

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE
Origami a geometrické konstrukce

Vypracoval: Bc. Tomáš Bárta
Vedoucí práce: Doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.

Plzeň, 2017

Originál zadání

Zde se bude nacházet originál zadání.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s využitím zdrojů a literatury, jejichž seznam je uveden na konci práce.

V Plzni, 7. srpna 2017

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce Doc. RNDr. Miroslavu Lávičkovi, Ph.D. za ochotný přístup, poskytování odborných rad a notnou dávku trpělivosti.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přítelkyni za podporu v průběhu celého mého studia.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá geometrickými konstrukcemi pomocí origami. Jsou demonstrovány a diskutovány typické úlohy, a to jak po stránce geometrické, tak algebraické. Tyto konstrukce srovnáváme zejména s eukleidovskými konstrukcemi a ukazujeme některé výhody tohoto typu konstruování. Část práce se rovněž zaměřuje na vhodné využití CAS matematického software pro modelování konstrukcí origami a pro automatické dokazování. Závěr práce obsahuje návrh tematického celku pro výuku geometrie origami na střední škole.

Klíčová slova

Origami, geometrie, eukleidovské konstrukce, automatický důkaz, *E-origami systém*.

Abstract

This master thesis deals with the geometric constructions using origami. Typical problems are demonstrated and discussed from the geometric and also algebraic point of view. We compare these constructions mainly with the Euclidean constructions and present advantages of the approach based on the origami principle. A part of the thesis is also devoted to CAS mathematical software which can be suitably used for origami constructions modelling and for automated proving. The last part of the thesis contains a proposal of a thematic unit for origami geometry teaching at high schools.

Keywords

Origami, geometry, Euclidean constructions, automated proving, *E-origami system*.

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Historie origami	1
1.2	Konstrukce s omezenými prostředky	3
1.3	Origami v současné školské matematice	7
1.4	Principy origami v aplikacích a v praxi	7
2	Základní pojmy	9
2.1	Teorie grup	9
2.2	Polynomy	10
2.3	Gröbnerovy báze	14
3	Základní konstrukce origami	17
3.1	Origami dvojice	17
3.2	\mathcal{O} -čísla	19
3.3	Konstrukce sestrojitelné pomocí základních konstrukcí origami	23
4	Axiomatické zavedení origami	29
4.1	Huzitovy axiomy origami	29
4.2	Příklady využití Huzitových axiomů	30

5 Počítačové origami	38
5.1 Automatické dokazování	38
5.2 E-origami systém	41
6 Návrh tématického celku pro výuku na střední škole	46
7 Závěr	51
Literatura	52

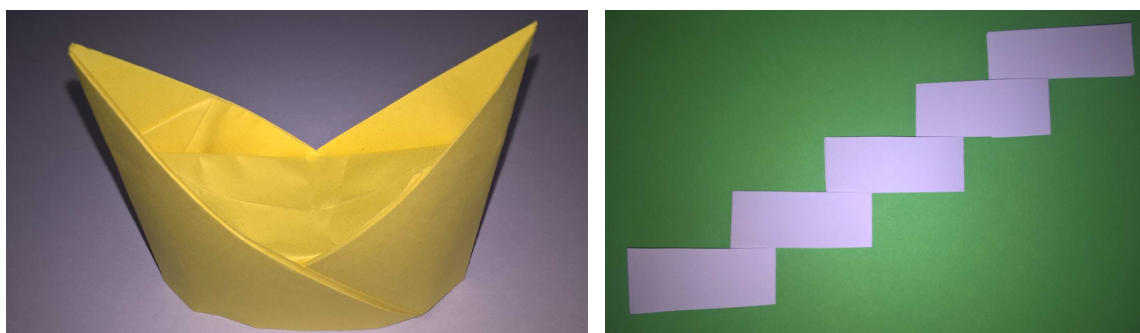
Kapitola 1

Úvod

1.1 Historie origami

Při tvorbě této části bylo čerpáno ze zdrojů [1, 2, 3, 4, 5, 6].

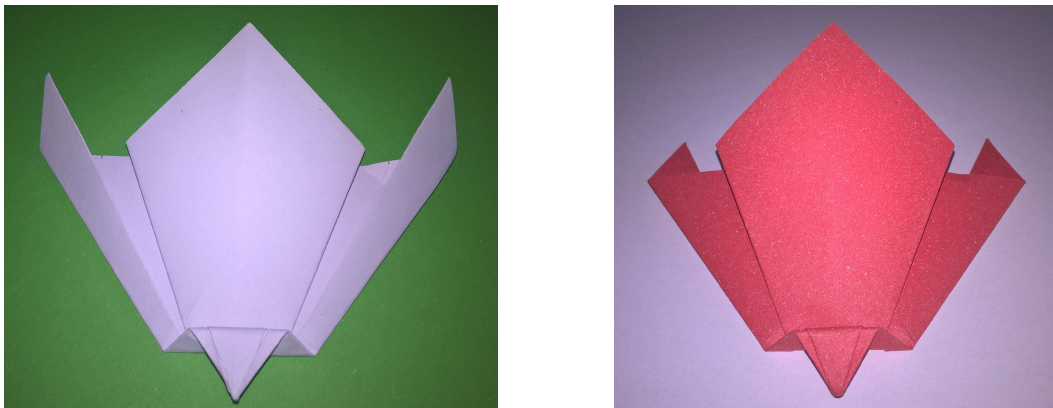
Počátky origami jako překládání papíru sahají přibližně do doby před 2000 lety, nicméně dodnes není zcela jasné, kdy přesně a kdo jej vynalezl. Předpokládáme však, že origami přišlo bezprostředně po vynálezu papíru ve starověké Číně, neboť měli-li lidé k dispozici papír, nic jim nebránilo jej překládat a tím tvořit nové tvary. Jako vynálezce papíru se nejčastěji udává Ts'ai Lun a vynález datujeme do roku 105 n. l. Archeologické objevy však naznačují, že k tomuto vynálezu došlo pravděpodobně ještě o něco dříve. Z čínštiny také pochází samotný název origami, jenž vznikl spojením dvou čínských slov „oru“ (skládat) a „kami“ (papír). Existuje však jen velmi málo dochovaných příkladů, že starověcí Číňané používali papír k tvorbě origami. Nejstarším z nich je zřejmě „Yuan Bao“ (cca 1000 n. l.) (obrázek 1.1).



Obrázek 1.1: Yuan Bao (vlevo) a Shide (vpravo)

Origami, tak jak ho známe dnes, však nejspíše vzniklo o něco později v Japonsku. Zde začali papír jako první používat v 6. století n. l. buddhističtí mniši. Zpočátku byl papír v Japonsku velmi drahým zbožím, a tak bylo origami využíváno pouze k náboženským rituálům a významným ceremoniálům. Jedním z nejstarších příkladů překládání papíru je „Shide“ (obrázek 1.1).

Prvním příkladem origami v Japonsku, tak jak ho známe dnes, jsou papíroví motýli, nazývaní „Mecho“ a „Ocho“ (obrázek 1.2), kteří byli umisťováni na lahve s vínem při tradičních svatbách. Do 16. století je zaznamenáno jen velmi málo případů použití origami běžnými obyvateli, nicméně od 17. století se stalo origami populárním. Lidé si zdobili často svá kimona papírovými jeřáby. První knihu o překládání papíru, „Tsutsumi-no Ki“, napsal v roce 1764 Sadatake Ise. První knihu, věnující se rekreačnímu origami, jejíž název můžeme přeložit jako „Skládání jeřába na tisíc způsobů“ pak napsal v roce 1797 Senbazuru Orikata.

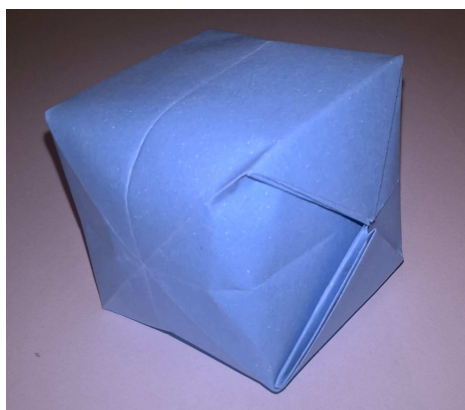


Obrázek 1.2: Ocho (vlevo) a Mecho (vpravo)

Vývoj origami v Evropě probíhal podle většiny historiků nezávisle na japonském origami. Hlavním důvodem k tomuto tvrzení je, že podle dochovaných exemplářů byla narozdíl od Japonska při skládání papíru v Evropě používána vzorová mřížka. Prvním dokladem evropského origami je pravděpodobně kniha „De Sphaera Mundi“, již napsal v roce 1490 Johannes de Sacrobosco. V této knize se nachází obrázek papírové lodi (obrázek 1.3). Někteří historici nejsou zcela přesvědčeni, že jde opravdu o origami loď, nicméně pokud ano, jde o důkaz, že se origami v Evropě vyvíjelo nezávisle na tom v Japonsku, protože tou dobou ještě nebyl v Japonsku používán tento typ rekreačního origami. V roce 1623 byla vydána hra „The Duchess of Malfi“, jejímž autorem byl John Webster a v níž se mluví o papírovém vězení. Jde pravděpodobně o origami model, který dnes známe pod názvem „Water Bomb“ (obrázek 1.3). Mnoho prokazatelných důkazů o výskytu origami v Evropě pochází z 19. století. Například v Německém národním muzeu mají exempláře papírových koní s jezdcí, u nichž se předpokládá, že byly složeny kolem roku 1810. Když v polovině 19. století Friedrich Fröbel založil první mateřskou školu, jednou z her v jeho vzdělávacím systému bylo právě skládání origami.

Na konci 19. století, s rozvojem možností cestování, docházelo k interakci mezi západní a východní kulturou a začaly se vzájemně ovlivňovat a mísit poznatky jak japonského tak evropského origami. Kolem roku 1950 se začal používat japonský název origami i v Evropě. Do té doby se zde mluvilo o *překládání papíru*.

