ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

VYŠETŘOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCÍ - ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lucie Ceplechová

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň, 2017

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Vyšetřování průběhu funkcí – řešené příklady‘‘ vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, dne……….

....

Lucie Ceplechová

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce panu PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D. za poskytnutí užitečných rad, dobrých nápadů a připomínek během práce na této bakalářské práci.

Obsah

Úvod

Bakalářská práce se zabývá vyšetřováním průběhu funkcí o jedné a více proměnných. Ačkoliv je funkce o jedné proměnné často probírané téma, rozhodla jsem se ho zpracovat komplexně a rozšířit o problematiku s více proměnnými.

Práce je rozdělena do dvou částí. V první části se zabývám teoretickým vyšetřováním průběhu funkcí. V této části jsou podrobně rozepsány všechny potřebné kroky ke zjištění průběhu funkce.

V druhé části této bakalářské práce aplikuji na konkrétních příkladech kroky uvedené v první části. Všechny uvedené příklady jsou funkce s jednou proměnnou. V této části jsou uvedeny různé druhy příkladů o různých obtížnostech. Každý příklad je doplněn grafem tak, aby čtenář dokázal plně pochopit problematiku daného příkladu.

1 Teoretický základ vyšetřování průběhu funkcí s jednou proměnnou

1.1 Definice funkce jedné proměnné, základní pojmy

Pro možnost vyšetřovat funkce je důležité, co funkce je.

Nechť $D \subset \mathbb{R}$. Zobrazení f: $D \mapsto \mathbb{R}$ nazýváme reálnou funkcí jedné reálné proměnné (každému prvku množiny D je přiřazeno právě jedno číslo z množiny $\mathbb{R}$).

Prvkům množiny D říkáme: vzory, argumenty, nezávislé proměnné a značíme je $x,t,s,\ldots \in D$; jejich obrazy značíme $f(x), f(t), f(s),\ldots \in \mathbb{R}$ a nazýváme funkční hodnoty. Množina D se nazývá definiční obor funkce a také se značí $D=D(f)$; množina obrazů se nazývá obor hodnot a značí se $H=H(f)$. Nejčastěji píšeme:

$y = f(x), x \in D$ nebo $f: x \mapsto f(x), x \in D$.

Graf funkce f je množina G dvojic $[x, f(x)]$, $x \in D$, tj. $G_f = D \times H \subset \mathbb{R}^2$. Říkáme, že funkce je dána, je-li dáno přiřazení f a definiční obor $D(f)$.

[1]

Nejčastější způsoby zadání funkcí:

a) Analytické zadání

Funkční předpis je dán rovnicí nebo soustavou rovnic (zpravidla jde o jeho explicitní, implicitní nebo parametrické vyjádření). Pokud je funkční předpis zadán ve tvaru $y = f(x)$, jedná se o explicitní vyjádření. Funkční předpis je zadán implicitně, pokud je ve tvaru $F(x, y) = 0$, resp. $F(x, f(x)) = 0$. Parametrické vyjádření znamená, že funkční předpis funkce f je zadán ve tvaru soustavy rovnic s parametrem, např. $x = \phi(t)$, $y = \phi(t)$, kde t je parametr s daným oborem proměnnosti, zpravidla $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$).

b) Grafické zadání – funkce je dána svým grafem.

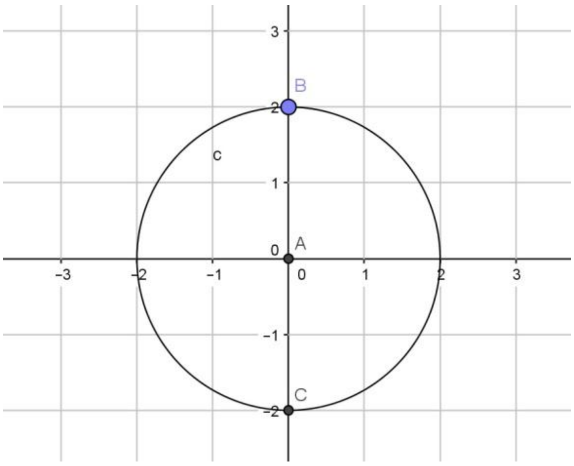
c) Tabelární zadání – pro konečný počet uspořádaných dvojic $[x, y] \in f$ může být funkce určena jejich výčtem.

[4]

Množina všech bodů [*x; f(x)*] v kartézském souřadnicovém systému se nazývá graf funkce *f*.

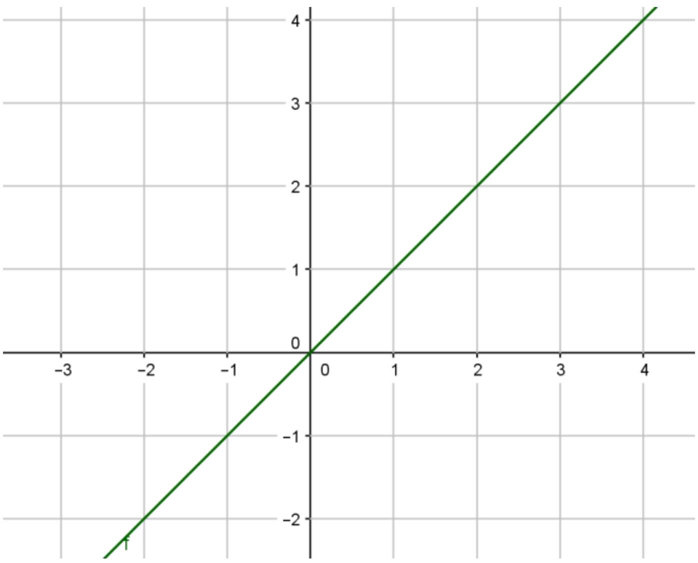
Na následujícím obrázku je znázorněn případ, ve kterém se nejedná o graf funkce, jelikož není splněna podmínka uvedená v definici funkce. Důkaz tohoto tvrzení je evidentní např. v bodě $x = 0$ (bod *A*), pro který platí, že $f(0) = 2$ (bod *B*) a zároveň $f(0) = -2$ (bod *C*).

Obrázek 1: Graf není grafem funkce (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



V následujícím grafu se jedná o graf funkce, jelikož je splněna výše uvedená definice funkce.

Obrázek 2: Graf funkce (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



Funkce $g\colon D(g) \to \mathbb{R}$ se nazývá restrikce funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$, jestliže $D(g) \subset D(f)$ a pro všechna x definičního oboru platí: $g(x) = f(x)$.

Funkce f, g se rovnají, jestliže $D(g)=D(f)$ a pro všechna x definičního oboru platí:
$g(x) = f(x)$.

Nechť $D(g) = D(f)$, potom pomocí následujících předpisů definujeme:
součet funkcí $f + g\colon x \to f(x) + g(x)$;

rozdíl funkcí $f - g\colon x \to f(x) - g(x)$;

součin funkcí $f \cdot g\colon x \to f(x) \cdot g(x)$;

podíl funkcí $f/g\colon x \to f(x)/g(x)$; $g(x) \neq 0$;

násobek funkce $\alpha f\colon x \to \alpha f(x)$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

[8]

1.1.1 DEFINIČNÍ OBOR - PŘÍKLADY

Př. 1 Určete definiční obor u následujících funkcí

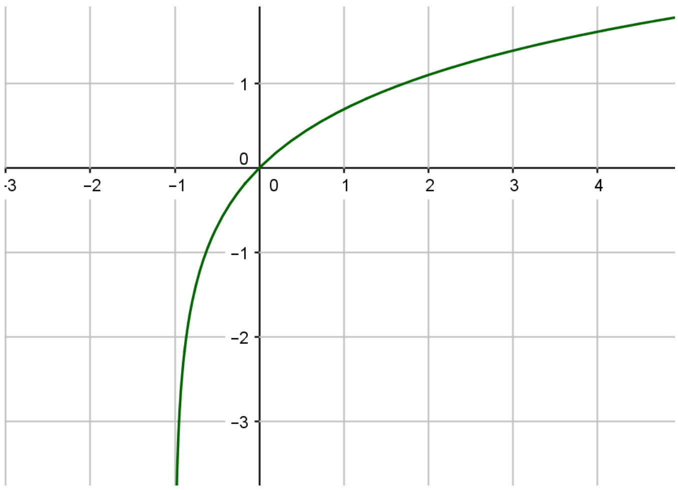
a) $f(x) = ln(x+1)$

Aby byla funkce definována, musí být argument logaritmu větší než 0. Definiční obor této funkce zjistíme následovně:

$$x+1 > 0$$
$$x > -1$$

Tedy platí $D(f) = (-1, +\infty)$. Na obrázku vidíme graf funkce. Z obrázku je názorně vidět i definiční obor vyšetřované funkce.

