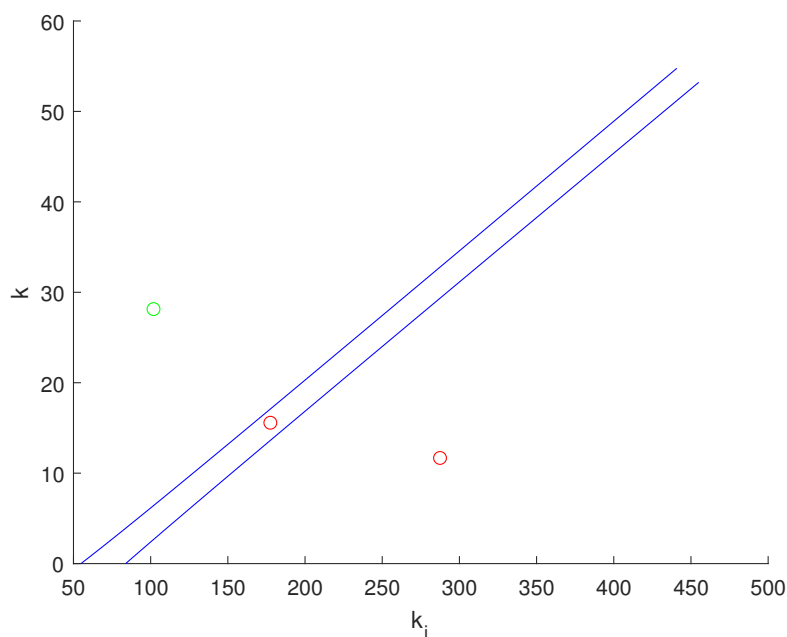
Obr. 26: Parametrická rovina k - k_i pro odlišné hodnoty γ

V grafu na obr. 27 je znázorněné grafické ověření geometrické interpretace metody smíšených citlivostních funkcí. Body značené zelenou barvou leží na kružnicích značené červenou barvou, pro jejichž střed platí rovnost (36) a pro poloměr rovnost (37).



Obr. 27: Ověření platnosti geometrické interpretace

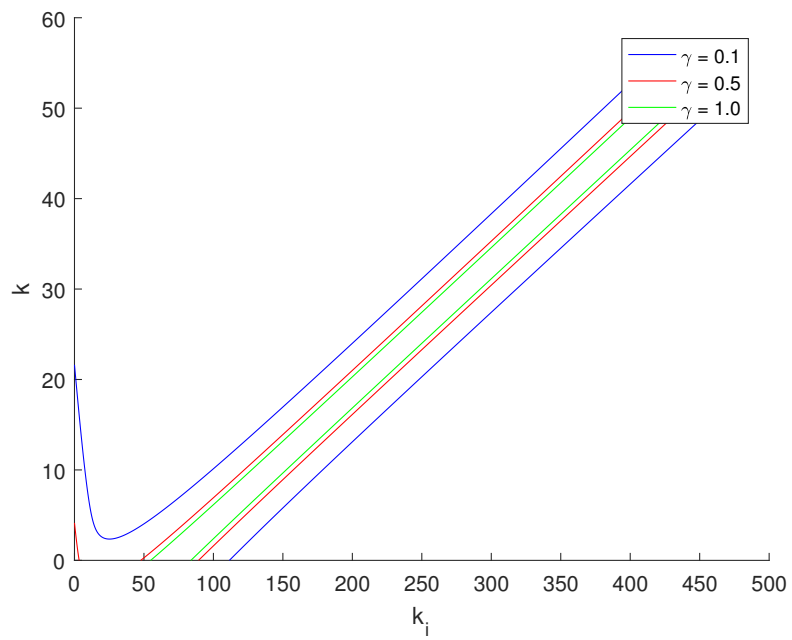
Pro volbu filtru $W_2(s)$ se zlomovou frekvencí $\omega_c = 1$ a pro $\gamma = 1$ vypadá parametrická rovina $k - k_i$ následovně



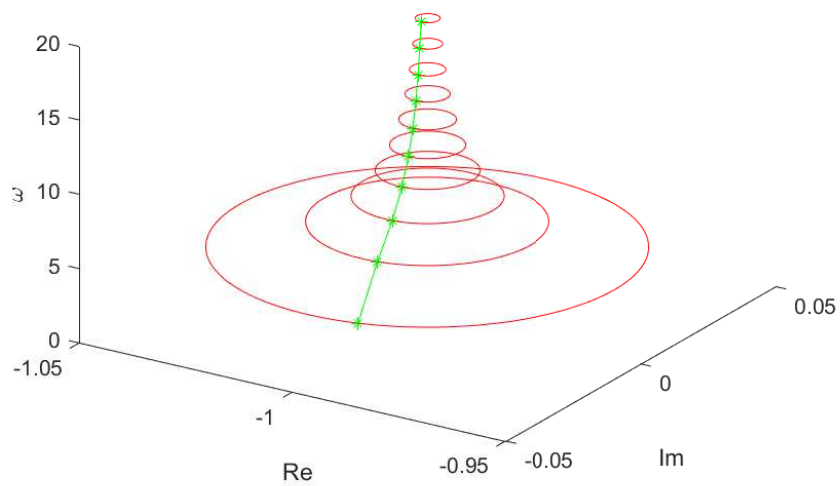
Obr. 28: Parametrická rovina k - k_i

V grafu na obr. 28 jsou vidět 3. oblasti vymezené parametrickými křivkami. Pro každou oblast (region) stačí vzít jeden jeho libovolný vnitřní bod a spočítat pro něj kritérium 32 a stabilitu otevřené smyčky dle Nyquistova kritéria [13]. Body splňující kritérium a stabilitu jsou vykreslené zelenou barvou. Graf na obr. 29 znázorňuje změnu regionů v parametrické rovině $k - k_i$ vzhledem k parametru γ . Je možné si všimnout, že s klesajícím parametrem γ vymezují regiony nesplňující kritérium (32) a stabilitu otevřené smyčky větší plochu v parametrické rovině $k - k_i$.

V grafu na obr. 30 je znázorněno grafické ověření geometrické interpretace metody smíšených citlivostních funkcí. Body leží na kružnicích, pro jejichž střed platí rovnost (36) a pro poloměr rovnost (37).

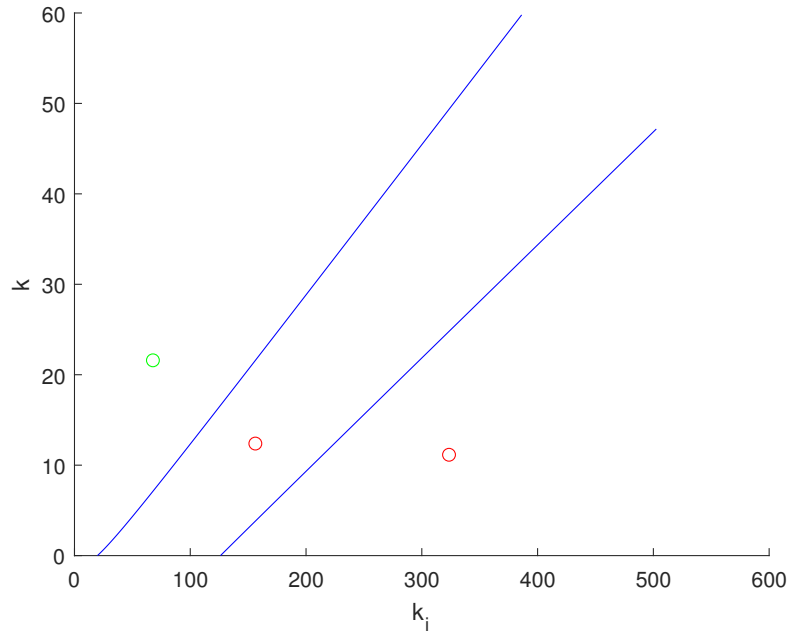


Obr. 29: Parametrická rovina k - k_i pro odlišné hodnoty γ



Obr. 30: Ověření platnosti geometrické interpretace

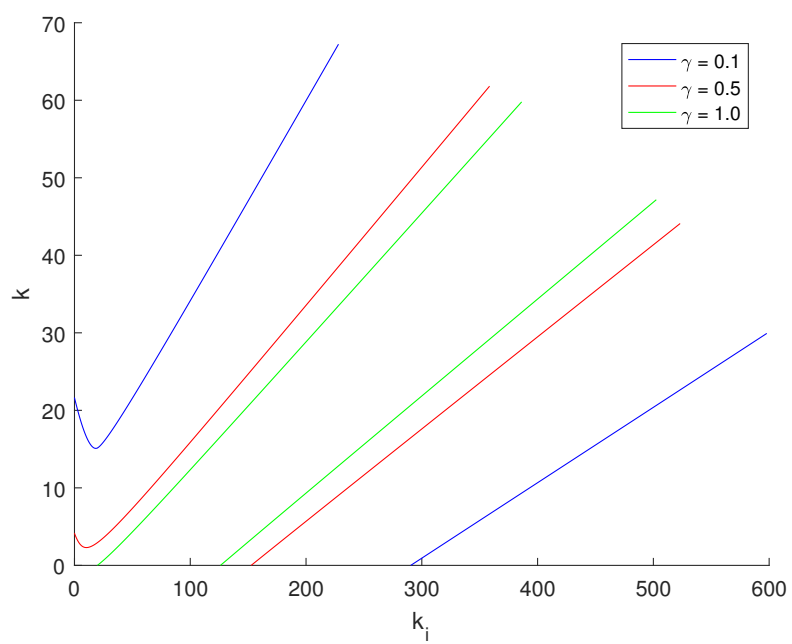
Pro volbu filtru $W_1(s)$ se zlomovou frekvencí $\omega_c = 1$ a pro $\gamma = 1$ vypadá parametrická rovina $k - k_i$ následovně



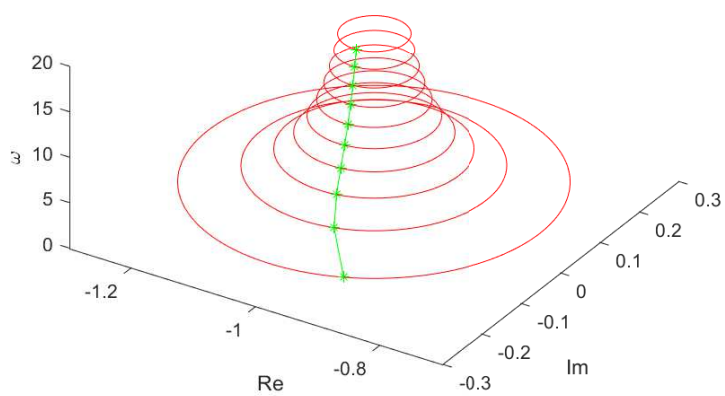
Obr. 31: Parametrická rovina k - k_i

V grafu na obr. 31 jsou vidět 3. oblasti vymezené parametrickými křivkami. Pro každou oblast (region) stačí vzít jeden jeho libovolný vnitřní bod a spočítat pro něj kritérium (32) a stabilitu otevřené smyčky dle Nyquistova kritéria [13]. Body splňující kritérium a stabilitu jsou vykreslené zelenou barvou. Graf na obr. 32 znázorňuje změnu regionů v parametrické rovině $k - k_i$ vzhledem k parametru γ . Je možné si všimnout, že s klesajícím parametrem γ vymezují regiony nesplňující kritérium (32) a stabilitu otevřené smyčky větší plochu v parametrické rovině $k - k_i$.

V na obr. grafu 33 je znázorněno grafické ověření geometrické interpretace metody smíšených citlivostních funkcí. Body leží na kružnicích, pro jejichž střed platí rovnost (36) a pro poloměr rovnost (37).



Obr. 32: Parametrická rovina k - k_1 pro odlišné hodnoty γ



Obr. 33: Ověření platnosti geometrické interpretace

5.1.2 Popis algoritmizace metody návrhu PI regulátoru pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru

Pro automatické řešení metody návrhu PI regulátoru pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru byl napsán program v Matlabu (viz příloha B). Matlab je interaktivní programové prostředí a skriptovací programovací jazyk.

Na začátku programu jsou deklarované proměnné související s přenosem stejnosměrného motoru v rychlostní smyčce, proměnné týkající se frekvenčního filtru a rozmezí frekvencí, pro které se vyšetřuje daná úloha. Dále pro každý parametr γ je spočteno řešení metody návrhu PI regulátoru. Nejprve se definují členy a , a_1 , b , b_1 , p , p_1 , g , g_1 (viz podkapitola 5.1.1). Po té se pomocí funkce *Get4thOrderPolyCoeff* spočtou koeficienty polynomu 4. řádu.

Řešení se provádí pro každou hodnotu ω . Nejprve se spočtou numericky kořeny polynomu 4. řádu, které představují hodnotu parametru k . Ke každé hodnotě parametru k je spočtena hodnota parametru d ve funkci *GetDFrom4thOrderPolyRoots*. Z dvojic parametrů k a d jsou vybrány pak jen takové, které jsou reálné a kladné.

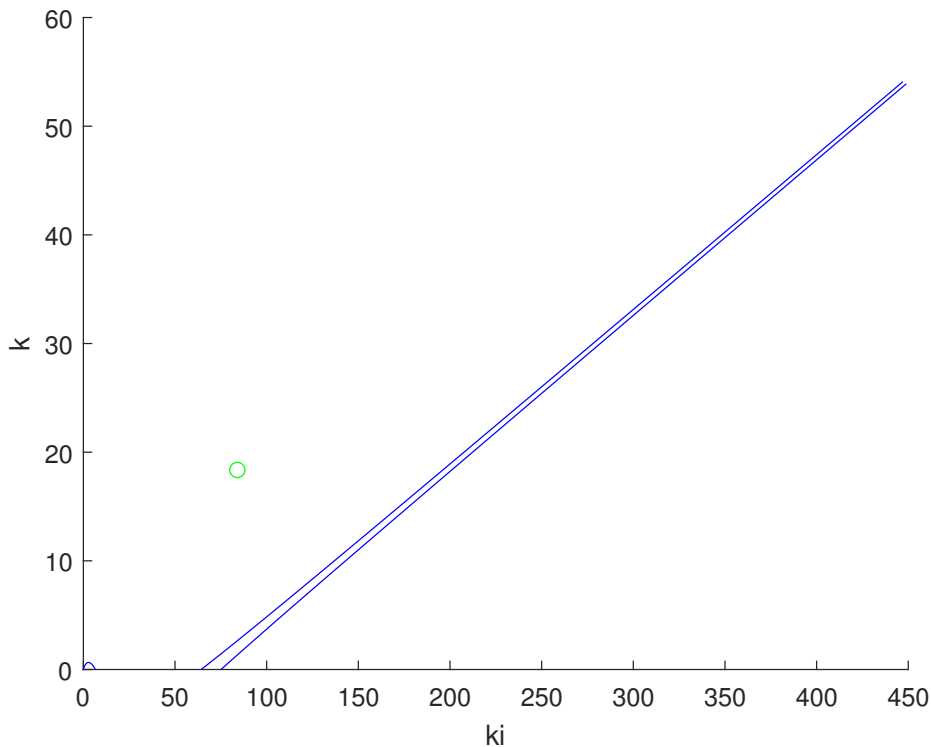
Jelikož dochází v řešení k bifurkacím, je nutné řešení setřídít tak, aby body na sebe správně navazovaly. Maximální počet řešení je 4 (polynom 4. stupně). Proto jsou řešení rozdělena do 4 skupin. To do jaké skupiny spadá následující řešení je dáno vzdáleností, která se vyhodnocuje mezi všemi skupinami. Vybírá se ta nejkratší vzdálenost a zároveň tato vzdálenost musí být menší než parametr maximální přijatelné vzdálenosti *maxLenBetw*. Po rozřazení všech bodů se řešení vykreslí spolu s geometrickým ověřením kritéria.

Na konci programu je pak interaktivní část (má smysl pouze v řešení pro jedno γ), kde se kliknutím na libovolný vnitřní bod regionu (oblasti) zjistí, zda tato oblast splňuje kritérium (45) a stabilitu zpětnovazební smyčky.

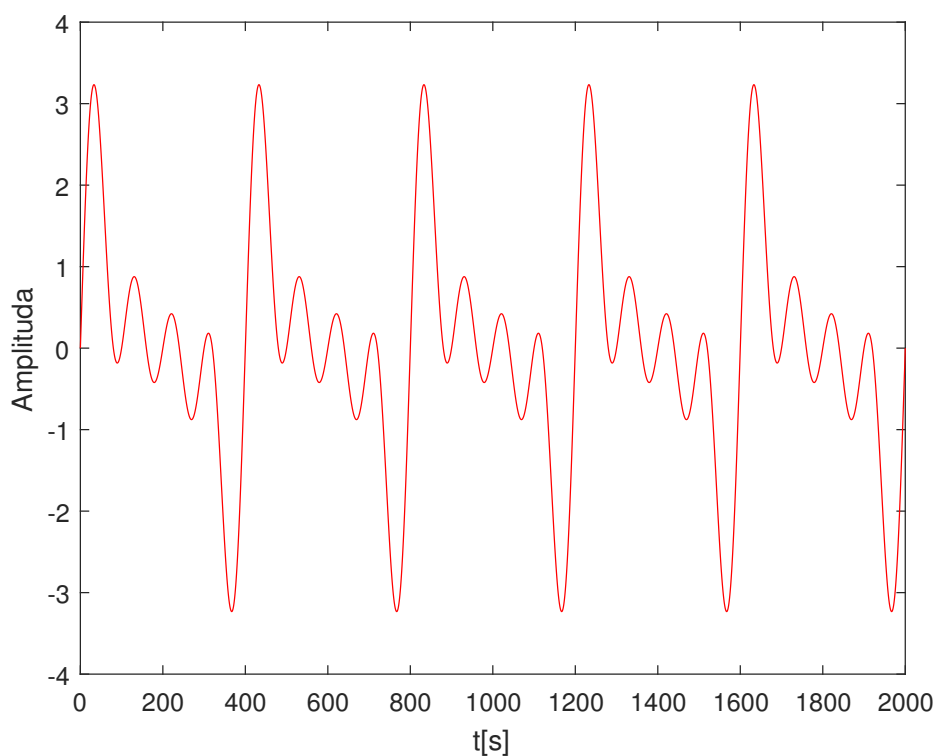
5.1.3 Testování různých vstupních signálů

Testování různých vstupních signálů využívá znalosti z aplikování metody návrhu PI regulátoru pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru v podkapitole 5.1.1. Aplikací metody návrhu PI regulátoru se získají požadované regiony (oblasti) v parametrické rovině $k - k_i$, ve kterých libovolný bod $[k, k_i]$ představuje parametry PI regulátoru splňující kritérium (45) a stabilitu uzavřené smyčky. To, jakým způsobem je volen bod v získaných požadovaných regionech (oblastech), záleží na požadavcích a omezeních specifické úlohy. Pro toto testování je volen náhodný bod ze získaných požadovaných regionů.