Ve 20. století se začalo rozvíjet tzv. moderní origami. Modely již neměly anonymní autory, ale měly už své tvůrce, kteří kromě modelů jako takových publikovali i návody jak modely složit. Prvním, kdo si nechal své origami modely patentovat, byl Uchiyama Koko. V 50. a 60. letech 20. století vznikl mezinárodní spolek origami, jehož členy byli mimo jiné Oshizawa Akira, Takahama Toshie, Honda Isao, Robert Harbin, Ger-



Obrázek 1.3: Lod z knihy De Sphaera Mundi (vlevo, přejatý z [2]) a Water Bomb (vpravo)

shon Legman, Lillian Oppenheimer, Samuel Randlett nebo Vicente Solórzano-Sagredo. Tomuto okruhu se povedlo origami velmi zpopularizovat.

Ve 20. století také přichází teoretické propojení origami a matematiky. Vzhledem k možnosti tvorby geometrických obrazců a práce s pojmy jako jsou bod, přímka či úhel se jako první nabídlo srovnání origami se všeobecně nepoužívanější eukleidovskou geometrií. První významnou osobností, která si toto propojení uvědomovala, byl japonský učitel Akira Yoshizawa, který využíval origami při výuce svých studentů.

Fenoménem posledních let je origami matematicky popsat a umět jej počítačově zpracovávat. Teoretický základ k tomu položila matematická Margherita Piazzola Beloch, která v roce 1936 objevila přehyb pojmenovaný po ní „Beloch fold“, jenž je dnes jedním z axiomů origami. Axiomy origami jako první formuloval Jacques Justin v roce 1989, nicméně jeho práce se příliš neujala, a tak se axiomy origami dostaly do povědomí matematické veřejnosti až o dva roky později, kdy je publikoval Humiaki Huzita. Je však třeba dodat, že Huzita popsal pouze prvních šest axiomů. Poslední sedmý axiom doplnil v roce 2002 Koshiro Hatori. Nemůžeme opomenout také matematika a fyzika, který se zasadil zřejmě nejvýrazněji o rozvoj matematiky origami v posledních letech. Je jím Robert J. Lang, který se kromě matematického popisu origami zabývá také jeho počítačovým zpracováním. Dodejme ještě, že matematika origami je velmi mladá disciplína, která se v současnosti velmi rychle rozvíjí (více v poslední části této kapitoly).

1.2 Konstrukce s omezenými prostředky

Tato část je napsána zejména s využitím zdrojů [7, 8].

Geometrické znalosti potřebují lidé již po tisíciletí. Jejich rozvoj přišel s potřebou stavět obydlí či vyrábět nástroje nebo zbraně. Prvním matematikem, který uspořádal některé geometrické poznatky, byl v 6. století př. n. l. Thálés z Milétu. Z dalších významných matematiků, kteří přispěli k rozvoji geometrie si uvedeme Eukleida z Alexandrie

(4. století př. n. l.), jenž ve své knize „Základy“ shrnul do logicky provázané struktury tehdejší geometrické poznatky, Archiméda ze Syrakus (3. století př. n. l.), který se mimo jiné zabýval problémy výpočetní geometrie (kvadratury, kubatury), či Apollónia z Pergy, jenž se zabýval kuželosečkami.

V matematice existuje několik různých možností, jak provádět geometrické konstrukce. Jejich typy souvisí s tím, jaké prostředky máme k dispozici. Jedním z typů geometrických konstrukcí jsou konstrukce origami, jimž je tato práce hlavně věnována. Při těchto konstrukcích máme k dispozici pouze papír. Dalším zajímavým typem geometrických konstrukcí je tzv. „provázková geometrie“, kdy máme k dispozici provaz, a body k jeho uchycení (např. kolík v písku, či napínáček na papíře). Dále známe také konstrukce s využitím pouze pravítka, či s využitím pouze kružítka. Posledním typem konstrukcí, který si uvedeme, jsou tzv. „eukleidovské konstrukce“, které budeme v této práci často využívat a odkazovat se na ně.

Předmětem našeho zkoumání budou zejména konstrukce sestrojitelné pomocí origami. Abychom ukázali hlavní přednosti konstruování pomocí origami, budeme často používat srovnání s eukleidovskými konstrukcemi. Eukleidovské konstrukce jsou nejčastěji používaným prostředkem při tvorbě geometrických konstrukcí. Jde o typ konstrukcí, se kterým se hojně setkávají žáci jak základních, tak středních škol. Eukleidovské konstrukce můžeme provést výhradně pomocí kružítka a pravítka. Je však třeba zdůraznit, že pojmy eukleidovské kružítka a eukleidovské pravítka se mírně liší od klasického kružítka a pravítka, na něž jsme zvyklí.

Eukleidovské kružítka lze použít pouze k sestrojení kružnice s daným středem a procházející daným bodem, ne však k přenášení vzdáleností. Eukleidovské pravítka pak slouží výhradně ke konstrukci přímek (tj. ke spojení dvou libovolně vzdálených bodů úsečkou a k prodloužení, i opakovanému, dané úsečky). Neslouží však k měření či nanášení délek ani ke konstrukci kolmic nebo rovnoběžek. Lze však ukázat (viz [7, str. 135]), že nemusíme rozlišovat mezi eukleidovským a klasickým kružítkem, protože při vhodném použití eukleidovského kružítka lze přenášet vzdálenosti. Jednoduše se také můžeme přesvědčit, že pomocí eukleidovského pravítka a kružítka můžeme sestrojit kolmici k dané přímce procházející daným bodem a přímkou rovnoběžnou s danou přímkou a procházející daným bodem.

Pro naše srovnávání bude důležitá zejména informace, která čísla jsou eukleidovsky sestrojitelná. U všech konstrukcí, které zde budeme provádět, se budeme pohybovat v rovině s kartézskou soustavou souřadnic. Abychom mohli začít provádět eukleidovské konstrukce, musíme vycházet z jisté množiny alespoň dvou bodů. Bez újmy na obecnosti volme body $[0, 0]$ a $[1, 0]$.

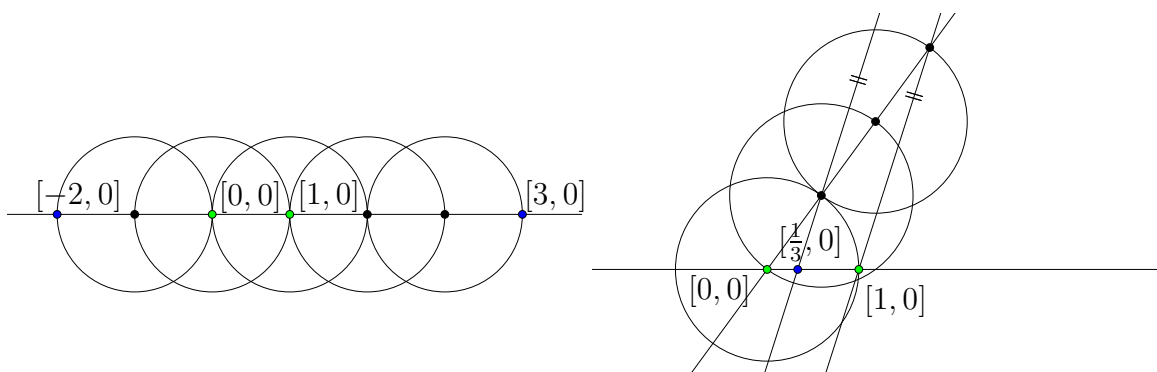
Definice 1.1. Bod nazveme *bodem sestrojitelným pravítkem a kružítkem*, jestliže je posledním bodem konečné posloupnosti bodů P_1, P_2, \dots, P_n takové, že každý bod P_i je buď prvkem množiny $\{[0, 0], [1, 0]\}$, nebo je získán jednou z následujících tří konstrukcí:

- i) jako průsečík dvou přímek, z nichž každá je dána dvěma body, které se objevují v dané posloupnosti již dříve,
- ii) jako průsečík přímky dané dvěma body, které se objevují v dané posloupnosti již dříve, a kružnice dané středem a jedním jejím bodem, přičemž oba tyto body se

- taktéž objevují v dané posloupnosti již dříve,
 iii) jako průsečík dvou kružnic daných středem a bodem, přičemž všechny tyto body se objevují v dané posloupnosti již dříve.

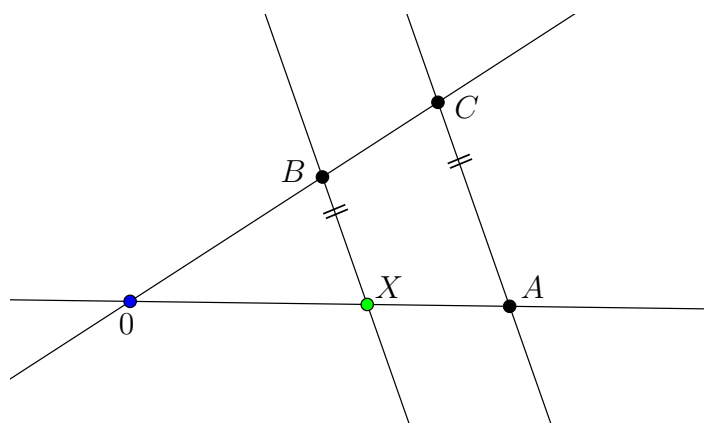
Reálné číslo x nazveme *číslem sestrojitelným pomocí pravítka a kružítka*, je-li bod $[x, 0]$ bodem sestrojitelným pomocí pravítka a kružítka.

Snadno se můžeme přesvědčit, že všechna celá čísla z a všechna čísla ve tvaru $\frac{1}{n}$, kde n je přirozené číslo, jsou sestrojitelná pomocí pravítka a kružítka. Na obrázku 1.4 jsou znázorněny konstrukce čísel $-2, 3$ a $\frac{1}{3}$.



Obrázek 1.4: Čísla $-2, 3$ (vlevo) a $\frac{1}{3}$ (vpravo)

Pomocí těchto dvou postupů pak můžeme konstruovat všechna racionální čísla. Dále si ukážeme, že jsou-li čísla a, b a c ($c \neq 0$) sestrojitelná pomocí pravítka a kružítka, pak i čísla $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{c}$ jsou sestrojitelná pomocí pravítka a kružítka. Konstrukce čísel $a + b$ a $a - b$ je s využitím možnosti přenášení délky pomocí eukleidovského kružítka triviální. Na obrázku 1.5 si ukážeme konstrukci čísel $a \cdot b$ a $\frac{a}{c}$.

