

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

**Magnetický rovinný
manipulátor**

Plzeň 2017

Jindřich Wolf

**Místo této strany bude
zadání práce.**

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 21. srpna 2017

Jindřich Wolf

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu této bakalářské práce Prof. Ing. Miloši Schlegelovi, CSc. za odbornou pomoc, pořádnou dávku trpělivosti, ochotu a za poskytování cenných rad. Dále bych rád poděkoval rodině a přátelům za psychickou podporu.

Abstract

The purpose of this thesis is to simulate the control of a permanent magnet moving on the planar surface. Control of the magnet is realized by controlling a current that comes into three coils placed beneath a plane. These coils produce an electromagnetic field that creates forces which affect the permanent magnet. Whole system is idealized in order to use an equation that describe a force created between two dipoles. This procedure is described by a mathematical model of the system for which is designed a state feedback regulator. One of methods used to create this regulator was a method called an LQ regulator. Results of these calculations are realized in program Matlab and lately simulated in its superstructure Simulink.

Key words

Magnetic field, magnetic dipole, state space, state feedback, LQ regulator

Abstrakt

Cílem této práce je simulovat řízení permanentního magnetu po rovinné desce. Řízení probíhá pomocí ovládání vstupního proudu do tří cívek, které jsou uloženy pod deskou. Cívky následně vytvářejí elektromagnetické pole a tím dochází ke vzniku sil, které působí na magnet. Celá soustava je idealizovaná a popsání síly, které zde působí, vycházejí ze sil působících mezi dvěma dipóly. Tímto postupem je popsán matematický model systému, ke kterému je navržen stavový zpětnovazební regulátor. Při navrhování regulátoru byla použita mimo jiné i metoda LQ regulátoru. Výstup výpočtů je simulován v programovém prostředí Matlab a jeho nadstavbě Simulink.

Klíčová slova

Magnetické pole, magnetický dipól, stavový popis, stavová zpětná vazba, LQ regulátor

Obsah

1 Úvod	8
1.1 Magnetické pole	8
1.1.1 Vzájemné působení dvou dipólů	9
1.2 Lineární stavový regulátor	12
1.2.1 Říditelnost	12
1.2.2 Pozorovatelnost	12
1.2.3 Stavová zpětná vazba	13
1.2.4 Umístění pólů pomocí LQR	14
2 Matematický model	16
2.1 Systém	16
2.2 Regulátor	19
3 Simulace	23
4 Závěr	28
Literatura	30
A Schéma modelu v Simulinku	31

1 Úvod

V úvodu jsou probrány teoretické znalosti potřebné k porozumění praktické části semestrální práce.

1.1 Magnetické pole

Magnetické pole je fyzikální pole, které vzniká pohybem elektrického náboje. Vyskytuje se v okolí vodičů, kterými prochází elektrický proud (což je pohyb elektrického náboje), nebo v okolí permanentních magnetů, kde vzniká díky tzv. vázaným elektrickým proudům. Magnetické pole působí na okolí magnetickou silou.

Magnetická síla však působí jen na vybrané druhy látek. Vlastnost, díky které je látka ovlivňována magnetickou silou, je daná pohybem atomů v látce, který kolem sebe vytváří magnetické pole. Tyto elementární magnetické pole se skládají do výsledného magnetického pole atomu a pole těchto atomů, z kterých se daná látka skládá, vytváří výsledné magnetické pole látky. Tyto vlivy spolu s vlastnostmi magnetického pole vytvářejí výsledné účinky působícího magnetického pole. Veličina, která toto popisuje, se nazývá permeabilita. Výsledná hodnota permeability látky se odvíjí od permeability vakua, která má hodnotu:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$$

Výsledná hodnota permeability se určuje pomocí vzorce:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0,$$

kde μ_r je relativní permeabilita, která charakterizuje vlastnosti látky. Látky se pomocí relativní permeability dělí do tří skupin:

1. diamagnetické látky - látky, které zeslabují účinky magnetického pole a jejichž relativní permeabilita má hodnotu $\mu_r < 1$ nebo $\mu_r \approx 1$,
2. paramagnetické látky - látky, které zesilují účinky magnetického pole a jejichž relativní permeabilita má hodnotu $\mu_r > 1$ nebo $\mu_r \approx 1$,
3. feromagnetické látky - látky, které výrazně zesilují účinky magnetického pole a jejichž relativní permeabilita má hodnotu $\mu_r \gg 1$.

Feromagnetické látky jsou základem pro všechny permanentní magnety a jedná se např. o látky: železo, kobalt, měď nebo nikl.

Magnetické pole se tedy vytváří vlivem průchodu elektrického náboje vodičem. Vyjde-li se z předpokladu, že vodič je uzavřen ve smyčce a prochází ním proud I a smyčka uzavírá plochu o velikosti S , pak by byl výsledný magnetický moment popsán následujícím vztahem:

$$\vec{\mu} = I\vec{S} \quad (1.1)$$

Takto popsaný zdroj magnetického pole se nazývá magnetický dipól. Jako nejzákladnější magnetický dipól si lze představit např. atom, okolo jehož jádra obíhá elektron a tím vytváří proudovou smyčku. Je třeba si povšimnout, že magnetický moment je vektorová veličina, která má stejný směr jako normála orientované plochy S . Orientace normály plochy se určuje pomocí Ampérova pravidla pravé ruky. Pravidlo zní:

„Jestliže palec pravé ruky ukazuje směr elektrického proudu ve vodiči, pak pokrčené prsty ukazují orientaci magnetických indukčních čar.“[4]

Jestliže by byl vodič namotán na nějaký izolační prvek, tvořil by elektrotechnickou součástku, která se nazývá cívka. Pokud by byly závití cívky rovnoměrně rozležené, kruhového tvaru a délka vodiče by byla výrazně větší než průměr cívky, tak by bylo možné tuto cívku označit slovem solenoid, což je druh cívky splňující tyto požadavky. Při aplikaci Ampérova pravidla pravé ruky na solenoid je zapotřebí přidat do rovnice N , které popisuje počet závitů na cívce.

$$\vec{\mu} = NIS\vec{S} \quad (1.2)$$

1.1.1 Vzájemné působení dvou dipólů

Dipól umístěný v počátku souřadného systému působí na druhý dipól nebo el. nabitou částici umístěnou v bodě r , který je definován jako $[x, y, z]$, translační a rotační silou. Aby bylo možné vyjádřit tyto síly bude zaveden pojem magnetické indukce. Ta je definována jako vektorová fyzikální veličina charakterizující silové působení magnetického pole na vodič s proudem nebo el. nabitou částici. Fyzikálně lze tato veličina popsat vzorcem:

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, \vec{\mu}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[\frac{3\vec{r}(\vec{\mu}_1, \vec{r})}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{\mu}_1}{|\vec{r}|^3} \right], \quad (1.3)$$

kde $\vec{\mu}_1$ reprezentuje magnetický moment dipólu, \vec{r} značí polohu bodu, ke kterému je počítána magnetická indukce a μ_0 reprezentuje permeabilitu vakua.

V rovnici je použito značení $(\vec{\mu}_1, \vec{r})$, které reprezentuje skalární součin. Ten je pro připomenutí definován vztahem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha),$$

kde \vec{a} a \vec{b} jsou jednotlivé vektory a α značí úhel, který spolu svírají.