Pro testování vstupních signálů je důležité si uvědomit, že periodický vstupní signál musí mít pevnou periodu a že tato perioda musí být shodná s periodou vnitřního modelu periodického signálu M (3). Pro testování vstupních signálů jsou vybrány výsledky získané s volbou filtru $W_3(s)$ se zlomovou frekvencí $\omega_c = 1$. Pro testování je nejprve zvolen vstupní signál složený ze sinusových signálů. Úkolem je snížit regulační odchylku na minimum. Nejprve je nutné vybrat v parametrické rovině k - k_i bod, jenž splňuje kritérium (32) a zároveň splňuje stabilitu uzavřené regulační smyčky. Bod $[k, k_i] = [19, 504, 60, 657]$ splňuje oba požadavky. V grafu na obr. 34 je vidět, kde se bod nachází v parametrické rovině $k - k_i$.

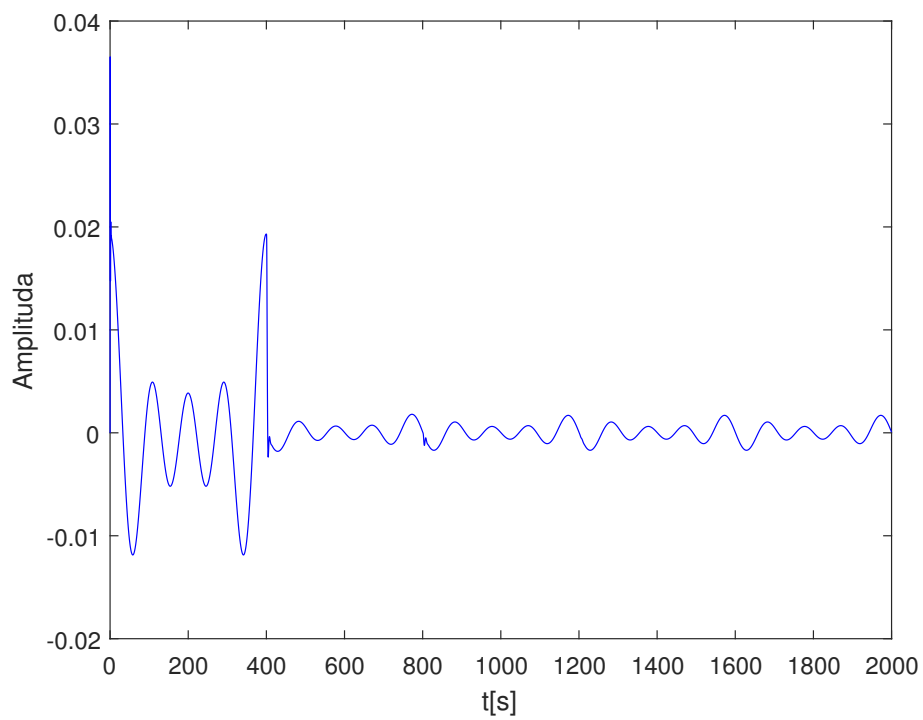


Obr. 34: Výběr bodu splňující kritéria v k - k_i parametrické rovině

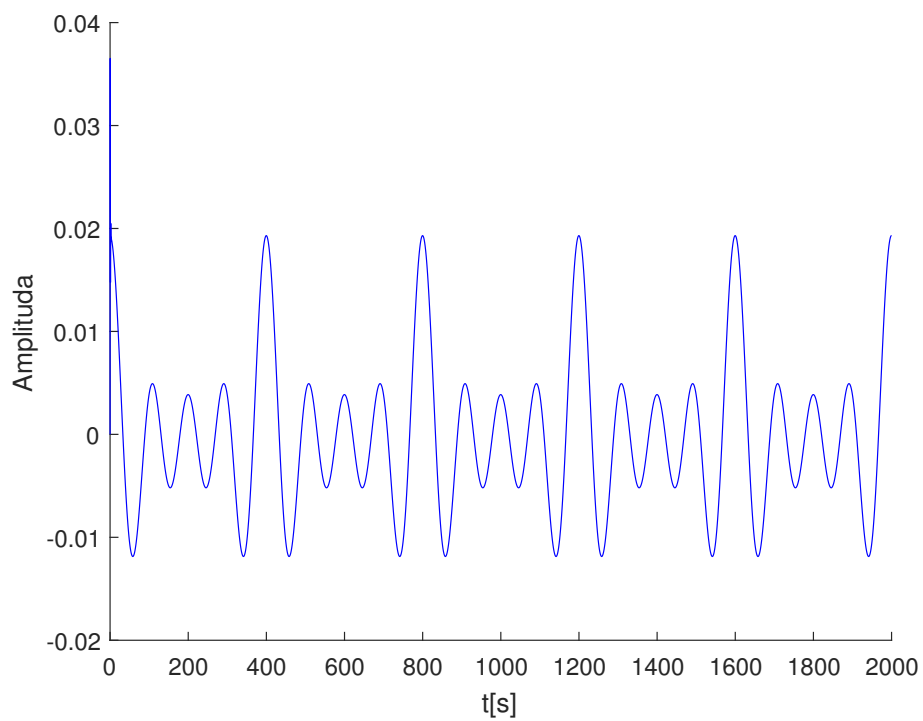


Obr. 35: Referenční signál, který má být sledován

V grafu na obr. 35 je zobrazen referenční signál, jenž reprezentuje složení 4 sinusových signálů o amplitudě jedna a periodě 400[s], 200[s], 133.33[s] a 100[s]. Simulace trvá 2000[s]. Jelikož referenční signál a sledovaný signál jsou na daném měřítku téměř totožné není tento graf zde uveden. V grafu na obr. 36 je zobrazena regulační odchylka při použití vnitřního modelu referenčního signálu v otevřené smyčce. Jak je vidět první periodu je signál neměnný, avšak po další periodě se regulační odchylka značně snižuje. Maximální absolutní hodnota regulační odchylky v dalších periodách činí 0.00194. V grafu na obr. 37 je zobrazena regulační odchylka bez použití vnitřního modelu referenčního signálu v otevřené smyčce. Maximální odchylka tohoto signálu činí 0.036520, což je dvacetkrát větší hodnota než v případě užití vnitřního modelu referenčního signálu.

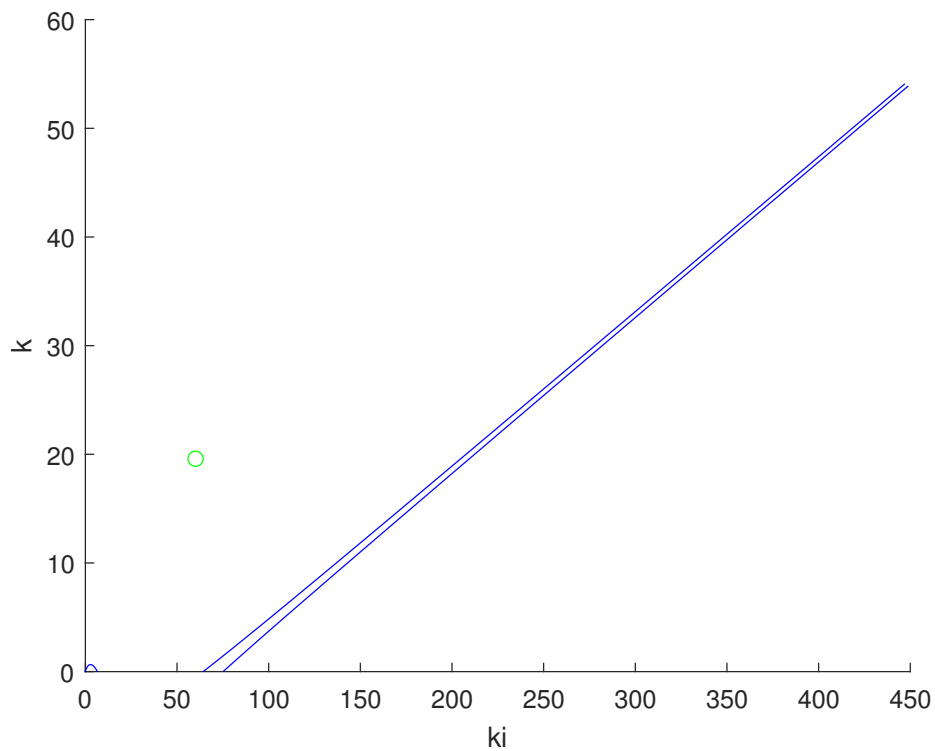


Obr. 36: Regulační odchylka při použití vnitřního modelu vstupního signálu



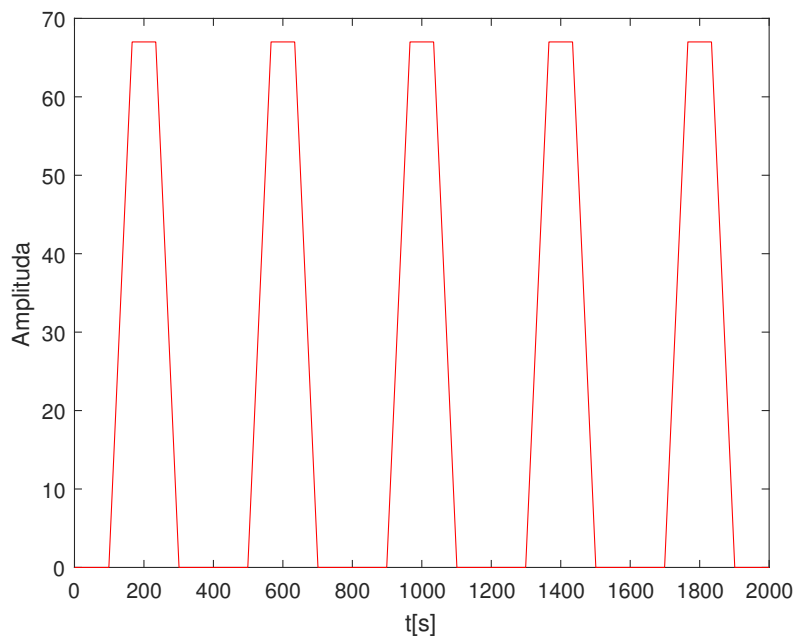
Obr. 37: Regulační odchylka bez použití vnitřního modelu vstupního signálu

Dalším signálem pro testování je lichoběžníkový signál s periodou 400[s]. Nejprve je nutné vybrat v parametrické rovině k - k_i bod, jenž splňuje kritérium (32) a zároveň splňuje stabilitu uzavřené regulační smyčky. Bod $[k, k_i] = [19, 504, 60, 657]$ splňuje oba požadavky. V grafu na obr. 38 je vidět, kde se bod nachází v parametrické rovině $k - k_i$. V grafu na obr. 39 je referenční signál reprezentující lichoběžníkový signál. Úkolem je tento signál sledovat s co nejmenší regulační odchylkou. V grafech na obr. 40 a na obr. 41 je vyzobrazena regulační odchylka při použití vnitřního modelu a bez použití vnitřního modelu. Absolutní odchylka v obou případech je téměř shodná. Tento atribut se tedy nemění. Je to dané strmým náběhem hrany lichoběžníka. V této části neexistuje derivace, protože v místě náběhu hrany není křivka hladká. Patrný rozdíl je ovšem v ploše, které zaujmají průběhy regulačních odchylek. V případě regulační odchylky při použití vnitřního modelu referenčního signálu v otevřené smyčce se plocha pod průběhem regulační odchylky blíží k nule, jak je zřejmé v grafu na obr. 40.

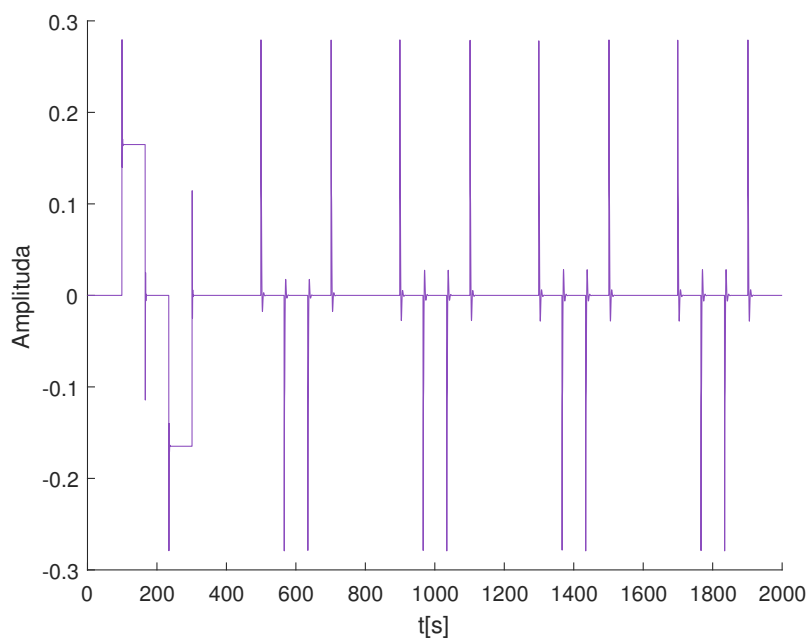


Obr. 38: Výběr bodu splňující kritéria v k - k_i parametrické rovině

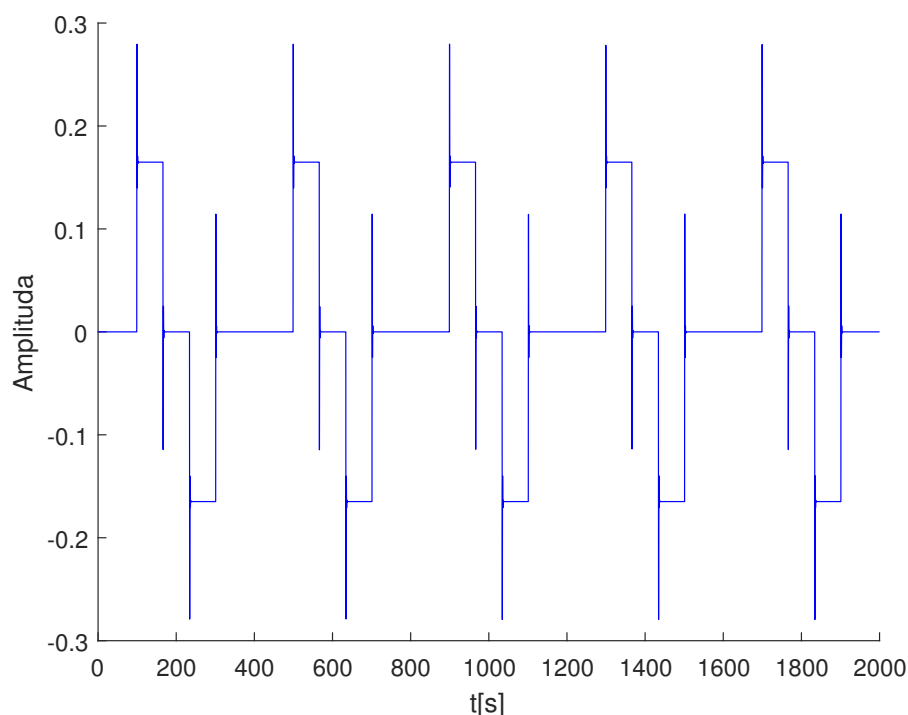
V druhém případě na obr. 41 je vidět, že plocha pod regulační odchylkou je nenulová a výrazně vyšší než v předchozím případě.



