Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Diplomová práce

Spektrální vlastnosti Laplaceova operátoru s nelokálními okrajovými podmínkami

Plzeň, 2017

Bc. Martin Hamáček

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: **2016/2017**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Martin HAMÁČEK**
Osobní číslo:	**A15N0003P**
Studijní program:	**N1101 Matematika**
Studijní obor:	**Matematika**
Název tématu:	**Radiálně symetrické operátory Laplaceova typu s nelokálními okrajovými podmínkami a jejich spektrální vlastnosti**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování:

1. Nastudovat standardní úlohy na vlastní čísla pro radiálně symetrický Laplaceův operátor a seznámit se s Besselovými funkcemi a jejich vlastnostmi.
2. Nastudovat známé Fučíkovy úlohy.
3. Uvažovat modifikace předchozích úloh s nelokálními okrajovými podmínkami a zaměřit se na závislost bodového (případně Fučíkova) spektra na parametrech úlohy. Získané spektrální vlastnosti využít k zodpovězení vybraných otázek týkajících se řešitelnosti úloh Laplaceova typu.
4. Porovnat teoretické výsledky s numerickými experimenty.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**

Rozsah kvalifikační práce: **cca 45 stran**

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

- **M. Arias, J. Campos: Radial Fučík Spectrum of the Laplace Operator, J. Math. Anal. Appl. 190 (1995), 654-666.**
- **Abramowitz, M., I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, US Government Printing Office, Washington, DC, 1964.**
- **S. Fučík: Boundary value problems with jumping nonlinearities. Časopis pro pěstování matematiky, vol. 101 (1976), 69-87.**
- **N. Sergejeva: Fučík spectrum for the second order BVP with nonlocal boundary condition. Nonlinear Anal., Model. Control 12 (2007), 419-429.**
- **P. Drábek: The p-Laplacian mascot of nonlinear analysis. Proceedings of Equadiff 11. Bratislava: Comenius University Press (2007), 85-98.**
- **B. M. Brown, W. Reichel: Computing eigenvalues and Fucik-spectrum of the radially symmetric p-Laplacian. J. Comput. Appl. Math. 148, 1 (2002), 183-211.**

Vedoucí diplomové práce: **Doc. Ing. Gabriela Holubová, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání diplomové práce: **3. října 2016**
Termín odevzdání diplomové práce: **22. května 2017**

Doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.
děkan

L.S.

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 3. října 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

V Plzni dne .... Podpis ....

Poděkování

Chtěl bych upřímně poděkovat paní doc. Ing. Gabriele Holubové, Ph.D. za vedení mé diplomové práce, cenné rady a odborný dohled.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá úlohou na vlastní čísla a Fučíkovým spektrem radiálně symetrického Laplaceova operátoru s nelokální (integrální) okrajovou podmínkou.

Nejdříve vyšetřujeme tuto úlohu v první dimenzi, poté v druhé a obecně v n-té dimenzi. Mezi hlavní výsledky této práce patří analytické vyjádření první větve Fučíkova spektra v druhé dimenzi, omezení na oblast, ve které Fučíkovo spektrum leží (v obecné dimenzi), a odvození tečen Fučíkova spektra ve vlastních číslech (v obecné dimenzi).

Klíčová slova

radiálně symetrický Laplaceův operátor, nelokální okrajová podmínka, úloha na vlastní čísla, Fučíkovo spektrum

Abstract

This thesis is devoted to studying of an eigenvalue problem of radially symmetric Laplace operator with a nonlocal (integral) boundary condition. In addition, we are interested in describing the so-called Fučík spectrum of the corresponding problem.

First, we deal with our problem in the first dimension, then in higher dimensions (2 and in general n). The main result of our thesis is an analytical description of the first branch of the Fučík spectrum in the second dimension. We also restrict the region where the Fučík spectrum lies and give a description of tangents to Fučík curves in the eigenvalues.

Keywords

radially symmetric Laplace operator, nonlocal boundary condition, eigenvalue problem, Fučík spectrum

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Zkoumání Fučíkova spektra začalo ve 20. století při vyšetřování řešitelnosti okrajových úloh se skákající nelinearitou (viz [1]). Od té doby vyšlo mnoho článků, ve kterých se studovalo Fučíkovo spektrum jednotlivých okrajových úloh. V této práci budeme navazovat především na následující články: [5, M. Arias a J. Campos], který se zabývá Fučíkovým spektrem radiálně symetrického Laplaceova operátoru s Dirichletovo okrajovou podmínkou a [7, N. Sergejeva], který se zabývá Fučíkovým spektrem Laplaceova operátoru v jedné dimenzi s nelokální (integrální) okrajovou podmínkou.

Tato práce je věnována spektrálním vlastnostem radiálně symetrického Laplaceova operátoru s nelokálními okrajovými podmínkami v obecné dimenzi n. Budeme se tedy zabývat úlohami na vlastní čísla

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \lambda u(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \int_0^1 r^{n-1}u(r)\mathrm{d}r = 0, & \end{aligned} \tag{1.1}$$

a úlohou na Fučíkovo spektrum

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \int_0^1 r^{n-1}u(r)\mathrm{d}r = 0. & \end{aligned} \tag{1.2}$$

V kapitole 2 zformulujeme úlohu na vlastní čísla a Fučíkovo spektrum.

V kapitole 3 budeme vyšetřovat vlastnosti úloh (1.1) a (1.2) v jedné dimenzi. Nejdříve vyšetříme vlastní čísla a vlastní funkce úlohy (1.1). Dále najdeme tzv. adjungované vlastní funkce k úloze (1.1), které využijeme pro odvození některých vlastností Fučíkova spektra úlohy (1.2). Pro úlohu (1.2) najdeme analytický předpis jednotlivých větví Fučíkova spektra, omezení na oblast, ve které Fučíkovo spektrum leží, a najdeme předpis pro tečny Fučíkova spektra ve vlastních číslech.

V kapitole 5 vyšetříme vlastnosti úloh (1.1) a (1.2) v druhé dimenzi. Podobně jako v kapitole 3 vyšetříme vlastní čísla a vlastní vektory úlohy (1.1) a najdeme tzv. adjungované vlastní funkce. V této kapitole však neodvodíme předpis celého Fučíkova spektra úlohy (1.2), ale pouze jeho první větev. Opět najdeme omezení na oblast, ve které Fučíkovo spektrum leží, a najdeme tečny ve vlastních číslech.

V kapitole 6 vyšetříme vlastnosti úloh (1.1) a (1.2) v obecné dimenzi n. Opět vyšetříme vlastní čísla a vlastní vektory úlohy (1.1) a najdeme tzv. adjungované vlastní funkce. V této kapitole opět najdeme omezení na oblast, ve které Fučíkovo spektrum leží, a najdeme tečny ve vlastních číslech.

V příloze A popíšeme numerický experiment pro hledání Fučíkova spektra úlohy (1.2). Dále zde můžeme najít obrázky numericky získaného Fučíkovo spektra.

Kapitola 2

Formulace úlohy

V této práci se budeme zabývat úlohou na vlastní čísla ve tvaru

$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) = \lambda u \qquad & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u'(0) = 0,\ \int_{\Omega} u(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = 0, & \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < 1\}.$$

Zápis $\|\mathbf{x}\|$ značí klasickou Euklidovskou normu vektoru $\mathbf{x}$. Budeme však pracovat pouze se speciálním případem úlohy, ve kterém budeme předpokládat radiálně symetrické řešení

$$u(\mathbf{x}) = u(\|\mathbf{x}\|).$$

Můžeme tedy přepsat úlohu (2.1) do tvaru

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \lambda u(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ \int_0^1 r^{n-1}u(r)\mathrm{d}r = 0, & \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde

$$r = \|x\|.$$

Přičemž budeme hledat klasické řešení úlohy (2.2). Vyžadujeme tedy $u \in \mathrm{C}^2(0,1)$.

Dále se v této práci budeme zabývat Fučíkovým spektrem úlohy

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ \int_0^1 r^{n-1}u(r)\mathrm{d}r = 0, & \end{aligned} \tag{2.3}$$

kde
$$u^+(r) = \max\{u(r), 0\},\ u^-(r) = \max\{-u(r), 0\}.$$

Přičemž Fučíkovým spektrem úlohy (2.3) nazýváme následující množinu

$$\Sigma = \Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \ \text{úloha (2.3) s parametry } \alpha, \beta \text{ má netriviální klasické řešení}\Big\}. \tag{2.4}$$

Lemma 2.1. *Pokud funkce u řeší úlohu* (2.3) *s parametry* $(\alpha,\ \beta)$*, pak funkce $-u$ řeší úlohu* (2.3) *s parametry* $(\beta,\ \alpha)$*.*

Důkaz. Předpokládejme, že funkce u řeší úlohu (2.3) s parametry $(\alpha,\ \beta)$. Pro funkci $-u$ dostáváme úlohu ve tvaru

$$(-u(r))'' + \frac{n-1}{r}(-u(r))' + \alpha(-u)^+ - \beta(-u)^- = 0 \qquad \text{pro } r \in (0,1),$$
$$-u'(0) = 0, \quad \int_0^1 r^{n-1}(-u(r))\mathrm{d}r = 0.$$

Což lze upravit do tvaru

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \beta u^+ - \alpha u^- = 0 \qquad \text{pro } r \in (0,1),$$
$$u'(0) = 0, \quad \int_0^1 r^{n-1}u(r)\mathrm{d}r = 0.$$

A tedy vidíme, že $-u$ řeší úlohu (2.3) s parametry $(\beta,\ \alpha)$. $\square$

Odtud dostáváme následující větu.

Věta 2.2. *Dvojice* $(\alpha,\ \beta)$ *leží ve Fučíkově spektru úlohy* (2.3) *právě tehdy, když* $(\beta,\ \alpha)$ *leží ve Fučíkově spektru.*

Kapitola 3

Dimenze 1

3.1 Úloha na vlastní čísla

Pro začátek prozkoumejme úlohu (2.2) v jedné dimenzi. Dostáváme tedy úlohu

$$\begin{aligned} u''(r) + \lambda u(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \int_0^1 u(r)\mathrm{d}r = 0. & \end{aligned} \tag{3.1}$$

Věta 3.1. *Úloha* (3.1) *má netriviální řešení pouze pro* $\lambda > 0$.

Důkaz. Předpokládejme $\lambda < 0$.

1. Pro $u(0) = 0$ vyhovuje rovnici pouze triviální řešení. Plyne z věty o jednoznačnosti řešení (viz [4, str. 783]).

2. Nyní předpokládejme $u(0) > 0$. Ze spojitosti řešení plyne

   $$\exists r_0 > 0 : u(r) > 0 \text{ na } (0, r_0).$$

   Jelikož je λ záporná, musí platit $u''(r) > 0$ na $(0, r_0)$. Jelikož navíc platí $u'(0) = 0$, je funkce u rostoucí na intervalu $(0, r_0)$. Odsud dostáváme, že v libovolném $r > 0$ je funkce u konvexní a rostoucí. Platí tedy $u(r) > 0$ pro $r \in (0,1)$. Můžeme tedy psát

   $$\int_0^1 u(r)\mathrm{d}r > 0.$$

   Což je spor s integrální podmínkou úlohy (3.1).

3. Pro $u(0) < 0$ je důkaz obdobný.

Pro $\lambda = 0$ má rovnice (3.1) obecné řešení ve tvaru $u(r) = ar + b$, odkud po zohlednění první okrajové podmínky dostáváme $u(r) = b$. Aby byla splněná integrální podmínka, musí platit $b = 0$. Dostáváme tedy triviální řešení. □

Budeme tedy v následujícím výkladu automaticky předpokládat $\lambda > 0$.

Obecným řešením diferenciální rovnice z (3.1) je funkce

$$u(r) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} r) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} r) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Po zohlednění první okrajové podmínky dostáváme $C_1 = 0$, a tedy

$$u(r) = C_2 \cos(\sqrt{\lambda} r).$$

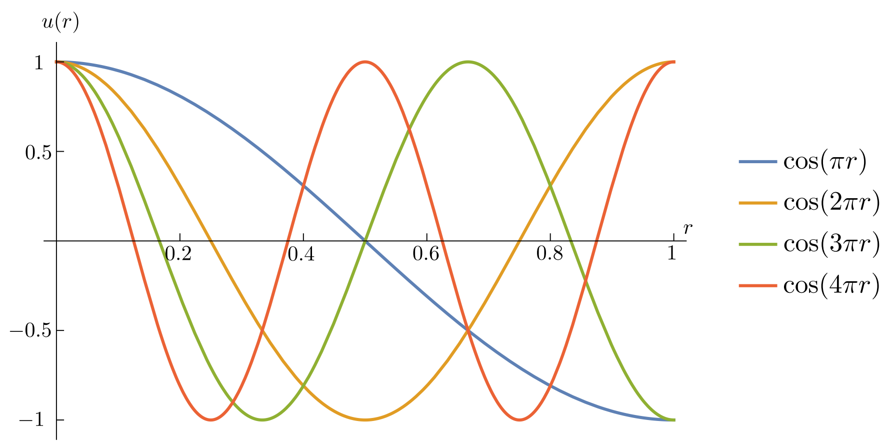
Nyní použijeme integrální okrajovou podmínku

$$0 = C_2 \int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda} r) \mathrm{d}r = C_2 \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda} r)}{\sqrt{\lambda}} \right]_0^1 = C_2 \frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}.$$

Dostáváme tedy

$$\sqrt{\lambda} = k\pi.$$

Vlastní čísla úlohy (3.1) jsou daná předpisem $\lambda_k = (k\pi)^2$, kterým odpovídají vlastní funkce $u_k = \cos(k\pi)$, kde $k \in \mathbb{N}$.



Obrázek 3.1: První čtyři vlastní funkce úlohy (3.1)

3.2 Úloha s zobecněnou okrajovou podmínkou

Jelikož k úloze (3.1) neumíme najít tzv. adjungovanou úlohu, přejdeme k obecnější úloze. Nahradíme integrální podmínku následující podmínkou

$$(1 - \epsilon) \int_0^1 u(r) \mathrm{d}r + \epsilon u(1) = 0. \tag{3.2}$$

Všimněme si, že pro $\epsilon = 0$ přechází podmínka (3.2) na integrální okrajovou podmínku (na původní úlohu) a pro $\epsilon = 1$ na Dirichletovu podmínku. My se dále budeme zabývat úlohou, kde $\epsilon \in (0, 1]$. Dostáváme tedy úlohu ve tvaru

$$\begin{aligned} u''(r) + \lambda u(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ (1-\epsilon)\int_0^1 u(r)\mathrm{d}r + \epsilon u(1) = 0. & \end{aligned} \tag{3.3}$$

Věta 3.2. *Úloha* (3.3) *má netriviální řešení pouze pro* $\lambda > 0$.

Důkaz. Důkaz je obdobou důkazu věty (3.1). □

Dále budeme opět předpokládat $\lambda > 0$.

Řešení úlohy (3.3)

Obecným řešením rovnice z (3.3) je funkce

$$u(r) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} r) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} r).$$

Zohledněním první okrajové podmínky dostáváme

$$u(r) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} r).$$

Využijme nyní druhou okrajovou podmínku

$$(1-\epsilon)\int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda} r)\mathrm{d}r + \epsilon \cos(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Odtud po integraci dostáváme

$$\epsilon \sqrt{\lambda} = -(1-\epsilon)\ \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}). \tag{3.4}$$

Dostáváme tedy pro libovolné $\epsilon \in (0, 1]$ vlastní čísla úlohy (3.3) jako řešení nelineární rovnice (3.4). Máme tedy nekonečnou posloupnost $\lambda_k^{(\epsilon)}$, kde

(i) $\lambda_k^{(\epsilon)}$ odpovídá k-tému řešení rovnice (3.4) s pevným ϵ,

(ii) $\lambda_{k+1}^{(\epsilon)} > \lambda_k^{(\epsilon)}$,

(iii) $\lambda_k^{(\epsilon)} > 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

K vlastním číslům dostáváme vlastní funkce ve tvaru

$$u_k^{(\epsilon)}(r) = \cos\left(\sqrt{\lambda_k^{(\epsilon)}} r\right).$$

Zavedení adjungované úlohy

Nyní zadefinujeme adjungovanou úlohu k úloze (3.3)

$$\begin{aligned} v''(r) + v'(1)\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + \lambda v(r) = 0 \text{ pro } r \in (0,1), \\ v'(0) = 0,\ v(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Úlohy (3.3) a (3.5) nazýváme adjungované, jelikož pro všechny $u, v \in C^2(0,1)$ splňující okrajové podmínky z úloh (3.3), (3.5) platí

$$\int_0^1 \big(u''(r) + \lambda u(r)\big)v(r)\mathrm{d}r = \int_0^1 u(r)\Big(v''(r) + v'(1)\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + \lambda v(r)\Big)\mathrm{d}r. \tag{3.6}$$

Poznámka 3.3. Pokud bychom na vhodných prostorech zavedli operátory L a L^* tak, aby úloha (3.3) přešla na operátorovou rovnici ve tvaru $Lu = \lambda u$ a úloha (3.3) na operátorovou rovnici ve tvaru $L^*u = \lambda u$, pak by operátor L^* představoval adjungovaný operátor k operátoru L.

Řešení adjungované úlohy

Jelikož úloha (3.5) je adjungovanou úlohou k úloze (3.3) a úlohu (3.3) jsme řešili pro $\lambda > 0$, budeme i úlohu (3.5) řešit pro $\lambda > 0$.
Obecným řešením úlohy (3.5) je funkce

$$v(r) = -\frac{v'(1)}{\lambda}\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + C_1\cos(\sqrt{\lambda}r) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{3.7}$$

Po zohlednění první okrajové podmínky máme

$$v'(0) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin(0) + C_2\sqrt{\lambda}\cos(0) = 0.$$

Z čehož plyne $C_2 = 0$. Funkce (3.7) se zjednoduší do tvaru

$$v(r) = -\frac{v'(1)}{\lambda}\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + C_1\cos(\sqrt{\lambda}r). \tag{3.8}$$

Nyní vyjádříme z (3.8) hodnotu $v'(1)$

$$v'(1) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}), \tag{3.9}$$

čímž (3.8) přejde do tvaru

$$v(r) = C_1\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\sin(\sqrt{\lambda}) + C_1\cos(\sqrt{\lambda}r). \tag{3.10}$$

Nakonec zohledníme druhou okrajovou podmínku

$$v(1) = C_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \sin(\sqrt{\lambda}) + C_1 \cos(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Odtud po úpravě dostáváme

$$\epsilon\sqrt{\lambda} = -(1-\epsilon)\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}). \tag{3.11}$$

Vidíme tedy, že vlastní čísla úloh (3.3), (3.5) jsou stejná. A dostáváme opět nekonečnou posloupnost vlastních čísel $\lambda_k^{(\epsilon)}$.

Dosazením (3.11) do (3.10) dostáváme výsledný tvar vlastních funkcí úlohy (3.5)

$$v_k^{(\epsilon)}(r) = \cos\left(\sqrt{\lambda_k^{(\epsilon)}} r\right) - \cos\left(\sqrt{\lambda_k^{(\epsilon)}}\right). \tag{3.12}$$

Limitní přechod $\epsilon \to 0$

Dosud jsme pracovali s $\epsilon \in (0,1]$, jelikož pro $\epsilon = 0$ nemá úloha (3.5) smysl. Dodefinujme nyní $v_k^{(0)}$ limitním přechodem ve tvaru

$$v_k^{(0)}(r) = \lim_{\epsilon \to 0} v_k^{(\epsilon)}(r).$$

Pokud upravíme (3.11) do tvaru

$$-(1-\epsilon)\sin(\sqrt{\lambda}) = \epsilon\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}),$$

pak pro $\epsilon \to 0$ dostáváme $\sin\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}\right) = 0$, a tedy

$$\lambda_k^{(0)} = (k\pi)^2.$$

Odtud dostáváme vlastní funkce ve tvaru

$$v_k^{(0)}(r) = \cos(k\pi r) - \cos(k\pi). \tag{3.13}$$

Tyto funkce můžeme chápat jako adjungované vlastní funkce k úloze (3.1).

Lemma 3.4. *Funkce $v_k^{(0)}$ mají následující vlastnosti*

(i) $\left(v_k^{(0)}\right)'(1) = 0$,

(ii) $v_k^{(0)}$ *nemění znaménko na* $(0,1)$,

(iii) $\left(v_k^{(0)}(r)\right)'' = -\lambda_k^{(0)} \left(v_k^{(0)}(r) - v_k^{(0)}(\frac{1}{2k})\right)$.

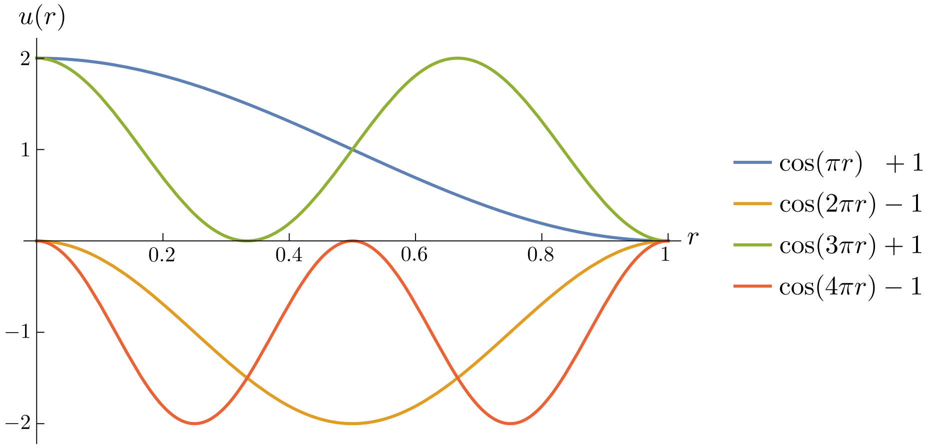
Důkaz. Důkazy vztahů (i) a (ii) jsou zřejmé. Nyní dokážeme (iii). Zřejmě platí

$$\left(v_k^{(0)}(r)\right)'' = -(k\pi)^2 \left(\cos(k\pi r) - \cos(k\pi) + \cos(k\pi)\right).$$

Jelikož $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, dostáváme

$$\left(v_k^{(0)}(r)\right)'' = -\lambda_k^{(0)} \left(v_k^{(0)}(r) - v_k^{(0)}\left(\frac{1}{2k}\right)\right).$$

□



Obrázek 3.2: První čtyři funkce $v_k^{(0)}$.

3.3 Fučíkovo spektrum

Nyní se budeme zabývat Fučíkovým spektrem úlohy

$$\begin{aligned} u''(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) = 0 \qquad &\text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ \int_0^1 u(r)\mathrm{d}r = 0.& \end{aligned} \tag{3.14}$$

Odvození Fučíkova spektra

Pro přehlednost rozdělíme odvození Fučíkova spektra úlohy (3.14) do několika kroků.