Obrázek 3: Graf funkce $f(x) = ln\,(x+1)$ (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



b) $h(x) = \dfrac{1}{x+8} + \sqrt{x}$

Tato funkce je definována pouze, pokud jmenovatel funkce se nerovná 0 a zároveň funkce pod odmocninou je větší než *0*.

$$x+8 \neq 0$$
$$x \neq -8$$

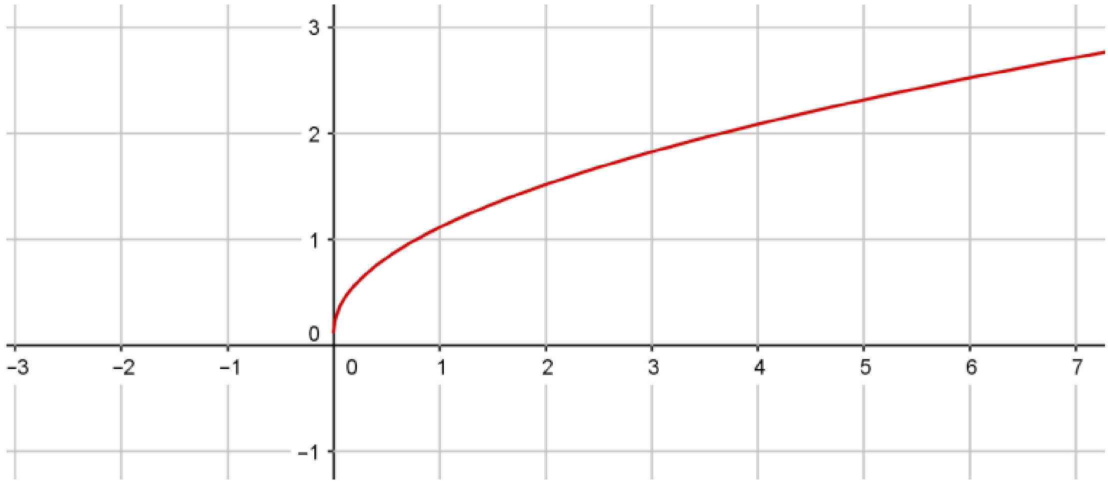
Teď víme, že do definičního oboru této funkce nebude patřit bod $x = -8$.

Definiční obor odmocniny: $x \geq 0$

Nyní musíme udělat průnik podmínek pro definiční obor funkce *h(x)*, tedy *x* se nesmí rovnat *-8* a zároveň *x* musí být větší nebo rovno *0*. Tedy *D(h)* = <0; +∞).

Správnost výpočtu opět potvrdíme na následujícím grafu.

Obrázek 4: Graf funkce h(x) (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



1.2 Zjištění průsečíků funkce s osami x a y

Pro zjištění průběhu funkce musíme vypočítat průsečíky funkce s osou x i s osou y.

Průsečík s osou x:

Máme-li funkci $y=f(x)$, průsečík s osou x získáme tak, že za y dosadíme 0 (jelikož pro všechny body na ose x platí souřadnice $[x,0]$) a úpravami získáme z rovnice hodnotu x. Řešíme tedy rovnici $0=f(x)$.

Průsečík s osou y:

Ve funkci $y=f(x)$ získáme průsečík s osou y dosazením 0 za x ve výrazu $f(x)$ (pro všechny body na ose y platí následující souřadnice $[0,y]$) a opět pomocí úprav získáme hodnotu bodu y. Řešíme rovnici $y = f(0)$.

1.2.1 Zjištění průsečíků – řešené příklady

Př. Zjistěte průsečíky s osami x a y u následující funkce

$f(x)$: $y = \dfrac{5-x}{x+1}$

Řešení:

Průsečík s osou x funkce $y = \dfrac{5-x}{x+1}$ (dosadíme tedy $y = 0$)

$$0 = \frac{5-x}{x+1} \quad /*(x+1)$$

$$0 = 5-x$$

$$x = 5$$

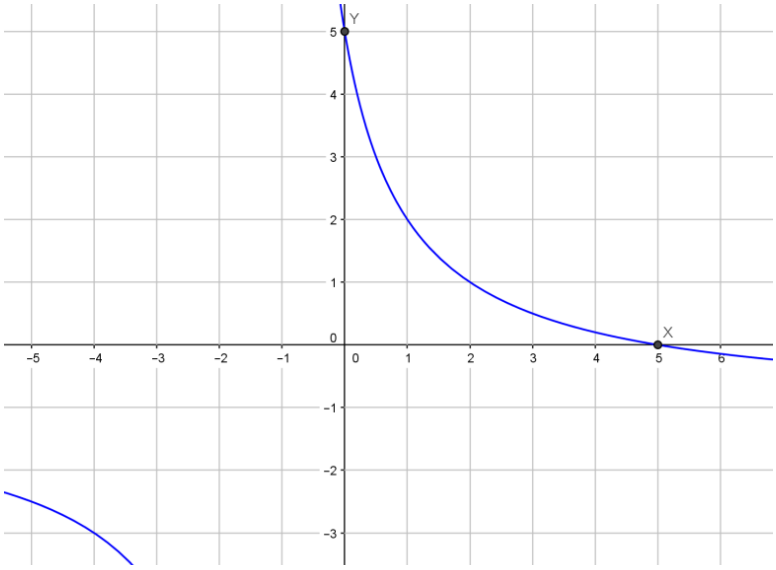
Průsečík s osou y, zjistíme tak, že za x dosadíme 0

$$y = 5$$

Víme tedy, že zadaná funkce $f(x)$ protíná osu x v bodě $X = [5, 0]$ a osu y v bodě $Y = [0, 5]$.

Na níže uvedeném obrázku grafu funkce vidíme průběh funkce i vyznačené průsečíky s osami x a y.

Obrázek 5: Graf funkce f(x) (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



1.3 Speciální typy funkcí

Funkce *f*: $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je

funkce sudá, právě když: $\forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$

funkce lichá, právě když: $\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$

funkce periodická, právě když:

$\forall x \in D(f)\ \exists T \in R - \{0\}: x + T \in D(f) \wedge f(x+T) = f(x)$

T se nazývá perioda funkce,

funkce omezená zdola na množině $A \subset D(f)$, právě když je zdola omezená množina $f(A)$,

$\exists K > 0\ \forall x \in A: f(x) \geq -K$

funkce omezená shora na množině $A \subset D(f)$, právě když je shora omezená množina $f(A)$,

$\exists K > 0\ \forall x \in A: f(x) \leqslant K$

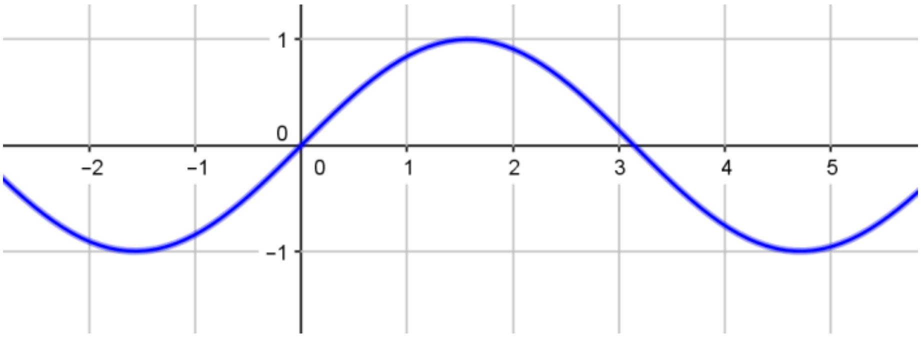
funkce omezená na množině $A \subset D(f)$, právě když je omezená zdola i shora, tj. právě když je omezená množina $f(A)$.

$\exists K > 0\ \forall x \in A: |f(x)| \leqslant K$

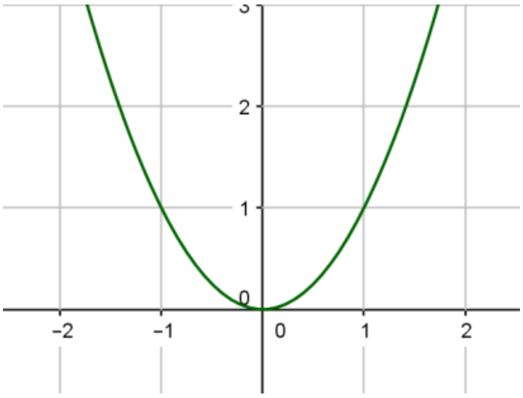
Funkce *f*, která je prostým zobrazením $D(f) \to \mathbb{R}$, tj. u níž pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$, je také $f(x_1) \neq f(x_2)$, se nazývá prostá funkce.

[4]

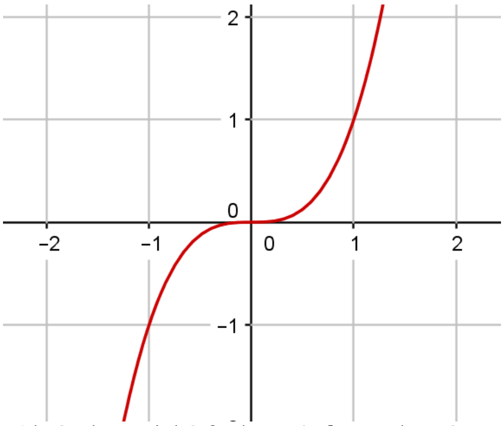
Na následujících obrázcích vidíme názorné příklady výše definovaných funkcí.



Obrázek 6: Periodická a omezená funkce (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)

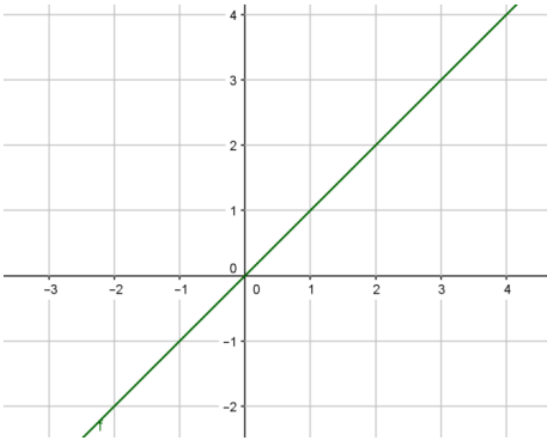


Obrázek 7: Sudá funkce (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



Obrázek 8: Lichá funkce   (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)

Obrázek 9: Prostá funkce (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



1.4 Limity funkce

Abychom mohli definovat pojem limita, definujeme nejprve pojem okolí bodu.

Pojmem okolí bodu rozumíme každý otevřený interval, který obsahuje číslo *a*. Ke každému číslu je možné sestrojit okolí rozmanitými způsoby. Okolím bodu *a* je každý interval $(a- \eta_1, a + \eta_2)$, kde η_1, η_2 jsou kladná čísla. Často používáme tzv. symetrického okolí bodu *a*, tj. intervalu $(a- \eta, a + \eta)$, kde $\eta>0$.