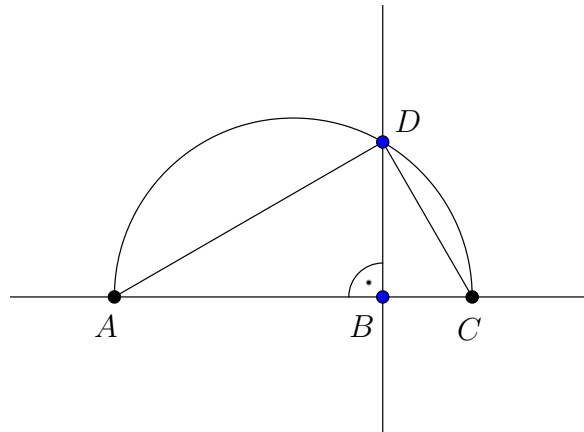


Obrázek 1.5: Konstrukce čísel $a \cdot b$ a $\frac{a}{c}$

Soustavu souřadnou zvolíme tak, aby $O = [0, 0]$ a $A = [a, 0]$. Pro vzdálenosti bodů A a X od počátku O tedy platí $|AO| = a$ a $|XO| = x$. Dále si označme vzdálenosti $|BO| = b$ a $|CO| = c$. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle OXB \sim \triangle OAC$ plyne rovnost

$\frac{|XO|}{|AO|} = \frac{|BO|}{|CO|}$. Zvolíme-li $|BO| = 1$, potom $x = \frac{a}{c}$. Zvolíme-li naopak $|CO| = 1$, pak $x = a \cdot b$.

Poslední konstrukcí pomocí kružítka a pravítka, kterou si ukážeme, je konstrukce čísla \sqrt{a} . Na obrázku 1.6 si ukážeme konstrukci úsečky o délce \sqrt{a} , máme-li zadanou úsečku o délce a .



Obrázek 1.6: Konstrukce čísla \sqrt{a}

Pro naši konstrukci volíme body A, B a C na jedné přímce tak, aby $|AB| = a$ a $|BC| = 1$ a aby polopřímky $\mapsto BA$ a $\mapsto BC$ byly navzájem opačné. Průsečík kolmice k přímce $\leftrightarrow AB$ procházející bodem B a Thaletovy kružnice sestrojené nad úsečkou danou body A a C si označme jako bod D . Podle Eukleidovy věty o výšce pak musí platit $|BD| = \sqrt{a}$. Vhodným přenesením délky této úsečky pak můžeme sestrojit bod $[\sqrt{a}, 0]$. Je-li tedy číslo a sestrojitelné pomocí pravítka a kružítka, pak je i číslo \sqrt{a} sestrojitelné pomocí pravítka a kružítka.

Čísla sestrojitelná pomocí pravítka a kružítka pro nás budou důležitá pro srovnání možností eukleidovských konstrukcí a konstrukcí pomocí origami. Na závěr této kapitoly ještě zmíníme tři klasické problémy starověku. Jsou jimi duplikace krychle, trisekce úhlu a kvadratura kruhu. Duplikací krychle rozumíme konstrukci krychle, která má vzhledem k zadané krychli dvojnásobný objem. Vzhledem k tomu, že objem krychle lze vyjádřit jako třetí mocninu délky hrany této krychle, je problém duplikace krychle problémem nalezení úsečky, jejíž délka je $\sqrt[3]{2}$ -krát větší, než délka zadané úsečky. Trisekci úhlu rozumíme rozdělení zadaného úhlu na tři shodné úhly, kvadraturou kruhu pak sestrojení čtverce o stejném obsahu jaký má zadaný kruh. Jde o konstrukce, jež se matematici bezúspěšně pokoušeli po tisíciletí sestrojiti pomocí pravítka a kružítka. Až s využitím nových matematických poznatků se v 19. století podařilo dokázat, že jejich snaha byla marná a že tyto konstrukce nejsou pomocí pravítka a kružítka sestrojitelné. Některé z nich, jak si ukážeme, budou však sestrojitelné s využitím origami.

1.3 Origami v současné školské matematice

Při tvorbě této části úvodní kapitoly bylo čerpáno z [9].

Vzhledem k tomu, že je matematika origami poměrně mladá disciplína, nevyskytuje se téměř vůbec v současné školské matematice. Jsou učitelé, kteří origami používají k praktickým ukázkám při výkladu geometrie, nicméně jako tématický celek zatím není matematika origami do současného vzdělávání zařazena. Na druhou stranu se stále rostoucí popularitou origami přibývá zájmových kroužků či kurzů, které se právě matematikou origami zabývají.

Rozvoji origami a jeho začlenění do vyučování v současnosti pomáhají mezinárodní konference „International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education“. Dodnes se uskutečnilo 6 těchto konferencí. Vůbec první se konala ve Ferrare v Itálii roku 1989. Následovaly konference v Otsu (Japonsko, 1994), Asilomaru (Kalifornie, USA, 2001), Pasadeně (Kalifornie, USA, 2006), Singapuru (2010) a zatím poslední se konala v Tokyu (Japonsko, 2014). Následující konference je plánována na rok 2018 a měla by se uskutečnit v Oxfordu (Velká Británie).

1.4 Principy origami v aplikacích a v praxi

Poslední část úvodní kapitoly čerpá především z [10].

Origami v praxi už dnes neznamená pouze umění. Jde také o prostředek, který používá mnoho vědců při nejnovějších výzkumech. Vzhledem k tomu, že je propojení mezi origami a vědou záležitostí zejména posledních několika let, prochází velmi intenzivním vývojem.

Často se můžeme setkat se situací, kdy je pro manipulaci s nějakým předmětem vhodné, aby měl co nejmenší rozměry, ale při používání tohoto předmětu je třeba, aby měl rozměry několikanásobně větší. Příkladem takového použití, se kterým se setkáváme nejčastěji, je airbag v automobilu. Během jízdy je třeba, aby nezabíral příliš místa. Důležité však je, aby se v případě potřeby dokázal správnou rychlostí rozložit a nafouknout tak, aby nikde nedošlo k jeho poškození a nafouknutí proběhlo rovnoměrně.

Principů origami se také často využívá při zkoumání vesmíru. Pro nejnovější vesmírné teleskopy, pohybující se na naší oběžné dráze, jsou typické velmi velké rozměry. Pro dopravu obrovských zrcadel či solárních panelů na oběžnou dráhu však máme jen omezené prostředky, a je potřeba, aby při přepravě měli mnohem menší rozměry, než při jejich následném použití.

V současnosti se také vyvíjí využití origami v lékařství. Jedním z již využívaných příkladů je léčba ucpaných srdečních cév, kdy se na příslušné místo v cévě dopraví „trubička“, která se zde rozloží a vytvoří zde místo pro volný průtok krve. Model této trubičky vychází z modelu „Water Bomb“, jenž je zmíněn v první části této kapitoly.

S dalším využitím principů origami se můžeme setkat například v architektuře, či při vývoji tzv. „nanobotů“, tedy robotů o miniaturních rozměrech.

Možností využití origami v praxi je tedy již v současnosti mnoho a protože origami otevírá ve světě vědy nové možnosti, další rychle přibývají.

Kapitola 2

Základní pojmy

Dříve než se začneme zabývat origami, musíme zavést několik základních pojmů, které budeme dále používat a jejichž znalost je předpokládána.

2.1 Teorie grup

V této části je čerpáno zejména z [6, 11, 12].

Prvním pojmem, který je třeba definovat, je grupa.

Definice 2.1. *Grupou* nazveme množinu G , na níž je definována binární operace „ \circ “ splňující následující tři axiomy:

- i) Binární operace „ \circ “ je asociativní. Platí tedy $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ pro libovolné tři prvky množiny G .
- ii) Existuje *neutrální prvek* e množiny G takový, že pro libovolný prvek a množiny G platí $a \circ e = a = e \circ a$.
- iii) Pro každý prvek a množiny G existuje *inverzní prvek* a^{-1} množiny G tak, že platí $a^{-1} \circ a = e = a \circ a^{-1}$.

Poznámka 2.1. U binární operace „ \circ “ předpokládáme uzavřenost na množině G .

Dále definujeme dva speciální případy grup.

Definice 2.2. Grupu G s binární operací „ \circ “ nazveme *Abelovou grupou*, je-li binární operace „ \circ “ komutativní, tj. platí $a \circ b = b \circ a$ pro každé dva prvky $a, b \in G$.

Definice 2.3. Množinu S_n permutací n prvků $\{a_1, \dots, a_n\}$ nazýváme *symetrickou grupou*.

Dalšími pojmy, které budeme definovat, jsou okruh, těleso a pole.

Definice 2.4. Okruhem R nazveme množinu, na níž jsou definovány binární operace „+“ (sčítání) a „*“ (násobení) splňující následující čtyři axiomy:

- i) Množina R s binární operací „+“ je Abelova grupa.
- ii) Pro všechna $a, b, c \in R$ platí $a * (b + c) = a * b + a * c$ a $(b + c) * a = b * a + c * a$ (tj. násobení je distributivní vzhledem ke sčítání na množině R).
- iii) Existuje *neutrální prvek* $j \in R$ takový, že pro libovolný prvek a množiny R platí $a * j = a = j * a$.

Poznámka 2.2. Neutrální prvek vzhledem k operaci „+“ nazýváme *nulovým prvkem* (značíme 0), neutrální prvek vzhledem k operaci „*“ nazýváme *jednotkovým prvkem* (značíme 1).

Poznámka 2.3. U binárních operací sčítání i násobení znovu předpokládáme jejich uzavřenost na množině R . Pokud je navíc pro všechna $a, b, c \in R$ binární operace „*“ asociativní, (tj. $(a * b) * c = a * (b * c)$), nazveme okruh R *asociativním okruhem*. Je-li v okruhu R binární operace násobení komutativní (tj. pro všechna $a, b, c \in R$ platí $a * b = b * a$), nazýváme jej *komutativním okruhem*. Jedním z příkladů okruhu je množina celých čísel \mathbb{Z} , přičemž nulovým prvkem je zde číslo 0 a jednotkovým prvkem číslo 1.