(I) Vyjádříme řešení nedourčené úlohy pro $\alpha,\ \beta > 0$

$$\begin{aligned} u''(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

(II) Vyšetříme počet nulových bodů řešení z úlohy (3.15) v závislosti na parametrech α, β (opět pro $\alpha,\ \beta > 0$).

(III) Odvodíme Fučíkovo spektrum úlohy (3.14) pro $\alpha,\ \beta > 0$.

(IV) Zohledníme případ $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Překročme nyní k samotnému odvození.

(I) Začněme tedy řešením úlohy (3.15) (pro $\alpha,\ \beta > 0$). Řešení této diferenciální rovnice budeme konstruovat postupně pro jednotlivé kladné a záporné půlvlny. A to tak, aby na sebe hladce navazovaly. Předpokládejme $u(0) > 0$ (pro $u(0) < 0$ je odvození obdobné)

$$u(r) = \begin{cases} u_0(r) & = C\sqrt{\beta}\cos\left(\sqrt{\alpha}r\right) \\ & \quad \text{pro } r \in \left(0, \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\right], \\ u_1(r) & = -C\sqrt{\alpha}\sin\left(\sqrt{\beta}\left(r - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\right)\right) \\ & \quad \text{pro } r \in \left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right], \\ u_2(r) & = C\sqrt{\beta}\sin\left(\sqrt{\alpha}\left(r - \left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right)\right)\right) \\ & \quad \text{pro } r \in \left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right], \\ u_{2n}(r) & = C\sqrt{\beta}\sin\left(\sqrt{\alpha}\left(r - \left(\frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}}\right)\right)\right) \\ & \quad \text{pro } r \in \left(\frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}}, \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}}\right], \\ u_{2n+1}(r) & = -C\sqrt{\alpha}\sin\left(\sqrt{\beta}\left(r - \left(\frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}}\right)\right)\right) \\ & \quad \text{pro } r \in \left(\frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}}, \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}}\right]. \end{cases} \tag{3.16}$$

(II) Z tvaru funkcí u_{2n+1} a u_{2n+2} vidíme, že funkce u má na intervalu $(0,1)$

(i) 0 nulových bodů pro $(\alpha,\beta) \in \left\{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} \geq 1,\ \beta > 0\right\}$,

(ii) 1 nulový bod pro $(\alpha,\beta) \in \left\{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \geq 1,\ \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} < 1\right\}$,

(iii) $2n$ nulových bodů pro $(\alpha,\beta) \in \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} \geq 1,\ \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} < 1\right\}$,

(iv) $2n+1$ nulových bodů pro $(\alpha,\beta) \in \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} \geq 1,\ \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} < 1\right\}$.

Pro lepší přehlednost následujícího výkladu zaveďme následující značení

$$\begin{aligned} N_n^+ &= \big\{(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 : u(0) > 0,\ u \text{ je řešením úlohy (3.15)} \\ &\quad \text{a funkce } u \text{ má na intervalu } (0,1) \text{ právě } n \text{ nulových bodů.}\big\} \\ N_n^- &= \big\{(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 : u(0) < 0,\ u \text{ je řešením úlohy (3.15)} \\ &\quad \text{a funkce } u \text{ má na intervalu } (0,1) \text{ právě } n \text{ nulových bodů.}\big\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Tímto jsme odvodili následující lemma.

Lemma 3.5. *Pro N_n^+ a N_n^- platí*

$$N_{2n}^+ = \Big\{(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 : \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} \geq 1, \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} < 1\Big\},$$

$$N_{2n+1}^+ = \Big\{(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 : \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\beta}} \geq 1,\ \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{n\pi}{\sqrt{\beta}} < 1\Big\},$$

$$N_n^- = \Big\{(\alpha,\beta) : (\beta,\alpha) \in N_n^+\Big\},$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$.

(III) Nyní můžeme přejít k řešení úlohy

$$\begin{aligned} u''(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) = 0 \qquad &\text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ \int_0^1 u(r)\mathrm{d}r = 0.& \end{aligned} \tag{3.18}$$

Označme jednotlivé větve řešení úlohy (3.18) zápisem

$$\begin{aligned} I_n^+ = \big\{(\alpha,\beta) : u(0) > 0,\ &u \text{ je řešením úlohy (3.18)} \\ \text{a funkce } u \text{ má na intervalu } (0,1) &\text{ právě } n \text{ nulových bodů.}\big\} \\ I_n^- = \big\{(\alpha,\beta) : u(0) < 0,\ &u \text{ je řešením úlohy (3.18)} \\ \text{a funkce } u \text{ má na intervalu } (0,1) &\text{ právě } n \text{ nulových bodů.}\big\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Nyní odvodíme větve Fučíkova spektra pro α, $\beta > 0$.
Pro I_0^+ nemá řešení (funkce u) žádný nulový bod, a tedy nelze splnit integrální podmínku $\int_0^1 u(r)\mathrm{d}r = 0$. Dostáváme tedy $I_0^+ = \emptyset$.
Nyní vyšetřeme I_1^+. Hledáme řešení, které splňuje $\int_0^1 u(r)\mathrm{d}r = 0$, přičemž u má právě jeden nulový bod. Musí tedy být splněna následující rovnost

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}} \sqrt{\beta}\cos(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r - \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}}^1 \sqrt{\alpha}\sin\left(\sqrt{\beta}\Big(r - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big)\right)\mathrm{d}r = 0,$$

kterou lze přepsat do následujícího tvaru

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}} \sqrt{\beta}\cos(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r - \int_0^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}} \sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\beta}r)\mathrm{d}r = 0.$$

Po integraci dostáváme rovnost ve tvaru

$$\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\left(\cos\left(\sqrt{\beta}\Big(1 - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big)\right) - 1\right) = 0.$$

Dostáváme tedy předpis části větve Fučíkova spektra úlohy (3.14)

$$I_1^+ \supset \left\{(\alpha,\beta): \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\left(\cos\left(\sqrt{\beta}\Big(1-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big)\right)-1\right)=0, (\alpha,\beta)\in N_1^+\right\}.$$

Nyní přejděme k odvození předpisu libovolné větve. Odvoďme nejprve větve I_{2n+1}^+, kde $n \in \mathbb{N}_0$. Jelikož se kladné i záporné půlvlny funkce u periodicky opakují, můžeme psát

$$\sqrt{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}} \cos(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r + \sum_{i=1}^{n}\Big(-\sqrt{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}} \sin(\sqrt{\beta}r)\mathrm{d}r\Big)+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sqrt{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}} \sin(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r\Big) - \sqrt{\alpha}\int_0^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}-n(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\pi}{\sqrt{\beta}})} \sin(\sqrt{\beta}r)\mathrm{d}r = 0.$$

Což můžeme snadno upravit do tvaru

$$n\left(-\sqrt{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}} \sin(\sqrt{\beta}r)\mathrm{d}r + \sqrt{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}} \sin(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r\right)+$$
$$\sqrt{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}} \cos(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r - \sqrt{\alpha}\int_0^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}-n(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\pi}{\sqrt{\beta}})} \sin(\sqrt{\beta}r)\mathrm{d}r = 0.$$

Odtud po integraci dostáváme

$$(2n+1)\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} - 2n\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+$$
$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\left(\cos\left(\sqrt{\beta}\Big(1-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}-n\Big(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\Big)\Big)\right)-\cos(0)\right)=0.$$

Dostáváme tedy předpis

$$I_{2n+1}^+ = \Big\{(2n+1)\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} - (2n+1)\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+$$
$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\left(\cos\left(\sqrt{\beta}\Big(1-\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}-n\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\Big)\right)\right)=0, (\alpha,\beta)\in N_{2n+1}\Big\}.$$

Nyní přejděme k odvození větví I_{2n}^+, kde $n \in \mathbb{N}_0$. Využijeme tvar řešení jako při odvození I_{2n+1}^+, čímž dostáváme

$$\sqrt{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}} \cos(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r - \sqrt{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}} \sin(\sqrt{\beta}r)\mathrm{d}r+$$
$$+(n-1)\left(\sqrt{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}} \sin(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r - \sqrt{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}} \sin(\sqrt{\beta}r)\mathrm{d}r\right)+$$
$$+\sqrt{\beta}\int_0^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}-\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}-(n-1)(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}})} \sin(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r = 0.$$

Odtud po integraci dostáváme

$$(2n-1)\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} - 2n\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\left(\cos\left(\sqrt{\alpha}(1 - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - (n-1)(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}))\right) - \cos(0)\right) = 0.$$

Dostáváme tedy předpis

$$I_{2n}^{+} = \Big\{2n\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} - 2n\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\left(\cos\left(\sqrt{\alpha}\Big(1 - \frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - n\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\Big)\right)\right) = 0, \quad (\alpha, \beta) \in N_{2n}\Big\}.$$

(IV) Nyní uvažujme i záporná α, β. Jelikož předpokládáme $u(0) > 0$, α musí být kladná (viz důkaz věty 3.1). Navíc předpokládejme $\alpha > \frac{\pi^2}{4}$, aby funkce u měla i zápornou část.

(i) Uvažujme nejprve $\beta = 0$. Kladná část funkce u je dána předpisem

$$u_k(r) = \cos\left(\sqrt{\alpha}r\right) \qquad \text{pro } r \in \left(0, \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\right].$$

Pro zápornou část řešení tedy dostáváme rovnici

$$u_z''(r) = 0,$$

jejímž obecným řešením je funkce $u_z(r) = ar + b$. Jelikož funkce u_k a u_z musí být hladce napojené, platí

$$u_z\Big(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big) = 0,$$
$$u_z'\Big(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big) = -\sqrt{\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{\alpha}.$$

Máme tedy

$$u_z(r) = -\sqrt{\alpha}\ \Big(r - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big).$$

Dostáváme rovnost ve tvaru

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}} \cos(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r - \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}}^1 \sqrt{\alpha}\Big(r - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big)\mathrm{d}r = 0.$$

Z které po integraci dostáváme

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\Big(1 - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big)^2 = 0.$$

Po umocnění a přenásobení $\sqrt{\alpha}$ dostáváme kvadratickou rovnici

$$\sqrt{\alpha}^2 - \pi\sqrt{\alpha} + \frac{\pi^2}{4} - 2 = 0,$$

jejímž řešením jsou

$$\sqrt{\alpha}_{1,2} = \begin{cases} \sqrt{2} + \dfrac{\pi}{2}, \\ \\ \sqrt{2} - \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Avšak pouze první řešení splňuje podmínku $\alpha > \frac{\pi^2}{4}$. Dostáváme tedy

$$\left(\left(\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}\right)^2, 0\right) \in I_1^+.$$

(ii) Nyní uvažujme $\beta < 0$, přičemž opět předpokládáme $\alpha > \frac{\pi^2}{4}$. Kladná část funkce u je dána předpisem

$$u_k(r) = \sqrt{-\beta}\cos\left(\sqrt{\alpha}r\right) \qquad \text{pro } r \in \left(0, \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\right].$$

Pro zápornou část řešení tedy dostáváme rovnici

$$u_z''(r) + \beta u_z(r) = 0,$$

jejímž obecným řešením je funkce

$$u_z(r) = C_1 \sinh\left(\sqrt{-\beta}\, r\right) + C_2 \cosh\left(\sqrt{-\beta}\, r\right), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Kterou lze přepsat do následujícího tvaru

$$u_z(r) = A_1 \sinh\left(\sqrt{-\beta}\,(r - A_2)\right), \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Jelikož funkce u_k a u_z musí být hladce napojené, vyžadujeme

$$\begin{aligned} u_z\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\right) &= 0, \\ u_z'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\right) = -\sqrt{\alpha}\sqrt{-\beta}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\sqrt{\alpha}\sqrt{-\beta}. \end{aligned}$$

Máme tedy

$$u_z(r) = -\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\sqrt{-\beta}\left(r - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\right)\right).$$

Odtud dostáváme integrální rovnost

$$\sqrt{-\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}}\cos(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r-\sqrt{\alpha}\int_{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}}^1\sinh\left(\sqrt{-\beta}\Big(r-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big)\right)\mathrm{d}r=0.$$

Po integraci dostáváme

$$\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-\beta}}\left(\cosh\left(\sqrt{-\beta}\Big(1-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big)\right)-1\right)=0,$$

což lze upravit do tvaru

$$\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-\beta}}-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-\beta}}\cosh\left(\sqrt{-\beta}\Big(1-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big)\right)=0.$$

Jelikož je funkce u_z klesající, u má pouze jeden nulový bod (pro $\beta\leq 0$) na intervalu $(0,1)$. Dostáváme tedy, že pro $\beta<0$ jsou $I_n=\emptyset$ pro $n=2,3,4,\dots$

Tímto jsme odvodili následující větu.

Věta 3.6. *Fučíkovo spektrum úlohy* (3.14) *se skládá z větví I_n^+ a I_n^-, $n\in\mathbb{N}_0$, které jsou dané následujícím předpisem*

$$I_0^+=I_0^-=\emptyset,$$

$$I_1^+=\left\{\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\left(\cos\left(\sqrt{\beta}(1-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}})\right)\right)=0,(\alpha,\beta)\in N_1\right\}\cup$$
$$\left\{\left(\Big(\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}\Big)^2,0\right)\right\}\cup$$
$$\left\{\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-\beta}}-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-\beta}}\cosh\left(\sqrt{-\beta}\Big(1-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\Big)\right)=0,\ \alpha>\frac{\pi^2}{4},\ \beta<0\right\},$$

$$I_{2n}^+=\Big\{2n\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}-2n\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}-$$
$$\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\left(\cos\left(\sqrt{\alpha}\Big(1-\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}-n\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\Big)\right)\right)=0,(\alpha,\beta)\in N_{2n}\Big\}\qquad \textit{pro } n\in\mathbb{N},$$

$$I_{2n+1}^+=\Big\{(2n+1)\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}-(2n+1)\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+$$
$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\left(\cos\left(\sqrt{\beta}\Big(1-\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}-n\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\Big)\right)\right)=0,(\alpha,\beta)\in N_{2n+1}\Big\}\qquad \textit{pro } n\in\mathbb{N},$$

$$I_n^-=\left\{(\alpha,\beta):(\beta,\alpha)\in I_n^+\right\}\ \textit{pro } n\in\mathbb{N}.$$

Fučíkovo spektrum můžeme vidět na obr. A.2.

Vlastnosti Fučíkova spektra

V předchozí části jsme odvodili analytický předpis Fučíkova spektra. Nyní odvodíme jeho důležité vlastnosti. Poznamenejme, že v další části této práce se budeme zabývat obdobou úlohy (3.14) ve vyšší dimenzi, kde spektrum analyticky odvodit neumíme. Následující věty však budou mít obdobu i ve vyšší dimenzi.

Věta 3.7 (Omezení spektra v 1D)**.** *Úloha*

$$\begin{aligned} u''(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) = 0 \qquad & \textit{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ \int_0^1 u(r)\mathrm{d}r = 0 & \end{aligned} \tag{3.20}$$

má netriviální řešení pro α, β *splňující*

$$\begin{aligned} (\alpha - (k\pi)^2)(\beta - (k\pi)^2) > 0 \qquad & \forall k \in \mathbb{N}, \\ \textit{nebo } \alpha = \beta = (k\pi)^2, \qquad & k \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Důkaz. Nejdříve vynásobíme rovnici v úloze (3.20) funkcí $v = v_k^{(0)}$ a provedeme integraci přes celý interval $(0,1)$, čímž dostáváme

$$\int_0^1 u''(r)\,v(r)\mathrm{d}r + \alpha \int_0^1 u^+(r)\,v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 u^-(r)\,v(r)\mathrm{d}r = 0. \tag{3.22}$$

Nyní provedeme integraci per partes

$$\begin{aligned} [v(r)u'(r) - v'(r)u(r)]_0^1 + \int_0^1 u(r)\,v''(r)\mathrm{d}r \\ +\alpha \int_0^1 u^+(r)\,v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 u^-(r)\,v(r)\mathrm{d}r = 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Jelikož platí

$$v'(0) = 0, v(1) = 0, v'(1) = 0, u'(0) = 0 \text{ a } v''(r) = -k^2\pi^2 \left(v(r) - v\Big(\frac{1}{2k}\Big) \right),$$

dostáváme rovnost ve tvaru

$$-k^2\pi^2 \int_0^1 u(r) \left(v(r) - v\Big(\frac{1}{2k}\Big) \right) + \alpha \int_0^1 u^+(r)\,v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 u^-(r)\,v(r)\mathrm{d}r = 0. \tag{3.24}$$

Jelikož

$$k^2\pi^2 v\Big(\frac{1}{2k}\Big) \int_0^1 u(r)\mathrm{d}r = 0,$$

dostáváme

$$-k^2\pi^2 \int_0^1 u(r)\,v(r)\mathrm{d}r + \alpha \int_0^1 u^+(r)\,v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 u^-(r)\,v(r)\mathrm{d}r = 0. \tag{3.25}$$

Což můžeme upravit do následujícího tvaru

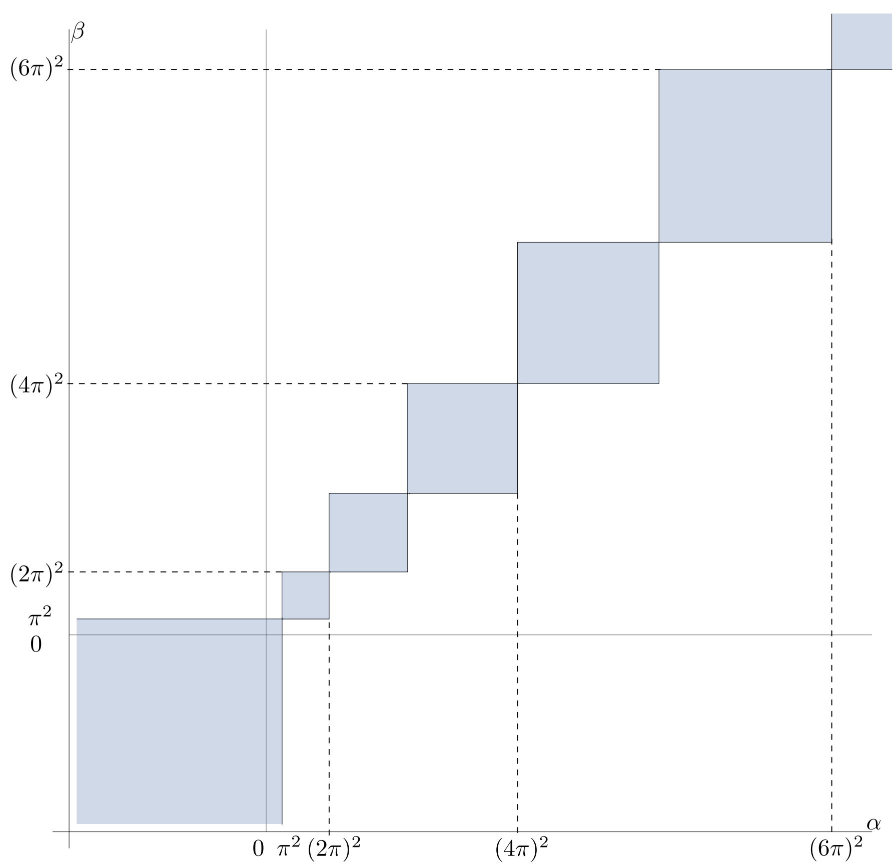
$$(\alpha - (k\pi)^2) \int_0^1 u^+(r)\, v(r) \mathrm{d}r = (\beta - (k\pi)^2) \int_0^1 u^-(r)\, v(r) \mathrm{d}r. \tag{3.26}$$

Jelikož funkce u^+, u^- jsou nezáporné (a netriviální) a v je buď kladná nebo záporná skoro všude, jsou i oba integrály

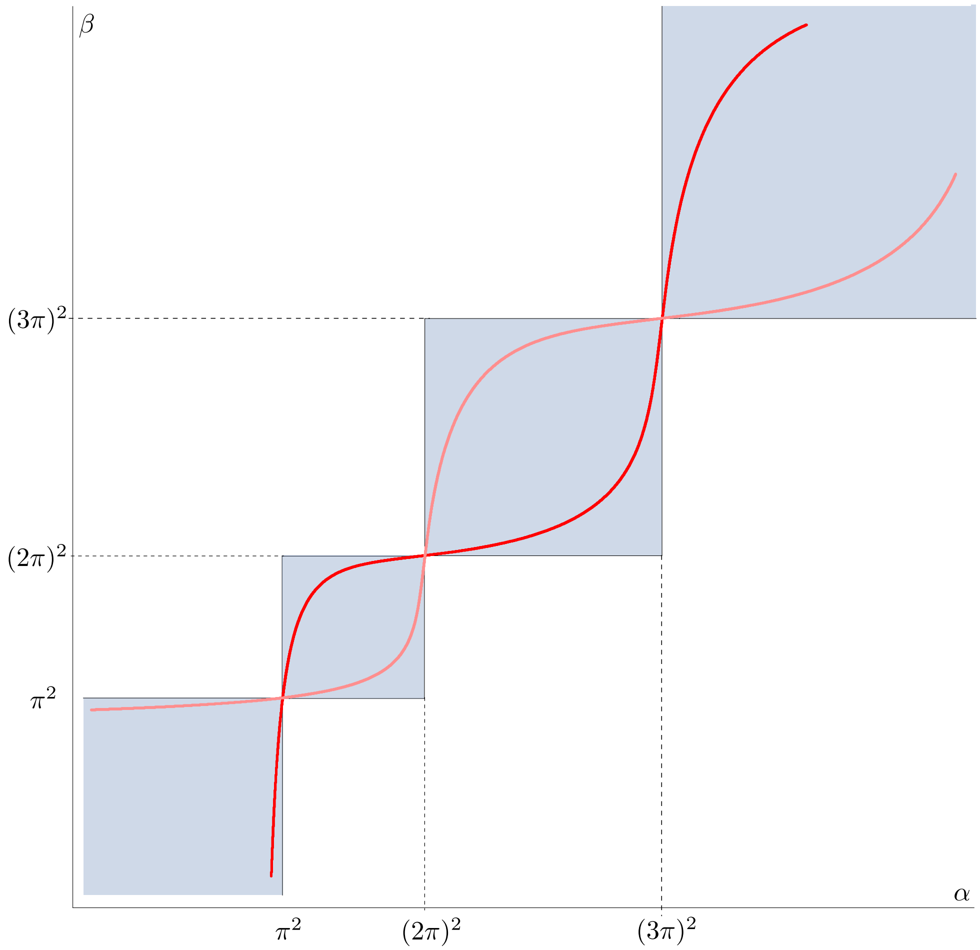
$$\int_0^1 u^+(r)\, v(r) \mathrm{d}r, \ \int_0^1 u^-(r)\, v(r) \mathrm{d}r$$

současně kladné nebo záporné.
A tedy musí platit (3.21). □

Oblast, ve které leží Fučíkovo spektrum úlohy (3.14), můžeme vidět na obr. 3.3 a 3.4.