Vzorec (1.3) definuje magnetickou indukci vzhledem k nějakému bodu. Pokud by byl v daném bodě umístěn další magnetický dipól, působili by na sebe rotační a translační silou. Rotační síla se nazývá silovým momentem a je označována písmenem \vec{M} . V tomto případě je dána vztahem:

$$\vec{M} = \vec{\mu}_2 \times \vec{B},$$

kde $\vec{\mu}_2$ značí magnetický moment druhého (přidaného) dipólu a znak \times značí vektorový součin. Pro připomenutí je vektorový součin definovaný následujícím vztahem:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\alpha),$$

kde \vec{a} a \vec{b} opět značí jednotlivé vektory, α značí úhel mezi nimi a \vec{n} značí jednotkový vektor kolmý k oběma vektorům.

Výsledný silový moment, vyjádřený v závislosti na jednotlivých magnetických momentech μ_1 a μ_2 je definován jako:

$$\vec{M} = \vec{\mu}_2 \times \vec{B}(\vec{r}, \vec{\mu}_1) \quad (1.4)$$

Z definice vektorového součinu je patrné, že výsledný magnetický moment bude nulový pouze bude-li úhel mezi vektory magnetických momentů nulový, tedy pokud budou tyto vektory shodně orientované.

Translační síla působící mezi dvěma dipóly je definovaná jako:

$$\vec{F} = \vec{\mu}_2 \cdot \text{grad}[\vec{B}(\vec{r}, \vec{\mu}_1)], \quad (1.5)$$

kde \vec{B} vyjadřuje magnetickou indukci způsobenou jedním dipólem na bod ve vzdálenosti \vec{r} , do kterého je umístěn dipól s magnetickým momentem μ_2 . Zápis *grad* reprezentuje pojem gradient, který udává směr největšího růstu nebo také vektorové pole vyjadřující směr a velikost největší změny skalárního pole.

Z definice skalárního součinu plyne, že výsledná síla je nulová pokud úhel mezi oběma dipóly je kolmý. Existuje však i další varianta, kdy bude síla nulová a to tehdy, bude-li gradient magnetické indukce nulový. Matematicky je gradient definovaný vztahem:

$$\text{grad}\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k},$$

kde vektory \vec{i}, \vec{j} a \vec{k} reprezentují příslušné vektory ortonormální báze, tedy jednotkové vektory jednotlivých os x, y, z .

Pro zjištění, kdy gradient nabývá nulové hodnoty bude zavedena definice:
 „ Existuje-li k vektorovému poli $a(r)$ takové skalární pole $u(r)$, že $a = grad(u)$, pak vektorové pole $a(r)$ nazýváme potenciálním (konzervativním), skalární pole $u(r)$ potenciálem a hladiny tohoto pole ekvipotenciálními plochami (ekvipotenciálami).“[5]

K této definice se dále váže i věta o přírůstku, která zní:
 „ Přírůstek du hodnoty skalárního pole $u(x, y, z)$ při posunutí o infinitezimálně malý vektor $dr = dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k$ se vypočte skalárním součinem $du = grad(u) \cdot dr$.“[5]

Z toho plyne, že gradient skalárního pole je v každém bodě kolmý k jeho hladině. Důkaz vyplývající z těchto tvrzení vypadá následně: $u = konst \leftrightarrow du = 0 \leftrightarrow gradu \cdot dr = 0$. Z důkazu je patrné, že gradient nabývá nulových hodnot jen tehdy, je-li skalární pole u konstantní.

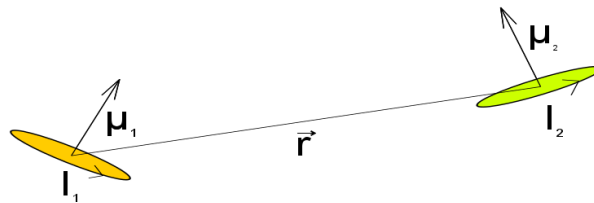
Aplikací tohoto důkazu na problém magnetických dipólů plyne, že $grad[\vec{B}(\vec{r}, \vec{\mu}_1)]$ je nulový právě tehdy, je-li konstantní (nebo-li homogenní). To by znamenalo, že má magnetické pole stejnou intenzitu v celém definičním prostoru. V reálných případech je tento jev nemožný, protože intenzita magnetického pole v prostoru slábne s rostoucí vzdáleností od zdroje.

Výsledný vztah translační síly působící mezi dvěma magnetickými dipóly o magnetických momentech μ_1 a μ_2 se získá matematickou úpravou vzorců (1.3) a (1.5). Vztah vypadá následovně:

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2) = \frac{3\mu_0}{4\pi|\vec{r}|^5} \left[(\vec{\mu}_1 \vec{r})\vec{\mu}_2 + (\vec{\mu}_2 \vec{r})\vec{\mu}_1 + (\vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2)\vec{r} - \frac{5(\vec{\mu}_1 \vec{r})(\vec{\mu}_2 \vec{r})}{|\vec{r}|^2} \vec{r} \right], \quad (1.6)$$

kde \vec{r} představuje vektor polohy popsany jako $[x, y, z]$, μ_0 reprezentuje výše zmíněnou permeabilitu vakua, μ_1 a μ_2 reprezentují momenty jednotlivých dipólů.

Pro snadnější pochopení následuje ilustrace popisující jedno z možných umístění, kde vektor \vec{r} reprezentuje vektor vzdálenosti, je definován jako $\vec{r} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$, kde souřadnice $[x_0, y_0, z_0]$ popisují souřadnice prvního dipólu a souřadnice $[x, y, z]$ popisují polohu druhého dipólu.



Obrázek 1.1: Grafické znázornění možného umístění dvou dipólů v prostoru. Jednotlivé plochy uzavřených smyček jsou reprezentovány barvami.

1.2 Lineární stavový regulátor

Pro použití lineárního stavového regulátoru je potřeba zavést lineární stavový popis systému. Aby bylo možné toto provést, musí být systém lineární a t-invariantní (LTI), říditelný a pozorovatelný.

Stavový popis pro spojitý systém bude vypadá následovně:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(t) &\in \mathbb{R}^n \\ u(t) &\in \mathbb{R}^m \\ y(t) &\in \mathbb{R}^p\end{aligned}\tag{1.7}$$

, kde $x(t)$ je stav systému, $u(t)$ reprezentuje vstup systému, $y(t)$ je výstup systému, A je matice vnitřních vazeb systému (neboli také matice dynamiky), B je matice vazeb systému na vstup, C je matice vazeb výstupu na stav a matice D je matice vstupu na výstup, která se často považuje za nulovou a tedy se ani neuvádí.

Pro návržení regulátoru pro takto popsany systém musí být splněná podmínka říditelnosti a pozorovatelnosti.