Definice limity:

Říkáme, že funkce *f* má v bodě *a* limitu *b*, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové kladné číslo η, že pro všechna $x \neq a$ z okolí $(a- \eta, a + \eta)$ čísla *a* patří funkční hodnoty $f(x)$ do okolí $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ čísla *b*. Píšeme pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Říkáme, že funkce *f* má v nevlastním bodě $+\infty$ (resp. $-\infty$) limitu *b*, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo x_0, že pro každé $x > x_0$ (resp. $x < x_0$) padne hodnota $f(x)$ do okolí $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ bodu *b*. Pro takto definované limity užíváme zápisu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad resp. \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Říkáme, že funkce f má v bodě a nevlastní limitu +∞ (resp. -∞), jestliže ke každému číslu k existuje takové kladné číslo η, že pro každé $x \neq a$ z okolí $(a- \eta, a + \eta)$ bodu a je splněna nerovnost $f(x) > k$ (resp. $f(x) < k$). Tuto okolnost zapisujeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad resp. \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

[2]

Mějme funkci f definovanou v $D(f) \subset \mathbb{R}$ a nechť x_0 je hromadný bod definičního oboru (tj. může být $x_0 \notin D(f)$, ale v každém okolí x_0 leží nekonečně mnoho bodů $D(f)$).

Definice limity podle Heineho:

Hlavní myšlenka této definice je problém limity funkce převést na problém limity posloupnosti.

a) Když existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \neq x_0$, konvergující k číslu x_0, posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje k číslu b, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu b a píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

b) Když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, konvergující k číslu x_0, $x_0 \neq x_n$ posloupnost $\{f(x_n)\}$ diverguje k +∞ (resp. -∞), píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad resp. \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

c) Když existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$ divergující k +∞ (resp. -∞), posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje k číslu b, říkáme, že funkce f má v +∞ (resp. -∞) limitu b a píšeme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad resp. \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

d) Když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, divergující k $+\infty$ (resp. $-\infty$), posloupnost $\{f(x_n)\}$ diverguje k $+\infty$ (resp. $-\infty$), píšeme

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad resp. \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \quad resp. \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

Funkce f má v hromadném bodě x_0 limitu $b\in\mathbb{R}$, když:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall\ x: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

Jinými slovy: Funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ má v hromadném bodě x_0 definičního oboru $D(f)$ limitu $b\in\mathbb{R}$, když pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, že pro všechna $x\in D(f)$ splňující podmínku

$$0<|x-x_0|<\delta \quad \textit{platí nerovnost}\ |f(x)-b|<\varepsilon.$$
$$\textit{Píšeme} \lim f(x)=b \ \textit{nebo}\ (x\to x_0)\Rightarrow(f(x)\to b).$$

[1]

1.4.1 Algebra limit

Nechť funkce f a g mají společný definiční obor D a nechť existují limity (včetně případu $x_0=\pm\infty$)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b\in R,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = c\in R.$$

Potom existují limity funkcí

$$f \pm g,\ f\cdot g,\ f/g\ (g(x)\neq 0,\ x\in D$$

a platí:

1. součet a rozdíl limit

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = b\pm c$$

2. součin limit

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = b\cdot c$$

3. podíl limit

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{b}{c},\ c\neq 0.$$

[1]

1.4.2 Jednostranné limity

Říkáme, že funkce f má v bodě a limitu zprava rovnou číslu b, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové kladné číslo η, že pro všechna $x \neq a$ z pravého okolí $\langle a, a + \eta)$ bodu a padnou hodnoty $f(x)$ do okolí $(b-\varepsilon; b + \varepsilon)$ čísla b. Limitu zprava funkce f v bodě a budeme zapisovat takto:

$$\lim_{x \to a+} f(x)$$

Říkáme, že funkce f má v bodě a limitu zleva rovnou číslu b, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové kladné číslo η, že pro všechna $x \neq a$ z levého okolí $(a - \eta; a\rangle$ bodu a padnou hodnoty $f(x)$ do okolí $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$ čísla b. Limitu zleva funkce f v bodě a budeme zapisovat takto:

$$\lim_{x \to a-} f(x)$$

[2]

1.4.3 Limity – řešené příklady

Vypočtěte limity:

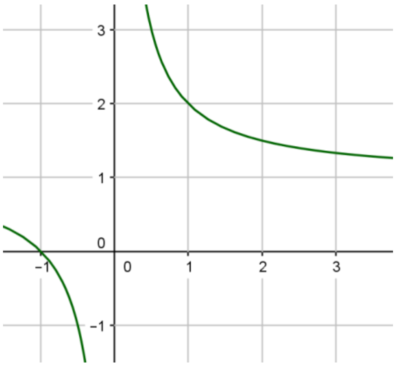
1) $$\lim_{x\to 0} 8x^{-6} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{8}{x^6}\right) = +\infty$$

V limitě si za *x* myslíme číslo, které se blíží *0*. Získáváme tedy 8 děleno číslem, které se blíží nule (je tedy hrozně malé). Z této úvahy získáme výsledek limity +∞.

2) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x^2-1)}{(x^2-x)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{((x-1)(x+1))}{(x(x-1))}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+1)}{x}\right) = 2$$

V limitě upravíme čitatel a jmenovatel a závorka *(x-1)* se vykrátí, limita se tím zjednoduší. Dosadíme číslo, které se blíží číslu *1* a výsledek limity vyjde *2*. Pokud bychom výraz v limitě neupravili, museli bychom řešit limitu zprava a zleva.

Obrázek 10: Obrázek limity příkladu 2 (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



3) $$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x-7}{1-e^{2x}}\right) = -\infty$$

e^{2x} jde v limitě k 0

Výraz v limitě je tedy mínus nekonečno děleno *1*, výsledek je tedy mínus nekonečno.

4) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-2x}{\sqrt{x^2-4}}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-2x}{x\sqrt{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right) = -2$$

V limitě nejprve upravíme jmenovatele, poté zkrátíme *x*. Výraz ve jmenovateli jde v limitě k *1*, jelikož výraz $4/x^2$ jde v limitě k nule. Dostaneme výraz *-2* v čitateli a *1* ve jmenovateli. Výsledek je tedy -2.

1.5 Spojitost funkce

Definice spojitosti funkce:

Říkáme, že funkce *f* je spojitá v bodě *a*, když:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

[2]

Podmínku spojitosti píšeme také takto:

$$\lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| = 0 \quad nebo \quad \lim_{h \to 0} |f(a+h) - f(a)| = 0$$

$h = x - a.$

[1]

Funkce *f* je v bodě *a* spojitá zprava, když:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

Funkce *f* je v bodě *a* spojitá zleva, když:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

Kritéria spojitosti:

a) Cauchy: Funkce *f* je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in D(f): \; |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$
$$stručně: \;\; x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon.$$

b) Heine: Funkce *f* je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje k $f(x_0)$, stručně:

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n), \;\; resp. \;\; (x_n \to x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to f(x_0)).$$

c) Funkce je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy, když existují konečné limity $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ a platí $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$.

[1]

Nechť funkce *f*, *g* jsou spojité v bodě *c*. Potom funkce $f+g$, $f \cdot g$, jsou spojité v bodě *c*. Je-li navíc $g(c) \neq 0$, je i funkce f/g spojitá v bodě *c*.

[5]

1.5.1 Body nespojitosti

Definice: Nechť f je definována v prstencovém okolí $P(x_0)$ hromadného bodu x_0 definičního oboru $x_0 \notin D(f)$ (připouštíme , avšak $P(x_0) \subset D(f)$). Bod x_0 je bod nespojitosti funkce f, jestliže buď f není v x_0 definována, nebo je v něm definována, ale není v něm spojitá.

Když

1) $f(x_0+) = f(x_0-) \neq f(x_0)$: x_0 je bod odstranitelné nespojitosti;

2) $f(x_0+) \neq f(x_0-)$: x_0 je bod nespojitosti I. druhu, číslo $f(x_0+) - f(x_0-)$ se nazývá skok funkce f;

3) alespoň jedna z limit $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ neexistuje (včetně případu $f(x_0\pm) = \pm\infty$): x_0 je bod nespojitosti 2. druhu.

[1]

Př. Najděte body nespojitosti funkce f:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$D(f) = R$-{-1,1}, body nespojitosti: -1,1

$$\lim_{x \to -1+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

Jmenovatel této limity jde k nule zleva. Dělíme tedy číslo blížící se k -1 velice malým záporným číslem.

$$\lim_{x \to -1-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

Ve výrazu v limitě dělíme číslo blízké -1 kladným číslem blízkým nule.

Limity zleva i zprava pro bod nespojitosti x=-1 jsou nevlastní. Bod x=-1 je bod nespojitosti II. druhu.

Nyní vyšetříme bod nespojitosti x=1.

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

Dělíme číslo blízké 1 kladným číslem blízkým 0. Vyjde tedy plus nekonečno.

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

V tomto případě dělíme číslo blízké 1 číslem, které je záporné a blízké 0. Výsledek je -∞.

Pro bod nespojitosti x=1 vyšly opět limity nevlastní. Bod *x*=1 je bodem nespojitosti II. druhu.

1.6 Derivace funkce

Definice: Nechť je funkce *f* definována v bodě x_0 a v nějakém jeho okolí. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right), \qquad h=x-x_0$$

nazýváme tuto limitu derivace funkce *f* v bodě x_0.

Má-li funkce *f* v bodě x_0 derivaci, je funkce *f* v bodě x_0 spojitá.

Derivace funkce $y = y'$.