Obrázek 3.3: Oblast, ve které leží Fučíkovo spektrum úlohy (3.14).



Obrázek 3.4: Fučíkovo spektrum úlohy (3.14).

Tečny Fučíkova spektra

Nyní odvodíme tečny Fučíkova spektra ve vlastních bodech. Jelikož budeme pracovat s adjungovanými funkcemi, uvažujme obecnější úlohu na Fučíkovo spektrum, jež vychází z úlohy (3.3). Máme tedy úlohu na Fučíkovo spektrum ve tvaru

$$\begin{aligned} u''(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) = 0 \qquad &\text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ (1-\epsilon)\int_0^1 u(r)\mathrm{d}r + \epsilon u(1) = 0, \end{aligned} \tag{3.27}$$

kde $\epsilon \in (0,1]$ je pevný parametr.

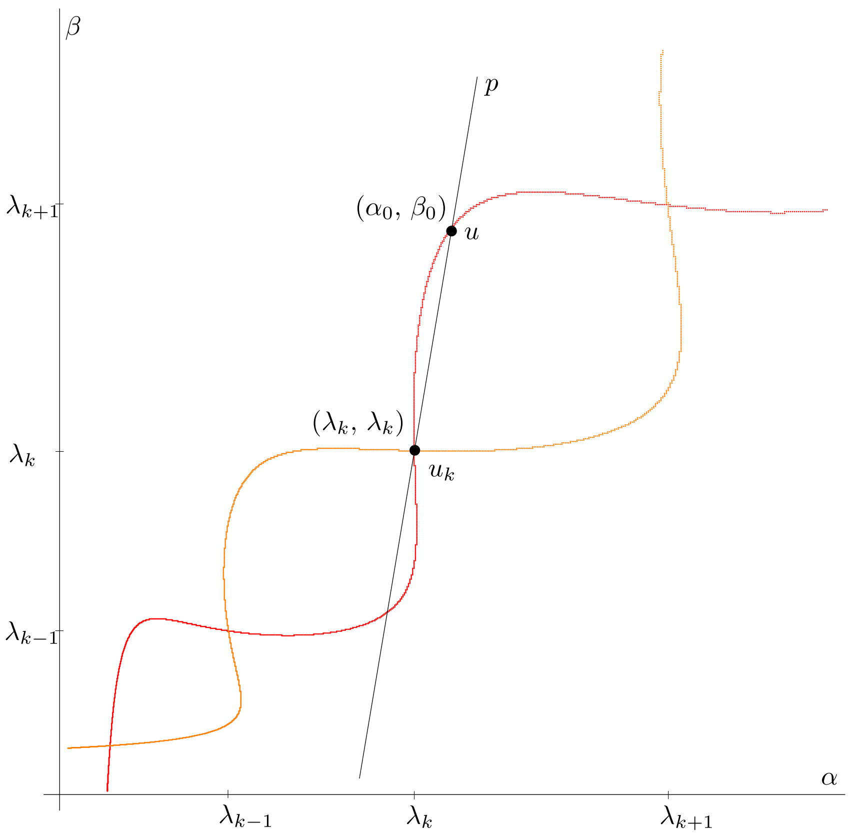
Věta 3.8 (Tečna k Fučíkovu spektru v 1D - pro zobecněnou úlohu)**.** *Předpokládejme, že existuje větev Fučíkova spektra úlohy* (3.27)*, která prochází vlastním číslem λ_k (bodem (λ_k, λ_k)). Pak Fučíkovo spektrum úlohy* (3.27) *má ve vlastním čísle λ_k tečnu danou* *předpisem*

$$p: \begin{array}{l} \alpha(t) = \lambda_k + t, \\ \beta(t) = \lambda_k + at, \end{array} \quad t \in \mathbb{R},$$

kde

$$a = \frac{\displaystyle\int_0^1 u_k^+(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^1 u_k^-(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r}. \tag{3.28}$$

Funkce u_k *je vlastní funkcí úlohy* (3.3) *odpovídající vlastnímu číslu* λ_k *a* v_k *je adjungovanou vlastní funkcí (neboli vlastní funkcí k úloze* (3.5)*).*



Obrázek 3.5: Ilustrace Fučíkova spektra.

Důkaz. Uvažujme libovolnou dvojici (α_0, β_0), která leží ve Fučíkově spektru, ve tvaru

$$\begin{array}{l} \alpha_0 = \lambda_k + s, \\ \beta_0 = \lambda_k + a\, s, \end{array} \tag{3.29}$$

kde a, s jsou vhodně zvolená reálná čísla tak, aby platilo (3.29).

Zadefinujme nyní přímku p procházející vlastním číslem $(\lambda_k,\ \lambda_k)$ a bodem (α_0, β_0). Tato přímka je dána předpisem

$$p: \begin{array}{l} \alpha(t) = \lambda_k + t, \\ \beta(t) = \lambda_k + a\,t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.30}$$

Do rovnice v úloze (3.27) dosaďme (3.29), čímž dostáváme

$$u''(r) + (\lambda_k + s)u^+(r) - (\lambda_k + a\,s)u^-(r) = 0. \tag{3.31}$$

Přenásobme rovnost (3.31) funkcí v_k, kde v_k je adjungovanou funkcí k úloze (3.3) odpovídající vlastnímu číslu λ_k, a proveďme integraci přes interval $(0, 1)$

$$\int_0^1 (u''(r) + \lambda_k u(r) + su^+(r) - a\,su^-(r))\, v_k(r)\, \mathrm{d}r = 0. \tag{3.32}$$

Nyní využijeme vztah (3.6), odkud dostáváme

$$\int_0^1 u(r) \left(v_k''(r) + v_k'(1)\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + \lambda_k v_k(r) \right) \mathrm{d}r + \int_0^1 su^+(r)\, v_k(r) - a\,su^-(r)\, v_k(r)\, \mathrm{d}r = 0.$$

Funkce v_k je však vlastní funkcí, které odpovídá vlastní číslo λ_k, a tedy musí platit

$$v_k''(r) + v_k'(1)\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + \lambda_k v_k(r) = 0.$$

Dostáváme tedy, že

$$a = \frac{\displaystyle\int_0^1 u^+(r)\, v_k(r)\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^1 u^-(r)\, v_k(r)\mathrm{d}r}$$

je směrnicí přímky spojující bod (λ_k, λ_k) a (α_0, β_0).

Uvažujme nyní, že (α_0, β_0) leží na stejné větvi Fučíkova spektra jako (λ_k, λ_k). Pokud nyní uděláme limitní přechod $(\alpha_0, \beta_0) \to (\lambda_k, \lambda_k)$, tj. $u \to u_k$, přímka p přejde na tečnu Fučíkova spektra v bodě (λ_k, λ_k), přičemž směrnice tečny ve vlastním čísle je tedy daná předpisem (3.28). □

Nyní ukážeme, že výše uvedený vztah platí i pro úlohu (3.14).

Věta 3.9 (Tečna k Fučíkovu spektru v 1 D)**.** *Předpokládejme, že existuje větev Fučíkova spektra úlohy* (3.14)*, která prochází vlastním číslem λ_k (bodem $(\lambda_k,\ \lambda_k)$). Pak Fučíkovo spektrum úlohy* (3.14) *má ve vlastním čísle λ_k tečnu danou předpisem*

$$p: \begin{array}{l} \alpha(t) = \lambda_k + t, \\ \beta(t) = \lambda_k + at, \end{array} \quad t \in \mathbb{R},$$

kde

$$a = \frac{\displaystyle\int_0^1 u_k^+(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^1 u_k^-(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r}. \tag{3.33}$$

Funkce u_k je vlastní funkcí úlohy (3.1) *a v_k je adjungovanou funkcí (viz* (3.13)*).*

Důkaz. Důkaz je podobný důkazu věty 3.8.
Vyjděme z rovnosti (3.32), avšak místo využití adjungované úlohy dosadíme za v_k rovnou adjungovanou funkci $v_k^{(0)}$ (viz (3.13)). Po integraci per partes dostáváme

$$[v_k(r)u'(r) - v_k'(r)u(r)]_0^1 + \int_0^1 u(r)v_k''(r)\mathrm{d}r + \int_0^1 \left(\lambda_k u(r) + su^+(r) - a\, su^-(r)\right)\, v_k(r)\, \mathrm{d}r = 0.$$

Jelikož platí

$$v_k'(0) = 0, v_k(1) = 0, v_k'(1) = 0, u'(0) = 0 \text{ a } v_k''(r) = -\lambda_k \left(v_k(r) - v_k\Big(\frac{1}{2k}\Big)\right),$$

dostáváme

$$\lambda_k v_k\Big(\frac{1}{2k}\Big) \int_0^1 u(r)\mathrm{d}r + \int_0^1 \left(su^+(r) - a\, su^-(r)\right)\, v_k(r)\, \mathrm{d}r = 0.$$

Máme tedy opět

$$a = \frac{\displaystyle\int_0^1 u^+(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^1 u^-(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r},$$

odkud po limitním přechodu $(\alpha_0, \beta_0) \to (\lambda_k, \lambda_k)$, tj. $u \to u_k$, dostáváme (3.33). □

Poznámka 3.10. Ve větě 3.8 jsme uvažovali $\epsilon \in (0, 1]$. Pokud bychom udělali limitní přechod $\epsilon \to 0$, dostaneme tvrzení ekvivalentní větě 3.9.

Poznámka 3.11. Předpoklad na existenci větví Fučíkova spektra ve větě 3.9 je automaticky splněn, jelikož jsme v této kapitole odvodili analytický předpis Fučíkova spektra úlohy (3.14), viz věta 3.6. Víme tedy, že existují větve Fučíkova spektra procházející vlastními čísly $(\lambda_k,\, \lambda_k)$.

Kapitola 4

Besselovy funkce

4.1 Besselovy funkce prvního a druhého druhu

Besselovy funkce jsou definovány jako řešení diferenciální rovnice

$$r^2\,u''(r) + r\,u'(r) + (r^2 - m^2)\,u(r) = 0, \tag{4.1}$$

kde m je obecně libovolné komplexní číslo. My se však omezíme v této práci na parametry m, které lze zapsat ve tvaru $m = \frac{p}{2}$, kde $p \in \mathbb{N}_0$.
Obecné řešení diferenciální rovnice (4.1) lze zapsat ve tvaru

$$u(r) = C_1\,\mathrm{J}_m(r) + C_2\,\mathrm{Y}_m(r) \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

viz [2, Kapitola 10].
Funkce J_m, Y_m se nazývají Besselovy funkce prvního a druhého druhu řádu m.

Funkci J_m lze zapsat ve tvaru

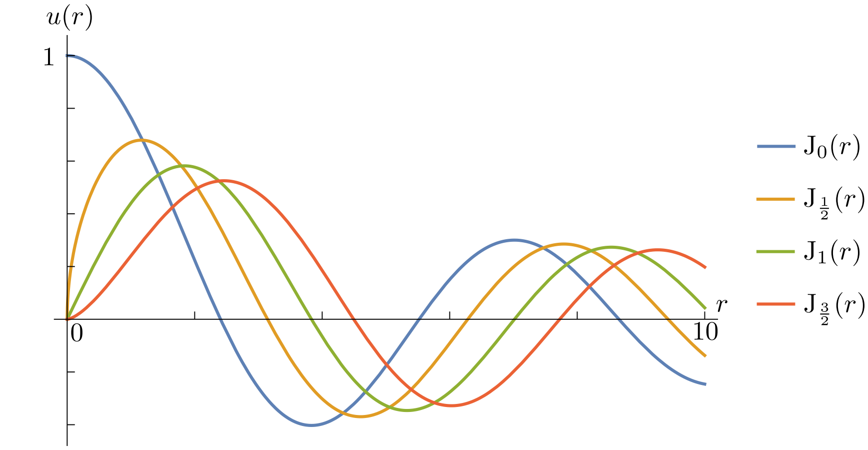
$$\mathrm{J}_m(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(m+k+1)}$$

a funkci Y_m jako

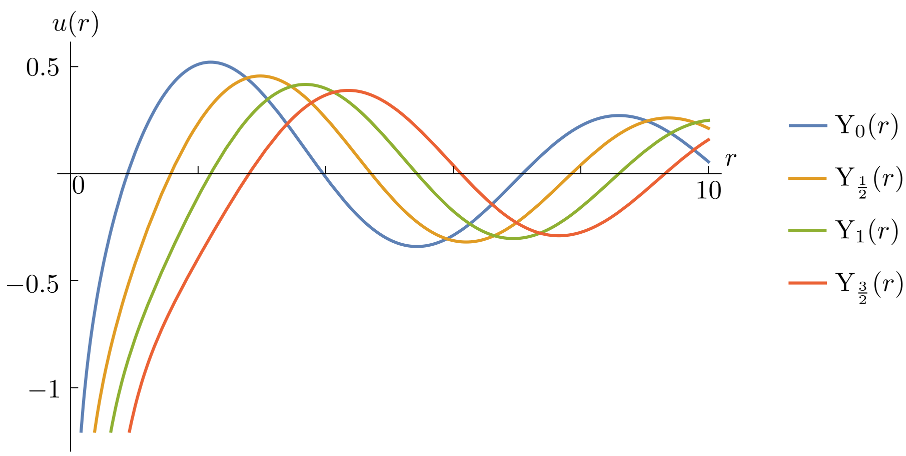
$$\mathrm{Y}_m(r) = \lim_{q\to m} \frac{\mathrm{J}_q(r)\,\cos(\pi\,q) - \mathrm{J}_{-q}(r)}{\sin(\pi\,q)}.$$

Nyní uveďme několik vlastností Besselových funkcí, které budeme v následujícím textu potřebovat (zdroj [2, Kapitola 10]).

(i) Pro $m \ge 0$ je J_m omezenou funkcí a Y_m je neomezená v 0,



Obrázek 4.1: Graf Besselových funkcí prvního druhu.



Obrázek 4.2: Graf Besselových funkcí druhého druhu.

(ii) funkce J_m je na intervalu $(0, +\infty)$ analytickou funkcí,

(iii) funkce J_m i Y_m mají spočetně mnoho nulových bodů na $[0, +\infty)$,

(iv) k-tý nulový bod funkce J_m označíme $\mu_{m,k}$,

(v)

$$\int r^m \mathrm{J}_{m-1}(r)\mathrm{d}r = r^m \mathrm{J}_m(r) + C, \tag{4.3}$$

(vi)

$$(r^m \mathrm{J}_m(r))' = r^m \mathrm{J}_{m-1}(r), \tag{4.4}$$

(vii)

$$(r^{-m}\mathrm{J}_m(r))' = -(r^{-m}\mathrm{J}_{m+1}(r)), \tag{4.5}$$

(viii)

$$\int r\mathrm{Y}_0(r)\mathrm{d}r = r\mathrm{Y}_1(r) + C, \tag{4.6}$$

(ix)

$$(r^m\mathrm{Y}_m(r))' = r^m\mathrm{Y}_{m-1}(r), \tag{4.7}$$

(x)

$$(r^{-m}\mathrm{Y}_m(r))' = -(r^{-m}\mathrm{Y}_{m+1}(r)), \tag{4.8}$$

(xi)

$$\mathrm{J}_{m+1}(r)\,\mathrm{Y}_m(r) - \mathrm{J}_m(r)\,\mathrm{Y}_{m+1}(r) = \frac{2}{\pi\,r}, \tag{4.9}$$

(xii) pro $r \gg |m^2 - \frac{1}{4}|$ platí následující asymptotické odhady

$$\mathrm{J}_m(r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\,\cos\left(r - \frac{m\,\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathrm{Y}_m(r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\,\sin\left(r - \frac{m\,\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

(xiii) z (xii) plyne pro $r \gg |m^2 - \frac{1}{4}|$

$$\frac{\mathrm{J}_{m+1}(r)}{\mathrm{J}_m(r)} \approx \frac{\cos\left(r - \frac{(m+1)\,\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(r - \frac{m\,\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \approx \mathrm{tg}\left(r - \frac{m\,\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{4.10}$$

(xiv) pro nulové body platí

$$\mu_{m,1} < \mu_{m+1,1} < \mu_{m,2} < \mu_{m+1,2} < \mu_{m+2,1} < \dots \tag{4.11}$$

Nyní odvodíme obecné řešení diferenciální rovnice, se kterou budeme v následujícím textu často pracovat.

Lemma 4.1. *Obecným řešením diferenciální rovnice*

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}\, u'(r) + u(r) = 0 \tag{4.12}$$

je funkce ve tvaru

$$u(r) = C_1\, r^{\frac{2-n}{2}}\, \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(r) + C_2\, r^{\frac{2-n}{2}}\, \mathrm{Y}_{\frac{n-2}{2}}(r) \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{4.13}$$

Důkaz. Předpokládejme řešení ve tvaru

$$u(r) = r^{\frac{2-n}{2}}\, v(r).$$

Odtud dostáváme

$$u'(r) = \frac{2-n}{2}\, r^{-\frac{n}{2}} v(r) + r^{\frac{2-n}{2}}\, v'(r),$$

a

$$u''(r) = \frac{n(n-2)}{4}\, r^{\frac{-2-n}{2}} v(r) + (2-n)\, r^{-\frac{n}{2}}\, v'(r) + r^{\frac{2-n}{2}}\, v''(r).$$

Dosazením u do (4.12) dostáváme

$$\begin{aligned} &\frac{n(n-2)}{4}\, r^{\frac{-2-n}{2}} v(r) + (2-n)\, r^{-\frac{n}{2}}\, v'(r) + r^{\frac{2-n}{2}}\, v''(r) + \\ &\frac{(n-1)(2-n)}{2}\, r^{\frac{-n-2}{2}} v(r) + (n-1)\, r^{\frac{-n}{2}}\, v'(r) + r^{\frac{2-n}{2}}\, v(r) = 0. \end{aligned}$$

Po zjednodušení

$$r^{\frac{2-n}{2}}\, v''(r) + r^{-\frac{n}{2}}\, v'(r) + r^{\frac{-2-n}{2}} \left(r^2 - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \right) v(r) = 0. \tag{4.14}$$

Po vydělení (4.14) výrazem $r^{\frac{-2-n}{2}}$ dostáváme (4.1), kde $m = \frac{n-2}{2}$. Máme tedy

$$v(r) = C_1\, \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(r) + C_2\, \mathrm{Y}_{\frac{n-2}{2}}(r),$$

odkud dostáváme

$$u(r) = C_1\, r^{\frac{2-n}{2}}\, \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(r) + C_2\, r^{\frac{2-n}{2}}\, \mathrm{Y}_{\frac{n-2}{2}}(r).$$

□

Uveďme nyní tvar funkce (4.13) pro $n = 1$, 2, 3, 4, 5.

(i) Pro $n = 1$ máme

$$\begin{aligned} u(r) &= C_1\, r^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(r) + C_2\, r^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{Y}_{-\frac{1}{2}}(r) = \\ &C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \cos(r) + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sin(r), \end{aligned}$$

povšimněme si, že tato funkce odpovídá obecnému řešení rovnice (3.1).

(ii) Pro $n = 2$ máme

$$u(r) = C_1 \, \mathrm{J}_0(r) + C_2 \, \mathrm{Y}_0(r).$$

(iii) Pro $n = 3$ máme

$$u(r) = C_1 \, r^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(r) + C_2 \, r^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{Y}_{\frac{1}{2}}(r) = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin(r)}{r} + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\cos(r)}{r}.$$

(iv) Pro $n = 4$ máme

$$u(r) = C_1 \, \frac{\mathrm{J}_1(r)}{r} + C_2 \, \frac{\mathrm{Y}_1(r)}{r}.$$

(v) Pro $n = 5$ máme

$$u(r) = C_1 \, r^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{J}_{\frac{3}{2}}(r) + C_2 \, r^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{Y}_{\frac{3}{2}}(r) = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin(r) - r \, \cos(r)}{r^3} + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\cos(r) + r \, \sin(r)}{r^3}.$$

4.2 Modifikované Besselovy funkce

Modifikované Besselovy funkce jsou definovány jako řešení diferenciální rovnice

$$r^2 \, u''(r) + r \, u'(r) - (r^2 + m^2) \, u(r) = 0, \tag{4.15}$$

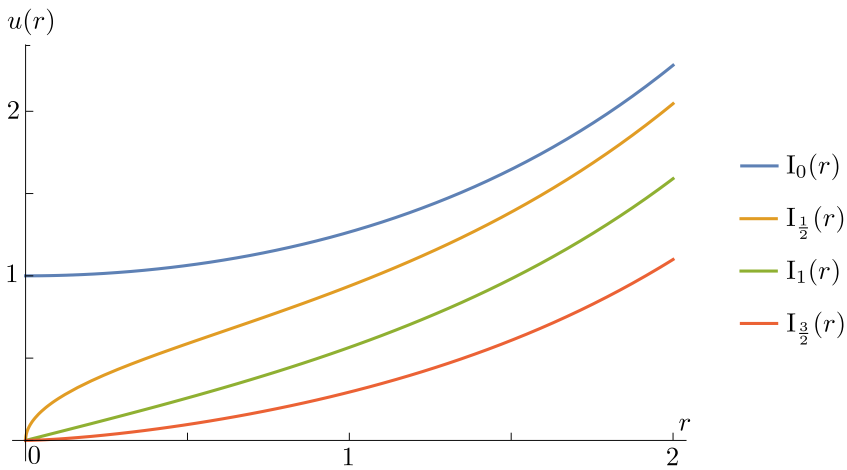
kde m je obecně libovolné komplexní číslo. My se opět omezíme na parametry m, které lze zapsat ve tvaru $m = \frac{p}{2}$, kde $p \in \mathbb{N}_0$.
Obecné řešení diferenciální rovnice (4.15) lze zapsat ve tvaru

$$u(r) = C_1 \, \mathrm{I}_m(r) + C_2 \, \mathrm{K}_m(r) \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.16}$$

viz [2, Kapitola 10].
Funkce I_m, K_m se nazývají modifikované Besselovy funkce prvního a druhého druhu řádu m.
Nyní uveďme několik vlastností modifikovaných Besselových funkcí, které budeme v následujícím textu potřebovat (zdroj [2]).

(i) Funkce I_m je v nule konečná a pro $r > 0$ je rostoucí funkcí.

(ii) Funkce K_m je neomezená v 0. Pro $r > 0$ je klesající funkcí a platí $\mathrm{K}_m(r) \to 0$ pro $r \to 0$.