1.2.1 Říditelnost

„Systém (A, B) , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ je říditelný, jestliže pro libovolný počáteční stav x_0 existuje řízení u na konečném intervalu, které převádí stav x_0 do počátku stavového prostoru.“ [9]

Z této definice vyplývá věta, která říká, že výše zmíněný systém je říditelný právě tehdy, má-li matice říditelnosti systému plnou řádkovou hodnotu:

$$\text{rank}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n.$$

1.2.2 Pozorovatelnost

„Systém (A, B, C, D) respektive dvojici $(C \in \mathbb{R}^{p \times n}, A \in \mathbb{R}^{n \times n})$ nazýváme pozorovatelnou, jestliže libovolný počáteční stav x_0 v čase 0 lze rekonstruovat ze známého vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ na intervalu $[0, t_1]$ pro libovolný čas $t_1 > 0$.“ [9]

Z této definice vyplývá věta, že systém je pozorovatelný právě tehdy, jestliže má matice pozorovatelnosti systému plnou sloupcovou hodnotu:

$$\text{rank}\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^T = n.$$

1.2.3 Stavová zpětná vazba

Systém popsaný v bodě (1.7) může být sám o sobě stabilní, nestabilní či na mezi stability. Pro řízení takového systému se zavede zpětná vazba:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$u(t) = Fx(t)$$

, kde F je matice zpětné vazby, která zatím není známá. Dosazením zpětné vazby a úpravou obdržíme:

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$$

Cílem je nalézt matici F takovou, že $(A + BF)$ bude podobná volitelné matici L , ve které zvolíme pozici pólů výsledného systému. Podobnost zaručíme přiřazením Jordanovy formy.

Přiřazení Jordanovy formy

Matice A a L jsou podobné ($A \sim L$) právě tehdy, jestliže existuje regulární matice T , pro kterou platí, že $A = TLT^{-1}$.

Je důležité mít na paměti, že je nutné přiřadit Jordanovu formu a nikoliv pouze vlastní čísla, abychom zachovali všechny spektrální vlastnosti matice dynamiky L .

Aplikací přiřazení Jordanovy formy na zpětnou vazbu vyplyne:

$$A + BF = TLT^{-1}$$

$$AT - TL + BFT = 0$$

Pro další postup zavedeme substituci $H = FT$ a obdržíme:

$$AT - TL + BH = 0$$

Tato rovnice se nazývá Lyapunova rovnice a je numericky řešitelná, pokud bude známa hodnota parametru $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Jak je dokázáno v článku [10], řešení této maticové rovnice, kde platí, že $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$, je regulární pro skoro každou matici H . Výsledkem této rovnice je maticový parametr T , pomocí kterého lze vyjádřit matici F jako $F = HT^{-1}$. Jelikož je téměř zaručené, že matice T bude regulární, pak bude existovat i její inverze, čímž máme zaručené, že bude existovat hledaná matice F . [10]

Princip vnitřního modelu

Definice zní:

„Pro sledování obecného referenčního signálu $w(t)$ v ustáleném stavu regulovanou veličinou $y(t)$ resp. pro kompenzaci výstupní poruchy $v(t)$ je postačující, aby póly systému generujícího referenční signál resp. výstupní poruchu byly obsaženy v pólech otevřené regulační smyčky (buď jsou obsaženy v pólech systému nebo se musí stát součástí pólů regulátoru).“ [3]

Z této definice plyne, že pro regulaci na nulovou odchylku v ustáleném stavu je potřeba, aby byly póly generátoru vstupního systému obsaženy v otevřené regulační smyčce.

Pro sledování konstanty je zapotřebí přidat integrátor, který obsahuje stejný pól jako obraz skokového signálu, a jehož vstupem je regulační odchylka e . Pro sledování obecné lineární funkce jsou zapotřebí dva integrátory, pro sledování paraboly tři atd.

Ve většině případů není referenční signál obsažen v řízeném systému a přidává se tedy do regulátoru.

1.2.4 Umístění pólů pomocí LQR

Metoda LQ regulace je jednou z metod, která se snaží navrhnout optimální řízení dynamických systémů. LQR (linear-quadratic regulator) je termín popisující zpětnovazební regulátor, který je navrhován pro dynamický systém popsáný sérií lineárních diferenciálních rovnic a náklady na regulaci, které jsou popsány kvadratickou funkcí. Cílem algoritmu je najít optimální řešení poměru rychlost a kvalita regulace ku nákladům na regulaci. LQ regulátory se rozdělují podle spojitosti či diskretnosti systému a podle konečného či nekonečného horizontu. Horizont udává časový rozsah, v jakém je kritérium splněno. V našem případě budeme pojednávat případ nekonečného horizontu, který hodnotí kritérium v celé časové oblasti. Kritérium pracuje na základě snížení parametru, který je počítán jako součet kvadrátů řízení a stavů daného systému. Systém je dán stavovým popisem uvedeným v příkladu (1.3) a stavovou zpětnou vazbou $u(t) = Fx(t)$. Kvadrát vektoru stavů či vstupů je získán následovně:

$$x^2 = x^T Q x,$$

kde matice Q udává váhu, kterou přikládáme k jednotlivým stavům. Tato matice je volena symetricky a musí být semidefinitní (v případě výpočtu řízení definitní), aby byla zaručena kladnost kvadrátu, protože kritérium pracuje na principu hledání minima součtu těchto stavů. Pokud by bylo možné získávat záporné

hodnoty, vedlo by to k nekonečným či nereálným výsledkům. Stejným postupem se vypočte i kvadrát vstupu systému neboli řízení. Výsledný výpočet parametru, který je označen I , je popsán následujícím vztahem.

$$I = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru + 2x^T Nu) dt \rightarrow \min,$$

$$u^T Ru > 0, \quad Q - NR^{-1}N^T \geq 0,$$

kde matice Q udává váhu přiřazovanou jednotlivým stavům, matice R udává váhu vstupů a matice N udává vztah mezi stavy a vstupy systému.

Kombinace hodnot v maticích Q, R a N je volená tak, aby splňovala cílové požadavky na regulaci. Dosazením zpětné vazby za u a zvolením matice $N = 0$ lze získat:

$$I = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru + 2x^T Nu) dt \rightarrow \min,$$

$$= \int_0^{\infty} x^T (Q + F^T RF) x dt.$$

Zavedeme substituci:

$$P = Q + F^T RF$$

a výsledný výpočet parametru I lze napsat jako:

$$I = x^T P x,$$

kde parametr $P > 0$ je řešením tzv. algebraické Riccatovy rovnice:

$$(A + BF)^T P + P(A + BF) + Q + F^T RF = 0.$$

Tato rovnice je numericky vypočitatelná ve většině matematických softwarů a výsledný parametr $-P$ udává vhodné umístění pólů dle námi zvolených kritérií. Důvod opačného znaménka je získán matematickým důkazem ve zdroji [8]. Výslednou matici řízení F lze následně získat buďto použitím výše zmíněným přiřazením Jordanovy formy nebo pomocí vztahu $F = -R^{-1}B^T P$. Je dobré si povšimnout, že výsledné řízení nezávisí na počátečních stavech x_0 .

2 Matematický model

2.1 Systém

Snahou této práce bylo popsat systém pohybujícího se magnetu na rovinné podložce, pod kterou jsou umístěny tři solenoidové cívky připojené k řídicí jednotce, pomocí které lze ovládat vstupní proudy do těchto cívek. Realizace tohoto systému probíhala čistě simulačně, tudíž bylo možné spoustu věcí zanedbat jako například výpočetní náročnost řízení v reálném čase či samotnou složitost modelu, ve kterém jsou zanedbány vlivy okolního prostředí a tření. Ve výpočtech se uvažuje o permanentním magnetu a cívkách jako o hmotných bodech, tudíž zanedbáváme jejich rozměry a uvažujeme o nich jako o těžištích těchto těles, které mají svoji hmotnost.