Má-li funkce *f* v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$, má i funkce $y=kf(x)$, kde *k* je dané číslo, v bodě x_0 derivaci a platí:

$$y'=kf'(x_0).$$

Mají-li funkce *f,g* v bodě x_0 derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, má v tomto bodě derivaci i funkce $y=f(x)+g(x)$ a platí:

$$y'=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Mají-li funkce *f, g* v bodě x_0 derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, má v tomto bodě derivaci i funkce $y=f(x)g(x)$ a platí:

$$y'=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

Mají-li funkce *f, g* v bodě x_0 derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ a je-li $g(x_0)\neq 0$, má v tomto bodě derivaci i funkce $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$y'=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Nechť funkce $z = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a nechť funkce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$. Pak má funkce $y = f[g(x)]$ v bodě x_0 derivaci $f'(z_0)\cdot g'(x_0)$.

[2]

1.6.1 Seznam derivací vybraných elementárních funkcí

Tabulka 1: Seznam derivací elementárních funkcí (Zdroj: [6])

Funkce	Derivace funkce	Podmínky
k	0	k je konstanta, $k \in \mathbb{R}$
x	1	$x \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
x^{-n}	$-nx^{-n-1}$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}, n \in \mathbb{N}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x>0, \alpha \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x ln(a)$	$x \in a>0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$log_a(x)$	$\frac{1}{x lna}$	$x>0, a>0, a \neq 1$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x>0$
$sin(x)$	$cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$tg(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq (2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}$
$cotg(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$arccotg(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$sinh(x)$	$cosh(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$cosh(x)$	$sinh(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$tgh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$x \in \mathbb{R}$
$cotgh(x)$	$\frac{-1}{\sinh^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}$
$argsinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in \mathbb{R}$
$argcosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, +\infty)$
$argtgh(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$
$argcotgh(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

1.6.2 L´Hospitalovo pravidlo

Věta (L'Hospitalovo pravidlo):
Nechť *f* a *g* jsou funkce definovány na nějakém intervalu (K,∞). Jestliže mají jak *f* tak *g* limitu v nekonečnu rovnou 0, nebo jestli jak *f* tak *g* mají v nekonečnu nekonečnou limitu, pak

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\,´(x)}{g\,´(x)}$$

za předpokladu, že limita na pravé straně existuje.

L'Hospitalovo pravidlo lze použít pouze v případě, že zjišťujeme limitu podílu 2 funkcí $f(x)$, $g(x)$ takových, že pokud $x \to \infty$:

a) $f(x) \to 0$ a zároveň $g(x) \to 0$,

b) $f(x) \to \pm\infty$ a zároveň $g(x) \to \pm\infty$

[3]

1.6.3 První derivace - význam

První derivace během vyšetřování průběhu funkce ukazuje, zda-li je funkce v bodě klesající či rostoucí. Pomocí první derivace zjistíme i extrémy funkce.

Nechť funkce *f* je definována v bodě *a* a jistém jeho okolí.

Existuje-li takové okolí *J* bodu *a*, že

a) pro každé $x<a$ z okolí *J* je $f(x)<f(a)$,

   pro každé $x>a$ z okolí *J* je $f(x)>f(a)$,

pak o funkci *f* řekneme, že je rostoucí v bodě *a*.

Existuje-li takové okolí *J* bodu *a*, že

b) pro každé $x<a$ z okolí *J* je $f(x)>f(a)$,

   pro každé $x>a$ z okolí *J* je $f(x)<f(a)$,

pak o funkci *f* řekneme, že je klesající v bodě *a*.

Neostré nerovnosti implikují neostrou monotónii.

Jestliže funkce *f* má v bodě *a* kladnou derivaci, pak je v tomto bodě rostoucí.
Jestliže funkce *f* má v bodě *a* zápornou derivaci, pak je v tomto bodě klesající.

Nechť funkce *f* je definována v bodě *a* a jistém jeho okolí.

a) Existuje-li takové okolí *J* bodu *a*, že pro každé $x \neq a$ z tohoto okolí je

$$f(x) < f(a),$$

pak o funkci *f* řekneme, že nabývá v bodě *a* svého lokálního maxima.

b) Existuje-li takové okolí *J* bodu *a*, že pro každé $x \neq a$ z tohoto okolí je

$$f(x) > f(a),$$

pak o funkci *f* řekneme, že nabývá v bodě *a* svého lokálního minima.

Jestliže funkce *f* má v bodě a nenulovou (tj. kladnou nebo zápornou) derivaci, pak v tomto bodě nemá lokální extrém.

[2]

Fermatova podmínka extrému

Jestliže *f* nabývá lokálního extrému v bodě, ve kterém existuje derivace, potom musí být derivace rovna nule. Pokud se ovšem první derivace rovná nule, nemusí mít funkce v tomto bodě extrém.

[6]

Nechť pro funkci *f* platí $f'(a) = 0$, nebo nechť derivace $f'(a)$ neexistuje, ale funkce *f* je místo toho v bodě *a* spojitá.

Existuje-li takové okolí *J* bodu *a*, že:

a) pro každé $x < a$ z tohoto okolí je $f'(x) > 0$,
pro každé $x > a$ z tohoto okolí je $f'(x) < 0$,

pak funkce *f* nabývá v bodě *a* lokálního maxima, které je současně největší hodnotou funkce *f* v celém intervalu *J*. Jedná se o globální maximum.

Existuje-li takové okolí *J* bodu *a*, že:

b) pro každé $x<a$ z tohoto okolí je $f'(x)<0$,

pro každé $x>a$ z tohoto okolí je $f'(x)>0$,

pak funkce *f* nabývá v bodě *a* lokálního minima, které je současně nejmenší hodnotou funkce *f* v celém intervalu *J*. Jedná se o globální minimum.

[2]

1.6.4 Druhá derivace

Nechť *f* je funkce, která má v nějakém bodě *x* derivaci $f'(x)$. Existuje-li v bodě *x* derivace funkce $f'(x)$, tj. limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

nazýváme tuto limitu druhou derivací funkce *f* v bodě *x* a označujeme ji $f''(x)$.

Nechť křivka *K* je grafem funkce *f* definované v čísle *a* a jistém jeho okolí. Nechť tento graf má v bodě $A = [a, f(a)]$ tečnu *t*.

a) Budeme říkat, že graf *K* leží lokálně nad tečnou *t*, jestliže existuje okolí *J* čísla *a* takové, že pro každé $x \neq a$ z tohoto okolí leží bod $X = [x, f(x)]$ nad tečnou *t*.

b) Budeme říkat, že graf *K* leží lokálně pod tečnou *t*, jestliže existuje okolí *J* čísla *a* takové, že pro každé $x \neq a$ z tohoto okolí leží bod $X = [x, f(x)]$ pod tečnou *t*.

Nechť funkce *f* má v čísle *a* kladnou druhou derivaci. Pak graf funkce *f* leží lokálně nad tečnou sestrojenou v bodě $A = [a, f(a)]$.

Nechť funkce *f* má v čísle *a* zápornou druhou derivaci. Pak graf funkce *f* leží lokálně pod tečnou sestrojenou v bodě $A = [a, f(a)]$.

Má-li funkce *f* v čísle *a* nulovou první derivaci a kladnou druhou derivaci, má v čísle *a* lokální minimum.

Má-li funkce *f* v čísle *a* nulovou první derivaci a zápornou druhou derivaci má v čísle *a* lokální maximum.

[2]

Nechť křivka K, která je grafem funkce $y=f(x)$, má ve svém bodě $A = [a, f(a)]$ tečnu t. Nechť k je přímka vedená bodem A kolmo k ose x. Řekneme, že bod A je inflexním bodem grafu K, jestliže existuje takové okolí J čísla a, že když definiční obor funkce f omezíme na okolí J, pak platí: každý bod $x = [x, f(x)]$, $x \in J$, té části grafu K, která leží v jedné z obou polorovin vyťatých přímkou k, leží pod tečnou t a každý bod $X = [x, f(x)]$, $x \in J$, té části grafu K, která leží ve druhé z těchto polorovin, leží nad tečnou t.

Nechť pro funkce f platí $f''(a) = 0$, nebo nechť derivace $f''(a)$ neexistuje, ale funkce f má místo toho v čísle a spojitou první derivaci. Existuje-li takové okolí J čísla a, že

a) pro každé $x<a$ z tohoto okolí je $f''(x)>0$,

pro každé $x>a$ z tohoto okolí je $f''(x)<0$,

nebo existuje-li takové okolí J čísla a, že

b) pro každé $x<a$ z tohoto okolí je $f''(x)<0$,

pro každé $x>a$ z tohoto okolí je $f''(x)>0$,

pak bod $A = [a, f(a)]$ je inflexním bodem grafu funkce f.

Nechť funkce f má v každém vnitřním bodě intervalu J kladnou druhou derivaci. Jestliže některý z krajních bodů intervalu J k tomuto intervalu patří, pak nechť funkce f je v tomto bodě (jednostranně) spojitá.

Pak funkce f je v intervalu J konvexní.

Jestliže f je definována v intervalu J, pro libovolná dvě čísla $a<b$ z intervalu J a pro libovolné číslo x, pro které platí

$$a < x < b,$$

je splněna nerovnost

$$f(x) > \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a),$$

řekneme, že funkce f je konvexní v intervalu J.

Nechť funkce *f* má v každém vnitřním bodě intervalu *J* zápornou druhou derivaci. Jestliže některý z krajních bodů intervalu *J* k tomuto intervalu patří, pak nechť funkce *f* je v tomto bodě (jednostranně) spojitá.

Pak funkce *f* je v intervalu *J* konkávní.