Obrázek 4.3: Graf modifikovaných Besselových funkcí prvního druhu.

(iii)

$$\int r^m \mathrm{I}_{m-1}(r)\mathrm{d}r = r^m \mathrm{I}_m(r) + C, \tag{4.17}$$

(iv)

$$(r^m \mathrm{I}_m(r))' = r^m \mathrm{I}_{m-1}(r), \tag{4.18}$$

(v)

$$(r^{-m} \mathrm{I}_m(r))' = r^{-m} \mathrm{I}_{m+1}(r), \tag{4.19}$$

(vi)

$$\int r \mathrm{K}_0(r)\mathrm{d}r = -r \mathrm{K}_1(r) + C, \tag{4.20}$$

(vii)

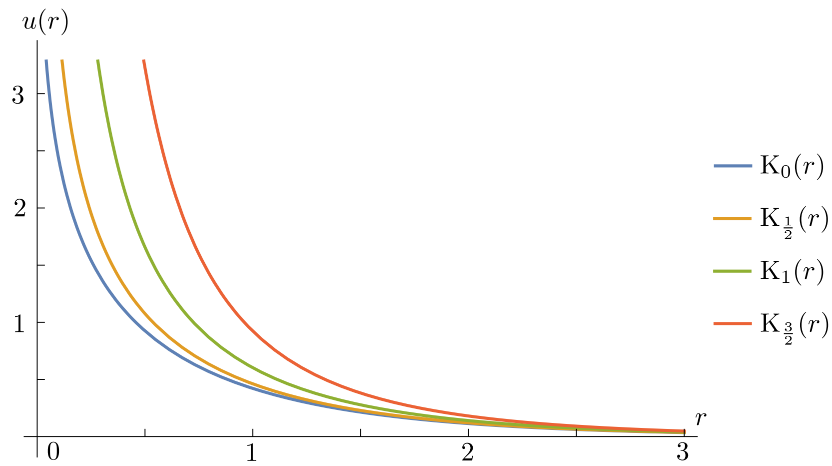
$$(r^m \mathrm{K}_m(r))' = -r^m \mathrm{K}_{m-1}(r), \tag{4.21}$$

(viii)

$$(r^{-m} \mathrm{K}_m(r))' = -r^{-m} \mathrm{K}_{m+1}(r), \tag{4.22}$$

(ix)

$$\mathrm{I}_{m+1}(r)\,\mathrm{K}_m(r) + \mathrm{I}_m(r)\,\mathrm{K}_{m+1}(r) = \frac{1}{r}. \tag{4.23}$$



Obrázek 4.4: Graf modifikovaných Besselových funkcí druhého druhu.

Lemma 4.2. *Obecným řešením diferenciální rovnice*

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}\, u'(r) - u(r) = 0 \tag{4.24}$$

je funkce ve tvaru

$$u(r) = C_1\, r^{\frac{2-n}{2}}\, \mathrm{I}_{\frac{n-2}{2}}(r) + C_2\, r^{\frac{2-n}{2}}\, \mathrm{K}_{\frac{n-2}{2}}(r) \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{4.25}$$

Důkaz. Důkaz je obdobou důkazu lemmatu 4.1. □

Kapitola 5

Dimenze 2

5.1 Úloha na vlastní čísla

Nyní prozkoumejme úlohu (2.2) ve dvou dimenzích. Dostáváme tedy

$$
\begin{aligned}
u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) + \lambda u(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\
u'(0) = 0, \ \int_0^1 ru(r)\mathrm{d}r = 0. &
\end{aligned}
$$

Tuto rovnici lze po vynásobení proměnnou r upravit do tvaru

$$
\begin{aligned}
(ru'(r))' + \lambda ru(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\
u'(0) = 0, \ \int_0^1 ru(r)\mathrm{d}r = 0, &
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

s kterým budeme v následujícím textu pracovat.

Věta 5.1. *Úloha* (5.1) *má netriviální řešení pouze pro* $\lambda > 0$.

Důkaz. Předpokládejme $\lambda < 0$.

1. Pro $u(0) = 0$ vyhovuje rovnici pouze triviální řešení. Plyne z věty o jednoznačnosti řešení (viz [4, str. 783]).

2. Nyní předpokládejme $u(0) > 0$. Ze spojitosti řešení plyne

   $$\exists r_0 > 0 : u(r) > 0 \text{ na } (0, r_0).$$

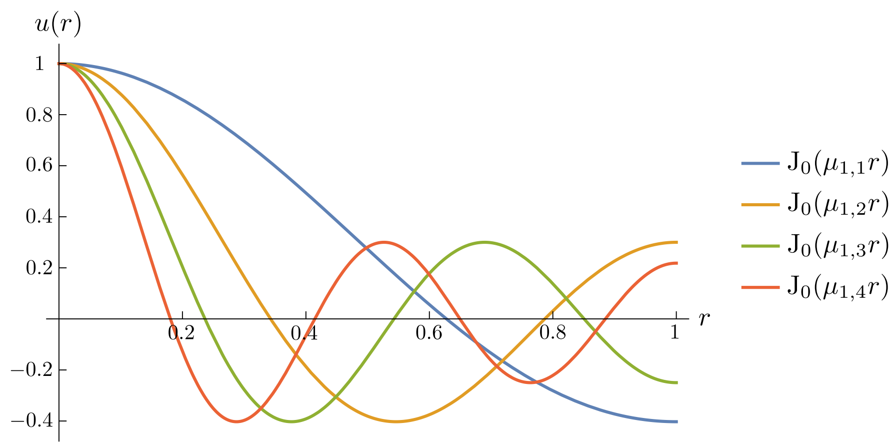
   Jelikož je λ záporná, musí platit $(ru'(r))' > 0$ na $(0, r_0)$. Z toho plyne, že $ru'(r)$ (a tedy i u') je na $(0, r_0)$ rostoucí funkcí. Jelikož navíc platí $u'(0) = 0$, je funkce u' kladná na $(0, r_0)$. A tedy i funkce u je rostoucí na intervalu $(0, r_0)$. Odsud dostáváme, že pro libovolné $r > 0$ je funkce u rostoucí.

A tedy $u(r) > 0$ pro $r \in (0,1)$. Můžeme tedy psát $\int_0^1 ru(r)\mathrm{d}r > 0$.
Což je spor s okrajovou podmínkou úlohy (5.1).

3. Pro $u(0) < 0$ je důkaz obdobný.

Pro $\lambda = 0$ má rovnice (5.1) obecné řešení ve tvaru $u(r) = a\ln(r) + b$, odkud po zohlednění první okrajové podmínky dostáváme $u(r) = b$. Aby byla splněná integrální podmínka, musí platit $b = 0$. Dostáváme tedy triviální řešení. □

Budeme tedy v následujícím výkladu automaticky předpokládat $\lambda > 0$.



Obrázek 5.1: První čtyři vlastní funkce úlohy (5.1)

Obecným řešením diferenciální rovnice z (5.1) je funkce

$$u(r) = C_1\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}r) + C_2\mathrm{Y}_0(\sqrt{\lambda}r), \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

viz lemma 4.1.
Jelikož Y_0' je v okolí nuly neomezená a $\mathrm{J}_0'(0) = 0$, dostáváme po zohlednění první okrajové podmínky $C_2 = 0$. Máme tedy

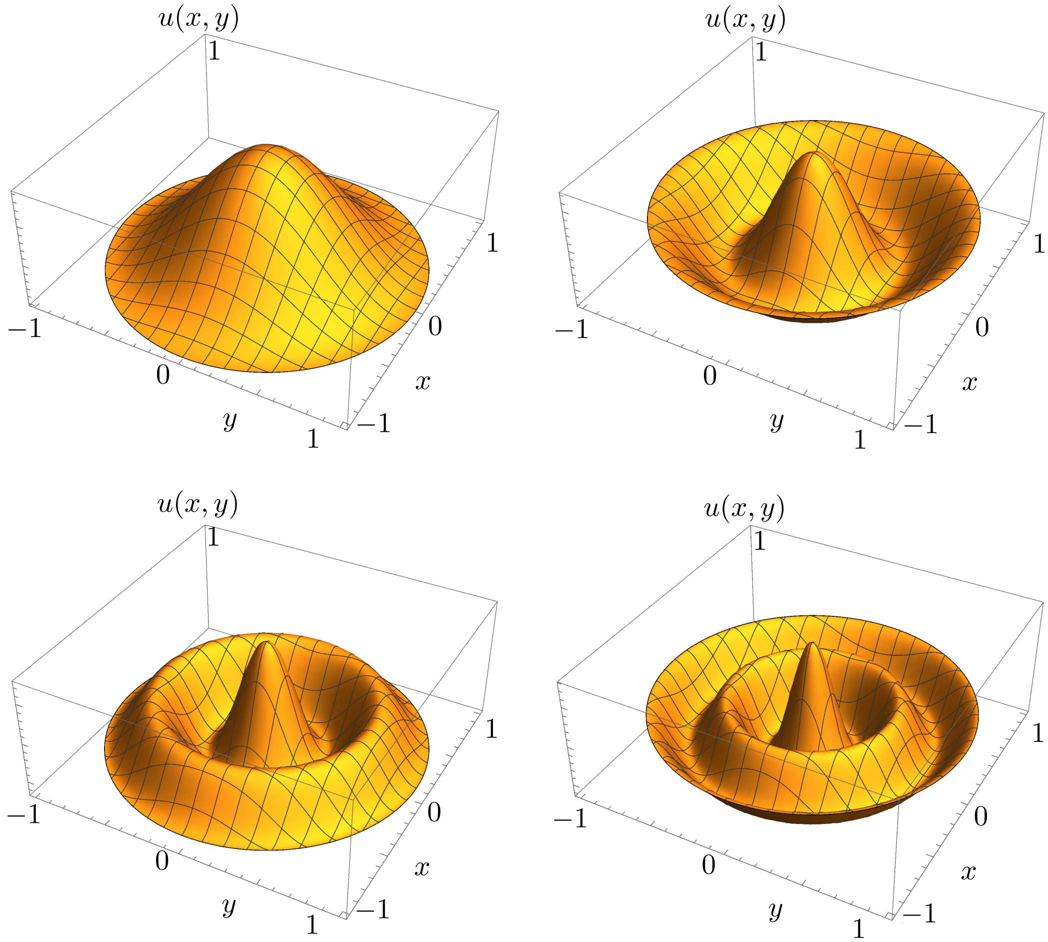
$$u(r) = C_1\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}r).$$

Nyní použijeme integrální okrajovou podmínku

$$0 = C_1\int_0^1 r\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}r)\mathrm{d}r.$$

Což lze upravit dle (4.3), čímž dostáváme

$$0 = \frac{C_1}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda}).$$



Obrázek 5.2: První čtyři vlastní funkce u_k – 3D graf.

Máme tedy

$$\sqrt{\lambda} = \mu_{1,k}.$$

Vlastní čísla úlohy (5.1) jsou daná předpisem $\lambda_k = (\mu_{1,k})^2$, kterým odpovídají vlastní funkce $u_k(r) = \mathrm{J}_0(\mu_{1,k}\, r)$, kde $k \in \mathbb{N}$.
Grafy těchto vlastních funkcí můžeme vidět na obr. 5.1 jako funkci jedné proměnné a na obr. 5.2 jako radiálně symetrickou funkci dvou proměnných.

5.2 Úloha s zobecněnou okrajovou podmínkou

Jelikož k úloze (5.1) neumíme najít tzv. adjungovanou úlohu, přejdeme podobně jako v jedné dimenzi k obecnější úloze. Nahradíme integrální podmínku následující podmínkou

$$(1-\epsilon)\int_0^1 r u(r)\mathrm{d}r + \epsilon u(1) = 0. \tag{5.2}$$

A zabývejme se opět úlohou, kde $\epsilon \in (0,1]$. Máme tedy úlohu ve tvaru

$$\begin{aligned} (ru'(r))' + \lambda r u(r) &= 0 \qquad \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ (1-\epsilon)\int_0^1 r u(r)\mathrm{d}r + \epsilon u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Věta 5.2. *Úloha* (5.3) *má netriviální řešení pouze pro* $\lambda > 0$.

Důkaz. Důkaz je obdobou důkazu věty (5.1). □

Dále tedy budeme opět předpokládat $\lambda > 0$.

Řešení úlohy (5.3)

Obecným řešením rovnice z (5.3) je funkce

$$u(r) = C_1 \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 \mathrm{Y}_0(\sqrt{\lambda} r), \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zohledněním první okrajové podmínky dostáváme

$$u(r) = C_1 \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda} r).$$

Využijme druhou okrajovou podmínku

$$(1-\epsilon)\int_0^1 r\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda} r)\mathrm{d}r + \epsilon \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Odtud po integraci máme

$$-\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}) = \mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda}), \tag{5.4}$$

což lze zapsat tvaru

$$\psi(\sqrt{\lambda}) := \mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda}) + \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Jelikož jsou funkce J_0 a J_1 analytickými funkcemi, je i funkce ψ analytickou funkcí, a tedy (jelikož ψ není nulovou funkcí) má funkce ψ maximálně spočetně mnoho nulových bodů (viz [9]). A tedy existuje maximálně spočetně mnoho vlastních čísel λ.

Jelikož jsou množiny nulových bodů funkcí J_0 a J_1 disjunktní (viz (4.11)), můžeme přepsat rovnost (5.4) do tvaru

$$\epsilon\sqrt{\lambda} = -(1-\epsilon)\,\frac{\mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda})}{\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda})}. \tag{5.5}$$

Odkud po použití asymptotického odhadu (4.10) dostáváme pro $\sqrt{\lambda} \to +\infty$

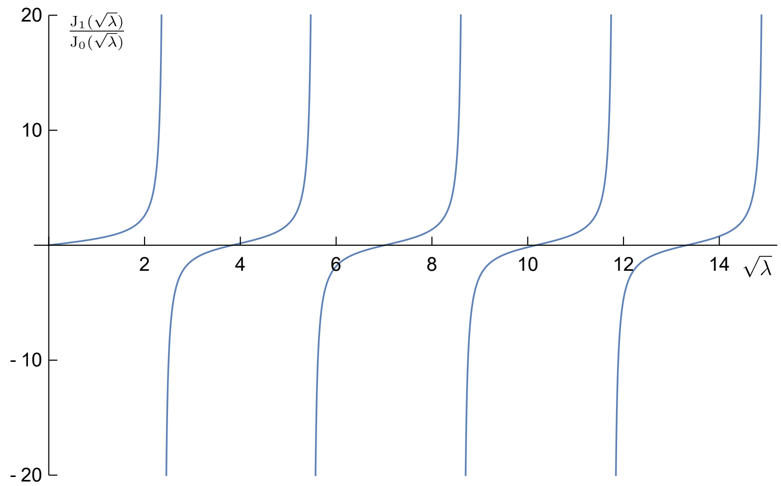
$$\epsilon\sqrt{\lambda} \approx -(1-\epsilon)\,\mathrm{tg}\Big(\sqrt{\lambda} - \frac{\pi}{4}\Big).$$

Dostáváme tedy podobně jako v jedné dimenzi nekonečnou posloupnost $\lambda_k^{(\epsilon)}$, kde

(i) $\lambda_k^{(\epsilon)}$ odpovídá k-tému řešení rovnice (5.5) s pevným ϵ,

(ii) $\lambda_{k+1}^{(\epsilon)} > \lambda_k^{(\epsilon)}$,

(iii) $\lambda_k^{(\epsilon)} > 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.



Obrázek 5.3: Graf funkce $\dfrac{\mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda})}{\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda})}$.

K vlastním číslům dostáváme vlastní funkce ve tvaru

$$u_k^{(\epsilon)}(r) = \mathrm{J}_0\Big(\sqrt{\lambda_k^{(\epsilon)}}r\Big).$$

Zavedení adjungované úlohy

Zadefinujeme adjungovanou úlohu k úloze (5.3)

$$\begin{aligned}(rv'(r))' + rv'(1)\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + r\lambda v(r) = 0 \text{ pro } r \in (0,1),\\ v'(0) = 0,\ v(1) = 0.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Úlohy (5.3) a (5.6) nazýváme adjungované (viz obdoba poznámky 3.10), jelikož pro všechny $u, v \in C^2(0,1)$ splňující okrajové podmínky z úloh (5.3), (5.6) platí

$$\int_0^1 \big((ru'(r))' + \lambda ru(r)\big)\, v(r)\mathrm{d}r = \int_0^1 u(r) \left((rv'(r))' + rv'(1)\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + r\lambda v(r)\right) \mathrm{d}r. \tag{5.7}$$

Řešení adjungované úlohy

Jelikož úloha (5.6) je adjungovanou úlohou k úloze (5.3) a úlohu (5.3) jsme řešili pro $\lambda > 0$, budeme i úlohu (5.6) řešit pro $\lambda > 0$.

Obecným řešením úlohy (5.6) je funkce

$$v(r) = -\frac{v'(1)}{\lambda}\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + C_1 \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}r) + C_2 \mathrm{Y}_0(\sqrt{\lambda}x). \tag{5.8}$$

Nyní zohledníme první okrajovou podmínku

$$v(r) = -\frac{v'(1)}{\lambda}\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + C_1 \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}r). \tag{5.9}$$

Pomocí vzorce (4.5) vyjádříme hodnotu $v'(1)$

$$v'(1) = -C_1\sqrt{\lambda}\mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda}). \tag{5.10}$$

Dostáváme tedy

$$v(r) = C_1\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda}) + C_1 \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}r). \tag{5.11}$$

Nakonec zohledníme druhou okrajovou podmínku

$$v(1) = C_1\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda}) + C_1 \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}) = 0, \tag{5.12}$$

odkud dostáváme

$$\epsilon\,\sqrt{\lambda} = -(1-\epsilon)\,\frac{\mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda})}{\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda})}. \tag{5.13}$$

Vidíme tedy, že vlastní čísla úloh (5.3), (5.6) jsou stejná. Máme tedy opět nekonečnou posloupnost vlastních čísel $\lambda_k^{(\epsilon)}$.
Dosazením (5.13) do (5.11) dostáváme výsledný tvar vlastních funkcí úlohy (5.6)

$$v_k^{(\epsilon)}(r) = \mathrm{J}_0\Big(\sqrt{\lambda_k^{(\epsilon)}}r\Big) - \mathrm{J}_0\Big(\sqrt{\lambda_k^{(\epsilon)}}\Big). \tag{5.14}$$

Limitní přechod $\epsilon \to 0$

Dodefinujme nyní $v_k^{(0)}$ limitním přechodem ve tvaru

$$v_k^{(0)}(r) = \lim_{\epsilon\to 0} v_k^{(\epsilon)}(r).$$

Pokud upravíme (5.13) do tvaru

$$\epsilon\sqrt{\lambda}\ \mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}) = -(1-\epsilon)\ \mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda}),$$

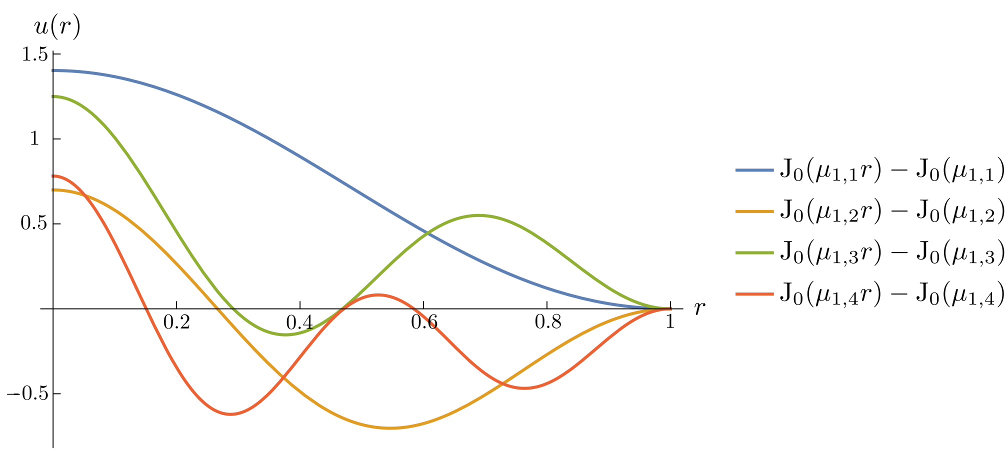
pak pro $\epsilon \to 0$ dostáváme $\mathrm{J}_1\Big(\sqrt{\lambda_k^{(\epsilon)}}\Big) = 0$, a tedy

$$\lambda_k^{(0)} = (\mu_{1,k})^2.$$

Po dosazení dostáváme limitní adjungované vlastní funkce ve tvaru

$$v_k^{(0)}(r) = \mathrm{J}_0(\mu_{1,k}r) - \mathrm{J}_0(\mu_{1,k}). \tag{5.15}$$

Tyto funkce můžeme chápat jako adjungované vlastní funkce k úloze (5.1).



Obrázek 5.4: První čtyři funkce $v_k^{(0)}$.

Lemma 5.3. *Funkce* $v_k^{(0)}$ *mají následující vlastnosti*

(i) $\big(v_k^{(0)}\big)'(1) = 0$,

(ii) $v_1^{(0)}$ *nemění znaménko na* $(0,1)$,

(iii) $\Big(r\big(v_k^{(0)}(r)\big)'\Big)' = -\mu_{1,k}^2 r\Big(v_k^{(0)}(r) - v_k^{(0)}\big(\tfrac{\mu_{0,k}}{\mu_{1,k}}\big)\Big)$.

Důkaz. Tvrzení (i) platí, jelikož $\big(v_k^{(0)}(1)\big)' = \mathrm{J}_1(\mu_{1,k}) = 0$. Ze vztahu (4.5) plyne, že bod $\mu_{1,1}$ je prvním lokálním extrémem funkce J_0 (pro $r > 0$), a tedy musí platit (ii). Tyto dvě vlastnosti můžeme dobře vidět na obr. 5.4. Nyní odvodíme vztah (iii). Nejdříve zderivujeme vlastní funkci pomocí vztahu (4.5)

$$\big(r(v_k^{(0)}(r))'\big)' = -\mu_{1,k}\big(r\mathrm{J}_1(\mu_{1,k}r)\big)'.$$

Použijeme vztah (4.4), čímž dostáváme

$$\big(r(v_k^{(0)}(r))'\big)' = -\mu_{1,k}^2 r\mathrm{J}_0\big(\mu_{1,k}r\big). \tag{5.16}$$

Nakonec vyjádříme (5.16) pomocí (5.15). Máme tedy

$$\big(r(v_k^{(0)}(r))'\big)' = -\mu_{1,k}^2 r\big(v_k^{(0)}(r) + \mathrm{J}_0(\mu_{1,k})\big) = -\mu_{1,k}^2 r\left(v_k^{(0)}(r) - v_k^{(0)}\Big(\frac{\mu_{0,k}}{\mu_{1,k}}\Big)\right). \tag{5.17}$$

□

5.3 Fučíkovo spektrum

Nyní se budeme zabývat Fučíkovým spektrem úlohy

$$\begin{aligned} (ru'(r))' + \alpha r u^+(r) - \beta r u^-(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ \int_0^1 r u(r)\mathrm{d}r = 0. & \end{aligned} \tag{5.18}$$

Odvození první větve Fučíkova spektra

Jelikož je odvození Fučíkova spektra (5.18) v druhé dimenzi mnohem komplikovanější, odvodíme pouze předpis pro první větev. Odvození opět rozdělíme do několika kroků.