Při sestavování matematického modelu se vycházelo z úvahy, že matematický model bude popsán pomocí druhého Newtonova pohybového zákona, zákona síly, který je popsán vztahem:

$$F = ma,$$

kde F je výslednice působících sil, m je hmotnost hmotného bodu a a je zrychlení onoho bodu.

Slovně zní tento zákon následovně:

„Velikost zrychlení hmotného bodu je přímo úměrná velikosti výslednice sil působících na hmotný bod a nepřímo úměrná hmotnosti tělesa. Směr zrychlení je shodný se směrem výslednice sil, tedy $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.“ [7]

Jelikož je zde použito zrychlení a , které lze vyjádřit jako derivaci rychlosti \vec{v} nebo jako druhou derivaci polohy \vec{x} , tak tento zákon popisuje pohyb jen v jedné ose. Je nutné si uvědomit, že pohyb v jednotlivých osách na sobě musí být nezávislý, což je splněno díky skalárnímu součinu (1.1.1), protože jsou osy navzájem na sebe kolmé. Pokud jsou tedy osy navzájem nezávislé, lze je realizovat každou zvlášť a také regulovat separovaně. Pohyb a regulace jedné osy bude tedy totožný s ostatními, proto se bude v následujících výpočtech pracovat jen s jednou osou.

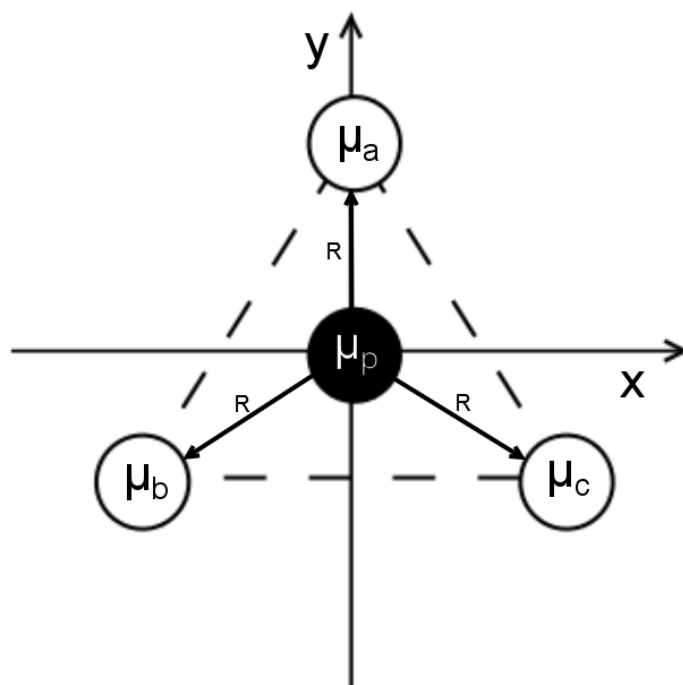
Pro pohyb v jedné ose zavedeme stavový popis, který bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} F &= m\ddot{x} \\ x_1 &= x & \dot{x}_1 &= \dot{x} \\ x_2 &= \dot{x} & \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}F_x \end{aligned}$$

Maticový zápis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F_x \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

, kde síla F_x reprezentuje výslednici sil v ose x působících na hmotný bod, která je zároveň vstupem systému. K vyjádření této síly bude zapotřebí zavést souřadnicový systém. Rozložení cívek a permanentního magnetu v prostoru vypadá přibližně následovně:



Obrázek 2.1: Grafické znázornění umístění solenoidových cívek a permanentního magnetu v prostoru. Vzdálenost permanentního magnetu od každé cívky definujeme jako vzdálenost R . Cívky jsou umístěny ve vrcholech rovnoramenného trojúhelníku, takže úhel mezi jednotlivými cívkami odpovídá 180° . Jedná se o půdorys polohy, tudíž zde není zobrazená osa z , která vystupuje z obrazu směrem ke čtenáři.

Zobrazením solenoidových cívek do souřadného systému dostaneme jejich polohu v prostoru závislou na parametru R . Umístění cívek a , b a c bude tedy

vypadat následovně:

$$\begin{aligned} a &= \langle 0, R, 0 \rangle, \\ b &= \left\langle -R \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), -R \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 0 \right\rangle, \\ c &= \left\langle R \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), -R \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 0 \right\rangle, \\ r &= \langle x, y, z \rangle. \end{aligned}$$

Abychom mohli vyjádřit sílu, kterou působí všechny cívky na magnet v jednotlivých osách, bude se uvažovat zjednodušení, že cívky i permanentní magnet je možné popsat jako magnetické dipóly. Díky tomuto zjednodušení bude možno charakterizovat tyto objekty jako hmotné body a bude možno použít rovnici (1.6) pro vyjádření síly působící jednou cívkou na magnet. Tato rovnice však pracuje s parametrem r , který je prostorovým vyjádřením polohy magnetu μ_p . Nejlehčí způsob jak tedy vyjádřit celkovou sílu působící na magnet je vektorově:

$$F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F_{ax} + F_{bx} + F_{cx}) \\ (F_{ay} + F_{by} + F_{cy}) \\ (F_{az} + F_{bz} + F_{cz}) \end{bmatrix} = F_a + F_b + F_c,$$

kde jsou síly F_a , F_b a F_c vyjádřeny pomocí rovnice (1.6). Tyto síly popisují silové působení jednotlivých cívek na permanentní magnet. Každá z těchto sil však působí ve směru všech tří os, lze je tedy rozepsat (pro příklad síly F_a) následovně:

$$F_a = \begin{bmatrix} F_{ax} \\ F_{ay} \\ F_{az} \end{bmatrix}.$$

Jelikož nejsou cívky umístěny v počátku souřadnicových os, tak je pro výpočet jednotlivých sil za parametr r dosazena vzdálenost cívky od magnetu. Vzdálenost je počítána jako vektorový rozdíl polohy magnetu a polohy cívky, nebo-li vektorově $[x_a - x_p, y_a - y_p, z_a - z_p]$ pro cívku μ_a . Podobně je tomu tak i u ostatních cívek. Síly jsou vyjádřené v závislosti na určitých parametrech, takže je lze chápat jako nelineární funkce.

$$F = \begin{bmatrix} F_x(x, y, z, \mu_a, \mu_b, \mu_c, \mu_p, \mu_0, R) \\ F_y(x, y, z, \mu_a, \mu_b, \mu_c, \mu_p, \mu_0, R) \\ F_z(x, y, z, \mu_a, \mu_b, \mu_c, \mu_p, \mu_0, R) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

kde parametry x, y, z reprezentují pozici permanentního magnetu, μ_a, μ_b, μ_c představují magnetické momenty jednotlivých cívek, μ_p symbolizuje magnetický

moment permanentního magnetu, μ_0 permeabilitu vakua a R reprezentuje vzdálenost cívek od středu souřadného systému.

Parametry R , μ_0 a μ_p jsou časově invariantní, takže za ně lze dosadit konstantu. Pro jednoduchost byla zvolena permeabilita vakua $\mu_0 = 1$, vzdálenost cívek od počátku souřadnic $R = 0.1$ a magnetický moment magnetu $\mu_p = 1$.