Jestliže *f* je definována v intervalu *J*, pro libovolná dvě čísla $a<b$ z intervalu *J* a pro libovolné číslo *x*, pro které platí

$$a < x < b,$$

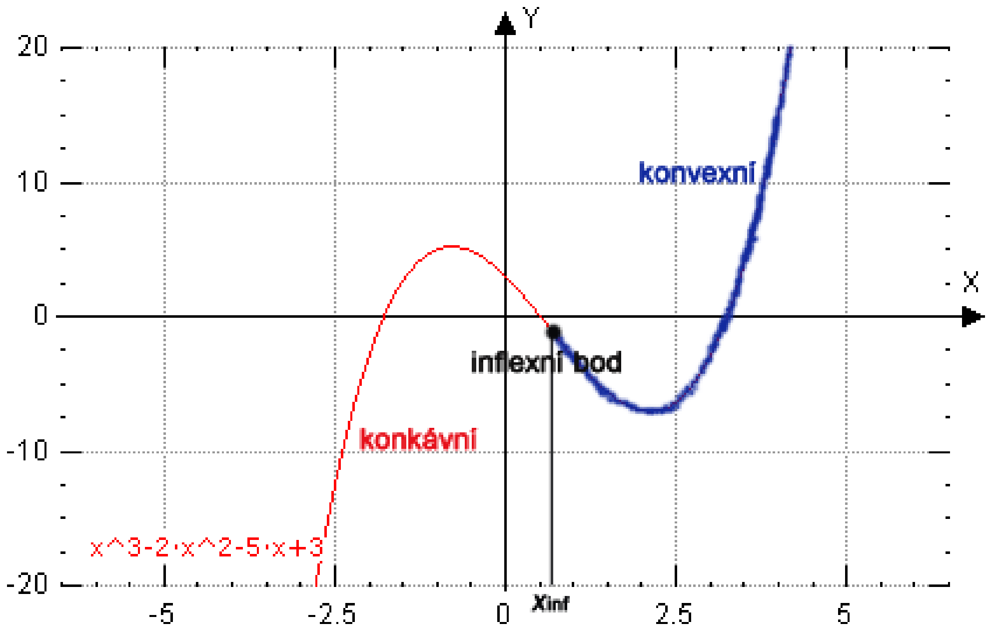
je splněna nerovnost

$$f(x) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a),$$

řekneme, že funkce *f* je konkávní v intervalu *J*.

[2]

Obrázek 11: Konvexní funkce, konkávní funkce, inflexní bod (Zdroj: [7])



2 Řešené příklady

Př. 1 Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$$

Jedná se o racionální lomenou funkci, která je definována v celém ℝ kromě bodů, ve kterých se jmenovatel rovná nule.

$$\begin{aligned} x^2-1&=0 \;/(+1) \\ x^2&=1 \\ x&=\pm 1 \end{aligned}$$

Výše uvedený výsledek ukazuje, že do definičního oboru nepatří body +1 a -1.

Definiční obor je tedy: *D(f)* = ℝ-{-1,1}.

Funkce je spojitá v *D(f)*.

Průsečík s osou *x*:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x^2-1}&=0 \\ x+3&=0 \\ x&=-3 \end{aligned}$$

Průsečík s osou *y*:

$$\begin{aligned} \frac{0+3}{0^2-1}&=y \\ y&=-3 \end{aligned}$$

Funkce tedy protíná osu *x* v bodě *x=-3* a osu *y* v bodě *y=-3*.

Prozkoumáme nejprve limity pokud *x* jde do +∞ a do -∞.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

V limitě vytkneme v čitateli i ve jmenovateli nejvyšší mocninu a zkrátíme. V limitě tedy máme výraz, který jde v čitateli k 0 a ve jmenovateli k 1. Limita je tedy rovna 0.

Obdobný postup aplikujeme i u následující limity.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^2\cdot(1-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=0$$

V další části budeme vyšetřovat jednostranné limity kolem bodů nespojitosti -1 a +1.

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x+3}{x^2-1}=-\infty$$

Výše uvedenou limitu řešíme jako limitu podílu. Limita čitatele je 2. Limita jmenovatele je záporné číslo, blízké 0. Dělíme tedy malým záporným číslem, proto je výsledek -∞.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x+3}{x^2-1}=+\infty$$

Úvaha u této limity je obdobná jako u předchozí. Číslo dělíme ovšem velmi malým kladným číslem. Výsledek je tedy +∞.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x+3}{x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x+3}{x^2-1}=+\infty$$

U první z výše uvedených limit dělíme malým záporným číslem a u druhé z limit kladným číslem. Tomu odpovídají výsledky obou limit. Pro oba body nespojitosti platí, že se jedná o body nespojitosti druhého druhu.

Nyní funkci derivujeme, abychom zjistili, zda funkce *f* má nějaké extrémy a kde se nacházejí. Jedná se o podíl, proto u derivace postupujeme podle vzorce na derivaci podílu.

$$\left(\frac{x+3}{x^2-1}\right)'=\frac{(x^2-1)-(x+3)\cdot 2\mathrm{x}}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-6\mathrm{x}-1}{(x^2-1)^2}$$

Derivace existuje, zjistíme tedy, kdy se rovná derivace nule.

$$-x^2-6x-1=0$$
$$x^2+6x+1=0$$
$$x_{1/2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4}}{2}$$
$$x_1=-0,17158 \rightarrow y_1=-2,9142$$
$$x_2=-5,828 \rightarrow y_2=-0,0858$$

Funkce má dva extrémy. První extrém má souřadnice [-0,17158, -2,94142] a druhý extrém má souřadnice [-5,828, -0,0858].

(-∞;.-5,828)	(-5,828;-1)	(-1;-0,17158)	(-0;17158,1)	(1;+∞)
záporná derivace	kladná derivace	kladná derivace	záporná derivace	kladná derivace
klesající	rostoucí	rostoucí	klesající	rostoucí

Ve výše uvedené tabulce jsme prozkoumali, ve kterých intervalech je funkce rostoucí a ve kterých je klesající. Do vypočítané derivace vždy dosadíme nějaké číslo z intervalu, který zkoumáme a pokud jako derivace vyjde kladné číslo je funkce v tomto intervalu rostoucí, pokud vyjde záporné, je funkce v intervalu klesající.

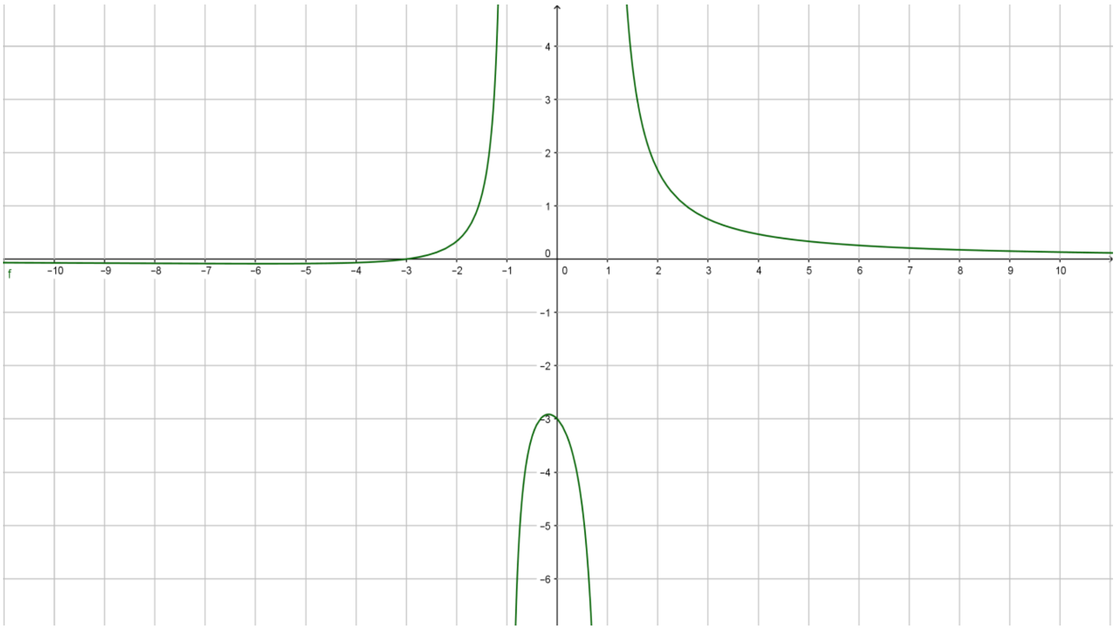
V následující části vypočítáme druhou derivaci funkce, ze které poznáme inflexní bod, konkávnost a konvexnost funkce.

$$\left(\frac{-x^2-6x-1}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{(-2x-6)\cdot(x^2-1)^2-(-x^2-6x-1)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x^3+18x^2+6x+6}{(x^2-1)^3}$$
$$\frac{2x^3+18x^2+6x+6}{(x^2-1)^3}=0$$
$$2x^3+18x^2+6x+6=0$$
$$2(x^3+9x^2+3x+3)=0$$
$$x=-8,69464$$

Inflexním bodem funkce *f* je *x*=-8,69464. V tomto bodu je druhá derivace funkce rovna 0. Funkce má v intervalu (-∞;-8,69464) zápornou druhou derivaci a je tedy na tomto intervalu konkávní. Na intervalu (-8,69464; -1) je druhá derivace kladná a tedy na tomto intervalu konvexní. Na intervalu (-1; 1) je funkce konkávní, jelikož je druhá derivace záporná. Na intervalu (1; +∞) je funkce konvexní – druhá derivace je kladná.

Ze všech výše uvedených výpočtů získáme průběh vyšetřované funkce, tedy následující graf.

Obrázek 12: Graf příkladu č.1 (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



Př. 2

$$f(x)=5x^2\cdot e^{-x^2}$$

Definičním oborem této funkce jsou všechna reálná čísla →*D(f)* = ℝ. V tomto intervalu je funkce spojitá. V této funkci nejsou body nespojitosti.

Dále platí: $f(-x)=5(-x)^2\cdot e^{-(-x)^2}=5x^2\cdot e^{-x^2}=f(x)$

Jelikož platí, že *f(-x)* = *f(x)*, jedná se o sudou funkci. Funkce je tedy souměrná podle osy *y*. Stačí tedy vyšetřit průběh funkce jen na intervalu <0; +∞).

