Posudek oponenta diplomové práce

Autor/Autorka	Bc. Martin Hamáček
Název práce	Spektrální vlastnosti Laplaceova operátoru s nelokálními okrajovými podmínkami
Studijní obor	Matematika
Oponent práce	Jiří Benedikt

Splnění cílů práce:

☐ nadstandardně ☐ velmi dobře ☐ splněny ☑ s výhradami ☐ nebyly splněny

Odborný přínos práce:

☐ nové výsledky ☐ netradiční postupy ☑ zpracování výsledků z různých zdrojů ☐ shrnutí výsledků z různých zdrojů ☐ bez přínosu

Matematická (odborná) úroveň:

☐ vynikající ☐ velmi dobrá ☐ průměrná ☑ podprůměrná ☐ nevyhovující

Věcné chyby:

☐ téměř žádné ☐ vzhledem k rozsahu přiměřený počet ☐ méně podstatné, větší množství ☑ podstatnější, větší množství ☐ závažné

Grafická, jazyková a formální úroveň:

☐ vynikající ☐ velmi dobrá ☑ průměrná ☐ podprůměrná ☐ nevyhovující

Slovní hodnocení a dotazy:

viz příloha

Práci doporučuji – ~~nedoporučuji~~ uznat jako kvalifikační (*nehodící se škrtněte*).

Navrhuji hodnocení známkou:

dobře

Datum, jméno a podpis:

13.6.2017 **Jiří Benedikt** Jiří Bi

Příloha k oponentskému posudku na diplomovou práci

Bc. Martin Hamáček:

Spektrální vlastnosti Laplaceova operátoru s nelokálními okrajovými podmínkami

Práce se věnuje vlastnostem klasického a Fučíkova spektra radiálního Laplaceova operátoru $-u''(r) - \frac{n-1}{r}u(r)$ na intervalu $(0,1)$ s okrajovou podmínkou $u'(0) = 0$ a integrální nelokální podmínkou $\int_0^1 r^{n-1}u(r)\,\mathrm{d}r = 0$, kde $n \in \mathbb{N}$. Jejich vlastní funkce odpovídají radiálně symetrickým vlastním funkcím Laplaceova operátoru na $B(0,1)$, tj. jednotkovém kruhu v $\mathbb{R}^n$, s podmínkou $\int_{B(0,1)} u(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

V práci jsou odvozeny předpisy vlastních čísel a vlastních funkcí pomocí Besselových funkcí prvního druhu a jejich nulových bodů, speciálně pro $n = 1$ pomocí funkce cos. Dále je pro $n = 1$ odvozen analytický předpis Fučíkova spektra a pro $n = 2$ analytický předpis pouze té části Fučíkova spektra, jejíž příslušné vlastní funkce mají právě jeden nulový bod v $(0,1)$. Dále jsou pomocí tzv. adjungovaných vlastních funkcí vymezeny části roviny, ve kterých může Fučíkovo spektrum ležet, a odvozeno parametrické vyjádření tečen k Fučíkovu spektru ve vlastních číslech, tj. v průsečících s osou prvního kvadrantu.

Práce je členěna na šest kapitol a jednu přílohu. První kapitola je úvodní, druhá obsahuje formulaci studovaných úloh. Kapitoly 3, 5, resp. 6 pojednávají o případech $n = 1$, $n = 2$, resp. $n \geq 2$. Kapitola 4 shrnuje základní vlastnosti Besselových funkcí a odvození tvaru obecného řešení studované rovnice pro hodnotu spektrálního parametru ± 1. Nakonec v příloze A nalezneme numericky získané obrázky Fučíkova spektra pro $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$.

Práci bych předně vytkl, že není vůbec uvedeno, co je jejím přínosem, co jsou vlastní výsledky uchazeče a které výsledky jsou převzaté, jak se případné vlastní výsledky a použité postupy liší od těch již publikovaných. Z cílů práce nebyly splněny dva, a to aplikovat spektrální vlastnosti na řešitelnost nehomogenních úloh a porovnat analytické výsledky s numerickými.