(I) Vyjádříme řešení nedourčené úlohy pro α, $\beta > 0$

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

(II) Vyšetříme, pro jaké parametry α, β má řešení úlohy (5.19) právě jeden nulový bod (opět pro α, $\beta > 0$).

(III) Odvodíme první větev Fučíkova spektra úlohy (5.18) pro α, $\beta > 0$.

(IV) Zohledníme případ $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Překročme nyní k samotnému odvození.

(I) Začněme tedy řešením úlohy (5.19) (pro $\alpha,\ \beta > 0$). Řešení této diferenciální rovnice vyjádříme zvlášť pro kladnou a zápornou půlvlnu. A to tak, aby na sebe hladce navazovaly. Předpokládejme $u(0) > 0$ (pro $u(0) < 0$ je odvození obdobné). Kladnou část funkce u dostáváme ve tvaru

$$u_0(r) = \mathrm{J}_0(\sqrt{\alpha} r) \qquad \text{pro } r \in \Big(0,\ \frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\Big). \tag{5.20}$$

Přejděme k vyjádření záporné části funkce u. Obecné řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$u_1(r) = C_1\, \mathrm{J}_0(\sqrt{\beta} r) + C_2\, \mathrm{Y}_0(\sqrt{\beta} r). \tag{5.21}$$

Jelikož vyžadujeme hladké napojení kladné a záporné půlvlny, musí platit

$$u_0\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\Big) = u_1\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\Big), \tag{5.22}$$

$$u_0\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\Big) = u_1'\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\Big). \tag{5.23}$$

Podmínku (5.22) splníme volbou

$$\begin{aligned} C_1 &= C\, \mathrm{Y}_0\bigg(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\bigg),\\ C_2 &= -C\, \mathrm{J}_0\bigg(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\bigg), \end{aligned}$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Můžeme tedy zapsat u_1 ve tvaru

$$u_1(r) = C\ \bigg(\mathrm{Y}_0\bigg(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\bigg)\, \mathrm{J}_0\big(\sqrt{\beta} r\big) - \mathrm{J}_0\bigg(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\bigg)\, \mathrm{Y}_0\big(\sqrt{\beta} r\big)\bigg). \tag{5.24}$$

Nyní vyřešme hladkost napojení. Vyjádřeme nejprve derivaci funkce u_0 v bodě $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}$ pomocí vztahu (4.5)

$$u_0'\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\Big) = -\sqrt{\alpha}\, \mathrm{J}_1(\mu_{0,1}).$$

Vyjádřeme derivace funkce u_1 (použitím vztahů (4.5) a (4.8)) v bodě $\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}$

$$u_1'\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right) = -C\sqrt{\beta}\ \bigg(\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{J}_1\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{Y}_1\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\bigg).$$

Nakonec použijeme vztah (4.9), čímž dostáváme

$$u_1'\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right) = -C\,\sqrt{\beta}\,\frac{2}{\pi\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}} = -C\,\sqrt{\alpha}\,\frac{2}{\pi\mu_{0,1}}.$$

Po dosazení do rovnosti (5.23) máme

$$-\sqrt{\alpha}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}) = -C\,\sqrt{\alpha}\,\frac{2}{\pi\mu_{0,1}}.$$

Odkud plyne

$$C = \frac{\pi}{2}\,\mu_{0,1}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}).$$

Dostáváme tedy tvar záporné půlvlny ve tvaru

$$u_1(r) = \frac{\pi}{2}\,\mu_{0,1}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\,\left(\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{J}_0(\sqrt{\beta}r) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{Y}_0(\sqrt{\beta}r)\right)$$
$$\text{pro } r \in \left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}},\, r_0\right].$$

Kde r_0 je definován jako první nulový bode funkce u_1 na intervalu $\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}},\, +\infty\right)$.

(II) Dostáváme tedy, že funkce u má na intervalu $(0,\,1)$

(i) 0 nulových bodů pro $(\alpha,\,\beta) \in \left\{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}} \geq 1\right\}$,

(ii) 1 nulových bodů pro $(\alpha,\,\beta) \in \left\{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}} < 1,\, r_0 \geq 1\right\}$.

Zaveďme nyní následující množiny

$$\begin{aligned} N_1^+ = \Big\{&(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 : u(0) > 0,\, u \text{ je řešením úlohy (5.19)} \\ &\text{a funkce } u \text{ má na intervalu } (0,1) \text{ právě 1 nulový bod.}\Big\} \\ N_1^- = \Big\{&(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 : u(0) < 0,\, u \text{ je řešením úlohy (5.19)} \\ &\text{a funkce } u \text{ má na intervalu } (0,1) \text{ právě 1 nulový bod.}\Big\} \end{aligned} \tag{5.25}$$

Lemma 5.4. *Pro N_1^+ a N_1^- platí*

$$N_1^+ = \left\{(\alpha,\,\beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 : \frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}} < 1,\, r_0 \geq 1\right\},$$

$$N_1^- = \left\{(\alpha,\,\beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 : (\beta,\,\alpha) \in N_1^+\right\},$$

(III) Nyní můžeme přejít k řešení úlohy

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \quad \int_0^1 r\, u(r)\mathrm{d}r = 0. & \end{aligned} \tag{5.26}$$

Označme první Fučíkovu větev úlohy (5.26) zápisem

$$\begin{aligned} I_1^+ = \Big\{ & (\alpha,\beta) : u(0) > 0,\ u \text{ je řešením úlohy (5.26)} \\ & \text{a funkce } u \text{ má na intervalu } (0,1) \text{ právě 1 nulový bod.} \Big\} \\ I_1^- = \Big\{ & (\alpha,\beta) : u(0) < 0,\ u \text{ je řešením úlohy (5.26)} \\ & \text{a funkce } u \text{ má na intervalu } (0,1) \text{ právě 1 nulový bod.} \Big\} \end{aligned} \tag{5.27}$$

Řešíme tedy následující úlohu.

Pro jaké $(\alpha,\ \beta) \in N_1^+$ a funkci u platí $\displaystyle\int_0^1 r\, u(r)\mathrm{d}r = 0$, kde

$$u(r) = \begin{cases} u_0(r) = \mathrm{J}_0(\sqrt{\alpha}r) \\ \ \text{pro } r \in \big(0,\ \frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\big], \\ \\ u_1(r) = \frac{\pi}{2}\,\mu_{0,1}\ \mathrm{J}_1(\mu_{0,1}) \Big(\mathrm{Y}_0\big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\big)\,\mathrm{J}_0(\sqrt{\beta}r) - \mathrm{J}_0\big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\big)\,\mathrm{Y}_0(\sqrt{\beta}r)\Big) \\ \text{pro } r \in \big(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}},\ 1\big). \end{cases}$$

(Zde můžeme psát $r \in \big(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}},\ 1\big]$, jelikož předpokládáme $(\alpha,\ \beta) \in N_1^+$).

Vyjádřeme nyní integrály z funkcí u_0 a u_1. Připomeňme, že u_0 (resp. u_1) je kladnou (resp. zápornou) částí funkce u.

Nejdříve vyjádřeme integrál z kladné části. Použitím vztahu (4.3) dostáváme

$$\int_0^{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}} r\, u_0(r)\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}} r\,\mathrm{J}_0(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r = \left[\frac{r\,\mathrm{J}_1(\sqrt{\alpha}\,r)}{\sqrt{\alpha}}\right]_0^{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}} = \frac{\mu_{0,1}}{\alpha}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}).$$

Nyní vyjádřeme integrál ze záporné části

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^1 r\, u_1(r)\mathrm{d}r =$$

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^1 \frac{\pi}{2}\,\mu_{0,1}\ \mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\ \left(\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, r\,\mathrm{J}_0(\sqrt{\beta}r) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, r\,\mathrm{Y}_0(\sqrt{\beta}r)\right)\,\mathrm{d}r.$$

Použitím vztahu (4.3) a (4.6) dostáváme

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^{1} r\, u_1(r) \mathrm{d}r =$$
$$\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\, \mu_{0,1}\, \mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\, \left[\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, r\, \mathrm{J}_1(\sqrt{\beta} r) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, r\, \mathrm{Y}_1(\sqrt{\beta} r)\right]_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^{1}.$$

Po dosazení mezí máme

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^{1} r\, u_1(r) \mathrm{d}r =$$
$$\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\, \mu_{0,1}\, \mathrm{J}_1(\mu_{0,1}) \Bigg(\Bigg(\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{J}_1\big(\sqrt{\beta}\big) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{Y}_1\big(\sqrt{\beta}\big)\Bigg) - \tag{5.28}$$
$$\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\Bigg(\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{J}_1\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{Y}_1\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\Bigg)\Bigg).$$

Ze vztahu (4.9) plyne

$$\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{J}_1\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{Y}_1\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big) = \frac{2}{\pi\, \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\, \mu_{0,1}}.$$

Dosazením tohoto vztahu do (5.28) dostáváme

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^{1} r\, u_1(r) \mathrm{d}r =$$
$$\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\, \mu_{0,1}\, \mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\, \Bigg(\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{J}_1(\sqrt{\beta}) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{Y}_1(\sqrt{\beta})\Bigg) -$$
$$\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\, \mu_{0,1}\, \mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\, \frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}} \frac{2}{\pi\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\mu_{0,1}}.$$

Což lze zjednodušit do tvaru

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^{1} r\, u_1(r) \mathrm{d}r =$$
$$\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\, \mu_{0,1}\, \mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\, \Bigg(\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{J}_1(\sqrt{\beta}) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{Y}_1(\sqrt{\beta})\Bigg) -$$
$$\frac{1}{\beta}\, \mu_{0,1}\, \mathrm{J}_1(\mu_{0,1}).$$

Nyní můžeme vyjádřit integrál funkce u na intervalu $(0,1)$ ve tvaru

$$\int_0^1 r\,u(r)\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}} r\,u_0(r)\mathrm{d}r + \int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^1 r\,u_1(r)\mathrm{d}r =$$

$$\frac{\mu_{0,1}}{\alpha}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}) + \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\,\mu_{0,1}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\left(\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{J}_1(\sqrt{\beta}) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{Y}_1(\sqrt{\beta})\right) - \frac{1}{\beta}\,\mu_{0,1}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}).$$

Dostáváme tedy

$$\int_0^1 r\,u(r)\mathrm{d}r = 0,$$

pokud

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\left(\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{J}_1(\sqrt{\beta}) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{Y}_1(\sqrt{\beta})\right) = 0.$$

Odtud máme

$$I_1^+ \supset \left\{(\alpha,\,\beta) : \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\left(\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{J}_1(\sqrt{\beta}) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{Y}_1(\sqrt{\beta})\right) = 0,\ (\alpha,\,\beta) \in N_1^+\right\}.$$

(IV) Nyní uvažujme i záporná $\alpha,\ \beta$. Jelikož předpokládáme $u(0) > 0$, α musí být kladná (viz důkaz věty 5.1). Navíc uvažujme $\alpha > \mu_{0,1}^2$, aby funkce u měla i zápornou část.

(i) Uvažujme nejprve $\beta = 0$. Kladná část je opět dána předpisem

$$u_k(r) = \mathrm{J}_0(\sqrt{\alpha}r) \qquad \text{pro } r \in \left(0, \frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right].$$

Záporná část musí splňovat následující diferenciální rovnici

$$u_z''(r) + \frac{1}{r}u_z'(r) = 0, \tag{5.29}$$

jejímž obecným řešením je funkce

$$u_z(r) = C_1 - C_2\ln(r).$$

Jelikož vyžadujeme hladké napojení funkcí u_k a u_z, musí být splněny následující rovnosti

$$u_z\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right) = 0,$$
$$u_z'\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right) = -\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}).$$

Po zohlednění první podmínky máme

$$u_z(r) = C\left(\ln\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right) - \ln(r)\right),$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Nyní vyjádříme derivaci funkce u_z

$$u_z'(r) = -C\frac{1}{r}.$$

a zohledníme druhou podmínku

$$u_z'\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right) = -C\frac{1}{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}} = -\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}).$$

Dostáváme $C = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\mu_{0,1}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})$. A tedy máme u_z ve tvaru

$$u_z(r) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\mu_{0,1}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\left(\ln\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right) - \ln(r)\right).$$

Vyjádřeme opět $\displaystyle\int_0^1 r\,u(r)\mathrm{d}r$.

$$\int_0^1 r\,u(r)\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}} r\,u_k(r)\mathrm{d}r + \int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^1 r\,u_z(r)\mathrm{d}r =$$
$$\int_0^{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}} r\,\mathrm{J}_0(\sqrt{\alpha}r)\mathrm{d}r + \frac{\sqrt{\alpha}}{\mu_{0,1}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^1 r\left(\ln\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right) - \ln(r)\right)\mathrm{d}r.$$

Po integraci dostáváme

$$\int_0^1 r\,u(r)\mathrm{d}r = \frac{\mu_{0,1}}{\alpha}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}) + \frac{\sqrt{\alpha}}{\mu_{0,1}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\left[\frac{r^2}{4}\left(2\ln\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right) - 2\ln(r) + 1\right)\right]_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^1.$$

Po dosazení mezí máme

$$\int_0^1 r\,u(r)\mathrm{d}r =$$
$$\frac{\mu_{0,1}}{\alpha}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}) + \frac{\sqrt{\alpha}}{\mu_{0,1}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\left(\frac{1}{4}\left(2\ln\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right) + 1\right)\right) - \frac{\sqrt{\alpha}}{\mu_{0,1}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\left(\frac{\mu_{0,1}^2}{4\alpha}\right).$$

Což lze zjednodušit do tvaru

$$\int_0^1 r\,u(r)\mathrm{d}r =$$
$$\frac{\mu_{0,1}}{\alpha}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}) + \frac{\sqrt{\alpha}}{4\mu_{0,1}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\left(2\ln\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right)+1\right) - \frac{\mu_{0,1}}{4\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}).$$

Dostáváme tedy

$$\int_0^1 r\,u(r)\mathrm{d}r = 0,$$

pokud

$$\frac{\mu_{0,1}}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha}}{4\mu_{0,1}}\left(2\ln\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right)+1\right) - \frac{\mu_{0,1}}{4\sqrt{\alpha}} = 0.$$

Odtud máme

$$I_1^+ \supset \left\{(\alpha,\,\beta) : \frac{\mu_{0,1}}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha}}{4\mu_{0,1}}\left(2\ln\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right)+1\right) - \frac{\mu_{0,1}}{4\sqrt{\alpha}} = 0, \quad \alpha > \mu_{0,1}^2,\, \beta = 0.\right\}$$

(ii) Nyní uvažujme $\beta < 0$, přičemž opět předpokládáme $\alpha > \mu_{0,1}^2$. Kladná část je opět dána předpisem

$$u_k(r) = \mathrm{J}_0(\sqrt{\alpha}r) \qquad \text{pro } r \in \left(0, \frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right].$$

Záporná část musí splňovat následující diferenciální rovnici

$$u_z''(r) + \frac{1}{r}u_z'(r) + \beta u_z(r) = 0, \tag{5.30}$$

jejímž obecným řešením je funkce

$$u_z(r) = C_1\,\mathrm{I}_0(\sqrt{-\beta}\,r) + C_2\,\mathrm{K}_0(\sqrt{-\beta}\,r)$$

(viz lemma 4.2). Jelikož funkce u_k a u_z musí být hladce napojené, platí opět

$$\begin{aligned} u_z\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\Big) &= 0, \\ u_z'\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\Big) &= -\sqrt{\alpha}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}). \end{aligned}$$

Po zohlednění první podmínky dostáváme

$$u_z(r) = C\,\left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{I}_0\big(\sqrt{-\beta}\,r\big) - \mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{K}_0\big(\sqrt{-\beta}\,r\big)\right),$$

kde $C_1 = C\,\mathrm{K}_0(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1})$ a $C_2 = -C\,\mathrm{I}_0(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1})$, $C \in \mathbb{R}$.

Nyní vyjádřeme derivaci funkce u_z v bodě $\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}$ pomocí vztahu (4.19) a (4.22)

$$u_z'\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\Big) =$$

$$C\,\sqrt{-\beta}\,\left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{I}_1\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big) + \mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{K}_1\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big)\right).$$

Využitím vztahu (4.23) dostáváme

$$u_z'\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\Big) = C\,\sqrt{-\beta}\,\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}}\right) = C\frac{\sqrt{\alpha}}{\mu_{0,1}}.$$

Odtud máme

$$C\frac{\sqrt{\alpha}}{\mu_{0,1}} = -\sqrt{\alpha}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}),$$

a tedy

$$C = -\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\,\mu_{0,1}.$$

Funkce u_z je dána předpisem

$$u_z(r) = -\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\,\mu_{0,1}\left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{I}_0(\sqrt{-\beta}\,r) - \mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{K}_0(\sqrt{-\beta}\,r)\right).$$

Vyjádřeme nyní integrály z kladné a záporné části. Pro kladnou část dostáváme

$$\int_0^{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}} r\,u_0(r)\mathrm{d}r = \frac{\mu_{0,1}}{\alpha}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1}).$$

Nyní vyjádřeme integrál ze záporné části

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^1 r\,u_1(r)\mathrm{d}r = -\mu_{0,1}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})$$

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^1 \left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big)\,r\,\mathrm{I}_0(\sqrt{-\beta}\,r) - \mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big)\,r\,\mathrm{K}_0(\sqrt{-\beta}\,r)\right)\mathrm{d}r.$$

Použitím vztahu (4.17) a (4.20) dostáváme

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^1 r\,u_1(r)\mathrm{d}r = -\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{-\beta}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})$$

$$\left[\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big)\,r\,\mathrm{I}_1(\sqrt{-\beta}\,r) + \mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mu_{0,1}\Big)\,r\,\mathrm{K}_1(\sqrt{-\beta}\,r)\right]_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^1.$$

Po dosazení mezí máme

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^{1} r\, u_1(r)\mathrm{d}r =$$

$$-\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{-\beta}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\left(\left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{I}_1(\sqrt{-\beta})+\mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{K}_1(\sqrt{-\beta})\right)- \right. \tag{5.31}$$
$$\left.\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{I}_1\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)+\mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{K}_1\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\right)\right).$$

Ze vztahu (4.23) plyne

$$\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{I}_1\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)+\mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{K}_1\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)=\frac{1}{\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}}.$$

Dosazením tohoto vztahu do (5.31) dostáváme

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^{1} r\, u_1(r)\mathrm{d}r =$$
$$-\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{-\beta}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\,\left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{I}_1\Big(\sqrt{-\beta}\Big)-\mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{K}_1\Big(\sqrt{-\beta}\Big)\right)+$$
$$\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{-\beta}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\,\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}}.$$

Což lze zjednodušit do tvaru

$$\int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^{1} r\, u_1(r)\mathrm{d}r =$$
$$-\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{-\beta}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\,\left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{I}_1(\sqrt{-\beta})-\mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{K}_1(\sqrt{-\beta})\right)+$$
$$\frac{\mu_{0,1}}{-\beta}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\,.$$

Nyní můžeme vyjádřit integrál funkce u na intervalu $(0,1)$ ve tvaru

$$\int_0^1 r\, u(r)\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}} r\, u_0(r)\mathrm{d}r + \int_{\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}}^{1} r\, u_1(r)\mathrm{d}r =$$
$$\frac{\mu_{0,1}}{\alpha}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})-\frac{\mu_{0,1}}{\beta}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})-$$
$$\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{-\beta}}\,\mathrm{J}_1(\mu_{0,1})\,\left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{I}_1(\sqrt{-\beta})-\mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\,\mathrm{K}_1(\sqrt{-\beta})\right).$$

Dostáváme tedy

$$\int_0^1 r\,u(r)\mathrm{d}r = 0,$$

pokud

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{I}_1(\sqrt{-\beta}) - \mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{K}_1(\sqrt{-\beta}) \right) = 0.$$

A tedy

$$I_1^+ \supset \left\{ (\alpha,\, \beta) : \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{I}_1(\sqrt{-\beta}) - \mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{K}_1(\sqrt{-\beta}) \right) + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 0, \quad \alpha > \mu_{0,1}^2,\, \beta < 0 \right\}.$$

Tímto jsme odvodili následující větu.

Věta 5.5. *První větev Fučíkova spektra úlohy* (5.18) *lze zapsat ve tvaru*

$$I_1^+ = \left\{ (\alpha,\, \beta) : \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} \left(\mathrm{Y}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{J}_1(\sqrt{\beta}) - \mathrm{J}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{Y}_1(\sqrt{\beta}) \right) = 0, \quad (\alpha,\, \beta) \in N_1^+ \right\} \cup$$

$$\left\{ (\alpha,\, \beta) : \frac{\mu_{0,1}}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha}}{4\mu_{0,1}} \left(2\ln\left(\frac{\mu_{0,1}}{\sqrt{\alpha}}\right) + 1 \right) - \frac{\mu_{0,1}}{4\sqrt{\alpha}} = 0, \quad \alpha > \mu_{0,1}^2,\, \beta = 0 \right\} \cup$$

$$\left\{ (\alpha,\, \beta) : \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \left(\mathrm{K}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{I}_1(\sqrt{-\beta}) - \mathrm{I}_0\Big(\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\mu_{0,1}\Big)\, \mathrm{K}_1(\sqrt{-\beta}) \right) + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 0, \quad \alpha > \mu_{0,1}^2,\, \beta < 0 \right\},$$

$$I_1^- = \left\{ (\alpha, \beta) : (\beta, \alpha) \in I_1^+ \right\}.$$

Tuto větev Fučíkova spektra můžeme vidět jako část obr. A.4.

Vlastnosti Fučíkova spektra

Nyní odvodíme obdobu věty 3.7. V jedné dimenzi byly všechny adjungované funkce $v_k^{(0)}$ kladné (nebo záporné) na celém intervalu. Nyní má tuto vlastnost pouze první vlastní funkce $v_1^{(0)}$. Proto dojdeme k mnohem slabšímu závěru než v jedné dimenzi.