Průsečík s osou *x*: $0=5x^2\cdot e^{-x^2}$

$$x=0$$

Průsečík s osou *y* (řešíme rovnici *y* = *f(0)*) → pro *y* = *0*.

Vyšetříme tedy limity funkce pro případ, že *x* → 0 a *x* → +∞.

$$\lim_{x\to+\infty} 5x^2\cdot e^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x}{e^{x^2}\cdot 2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{e^{x^2}}=0$$

Výše uvedenou limitu musíme nejprve převést z případu "+∞·0" na případ "∞/∞". V této fázi můžeme použít L'Hospitalovo pravidlo. Dalšími úpravami dojdeme k limitě, ve které dělíme velice vysokým číslem. Výsledek limity je tedy 0.

V následující limitě nemusíme limitu upravovat a rovnou vychází limita z "0/1" což je 0.

$$\lim_{x\to 0} 5x^2\cdot e^{-x^2}=0$$

Dále budeme derivovat funkci *f*. Zjistíme, ve kterých bodech se rovná první derivace funkce 0. Pokud bude derivace na nějakém intervalu kladná, funkce bode rostoucí, pokud záporná, funkce bude na intervalu klesající.

$$f'(x)=(5x^2\cdot e^{-x^2})'=\left(\frac{5x^2}{e^{x^2}}\right)'=\frac{10x\cdot e^{x^2}-5x^2\cdot e^{x^2}\cdot 2x}{(e^{x^2})^2}=\frac{e^{x^2}\cdot(10x-10x^3)}{(e^{x^2})^2}=\frac{10x\cdot(1-x^2)}{e^{x^2}}$$

$$\frac{10x\cdot(1-x^2)}{e^{x^2}}=0 \qquad D(f')=R$$

$$10x\cdot(1-x^2)=0$$

$$x_1=0$$

$$x_2=1$$

$$x_3=-1$$

První derivace je rovna nule ve třech bodech.

V intervalu (-∞; -1) je derivace funkce kladná a funkce je v tomto intervalu rostoucí.

V intervalu (-1; 0) je první derivace funkce záporná a funkce je tedy klesající.

V intervalu (0; 1) je derivace funkce kladná. Funkce je tedy v tomto intervalu rostoucí.

V intervalu (1; +∞) je první derivace funkce f záporná a funkce je tedy na tomto intervalu klesající.

V bodě *x*=0 nastává lokální minimum → *f(0) = 0.*

V bodě *x*=1 nastává lokální maximum → *f(1) =5/e.*

Nyní pomocí druhé derivace zjistíme inflexní body, konkávnost a konvexnost funkce.

$$\left(\frac{10x\cdot(1-x^2)}{e^{x^2}}\right)'=\frac{(10(1-x^2)-20x^2)\cdot e^{x^2}-e^{x^2}\cdot 2x\cdot(10x\cdot(1-x^2))}{(e^{x^2})^2}=\frac{10\cdot(2x^4-5x^2+1)}{e^{x^2}}$$

$$\frac{10\cdot(2x^4-5x^2+1)}{e^{x^2}}=0 \qquad D(f)=R$$

$$10\cdot(2x^4-5x^2+1)=0$$

$$2x^4-5x^2+1=0$$

$$substituce\ \ y=x^2$$

$$2y^2-5y+1=0$$

$$y_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$$

$$y_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$$

$$y_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$$

$$x_1=\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}} \qquad x_2=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}$$

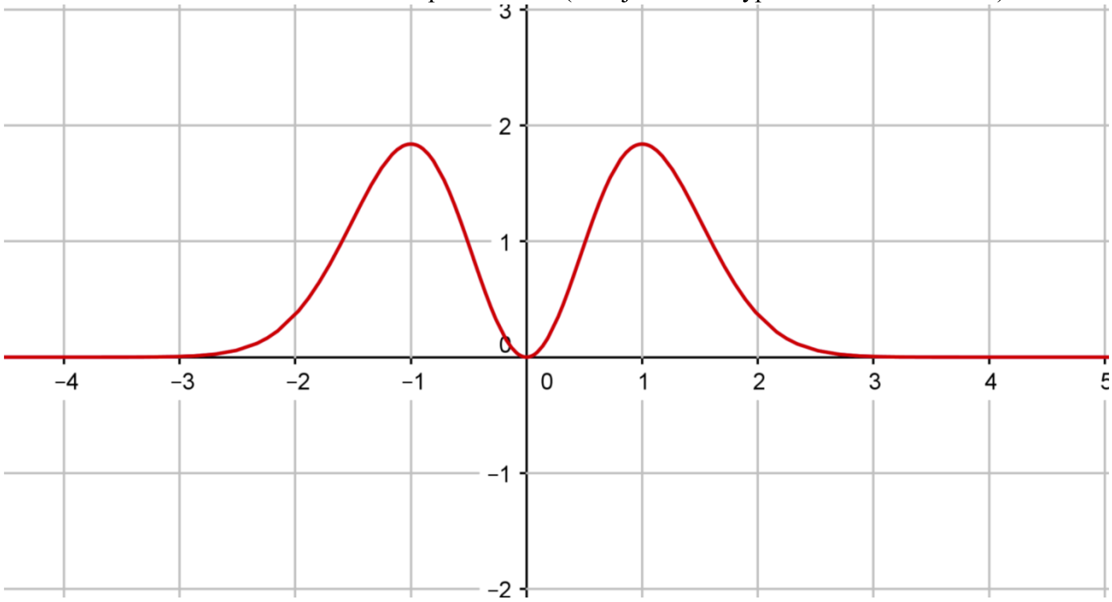
$$x_3=\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}} \qquad x_4=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}$$

$(0,\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}})$	$(\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}},\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}})$	$(\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}},+\infty)$
2. derivace kladná	2. derivace záporná	2. derivace kladná
konvexní	konkávní	konvexní

Ve vyšetřovaném intervalu (0; +∞), jsme našli dva inflexní body o prvních souřadnicích x_1 a x_3. Ve výše uvedené tabulce je ukázáno, ve kterém intervalu je funkce konvexní a ve kterém konkávní. Pokud je druhá derivace kladná je funkce konvexní, pokud záporná tak je funkce na tomto intervalu konkávní.

Všechny vypočítané údaje nám poskytnou následující graf funkce.

Obrázek 13: Graf funkce příkladu č.2 (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



Př. 3

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

Tato funkce je definována pouze v bodech, ve kterých je argument logaritmu větší než 0.

$$\sqrt{x^2+1}>0$$

Výše uvedená nerovnost platí pro všechna reálná čísla → *D(f)* = ℝ.

Průsečík s osou *x* i s osou *y* je v bodě [0, 0].

Pro tuto funkci platí: $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}\right)=f(-x)$

Zadaná funkce je tedy sudá, jelikož platí *f(x)* = *f(-x)* a budeme vyšetřovat funkci na intervalu <0; +∞).

Vyšetříme limity v krajních bodech daného intervalu.

$$\lim_{x\to 0}\ln\sqrt{x^2+1}=0$$

Vyšetřujeme tedy limitu z přirozeného logaritmu jedné a to se rovná 0.

$$\lim_{x\to +\infty}\ln\sqrt{x^2+1}=+\infty$$

Pokud *x* jde do +∞, i výsledek této limity jde do nekonečna.

Pokračujeme výpočtem první derivace. V tomto případě derivujeme složenou funkci.

$$\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2\mathrm{x}=\frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{x}{x^2+1}=0$$

$$x=0$$

Funkce má extrém pouze v bodě *x=0 → f(0) = 0.*

Na intervalu (0; +∞) je první derivace kladná a funkce je tedy rostoucí. Jelikož je funkce sudá je funkce na intervalu (-∞; 0) klesající.

Dále vypočítáme hodnotu druhé derivace.

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)-(x\cdot 2\mathrm{x})}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Zjistíme souřadnice inflexních bodů. V nich se druhá derivace rovná nule.

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0$$
$$1-x^2=0$$
$$x_1=1$$
$$x_2=-1$$

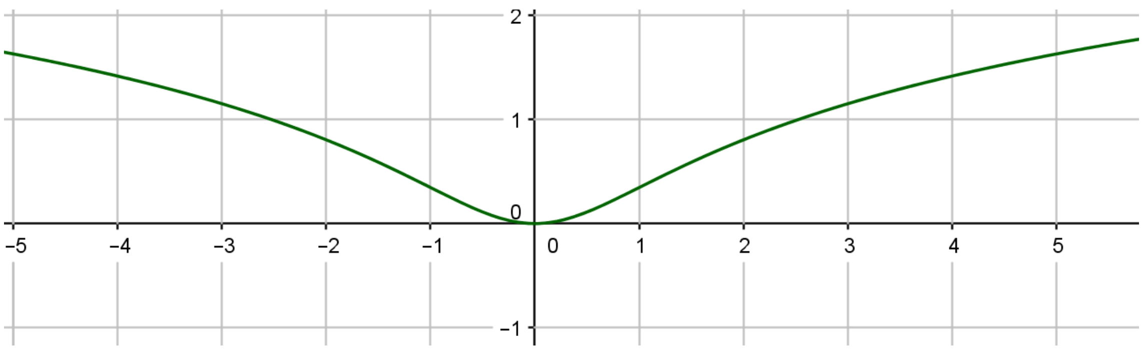
Funkce má 2 inflexní body. Pro interval, který vyšetřujeme je inflexní bod pouze x_1 = 1 ($f(x_1)=ln\sqrt{2}$).

V intervalu (0; 1) je druhá derivace funkce kladná. Funkce je v tomto intervalu konvexní.

V intervalu (1; +∞) je druhá derivace funkce záporná. Funkce je na tomto intervalu konkávní.