Za hlavní nedostatek práce považuji její nízkou matematickou úroveň. Mnoho důkazů a odvozování různých vztahů obsahuje zásadní logické skoky. Častou chybou je násobení nebo dělení obou stran rovnice výrazem, který se může rovnat nule. Další věcné chyby jsou například zapomenutá derivace vnitřní funkce, špatně vypočítaný kořen kvadratické rovnice, špatně opsané znaménko nebo přehození jmenovatele a čitatele. Práce též obsahuje množství formálních chyb jako překlepy, nekonzistentní či nestandardní značení a terminologii, gramatické a typografické chyby.

Co se týče členění práce, přijde mi zbytečné rozdělení do tří kapitol pro $n = 1$, $n = 2$ a $n \geq 2$. Některé jejich části šly napsat obecně pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, takže jsou v práci zbytečně třikrát. Jiné části se liší pro $n = 1$ a $n \geq 2$, takže za optimální bych považoval dvě kapitoly, jednu pro $n = 1$ a jednu pro $n \geq 2$.

Pokud jde o hodnocení výsledků, vlastní čísla a vlastní funkce jsou více méně správně, odhlédnuli od překlepů – vlastní funkce pro $n = 1$ nejsou $\cos k\pi$, ale $\cos k\pi r$, $k \in \mathbb{N}$. To je ovšem klasický výsledek. Dále předpis Fučíkova spektra pro $n = 1$ vypadá korektně s drobnou výhradou, že výsledný tvar ve větě 3.6 lze významně zjednodušit. Na rozdíl od případu $n = 1$, kde k odvození předpisu Fučíkova spektra stačí elementární integrály, pro $n \geq 2$ je potřeba pracovat s Besselovými funkcemi a jejich nulovými body. Je odvozen předpis jen části Fučíkova spektra, jejíž vlastní funkce mají právě jeden nulový bod v $(0,1)$. Navíc pouze pro $n = 2$, výpočet by ale podle mého názoru šel zobecnit na libovolné $n \geq 2$. Tato část Fučíkova spektra je rozdělena do tří podčástí, z nichž všechny tři obsahují chyby. Dále vymezení Fučíkova spektra je korektní, byť jde jen o dva ze čtyř (posunutých) kvadrantů v rovině (pro $n = 1$ je přesnější, ale zde máme analytický předpis celého Fučíkova spektra). Nakonec věty o tečnách k Fučíkovu spektru ve vlastních číslech nejsou napsány korektně, protože se zde pod nenulovým úhlem kříží dvě křivky, takže žádná tečna neexistuje. Patrně tím byla myšlena tečna jen k jedné z křivek. Navíc tvar tečny není zvolen vhodně, protože předpokládá směrový vektor ve tvaru $(1, a)$, $a \in \mathbb{R}$, kde konstanta a je vyjádřena ve tvaru zlomku, kde není jasné (autor se tím nezabývá), jestli jmenovatel může být nulový, což by odpovídalo přímce rovnoběžné s druhou souřadnicovou osou. Nakonec obrázky v příloze A jsou získány pouze numericky bez uvedení použitých numerických metod, nejsou porovnány s odvozenými analytickými předpisy, nejsou zde vyznačeny části spektra značené ve zbytku práce jako $I_j^{\pm}$, $j \in \mathbb{N}$, a navíc obsahují různé křivky, z nichž zřejmě jen některé tvoří Fučíkovo spektrum a jiné mají jiný význam a nikde není uvedeno jaký.

Pozitivně hodnotím schopnost autora obstojně pracovat s Besselovými funkcemi, které pravděpodobně nemohl znát z žádného standardního předmětu, a dále zdařilé využití plzeňštiny („spektrum s Dirichletovo okrajovou podmínkou").

Práci **doporučuji** uznat jako kvalifikační a navrhuji hodnocení známkou **dobře**.