Věta 5.6 (Omezení spektra ve 2D)**.** *Úloha* (5.18) *má netriviální řešení pro* α, β *splňující*

$$(\alpha - (\mu_{1,1})^2)(\beta - (\mu_{1,1})^2) > 0, \tag{5.32a}$$

$$\textit{nebo } \alpha = \beta = (\mu_{1,k})^2, \qquad k \in \mathbb{N}\,. \tag{5.32b}$$

Důkaz. Nejdříve vynásobíme rovnici v úloze (5.18) funkcí $v = v_k^{(0)}$ a provedeme integraci, přes celý interval $(0,1)$, čímž dostáváme

$$\int_0^1 (ru'(r))'\, v(r)\mathrm{d}r + \alpha \int_0^1 ru^+(r)\, v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 ru^-(r)\, v(r)\mathrm{d}r = 0 \tag{5.33}$$

Nyní provedeme integraci per partes

$$\begin{aligned} \Big[ru'(r)v(r) - ru(r)v'(r)\Big]_0^1 + \int_0^1 u(r)\,\big(rv'(r)\big)'\mathrm{d}r + \\ + \alpha \int_0^1 ru^+(r)\, v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 ru^-(r)\, v(r)\mathrm{d}r = 0 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Jelikož platí

$$v'(0) = 0, v(1) = 0, v'(1) = 0, u'(0) = 0 \text{ a } \big(rv'(r)\big)' = -\mu_{1,1}^2 r \left(v(r) - v\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\mu_{1,1}}\Big)\right),$$

dostáváme rovnost ve tvaru

$$-\mu_{1,1}^2 \int_0^1 ru(r) \left(v(r) - v\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\mu_{1,1}}\Big)\right) + \alpha \int_0^1 ru^+(r)\, v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 ru^-(r)\, v(r)\mathrm{d}r = 0. \tag{5.35}$$

Jelikož

$$\mu_{1,1}^2 v\Big(\frac{\mu_{0,1}}{\mu_{1,1}}\Big) \int_0^1 ru(r)\mathrm{d}r = 0,$$

můžeme psát

$$-\mu_{1,1}^2 \int_0^1 r\, u(r)\, v(r)\mathrm{d}r + \alpha \int_0^1 ru^+(r)\, v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 ru^-(r)\, v(r)\mathrm{d}r = 0. \tag{5.36}$$

Což můžeme upravit do následujícího tvaru

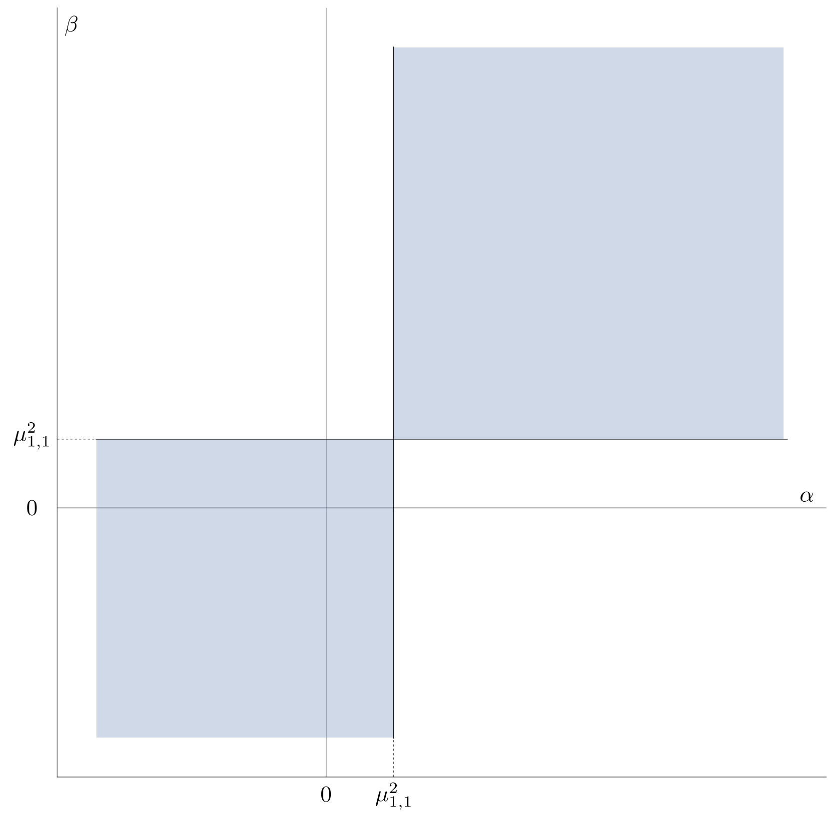
$$(\alpha - \mu_{1,1}^2) \int_0^1 ru^+(r)\, v(r)\mathrm{d}r = (\beta - \mu_{1,1}^2) \int_0^1 ru^-(r)\, v(r)\mathrm{d}r. \tag{5.37}$$

Jelikož funkce u^+, u^- jsou nezáporné (a netriviální) a v je kladná skoro všude, jsou i oba integrály

$$\int_0^1 ru^+(r)\,v(r)\mathrm{d}r,\ \int_0^1 ru^-(r)\,v(r)\mathrm{d}r$$

kladné. A tedy platí (5.32a). Navíc pokud platí $\alpha = \beta$ redukuje se úloha (5.18) na úlohu na vlastní čísla. Pak pro α, β zřejmě platí (5.32b). □

Oblast, ve které Fučíkovo spektrum úlohy (5.18) leží, můžeme vidět na obr. 5.5 a 5.6.



Obrázek 5.5: Oblast, ve které leží Fučíkovo spektrum úlohy (5.18).

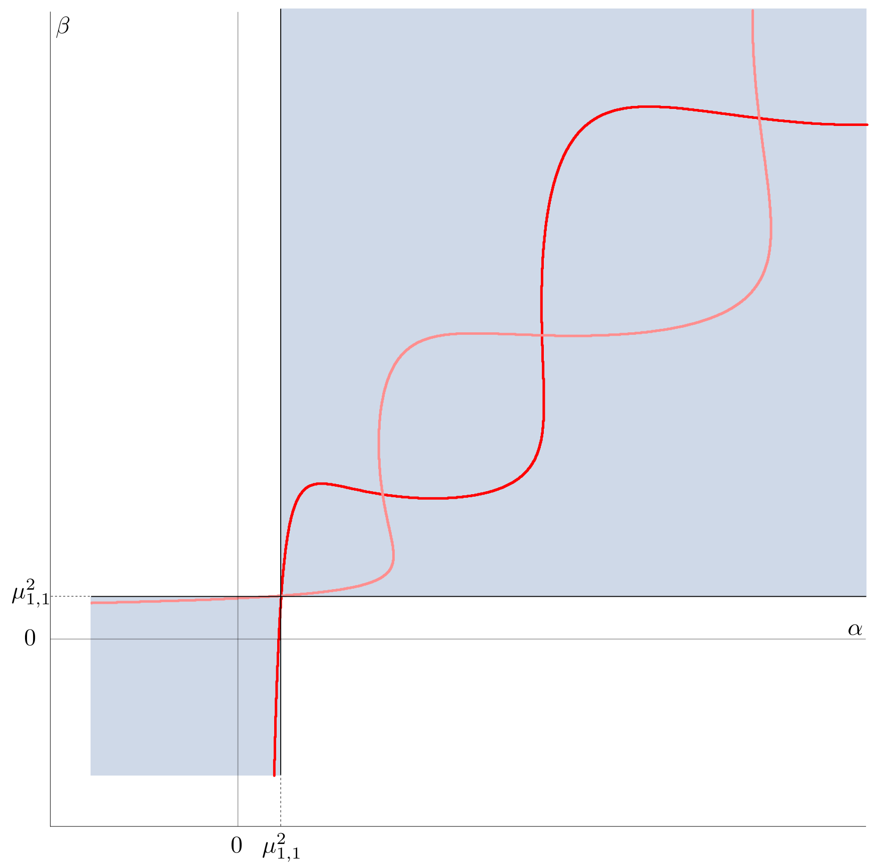
Tečny Fučíkova spektra

Odvoďme nyní podobně jako v jedné dimenzi tečny Fučíkova spektra ve vlastních číslech.

Uvažujme úlohu na Fučíkovo spektrum ve tvaru

$$\begin{aligned}(ru'(r))' + \alpha ru^+(r) - \beta ru^-(r) = 0 \qquad &\text{pro } r \in (0,1),\\ u'(0) = 0,\ (1-\epsilon)\int_0^1 ru(r)\mathrm{d}r + \epsilon u(1) = 0,&\end{aligned} \tag{5.38}$$

kde ϵ je pevný parametr z intervalu $(0,1]$. Tato úloha je obdobou úlohy (3.27).



Obrázek 5.6: Fučíkovo spektrum úlohy (5.18).

Věta 5.7 (Tečna k Fučíkovu spektru ve 2D - pro zobecněnou úlohu)**.** *Předpokládejme, že existuje větev Fučíkova spektra úlohy* (5.38)*, která prochází vlastním číslem λ_k (bodem (λ_k, λ_k)). Pak Fučíkovo spektrum úlohy* (5.38) *má ve vlastním čísle λ_k tečnu danou předpisem*

$$p: \begin{array}{l} \alpha(t) = \lambda_k + t, \\ \beta(t) = \lambda_k + at, \end{array} \quad t \in \mathbb{R},$$

kde

$$a = \frac{\displaystyle\int_0^1 r\, u_k^+(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^1 r\, u_k^-(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r}. \tag{5.39}$$

Funkce u_k je vlastní funkcí úlohy (5.3) *odpovídající vlastnímu číslu λ_k a v_k je adjungovanou vlastní funkcí (neboli vlastní funkcí k úloze* (5.6)*).*

Důkaz. Uvažujme opět bod (α_0, β_0), ležící ve Fučíkově spektru, ve tvaru

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \lambda_k +, s, \\ \beta_0 &= \lambda_k + a\, s, \end{aligned} \tag{5.40}$$

kde a, s jsou vhodně zvolená reálná čísla tak, aby platilo (5.40).

A přímku

$$p: \begin{aligned} \alpha(t) &= \lambda_k + \, t, \\ \beta(t) &= \lambda_k + a\, t, \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R},$$

procházející bodem (α_0, β_0).

Nyní do rovnice v úloze (5.38) dosaďme (5.40), čímž dostáváme

$$\int_0^1 (r\, u'(r))' + (\lambda_k + s) r u^+(r) - (\lambda_k + a\, s) r u^-(r) = 0. \tag{5.41}$$

Rovnici z úlohy (5.41) nyní přenásobíme funkcí v_k, kde v_k je adjungovanou funkcí k úloze (5.3) odpovídající vlastnímu číslu λ_k. A provedeme integraci přes interval $(0, 1)$.

$$\int_0^1 \left(\left(r\, u'(r) \right)' + \lambda_k\, r\, u(r) + s\, r\, u^+(r) - a\, s\, r\, u^-(r) \right) v_k(r)\, \mathrm{d}r = 0. \tag{5.42}$$

Nyní využijeme vztah (5.7), odkud dostáváme

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(r) \left(\left(r\, v'(r) \right)' + r\, v_k'(1)\, \frac{1-\epsilon}{\epsilon} + \lambda_k\, r\, v_k(r) \right) \mathrm{d}r + \\ \int_0^1 s u^+(r)\, v_k(r) - a\, s u^-(r)\, v_k(r)\, \mathrm{d}r = 0. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Funkce v_k je však vlastní funkcí, které odpovídá vlastní číslo λ_k, a tedy musí platit

$$\left(r\, v'(r) \right)' + r\, v_k'(1)\, \frac{1-\epsilon}{\epsilon} + \lambda_k\, r\, v_k(r) = 0.$$

Dostáváme tedy, že

$$a = \frac{\displaystyle\int_0^1 r\, u^+(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^1 r\, u^-(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r} \tag{5.44}$$

je směrnicí přímky spojující bod (λ_k, λ_k) a (α_0, β_0).

Uvažujme nyní, že (α_0, β_0) leží na stejné větvi Fučíkova spektra jako (λ_k, λ_k). Pokud uděláme limitní přechod $(\alpha_0, \beta_0) \to (\lambda_k, \lambda_k)$, tj. $u \to u_k$, přímka p přejde na tečnu Fučíkova spektra v bodě (λ_k, λ_k). Směrnice tečny ve vlastním čísle je tedy daná předpisem (5.39). $\square$

Podobně jako v jedné dimenzi lze ukázat, že výše uvedený vztah platí i pro úlohu (5.18).

Věta 5.8 (Tečna k Fučíkovu spektru ve 2D)**.** *Předpokládejme, že existuje větev Fučíkova spektra úlohy* (5.18)*, která prochází vlastním číslem* λ_k *(bodem* (λ_k, λ_k)*). Pak Fučíkovo spektrum úlohy* (5.18) *má ve vlastním čísle* λ_k *tečnu danou předpisem*

$$p: \begin{array}{l} \alpha(t) = \lambda_k + t, \\ \beta(t) = \lambda_k + a\,t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R},$$

kde

$$a = \frac{\displaystyle\int_0^1 r\, u_k^+(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^1 r\, u_k^-(r)\, v_k(r) \mathrm{d}r}. \tag{5.45}$$

Funkce u_k *je vlastní funkcí úlohy* (5.1) *a* v_k *je adjungovanou vlastní funkcí (viz* (5.15)*).*

Důkaz. Důkaz je obdobou důkazu věty 3.9. Opět stačí za v_k přímo dosadit $v_k^{(0)}$ (viz (5.15)). □

Kapitola 6

Dimenze n

6.1 Úloha na vlastní čísla

Nyní prozkoumejme úlohu (2.2) v obecné dimenzi n. Abychom se vyhnuli určitým technickým potížím, budeme předpokládat $n \geq 2$. Dostáváme úlohu ve tvaru

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \lambda u(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \int_0^1 r^{n-1}u(r)\mathrm{d}r = 0. & \end{aligned}$$

Po přenásobení rovnice z této úlohy výrazem r^{n-1}, dostáváme úlohu v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} \left(r^{n-1}u'(r)\right)' + \lambda r^{n-1}u(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \int_0^1 r^{n-1}u(r)\mathrm{d}r = 0. & \end{aligned} \tag{6.1}$$

Věta 6.1. *Úloha* (6.1) *má netriviální řešení pouze pro* $\lambda > 0$.

Důkaz. Důkaz je obdobou důkazu věty 5.1 □

Budeme tedy v následujícím výkladu automaticky předpokládat $\lambda > 0$.

Obecným řešením diferenciální rovnice z (6.1) je funkce

$$u(r) = C_1 r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r) + C_2 r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{Y}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r), \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

viz lemma 4.1.
Po zohlednění první okrajové podmínky dostáváme $C_2 = 0$. Máme tedy rovnost ve tvaru

$$u(r) = C_1 r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r).$$

Nyní použijeme integrální okrajovou podmínku,

$$0 = \int_0^1 C_1 r^{\frac{n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} r) \mathrm{d}r.$$

Což lze upravit (pomocí vztahu (4.3)) do tvaru

$$0 = \left[r^{\frac{n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda} r) \right]_0^1.$$

Dostáváme tedy

$$\sqrt{\lambda} = \mu_{\frac{n}{2},k}.$$

Vlastní čísla úlohy (6.1) jsou daná předpisem $\lambda_k = (\mu_{\frac{n}{2},k})^2$, kterým odpovídají vlastní funkce $u_k(r) = r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{\frac{n}{2},k} r)$, kde $k \in \mathbb{N}$.

6.2 Úloha s zobecněnou okrajovou podmínkou

Nyní přejdeme podobně jako v druhé dimenzi k obecnější úloze. Uvažujme tedy úlohu ve tvaru

$$\begin{aligned} (r^{n-1} u'(r))' + \lambda r^{n-1} u(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ (1-\epsilon) \int_0^1 r^{n-1} u(r)\,\mathrm{d}r + \epsilon u(1) = 0. & \end{aligned} \tag{6.2}$$

Věta 6.2. *Úloha* (6.2) *má netriviální řešení pouze pro* $\lambda > 0$.

Důkaz. Důkaz je obdobou důkazu věty (6.1). □

Dále tedy budeme opět předpokládat $\lambda > 0$.

Řešení úlohy (6.2)

Obecným řešením rovnice z (6.2) je funkce

$$u(r) = C_1 r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} r) + C_2 r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{Y}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} r), \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zohledněním první okrajové podmínky dostáváme

$$u(r) = C_1 r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} r).$$

Použitím druhé okrajové podmínky dostáváme

$$(1-\epsilon) \int_0^1 r^{\frac{n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} r) \mathrm{d}r + \epsilon \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Odtud po integraci dostáváme

$$\frac{(1-\epsilon)}{\sqrt{\lambda}}\, \mathrm{J}_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}) = -\epsilon\, \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}). \tag{6.3}$$

Můžeme tedy podobně jako v druhé dimenzi zavést analytickou funkci ve tvaru

$$\psi(\sqrt{\lambda}) = \mathrm{J}_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}) + \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\sqrt{\lambda}\, \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Existuje tedy opět maximálně spočetně mnoho vlastních čísel λ.
Jelikož množiny nulových bodů funkcí $\mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}$ a $\mathrm{J}_{\frac{n}{2}}$ jsou disjunktní (viz (4.11)), lze rovnost (6.3) upravit do tvaru

$$\epsilon\sqrt{\lambda} = -(1-\epsilon)\, \frac{\mathrm{J}_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda})}{\mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda})}. \tag{6.4}$$

Z asymptotických odhadů (4.10) pro $\sqrt{\lambda} \to +\infty$ máme

$$\epsilon\sqrt{\lambda} \approx -(1-\epsilon)\, \mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda} - \frac{(n-1)\,\pi}{4}\right). \tag{6.5}$$

Máme tedy podobně jako v druhé dimenzi nekonečnou posloupnost $\lambda_k^{(\epsilon)}$, kde

(i) $\lambda_k^{(\epsilon)}$ odpovídá k-tému řešení rovnice (6.4) s pevným ϵ,

(ii) $\lambda_{k+1}^{(\epsilon)} > \lambda_k^{(\epsilon)}$,

(iii) $\lambda_k^{(\epsilon)} > 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

K vlastním číslům dostáváme vlastní funkce ve tvaru

$$u_k^{(\epsilon)}(r) = \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}\Big(\sqrt{\lambda_k^{(\epsilon)}}\, r\Big). \tag{6.6}$$

Zavedení adjungované úlohy

Zadefinujeme adjungovanou úlohu k úloze (6.2)

$$\begin{aligned} \big(r^{n-1}v'(r)\big)' + r^{n-1}v'(1)\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + r^{n-1}\lambda v(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ v'(0) = 0,\ v(1) = 0. & \end{aligned} \tag{6.7}$$

Úlohy (6.2) a (6.7) nazýváme adjungované (viz obdoba poznámky 3.10), jelikož pro všechny $u, v \in C^2(0,1)$ splňující okrajové podmínky z úloh (6.2), (6.7) platí

$$\begin{gathered} \int_0^1 \Big((r^{n-1}u'(r))' + \lambda r^{n-1}u(r)\Big)v(r)\mathrm{d}r = \\ \int_0^1 u(r)\left(\big(r^{n-1}v'(r)\big)' + r^{n-1}v'(1)\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + r^{n-1}\lambda v(r)\right)\mathrm{d}r. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Řešení adjungované úlohy

Jelikož úloha (6.7) je adjungovanou úlohou k úloze (6.2) a úlohu (6.2) jsme řešili pro $\lambda > 0$, budeme i úlohu (6.7) řešit pro $\lambda > 0$.

Obecným řešením úlohy (6.7) je funkce

$$v(r) = -\frac{v'(1)}{\lambda}\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + C_1 r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r) + C_2 r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{Y}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Po zohlednění první okrajové podmínky máme

$$v(r) = -\frac{v'(1)}{\lambda}\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + C_1 r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r).$$

Nyní pomocí vzorce (4.5) vyjádříme $v'(1)$

$$v'(1) = -C_1 \mathrm{J}_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}).$$

A tedy dostáváme

$$v(r) = C_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \mathrm{J}_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}) + C_1 r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r). \tag{6.9}$$

Nakonec zohledníme druhou okrajovou podmínku. Dostáváme tedy

$$v(1) = C_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \mathrm{J}_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}) + C_1 \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

což lze upravit do tvaru

$$\epsilon\sqrt{\lambda} = (1-\epsilon)\, \frac{\mathrm{J}_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda})}{\mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda})}. \tag{6.10}$$

Vidíme tedy, že vlastní čísla úloh (6.2), (6.7) jsou stejná. A tedy máme opět nekonečnou posloupnost vlastních čísel $\lambda_k^{(\epsilon)}$.
Dosazením (6.10) do (6.9) dostáváme výsledný tvar vlastních funkcí úlohy (6.7)

$$v_k^{(\epsilon)}(r) = r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(\epsilon)}}r\right) - \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(\epsilon)}}\right). \tag{6.11}$$

Limitní přechod $\epsilon \to 0$

Dodefinujme nyní $v_k^{(0)}$ limitním přechodem ve tvaru

$$v_k^{(0)}(r) = \lim_{\epsilon\to 0} v_k^{(\epsilon)}(r).$$

Pokud upravíme (6.10) do tvaru

$$\epsilon \sqrt{\lambda}\, \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}) = -(1-\epsilon)\, \mathrm{J}_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}),$$

pak pro $\epsilon \to 0$ dostáváme $\mathrm{J}_{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(\epsilon)}}\right) = 0$, a tedy

$$\lambda_k^{(0)} = (\mu_{\frac{n}{2},k})^2.$$

Dostáváme tedy limitní adjungovanou vlastní funkce ve tvaru

$$v_k^{(0)}(r) = r^{\frac{2-n}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{\frac{n}{2},k} r) - \mathrm{J}_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{\frac{n}{2},k}). \tag{6.12}$$

Tyto funkce můžeme chápat jako adjungované vlastní funkce k úloze (6.1)

Lemma 6.3. *Funkce $v_k^{(0)}$ mají následující vlastnosti*

(i) $(v_k^{(0)})'(1) = 0$,

(ii) $v_1^{(0)}$ *nemění znaménko na* $(0,1)$.

(iii) $\big(r^{n-1}(v_k^{(0)}(r))'\big)' = -\mu^2_{\frac{n}{2},1} r^{n-1}\left(v(r) - v\Big(\dfrac{\mu_{\frac{n-2}{2},1}}{\mu_{\frac{n}{2},1}}\Big)\right).$

Důkaz. Odvození těchto vztahů je podobné jako v druhé dimenzi (viz lemma 5.3). □

6.3 Fučíkovo spektrum

Nyní se budeme zabývat Fučíkovým spektrem úlohy

$$\begin{aligned} \big(r^{n-1})u'(r)\big)' + \alpha r^{n-1} u^+(r) - \beta r^{n-1} u^-(r) = 0 \qquad & \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \int_0^1 r^{n-1} u(r) \mathrm{d}r = 0. & \end{aligned} \tag{6.13}$$

Analytický předpis Fučíkova spektra úlohy (6.13) zde nebudeme odvozovat, jelikož je odvození technicky náročné.