Pro vyšetřovanou funkci získáme následující graf.

Obrázek 14: Graf funkce příkladu č. 3 (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



Př. 4

$f(x) = \arccos(x+3)$

Nejprve zjistíme definiční obor funkce.

$$-1 \leqslant x+3 \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant x+3 \qquad x+3 \leqslant 1$$
$$-4 \leqslant x \qquad x \leqslant -2$$
$$D(f) = <-4, -2>$$

Průsečík s osou *x*:

$$0 = \arccos(x+3)$$
$$cos0 = x+3$$
$$1 = x+3$$
$$x = -2$$
$$\textit{Průsečík s osou x v bodě } [-2,\ 0].$$

Průsečík s osou *y*:

$$y = \arccos(0+3)$$
$$y = arccos3 \rightarrow \textit{neexistuje Průsečík s osou y v této funkci neexistuje.}$$

Derivace funkce *f*: $$(\arccos(x+3))' = \frac{-1}{\sqrt{1-(x+3)^2}}$$

Derivace funkce nikde nenabývá hodnoty 0, tedy nemá extrém a navíc je všude záporná. Vyšetřovaná funkce je na celém svém definičním oboru klesající.

Druhá derivace funkce:

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{1-(x+3)^2}}\right)' = \frac{-x-3}{(1-(x+3)^2)^{(3/2)}}$$
$$\frac{-x-3}{(1-(x+3)^2)^{(3/2)}} = 0$$
$$-x-3 = 0$$
$$x = -3$$

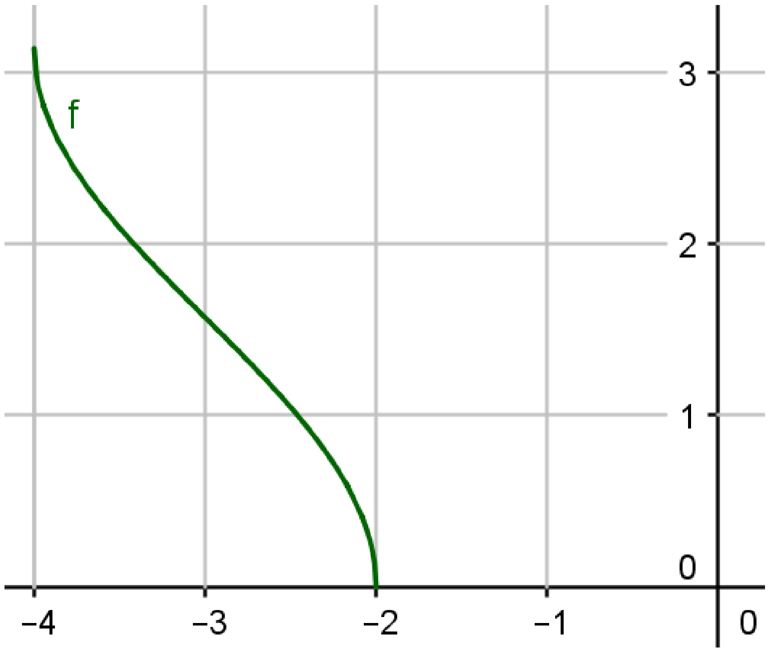
Funkce má jeden inflexní bod a to o souřadnicích [-3; $\pi/2$].

Na intervalu (-4; -3) je druhá derivace kladná a funkce je v tomto intervalu konvexní.

Na intervalu (-3; -2) je druhá derivace záporná a funkce je v tomto intervalu konkávní.

Ze všech výše uvedených údajů získáme graf vyšetřované funkce.

Obrázek 15: Graf funkce příkladu č. 4 (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



Př. 5

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+7x-3}{x^2}$$

Definičním obor: *D(f)* = ℝ - {0}

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+7x-3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=+\infty$$

Nyní můžeme postupně vyšetřit limity v nevlastních bodech.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2+7x-3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=-\infty$$

Výše uvedené limity jsme rozdělili na limity součtů, které již nebyl problém vyhodnotit.

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3+2x^2+7x-3}{x^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{x^3+2x^2+7x-3}{x^2}=-\infty$$

Obě dvě tyto limity vedou na podíl -3 děleno malým kladným číslem. Výsledek tedy musí být vysoké záporné číslo.

Určíme první derivaci funkce:

$$\left(\frac{x^3+2x^2+7x-3}{x^2}\right)'=\left(x+2+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}\right)'=1-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3}=\frac{x^3-7x+6}{x^3}\qquad x\neq0$$

$$\frac{x^3-7x+6}{x^3}=0$$

$$x^3-7x+6=0$$

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)=0$$

$$x_1=1$$

$$x_2=2$$

$$x_3=-3$$

(-∞; -3)	(-3; 0)	(0; 1)	(1; 2)	(2; +∞)
1. derivace kladná	1. derivace záporná	1. derivace kladná	1. derivace záporná	1. derivace kladná
rostoucí	klesající	rostoucí	klesající	rostoucí

Tabulka výše popisuje, ve kterých intervalech je funkce klesající a ve kterých je rostoucí.

V bodech [1, 7/2], [2, 27/4] a [-3, -33/9] se nachází extrémy funkce.

Vypočítáme druhou derivaci funkce *f*.

$$\left(\frac{x^3-7x+6}{x^3}\right)'=\left(1-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)'=\frac{14}{x^3}-\frac{18}{x^4}=\frac{14x-18}{x^4} \quad pro\ x\neq 0$$

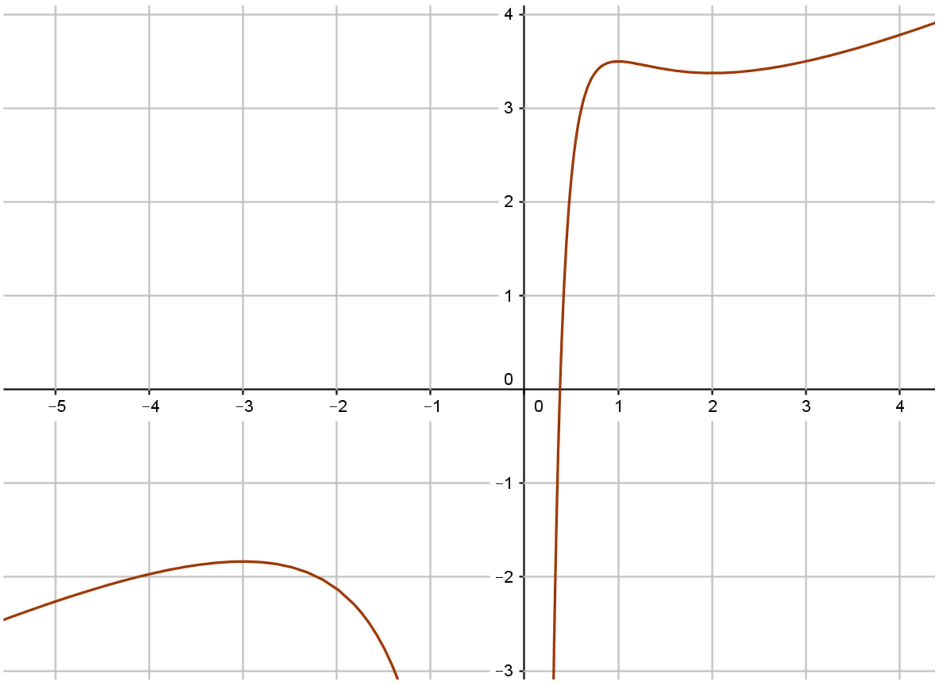
$$\frac{14x-18}{x^4}=0$$

$$14x-18=0$$

$$x=\frac{18}{14}$$

$(-\infty,0)$	$(0,\frac{18}{14})$	$(\frac{18}{14},+\infty)$
2. derivace je záporná	2. derivace je záporná	2. derivace je kladná
konkávní	konkávní	konvexní

Obrázek 16: Graf funkce příkladu č. 5 (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



Př. 6

$$f(x)=\left|\frac{x+5}{-x+3}\right|$$

Jelikož zadaná funkce obsahuje absolutní hodnotu, musíme nejprve zjistit nulové body funkce.

$$\begin{aligned} x+5&=0 \qquad & -x+3&=0 \\ x&=-5 & x&=3 \end{aligned}$$

Nulovými body jsou x_1 = -5 a x_2 = 3. Také je zřejmé, že definiční obor funkce *f* je $D(f) = \mathbb{R}-\{3\}$, jelikož se jmenovatel funkce nesmí rovnat 0.

Průsečík s osou *x:*

$$0=\left|\frac{x+5}{-x+3}\right|$$
$$x=-5$$

Průsečík s osou *x* v bodě [-5,0].

Průsečík s osou *y* v bodě [0, 5/3].

$$y=\left|\frac{0+5}{-0+3}\right|$$
$$y=\frac{5}{3}$$

Definiční obor pomocí nulových bodů rozdělíme na intervaly a zjistíme, zda je na nich funkce uvnitř absolutní hodnoty kladná či záporná. Pokud je kladná, absolutní hodnotu již nepíšeme. Pokud je záporná, musíme změnit znaménko. Funkci vyšetřujeme pro každý interval zvlášť.

(-∞; -5)	(-5; 3)	(3; +∞)
záporná funkce	kladná funkce	záporná funkce

a) vyšetříme funkci na intervalu (-∞; -5)

V tomto intervalu je funkce uvnitř absolutní hodnoty záporná. Upravíme ji tedy do tvaru, ve kterém ji budeme vyšetřovat.

$$\left|\frac{x+5}{-x+3}\right|=\frac{-x-5}{-x+3}$$

Vyšetříme limitu v nevlastním bodě -∞.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x-5}{-x+3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x \cdot (1+\frac{5}{x})}{-x \cdot (1-\frac{3}{x})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 1$$

Vytkneme nejvyšší mocninu v čitateli i ve jmenovateli a zkrátíme je. Vyjde limita, která jde v čitateli i ve jmenovateli k 1. Výsledek této limity je 1.