Otázky s obhajobě:

1. V úvodu je pouze napsáno, že práce navazuje na články [5] a [7]. Uveďte, jaký je přínos předložené práce, čím rozšířila výsledky z [5] a [7] a jaké známé či nové metody jste k tomu použil.
2. Nakreslete křivky dané předpisy ve větách 3.6 a 5.5 a porovnejte, zda opticky odpovídají obrázkům z přílohy A.
3. Co znamená podmínka $u'(0) = 0$ v úloze (2.1)?
4. Na straně 4 se pod úlohou
$$u'' + \frac{n-1}{r}u' + \beta u^+ - \alpha u^- = 0,\ r \in (0,1), \quad u'(0) = 0, \quad \int_0^1 r^{n-1}u(r)\,\mathrm{d}r = 0$$
píše „A tedy vidíme, že $-u$ řeší úlohu (2.3) s parametry (β, α)." Jak by to vypadalo, kdyby u byla řešením úlohy (2.3) s parametry (β, α)?
5. Na straně 5, v důkazu věty 3.1, případ $\lambda < 0$, bod 2., jak z toho, že u je rostoucí a konvexní na $(0, r_0)$ plyne, že u je rostoucí a konvexní v libovolném $r > 0$?
6. Jak z rovnice (3.4) pro $\epsilon = 1$ dostaneme posloupnost řešení $\lambda_k^{(1)}$, $k \in \mathbb{N}$?
7. Dokažte tvrzení ze strany 8, že pro všechny $u, v \in C^2(0,1)$ splňující $u'(0) = 0$, $(1-\epsilon)\int_0^1 u(r)\,\mathrm{d}r + \epsilon u(1) = 0$, $v'(0) = 0$ a $v(1) = 0$ platí (3.6).
8. Co na straně 9 značí $\lambda_k^{(0)}$? Pokud $\lim\limits_{\epsilon \to 0+} \lambda_k^{(\epsilon)}$, z čeho plyne, že limita existuje? Pokud existuje, pak ze vztahu $\sin\sqrt{\lambda_k^{(0)}} = 0$ plyne, že $\lambda_k^{(0)} = (l\pi)^2$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}_0$. Z čeho plyne, že $l = k$?
9. Platí tvrzení na straně 15, že obecné řešení $C_1 \sinh\sqrt{-\beta}r + C_2 \cosh\sqrt{-\beta}r$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, lze přepsat do tvaru $A_1 \sinh\sqrt{-\beta}(r - A_2)$, $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$, nebo to jde jen pro některá C_1, C_2?
10. Z čeho plyne $u \to u_k$ pro $(\alpha_0, \beta_0) \to (\lambda_k, \lambda_k)$? O jaký typ konvergence se jedná?
11. V jakém smyslu platí asymptotické rovnosti v bodu (xii) na straně 25 pro velká r? Platí, že podíl levé a pravé strany konverguje k 1 pro $r \to +\infty$?
12. Co následuje ve vztahu (4.11)? Uveďte dva následující výrazy.
13. Na straně 31, v důkazu věty 5.1, případ $\lambda < 0$, bod 2., jak z toho, že $ru'(r)$ je rostoucí, plyne, že i u' je rostoucí?
14. Jak z asymptotiky (4.10) plyne, že (5.5) má posloupnost řešení? Platí tedy, že má-li $f(x) = g(x)$ posloupnost řešení x_k, $k \in \mathbb{N}$, a $g(x) \approx h(x)$ pro $x \to +\infty$, pak i $f(x) = h(x)$ má posloupnost řešení?
15. Z čeho plyne, že jmenovatelé ve zlomcích v (5.39), (5.44) a (6.21) jsou nenulové?
16. Jak zvolíme konstanty a, s v (5.40) v případě, že $\alpha_0 = \lambda_k$ a $\beta_0 \neq \lambda_k$?
17. Podle jaké proměnné se integruje v (5.41)?