Výsledné síly způsobené magnetickým polem cívek jsou tedy závislé pouze na poloze magnetu a elektrických proudech, které cívkami prochází. Z toho je patrné, že síly nelze simulovat nezávisle, protože je síla v každém směru závislá na poloze ve všech osách. Takže ačkoli lze regulovat každou osu zvlášť, tak výsledné síly vstupující do systému budou tvořeny provázáním všech os.

2.2 Regulátor

Jako první při snaze regulovat systém je třeba určit, jestli je daný systém regulovatelný. Systém popsaný stavovým popisem 2.1 má dva póly, které jsou umístěny následovně:

$$p_{x1} = 0, \quad p_{x2} = 0.$$

Oba tyto póly leží na imaginární ose, což znamená, že systém je na mezi stability. Aby bylo možné tento systém řídit, musí být říditelný a pozorovatelný.

Pozorovatelnost bude určena pomocí teorie z bodu 1.2.2, kde matice pozorovatelnosti vypadá následovně:

$$Q_{OB} = \begin{bmatrix} C & CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

z čehož plyne, že hodnota této matice je plná, nebo-li $\text{rank}(Q_{OB}) = 2$. Tato informace je postačující k prohlášení, že systém je pozorovatelný.

Pokud je systém pozorovatelný, chybí k jeho regulaci jen zjištění zda je i říditelný. K určení této vlastnosti bude použita teorie z bodu 1.2.1, ze které vychází, že systém je říditelný právě tehdy, má-li matice říditelnosti plnou hodnotu. Při aplikaci této teorie na zadaný systém vyjde:

$$Q_{CO} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix}.$$

Z tvaru matice je opět patrné, že pokud nebude hmotnost magnetu nulová či nekonečná (nesplnitelný předpoklad), pak bude mít matice říditelnosti plnou hodnotu $\text{rank}(Q_{CO}) = 2$. Je možné tedy přistoupit k regulaci systému.

Pro regulaci jednotlivých os byl zvolen stavový zpětný regulátor. Aby bylo možné regulovat s nulovou odchylkou v ustáleném stavu, bude potřeba z teorie 1.2.3 rozšířit stavy systému. Pro sledování rovinné uzavřené křivky bude potřeba

rozšířit stav o generátor konstanty (realizovaný integrací regulační odchylky) a generátor goniometrické funkce (sinu), který lze realizovat následujícím subsystémem:

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{s^2 + \Omega^2},$$

kde U je vstupní signál do generátoru (regulační odchylka), Y je jeho výstupem a Ω je volitelný parametr popisující frekvenci výsledného signálu. Tento vztah lze také zapsat jako:

$$\ddot{y} + \Omega^2 y = u$$

Po přepisu na stavový popis spolu s generátorem konstanty dostáváme:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_1 - s_x \\ x_4 &= y \quad \dot{x}_4 = x_5 \\ x_5 &= \dot{y} \quad \dot{x}_5 = -\Omega^2 x_4 + (x_1 - s_x) \end{aligned}$$

, kde $x_1 - s_x$ značí regulační odchylku e získanou rozdílem polohy systému a požadovanou polohou.

Po přidání tohoto rozšířeného stavu k již zavedenému 2.1 dostaneme výsledný stavový popis :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ s_x \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Tento stavový popis je použitý ve všech následujících výpočtech, ale je nutné si povšimnout, že systém má dva vstupy. Vstup s_x je vnější vstup, který by šlo chápat jako poruchu na výstupu systému. Pro výpočet stability je tedy vstup $s_x = 0$.

Po zavedení rozšířeného stavového popisu byl použit stavový zpětný regulátor, který za vstup F_x , neboli u dosadil stavovou zpětnou vazbu $u = Fx(t)$. Z teorie v části 1.2.3 je známo, že tato zpětná vazba vede na podobnost výsledné matice dynamiky systému s maticí L , která je volitelná. Cílem je tedy zvolit vhodné umístění pólů v matici L tak, aby bylo dosaženo kvalitní (rychlé, nekmitající) regulace s optimálním množstvím použitého řízení. To v praxi znamená, že pokud bude solenoidová cívka tvořící magnetické pole dimenzovaná v rozsahu 0 – 10V, tak nebude vycházet jako výstupní řízení vyšší číslo, než je maximální hodnota, kterou cívka unese. Ke splnění tohoto požadavku byla použita metoda návrhu LQ regulátoru 1.2.4. Ke splnění návrhu této metody je nutno zvolit matice Q , R a N , které jsou volitelné a velikostně odpovídají vektorům, s kterými se násobí.

Vhodným zvolením těchto matic se snažíme nalézt optimální umístění pólů matice L , která bude odpovídat systém 2.3.

Volba parametrů matic byla určena na základě požadavků systému, kterými je hlavně sledování rovinné křivky, tudíž se dbá především na řízení polohy, nikoli rychlosti. Řešení probíhá čistě simulačně, tudíž není možné říct nic o rozsahu vstupů, které vstupují do systému. Rovněž nejsou kladeny žádné požadavky na vztah mezi stavy systémů a řízením. Na základě těchto znalostí, a experimentálních simulací, byly matice zvoleny následovně:

$$Q = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1], \quad N = [0].$$

Z volby matice N je patrné, že stavy a vstup systému není tímto kritériem provázán. Volba matice R zůstala neutrální, protože nejsou známy žádné informace o vstupu systému. Volba matice Q byla zvolena tak, aby poměr mezi váhami jednotlivých vstupů odpovídal vhodné regulaci a teoretickým požadavkům. Parametry, u kterých je vyšší koeficient, mají vyšší prioritu ve stabilizaci. Pokud tedy mají největší hodnotu parametry u stavů x_1 a x_3 , regulátor apeluje na regulaci především polohy systému a ustálení na konstantu. Volba výsledné matice Q tedy závisí na požadavku regulace, tedy na vstupním signálu. Pokud budeme znát apriorní informaci vstupního signálu, je možné upravit matici Q tak, aby bylo dosaženo lepších výsledků.

Pomocí těchto nástrojů a programu Matlab, který v sobě má obsaženou funkci $lqr()$, kde jedním z výstupů je i umístění pólů, byla určena optimální poloha pólů výsledné matice L , ke které je cílem najít podobnost otevřené regulační smyčky $F_O = F_r + F_s$, kde F_r je přenosová funkce regulátoru a F_s je přenosová funkce systému. Díky informacím o systému, jeho pólech a finálnímu umístění pólů v matici L je možné, pomocí teorie z bodu 1.2.3 najít řízení $u(t) = Fx(t)$.