Definice 2.5. Okruh, jehož podmnožina nenulových prvků tvoří spolu s operací násobení grupu nazýváme *těleso*. Je-li navíc operace násobení komutativní nad tímto tělesem, nazýváme jej *komutativní těleso*, nebo také *pole*.

Poznámka 2.4. Z definice pole vyplývá, že každý nenulový prvek pole má inverzní prvek. Příkladem pole je množina racionálních čísel \mathbb{Q} spolu s operacemi sčítání a násobení.

Poznámka 2.5. Je možné ukázat (viz [7, str. 135]), že množina čísel sestrojitelných pomocí pravítka a kružítka, tak jak jsme ji popsali v úvodní kapitole, tvoří spolu s operacemi sčítání a odčítání pole. Vzhledem k tomu, že je toto pole uzavřené na operaci druhá odmocnina, značíme jej $\mathbb{F}_{\sqrt{x}}$.

2.2 Polynomy

Následující část je zpracována s využitím zdrojů [6, 12, 13]

Pro tuto práci budou důležité také některé pojmy týkající se polynomů.

Definice 2.6. Nechť \mathbb{F} je pole a a_0, a_1, \dots, a_n jeho prvky. Funkce $p : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ definovaná předpisem $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ se nazývá *polynom jedné proměnné x nad polem \mathbb{F}* . Číslo n nazýváme *stupněm* polynomu p . Koefficient a_0 nazýváme *vedoucím koeficientem* polynomu p . Je-li vedoucí koeficient polynomu p roven 1, nazýváme tento polynom *monickým polynomem*.

Poznámka 2.6. Stupněm konstantního polynomu je 0. Pro nulový polynom není stupeň definován.

Poznámka 2.7. Množina polynomů jedné proměnné nad \mathbb{F} tvoří okruh, který budeme značit $\mathbb{F}[x]$.

Definice 2.7. Číslo $k \in \mathbb{F}$ se nazývá *kořen* polynomu $p(x)$, jestliže $p(k) = 0$.

Definice 2.8. Číslo α nazveme *algebraickým číslem*, je-li kořenem nějakého polynomu s racionálními koeficienty.

Definice 2.9. *Minimálním polynomem* prvku a pole \mathbb{F} rozumíme monický polynom nejmenšího stupně $p(x)$ takový, že $p(a) = 0$.

Definice 2.10. Polynom stupně alespoň 1 daného okruhu $\mathbb{F}[x]$ je *ireducibilní* nad okruhem $\mathbb{F}[x]$, pokud je pro každý jeho rozklad $p(x) = f(x)g(x)$, kde $f, g \in \mathbb{F}[x]$, stupeň jednoho z polynomů f, g roven 0.

Příklad 2.1. Jako příklad si uvedeme polynomy

$$p_1(x) = x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3),$$

$$p_2(x) = 4x^2 - 1 = 4 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right).$$

Polynom p_1 je reducibilní nad okruhem polynomů s celočíslnými koeficienty $\mathbb{Z}[x]$, protože oba polynomy $x+3$ a $x-3$ jsou polynomy okruhu $\mathbb{Z}[x]$. Naproti tomu polynom p_2 je ireducibilní nad okruhem $\mathbb{Z}[x]$, ale je reducibilní nad okruhem polynomů s racionálními koeficienty $\mathbb{Q}[x]$.

Poznámka 2.8. Libovolné algebraické číslo α lze vyjádřit jako kořen jediného minimálního polynomu z $\mathbb{Q}[x]$. Tento polynom, značíme jej $p_{\alpha(x)}$, je ireducibilní a dělí každý polynom v $\mathbb{Q}[x]$, jehož je číslo α kořenem.

Definice 2.11. Všechny kořeny polynomu $p_{\alpha}(x)$ nazveme čísla *konjugovaná* s číslem α . Jsou-li všechna konjugovaná čísla s daným algebraickým číslem reálná, nazýváme toto algebraické číslo číslem *totálně reálným*. Množinu všech totálně reálných čísel daného pole \mathbb{F} značíme \mathbb{F}_{TR} .

Příklad 2.2. Jako příklad totálně reálného čísla si uvedeme číslo $\sqrt{7 + 3\sqrt{3}}$. Jelikož jde o algebraické číslo, můžeme ho vyjádřit jako kořen ireducibilního polynomu v $\mathbb{Q}[x]$. Ostatní kořeny tohoto polynomu (tedy čísla konjugovaná se zadaným číslem) jsou $\pm\sqrt{7 \pm 3\sqrt{3}}$. Tvar tohoto polynomu v \mathbb{Q} je tedy

$$\begin{aligned} & \left(x + \sqrt{7 + 3\sqrt{3}} \right) \left(x - \sqrt{7 + 3\sqrt{3}} \right) \left(x + \sqrt{7 - 3\sqrt{3}} \right) \left(x - \sqrt{7 - 3\sqrt{3}} \right) = \\ & = x^4 - 14x^2 + 22, \end{aligned}$$

což je polynom s racionálními koeficienty. Vzhledem k tomu, že jsou všechna čísla konjugovaná s číslem $\sqrt{7 + 3\sqrt{3}}$ reálná, je číslo $\sqrt{7 + 3\sqrt{3}}$ totálně reálné. Naproti tomu například číslo $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ není totálně reálné, protože dvě z jeho konjugovaných čísel $\pm\sqrt{2 - \sqrt{5}}$ jsou čísla imaginární.

Dalšími ze základních pojmů, které v této části uvedeme, se budou týkat symetrických polynomů.

Definice 2.12. Necht' \mathbb{F} je pole a $a_{k_1 k_2 \dots k_n}$, kde k_1, k_2, \dots, k_n jsou přirozená čísla, jeho prvky. Funkci $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(k_1 k_2 \dots k_n)} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, kde sčítáme přes

všechny uspořádané n -tice $(k_1 k_2 \dots k_n)$ nazveme *polynom n proměnných* nad polem \mathbb{F} . *Stupněm* polynomu o n proměnných nazveme maximum z čísel $k_1 + k_2 + \dots + k_n$, pro která je $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \neq 0$. *Termem* pak nazveme každý z výrazů $a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$.

Poznámka 2.9. Okruh všech polynomů n proměnných nad polem \mathbb{F} budeme značit $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Každý polynom tohoto pole je součtem příslušných termů.

Pro naši práci bude také důležité umět uspořádat termy daného polynomu.

Definice 2.13. *Úplným uspořádáním termů*, značíme $<_T$, na množině termů T rozumíme uspořádání, jenž pro všechny termy $r, s, t \in T$ splňuje:

- i) $\alpha x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0 = \alpha <_T t$
- ii) Je-li $s <_T t$, potom $r \cdot s <_T r \cdot t$.

Úplné uspořádání termů lze zavést mnoha způsoby. Jedním z nich je tzv. *lexikografické uspořádání*.

Definice 2.14. Lexikografické uspořádání termů $<_L$ definujeme následovně: $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} <_L \beta x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$ právě tehdy, když existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $k_m < l_m$ a zároveň $k_i = l_i$ pro $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$.

Poznámka 2.10. Máme-li příslušné úplné uspořádání termů, můžeme najít nejvyšší term polynomu p vzhledem k danému uspořádání. Takovému termu budeme říkat *vedoucí term* polynomu p a budeme jej značit $LT(p)$. Je-li $\alpha x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ vedoucím termem daného polynomu, pak α nazveme *vedoucím koeficientem* tohoto polynomu.

Příklad 2.3. Jako příklad nám může posloužit polynom $p(x, y) = 3xy^3 - 2x^2y^2 + 7x$. Platí $7x <_L 3xy^3 <_L -2x^2y^2$ a tedy $LT_{<_L}(p) = -2x^2y^2$.

Definice 2.15. Necht' R je okruh a t_1, \dots, t_n jeho lineárně nezávislé prvky. Necht' x je proměnná a G symetrická grupa permutací n přirozených čísel. Necht' σ je permutace prvků (t_1, \dots, t_n) . Pro daný polynom $p(t_1, \dots, t_n)$ definujeme

$$\sigma p(t_1, \dots, t_n) = p(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}).$$

Polynom p nazveme *symetrickým*, pokud platí $\sigma p = p$ pro všechny permutace $\sigma \in G$.

Příklad 2.4. Jako příklad si uvedeme polynom $p(t_1, t_2) = t_1^3 - t_2^3$. Tento polynom není symetrický, protože pro permutaci $\sigma : t_1 \rightarrow t_2, \sigma : t_2 \rightarrow t_1$ dostáváme

$$t_2^3 - t_1^3 \neq t_1^3 - t_2^3 \Rightarrow \sigma p \neq p.$$

Naopak polynom $t_1^3 + t_2^3$ je symetrický, protože $t_2^3 + t_1^3 = t_1^3 + t_2^3$.

S využitím poznatků o symetrických polynomech si nyní rozebereme situaci pro polynom

$$p(x) = (x - t_1)(x - t_2) \dots (x - t_n) = x^n - s_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n,$$

kde koeficienty s_j jsou ve tvaru

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= t_1 + t_2 + \dots + t_n, \\ s_j &= \text{součet všech různých součinů o } j \text{ činitelích prvků } t_1, \dots, t_n, \\ s_n &= t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_n. \end{aligned}$$

Polynomy $s_j(t_1, \dots, t_n)$, kde $1 \leq j \leq n$, se nazývají *elementární symetrické polynomy* prvků t_1, \dots, t_n .

Můžeme tedy použít vyjádření

$$\prod_{k=1}^n (x - t_k) = \sum_{j=0}^n (-1)^j s_j(t_1, \dots, t_n) x^{n-j}.$$

Například pro polynom $(x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$ dostáváme

$$(x - t_1)(x - t_2)(x - t_3) = x^3 - (t_1 + t_2 + t_3)x^2 + (t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3)x - t_1t_2t_3,$$

přičemž všechny polynomy

$$\begin{aligned} s_1 &= t_1 + t_2 + t_3, \\ s_2 &= t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3, \\ s_3 &= t_1t_2t_3 \end{aligned}$$

jsou elementární symetrické polynomy.