Vlastnosti Fučíkova spektra

V této části odvodíme podobné omezení Fučíkova spektra jako ve dvou dimenzích (viz věta 5.6).

Věta 6.4 (Omezení spektra v n-té dimenzi)**.** *Úloha* (6.13) *má netriviální řešení pro* α, β *splňující*

$$(\alpha - (\mu_{\frac{n}{2},1})^2)(\beta - (\mu_{\frac{n}{2},1})^2) > 0, \tag{6.14a}$$

$$\textit{nebo } \alpha = \beta = (\mu_{\frac{n}{2},k})^2, \qquad k \in \mathbb{N} \tag{6.14b}$$

Důkaz. Nejdříve vynásobíme rovnici v úloze (6.13) funkcí $v = v_k^{(0)}$ a provedeme integraci přes celý interval $(0,1)$, čímž dostáváme

$$\int_0^1 \left(r^{n-1}u'(r)\right)' v(r)\mathrm{d}r + \alpha \int_0^1 r^{n-1}u^+(r)\, v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 r^{n-1}u^-(r)\, v(r)\mathrm{d}r = 0. \tag{6.15}$$

Nyní provedeme integraci per partes

$$\begin{aligned} \Big[r^{n-1}u'(r)v(r) - r^{n-1}u(r)v'(r)\Big]_0^1 + \int_0^1 u(r)\left(r^{n-1}v'(r)\right)'\mathrm{d}r + \\ +\alpha \int_0^1 r^{n-1}u^+(r)\, v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 r^{n-1}u^-(r)\, v(r)\mathrm{d}r = 0. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Jelikož platí

$$v'(0) = 0, v(1) = 0, v'(1) = 0, u'(0) = 0,$$
$$\left(r^{n-1}v'(r)\right)' = -\mu^2_{\frac{n}{2},1} r^{n-1}\left(v(r) - v\Big(\frac{\mu_{\frac{n-2}{2},1}}{\mu_{\frac{n}{2},1}}\Big)\right),$$

dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} -\mu^2_{\frac{n}{2},1}\int_0^1 r^{n-1}u(r)\left(v(r) - v\Big(\frac{\mu_{\frac{n-2}{2},1}}{\mu_{\frac{n}{2},1}}\Big)\right) + \\ \alpha \int_0^1 r^{n-1}u^+(r)\, v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 r^{n-1}u^-(r)\, v(r)\mathrm{d}r = 0. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Pomocí následující rovnosti

$$\mu^2_{\frac{n}{2},1}\, v\Big(\frac{\mu_{\frac{n-2}{2},1}}{\mu_{\frac{n}{2},1}}\Big)\int_0^1 r^{n-1}u(r)\mathrm{d}r = 0$$

lze přepsat (6.17) do tvaru

$$-\mu^2_{\frac{n}{2},1}\int_0^1 r^{n-1}\, u(r)\, v(r)\mathrm{d}r + \alpha \int_0^1 r^{n-1}u^+(r)\, v(r)\mathrm{d}r - \beta \int_0^1 r^{n-1}u^-(r)\, v(r)\mathrm{d}r = 0. \tag{6.18}$$

Což můžeme upravit do následujícího tvaru

$$(\alpha - \mu^2_{\frac{n}{2},1})\int_0^1 r^{n-1}u^+(r)\, v(r)\mathrm{d}r = (\beta - \mu^2_{\frac{n}{2},1})\int_0^1 r^{n-1}u^-(r)\, v(r)\mathrm{d}r. \tag{6.19}$$

Jelikož funkce u^+, u^- jsou nezáporné (a netriviální) a v je kladná skoro všude, jsou i oba integrály

$$\int_0^1 r^{n-1} u^+(r)\, v(r) \mathrm{d}r, \ \int_0^1 r^{n-1} u^-(r)\, v(r) \mathrm{d}r$$

kladné. A tedy platí (6.14a). Navíc pokud platí $\alpha = \beta$ redukuje se úloha (6.13) na úlohu na vlastní čísla. Pak pro α, β zřejmě platí (6.14b). □

Tečny Fučíkova spektra

Uveďme nyní větu o tečnách k Fučíkově spektru v obecné dimenzi. Větu uvedeme v obecnějším tvaru nežli v dimenzi 1 či 2. Uvažujme úlohu na Fučíkovo spektrum ve tvaru

$$\begin{aligned} \left(r^{n-1}u'(r)\right)' + \alpha r^{n-1}u^+(r) - \beta r^{n-1}u^-(r) = 0 \qquad \text{pro } r \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \ (1-\epsilon)\int_0^1 r^{n-1}u(r)\mathrm{d}r + \epsilon u(1) = 0, \end{aligned} \tag{6.20}$$

kde $\epsilon \in [0,1]$ je pevný parametr.

Věta 6.5 (Tečna k Fučíkovu spektru v n-té dimenzi)**.** *Předpokládejme, že existuje větev Fučíkova spektra úlohy* (6.20)*, která prochází vlastním číslem λ_k (bodem (λ_k, λ_k)). Pak Fučíkovo spektrum úlohy* (6.20) *má ve vlastním čísle λ_k tečnu danou předpisem*

$$p: \begin{array}{l} \alpha(t) = \lambda_k + t, \\ \beta(t) = \lambda_k + a\,t, \end{array} \ t \in \mathbb{R},$$

kde

$$a = \frac{\displaystyle\int_0^1 r^{n-1}\, u_k^+(r)\, v_k(r)\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^1 r^{n-1}\, u_k^-(r)\, v_k(r)\mathrm{d}r}. \tag{6.21}$$

Přičemž u_k a v_k jsou funkce (6.6) *a* (6.11) *(resp.* (6.12)*).*

Důkaz. Důkaz je podobný jako ve dvou dimenzích.

(i) Pro $\epsilon \in (0,1]$ je důkaz obdobou důkazu věty 5.7.

(ii) Pro $\epsilon = 0$ je důkaz obdobou důkazu věty 5.8.

□

Příloha A

Ilustrace Fučíkova spektra

V této příloze jsou numericky získané ilustrace Fučíkova spektra pomocí metody střelby a tzv. metody topview. Numerické experimenty byly provedeny v programu Wolfram Mathematica. Pro nalezení Fučíkova spektra s integrální okrajovou podmínkou jsme použili následující metodu (nalezení Fučíkova spektra s Dirichletovo okrajovou podmínkou je obdobné)

(I) Zvolíme pevně dvojici (α, β) a dimenzi n.

(II) Numericky najdeme řešení počáteční úlohy

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) = 0 \qquad \text{pro } r \in (0,1),$$
$$u'(0) = 0,\ u(0) = 1.$$

(III) Numericky spočteme integrál

$$I = \int_0^1 r^{n-1} u(r) \mathrm{d}r.$$

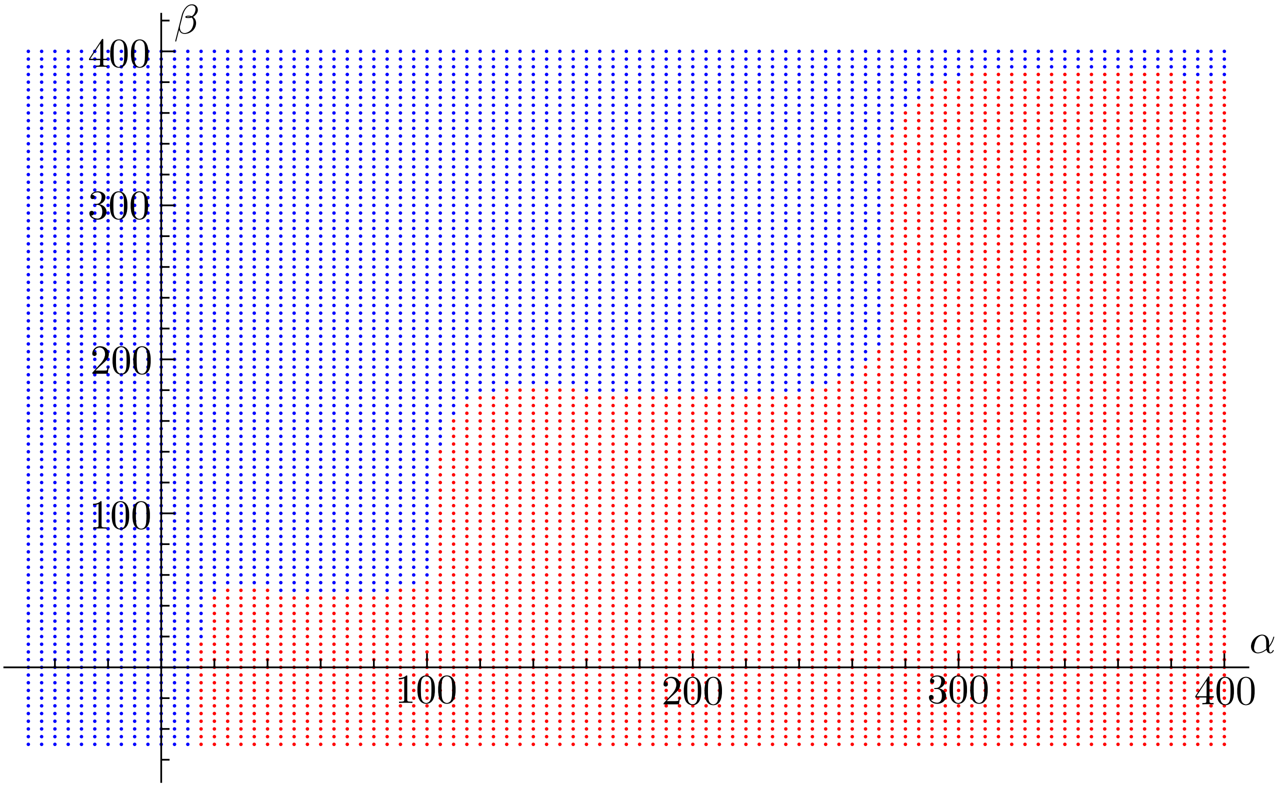
(IV) Pokud

(i) $I > 0$ zobrazíme bod (α, β) barvou č. 1,

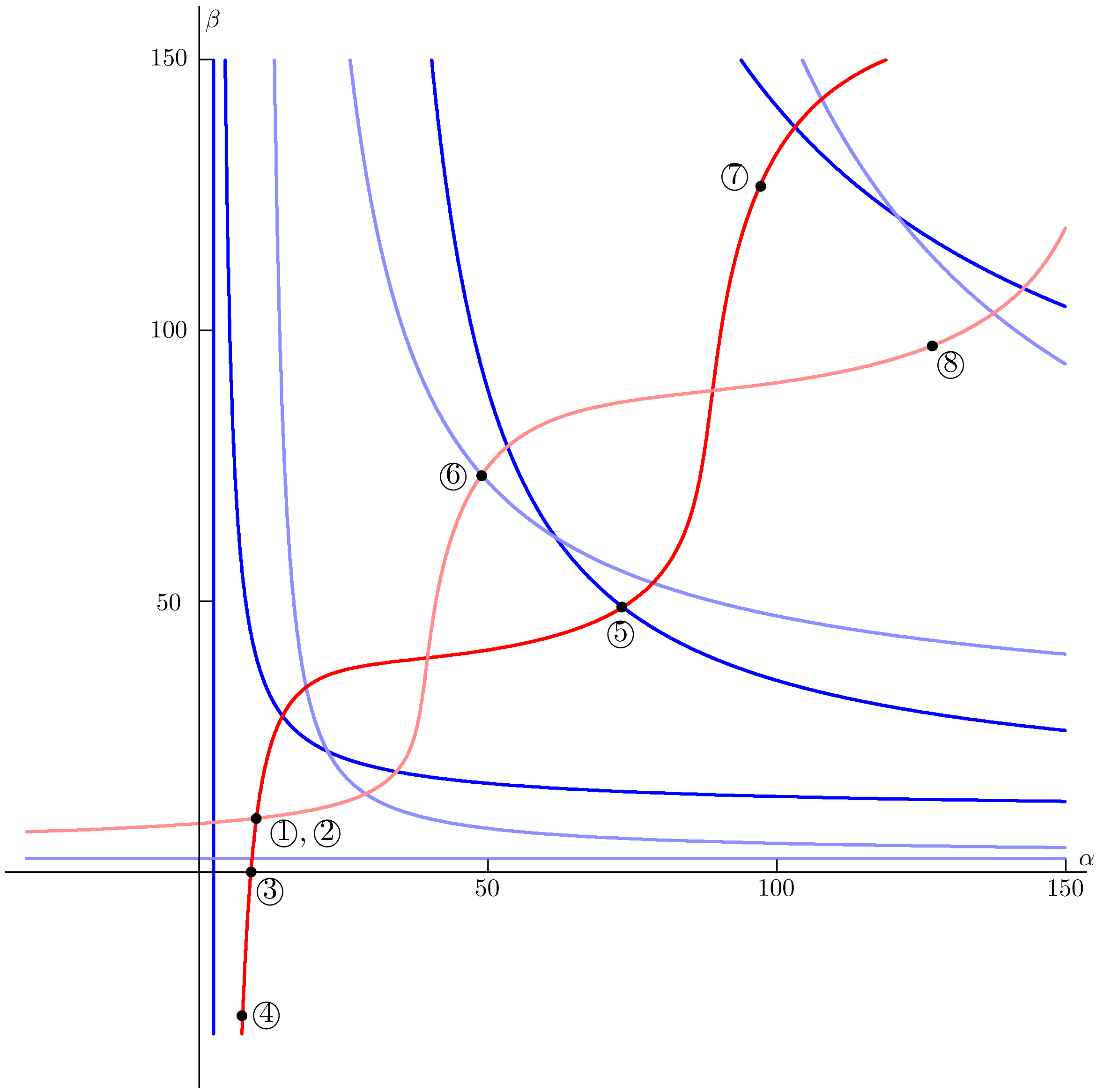
(ii) $I < 0$ zobrazíme bod (α, β) barvou č. 2.

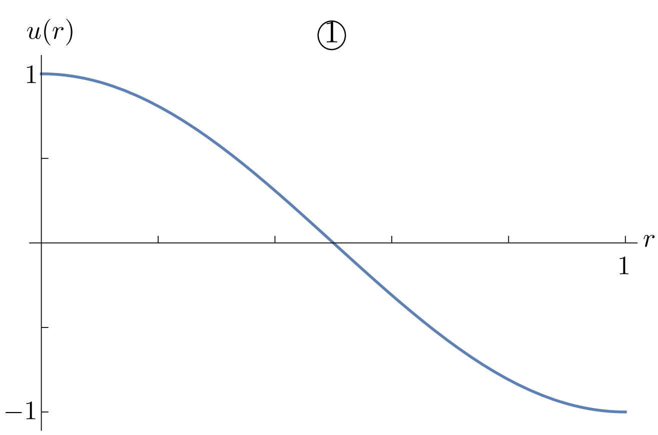
Tímto získáme ilustraci oblastí, na jejichž rozhraní leží (v případě spojité závislosti) Fučíkovo spektrum, viz obr. A.1.

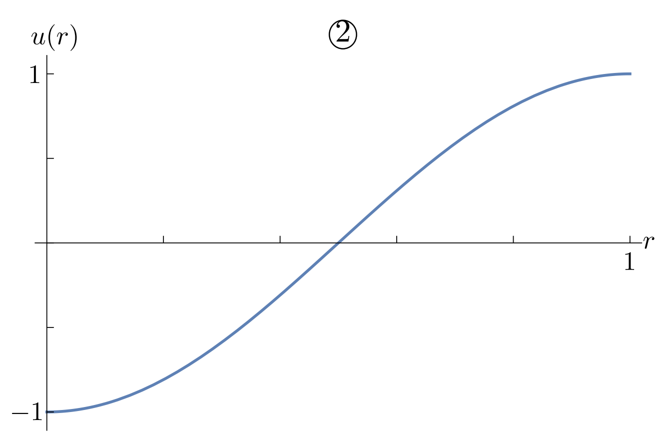
(V) Nakonec místo jednotlivých oblastí zobrazíme pouze hranici, viz obr. A.2 a dále.



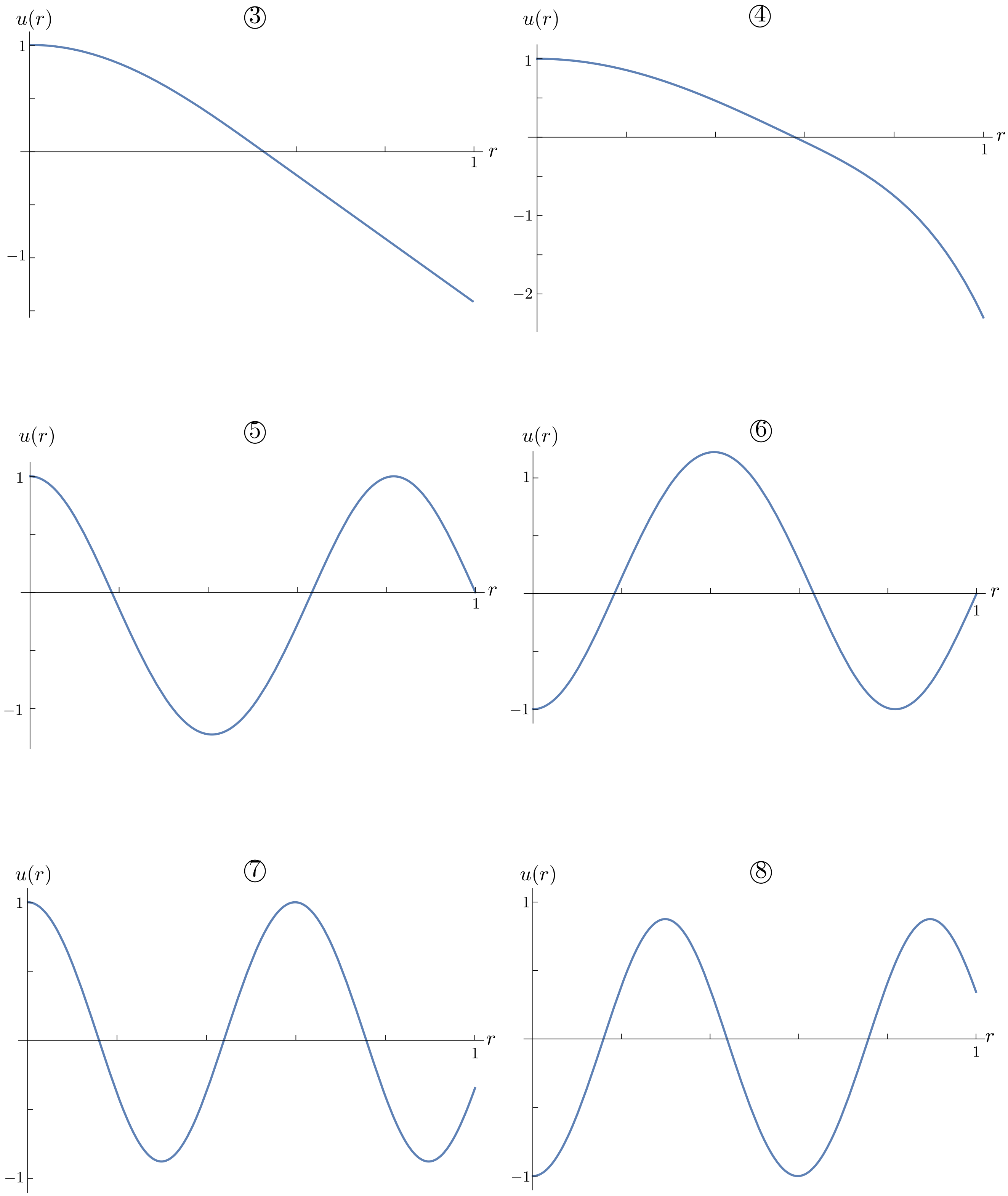
Obrázek A.1: Ilustrace numerické metody



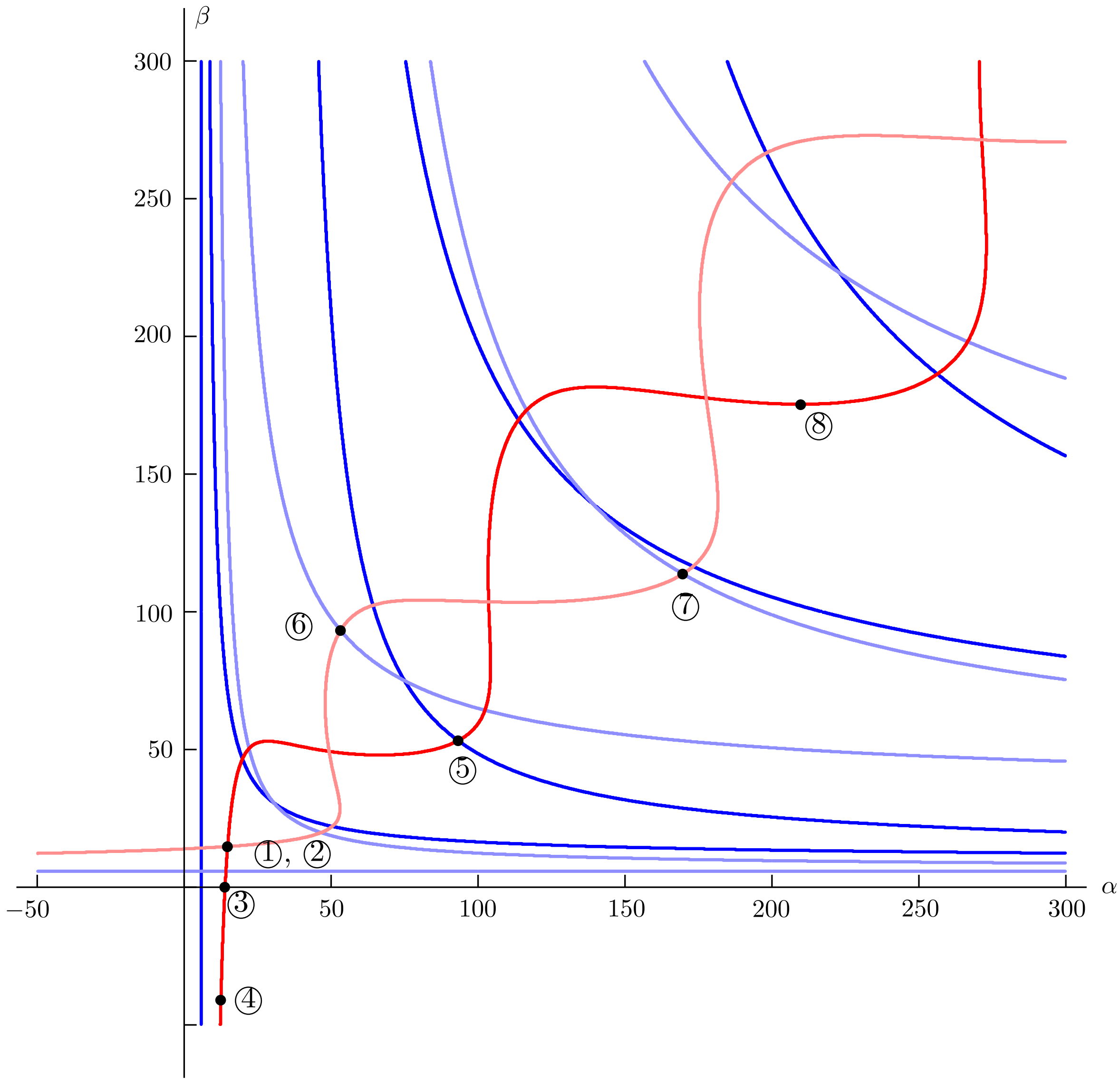


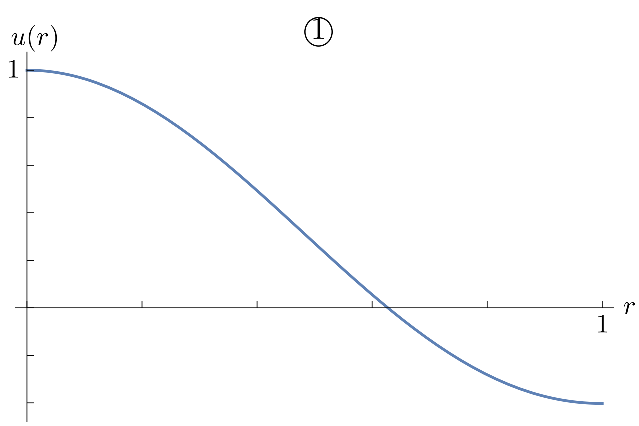


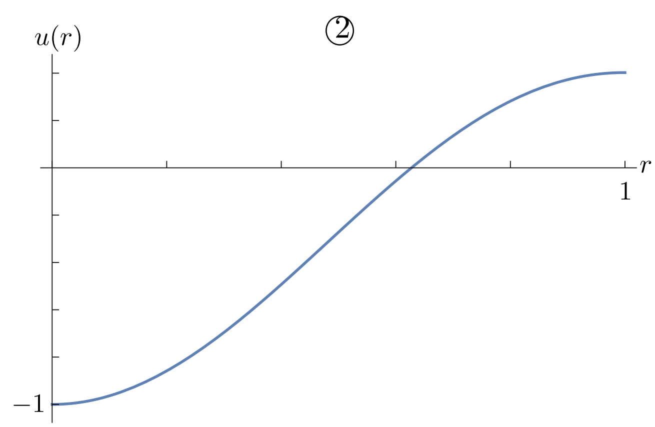
Obrázek A.2: Fučíkovo spektrum a jeho vlastní funkce - dimenze 1