Pro tuto konkrétní kombinaci matic Q, R a N vyšlo umístění pólů otevřené regulační smyčky následovně:

$$L = \begin{bmatrix} -23.6465 & -7.3730 & -12.5483 & -2.7743 & -9.6322 \\ -7.3730 & -3.9681 & -3.1623 & -0.0822 & -2.4481 \\ -12.5483 & -3.1623 & -23.5754 & -7.7416 & 0.2599 \\ -2.7743 & -0.0822 & -7.7416 & -15.7368 & -2.4966 \\ -9.6322 & -2.4481 & 0.2599 & -2.4966 & -15.5355 \end{bmatrix}$$

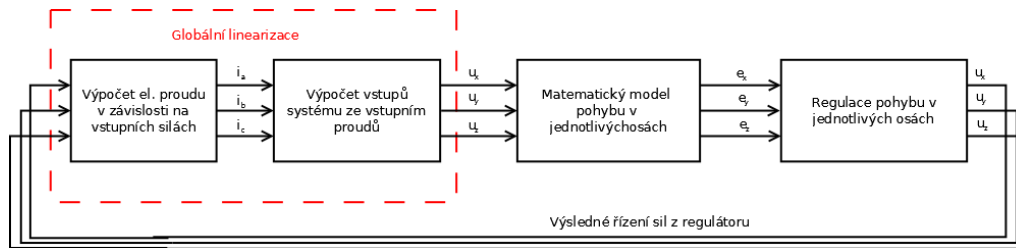
, jejíž umístění pólů (vlastní čísla matice) a následný výpočet matice řízení F vyšlo následovně::

$$\mathit{eig}(L) = \begin{bmatrix} -42.1413 \\ -20.3950 \\ -13.8892 \\ -4.7189 \\ -1.3179 \end{bmatrix}, \quad F = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} -0.2195 \\ -0.0082 \\ -7.4240 \\ -8.0616 \\ 5.1478 \end{bmatrix}$$

Z umístění vlastních čísel matice L je patrné, že všechny leží ve stabilní polovině. Tím je ověřené, že výsledný systém je stabilní.

3 Simulace

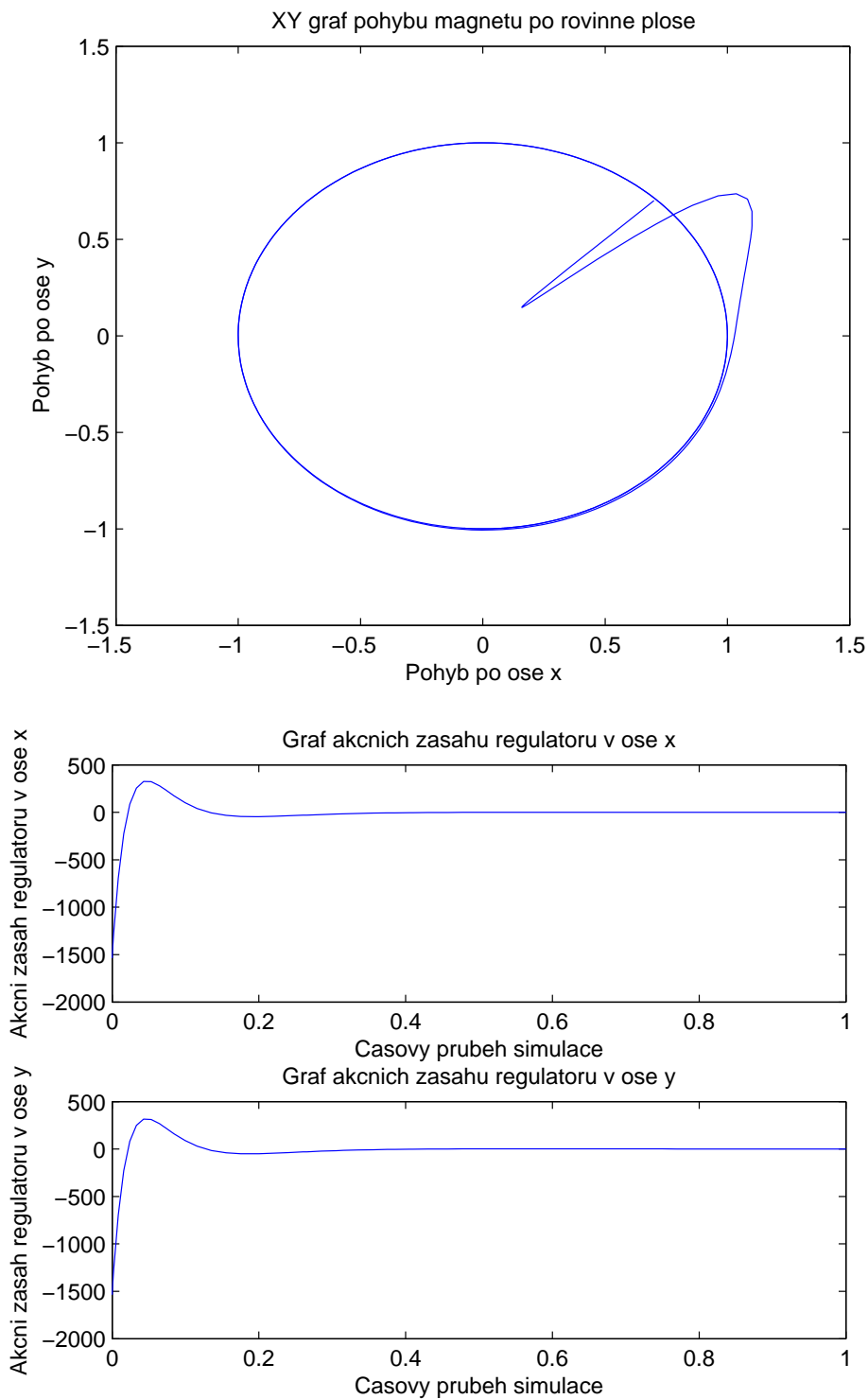
Simulace probíhala v programovém prostředí Matlab a jeho nadstavbě Simulink. Grafické znázornění modelu, na kterém probíhaly simulace a výpočty, vypadá následovně:



Obrázek 3.1: Grafické znázornění zapojení jednotlivých komponent simulujících magnetický rovinný manipulátor. Červeně označený prostor představuje tzv. globální linearizaci, která obsahuje vyjádření proudů z maticové soustavy rovnic 2.2 a jejich zpětné vyjádření do sil v jednotlivých směrech. Tento blok simuluje výpočet vstupních proudů, které by vstupovaly do reálného modelu (soustavy cívek) a jejich působení definované jako síly v jednotlivých osách.

Matematický model a regulace byly tvořené pro každou osu zvlášť a byly realizované maticovým popisem 2.3. Globální linearizace byla vyjádřením potřebných funkcí z maticové rovnice 2.2.

Výsledná simulace probíhala pro referenční signál kružnice, který byl generován pro osy x a y pomocí rozkladu na funkce \sin a \cos . Pohyb v ose z byl generován na hodnotu 1, což je vzdálenost desky nad cívkami, po které se permanentní magnet pohybuje. Protože se reálně poloha v ose z nezmění, není potřeba ji vykreslovat. Je zapotřebí ji však regulovat, protože tím omezujeme případné zvětšení tření magnetu po podložce.



Obrázek 3.2: Průběh simulace z počáteční polohy magnetu $[0.7; 0.7]$ v časovém rozsahu simulace $t = 15s$ a graf průběhu akčních zásahů regulátorů, který byl přiblížen v čase $t = [0, 1]$.