Dále si uvedeme důležitou větu, která nám udává vztah mezi symetrickými polynomy a elementárními symetrickými polynomy, podle níž lze každý symetrický polynom vyjádřit pomocí elementárních symetrických polynomů.

Věta 2.1. Necht' $p(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{F}[t_1, t_2, \dots, t_n]$ je symetrický polynom stupně k . Pak existuje polynom $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stupně $\leq k$ tak, že $q(s_1, s_2, \dots, s_n) = p(t_1, t_2, \dots, t_n)$, kde $s_1(t_1, t_2, \dots, t_n), s_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, s_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ jsou elementární symetrické polynomy.

Důkaz. Větu budeme dokazovat matematickou indukcí podle počtu proměnných n . Snadno ukážeme, že je věta splněna pro $n = 1$, neboť jistě platí $s_1 = t_1$, a můžeme tedy uvažovat přímo $p(t_1) = p(s_1)$.

Dále předpokládejme, že věta již platí pro $n - 1$ proměnných.

Označme si polynom $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x - t_1) \cdots (x - t_n)$. Pokud pro tento polynom položíme $t_n = 0$ a upravíme jej, získáme vztah

$$(x - t_1) \cdots (x - t_{n-1}) \cdot x = x^n - s_1(t_1, \dots, t_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})x. \quad (2.1)$$

Dále využijeme matematickou indukcí podle stupně k . Pro $k = 0$ naše věta jistě platí, protože v takovém případě má polynom p tvar konstanty. Dále uvažujme $k > 0$ a předpokládejme, že věta již byla dokázána pro všechny symetrické polynomy stupně menšího

než k . Z tohoto předpokladu a z (2.1) plyne, že existuje polynom p_1 stupně $\leq k$, pro který platí

$$p_1(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) = f(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, 0).$$

Protože polynom $p_1(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ má stupeň $\leq k$, má i polynom

$$q_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = p(t_1, t_2, \dots, t_n) - p_1(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$$

stupeň $\leq k$. Navíc jde jistě o symetrický polynom (p, s_1, \dots, s_{n-1} jsou symetrické). Navíc víme, že $q_1(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, 0) = 0$. Tato rovnost však může nastat pouze v případě, že t_n je kořenem q_1 , a tedy t_n dělí q_1 . Protože je však q_1 symetrický, musí i t_1, \dots, t_{n-1} být jeho kořeny.

Platí tedy $q_1 = s_n q_2(t_1, \dots, t_n)$, kde q_2 musí být symetrický polynom a jeho stupeň je $\leq k - n$ a tedy $< k$. Podle indukčního předpokladu pak existuje polynom q_3 o n proměnných se stupněm $\leq k - n$, pro který $q_2(t_1, t_2, \dots, t_n) = q_3(s_1, s_2, \dots, s_n)$. Získáváme tedy

$$p(t_1, t_2, \dots, t_n) = p_1(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) + s_n q_3(s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Všechny výrazy na pravé straně této rovnosti jsou polynomy elementárních symetrických polynomů a jejich stupeň je $\leq k$, čímž je naše věta dokázána. \square

Příklad 2.5. Uvažujme nyní polynom

$$p(x, y, z) = xy(z^2 + 1) + xz(y^2 + 1) + yz(x^2 + 1).$$

Snadno můžeme ověřit, že jde o symetrický polynom. Podle věty 2.1 jej tedy lze vyjádřit pomocí elementárních symetrických polynomů

$$\begin{aligned} s_0(x, y, z) &= 1, \\ s_1(x, y, z) &= x + y + z, \\ s_2(x, y, z) &= xy + xz + yz, \\ s_3(x, y, z) &= xyz. \end{aligned}$$

Roznásobením polynomu dostaneme

$$p(x, y, z) = xyz^2 + xy + xy^2z + xz + x^2yz + yz.$$

Po úpravě a po přeuspořádání pak dostaneme

$$p(x, y, z) = xyz(x + y + z) + xy + xz + yz = s_3(x, y, z) \cdot s_1(x, y, z) + s_2(x, y, z),$$

čímž získáváme vyjádření zadaného symetrického polynomu pomocí elementárních symetrických polynomů.

2.3 Gröbnerovy báze

Tato část je zpracována s využitím zdrojů [12, 14, 15, 16, 22].

V páté kapitole této práce se budeme zabývat tzv. automatickými důkazy v geometrii. Pro tyto důkazy je důležitý pojem Gröbnerova báze, který si nyní postupně nastíníme. Vzhledem k náročnosti a rozsahu této teorie uvedeme v naší práci pouze její základy. Důkladně je pak tato teorie popsána například v [16]. Nejprve musíme zavést pojem ideál.

Definice 2.16. Podmnožina I okruhu $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ se nazývá *ideál*, jestliže:

- i) $0 \in I$.
- ii) Jestliže $f, g \in I$, potom $f + g \in I$.
- iii) Jestliže $f \in I$ a $c \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, potom $cf \in I$.

Poznámka 2.11. Ideál je tedy množina polynomů, jež je uzavřená na operaci sčítání a na operaci násobení jeho prvků libovolným prvkem okruhu polynomů o n proměnných $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Dále budeme potřebovat pojem ideál generovaný danými polynomy.

Věta 2.2. Nechtě p_1, \dots, p_r jsou polynomy okruhu $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Potom množina $\langle p_1, \dots, p_r \rangle$, kde

$$\langle p_1, \dots, p_r \rangle = \{g_1 p_1 + \dots + g_r p_r; g_1, \dots, g_r \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]\},$$

je ideál. Tento ideál nazýváme *ideál generovaný polynomy p_1, \dots, p_r* .

Důkaz. Vhodnou volbou polynomů g_1, \dots, g_r můžeme snadno ověřit, že daná množina $\langle p_1, \dots, p_r \rangle$ splňuje definici ideálu 2.2. \square

Poznámka 2.12. Ideál I je *konečně generovaný*, existují-li v okruhu $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polynomy p_1, \dots, p_r tak, že $I = \langle p_1, \dots, p_r \rangle$. Pak říkáme, že p_1, \dots, p_r tvoří *bázi* ideálu I .

Každý z polynomů daného ideálu tedy lze generovat pomocí polynomů ležících v bázi tohoto ideálu.

Příklad 2.6. Uvažujme nyní celý okruh $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Snadno můžeme nahlédnout, že tento okruh splňuje definici ideálu. Dle věty 2.2 je

$$\langle 1 \rangle = \{g, g \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]\} = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Prvek 1 tedy generuje celý okruh $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Báze ideálu však není určena jednoznačně a daný ideál může mít mnoho různých bází. Jedním speciálním typem báze je pak již v úvodu této části zmíněná Gröbnerova báze.

Definice 2.17. Nechtě $<_T$ je úplné uspořádání na množině termů T a nechtě množina $I \subset \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je ideál. *Gröbnerovou bází* ideálu I je jeho konečná podmnožina $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ taková, že $\langle LT_{<_T}(g_1), \dots, LT_{<_T}(g_n) \rangle = \langle LT_{<_T}(I) \rangle$.

Jednou ze zajímavých vlastností Gröbnerovýchází nám ukazuje následující věta.

Věta 2.3. Necht $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ je Gröbnerova báze ideálu I . Polynom $p \in I$ právě tehdy, když je zbytek po dělení polynomu p polynomy z G roven nule.

Důkaz. Důkaz věty můžeme najít v [16]. □

Poznámka 2.13. Dělením polynomu p polynomem q rozumíme nalezení polynomů s, r tak, že $p = sq + r$, kde stupeň polynomu p je menší, než stupeň polynomu q . Polynom p nazýváme zbytkem po dělení polynomu p polynomem q . Pokud je $r = 0$, říkáme, že polynom q dělí polynom p . Více o dělení polynomů lze nalézt například v [22].

Pro naše potřeby bude nejdůležitější pojem redukovaná Gröbnerova báze.

Definice 2.18. *Redukovanou Gröbnerovouází G_R ideálu I rozumíme takovou Gröbnerovuází tohoto ideálu, která splňuje:*

- i) Každý polynom $g \in G_R$ má vedoucí koeficient roven 1.
- ii) Pro každý polynom $g \in G_R$ žádný z termů polynomu g neleží v $LT(G_R - \{g\})$.

Věta 2.4. Pro daný ideál I existuje *jediná* redukovaná Gröbnerova báze.

Důkaz. Důkaz této věty je uveden v [14]. □

Více o Gröbnerovýchází lze najít například v [14] či [16]. Zde je také popsán tzv. *Buchbergerův algoritmus*, který umožňuje výpočet Gröbnerovyází ideálu generovaného danými polynomy. Tento algoritmus často využívají matematické programy. Jedním z nich je program MATHEMATICA, který budeme využívat v páté kapitole naší práce. Redukovanou Gröbnerovuází ideálu generovaného polynomy p_1, \dots, p_n zde určíme pomocí příkazu

```
GroebnerBasis[{p1, ..., pk}, {x1, ..., xn}]
```

Druhou množinou v tomto příkazu je množina proměnných. Příklady výpočtu redukované Gröbnerovyází si ukážeme v páté kapitole.

Kapitola 3

Základní konstrukce origami

Celá třetí kapitola je zpracována zejména s využitím zdrojů [6, 13].

Po zavedení základních pojmů se již můžeme věnovat konstrukcím pomocí origami. V této kapitole ukážeme, jaké konstrukce je možné sestavit pomocí tzv. základních konstrukcí origami.