Obr. 39: Referenční signál

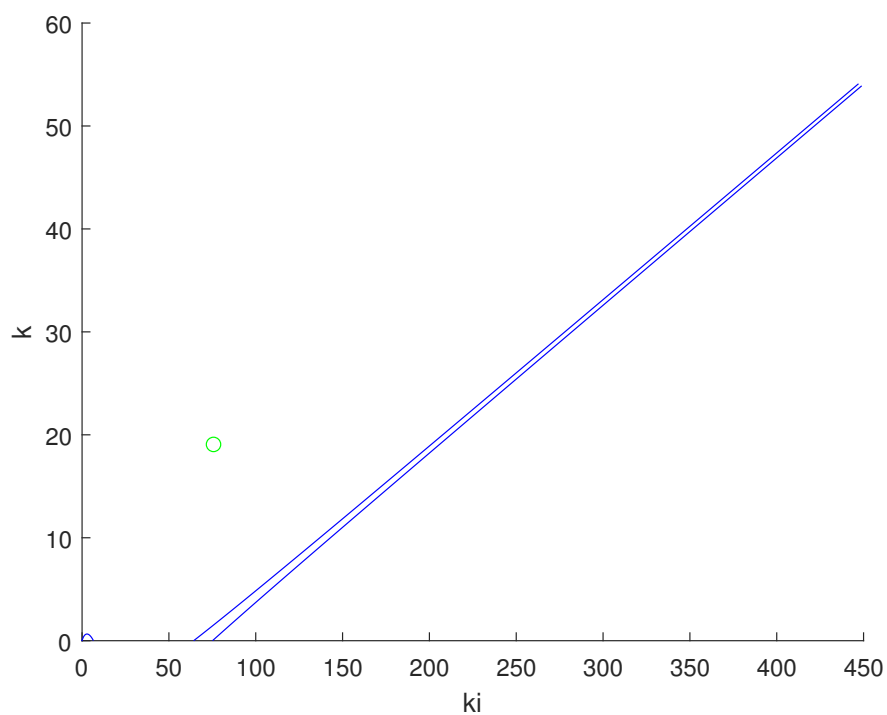


Obr. 40: Regulační odchylka při použití vnitřního modelu vstupního signálu

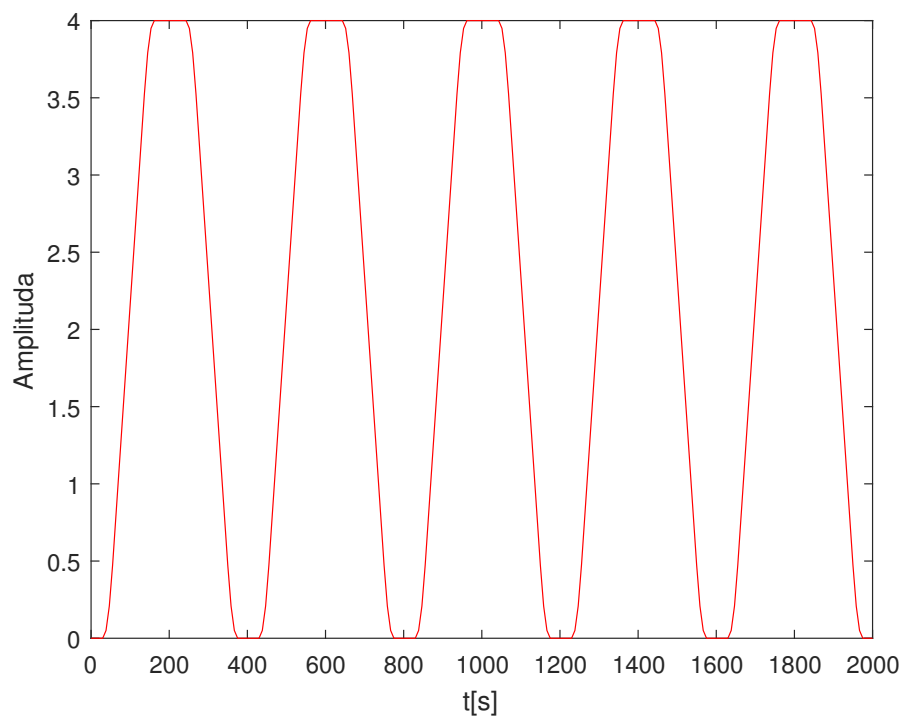


Obr. 41: Regulační odchylka bez použití vnitřního modelu vstupního signálu

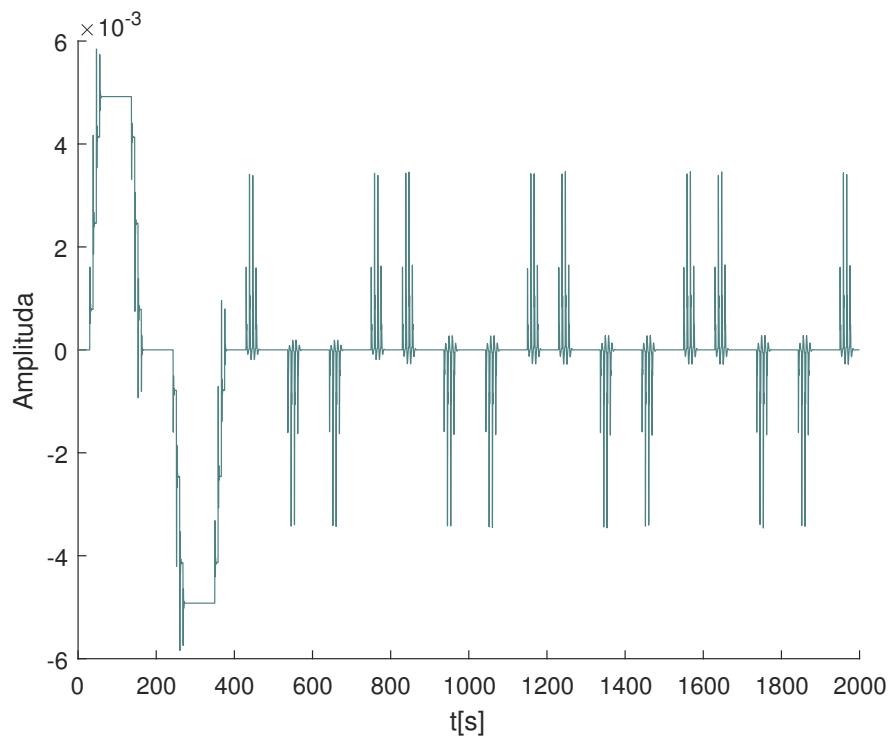
Posledním signálem pro testování je lichoběžníkový signál vyhlazený v náběžných hranách s periodou 400[s]. Vyhlazení v náběžných hranách je docíleno použitím bloku Zero vibration input shaper v řídicím programu Rex Controls. Nejprve je nutné vybrat v parametrické rovině $k - k_i$ bod, jenž splňuje kritérium (32) a zároveň splňuje stabilitu otevřené regulační smyčky. Bod $[k, k_i] = [18, 979, 76, 209]$ splňuje oba požadavky. V grafu na obr. 42 je vidět, kde se bod nachází v parametrické rovině $k - k_i$. V grafu na obr. 43 je referenční signál reprezentující lichoběžníkový signál s vyhlazenými náběžnými hranami. Úkolem je tento signál sledovat s co nejmenší regulační odchylkou. V grafech na obr. 44 a na obr. 45 je vyzobrazena regulační odchylka při použití vnitřního modelu a bez použití vnitřního modelu. Absolutní odchylka se liší v obou případech, což je jiný výsledek než u původního lichoběžníkového signálu. Důvodem je vyhlazení při náběhu hrany lichoběžníka. Křivka je tam tedy "hladší" než pouze u lichoběžníkového signálu. Patrný rozdíl v ploše vymezené regulační odchylkou zůstává. V případě regulační odchylky při použití vnitřního modelu referenčního signálu v otevřené smyčce se plocha pod regulační odchylkou blíží k nule, jak je zřejmé v grafu na obr. 44. V druhém případě v grafu na obr. 45 je vidět, že plocha pod regulační odchylkou je nenulová a výrazně vyšší než u předchozího případu.



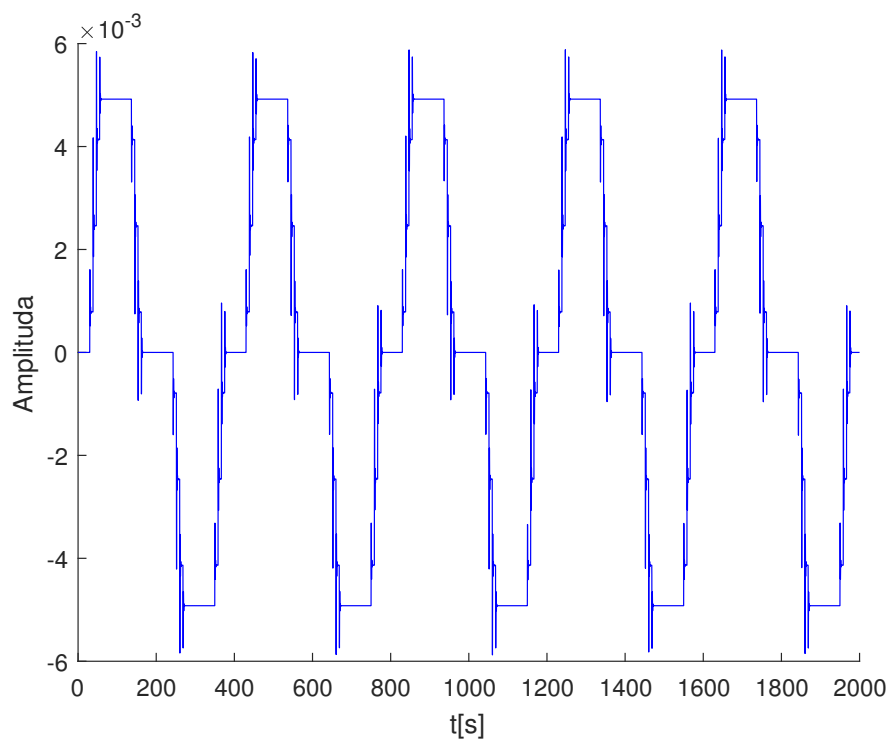
Obr. 42: Výběr bodu splňujícího kritéria v k - k_i parametrické rovině



Obr. 43: Referenční signál



Obr. 44: Regulační odchylka při použití vnitřního modelu vstupního signálu



Obr. 45: Regulační odchylka bez použití vnitřního modelu vstupního signálu

6 VÝSLEDKY PRÁCE

Povedlo se navrhnout vnitřní model periodického signálu (2) s pevnou periodou T pomocí limitní věty 1 o konečné hodnotě. Pro návrh řízení repetitivního řídicího systému (viz obr. 1) s modelem vnitřního periodického signálu M o pevné periodě T byly stanoveny požadavky na regulátor C pro zaručení stability uzavřené smyčky dané větou 3.

Dále byl vytvořen model stejnosměrného motoru (viz obr. 13) jakožto řízeného systému. Pro řízení stejnosměrného motoru byla použita kaskádová regulace (viz obr. 12). Vnitřní smyčka v kaskádě je proudová (momentová) smyčka (viz obr. 17). Po ní následuje smyčka regulující rychlost stejnosměrného motoru (viz obr. 18). Momentová i rychlostní smyčka jsou řízeny PI regulátorem. Vnější smyčkou je smyčka obstarávající polohu (viz obr. 19) řízená pouze P regulátorem.

Pro návrh repetitivního řídicího systému byla použita metoda smíšených citlivostních funkcí (viz podkapitola 4.3), jejíž řešení představují regiony (oblasti) tvořené křivkami v parametrické rovině $k - k_i$. Metoda smíšených citlivostních funkcí a dříve stanovené požadavky na regulátor pro zaručení stability uzavřené smyčky byly základem pro vybudování metody návrhu PID regulátoru pro systém s vnitřním modelem periodického signálu s pevnou periodou T (viz podkapitola 5.1). Aplikací této metody byl navržen PI regulátor pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru. Obdržené řešení bylo v podobě parametrické roviny $k - k_i$. V parametrické rovině $k - k_i$ bylo nutné zvolit regiony (uzavřené oblasti), pro které platí kritérium (45) a ve kterých je zaručena stabilita uzavřené smyčky.

Z výsledných regionů (oblastí) byly vybrány dvojice bodů $[k, k_i]$. Repetitivní řídicí systém s PI regulátorem daným parametry k a k_i byl testován pro různé typy vstupních periodických signálů (s periodou T). Pro signál složený pouze ze sinusových signálů bylo zaznamenáno výrazné snížení absolutní velikosti regulační odchylky řízení (viz obr. 36). Pro lichoběžníkový signál byla absolutní velikost regulační odchylky řízení téměř shodná. Patrný rozdíl byl v úbytku plochy, kterou vymezuje regulační odchylka řízení (viz obr. 40). Jako poslední signál byl testován lichoběžníkový signál s vyhlazenými hranami. Pro tento případ byl výrazný úbytek jak v absolutní velikosti regulační odchylky řízení tak i v ploše, kterou regulační odchylka řízení vymezuje (viz obr. 44).

7 DISKUZE

Zvolená metoda návrhu PID regulátoru z podkapitoly 5.1 předpokládá návrh regulátoru pro řízený systém společně s vnitřním modelem periodického signálu (3). Výhoda této metody spočívá v tom, že stačí u předem zvoleného vnitřního modelu (3) určit váhovou funkci W . Váhová funkce W představuje frekvenční filtr s dolní propustí. Řešením metody návrhu PID regulátoru je potom množina PID regulátorů, pro kterou platí kritérium (45) pro $\gamma \in [0, 1]$ a pro kterou platí princip vnitřní stability pro smyčku s PID regulátorem a řízeným systémem. Mezi další výhodou této metody lze považovat snadnou automatizovanou implementaci. Metoda využívá pouze znalosti přenosové funkce modelu řízeného systému a znalost požadované přenosové funkce váhové funkce W . Nezanedbatelnou výhodou je nízký řád regulátoru. Navíc PID regulátor je hojně používaný v průmyslových aplikacích. Nevýhoda tohoto přístupu je šířka pásma. Pokud jsou výrazné frekvence vysoké, propustné pásmo filtru má vysokou zlomovou frekvenci a nemusí být zajištěna existence řešení pro daný typ filtru.

Alternativně lze změnit podobou vnitřního modelu periodického signálu anebo metody vedoucí k návrhu repetitivního řízení. U vnitřního modelu periodického signálu je možné uvažovat pouze některé z prvních dominantních harmonických frekvencí. Výhodou tohoto přístupu je zacílení přímo na významné frekvence signálu. Nevýhoda se skýtá ve velikosti řádu takového modelu. Pokud by bylo požadováno tlumit v signálu tři významné harmonické frekvence, řád vnitřního modelu periodického signálu by byl 7. Odlišná metoda návrhu repetitivního řízení by pak mohla být založena na kritérium c) ve větě 3 u návrhových požadavků na regulátor, který má zajistit stabilitu uzavřené smyčky. Hlavním cílem metody by bylo tvarovat nominální přenos citlivostní funkce tak, aby bylo splněné kritérium c) a aby bylo zahrnuto žádané spektrum frekvencí do dolnofrekvenčního filtru, který je součástí vnitřního modelu periodického signálu. Problémem této metody by mohl být opět vysoký řád obdrženého regulátoru.

8 ZÁVĚR

Povedlo se navrhnout vnitřní model periodického signálu (2) s pevnou periodou T . Pro návrh řízení repetitivního řídicího systému (viz obr. 1) s modelem vnitřního periodického signálu M o pevné periodě T byly stanoveny požadavky na regulátor C pro zaručení stability. Dále byl vytvořen model stejnosměrného motoru (viz obr. 13) jakožto řízeného systému.

Při návrhu repetitivního řídicího systému byla použita metoda smíšených citlivostních funkcí (viz podkapitola 4.3) a dříve stanovené požadavky na regulátor pro zaručení stability uzavřené smyčky. Aplikací nové metody byl navržen PI regulátor pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru. Řešení bylo obdrženo v podobě parametrické roviny $k - k_i$. Z výsledných regionů (oblastí), které vyhovují požadavkům, byly vybrány dvojice bodů $[k, k_i]$. Repetitivní řídicí systém s PI regulátorem daným parametry k a k_i byl testován pro různé typy vstupních periodických signálů (s periodou T).

LITERATURA

- [1] Richard W. Longman *Iterative learning control and repetitive control for engineering practice*, 2009, 1589-1600, Journal of Process Control 19.
- [2] Youqing Wang, Furong Gao, Francis J. Doyle *Survey on iterative learning control, repetitive control, and run-to-run control*, 2000, Vol. 73, No. 10, 930-954, INT. J. CONTROL.
- [3] George Weiss *Repetitive control systems: Old and New Ideas*, 1997, Systems and control in the twenty-first century, Boston: Birkhauser.
- [4] *Initial and Final Value Theorems*, [online] 2012, poslední aktualizace 28. ledna 2012 [cit. 14. 3. 2016]. Dostupné z URL: <http://fourier.eng.hmc.edu/e102/lectures/Laplace_Transform/node17.html>.
- [5] B. A. Francis, W. M. Wonham *The internal model principle for linear multivariable regulators*, 1975, Appl. Math. Optim. 2, pp. 170-194.
- [6] J. Doyle, B. Francis, A. Tannenbaum *FeedBack Control Theory*, 1990, Macmillian Publishing Co., 197 s.
- [7] B. D. O. Anderson *The Small-Gain Theorem, the Passivity Theorem and their Equivalence*, 1972, Vol. 293, No. 2, 105-115, Department of Electrical Engineering.
- [8] O. Večerek, M. Schlegel *Design of \mathcal{H}_∞ PI Controllers by Robustness Regions Method*, 2004, 1-8, Process control, ISBN 80-7194-662-1.
- [9] H. Kwakernaak *Minimax frequency domain performance and robustness optimization of linear feedback systems*, 1985, Vol. AC-30, No. 10, 994-1004, IEEE Transactions on Automatic Control.
- [10] H. Kwakernaak *Robust control and \mathcal{H}_∞ -optimization - tutorial paper*, 1993, Vol. AC-29, No. 2, 255-273, Automatica.
- [11] M. Schlegel, J. Mertl, J. Čech *Generalized robustness regions for PID controllers*, Bratislava, 2003, Vol. AC-29, No. 2, 108-114, Process Control.
- [12] M. Bureš *Princip stejnosměrných motorů*, [online] 2012, poslední aktualizace 28. ledna 2012 [cit. 6. 5. 2016]. Dostupné z URL: <<http://elektrika.cz/data/clanky/princip-stejnosmernych-motoru>>.

- [13] *Nyquist stability criterion*, [online] 2013, poslední aktualizace 24. červen 2017 [cit. 10. 8. 2017]. Dostupné z URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist_stability_criterion>.
- [14] M. Bureš *Připojování elektrických strojů a pohonů s elektromotory*, [online] 2008, poslední aktualizace 13. srpna 2008 [cit. 6. 5. 2016]. Dostupné z URL: <<http://elektrika.cz/data/clanky/jzm030227/view>>.
- [15] Š. Schwarz *Základy náuky o riešení rovníc*, Bratislava, 1968, Vydavateľstvo slovenskej akadémie vied.

SEZNAM PŘÍLOH

A Řešení soustavy rovnic	52
B Algoritmizace metody návrhu PI regulátoru pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru	60

A ŘEŠENÍ SOUSTAVY ROVNIC

Problém řešení soustavy rovnic (41) a (42) pro neznámé parametry k a d může být převeden na nalezení kořenů polynomu 2. a 4. stupně s parametrem frekvence ω . Důležité jsou pouze reálné kořeny z hlediska fyzikálního významu. Převedení soustavy rovnic na řešení polynomů bylo provedeno symbolicky v programu Maple. Numerické výpočty kořenů byly provedeny v programu Matlab.