Vyšetřovat limitu v bodě -5 nemusíme. K výsledku pomůže úvaha, jelikož v tomto bodě protíná funkce osu *x*. Výsledek této limity je 0.

První derivace funkce:

$$\left(\frac{-x-5}{-x+3}\right)' = \frac{(-x-5)' \cdot (-x+3) - (-x-5) \cdot (-x+3)'}{(-x+3)^2} = \frac{-1 \cdot (-x+3) - x - 5}{(-x+3)^2} = \frac{x-3-x-5}{(-x+3)^2} = \frac{-8}{(-x+3)^2}$$

První derivace této funkce je na celém svém intervalu záporná a je tedy na vyšetřovaném intervalu klesající. V tomto intervalu se nenachází extrém.

Druhá derivace funkce:

$$\left(\frac{-8}{(-x+3)^2}\right)' = \frac{-(2 \cdot (-x+3) \cdot -1) \cdot (-8)}{(-x+3)^4} = \frac{-16 \cdot (-x+3)}{(-x+3)^4} = \frac{16\text{x} - 48}{(-x+3)^2}$$

Tato funkce má druhou derivaci nulovou v bodě $x = 3$, ale tento bod se nenachází ve vyšetřovaném intervalu. Na tomto intervalu je druhá derivace záporná a funkce je v tomto intervalu konkávní.

b) vyšetříme funkci na intervalu (-5; 3)

V tomto intervalu je funkce kladná a vyšetřujeme jí v následujícím tvaru:

$$\frac{x+5}{-x+3}.$$

Limita v bodě -5 byla zjištěna výše.

Vyšetříme tedy limitu v bodě 3. Tento bod je bodem nespojitosti dané funkce. Musíme vyšetřit limitu zprava a zleva, ale vzhledem k intervalu vyšetříme v této části jen limitu zleva.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x+5}{-x+3} = +\infty$$

Výraz v této limitě jde v čitateli k 8 a ve jmenovateli k 0 zprava. To znamená, že dělíme velmi malým kladným číslem a výsledek je tedy $+\infty$.

Vypočteme první derivaci funkce.

$$\left(\frac{x+5}{-x+3}\right)' = \frac{(x+5)' \cdot (-x+3) - (x+5) \cdot (-x+3)'}{(-x+3)^2} = \frac{1 \cdot (-x+3) - (x+5) \cdot (-1)}{(-x+3)^2} = \frac{-x+3+x+5}{(-x+3)^2} = \frac{8}{(-x+3)^2}$$

První derivace není nulová, nemá tedy extrém. První derivace je kladná, proto je vyšetřovaná funkce na vyšetřovaném intervalu rostoucí.

Nyní vypočteme druhou derivaci funkce.

$$\left(\frac{8}{(-x+3)^2}\right)' = \frac{-8 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-x+3)}{(-x+3)^4} = \frac{-16x+48}{(-x+3)^4}$$

Druhá derivace funkce je nulová pro $x = 3$. Tento bod nepatří do definičního oboru funkce. To tedy znamená, že funkce nemá na vyšetřovaném intervalu inflexní bod. Druhá derivace je na vyšetřovaném intervalu kladná a vyšetřovaná funkce je tedy na tomto intervalu konkávní.

c) vyšetříme funkci na intervalu (3; +∞)

Na tomto intervalu je funkce záporná a musíme si ji upravit do náležitého tvaru bez absolutní hodnoty.

$$\left|\frac{x+5}{-x+3}\right| = \frac{-x-5}{-x+3}$$

Bod x = 3 je bodem nespojitosti. Vzhledem k vyšetřovanému intervalu vyšetřujeme limitu, ve které jde x k 3 zprava.

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{-x-5}{-x+3} = +\infty$$

Nyní můžeme vyšetřit limitu funkce v nevlastním bodě -∞.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x-5}{-x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x\cdot(1+\frac{5}{x})}{-x\cdot(1-\frac{3}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 1$$

Zjistíme první derivaci funkce.

$$\left(\frac{-x-5}{-x+3}\right)' = \frac{(-x-5)'\cdot(-x+3)-(-x-5)\cdot(-x+3)'}{(-x+3)^2} =$$

$$= \frac{-1\cdot(-x+3)-x-5}{(-x+3)^2} = \frac{x-3-x-5}{(-x+3)^2} = \frac{-8}{(-x+3)^2}$$

První derivace funkce nemá na vyšetřovaném intervalu extrém. Funkce je na tomto intervalu klesající, jelikož je první derivace na celém intervalu záporná.

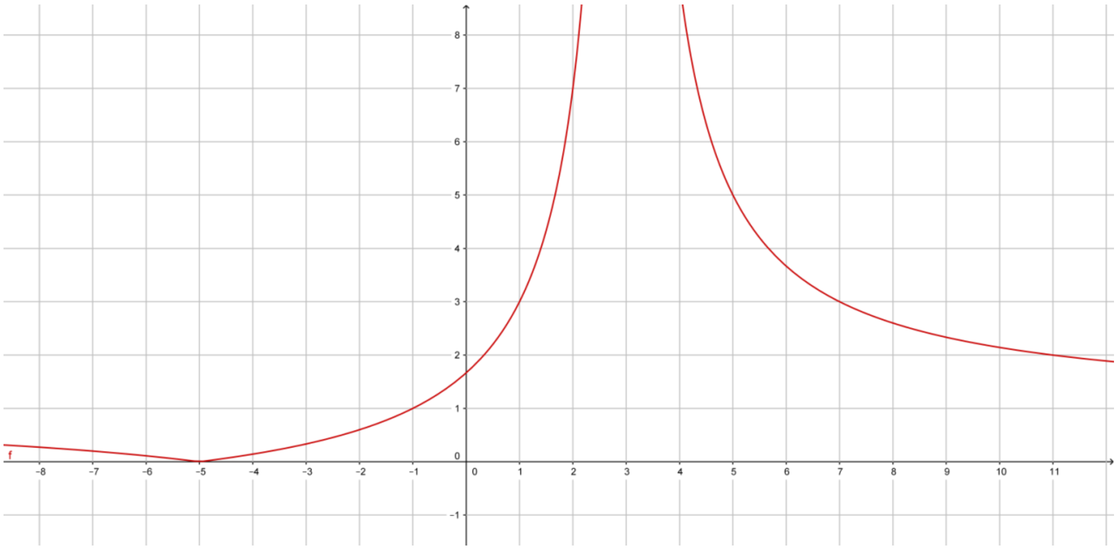
Zjistíme druhou derivaci funkce.

$$\left(\frac{-8}{(-x+3)^2}\right)' = \frac{-(2\cdot(-x+3)\cdot(-1))\cdot(-8)}{(-x+3)^4} = \frac{-16\cdot(-x+3)}{(-x+3)^4} = \frac{16\mathrm{x}-48}{(-x+3)^2}$$

Tato funkce je na celém vyšetřovaném intervalu konvexní, jelikož je druhá derivace kladná na vyšetřovaném intervalu. Druhá derivace je nulová pro bod x = 3. Tento bod ovšem nepatří do definičního oboru funkce.

Nyní pomocí všech výsledků a informací ze všech intervalů sestrojíme graf vyšetřované funkce. Tento graf je znázorněn na níže uvedeném obrázku.

Obrázek 17: Graf funkce příkladu č. 6 (Zdroj: Vlastní vypracování v GeoGebra)



Závěr

V první části mé bakalářské práce jsem se zabývala definicí funkce a základními pojmy, které se s tímto pojmem pojí. Soustředila jsem se hlavně na pojmy, které přímo souvisí s vyšetřováním průběhu funkce o jedné proměnné. V každé sekci byl proveden alespoň jeden příklad, který názorně ukázal problematiku dané části. Některé příklady v první části této práce byly doplněny o vysvětlení, aby čtenář jasně pochopil, jak jsem došla k výsledku.

V druhé části bakalářské práce se nachází řešené příklady. Tyto příklady jsou komplexnější než řešené příklady v první části. V této části totiž vyšetřuji funkci od začátku až do konce. Ze získaných výsledků jsem byla vždy schopna vytvořit kompletní graf průběhu vyšetřované funkce.

Resumé

This bachelor thesis pursues of the investigation of functions. At first define the term of function. I write also about basic characteristic of function (for example domain, limits,…). This theoretical part is explained by easy examples which help to understand this issue better. The second part of my bachelor thesis contains several exercises with solutions.

Seznam literatury

[1] DRÁBEK, P. a S. MÍKA. *Matematická analýza I.* 5. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2003, 158s., ISBN 80-7082-978-8

[2] DLOUHÝ, Zbyněk. Úvod do matematické analýzy: učebnice pro pedagogické fakulty. 2. nezm. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství)

[3]ČVUT, Fakulta elektrotechnická, L'Hospitalovo pravidlo [online]. [23. 3. 2017]. Dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/mt/txta/2/txc3aa2f.htm

[4] POLÁK, Josef. Matematická analýza I: cvičení. Plzeň: Vysoká škola strojní a elektrotechnická, 1983.

[5] ČERYCH, J. a kol. Příklady z matematické analýzy – V. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987.

[6] Almamather, MA1 [online]. [13. 1. 2017]. Dostupné z: https://almamather.zcu.cz/MA1

[7] Aristoteles, Inflexní bod [online]. [4. 2. 2017]. Dostupné z:

http://www.aristoteles.cz/matematika/funkce/vysetrovani/inflexni-bod-konexnost-konkavnost-funkce.php

[8] TOMICZEK, P. Matematická analýza I. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2006. [online]. [20. 3. 2017].

Dostupné z: http://home.zcu.cz/~tomiczek/Data/SDPaMA1.pdf

Seznam obrázků a tabulek

I