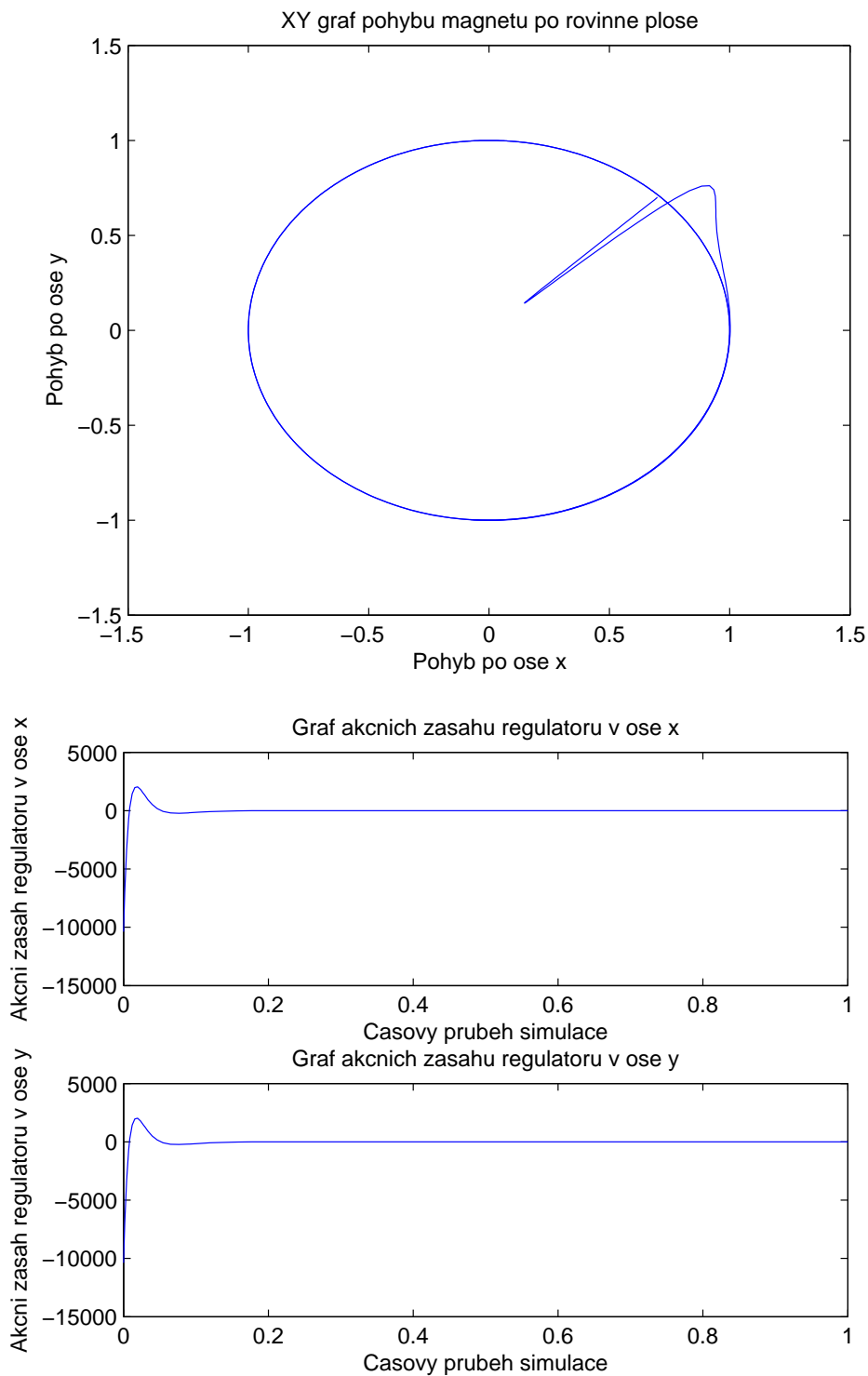
V obrázku je patrné "ujetí" od referenčního signálu ačkoli se počáteční stav nachází v jeho blízkosti. Tento výkyv je způsoben tím, že byly nastaveny pouze počáteční stavy polohy, nikoli rychlosti. Tudíž se počáteční stav neshoduje v plném rozsahu se stavem, který magnet nabývá při pohybu po kružnici. Pokud by bylo potřeba tento výkyv odstranit, musel by se z provedené simulace odměřit stav na kružnici a ten pak dosadit do počátečních podmínek. V reálné situaci je však těžké dosáhnout přesných počátečních podmínek v rychlosti (chybějící počáteční stavy), tudíž by byla tato simulace nic neříkající.

Je patrné, že při simulaci došlo k překmitu, což je způsobeno snahou rychlejší regulace. Důvodem je tedy zvolení matice Q , která určuje důraz na jednotlivé stavy. Při apriorní informaci, že se jedná o regulaci na kružnici by bylo možné snížit překmit tím, že zvýšíme koeficient u stavu x_3 . Matice Q by pak mohla vypadat například takto:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1], \quad N = [0].$$

Z následující simulace je patrné zmenšení překmitu, které by se zmenšovalo se zvyšujícím se koeficientem u parametru x_3 . Avšak tato váhová změna v matici Q nese negativní účinky na regulaci na jakýkoli jiný signál. Je tedy dobré, znát alespoň odhadovaně referenční signál a přizpůsobit tomu parametry LQ regulátoru.

Výsledek simulace s touto kombinací matic vypadá následovně:



Obrázek 3.3: Průběh simulace z počáteční polohy magnetu $[0.7; 0.7]$ v časovém rozsahu simulace $t = 15s$ a maticí Q_1 . Níže je uveden graf průběhu akčních zásahů regulátorů, který byl přiblížen v čase $t = [0, 1]$.

4 Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit matematický model permanentního magnetu, pohybujícího se po rovinné desce, a tří cívek, které jsou uloženy pod touto deskou. Do těchto tří cívek byl simulačně pouštěn proud, který vytvářel magnetické pole, ve kterém se nacházel permanentní magnet. Tím vznikla síla, která působila na permanentní magnet. Následně byl vytvořen matematický model této soustavy, který byl idealizován tak, aby bylo možné popsat jej známými rovnicemi.

K takto navrženému matematickému modelu byl sestaven zpětnovazební regulátor. Přiřazením řízení pomocí zpětné vazby byly určeny póly otevřené regulační smyčky, jejichž hodnota byla zvolena pomocí LQ regulace tak, aby poskytovala optimální řízení pro zadaný referenční signál. Přiřazením těchto pólů jsem byl schopen určit výsledné řízení systému, který byl předtím na mezi stability.

Výsledkem byla simulace potvrzující správnost výpočtů, která byla testována při regulaci na referenční signál popsaný kružnicí v osách x, y , zatímco osa z byla regulována na hodnotu $z = 1$, kde měla být umístěná pomyslná deska, po které se magnet pohybuje.

Celkové řešení probíhalo v programech *Maple* a *Matlab*. Program *Maple* byl použit pro numerické vyjádření jednotlivých sil, popřípadě proudů, které byly použity v *Matlabu* a jeho nadstavbě *Simulink*, kde simulovaly chování cívek a jejich řízení. Tímto postupem jsem narazil na první problém, kterým bylo zjištění, že magnet není říditelný na celém prostoru x, y, z . Tento problém je způsobem numerickými výpočty, které v některých nadrovinách prostoru vycházejí nulové. Tyto výpočty se kolikrát nacházejí ve jmenovateli a tím vychází výsledná síla či působící proud nekonečný, z reálného hlediska tedy nesmyslný. Tento problém se dá vyřešit vyhnutím se těmto nadrovinám nebo numericky ošetřit hodnoty parametrů, aby vycházely jen v určitém rozsahu.