1. Polynom druhého řádu.

$$a_2\rho^2 + a_1\rho + a_0 = 0,$$

kde koeficienty a_2 , a_1 a a_0 jsou dány jako

$$a_2 = 4, \quad a_1 = 4ag^2 - 4ap^2, \quad a_0 = a^2g^4 - 2a^2g^2p^2 + a^2p^4 + b^2g^4 + 2b^2g^2p^2 + b^2p^4.$$

Nechť řešení ρ prochází přes všechny reálné kořeny polynomu, pak neznámé k a d jsou dány jako

$$\begin{aligned} k &= \rho \setminus ((a^2 + b^2)g^2), \\ d &= -(((4\omega p^4 + ((-4 + (-12p^2 + 8)p^2)\omega + ((8p^4 - 8)\omega + (-8p^2 + 12)\omega \\ &g^2)g^2)g^4)g^2b_1 + (-2p^6 + ((6p^2 - 6)p^4 + (-8p^4\omega g_1 + ((2 + (-6p^2 + 6)p^2)p^2 - \\ &8p_1p^3\omega + (-8p^2\omega g_1 + (6 + (-14 + (2p^2 + 6)p^2)p^2 + (16p^2p_1 + 8p_1)p\omega + \\ &((16 + (8p^2 - 16)p^2)\omega g_1 + (2 + (-6p^2 + 6)p^2 + (-8p^2p_1 - 16p_1)p\omega + ((-8p^2 \\ &+ 16)\omega g_1 + (8\omega pp_1 - 2g^2 + 6p^2 - 6)g)g)g)g)g)g)g^2)b^5 + (2\omega p^2\rho \\ &+ ((-4p^2\rho - 2\rho)\omega + ((2p^2\rho + 4\rho)\omega - 2\omega\rho g^2)g^2)g^2b^4a_1 + (((-8\omega p^2\rho \\ &+ ((12p^2\rho + 4\rho)\omega + (-16\omega\rho + (-4p^2\rho + 12\rho)\omega g^2)g^2)g^2b_1 + (3p^4\rho \\ &+ ((-9p^2\rho + 6\rho)p^2 + (12g_1\omega p^2\rho + (-\rho + (9p^2\rho - 6\rho)p^2 + 4pp_1\rho\omega \\ &+ (-8g_1\omega p^2\rho + (7\rho + (-3p^2\rho - 6\rho)p^2 - 8pp_1\rho\omega + ((-4p^2\rho + 16\rho)\omega g_1 \\ &+ (4\omega pp_1\rho - 3g^2\rho + 6p^2\rho - 3\rho)g)g)g)g)g)g^2)b^3 + (12\omega p^4 + ((-16p^2 \\ &+ 16)p^2\omega + ((-12 + (-4p^2 - 8)p^2)\omega + ((8p^4 - 8)\omega + (-8p^2 + 20)\omega g^2) \\ &g^2)g^2)g^2b^4a_1 + (((-8\omega p^4 + ((32p^2 - 48)p^2\omega + ((8 + (-40p^2 + 80)p^2)\omega \\ &+ ((-16 + (16p^2 - 16)p^2)\omega + (-16p^2 + 8)\omega g^2)g^2)g^2)g^2b_1 + (-2p^6 \\ &+ ((6p^2 + 6)p^4 + (-8p^4\omega g_1 + ((34 + (-6p^2 - 42)p^2)p^2 - 24p_1p^3\omega \\ &+ ((-16p^2 + 40)p^2\omega g_1 + (10 + (-70 + (2p^2 + 66)p^2)p^2 + (48p^2p_1 + 24p_1 \\ &)p\omega + ((32 + (24p^2 - 80)p^2)\omega g_1 + (10 + (-30p^2 + 6)p^2 + (-24p^2p_1 - 48p_1 \\ &)p\omega + ((-24p^2 + 32)\omega g_1 + (24\omega pp_1 - 2g^2 + 30p^2 - 18)g)g)g)g)g)g)g) \\ &g^2)b^3 + (-12\omega p^2\rho + (20\omega p^2\rho + ((-4p^2\rho - 16\rho)\omega + (-4p^2\rho + 16\rho)\omega g^2)g^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&)g^2)g^2b^2a_1 + (((8\omega p^2\rho + ((-20p^2\rho + 4\rho)\omega + (16\omega p^2\rho + (-4p^2\rho - 4\rho)\omega g^2 \\
&)g^2)g^2)g^2b_1 + (2p^4\rho + ((-6p^2\rho + 4\rho)p^2 + (8g_1\omega p^2\rho + (6p^4\rho + 8pp_1\rho\omega \\
& - 2\rho + (10\rho + (-2p^2\rho - 12\rho)p^2 - 16pp_1\rho\omega + ((-8p^2\rho + 16\rho)\omega g_1 \\
& + (8\omega pp_1\rho - 2g^2\rho + 8p^2\rho - 6\rho)g)g)g^2)g)g^2)b)b + (8\omega p^4 + (-48\omega p^2 \\
& + ((-8 + (-24p^2 + 112)p^2)\omega + ((-16 + (16p^2 - 48)p^2)\omega + (-16p^2 + 24 \\
&)\omega g^2)g^2)g^2)g^2b^2a_1 + (((-12\omega p^4 + ((32p^2 + 16)p^2)\omega \\
& + ((12 + (-28p^2 - 56)p^2)\omega + ((-8 + (8p^2 + 48)p^2)\omega + (-8p^2 - 4)\omega g^2)g^2) \\
&)g^2)g^2)g^2b_1 + (2p^6 + ((-6p^2 + 14)p^4 + (8p^4\omega g_1 + ((30 + (6p^2 - 54)p^2)p^2 \\
& - 24p_1p^3\omega + ((-32p^2 + 40)p^2\omega g_1 + (2 + (-50 + (-2p^2 + 66)p^2)p^2 \\
& + (48p^2p_1 + 24p_1)p\omega + ((16 + (24p^2 - 48)p^2)\omega g_1 + (14 + (-26p^2 - 6)p^2 \\
& + (-24p^2p_1 - 48p_1)p\omega + ((-24p^2 + 16)\omega g_1 + (24\omega pp_1 + 2g^2 + 26p^2 - 18 \\
&)g)g)g)g)g)g)g)g^2)b)b + (2\omega p^2\rho + ((-8p^2\rho + 2\rho)\omega + ((10p^2\rho - 4\rho)\omega \\
& + (-4p^2\rho + 2\rho)\omega g^2)g^2)g^2)g^2a_1 + (-p^4\rho + ((3p^2\rho - 2\rho)p^2 + (-4g_1\omega p^2\rho \\
& + (-\rho + (-3p^2\rho + 6\rho)p^2 + 4pp_1\rho\omega + (8g_1\omega p^2\rho + (3\rho + (p^2\rho - 6\rho)p^2 \\
& - 8pp_1\rho\omega + (-4g_1\omega p^2\rho + (4\omega pp_1\rho + g^2\rho + 2p^2\rho - 3\rho)g)g)g)g)g)g^2 \\
& + (-4\omega p^4 + (16\omega p^4 + ((4 + (-20p^2 - 8)p^2)\omega + ((-8 + (8p^2 + 16)p^2)\omega \\
& + (-8p^2 + 4)\omega g^2)g^2)g^2)g^2)g^2a_1 + (2p^6 + ((-6p^2 + 2)p^4 + (8p^4\omega g_1 + ((\\
& - 2 + (6p^2 - 6)p^2)p^2 - 8p_1p^3\omega + ((-16p^2 - 8)p^2\omega g_1 + (\\
& - 2 + (6 + (-2p^2 + 6)p^2)p^2 + (16p^2p_1 + 8p_1)p\omega + ((8p^2 + 16)p^2\omega g_1 \\
& + (6 + (-2p^2 - 6)p^2 + (-8p^2p_1 - 16p_1)p\omega + (-8p^2\omega g_1 + (8\omega pp_1 + 2g^2 \\
& + 2p^2 - 6)g)g)g)g)g)g)g)g^2)a)a)a)a)a)a)\omega \setminus (((-2\omega p^2\rho + (-2\omega\rho \\
& + ((6p^2\rho - 4\rho)\omega + (-4p^2\rho + 6\rho)\omega g^2)g^2)g^2)g^2b_1 + (p^4\rho + ((-3p^2\rho + 4\rho)p^2 \\
& + (4g_1\omega p^2\rho + (3\rho + (3p^2\rho - 6\rho)p^2 + 4pp_1\rho\omega + (8g_1\omega\rho + (-p^4\rho \\
& - 8pp_1\rho\omega + \rho + ((-4p^2\rho + 8\rho)\omega g_1 + (4\omega pp_1\rho - g^2\rho + 2p^2\rho - 3 \\
& \rho)g)g)g)g)g)g)g^2)b)b^4 + (4\omega p^4 + ((-8p^2 + 8)p^2\omega + ((4 + (4p^2 - 16)p^2)\omega \\
& + ((8p^2 - 8)\omega + 4\omega g^2)g^2)g^2)g^2)g^2b^5a_1 + (((-12\omega p^4 + ((24p^2 \\
& - 24)p^2\omega + ((-12 + (-12p^2 + 48)p^2)\omega + ((-24p^2 + 24)\omega - 12\omega g^2)g^2 \\
&)g^2)g^2)g^2b_1 + (4p^6 + ((-12p^2 + 16)p^4 + (16p^4\omega g_1 + ((20 + (12p^2 - 36 \\
&)p^2)p^2 + ((-16p^2 + 32)p^2\omega g_1 + (8 + (-36 + (-4p^2 + 24)p^2)p^2 + ((-32p^2 \\
& + 16)\omega g_1 + (-12 + (-4p^2 + 12)p^2 + (-16\omega g_1 + (4g^2 + 4p^2)g)g)g)g) \\
&)g)g)g)g)g^2)b)b^4 + (-8\omega p^2\rho + ((12p^2\rho - 4\rho)\omega + (-8\omega\rho + (-4p^2\rho + 12\rho) \\
& \omega g^2)g^2)g^2)g^2b^3a_1 + (((12\omega p^2\rho + (-28\omega p^2\rho + ((20p^2\rho + 8\rho)\omega + (-4p^2\rho \\
& - 8\rho)\omega g^2)g^2)g^2)g^2b_1 + (-2p^4\rho + (6p^4\rho + (-8g_1\omega p^2\rho + (-6p^4\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8pp_1\rho\omega + 6\rho + ((16p^2\rho + 16\rho)\omega g_1 + (2p^4\rho - 16pp_1\rho\omega \\
& - 2\rho + (-8g_1\omega p^2\rho + (8\omega pp_1\rho + 2g^2\rho - 6\rho)g)g)g)g^2)b)b^2 \\
& + (-8\omega p^4 + ((16p^2 - 32)p^2\omega + ((-8 + (-8p^2 + 64)p^2)\omega + ((-32p^2 \\
& + 16)\omega - 8\omega g^2)g^2)g^2)g^2b^3a_1 + (((-8\omega p^4 + ((16p^2 + 32)p^2\omega + ((-8 \\
& + (-8p^2 - 64)p^2)\omega + ((32p^2 + 16)\omega - 8\omega g^2)g^2)g^2)g^2)g^2b_1 + (8p^6 \\
& + ((-24p^2 + 16)p^4 + (32p^4\omega g_1 + ((8 + (24p^2 - 24)p^2)p^2 + (-32p^4\omega g_1 \\
& + (16 + (-8p^4 - 24)p^2 + (32\omega g_1 + (-24 + (8p^2 + 24)p^2 + (-32\omega g_1 \\
& + (8g^2 - 8p^2)g)g)g)g)g)g)g^2)b)b^2 + (8\omega p^2\rho + ((-20p^2\rho - 4\rho)\omega \\
& + ((16p^2\rho + 8\rho)\omega + (-4p^2\rho - 4\rho)\omega g^2)g^2)g^2)g^2ba_1 + ((-2\omega p^2\rho \\
& + ((4p^2\rho + 2\rho)\omega + ((-2p^2\rho - 4\rho)\omega + 2\omega\rho g^2)g^2)g^2)g^2b_1 \\
& + (-3p^4\rho + ((9p^2\rho - 4\rho)p^2 + (-12g_1\omega p^2\rho + (3\rho + (-9p^2\rho + 6\rho)p^2 \\
& + 4pp_1\rho\omega + ((16p^2\rho + 8\rho)\omega g_1 + (3p^4\rho - 8pp_1\rho\omega - 3\rho + ((-4p^2\rho \\
& - 8\rho)\omega g_1 + (4\omega pp_1\rho + 3g^2\rho - 2p^2\rho - 3\rho)g)g)g)g)g)g^2)b + (-12 \\
& \omega p^4 + ((24p^2 + 24)p^2\omega + ((-12 + (-12p^2 - 48)p^2)\omega + ((24p^2 + 24)\omega \\
& - 12\omega g^2)g^2)g^2)g^2)g^2ba_1 + ((4\omega p^4 + ((-8p^2 - 8)p^2\omega + ((4 + (4p^2 \\
& + 16)p^2)\omega + ((-8p^2 - 8)\omega + 4\omega g^2)g^2)g^2)g^2)g^2b_1 + (4p^6 + (-12p^6 \\
& + (16p^4\omega g_1 + ((-12 + (12p^2 + 12)p^2)p^2 + ((-16p^2 - 32)p^2\omega g_1 \\
& + (8 + (12 + (-4p^2 - 24)p^2)p^2 + ((32p^2 + 16)\omega g_1 + (-12 + (12p^2 \\
& + 12)p^2) + (-16\omega g_1 + (4g^2 - 12p^2)g)g)g)g)g)g)g)g^2)b)a)a)a)a.
\end{aligned}$$