3.1 Origami dvojice

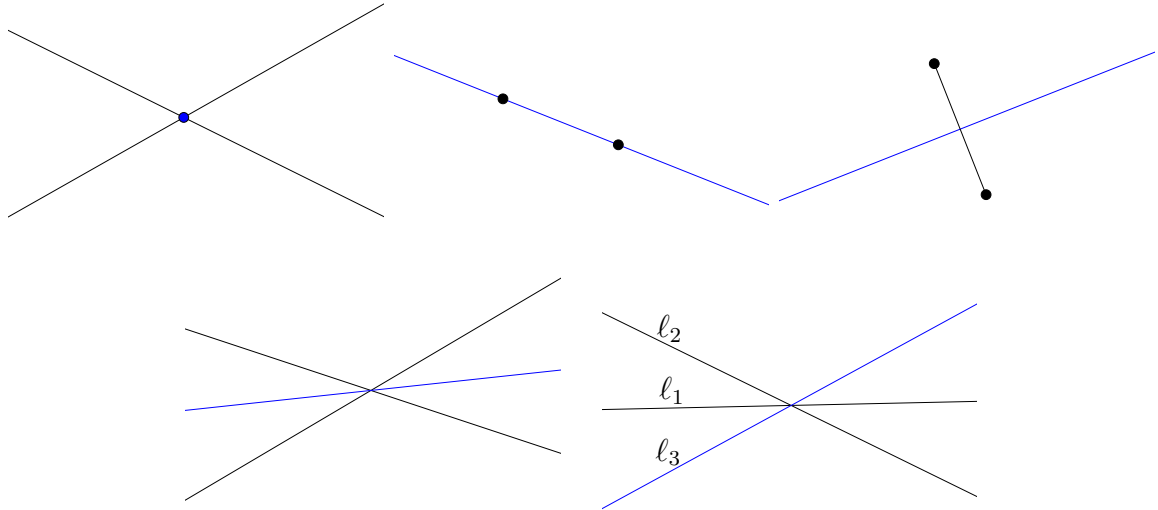
Nejprve uvedeme definici origami dvojice, jejímiž autory jsou D. Auckly a J. Cleveland (viz [13]).

Definice 3.1. Dvojici $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$ nazveme *origami dvojicí*, pokud \mathcal{P} je jistá množina bodů v rovině \mathbb{R}^2 a \mathcal{L} je množina přímek v rovině \mathbb{R}^2 a platí následující podmínky:

- (i) Průnikem dvou nerovnoběžných přímek z \mathcal{L} je bod v \mathcal{P} .
- (ii) Pro libovolné dva různé body z \mathcal{P} existuje přímka v \mathcal{L} , která jimi prochází.
- (iii) Pro libovolné dva různé body z \mathcal{P} je osa úsečky dané těmito body přímkou v \mathcal{L} .
- (iv) Pro libovolné dvě přímky z \mathcal{L} je přímka, jejíž všechny body mají od obou těchto přímek stejnou vzdálenost, přímkou v \mathcal{L} .
- (v) Jsou-li ℓ_1 a ℓ_2 přímky v \mathcal{L} , pak existuje přímka ℓ_3 v \mathcal{L} , jež je obrazem přímky ℓ_2 v osově souměrnosti podle přímky ℓ_1 .

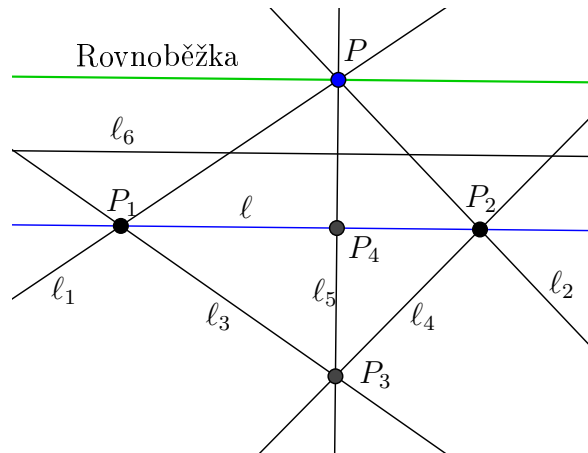
Poznámka 3.1. Všechny konstrukce, které můžeme sestavit v souladu s definicí 3.1, budeme nazývat *základními konstrukcemi origami*.

Abychom ukázali, že pomocí origami, stejně jako pomocí kružítka a pravítka, lze provést mnoho různých konstrukcí, uvedeme si například následující lemma.



Obrázek 3.1: Body (i) až (v) definice 3.1

Lemma 3.1. Necht' je dána přímka ℓ a bod P . Pak je možné pomocí origami sestrojít rovnoběžku s přímkou ℓ procházející bodem P .



Obrázek 3.2: Rovnoběžka daným bodem

Důkaz. Jsou dány přímka ℓ a bod P . Na přímce ℓ zvolíme libovolné 2 různé body P_1 a P_2 . Podle definice 3.1(ii) můžeme sestrojít přímku ℓ_1 procházející body P a P_1 a přímku ℓ_2 procházející body P a P_2 . Podle (v) téže definice můžeme sestrojít přímky ℓ_3 a ℓ_4 jako obrazy přímek ℓ_1 a ℓ_2 v osové souměrnosti podle přímky ℓ . S využitím (i) označíme průsečík přímek ℓ_3 a ℓ_4 jako bod P_3 . Podle (ii) pak můžeme sestrojít přímku ℓ_5 procházející body P_3 a P . Průsečík této přímky s přímkou ℓ označíme podle (i) jako bod P_4 . Následně s využitím (iii) sestrojíme osu ℓ_6 úsečky PP_4 . Nakonec zobrazením přímky ℓ v osové souměrnosti podle osy ℓ_6 s využitím (v) získáme požadovanou rovnoběžku s přímkou ℓ procházející bodem P . \square

3.2 \mathcal{O} -čísla

V této části třetí kapitoly si ukážeme čísla, která jsou sestrojitelná pomocí základních konstrukcí origami.

Definice 3.2. Podmnožina \mathcal{P} roviny \mathbb{R}^2 je uzavřená na konstrukce origami, pokud existuje množina přímek \mathcal{L} tak, že $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$ tvoří origami dvojici.

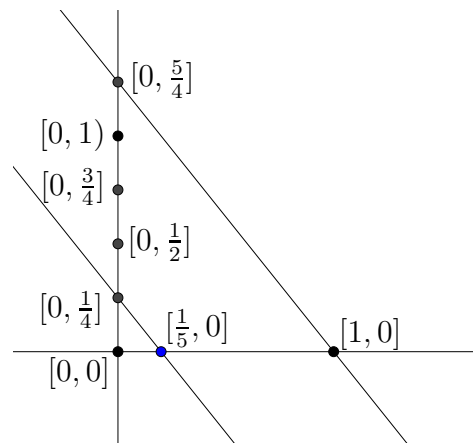
Definice 3.3. Množinu \mathcal{P}_O , pro kterou platí $[0, 0], [0, 1] \in \mathcal{P}_O$ a \mathcal{P}_O je uzavřená na konstrukce origami, nazýváme množinou *origami sestrojitelných bodů*.

Definice 3.4. Množinou čísel origami je množina:

$$\mathbb{F}_O = \{\alpha \in \mathbb{R}; \exists P_1, P_2 \in \mathcal{P}_O \text{ takové, že } |\alpha| \text{ je vzdálenost bodů } P_1, P_2\}.$$

Poznámka 3.2. Čísla origami budeme dále značit \mathcal{O} -čísla.

Vzhledem k tomu, že můžeme pomocí základních konstrukcí origami najít snadno střed zadané úsečky, je zřejmé, že čísla $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ jsou \mathcal{O} -čísla. \mathcal{O} -čísla jsou navíc všechna čísla ve tvaru $\frac{1}{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Na obrázku 3.3 je znázorněna konstrukce čísla $\frac{1}{5}$ pomocí přímky procházející bodem $[0, \frac{1}{4}]$ a rovnoběžné s přímkou danou body $[0, \frac{5}{4}]$ a $[1, 0]$.



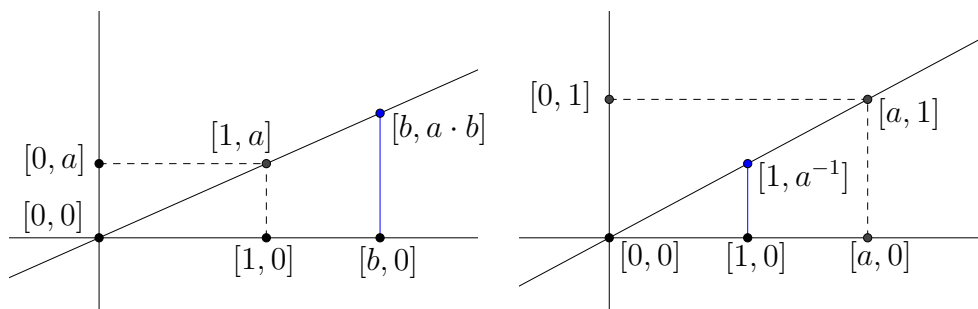
Obrázek 3.3: Konstrukce čísla $\frac{1}{5}$

Dále se ukazuje, že součet a rozdíl \mathcal{O} -čísel, číslo inverzní k \mathcal{O} -číslu a součin a podíl \mathcal{O} -čísel jsou taktéž \mathcal{O} -čísla (viz obr. 3.4).

Zajímavou skutečností je, že jednu ze tříd \mathcal{O} -čísel můžeme popsat s využitím pravoúhlých trojúhelníků. Této třídě se budeme věnovat ve zbytku této kapitoly.

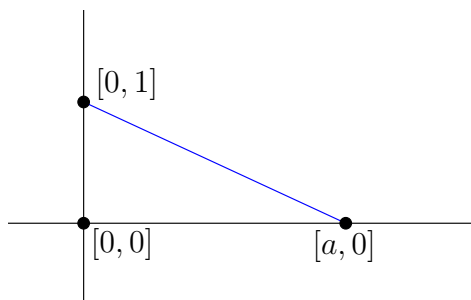
Věta 3.2. Množina \mathcal{O} -čísel \mathbb{F}_O je pole uzavřené na operaci $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$. (A tedy pokud vezmeme číslo $a \in \mathbb{F}_O$, pak $\sqrt{1+a^2}$ je číslo $a' \in \mathbb{F}_O$).