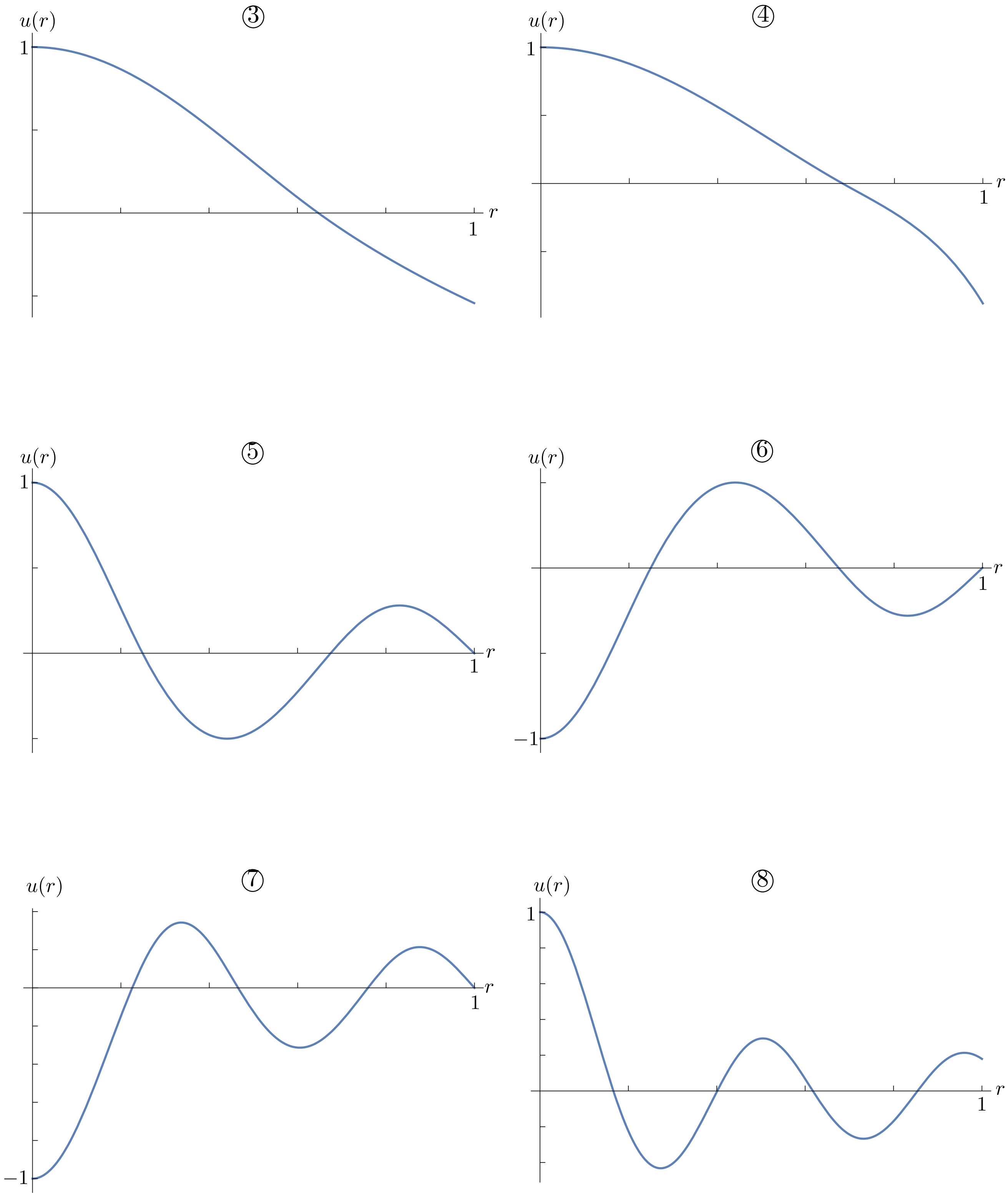
Obrázek A.3: Fučíkovo spektrum a jeho vlastní funkce - dimenze 1



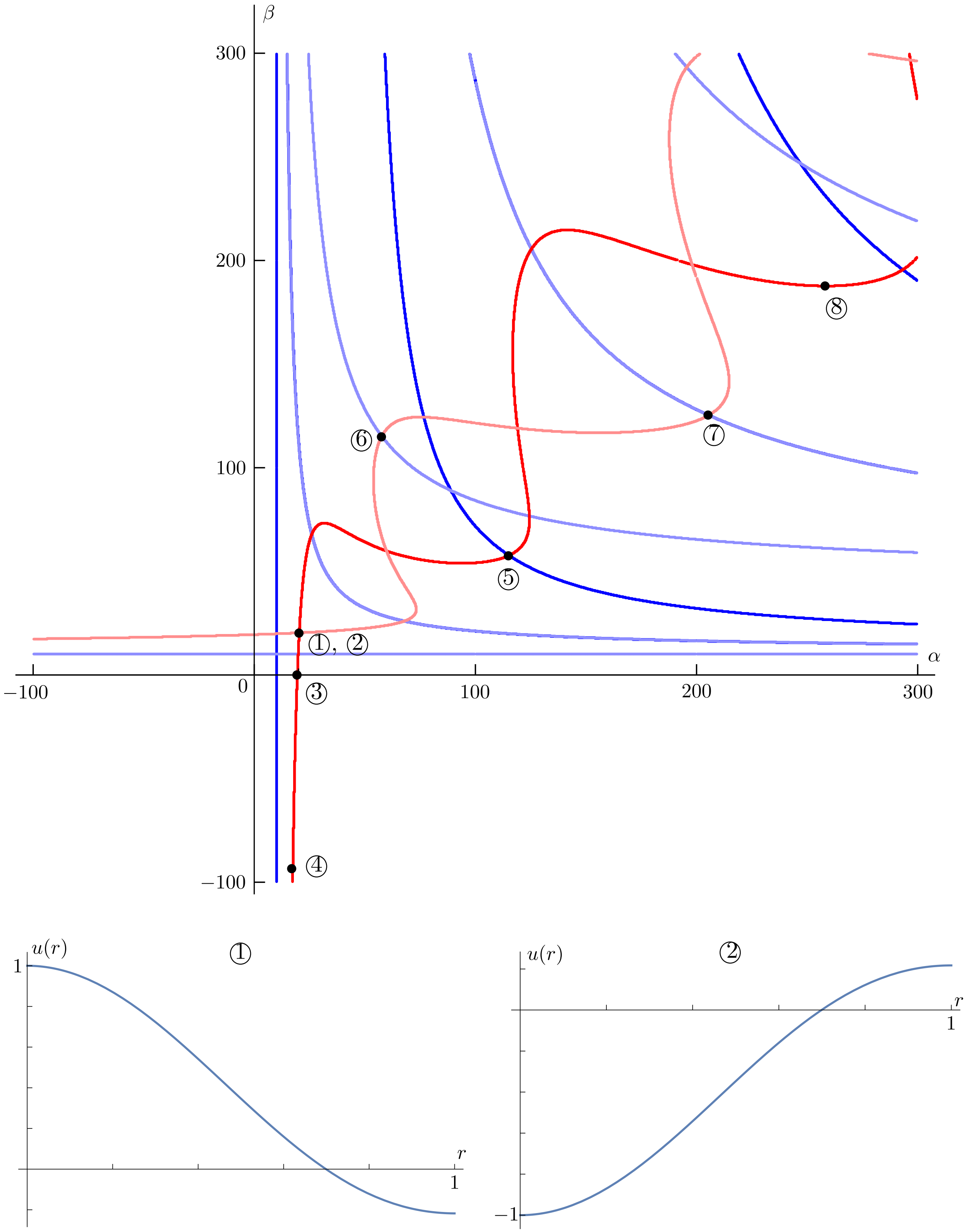




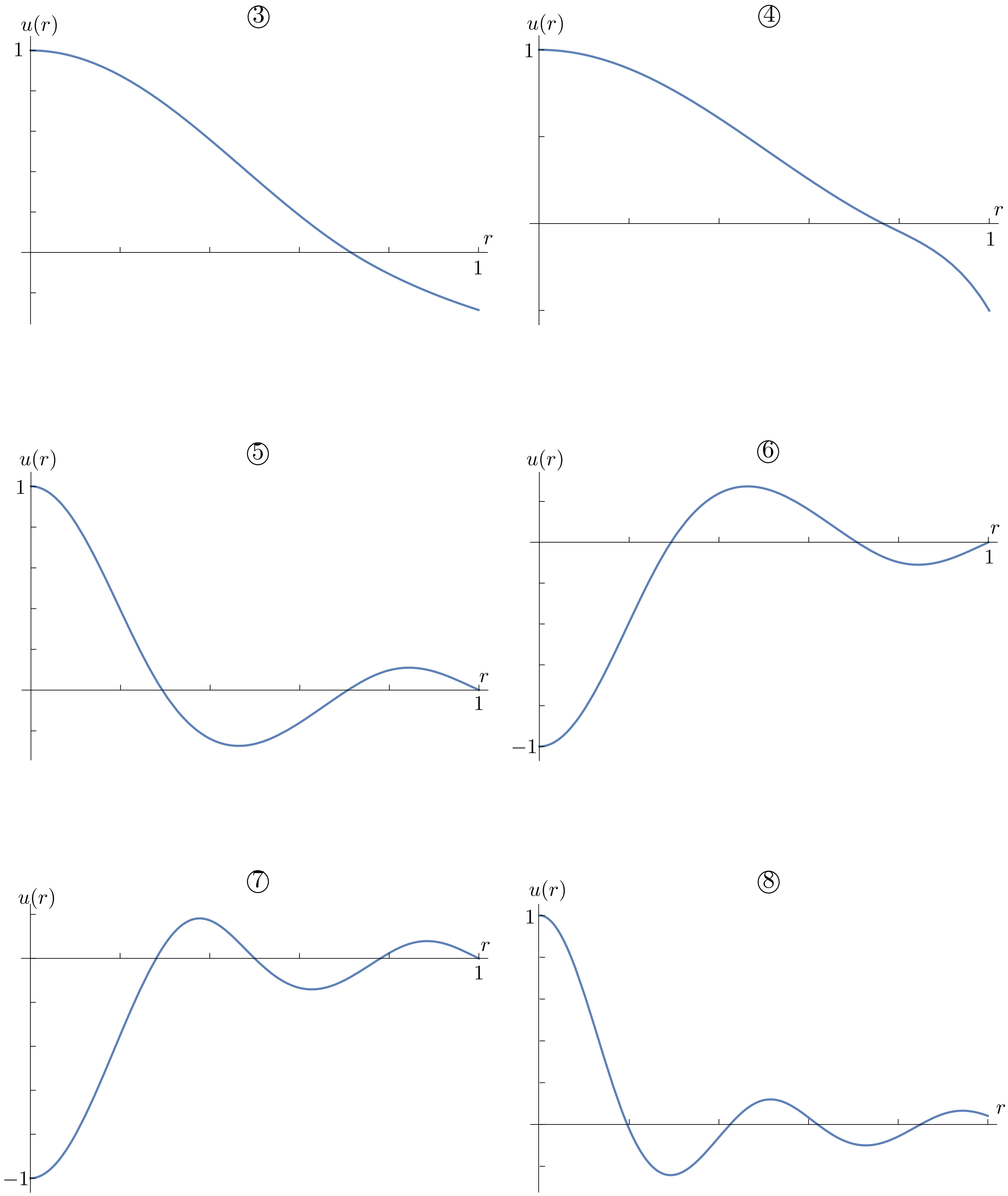
Obrázek A.4: Fučíkovo spektrum a jeho vlastní funkce - dimenze 2



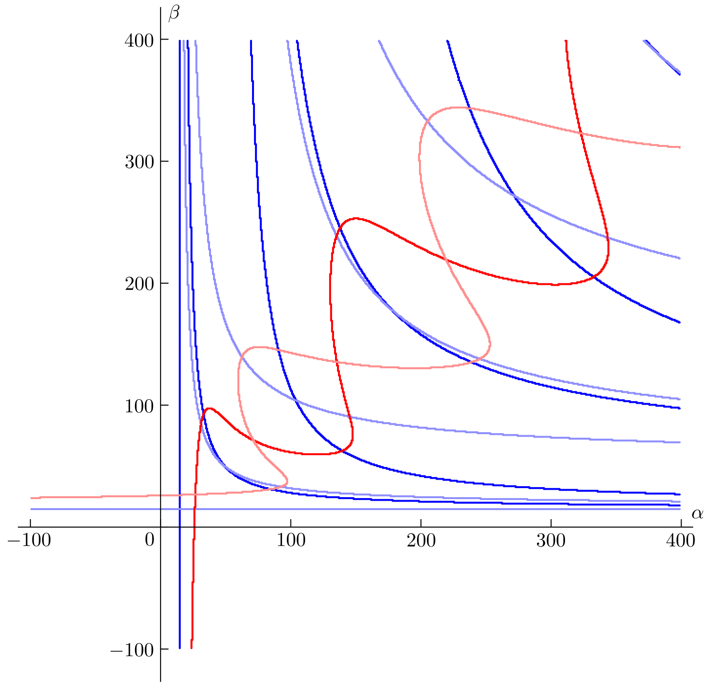
Obrázek A.5: Fučíkovo spektrum a jeho vlastní funkce - dimenze 2



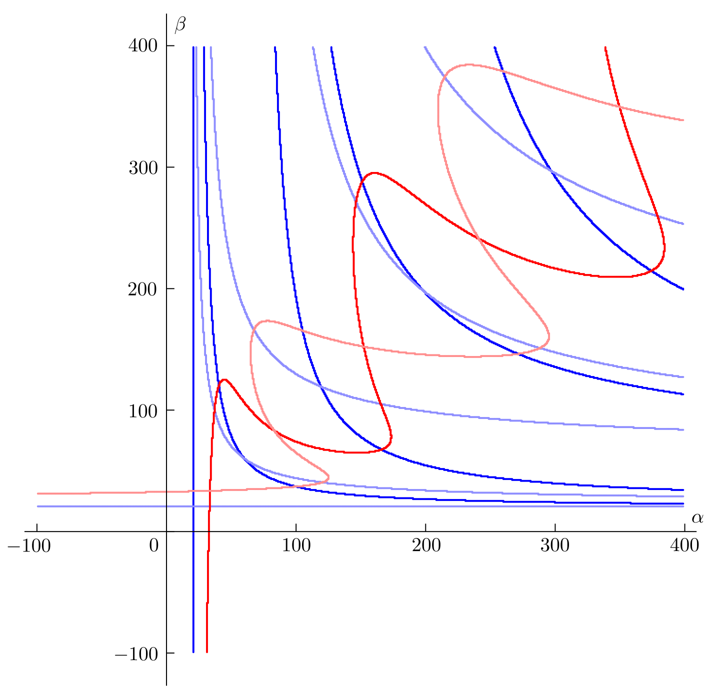
Obrázek A.6: Fučíkovo spektrum a jeho vlastní funkce - dimenze 3



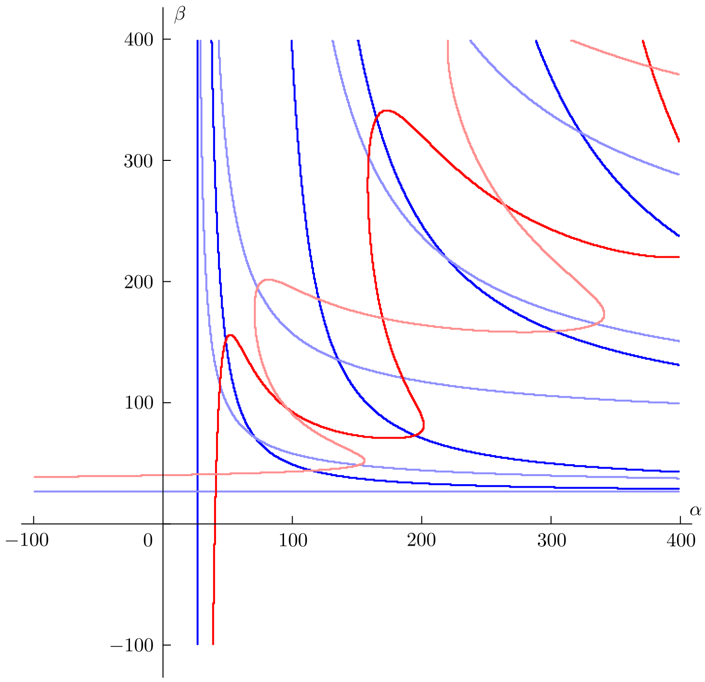
Obrázek A.7: Fučíkovo spektrum a jeho vlastní funkce - dimenze 3



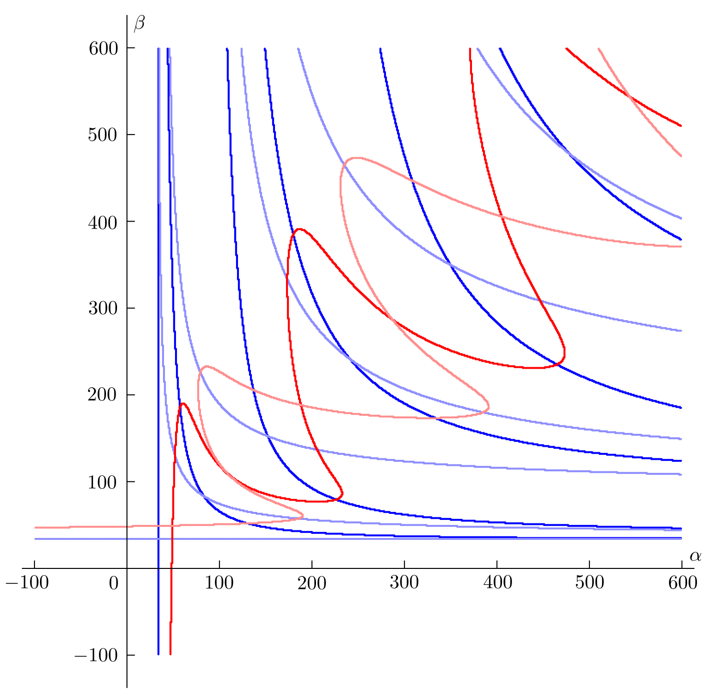
Obrázek A.8: Fučíkovo spektrum - dimenze 4



Obrázek A.9: Fučíkovo spektrum - dimenze 5



Obrázek A.10: Fučíkovo spektrum - dimenze 6



Obrázek A.11: Fučíkovo spektrum - dimenze 7

Literatura

[1] S. Fučík: Boundary value problems with jumping nonlinearities. Časopis pro pěstování matematiky, vol. 101 (1976), 69-87.

[2] Frank W. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert, and Charles W. Clark. 2010. NIST Handbook of Mathematical Functions (1st ed.). Cambridge University Press, New York, NY, USA.

[3] P. Drábek, G. Holubová: Elements of partial differential equations. 2nd revised and extended ed. De Gruyter Textbook. Berlin: Walter de Gruyter. xiii, 277 p. (2014).

[4] Tenenbaum, M. and Pollard, H. (2012). Ordinary Differential Equations. Dover Publications, Incorporated.

[5] M. Arias, J. Campos: Radial Fučík Spectrum of the Laplace Operator, J. Math. Anal. Appl. 190 (1995), 654-666.

[6] Abramowitz, M., I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, US Government Printing Office, Washington, DC, 1964.

[7] N. Sergejeva (2007). On the unusual Fucik spectrum. DCDS Supplements, 2007, 920-926.

[8] N. Sergejeva: Fučík spectrum for the second order BVP with nonlocal boundary condition. Nonlinear Anal., Model. Control 12 (2007), 419-429.

[9] Krantz, S. and Parks, H. (2002). A primer of real analytic functions. Boston: Birkhauser.