2. Polynom čtvrtého řádu.

$$a_4\rho^4 + a_3\rho^3 + a_2\rho^2 + a_1\rho + a_0 = 0,$$

kde koeficienty a_4 , a_3 , a_2 , a_1 a a_0 jsou dány jako

$$\begin{aligned}
a_4 = & (1 + (-4 + (6 + (g^2 - 4)g^2)g^2)g^2)b^8 + ((4 + (-16 + (24 + (4g^2 - \\
& 16)g^2)g^2)g^2)b^6 + ((6 + (-24 + (36 + (6g^2 - 24)g^2)g^2)g^2)b^4 + ((4 + \\
& (-16 + (24 + (4g^2 - 16)g^2)g^2)g^2)b^2 + (1 + (-4 + (6 + (g^2 - 4)g^2 \\
&)g^2)g^2)a^2)a^2)a^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & (2\omega + (-6\omega + (-2g^2\omega + 6\omega)g^2)g^2)b^6a_1 + (((-4\omega + (12\omega + \\
& (4g^2\omega - 12\omega)g^2)g^2)b_1 + (4 + (4g_1\omega + (-12 + (-8g_1\omega + \\
& (12 + (4g_1\omega - 4g)g)g)g)g)g)b)b^5 + ((2\omega + (-6\omega + (-2g^2\omega + \\
& 6\omega)g^2)g^2)b^4a_1 + (((-8\omega + (24\omega + (8g^2\omega - 24\omega)g^2)g^2)b_1 + \\
& (12 + (12g_1\omega + (-36 + (-24g_1\omega + (36 + (12g_1\omega - 12g)g)g) \\
&)g)g)g)b)b^3 + ((-2\omega + (6\omega + (2g^2\omega - 6\omega)g^2)g^2)b^2a_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (((-4\omega + (12\omega + (4g^2\omega - 12\omega)g^2)g^2)b_1 + (12 + (12g_1\omega + \\
& (-36 + (-24g_1\omega + (36 + (12g_1\omega - 12g)g)g) \\
&)g)g)g)b)b + ((-2\omega + (6\omega + (2g^2\omega - 6\omega)g^2)g^2)a_1 + (4 + (4g_1\omega + \\
& (-12 + (-8g_1\omega + (12 + (4g_1\omega - 4g)g)g)g)g)a)a)a)a)a)a. \\
a_2 = & ((\omega^2 + (g^2\omega^2 - 2\omega^2)g^2)b_1^2 + (((2p^2 - 2)\omega + (-4g_1\omega^2 + \\
& ((-6p^2 + 6)\omega + (4g_1\omega^2 + ((6p^2 - 6)\omega + (-2p^2 + 2)\omega g^2)g)g)g)b_1 \\
& + (-2pp_1\omega - 2p^2 + 1 + ((-2p^2 + 2)\omega g_1 + (4\omega^2 g_1^2 + 6pp_1\omega + \\
& 6p^2 - 4 + ((4p^2 - 4)\omega g_1 + (-6pp_1\omega - 6p^2 + 5 + ((-2p^2 + \\
& 2)\omega g_1 + (2\omega pp_1 + 2p^2 - 2)g)g)g)g)g)b)b)b^4 + (\omega^2 + \\
& (g^2\omega^2 - 2\omega^2)g^2)b^4 a_1^2 + (((2p^2 + 2)\omega + (-4g_1\omega^2 + \\
& ((-6p^2 - 2)\omega + (4g_1\omega^2 + ((6p^2 - 2)\omega + (-2p^2 + 2)\omega g^2)g)g) \\
&)g)g)b^4 a_1 + (((2\omega^2 + (2g^2\omega^2 - 4\omega^2)g^2)b_1^2 + (((4p^2 - \\
& 12)\omega + (-8g_1\omega^2 + ((-12p^2 + 28)\omega + (8g_1\omega^2 + \\
& ((12p^2 - 20)\omega + (-4p^2 + 4)\omega g^2)g)g)g)b_1 + (-6pp_1\omega - 6p^2 + \\
& 8 + ((-6p^2 + 14)\omega g_1 + (12\omega^2 g_1^2 + 18pp_1\omega + 18p^2 - \\
& 22 + ((12p^2 - 20)\omega g_1 + (-18pp_1\omega - 18p^2 + 20 + ((-6p^2 + \\
& 6)\omega g_1 + (6\omega pp_1 + 6p^2 - 6)g)g)g)g)g)g)b)b)b^2 + (2\omega^2 + \\
& (2g^2\omega^2 - 4\omega^2)g^2)b^2 a_1^2 + (((4p^2 - 4)\omega + (-8g_1\omega^2 + \\
& ((-12p^2 + 12)\omega + (8g_1\omega^2 + ((12p^2 - 12)\omega + (-4p^2 + \\
& 4)\omega g^2)g)g)g)b^2 a_1 + ((\omega^2 + (g^2\omega^2 - 2\omega^2)g^2) \\
& b_1^2 + (((2p^2 - 10)\omega + (-4g_1\omega^2 + ((-6p^2 + 22)\omega \\
& + (4g_1\omega^2 + ((6p^2 - 14)\omega + (-2p^2 + 2)\omega g^2)g)g) \\
&)g)g)b_1 + (-6pp_1\omega - 6p^2 + 13 + ((-6p^2 + 22)\omega g_1 + (12 \\
& \omega^2 g_1^2 + 18pp_1\omega + 18p^2 - 32 + ((12p^2 - 28)\omega g_1 \\
& + (-18pp_1\omega - 18p^2 + 25 + ((-6p^2 + 6)\omega g_1 + (6\omega pp_1 \\
& + 6p^2 - 6)g)g)g)g)g)g)b)b + (\omega^2 + (g^2\omega^2 - 2\omega \\
& ^2)g^2)a_1^2 + (((2p^2 - 6)\omega + (-4g_1\omega^2 + ((-6p^2 + 14 \\
&)\omega + (4g_1\omega^2 + ((6p^2 - 10)\omega + (-2p^2 + 2)\omega \\
& g^2)g)g)g)g)a_1 + (-2pp_1\omega - 2p^2 + 6 + ((-2p^2 + 10)\omega g_1 \\
& + (4\omega^2 g_1^2 + 6pp_1\omega + 6p^2 - 14 + ((4p^2 - 12)\omega g_1 \\
& + (-6pp_1\omega - 6p^2 + 10 + ((-2p^2 + 2)\omega g_1 + (2\omega pp_1 \\
& + 2p^2 - 2)g)g)g)g)g)g)a)a)a)a)a. \\
a_1 = & ((2p^2\omega^2 + ((-4p^2 + 2)\omega^2 + (2p^2 - 2)\omega^2 g^2)g^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&)b_1 + ((-2\omega pp_1 - 2p^2)\omega + ((-2p^2 - 2)\omega^2 g_1 + ((4\omega p \\
& p_1 + 4p^2 - 2)\omega + ((2p^2 - 2)\omega^2 g_1 + (-2\omega pp_1 - 2p^2 + 2)\omega \\
& g)g)g)g)b^3 a_1 + ((((-4p^2 + 2)\omega^2 + ((8p^2 - 6)\omega^2 + (-4p^2 + 4 \\
&)\omega^2 g^2)g^2)b_1^2 + (((4\omega pp_1 + 8p^2 - 4)\omega + ((8p^2 - 4)\omega^2 \\
& g_1 + ((-8\omega pp_1 - 16p^2 + 12)\omega + ((-8p^2 + 8)\omega^2 g_1 + (4 \\
& \omega pp_1 + 8p^2 - 8)\omega g)g)g)g)b_1 + (-4pp_1\omega - 4p^2 + 2 + ((-4\omega \\
& pp_1 - 8p^2 + 4)\omega g_1 + (8pp_1\omega + 8p^2 - 6 + (-4p^2 + 4)\omega^2 g_1^2 \\
& + ((4\omega pp_1 + 8p^2 - 8)\omega g_1 + (-4\omega pp_1 - 4p^2 + 4)g)g)g)g)b \\
&)b^2 + ((2p^2 + 2)\omega^2 + (-4p^2\omega^2 + (2p^2 - 2)\omega^2 g^2)g^2)b^2 \\
& a_1^2 + (((-6p^2\omega^2 + ((12p^2 - 6)\omega^2 + (-6p^2 + 6)\omega^2 g^2)g^2 \\
&)b_1 + ((4p^2 - 2)\omega + ((4p^2 - 8)\omega^2 g_1 + ((-8p^2 + 6)\omega + ((-4p^2 \\
& + 4)\omega^2 g_1 + (4p^2 - 4)\omega g)g)g)g)ba_1 + ((-2g^2\omega^2 + 2\omega^2 \\
&)b_1^2 + (((4\omega pp_1 + 8p^2 - 8)\omega + ((8p^2 - 4)\omega^2 g_1 + (\\
& (-8\omega pp_1 - 16p^2 + 16)\omega + ((-8p^2 + 8)\omega^2 g_1 + (4\omega pp_1 \\
& + 8p^2 - 8)\omega g)g)g)g)b_1 + (-8pp_1\omega - 8p^2 + 6 + ((-8\omega pp_1 - 16p^2 \\
& + 12)\omega g_1 + (16pp_1\omega + 16p^2 - 14 + (-8p^2 + 8)\omega^2 g_1^2 + ((8 \\
& \omega pp_1 + 16p^2 - 16)\omega g_1 + (-8\omega pp_1 - 8p^2 + 8)g)g)g)g)b)b + ((\\
& - 2p^2 + 2)\omega^2 + ((4p^2 - 4)\omega^2 + (-2p^2 + 2)\omega^2 g^2)g^2)a_1^2 \\
& + (((2\omega pp_1 + 6p^2 - 6)\omega + ((6p^2 - 6)\omega^2 g_1 + ((-4\omega pp_1 \\
& - 12p^2 + 12)\omega + ((-6p^2 + 6)\omega^2 g_1 + (2\omega pp_1 + 6p^2 - 6)\omega \\
& g)g)g)g)a_1 + (-4pp_1\omega - 4p^2 + 4 + ((-4\omega pp_1 - 8p^2 + 8)\omega g_1 \\
& + (8pp_1\omega + 8p^2 - 8 + (-4p^2 + 4)\omega^2 g_1^2 + ((4\omega pp_1 + 8p^2 - 8 \\
&)\omega g_1 + (-4\omega pp_1 - 4p^2 + 4)g)g)g)g)a)a)a)a). \\
a_0 = & (((p^2 - 1)p^2\omega^2 + ((-1 + (-2p^2 + 3)p^2)\omega^2 + (1 + (p^2 - 2)p^2 \\
&)\omega^2 g^2)g^2)b_1^2 + ((((-2p^2 + 2)p^2 - 2p^3 p_1\omega)\omega + ((- \\
& 2p^2 + 2)p^2\omega^2 g_1 + ((2 + (4p^2 - 6)p^2 + (4p^2 p_1 - 2p_1)p\omega)\omega \\
& + ((2 + (2p^2 - 4)p^2)\omega^2 g_1 + (-2 + (-2p^2 + 4)p^2 + (-2p^2 p_1 + 2p_1)p\omega \\
&)\omega g)g)g)g)b_1 + ((p^2 - 1)p^2 + (\omega p^2 p_1^2 + 2p^3 p_1)\omega + \\
& (((2p^2 - 2)p^2 + (2p^2 p_1 + 2p_1)p\omega)\omega g_1 + (-1 + (-2p^2 + 3)p^2 + ((- \\
& 4p^2 p_1 + 2p_1)p - 2p^2 p_1^2\omega)\omega + (1 + (p^2 - 2)p^2)\omega^2 g_1^2 \\
& + ((-2 + (-2p^2 + 4)p^2 + (-2p^2 p_1 + 2p_1)p\omega)\omega g_1 + (1 + (p^2 - 2)p^2 + \\
& ((2p^2 p_1 - 2p_1)p + p^2 p_1^2\omega)\omega)g)g)g)g)b)b)b^2 + (((((2p^2 - 2) \\
& p^2\omega^2 + ((-2 + (-4p^2 + 6)p^2)\omega^2 + (2 + (2p^2 - 4)p^2)\omega^2 g^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&)g^2)b_1 + (((-2p^2 + 2)p^2 + (-2p^2p_1 - 2p_1)p\omega)\omega + ((-2 + (-2p^2 + 4)p^2)\omega^2g_1 + ((2 + (4p^2 - 6)p^2 + 4p^3p_1\omega)\omega + ((2 + (2p^2 - 4)p^2)\omega^2g_1 + (-2 + (-2p^2 + 4)p^2 + (-2p^2p_1 + 2p_1)p\omega)\omega g \\
&)g)g)g)b)ba_1 + (((-p^2 + 1)\omega^2 + (p^2 - 1)\omega^2g^2)b_1^2 + (((-2 + (-2p^2 + 4)p^2 + (-2p^2p_1 + 4p_1)p\omega)\omega + ((-2p^2 + 2)p^2\omega^2g_1 \\
& + ((4 + (4p^2 - 8)p^2 + (4p^2p_1 - 6p_1)p\omega)\omega + ((2 + (2p^2 - 4)p^2)\omega^2 \\
& g_1 + (-2 + (-2p^2 + 4)p^2 + (-2p^2p_1 + 2p_1)p\omega)\omega g)g)g)g)b_1 \\
& + (1 + (2p^2 - 3)p^2 + ((4p^2p_1 - 2p_1)p + 2p^2p_1^2\omega)\omega + ((2 + (4p^2 - 6)p^2 + 4p^3p_1\omega)\omega g_1 + (-3 + (-4p^2 + 7)p^2 + ((-8p^2p_1 + 6p_1)p - 4 \\
& p^2p_1^2\omega)\omega + (2 + (2p^2 - 4)p^2)\omega^2g_1^2 + ((-4 + (-4p^2 + 8) \\
& p^2 + (-4p^2p_1 + 4p_1)p\omega)\omega g_1 + (2 + (2p^2 - 4)p^2 + ((4p^2p_1 - 4p_1 \\
&)p + 2p^2p_1^2\omega)\omega)g)g)g)g)b)b + ((1 + (p^2 - 2)p^2)\omega^2 + ((- \\
& 2 + (-2p^2 + 4)p^2)\omega^2 + (1 + (p^2 - 2)p^2)\omega^2g^2)g^2)a_1^2 + (((-2 + \\
& (-2p^2 + 4)p^2 + (-2p^2p_1 + 2p_1)p\omega)\omega + ((-2 + (-2p^2 + 4)p^2)\omega^2 \\
& g_1 + ((4 + (4p^2 - 8)p^2 + (4p^2p_1 - 4p_1)p\omega)\omega + ((2 + (2p^2 - 4)p^2 \\
&)\omega^2g_1 + (-2 + (-2p^2 + 4)p^2 + (-2p^2p_1 + 2p_1)p\omega)\omega g)g) \\
& g)g)a_1 + (1 + (p^2 - 2)p^2 + ((2p^2p_1 - 2p_1)p + p^2p_1^2\omega)\omega + ((2 + (\\
& 2p^2 - 4)p^2 + (2p^2p_1 - 2p_1)p\omega)\omega g_1 + (-2 + (-2p^2 + 4)p^2 + ((-4p^2 \\
& p_1 + 4p_1)p - 2p^2p_1^2\omega)\omega + (1 + (p^2 - 2)p^2)\omega^2g_1^2 + ((\\
& -2 + (-2p^2 + 4)p^2 + (-2p^2p_1 + 2p_1)p\omega)\omega g_1 + (1 + (p^2 - 2)p^2 + ((2 \\
& p^2p_1 - 2p_1)p + p^2p_1^2\omega)\omega)g)g)g)g)a)a)a).
\end{aligned}$$

Nechť řešení ρ prochází přes všechny reálné kořeny polynomu, pak neznámé k a d jsou dány jako

$$\begin{aligned}
k &= \rho, \\
d &= -\omega((((p^2 - 1)p^2\omega + ((-1 + (-2p^2 + 3)p^2)\omega + ((p^2 - 1)p^2\omega \\
& + (-p^2 + 1)\omega g^2)g^2)g^2)b_1 + ((-p^2 + 1)p^2 - p_1p^3\omega + ((-p^2 + 1)p^2\omega \\
& g_1 + (1 + (2p^2 - 3)p^2 + (2p^2p_1 + p_1)p\omega + ((3 + (p^2 - 4)p^2)\omega g_1 + ((-p^2 + \\
& 1)p^2 + (-p^2p_1 - 2p_1)p\omega + ((-p^2 + 1)\omega g_1 + (\omega pp_1 + p^2 - 1)g)g)g)g) \\
&)g + ((-2\omega\rho^2 + (-2g^2\omega\rho^2 + 4\omega\rho^2)g^2)g^2)b_1 + (p^2\rho^2 + (-3p^2\rho^2 + \rho^2 + \\
& (4g_1\omega\rho^2 + (3p^2\rho^2 - \rho^2 + (-4g_1\omega\rho^2 + (g^2\rho^2 - p^2\rho^2 - \rho^2)g)g)g)g)g^2 \\
&)b)b)b)b^3 + (\omega p^2\rho + ((-2p^2\rho - \rho)\omega + ((p^2\rho + 2\rho)\omega - \omega\rho g^2)g^2 \\
&)g^2)b^4a_1 + (((-2\omega p^2\rho + (2\omega p^2\rho + ((2p^2\rho - 4\rho)\omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-2p^2\rho + 4\rho)\omega g^2)g^2)b_1 + (2\rho p^2 + (2g_1\omega p^2\rho + (2 \\
& pp_1\rho\omega - 2\rho p^2 + (4g_1\omega\rho + (-4pp_1\rho\omega - 2\rho p^2 + 4\rho + \\
& ((-2p^2\rho + 4\rho)\omega g_1 + (2\omega pp_1\rho + 2p^2\rho - 4\rho)g)g)g)g)g + \\
& (-2\rho^3 + (6\rho^3 + (2g^2\rho^3 - 6\rho^3)g^2)g^2)g^2b^2)b)b^3 + ((p^2 - 1)p^2\omega + \\
& ((-3 + (-2p^2 + 5)p^2)\omega + ((2 + (p^2 - 3)p^2)\omega + (-p^2 + 1)\omega \\
& g^2)g^2)g^2 + (-6\omega\rho^2 + (-6g^2\omega\rho^2 + 12\omega\rho^2)g^2)g^2b^2)b^2a_1 + (((p^2 - \\
& 1)p^2\omega + ((3 + (-2p^2 - 1)p^2)\omega + ((-4 + (p^2 + 3)p^2)\omega \\
& + (-p^2 + 1)\omega g^2)g^2)g^2)b_1 + ((-2p^2 + 2)p^2 - 2p_1p^3\omega + ((-2p^2 + 2)p^2\omega \\
& g_1 + ((4p^2 - 4)p^2 + (4p^2p_1 + 2p_1)p\omega + ((2 + (2p^2 - 4)p^2)\omega g_1 + (-2p^4 \\
& + 2 + (-2p^2p_1 - 4p_1)p\omega + ((-2p^2 + 2)\omega g_1 + (2\omega pp_1 + 2p^2 - 2)g)g)g)g \\
&)g)g + ((4\omega\rho^2 + (4g^2\omega\rho^2 - 8\omega\rho^2)g^2)g^2b_1 + (3p^2\rho^2 + (-9p^2\rho^2 - \\
& 3\rho^2 + (4g_1\omega\rho^2 + (9p^2\rho^2 + 9\rho^2 + (-4g_1\omega\rho^2 + (3g^2\rho^2 - 3p^2\rho^2 - \\
& 9\rho^2)g)g)g)g^2)b)b)b + ((-2p^2\rho - 6\rho)\omega + ((4p^2\rho + (-2p^2\rho + 2\rho)\omega g^2) \\
& + 4\rho)\omega g^2)g^2b^2a_1 + (((-2\omega p^2\rho + ((2p^2\rho + 8\rho)\omega + ((2p^2\rho - 12 \\
& \rho)\omega + (-2p^2\rho + 4\rho)\omega g^2)g^2)g^2)b_1 + (4\rho p^2 + (4g_1\omega p^2\rho + \\
& (4pp_1\rho\omega - 4\rho p^2 - 4\rho + (-8pp_1\rho\omega - 4\rho p^2 + 12\rho + ((-4p^2\rho + \\
& 8\rho)\omega g_1 + (4\omega pp_1\rho + 4p^2\rho - 8\rho)g)g)g^2)g)g + (-6\rho^3 + (18\rho^3 + (6g^2\rho^3 - \\
& 18\rho^3)g^2)g^2)g^2b^2)b)b + ((p^2 - 1)p^2\omega + ((1 + (-2p^2 + 1)p^2)\omega + ((-2 + \\
& (p^2 + 1)p^2)\omega + (-p^2 + 1)\omega g^2)g^2)g^2 + (-4\omega\rho^2 + (-4g^2\omega\rho^2 + 8\omega\rho^2)g^2)g^2b^2 \\
&)a_1 + ((-p^2 + 1)p^2 - p_1p^3\omega + ((-p^2 + 1)p^2\omega g_1 + (-1 + (2p^2 - 1)p^2 + (2p^2 \\
& p_1 + p_1)p\omega + ((p^4 - 1)\omega g_1 + (2 + (-p^2 - 1)p^2 + (-p^2p_1 - 2p_1)p\omega + ((\\
& - p^2 + 1)\omega g_1 + (\omega pp_1 + p^2 - 1)g)g)g)g)g)g + ((6\omega\rho^2 + (6g^2\omega \\
& \rho^2 - 12\omega\rho^2)g^2)g^2b_1 + (3p^2\rho^2 + (-9p^2\rho^2 - 9\rho^2 + (-4 \\
& g_1\omega\rho^2 + (9p^2\rho^2 + 21\rho^2 + (4g_1\omega\rho^2 + (3g^2\rho^2 - 3p^2 \\
& \rho^2 - 15\rho^2)g)g)g)g^2)b)b + (-\omega p^2\rho + (3\omega\rho + ((3p^2\rho \\
& - 6\rho)\omega + (-2p^2\rho + 3\rho)\omega g^2)g^2)g^2)a_1 + (2\rho p^2 + (2g_1 \\
& \omega p^2\rho + (2pp_1\rho\omega - 2\rho p^2 - 4\rho + (-4g_1\omega\rho + (-4pp_1 \\
& \rho\omega - 2\rho p^2 + 8\rho + ((-2p^2\rho + 4\rho)\omega g_1 + (2\omega pp_1\rho \\
& + 2p^2\rho - 4\rho)g)g)g)g)g)g + (-6\rho^3 + (18\rho^3 + (6g^2\rho^3 - 18\rho^3) \\
& g^2)g^2)g^2b^2 + (2\omega\rho^2 + (2g^2\omega\rho^2 - 4\omega\rho^2)g^2)g^2a_1 \\
& + (p^2\rho^2 + (-3p^2\rho^2 - 5\rho^2 + (-4g_1\omega\rho^2 + (3p^2\rho^2 + 11\rho^2 \\
& + (4g_1\omega\rho^2 + (g^2\rho^2 - p^2\rho^2 - 7\rho^2)g)g)g)g)g^2 + (-2\rho^3 \\
& + (6\rho^3 + (2g^2\rho^3 - 6\rho^3)g^2)g^2)g^2a)a)a)a)a)a)/\rho/((- \omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p^2 + (-\omega + ((3p^2 - 2)\omega + (-2p^2 + 3)\omega g^2)g^2)b_1 + (p^2 + (2p^2\omega \\
& g_1 + (2p_1p\omega + 1 + (4\omega g_1 + (-4p_1p\omega - 3p^2 + 2 + ((-2p^2 + 4)\omega g_1 \\
& + (2\omega pp_1 + 2p^2 - 3)g)g)g)g)g + (-2\rho^2 + (6\rho^2 + (2g^2\rho^2 - 6\rho^2 \\
&)g^2)g^2)g^2b^2)b)b^4 + (-2\omega\rho + (-2g^2\omega\rho + 4\omega\rho)g^2)g^2 \\
& b^5a_1 + (((6\omega\rho + (6g^2\omega\rho - 12\omega\rho)g^2)g^2b_1 + (-6\rho \\
& + (-8g_1\omega\rho + (12\rho + (8g_1\omega\rho - 6g\rho)g)g)g)g^2b)b^4 + (-2\omega \\
& p^2 + ((2p^2 - 4)\omega + (2\omega p^2 + (-2p^2 + 4)\omega g^2)g^2)g^2)b^3a_1 + ((((- \\
& 2p^2 + 6)\omega + ((4p^2 - 8)\omega + (-2p^2 + 2)\omega g^2)g^2)g^2b_1 + (2p^2 + (4p^2 \\
& \omega g_1 + (4p_1p\omega - 2 + (-8p_1p\omega - 6p^2 + 8 + ((-4p^2 + 8)\omega g_1 + (4\omega p \\
& p_1 + 4p^2 - 6)g)g)g^2)g)g + (-6\rho^2 + (18\rho^2 + (6g^2\rho^2 - 18\rho^2)g^2)g^2)g^2 \\
& b^2)b)b^2 + (4\omega\rho + (4g^2\omega\rho - 8\omega\rho)g^2)g^2b^3a_1 + (((4 \\
& \omega\rho + (4g^2\omega\rho - 8\omega\rho)g^2)g^2b_1 + (-12\rho + (-16g_1\omega \\
& \rho + (24\rho + (16g_1\omega\rho - 12g\rho)g)g)g)g^2b)b^2 + (-2\omega p^2 + ((\\
& 2p^2 + 4)\omega + ((2p^2 - 8)\omega + (-2p^2 + 4)\omega g^2)g^2)g^2)ba_1 + ((\omega p^2 \\
& + ((-2p^2 - 1)\omega + ((p^2 + 2)\omega - \omega g^2)g^2)g^2)b_1 + (p^2 + (2p^2\omega g_1 \\
& + (2p_1p\omega - 3 + (-4\omega g_1 + (-4p_1p\omega - 3p^2 + 6 + ((-2p^2 + 4)\omega g_1 + (2 \\
& \omega pp_1 + 2p^2 - 3)g)g)g)g)g + (-6\rho^2 + (18\rho^2 + (6g^2\rho^2 - 18\rho^2)g^2 \\
&)g^2)g^2b^2)b + (6\omega\rho + (6g^2\omega\rho - 12\omega\rho)g^2)g^2ba_1 + (\\
& (-2\omega\rho + (-2g^2\omega\rho + 4\omega\rho)g^2)g^2b_1 + (-6\rho + (-8g_1 \\
& \omega\rho + (12\rho + (8g_1\omega\rho - 6g\rho)g)g)g)g^2b + (-2\rho^2 + (6\rho^2 \\
& + (2g^2\rho^2 - 6\rho^2)g^2)g^2)g^2ba)a)a)a)a)a).
\end{aligned}$$