Dalším z problému při řešení této práce bylo výrazné zjednodušení systému, které by vedlo k nepoužitelnosti návrhu v reálném případě. Při tvorbě matematického modelu byla totiž zanedbávána třecí síla, která nemohla být známa, protože celé řešení probíhalo čistě simulačně. Při výpočtech se taky neuvádí silové momenty, které by na magnet působily a které by následně zvyšovali třecí sílu, nebo by dokonce magnet přetočili, čímž by došlo k porušení celého matematického modelu.

Možným řešením by tedy bylo navrhnout složitější model, který by popisoval reálný systém. Tím by přibýlo mnoho parametrů jako např. proudový rozsah cívek či tření magnetu.

Dalším možným řešením je pozměnit celkový model pohybujícího se mag-

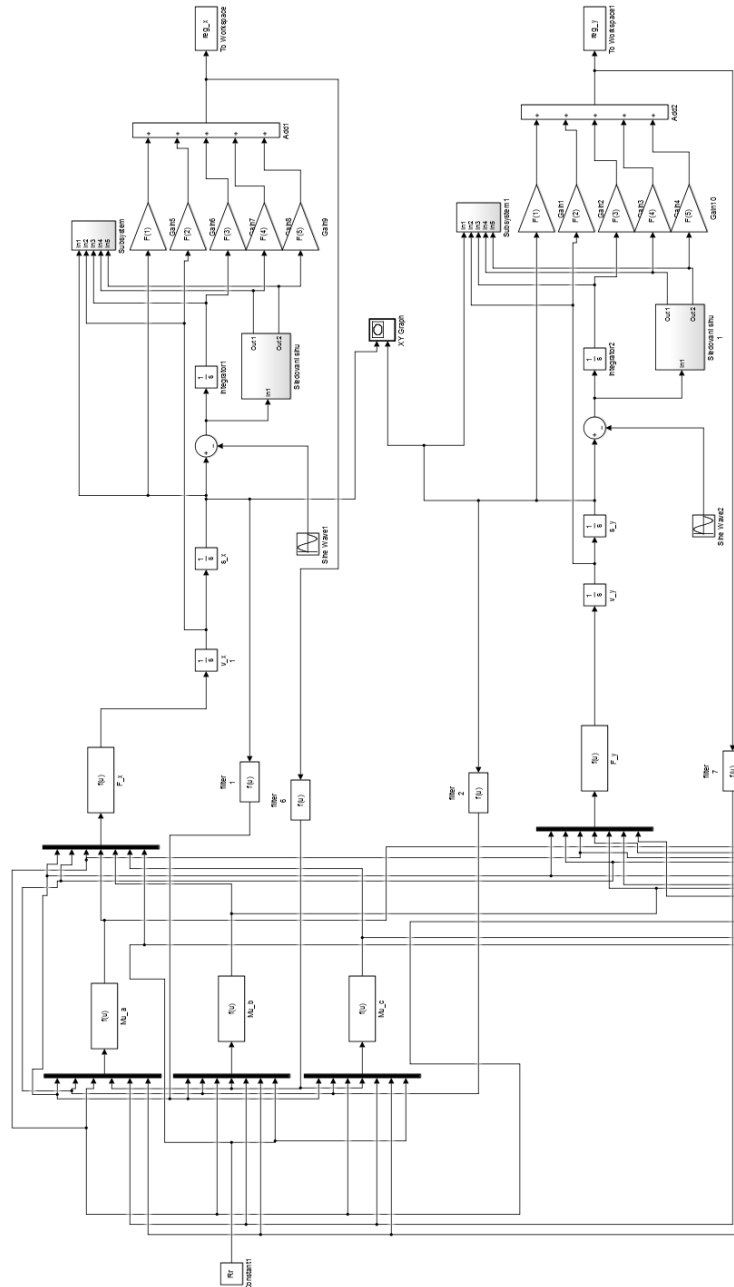
netu a umístit ho například do kapsle, která by byla chycena na pružinách. Tím by zmizel problém tření a do rovnic by stačilo započítat sílu, kterou tyto pružiny působí. Tato síla je dobře matematicky popsatelná a reálně se tento matematický popis tolik neliší od skutečnosti.

Všechny tyto možnosti budou zváženy při vylepšování tohoto modelu, kterým se doufám budu v budoucnosti zabývat.

Literatura

- [1] DIVIŠ, J. *Základy elektrotechniky* [online]. 2015. [cit. 2017/08/16]. Dostupné z: <http://www.spsemoh.cz/vyuka/zae/el17.htm>.
- [2] DOC. ING. JIŘÍ MELICHAR, C. Lineární systémy 1. Master's thesis, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2010. Dostupné z: <http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls1/LS1-Ucebni-texty-2010.pdf>. wordpress.
- [3] DOC. ING. JIŘÍ MELICHAR, C. Lineární systémy 2. Master's thesis, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2011. Dostupné z: <http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls1/LS1-Ucebni-texty-2011.pdf>.
- [4] HELLER, P. *Ampérovo pravidlo pravé ruky* [online]. 2008. [cit. 2017/08/16]. Dostupné z: <http://referaty-seminarky.cz/amperovo-pravidlo-prave-ruky/>.
- [5] HRIVŇÁK, K. *Diferenciální operátory - gradient* [online]. 2011. [cit. 2017/08/16]. Dostupné z: http://artemis.osu.cz/mmmat/txt/do/gra.htm#_ftn1.
- [6] MEDVECOVÁ, P. Řízení rovinného pohybu permanentního magnetu magnetickým polem. Master's thesis, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2017. Dostupné z: <https://portal.zcu.cz/portal/studium/prohlizeni.html>.
- [7] REICHL, J. *Druhý Newtonův pohybový zákon - zákon síly :: MEF* [online]. 2012. [cit. 2017/08/16]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/30-druhy-newtonuv-pohybovy-zakon-zakon-sily#>.
- [8] SCHLEGEL, M. *LQ regulator – Doplnující text k předmětu PS* [online]. 2004. [cit. 2017/08/16]. Dostupné z: attachment.
- [9] SCHLEGEL, M. *Stabilní polynomy* [online]. 2010. [cit. 2017/08/16]. Dostupné z: attachment.
- [10] SCHLEGEL, M. – KÖNIGSMARKOVÁ, J. Parametric Jordan form assignment revisited. *International Journal of Computer Vision*. 2014, 16, 1, s. 1–12. ISSN 1573-1405. doi: 10.1002/asjc.713. Dostupné z: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/asjc.713/full>.
- [11] ÅSTRÖM, K. J. – MURRAY, R. M. *Feedback System*. Princeton University Press, 2009. doi: 10.1007/978-3-540-88690-7_24. Dostupné z: http://www.cds.caltech.edu/~murray/books/AM05/pdf/am08-complete_22Feb09.pdf. ISBN :978-0-691-13576-2.

A Schéma modelu v Simulinku



Obrázek A.1: Schéma, pomocí kterého byl realizovaný model v simulačním prostředí Simulink. Na obrázku chybí vyobrazená simulace pohybu v ose z , protože by byla ilustrace moc velká a text nečitelný. Její průběh je téměř identický jako simulace pohybu v ose x či y .