Například pro číslo $a = 3$ můžeme sestrojit číslo $\sqrt{10}$. Číslo $\sqrt{10}$ je tedy \mathcal{O} -číslem.



Obrázek 3.4: Konstrukce čísel $a \cdot b$ (vlevo) a a^{-1} (vpravo) pomocí origami

Důkaz. K sestrojení čísla $\sqrt{1+a^2}$ využijeme vlastností pravoúhlého trojúhelníku. Pokud sestrojíme pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny budou mít délky 1 a a , pak přepona tohoto trojúhelníku bude mít délku právě $\sqrt{1+a^2}$. \square



Obrázek 3.5: Konstrukce čísla $\sqrt{1+a^2}$

Nyní víme, že pomocí operace $\sqrt{1+a^2}$ můžeme konstruovat \mathcal{O} -čísla. Abychom zjistili, které geometrické tvary lze konstruovat pomocí origami, potřebujeme najít všechny zbylé operace, pomocí nichž můžeme konstruovat \mathcal{O} -čísla.

Definice 3.5. Pole $\mathbb{F}_{\sqrt{1+a^2}}$ je nejmenší podpole množiny komplexních čísel uzavřené na operaci $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$.

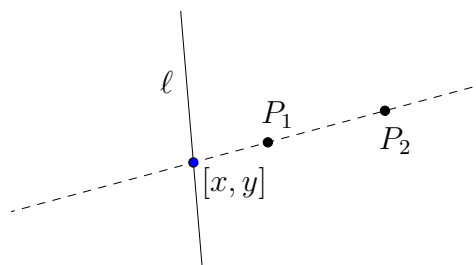
Podle věty 3.2 víme, že $\mathbb{F}_{\sqrt{1+a^2}} \subset \mathbb{F}_{\mathcal{O}}$. V následující větě si ukážeme, že platí dokonce $\mathbb{F}_{\sqrt{1+a^2}} = \mathbb{F}_{\mathcal{O}}$. To znamená, že množina \mathcal{O} -čísel je pole, které je uzavřené na operaci $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$.

Věta 3.3. Platí $\mathbb{F}_{\sqrt{1+a^2}} = \mathbb{F}_{\mathcal{O}}$.

Důkaz. Jelikož platí $\mathbb{F}_{\sqrt{1+a^2}} \subset \mathbb{F}_{\mathcal{O}}$, zbývá dokázat, že $\mathbb{F}_{\mathcal{O}} \subset \mathbb{F}_{\sqrt{1+a^2}}$. Musíme tedy ukázat, že libovolné \mathcal{O} -číslo lze vyjádřit pomocí operací „+“ a „·“ a operace $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$. Existují pouze 4 způsoby, jak pomocí axiomů základních konstrukcí origami (viz definice 3.1) sestrojít nový origami bod pomocí již sestrojených bodů a přímek.

- a) Sestrojením přímky procházejí body P_1 a P_2 , která protne danou přímku ℓ v bodě (x, y) .
- b) Sestrojením osy úsečky dané body P_1 a P_2 , jež protne zadanou přímku ℓ v bodě (x, y) .
- c) Sestrojením přímky ℓ_3 jako obrazu přímky ℓ_2 v osově souměrnosti podle přímky ℓ_1 , který protne danou přímku ℓ v bodě (x, y) .
- d) Sestrojením osy o daného úhlu, jejímž průsečíkem se zadanou přímkou ℓ je bod (x, y) .

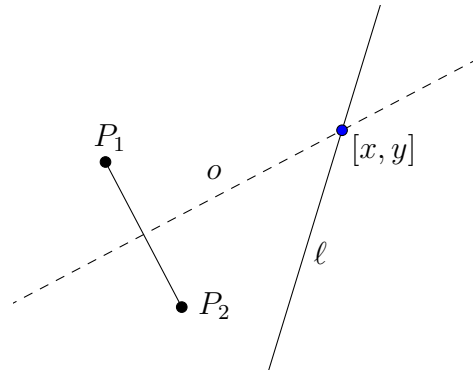
Abychom ukázali, že způsob a) je sestrojitelný pomocí operací „+“, „·“ a $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$, budeme předpokládat, že bod P_1 má souřadnice $[x_1, y_1]$. Vzhledem k tomu, že množina \mathcal{O} -čísels je uzavřená na sčítání, můžeme umístit počátek soustavy souřadnic do bodu P_1 . Do původního stavu se můžeme vrátit přičtením vektoru (x_1, y_1) . Dále si označme souřadnice bodu P_2 po tomto posunutí jako $[x_2, y_2]$. Protože množina \mathcal{O} -čísels je uzavřená na násobení a na operaci $\sqrt{1+a^2}$, můžeme předpokládat, že bod P_2 leží na jednotkové kružnici se středem v bodě P_1 . Zpět do předchozího stavu se můžeme vrátit vynásobením číslem $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |x_2| \sqrt{1 + \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^2}$. Označme si nyní souřadnice bodu P_2 jako $[x'_2, y'_2]$. Nakonec můžeme pomocí rotace umístit bod P_2 do bodu $[1, 0]$. Zpět do předchozího stavu se pak dostaneme pomocí rotace, pro níž platí $x' = x'_2x + y'_2y$ a $y' = -y'_2x + x'_2y$. Po těchto úpravách má přímka procházející body P_1 a P_2 rovnici $y = 0$. S danou přímkou ℓ o rovnici $ax + by + c = 0$ má pak tato přímka průsečík o souřadnicích $(-\frac{c}{a}, 0)$. Tento bod umíme sestrojit pomocí operace „·“. Následně s využitím výše uvedené rotace, vynásobením číslem $|x_2| \sqrt{1 + \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^2}$ a přičtením vektoru (x_1, y_1) můžeme sestrojit hledaný bod.



Obrázek 3.6: Důkaz věty 3.3 a)

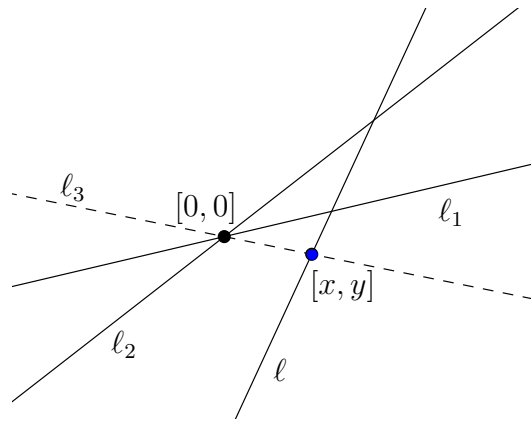
Pro způsob b) postupujeme obdobným způsobem. Ze stejných důvodů jako při důkazu způsobu a) můžeme předpokládat, že bod P_1 je v počátku soustavy souřadnic a bod P_2 má souřadnice $[1, 0]$. Osa o úsečky P_1P_2 má tedy rovnici ve tvaru $x = \frac{1}{2}$. Průsečík této osy s přímkou ℓ o rovnici $ax + by + c = 0$ má tedy souřadnice $[\frac{1}{2}, -\frac{2c+a}{2b}]$. Tento bod umíme sestrojit pomocí operací „+“ a „·“. Hledaný bod pak již získáme užitím výše uvedené rotace, vynásobením a posunutím.

Při důkazu pro způsob c) zvolíme posunutí, které přiřadí průsečíku P přímek ℓ_1 a ℓ_2 bod o souřadnicích $[0, 0]$. Dále použijeme rotaci tak, aby přímka ℓ_1 měla rovnici $y = 0$. Přímka ℓ_2 má tedy rovnici ve tvaru $y = ax$ a přímka ℓ_3 tudíž rovnici ve tvaru $y = -ax$. Přímku ℓ o rovnici $dx + ey + f = 0$ pak přímka ℓ_3 protíná v bodě o souřadnicích



Obrázek 3.7: Důkaz věty 3.3 b)

$[\frac{f}{ae-d}, \frac{af}{d-ac}]$. Tento bod můžeme sestrojít pomocí operací „+“ a „·“ a hledaný bod pak použitím vhodné rotace a posunutí.



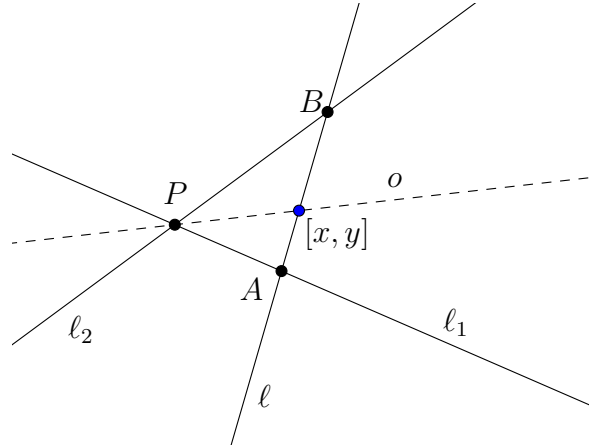
Obrázek 3.8: Důkaz věty 3.3 c)

Nakonec pro důkaz způsobu d) označíme přímky, na nichž leží ramena daného úhlu, jako přímky l_1 a l_2 , a úhel který tyto přímky svírají jako úhel φ . Vhodným posunutím můžeme umístit jejich průsečík P do počátku soustavy souřadnic. Dále si označme průsečík zadané přímky l a přímky l_1 jako bod A . Stejně jako při důkazu způsobu a) můžeme zvolit vynásobení vhodným číslem a následně rotaci tak, aby měl bod A souřadnice $[1, 0]$. Nyní označme průsečík přímek l a l_2 jako bod B o souřadnicích $[b_1, b_2]$. Pro úhel φ platí $\cot \varphi = \frac{b_1}{b_2}$ a $\sin \varphi = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sqrt{(1 - \cos x)^2}}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \cot x = \\ &= \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} = \sqrt{1 + \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2} - \frac{b_1}{b_2}. \end{aligned}$$

Výraz $\sqrt{1 + \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2} - \frac{b_1}{b_2}$ označíme jako výraz k . Osa o úhlu φ má tedy rovnici $y = kx$, přičemž číslo k lze sestrojít pomocí operací „+“, „·“ a $a \mapsto \sqrt{1 + a^2}$. Rovnici přímky

ℓ , jež prochází body A a B , můžeme psát ve tvaru $b_2x - (b_1 - 1)y - b_2 = 0$. Průsečík osy o a přímky ℓ má tedy souřadnice $\left[\frac{b_2}{b_2 - b_1k + k}, \frac{b_2k}{b_2 - b_1k + k} \right]$. Tento bod můžeme sestrojít pomocí operací „+“, „·“ a $a \mapsto \sqrt{1 + a^2}$ a následně pomocí dané rotace, vynásobením vhodným číslem a přičtením příslušného vektoru získáme hledaný bod.