B ALGORITMIZACE METODY NÁVRHU PI REGULÁTORU PRO ŘÍZENÍ RYCHLOSTI STEJNOSMĚRNÉHO MOTORU

Účelem tohoto programu je automatické řešení metody návrhu PI regulátoru pro řízení rychlosti stejnosměrného motoru. Program byl vytvořen v programovacím jazyce Matlab s verzí R2016b.

```
clear variables;
close all;

w=[0.0001:0.0005:8];
w = w';
ss = tf('s');
wc = 1;
sss = tf('s');

kPWM = 1;
Ra = 1; % Ohm
La = 0.5; %H
Jeq = 0.02; %kg* m^2
kT = 0.01; %N* m/ Amp
bb = 0.1; % N*m*s
te = La/Ra;
kIp = 1;
kI = kIp/te;

P = (kI*kPWM/(Ra*ss + kI*kPWM))*(kT/(Jeq*ss + bb));
index = 1;
% Cell array of colors
C = {'b','r','g','g','y',[.5 .6 .7],[.8 .2 .6]};

% gamma iteration
for gamma = [0.1 0.5 1]
    a =(kI.*kPWM.*kT.*(- Jeq.*Ra.*w.^2 + bb.*kI.* ...
        kPWM))./(((Jeq.^2.*w.^2 + bb.^2).*...
        (Ra.^2.*w.^2 + kI.^2.*kPWM.^2));
    b =-(kI.*kPWM.*kT.*w.*(Ra.*bb + Jeq.*kI.*kPWM))...
```

```

        ./((Jeq.^2.*w.^2 + bb.^2).*(Ra.^2.*w.^2 + ...
        kI.^2.*kPWM.^2));
a1 = -(2.*kI.*kPWM.*kT.*w.*(- Jeq.^3.*Ra.^3.*...
        w.^4 + 2.*Jeq.^2.*Ra.^2.*bb.*kI.*kPWM.* ...
        w.^2 + Jeq.^2.*bb.*kI.^3.*kPWM.^3 + Jeq.* ...
        Ra.*bb.^2.*kI.^2.*kPWM.^2 + Ra.^2.*bb.^3.* ...
        kI.*kPWM))./((Jeq.^2.*w.^2 + bb.^2).^2.* ...
        (Ra.^2.*w.^2 + kI.^2.*kPWM.^2).^2);
b1 = (kI.*kPWM.*kT.*(Ra.*bb + Jeq.*kI.*kPWM).* ...
        (3.*Jeq.^2.*Ra.^2.*w.^4 + Jeq.^2.*kI.^2.* ...
        kPWM.^2.*w.^2 + Ra.^2.*bb.^2.*w.^2 - bb.^2 ...
        .*kI.^2.*kPWM.^2))./((Jeq.^2.*w.^2 + ...
        bb.^2).^2.*(Ra.^2.*w.^2 + kI.^2.*kPWM.^2).^2);

% filter (weighting function) V

% 3rd order Butterworth filter
p = 1./sqrt((w./wc).^6 + 1);
p1 = (-3.*(w./wc).^5)./(sqrt((w./wc).^6 + 1)).^(3);
p = p./sqrt(gamma);
p1 = p1./sqrt(gamma);

% 2nd order Butterworth filter
p = 1./sqrt((w./wc).^4 + 4.*(w./wc).^2 + 1);
p1 = -2.*((w./wc).^3+2.*(w./wc))./(sqrt((w./...
        wc).^4 + 4.*(w./wc).^2 + 1)).^(3));
p = p./sqrt(gamma);
p1 = p1./sqrt(gamma);

% 1st order Butterworth filter
p = 1./sqrt((w./wc).^2 + 1);
p1 = -(w./wc)./(sqrt((w./wc).^2 + 1)).^(3);
p = p./sqrt(gamma);
p1 = p1./sqrt(gamma);

% filter (weighting function) W
g = 0.*abs(w); % get zeros with dim
g1 = 0.*abs(w); % get zeros with dim

```

```

% Coefficients of 4th order polynom
[c4, c3, c2, c1, c0] = Get4thOrderPolyCoeff(a, ...
      a1, b, b1, p, p1, g, g1, w);

% one solution, length of solution, [k,d,i] of sol
solves = zeros(4,4*length(w),3);
last = [0 0 0 0];
% how max distance could points have between
% themself to be coupled
maxLenBetw = 0.2;
counter = 0;
counter2 = 0;
% Find numerically roots of 2nd and 4th order
% polynom and sort them
for i = 1:length(w)
    r4k = roots([c4(i),c3(i),c2(i),c1(i),c0(i)]));
    d4 = GetDFrom4thOrderPolyRoots( a(i), ...
      a1(i), b(i), b1(i), p(i), p1(i), ...
      g(i), g1(i), r4k, w(i));
    indexes = find(real(r4k) > 0 & imag(r4k) ...
      == 0 & real(d4) > 0 & imag(d4) == 0);
    if isempty(indexes)
        continue;
    end
    % at least one of four possible solution is
    % empty
    if ~isempty(last(last==0))
        % all solutions are empty
        if isempty(last(last~=0))
            for j = 1:length(indexes)
                last(j) = last(j) + 1;
                solves(j,last(j),1)= ...
                    r4k(indexes(j));
                solves(j,last(j),2)=d4(indexes(j));
                solves(j,last(j),3)=i;
            end
        else
            %match what can be matched if something
            %left take it to empty solution

```

```

matched = -ones(1,length(indexes));
for j = 1:length(indexes)
    if matched(j) == 1
        continue;
    end
    for m = 1:length(last(last~=0))
        if sqrt((solves(m,last(m),1)...
            -r4k(indexes(j)))^2+...
            (solves(m,last(m),1)*...
            solves(m,last(m),2)-...
            r4k(indexes(j))* ...
            d4(indexes(j)))^2) ...
            < maxLenBetw
            matched(j) = 1;
            last(m) = last(m) + 1;
            solves(m,last(m),1)=...
                r4k(indexes(j));
            solves(m,last(m),2)=...
                d4(indexes(j));
            solves(m,last(m),3)=i;
        end
    end
end

% if something left unmatched from
% previos action
if ~isempty(matched(matched == -1))
    mi = length(last(last~=0)) + 1;

    for m = mi:length(last)
        ji = find(matched == -1);
        if isempty(ji)
            break;
        end

        matched(ji(1)) = 1; %take first
        last(m) = last(m) + 1;
        solves(m,last(m),1)=...
            r4k(indexes(ji(1)));
    end
end

```

```

            solves(m,last(m),2)=...
                d4(indexes(ji(1)));
            solves(m,last(m),3)=i;
        end
    end
end
else
    matched = -ones(length(indexes),1);
    for j = 1:length(indexes)
        if matched(j) == 1
            continue;
        end
        for m = 1:length(last)
            if sqrt((solves(m,last(m),1)-...
                r4k(indexes(j)))^2 + ...
                (solves(m,last(m),1)*...
                solves(m,last(m),2)- ...
                r4k(indexes(j)))*...
                d4(indexes(j)))^2) < maxLenBetw
                matched(j) = 1;
                last(m) = last(m) + 1;
                solves(m,last(m),1)=...
                    r4k(indexes(j));
                solves(m,last(m),2)=...
                    d4(indexes(j));
                solves(m,last(m),3)=i;
            end
        end
    end
end
end
end
figure(1);
hold on;

%% draw solution
colorCustom = rand(1,3);
for m = 1:length(last)
    plot(solves(m,1:last(m),1).*solves(m, ...
        1:last(m),2),solves(m,1:last(m),1), ...)

```



```

        'color',C{index});
end
h(index) = plot(solves(1,1,1).*solves(1,1,2), ...
               solves(1,1,1),'color',C{index});
index = index + 1;

%% geometric representation check
if index > 2
    continue;
end
figure(2)
indexPlot = int32([ (last(1)/10 + 1) ...
                  (2*last(1)/10 + 1) (3*last(1)/10 + 1) ...
                  (4*last(1)/10 + 1) (5*last(1)/10 + 1) ...
                  (6*last(1)/10 + 1) (7*last(1)/10 + 1) ...
                  (8*last(1)/10 + 1) (9*last(1)/10 + 1) ...
                  last(1)]);
indexNormal = solves(1,indexPlot,3);
CC = solves(1,indexPlot,1) + solves(1, ...
    indexPlot,1).*solves(1,indexPlot,2)/ss;
L = CC*P;
centers = [1./(g(indexNormal).^2 - 1) ...
           0.*g(indexNormal)];
radii = (1 - (g(indexNormal).^2 - 1).*...
        (p(indexNormal).^2 - 1)) ...
        ./((g(indexNormal).^2-1).^2);
radii = radii.^(1/2);

    teta=-pi:0.05:pi + 0.05;
    x=radii.*cos(teta) + centers(:,1);
    y=radii.*sin(teta) + centers(:,2);
    z=w(indexNormal);
    hold on;
    for j = 1:length(indexPlot)
        plot3(x(j,:),y(j,:),z(j,:).*...
              ones(length(y(j,:))), 'r');
    end

xlabel('Re');

```

```

ylabel('Im');
xlabel('\omega');
%viscircles(centers,radii,'Color','r');
H = freqresp(L,w(indexNormal));
H = diag(squeeze(H));
plot3(real(H),imag(H), z,'g');
plot3(real(H),imag(H), z,'g*');
end
figure(1)
legend(h,'\gamma = 0.1', '\gamma = 0.5', '\gamma = 1.0');
xlabel('k_i');
ylabel('k');

ww = 0.001:0.001:10000;

W = tf(1,[1/wc 1]);
W = 1/((sss + 1)*(sss^2 + sss + 1));
W = 1/(sss^2 + sqrt(2).*sss + 1);
WW = squeeze(freqresp(W,ww));

% check regions manually by chosing an internal point
for i = 1:3
    [x,y] = ginput(1);
    kI_in = x
    k_in = y
    CC = tf([k_in kI_in],[1 0]);
    L = CC*P;
    LL = freqresp(L,ww);
    LL = squeeze(LL);
    S = (1 + LL).^(-1);
    Krit = abs(S.*WW).^2;
    max(Krit);
    figure(2);
    closedloop_rhp_poles = nyqlog(L);
    figure(1);
    % check criterion and nyquist stability condition
    if max(Krit) < gamma && closedloop_rhp_poles <= 0
        plot(x,y,'go')
    else

```

```

        plot(x,y,'ro')
    end
end

function d = GetDFFrom4thOrderPolyRoots( a, a1, b, ...
                                          b1, p, p1, g, g1, rho, w)
d = w.*(rho.^2.*a.^4+rho.^2.*b.^4+2.*...
    rho.*a.^3+2.*rho.*a.*b.^2.*g.*g1.*w+...
    2.*rho.*a.*b.*b1.*g.^2.*w+2.*rho.^2.*...
    a.^2.*b.^2.*g.^4-4.*rho.^2.*a.^2.*b.^2.*...
    g.^2-2.*rho.*a.*b.^2.*g.^2-rho.*a.^2.*a1.*...
    w+rho.*a1.*b.^2.*w+2.*rho.*a.^3.*g.*g1.*w+...
    rho.*a.^2.*a1.*g.^2.*w-rho.*a1.*b.^2.*...
    g.^2.*w-2.*rho.*a.*b.*b1.*w+a.^2.*g.*g1.*...
    w-a.^2.*w.*p.*p1+a.*a1.*g.^2.*w+a.*a1.*...
    w.*p.^2+b.^2.*g.*g1.*w-b.^2.*w.*p.*p1+b.*...
    b1.*g.^2.*w+b.*b1.*w.*p.^2+a.^2.*g.^2.*w.*...
    p.*p1-a.^2.*g.*g1.*w.*p.^2-a.*a1.*g.^2.*w.*...
    p.^2+b.^2.*g.^2.*w.*p.*p1-b.^2.*g.*g1.*w.*...
    p.^2-b.*b1.*g.^2.*w.*p.^2+rho.^2.*b.^4.*...
    g.^4-2.*rho.^2.*a.^4.*g.^2-2.*rho.^2.*...
    b.^4.*g.^2+2.*rho.^2.*a.^2.*b.^2-2.*rho.*...
    a.^3.*g.^2+2.*rho.*a.*b.^2+rho.^2.*a.^4.*...
    g.^4-a.^2.*p.^2-b.^2.*p.^2-a.*a1.*w-b.*b1.*...
    w+a.^2+b.^2+a.^2.*g.^2.*p.^2+b.^2.*g.^2.*...
    p.^2-a.^2.*g.^2-b.^2.*g.^2)./(rho.*(-2.*...
    a.^2.*b.*g.*g1.*w+a.^2.*b1.*g.^2.*w-2.*...
    a.*a1.*b.*g.^2.*w-2.*b.^3.*g.*g1.*w-b.^...
    2.*b1.*g.^2.*w+a.^2.*b.*g.^2+b.^3.*g.^...
    2-a.^2.*b1.*w+2.*a.*a1.*b.*w+b.^2.*b1.*...
    w-a.^2.*b-b.^3));
end

```

```

function [ c4, c3, c2, c1, c0 ] = ...
    Get4thOrderPolyCoeff( a, a1, b, b1, p, ...
                          p1, g, g1, w )
c4=a.^8.*g.^8+4.*a.^6.*b.^2.*g.^8+ ...
    6.*a.^4.*b.^4.*g.^8+4.*a.^2.*b.^6.*g.^8+ ...
    b.^8.*g.^8-4.*a.^8.*g.^6-16.*a.^6.*b.^2.* ...

```

$$\begin{aligned}
&g.^6-24.*a.^4.*b.^4.*g.^6-16.*a.^2.* \dots \\
&b.^6.*g.^6-4.*b.^8.*g.^6+6.*a.^8.*g.^4+ \dots \\
&24.*a.^6.*b.^2.*g.^4+36.*a.^4.*b.^4.* \dots \\
&g.^4+24.*a.^2.*b.^6.*g.^4+6.*b.^8.* \dots \\
&g.^4-4.*a.^8.*g.^2-16.*a.^6.*b.^2.* \dots \\
&g.^2-24.*a.^4.*b.^4.*g.^2-16.*a.^2.* \dots \\
&b.^6.*g.^2-4.*b.^8.*g.^2+a.^8+4.*a.^6.* \dots \\
&b.^2+6.*a.^4.*b.^4+4.*a.^2.*b.^6+b.^8;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c3= &4.*a.^7.*g.^5.*g1.*w+2.*a.^6.*a1.*g.^6.*w+ \dots \\
&12.*a.^5.*b.^2.*g.^5.*g1.*w+4.*a.^5.*b.* \dots \\
&b1.*g.^6.*w+2.*a.^4.*a1.*b.^2.*g.^6.*w+12.* \dots \\
&a.^3.*b.^4.*g.^5.*g1.*w+8.*a.^3.*b.^3.*b1.* \dots \\
&g.^6.*w-2.*a.^2.*a1.*b.^4.*g.^6.*w+4.*a.* \dots \\
&b.^6.*g.^5.*g1.*w+4.*a.*b.^5.*b1.*g.^6.* \dots \\
&w-2.*a1.*b.^6.*g.^6.*w-4.*a.^7.*g.^6-12.* \dots \\
&a.^5.*b.^2.*g.^6-12.*a.^3.*b.^4.*g.^6-4.* \dots \\
&a.*b.^6.*g.^6-8.*a.^7.*g.^3.*g1.*w-6.* \dots \\
&a.^6.*a1.*g.^4.*w-24.*a.^5.*b.^2.*g.^3.* \dots \\
&g1.*w-12.*a.^5.*b.*b1.*g.^4.*w-6.*a.^4.* \dots \\
&a1.*b.^2.*g.^4.*w-24.*a.^3.*b.^4.*g.^3.* \dots \\
&g1.*w-24.*a.^3.*b.^3.*b1.*g.^4.*w+6.* \dots \\
&a.^2.*a1.*b.^4.*g.^4.*w-8.*a.*b.^6.*g.^3.* \dots \\
&g1.*w-12.*a.*b.^5.*b1.*g.^4.*w+6.*a1.* \dots \\
&b.^6.*g.^4.*w+12.*a.^7.*g.^4+36.*a.^5.* \dots \\
&b.^2.*g.^4+36.*a.^3.*b.^4.*g.^4+12.*a.* \dots \\
&b.^6.*g.^4+4.*a.^7.*g.*g1.*w+6.*a.^6.*a1.* \dots \\
&g.^2.*w+12.*a.^5.*b.^2.*g.*g1.*w+12.*a.^5.* \dots \\
&b.*b1.*g.^2.*w+6.*a.^4.*a1.*b.^2.*g.^2.*w \dots \\
&+12.*a.^3.*b.^4.*g.*g1.*w+24.*a.^3.*b.^3.* \dots \\
&b1.*g.^2.*w-6.*a.^2.*a1.*b.^4.*g.^2.*w+4.* \dots \\
&a.*b.^6.*g.*g1.*w+12.*a.*b.^5.*b1.*g.^2.* \dots \\
&w-6.*a1.*b.^6.*g.^2.*w-12.*a.^7.*g.^2-36.* \dots \\
&a.^5.*b.^2.*g.^2-36.*a.^3.*b.^4.*g.^2-12.* \dots \\
&a.*b.^6.*g.^2-2.*a.^6.*a1.*w-4.*a.^5.*b.* \dots \\
&b1.*w-2.*a.^4.*a1.*b.^2.*w-8.*a.^3.*b.^3.* \dots \\
&b1.*w+2.*a.^2.*a1.*b.^4.*w-4.*a.*b.^5.*b1.* \dots \\
&w+2.*a1.*b.^6.*w+4.*a.^7+12.*a.^5.*b.^2+ \dots \\
&12.*a.^3.*b.^4+4.*a.*b.^6;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c2 = & 2 \cdot a^6 \cdot g^6 \cdot w \cdot p \cdot p1 - 2 \cdot a^6 \cdot g^5 \cdot g1 \cdot \dots \\
& w \cdot p^2 - 2 \cdot a^5 \cdot a1 \cdot g^6 \cdot w \cdot p^2 + 6 \cdot a^4 \cdot \dots \\
& b^2 \cdot g^6 \cdot w \cdot p \cdot p1 - 6 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot g^5 \cdot \dots \\
& g1 \cdot w \cdot p^2 - 2 \cdot a^4 \cdot b \cdot b1 \cdot g^6 \cdot w \cdot p^2 - \dots \\
& 4 \cdot a^3 \cdot a1 \cdot b^2 \cdot g^6 \cdot w \cdot p^2 + 6 \cdot a^2 \cdot \dots \\
& b^4 \cdot g^6 \cdot w \cdot p \cdot p1 - 6 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot g^5 \cdot \dots \\
& g1 \cdot w \cdot p^2 - 4 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b1 \cdot g^6 \cdot w \cdot \dots \\
& p^2 - 2 \cdot a \cdot a1 \cdot b^4 \cdot g^6 \cdot w \cdot p^2 + 2 \cdot \dots \\
& b^6 \cdot g^6 \cdot w \cdot p \cdot p1 - 2 \cdot b^6 \cdot g^5 \cdot g1 \cdot w \cdot \dots \\
& p^2 - 2 \cdot b^5 \cdot b1 \cdot g^6 \cdot w \cdot p^2 + 2 \cdot a^6 \cdot \dots \\
& g^6 \cdot p^2 + 6 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot g^6 \cdot p^2 + 6 \cdot \dots \\
& a^2 \cdot b^4 \cdot g^6 \cdot p^2 + 2 \cdot b^6 \cdot g^6 \cdot p^2 + \dots \\
& 2 \cdot a^6 \cdot g^5 \cdot g1 \cdot w - 6 \cdot a^6 \cdot g^4 \cdot w \cdot p \cdot \dots \\
& p1 + 4 \cdot a^6 \cdot g^3 \cdot g1 \cdot w \cdot p^2 + 2 \cdot a^5 \cdot a1 \cdot \dots \\
& g^6 \cdot w + 6 \cdot a^5 \cdot a1 \cdot g^4 \cdot w \cdot p^2 + 6 \cdot \dots \\
& a^4 \cdot b^2 \cdot g^5 \cdot g1 \cdot w - 18 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot \dots \\
& g^4 \cdot w \cdot p \cdot p1 + 12 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot g^3 \cdot g1 \cdot \dots \\
& w \cdot p^2 + 2 \cdot a^4 \cdot b \cdot b1 \cdot g^6 \cdot w + 6 \cdot a^4 \cdot \dots \\
& b \cdot b1 \cdot g^4 \cdot w \cdot p^2 + 4 \cdot a^3 \cdot a1 \cdot b^2 \cdot \dots \\
& g^6 \cdot w + 12 \cdot a^3 \cdot a1 \cdot b^2 \cdot g^4 \cdot w \cdot p^2 + \dots \\
& 6 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot g^5 \cdot g1 \cdot w - 18 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot \dots \\
& g^4 \cdot w \cdot p \cdot p1 + 12 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot g^3 \cdot g1 \cdot \dots \\
& w \cdot p^2 + 4 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b1 \cdot g^6 \cdot w + 12 \cdot \dots \\
& a^2 \cdot b^3 \cdot b1 \cdot g^4 \cdot w \cdot p^2 + 2 \cdot a \cdot a1 \cdot \dots \\
& b^4 \cdot g^6 \cdot w + 6 \cdot a \cdot a1 \cdot b^4 \cdot g^4 \cdot w \cdot \dots \\
& p^2 + 2 \cdot b^6 \cdot g^5 \cdot g1 \cdot w - 6 \cdot b^6 \cdot g^4 \cdot \dots \\
& w \cdot p \cdot p1 + 4 \cdot b^6 \cdot g^3 \cdot g1 \cdot w \cdot p^2 + 2 \cdot \dots \\
& b^5 \cdot b1 \cdot g^6 \cdot w + 6 \cdot b^5 \cdot b1 \cdot g^4 \cdot w \cdot \dots \\
& p^2 - 2 \cdot a^6 \cdot g^6 - 6 \cdot a^6 \cdot g^4 \cdot p^2 + 4 \cdot \dots \\
& a^6 \cdot g^2 \cdot g1^2 \cdot w^2 + 4 \cdot a^5 \cdot a1 \cdot \dots \\
& g^3 \cdot g1 \cdot w^2 + a^4 \cdot a1^2 \cdot g^4 \cdot w^2 - \dots \\
& 6 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot g^6 - 18 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot g^4 \cdot \dots \\
& p^2 + 12 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot g^2 \cdot g1^2 \cdot w^2 + 4 \cdot \dots \\
& a^4 \cdot b \cdot b1 \cdot g^3 \cdot g1 \cdot w^2 + a^4 \cdot b1^2 \cdot \dots \\
& g^4 \cdot w^2 + 8 \cdot a^3 \cdot a1 \cdot b^2 \cdot g^3 \cdot g1 \cdot \dots \\
& w^2 + 2 \cdot a^2 \cdot a1^2 \cdot b^2 \cdot g^4 \cdot w^2 - 6 \cdot \dots \\
& a^2 \cdot b^4 \cdot g^6 - 18 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot g^4 \cdot \dots \\
& p^2 + 12 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot g^2 \cdot g1^2 \cdot w^2 + 8 \cdot \dots
\end{aligned}$$

$a.^2.*b.^3.*b1.*g.^3.*g1.*w.^2+2.*a.^2.*...$
 $b.^2.*b1.^2.*g.^4.*w.^2+4.*a.*a1.*b.^4.*...$
 $g.^3.*g1.*w.^2+a1.^2.*b.^4.*g.^4.*w.^2-2.*...$
 $b.^6.*g.^6-6.*b.^6.*g.^4.*p.^2+4.*b.^6.*...$
 $g.^2.*g1.^2.*w.^2+4.*b.^5.*b1.*g.^3.*g1.*...$
 $w.^2+b.^4.*b1.^2.*g.^4.*w.^2-12.*a.^6.*...$
 $g.^3.*g1.*w+6.*a.^6.*g.^2.*w.*p.*p1-2.*...$
 $a.^6.*g.*g1.*w.*p.^2-10.*a.^5.*a1.*g.^4.*...$
 $w-6.*a.^5.*a1.*g.^2.*w.*p.^2-28.*a.^4.*...$
 $b.^2.*g.^3.*g1.*w+18.*a.^4.*b.^2.*g.^2.*...$
 $w.*p.*p1-6.*a.^4.*b.^2.*g.*g1.*w.*...$
 $p.^2-14.*a.^4.*b.*b1.*g.^4.*w-6.*a.^4.*...$
 $b.*b1.*g.^2.*w.*p.^2-12.*a.^3.*a1.*b.^2.*...$
 $g.^4.*w-12.*a.^3.*a1.*b.^2.*g.^2.*w.*...$
 $p.^2-20.*a.^2.*b.^4.*g.^3.*g1.*w+18.*...$
 $a.^2.*b.^4.*g.^2.*w.*p.*p1-6.*a.^2.*...$
 $b.^4.*g.*g1.*w.*p.^2-20.*a.^2.*b.^3.*...$
 $b1.*g.^4.*w-12.*a.^2.*b.^3.*b1.*g.^2.*...$
 $w.*p.^2-2.*a.*a1.*b.^4.*g.^4.*w-6.*a.*...$
 $a1.*b.^4.*g.^2.*w.*p.^2-4.*b.^6.*g.^3.*...$
 $g1.*w+6.*b.^6.*g.^2.*w.*p.*p1-2.*b.^6.*...$
 $g.*g1.*w.*p.^2-6.*b.^5.*b1.*g.^4.*w-6.*...$
 $b.^5.*b1.*g.^2.*w.*p.^2+10.*a.^6.*g.^4+...$
 $6.*a.^6.*g.^2.*p.^2-4.*a.^5.*a1.*g.*g1.*...$
 $w.^2-2.*a.^4.*a1.^2.*g.^2.*w.^2+25.*...$
 $a.^4.*b.^2.*g.^4+18.*a.^4.*b.^2.*g.^2.*...$
 $p.^2-4.*a.^4.*b.*b1.*g.*g1.*w.^2-2.*a.^4.*...$
 $b1.^2.*g.^2.*w.^2-8.*a.^3.*a1.*b.^2.*g.*...$
 $g1.*w.^2-4.*a.^2.*a1.^2.*b.^2.*g.^2.*w.^2+...$
 $20.*a.^2.*b.^4.*g.^4+18.*a.^2.*b.^4.*g.^2.*...$
 $p.^2-8.*a.^2.*b.^3.*b1.*g.*g1.*w.^2-4.*...$
 $a.^2.*b.^2.*b1.^2.*g.^2.*w.^2-4.*a.*a1.*...$
 $b.^4.*g.*g1.*w.^2-2.*a1.^2.*b.^4.*g.^2.*...$
 $w.^2+5.*b.^6.*g.^4+6.*b.^6.*g.^2.*p.^2-4.*...$
 $b.^5.*b1.*g.*g1.*w.^2-2.*b.^4.*b1.^2.*...$
 $g.^2.*w.^2+10.*a.^6.*g.*g1.*w-2.*a.^6.*...$
 $w.*p.*p1+14.*a.^5.*a1.*g.^2.*w+2.*a.^5.*...$
 $a1.*w.*p.^2+22.*a.^4.*b.^2.*g.*g1.*w-6.*...$
 $a.^4.*b.^2.*w.*p.*p1+22.*a.^4.*b.*b1.*...$

$g.^2.*w+2.*a.^4.*b.*b1.*w.*p.^2+12.*...$
 $a.^3.*a1.*b.^2.*g.^2.*w+4.*a.^3.*a1.*...$
 $b.^2.*w.*p.^2+14.*a.^2.*b.^4.*g.*g1.*...$
 $w-6.*a.^2.*b.^4.*w.*p.*p1+28.*a.^2.*b.^3.*...$
 $b1.*g.^2.*w+4.*a.^2.*b.^3.*b1.*w.*p.^2-2.*...$
 $a.*a1.*b.^4.*g.^2.*w+2.*a.*a1.*b.^4.*w.*...$
 $p.^2+2.*b.^6.*g.*g1.*w-2.*b.^6.*w.*p.*...$
 $p1+6.*b.^5.*b1.*g.^2.*w+2.*b.^5.*b1.*w.*...$
 $p.^2-14.*a.^6.*g.^2-2.*a.^6.*p.^2+a.^4.*...$
 $a1.^2.*w.^2-32.*a.^4.*b.^2.*g.^2-6.*a.^4.*...$
 $b.^2.*p.^2+a.^4.*b1.^2.*w.^2+2.*a.^2.*...$
 $a1.^2.*b.^2.*w.^2-22.*a.^2.*b.^4.*g.^2-6.*...$
 $a.^2.*b.^4.*p.^2+2.*a.^2.*b.^2.*b1.^2.*...$
 $w.^2+a1.^2.*b.^4.*w.^2-4.*b.^6.*g.^2-2.*...$
 $b.^6.*p.^2+b.^4.*b1.^2.*w.^2-6.*a.^5.*a1.*...$
 $w-10.*a.^4.*b.*b1.*w-4.*a.^3.*a1.*b.^2.*...$
 $w-12.*a.^2.*b.^3.*b1.*w+2.*a.*a1.*b.^4.*...$
 $w-2.*b.^5.*b1.*w+6.*a.^6+13.*a.^4.*b.^2+...$
 $8.*a.^2.*b.^4+b.^6;$

$c1=4.*a.^5.*g.^3.*g1.*w.^2.*p.*p1-4.*a.^5.*...$
 $g.^2.*g1.^2.*w.^2.*p.^2+2.*a.^4.*a1.*g.^...$
 $4.*w.^2.*p.*p1-6.*a.^4.*a1.*g.^3.*g1.*w.^...$
 $2.*p.^2-2.*a.^3.*a1.^2.*g.^4.*w.^2.*p.^2+...$
 $8.*a.^3.*b.^2.*g.^3.*g1.*w.^2.*p.*p1-8.*...$
 $a.^3.*b.^2.*g.^2.*g1.^2.*w.^2.*p.^2+4.*a.^...$
 $3.*b.*b1.*g.^4.*w.^2.*p.*p1-8.*a.^3.*b.*...$
 $b1.*g.^3.*g1.*w.^2.*p.^2-4.*a.^2.*a1.*...$
 $b.^2.*g.^3.*g1.*w.^2.*p.^2-6.*a.^2.*a1.*...$
 $b.*b1.*g.^4.*w.^2.*p.^2+2.*a.*a1.^2.*b.^...$
 $2.*g.^4.*w.^2.*p.^2+4.*a.*b.^4.*g.^3.*...$
 $g1.*w.^2.*p.*p1-4.*a.*b.^4.*g.^2.*g1.^2.*...$
 $w.^2.*p.^2+4.*a.*b.^3.*b1.*g.^4.*w.^2.*p.*...$
 $p1-8.*a.*b.^3.*b1.*g.^3.*g1.*w.^2.*p.^2-4.*...$
 $a.*b.^2.*b1.^2.*g.^4.*w.^2.*p.^2-2.*a1.*...$
 $b.^4.*g.^4.*w.^2.*p.*p1+2.*a1.*b.^4.*g.^...$
 $3.*g1.*w.^2.*p.^2+2.*a1.*b.^3.*b1.*g.^4.*...$
 $w.^2.*p.^2-4.*a.^5.*g.^4.*w.*p.*p1+8.*a.^...$
 $5.*g.^3.*g1.*w.*p.^2+6.*a.^4.*a1.*g.^4.*w.*...$

$p.^2-8.*a.^3.*b.^2.*g.^4.*w.*p.*p1+16.*a.^...$
 $3.*b.^2.*g.^3.*g1.*w.*p.^2+8.*a.^3.*b.*b1.*...$
 $g.^4.*w.*p.^2+4.*a.^2.*a1.*b.^2.*g.^4.*w.*...$
 $p.^2-4.*a.*b.^4.*g.^4.*w.*p.*p1+8.*a.*b.^...$
 $4.*g.^3.*g1.*w.*p.^2+8.*a.*b.^3.*b1.*g.^...$
 $4.*w.*p.^2-2.*a1.*b.^4.*g.^4.*w.*p.^2-4.*...$
 $a.^5.*g.^4.*p.^2+4.*a.^5.*g.^2.*g1.^2.*w.^...$
 $2-4.*a.^5.*g.*g1.*w.^2.*p.*p1+6.*a.^4.*a1.*...$
 $g.^3.*g1.*w.^2-4.*a.^4.*a1.*g.^2.*w.^2.*p.*...$
 $p1+6.*a.^4.*a1.*g.*g1.*w.^2.*p.^2+2.*a.^3.*...$
 $a1.^2.*g.^4.*w.^2+4.*a.^3.*a1.^2.*g.^2.*w.^...$
 $2.*p.^2-8.*a.^3.*b.^2.*g.^4.*p.^2+8.*a.^3.*...$
 $b.^2.*g.^2.*g1.^2.*w.^2-8.*a.^3.*b.^2.*g.*...$
 $g1.*w.^2.*p.*p1+8.*a.^3.*b.*b1.*g.^3.*g1.*...$
 $w.^2-8.*a.^3.*b.*b1.*g.^2.*w.^2.*p.*p1+8.*...$
 $a.^3.*b.*b1.*g.*g1.*w.^2.*p.^2+4.*a.^2.*...$
 $a1.*b.^2.*g.^3.*g1.*w.^2+4.*a.^2.*a1.*b.^...$
 $2.*g.*g1.*w.^2.*p.^2+6.*a.^2.*a1.*b.*b1.*...$
 $g.^4.*w.^2+12.*a.^2.*a1.*b.*b1.*g.^2.*w.^...$
 $2.*p.^2-2.*a.*a1.^2.*b.^2.*g.^4.*w.^2-4.*...$
 $a.*a1.^2.*b.^2.*g.^2.*w.^2.*p.^2-4.*a.*b.^...$
 $4.*g.^4.*p.^2+4.*a.*b.^4.*g.^2.*g1.^2.*w.^...$
 $2-4.*a.*b.^4.*g.*g1.*w.^2.*p.*p1+8.*a.*b.^...$
 $3.*b1.*g.^3.*g1.*w.^2-8.*a.*b.^3.*b1.*g.^...$
 $2.*w.^2.*p.*p1+8.*a.*b.^3.*b1.*g.*g1.*w.^...$
 $2.*p.^2+4.*a.*b.^2.*b1.^2.*g.^4.*w.^2+8.*...$
 $a.*b.^2.*b1.^2.*g.^2.*w.^2.*p.^2-2.*a1.*...$
 $b.^4.*g.^3.*g1.*w.^2+4.*a1.*b.^4.*g.^2.*...$
 $w.^2.*p.*p1-2.*a1.*b.^4.*g.*g1.*w.^2.*p.^...$
 $2-2.*a1.*b.^3.*b1.*g.^4.*w.^2-4.*a1.*b.^...$
 $3.*b1.*g.^2.*w.^2.*p.^2-8.*a.^5.*g.^3.*...$
 $g1.*w+8.*a.^5.*g.^2.*w.*p.*p1-8.*a.^5.*...$
 $g.*g1.*w.*p.^2-6.*a.^4.*a1.*g.^4.*w-12.*...$
 $a.^4.*a1.*g.^2.*w.*p.^2-16.*a.^3.*b.^2.*...$
 $g.^3.*g1.*w+16.*a.^3.*b.^2.*g.^2.*w.*p.*...$
 $p1-16.*a.^3.*b.^2.*g.*g1.*w.*p.^2-8.*a.^...$
 $3.*b.*b1.*g.^4.*w-16.*a.^3.*b.*b1.*g.^2.*...$
 $w.*p.^2-4.*a.^2.*a1.*b.^2.*g.^4.*w-8.*a.^...$
 $2.*a1.*b.^2.*g.^2.*w.*p.^2-8.*a.*b.^4.*g.^...$

$3.*g1.*w+8.*a.*b.^4.*g.^2.*w.*p.*p1-8.*a.*...$
 $b.^4.*g.*g1.*w.*p.^2-8.*a.*b.^3.*b1.*g.^4.*...$
 $w-16.*a.*b.^3.*b1.*g.^2.*w.*p.^2+2.*a1.*b.^...$
 $4.*g.^4.*w+4.*a1.*b.^4.*g.^2.*w.*p.^2+4.*...$
 $a.^5.*g.^4+8.*a.^5.*g.^2.*p.^2-6.*a.^4.*...$
 $a1.*g.*g1.*w.^2+2.*a.^4.*a1.*w.^2.*p.*p1...$
 $-4.*a.^3.*a1.^2.*g.^2.*w.^2-2.*a.^3.*a1.^...$
 $2.*w.^2.*p.^2+8.*a.^3.*b.^2.*g.^4+16.*a.^...$
 $3.*b.^2.*g.^2.*p.^2-4.*a.^3.*b.*b1.*g.*...$
 $g1.*w.^2+4.*a.^3.*b.*b1.*w.^2.*p.*p1-2.*...$
 $a.^3.*b1.^2.*g.^2.*w.^2-8.*a.^2.*a1.*b.^...$
 $2.*g.*g1.*w.^2-6.*a.^2.*a1.*b.*b1.*g.^2.*...$
 $w.^2-6.*a.^2.*a1.*b.*b1.*w.^2.*p.^2+2.*a.*...$
 $a1.^2.*b.^2.*w.^2.*p.^2+4.*a.*b.^4.*g.^4+...$
 $8.*a.*b.^4.*g.^2.*p.^2-4.*a.*b.^3.*b1.*g.*...$
 $g1.*w.^2+4.*a.*b.^3.*b1.*w.^2.*p.*p1-6.*...$
 $a.*b.^2.*b1.^2.*g.^2.*w.^2-4.*a.*b.^2.*...$
 $b1.^2.*w.^2.*p.^2-2.*a1.*b.^4.*g.*g1.*w.^...$
 $2-2.*a1.*b.^4.*w.^2.*p.*p1+2.*a1.*b.^3.*...$
 $b1.*g.^2.*w.^2+2.*a1.*b.^3.*b1.*w.^2.*p.^...$
 $2+8.*a.^5.*g.*g1.*w-4.*a.^5.*w.*p.*p1+12.*...$
 $a.^4.*a1.*g.^2.*w+6.*a.^4.*a1.*w.*p.^2+12.*...$
 $a.^3.*b.^2.*g.*g1.*w-8.*a.^3.*b.^2.*w.*...$
 $p.*p1+16.*a.^3.*b.*b1.*g.^2.*w+8.*a.^3.*...$
 $b.*b1.*w.*p.^2+6.*a.^2.*a1.*b.^2.*g.^2.*w+...$
 $4.*a.^2.*a1.*b.^2.*w.*p.^2+4.*a.*b.^4.*g.*...$
 $g1.*w-4.*a.*b.^4.*w.*p.*p1+12.*a.*b.^3.*...$
 $b1.*g.^2.*w+8.*a.*b.^3.*b1.*w.*p.^2-2.*a1.*...$
 $b.^4.*g.^2.*w-2.*a1.*b.^4.*w.*p.^2-8.*a.^...$
 $5.*g.^2-4.*a.^5.*p.^2+2.*a.^3.*a1.^2.*w.^...$
 $2-14.*a.^3.*b.^2.*g.^2-8.*a.^3.*b.^2.*p.^...$
 $2+2.*a.^3.*b1.^2.*w.^2+2.*a.*a1.^2.*b.^2.*...$
 $w.^2-6.*a.*b.^4.*g.^2-4.*a.*b.^4.*p.^2+2.*...$
 $a.*b.^2.*b1.^2.*w.^2-6.*a.^4.*a1.*w-8.*a.^...$
 $3.*b.*b1.*w-2.*a.^2.*a1.*b.^2.*w-4.*a.*b.^...$
 $3.*b1.*w+4.*a.^5+6.*a.^3.*b.^2+2.*a.*b.^4;$

$c0=a.^4.*g.^4.*w.^2.*p.^2.*p1.^2-2.*a.^4.*g.^...$
 $3.*g1.*w.^2.*p.^3.*p1+a.^4.*g.^2.*g1.^2.*...$

$w.^2 * p.^{4-2} * a.^3 * a1 * g.^4 * w.^2 * p.^{\dots}$
 $3 * p1+2 * a.^3 * a1 * g.^3 * g1 * w.^2 * p.^4+ \dots$
 $a.^2 * a1.^2 * g.^4 * w.^2 * p.^4+2 * a.^2 * b.^{\dots}$
 $2 * g.^4 * w.^2 * p.^2 * p1.^2-4 * a.^2 * b.^2 * \dots$
 $g.^3 * g1 * w.^2 * p.^3 * p1+2 * a.^2 * b.^2 * \dots$
 $g.^2 * g1.^2 * w.^2 * p.^4-2 * a.^2 * b * b1 * \dots$
 $g.^4 * w.^2 * p.^3 * p1+2 * a.^2 * b * b1 * g.^{\dots}$
 $3 * g1 * w.^2 * p.^4-2 * a * a1 * b.^2 * g.^4 * \dots$
 $w.^2 * p.^3 * p1+2 * a * a1 * b.^2 * g.^3 * g1 * \dots$
 $w.^2 * p.^4+2 * a * a1 * b * b1 * g.^4 * w.^2 * \dots$
 $p.^4+b.^4 * g.^4 * w.^2 * p.^2 * p1.^2-2 * b.^{\dots}$
 $4 * g.^3 * g1 * w.^2 * p.^3 * p1+b.^4 * g.^2 * \dots$
 $g1.^2 * w.^2 * p.^4-2 * b.^3 * b1 * g.^4 * w.^2 * \dots$
 $p.^3 * p1+2 * b.^3 * b1 * g.^3 * g1 * w.^2 * p.^4+ \dots$
 $b.^2 * b1.^2 * g.^4 * w.^2 * p.^4+2 * a.^4 * g.^{\dots}$
 $4 * w * p.^3 * p1-2 * a.^4 * g.^3 * g1 * w * p.^4- \dots$
 $2 * a.^3 * a1 * g.^4 * w * p.^4+4 * a.^2 * b.^2 * \dots$
 $g.^4 * w * p.^3 * p1-4 * a.^2 * b.^2 * g.^3 * \dots$
 $g1 * w * p.^4-2 * a.^2 * b * b1 * g.^4 * w * p.^{\dots}$
 $4-2 * a * a1 * b.^2 * g.^4 * w * p.^4+2 * b.^4 * \dots$
 $g.^4 * w * p.^3 * p1-2 * b.^4 * g.^3 * g1 * w * \dots$
 $p.^4-2 * b.^3 * b1 * g.^4 * w * p.^4+a.^4 * g.^{\dots}$
 $4 * p.^4+2 * a.^4 * g.^3 * g1 * w.^2 * p * p1-2 * \dots$
 $a.^4 * g.^2 * g1.^2 * w.^2 * p.^2-2 * a.^4 * g.^{\dots}$
 $2 * w.^2 * p.^2 * p1.^2+2 * a.^4 * g * g1 * w.^2 * \dots$
 $p.^3 * p1+2 * a.^3 * a1 * g.^4 * w.^2 * p * p1-4 * \dots$
 $a.^3 * a1 * g.^3 * g1 * w.^2 * p.^2+4 * a.^3 * \dots$
 $a1 * g.^2 * w.^2 * p.^3 * p1-2 * a.^3 * a1 * g * \dots$
 $g1 * w.^2 * p.^4-2 * a.^2 * a1.^2 * g.^4 * w.^{\dots}$
 $2 * p.^2-2 * a.^2 * a1.^2 * g.^2 * w.^2 * p.^4+ \dots$
 $2 * a.^2 * b.^2 * g.^4 * p.^4+4 * a.^2 * b.^2 * \dots$
 $g.^3 * g1 * w.^2 * p * p1-4 * a.^2 * b.^2 * g.^{\dots}$
 $2 * g1.^2 * w.^2 * p.^2-4 * a.^2 * b.^2 * g.^2 * \dots$
 $w.^2 * p.^2 * p1.^2+4 * a.^2 * b.^2 * g * g1 * w.^{\dots}$
 $2 * p.^3 * p1+2 * a.^2 * b * b1 * g.^4 * w.^2 * p * \dots$
 $p1-4 * a.^2 * b * b1 * g.^3 * g1 * w.^2 * p.^2+4 * \dots$
 $a.^2 * b * b1 * g.^2 * w.^2 * p.^3 * p1-2 * a.^2 * \dots$
 $b * b1 * g * g1 * w.^2 * p.^4+2 * a * a1 * b.^2 * \dots$
 $g.^4 * w.^2 * p * p1-4 * a * a1 * b.^2 * g.^3 * \dots$

$g1.*w.^2.*p.^2+4.*a.*a1.*b.^2.*g.^2.*w.^2.*...$
 $p.^3.*p1-2.*a.*a1.*b.^2.*g.*g1.*w.^2.*p.^4-...$
 $4.*a.*a1.*b.*b1.*g.^4.*w.^2.*p.^2-4.*a.*...$
 $a1.*b.*b1.*g.^2.*w.^2.*p.^4+b.^4.*g.^4.*...$
 $p.^4+2.*b.^4.*g.^3.*g1.*w.^2.*p.*p1-2.*...$
 $b.^4.*g.^2.*g1.^2.*w.^2.*p.^2-2.*b.^4.*...$
 $g.^2.*w.^2.*p.^2.*p1.^2+2.*b.^4.*g.*g1.*...$
 $w.^2.*p.^3.*p1+2.*b.^3.*b1.*g.^4.*w.^2.*...$
 $p.*p1-4.*b.^3.*b1.*g.^3.*g1.*w.^2.*p.^2+...$
 $4.*b.^3.*b1.*g.^2.*w.^2.*p.^3.*p1-2.*b.^...$
 $3.*b1.*g.*g1.*w.^2.*p.^4-2.*b.^2.*b1.^2.*...$
 $g.^4.*w.^2.*p.^2-2.*b.^2.*b1.^2.*g.^2.*w.^...$
 $2.*p.^4-2.*a.^4.*g.^4.*w.*p.*p1+4.*a.^4.*g.^...$
 $3.*g1.*w.*p.^2-4.*a.^4.*g.^2.*w.*p.^3.*p1+...$
 $2.*a.^4.*g.*g1.*w.*p.^4+4.*a.^3.*a1.*g.^4.*...$
 $w.*p.^2+4.*a.^3.*a1.*g.^2.*w.*p.^4-4.*a.^2.*...$
 $b.^2.*g.^4.*w.*p.*p1+8.*a.^2.*b.^2.*g.^3.*...$
 $g1.*w.*p.^2-8.*a.^2.*b.^2.*g.^2.*w.*p.^3.*...$
 $p1+4.*a.^2.*b.^2.*g.*g1.*w.*p.^4+4.*a.^2.*...$
 $b.*b1.*g.^4.*w.*p.^2+4.*a.^2.*b.*b1.*g.^2.*...$
 $w.*p.^4+4.*a.*a1.*b.^2.*g.^4.*w.*p.^2+4.*...$
 $a.*a1.*b.^2.*g.^2.*w.*p.^4-2.*b.^4.*g.^4.*...$
 $w.*p.*p1+4.*b.^4.*g.^3.*g1.*w.*p.^2-4.*b.^...$
 $4.*g.^2.*w.*p.^3.*p1+2.*b.^4.*g.*g1.*w.*p.^...$
 $4+4.*b.^3.*b1.*g.^4.*w.*p.^2+4.*b.^3.*b1.*...$
 $g.^2.*w.*p.^4-2.*a.^4.*g.^4.*p.^2+a.^4.*...$
 $g.^2.*g1.^2.*w.^2-2.*a.^4.*g.^2.*p.^4-2.*...$
 $a.^4.*g.*g1.*w.^2.*p.*p1+a.^4.*w.^2.*p.^...$
 $2.*p1.^2+2.*a.^3.*a1.*g.^3.*g1.*w.^2-4.*...$
 $a.^3.*a1.*g.^2.*w.^2.*p.*p1+4.*a.^3.*a1.*...$
 $g.*g1.*w.^2.*p.^2-2.*a.^3.*a1.*w.^2.*p.^3.*...$
 $p1+a.^2.*a1.^2.*g.^4.*w.^2+4.*a.^2.*a1.^2.*...$
 $g.^2.*w.^2.*p.^2+a.^2.*a1.^2.*w.^2.*p.^4-...$
 $4.*a.^2.*b.^2.*g.^4.*p.^2+2.*a.^2.*b.^2.*...$
 $g.^2.*g1.^2.*w.^2-4.*a.^2.*b.^2.*g.^2.*p.^...$
 $4+2.*a.^2.*b.^2.*w.^2.*p.^2.*p1.^2+2.*a.^...$
 $2.*b.*b1.*g.^3.*g1.*w.^2-6.*a.^2.*b.*b1.*...$
 $g.^2.*w.^2.*p.*p1+2.*a.^2.*b.*b1.*g.*g1.*...$
 $w.^2.*p.^2-2.*a.^2.*b.*b1.*w.^2.*p.^3.*p1+...$

$a.^2.*b1.^2.*g.^2.*w.^2.*p.^2+2.*a.*a1.*b.^...$
 $2.*g.^3.*g1.*w.^2+4.*a.*a1.*b.^2.*g.*g1.*...$
 $w.^2.*p.^2-2.*a.*a1.*b.^2.*w.^2.*p.^3.*p1+...$
 $2.*a.*a1.*b.*b1.*g.^4.*w.^2+6.*a.*a1.*b.*...$
 $b1.*g.^2.*w.^2.*p.^2+2.*a.*a1.*b.*b1.*w.^...$
 $2.*p.^4-2.*b.^4.*g.^4.*p.^2+b.^4.*g.^2.*...$
 $g1.^2.*w.^2-2.*b.^4.*g.^2.*p.^4+2.*b.^4.*...$
 $g.*g1.*w.^2.*p.*p1+b.^4.*w.^2.*p.^2.*p1.^...$
 $2+2.*b.^3.*b1.*g.^3.*g1.*w.^2-2.*b.^3.*b1.*...$
 $g.^2.*w.^2.*p.*p1+2.*b.^3.*b1.*g.*g1.*w.^...$
 $2.*p.^2-2.*b.^3.*b1.*w.^2.*p.^3.*p1+b.^...$
 $2.*b1.^2.*g.^4.*w.^2+3.*b.^2.*b1.^2.*g.^...$
 $2.*w.^2.*p.^2+b.^2.*b1.^2.*w.^2.*p.^4-2.*...$
 $a.^4.*g.^3.*g1.*w+4.*a.^4.*g.^2.*w.*p.*p1...$
 $-4.*a.^4.*g.*g1.*w.*p.^2+2.*a.^4.*w.*p.^...$
 $3.*p1-2.*a.^3.*a1.*g.^4.*w-8.*a.^3.*a1.*g.^...$
 $2.*w.*p.^2-2.*a.^3.*a1.*w.*p.^4-4.*a.^2.*...$
 $b.^2.*g.^3.*g1.*w+6.*a.^2.*b.^2.*g.^2.*w.*...$
 $p.*p1-6.*a.^2.*b.^2.*g.*g1.*w.*p.^2+4.*a.^...$
 $2.*b.^2.*w.*p.^3.*p1-2.*a.^2.*b.*b1.*g.^4.*...$
 $w-8.*a.^2.*b.*b1.*g.^2.*w.*p.^2-2.*a.^2.*...$
 $b.*b1.*w.*p.^4-2.*a.*a1.*b.^2.*g.^4.*w-6.*...$
 $a.*a1.*b.^2.*g.^2.*w.*p.^2-2.*a.*a1.*b.^2.*...$
 $w.*p.^4-2.*b.^4.*g.^3.*g1.*w+2.*b.^4.*g.^...$
 $2.*w.*p.*p1-2.*b.^4.*g.*g1.*w.*p.^2+2.*b.^...$
 $4.*w.*p.^3.*p1-2.*b.^3.*b1.*g.^4.*w-6.*b.^...$
 $3.*b1.*g.^2.*w.*p.^2-2.*b.^3.*b1.*w.*p.^4+...$
 $a.^4.*g.^4+4.*a.^4.*g.^2.*p.^2+a.^4.*p.^4-...$
 $2.*a.^3.*a1.*g.*g1.*w.^2+2.*a.^3.*a1.*w.^...$
 $2.*p.*p1-2.*a.^2.*a1.^2.*g.^2.*w.^2-2.*a.^...$
 $2.*a1.^2.*w.^2.*p.^2+2.*a.^2.*b.^2.*g.^4+...$
 $7.*a.^2.*b.^2.*g.^2.*p.^2+2.*a.^2.*b.^2.*...$
 $p.^4+4.*a.^2.*b.*b1.*w.^2.*p.*p1-a.^2.*...$
 $b1.^2.*g.^2.*w.^2-a.^2.*b1.^2.*w.^2.*p.^2-...$
 $2.*a.*a1.*b.^2.*g.*g1.*w.^2-2.*a.*a1.*b.^...$
 $2.*w.^2.*p.*p1-2.*a.*a1.*b.*b1.*g.^2.*w.^...$
 $2-2.*a.*a1.*b.*b1.*w.^2.*p.^2+b.^4.*g.^4+...$
 $3.*b.^4.*g.^2.*p.^2+b.^4.*p.^4-b.^2.*b1.^...$
 $2.*g.^2.*w.^2-b.^2.*b1.^2.*w.^2.*p.^2+2.*...$

```

a.^4.*g.*g1.*w-2.*a.^4.*w.*p.*p1+4.*a.^3.*...
a1.*g.^2.*w+4.*a.^3.*a1.*w.*p.^2+2.*a.^2.*...
b.^2.*g.*g1.*w-2.*a.^2.*b.^2.*w.*p.*p1+4.*...
a.^2.*b.*b1.*g.^2.*w+4.*a.^2.*b.*b1.*w.*p.^...
2+2.*a.*a1.*b.^2.*g.^2.*w+2.*a.*a1.*b.^2.*...
w.*p.^2+2.*b.^3.*b1.*g.^2.*w+2.*b.^3.*b1.*...
w.*p.^2-2.*a.^4.*g.^2-2.*a.^4.*p.^2+a.^2.*...
a1.^2.*w.^2-3.*a.^2.*b.^2.*g.^2-3.*a.^2.*...
b.^2.*p.^2+a.^2.*b1.^2.*w.^2-b.^4.*g.^2-...
b.^4.*p.^2-2.*a.^3.*a1.*w-2.*a.^2.*b.*b1.*...
w+a.^4+a.^2.*b.^2;

```

end