Obrázek 3.9: Důkaz věty 3.3 d)

□

3.3 Konstrukce sestrojitelné pomocí základních konstrukcí origami

V této části kapitoly bude naším cílem ukázat, že základní konstrukce origami nám ještě neposkytují žádnou zásadní výhodu oproti eukleidovským konstrukcím a že k získání takové výhody je třeba konstrukce origami ještě rozšířit. K důkazu první věty této části třetí kapitoly budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 3.4. Platí

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x - a_i - b_j) = \det(xI - A - B) \quad (3.1)$$

a

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x - a_i b_j) = \det(xI - AB), \quad (3.2)$$

kde A a B jsou matice typu $mn \times mn$.

V následující větě budeme toto lemma potřebovat během důkazu, přičemž a_i a b_j budou reprezentovat čísla. Pro důkaz lemmatu je však vhodné uvažovat obecnější případ, kdy a_i a b_j budou nezávislé proměnné.

Důkaz. Označme jisté polynomy

$$P_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k s_k(a_1, \dots, a_n) x^{n-k}$$

a

$$P_B(x) = \prod_{j=1}^m (x - b_j) = \sum_{l=0}^m (-1)^l s_l(b_1, \dots, b_m) x^{m-l},$$

kde s_i jsou symetrické polynomy. Dále označme vektor

$$V_{r,s} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_r \\ a_r^2 \\ \vdots \\ a_r^{n-1} \\ b_s \\ a_r b_s \\ \vdots \\ a_r^{n-1} b_s \\ \vdots \\ b_s^{m-1} \\ a_r b_s^{m-1} \\ \vdots \\ a_r^{n-1} b_s^{m-1} \end{pmatrix}$$

a matici \bar{A} typu $n \times n$ ve tvaru

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ (-1)^{n+1} s_n(a_1, \dots, a_n) & (-1)^n s_{n-1}(a_1, \dots, a_n) & \dots & \dots & s_1(a_1, \dots, a_n) \end{pmatrix}.$$

Pomocí matice \bar{A} můžeme zavést matici A typu $mn \times mn$ ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{A} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Dosadíme-li do polynomu $P_A(x)$ číslo a_r , je zřejmé, že

$$P_A(a_r) = \prod_{i=1}^n (a_r - a_i) = 0.$$

Platí tedy

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k s_k(a_1, \dots, a_n) a_r^{n-k} = \sum_{k=1}^n (-1)^k s_k(a_1, \dots, a_n) a_r^{n-k} + a_r^n = 0,$$

a proto

$$a_r^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} s_k(a_1, \dots, a_n) a_r^{n-k}.$$

Analogickým způsobem můžeme zavést matici B a ukázat, že platí

$$b_s^m = \sum_{l=1}^m (-1)^{l+1} s_l(b_1, \dots, b_m) b_s^{m-l}.$$

Lze snadno ukázat, že platí

$$AV_{r,s} = a_r V_{r,s}$$

a

$$BV_{r,s} = b_s V_{r,s}.$$

S využitím těchto rovností můžeme vyjádřit

$$(A + B)V_{r,s} = AV_{r,s} + BV_{r,s} = a_r V_{r,s} + b_s V_{r,s} = (a_r + b_s)V_{r,s}.$$

Výraz $a_r + b_s$ je tedy vlastním číslem matice $A + B$. Protože jsou a_i a b_j nezávislé proměnné, má polynom $\det(xI - A - B)$ stupně mn pro výpočet vlastních čísel matice $A + B$ mn různých řešení ve tvaru $a_r + b_s$, stejně jako polynom $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x - a_i - b_j)$, jehož stupeň je taktéž mn . Protože mají navíc oba tyto polynomy vedoucí koeficient roven 1, musí platit

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x - a_i - b_j) = \det(xI - A - B),$$

čímž je dokázán vztah (3.1).

Dále můžeme vyjádřit

$$ABV_{r,s} = Ab_s V_{r,s} = b_s AV_{r,s} = a_r b_s V_{r,s}.$$

V tomto případě je mn různých výrazů ve tvaru $a_r b_s$ vlastními hodnotami matice AB , a tedy kořeny polynomu $\det(xI - AB)$ stupně mn . Ze stejných důvodů jako v předchozím případě tedy platí

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x - a_i b_j) = \det(xI - AB),$$

čímž je dokázána i druhá část lemmatu. □

Nyní již můžeme formulovat větu, jež nám udá vztah mezi množinami \mathcal{O} -čísel a totálně reálných čísel.

Věta 3.5. Platí $\mathbb{F}_{\sqrt{1+a^2}} \subset \mathbb{F}_{TR}$.

Důkaz. Podle definic 3.5 a 2.11 je $\mathbb{F}_{\sqrt{1+a^2}}$ nejmenší podpole množiny komplexních čísel uzavřené na operaci $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$ a \mathbb{F}_{TR} množina algebraických čísel, pro něž jsou všechna čísla s nimi konjugovaná reálná. Abychom dokázali platnost této věty, stačí ukázat, že pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{F}_{TR}$ jsou i čísla $-a, a^{-1}, \sqrt{1+a^2}, a+b, a \cdot b$ totálně reálná. Označme $\{a_i\}_{i=1}^n$ čísla konjugovaná s číslem a a $\{b_i\}_{i=1}^m$ čísla konjugovaná s číslem b .

K důkazu, že číslo $-a$ je totálně reálné, využijeme polynom

$$q_{-a}(x) = \prod_{i=1}^n (x + a_i).$$

Naším cílem je ukázat, že všechny kořeny minimálního polynomu $p_{-a}(x)$ tohoto polynomu (tj. všechny kořeny minimálního polynomu, jehož kořeny jsou i čísla a_i) jsou reálné. Roznásobením polynomu $q_{-a}(x)$ dostáváme

$$q_{-a}(x) = \prod_{i=1}^n (x + a_i) = \sum_{j=0}^n s_j(a_1, \dots, a_n) x^{n-j},$$

kde $s_j(a_1, \dots, a_n)$ jsou elementární symetrické polynomy tvořené členy a_1, \dots, a_n . Protože číslo a je totálně reálné, je polynom $q(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ podle definic 2.8 a 2.11 polynom s racionálními koeficienty, přičemž tyto koeficienty jsou pro členy x^{n-j} ve tvaru $(-1)^j s_j(a_1, \dots, a_n)$, kde $s_j(a_1, \dots, a_n)$ jsou elementární symetrické polynomy tvořené členy a_1, \dots, a_n . Označme si $p(x)$ minimální polynom polynomu $q(x)$. Protože koeficienty polynomu $q(x)$ ve tvaru $(-1)^j s_j(a_1, \dots, a_n)$ jsou racionální, jsou i koeficienty polynomu $q_{-a}(x)$ ve tvaru $s_j(a_1, \dots, a_n)$ nutně racionální. Navíc je zřejmé, že číslo $-a$ je kořenem polynomu $q_{-a}(x)$, a proto polynom $p_{-a}(x)$ dělí $q_{-a}(x)$. To znamená, že všechny kořeny polynomu $p_{-a}(x)$ jsou zároveň kořeny polynomu $q_{-a}(x)$. Jelikož je číslo a totálně reálné, všechna čísla a_i s ním konjugovaná jsou reálná. Proto i všechna čísla $-a_i$, tedy kořeny polynomu $q_{-a}(x)$ jsou reálná čísla, a tedy i všechny kořeny polynomu $p_{-a}(x)$ jsou reálná čísla. To znamená, že číslo $-a$ je totálně reálné.

Důkaz toho, že číslo a^{-1} je totálně reálné, provedeme stejným způsobem, přičemž místo polynomu $q_{-a}(x)$ použijeme polynom

$$q_{a^{-1}}(x) = \left(\prod_{i=1}^n (x - a_i^{-1}) \right) \left(\prod_{i=1}^n a_i \right).$$

Označme $p_{a^{-1}}(x)$ minimální polynom polynomu $q_{a^{-1}}(x)$. Víme, že čísla a_i jsou reálná a navíc víme, že jsou kořeny ireducibilního polynomu a tudíž jsou nenulová (kdyby kořenem polynomu bylo číslo 0, byl by takový polynomu dělitelný polynomem $h(x) = x$, a tudíž by byl reducibilní). Kořeny polynomu $q_{a^{-1}}(x)$, tudíž i polynomu $p_{a^{-1}}(x)$, ve tvaru a_i^{-1} jsou tedy jistě reálné. Roznásobením polynomu $q_{a^{-1}}(x)$ dostáváme

$$\begin{aligned} q_{a^{-1}}(x) &= \left(\prod_{i=1}^n (x - a_i^{-1}) \right) \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) = \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j s_j(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}) x^{n-j} \right) \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) = \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j s_{n-j}(a_1, \dots, a_n) x^{n-j}. \end{aligned}$$

Stejně jako v předchozím případě jsou tedy koeficienty polynomu $q_{a^{-1}}(x)$ racionální, číslo a^{-1} je kořenem polynomu $p_{a^{-1}}(x)$ a všechny kořeny polynomu $p_{a^{-1}}(x)$ jsou reálná čísla. Číslo a^{-1} je tudíž totálně reálné.

K důkazu, že jsou totálně reálná čísla $a + b$ a $a \cdot b$, využijeme polynomy

$$q_{a+b}(x) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x - a_i - b_j)$$

a

$$q_{ab}(x) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x - a_i b_j).$$

Podle vztahů (3.1) a (3.2) lemmatu 3.4 lze oba tyto vztahy vyjádřit pomocí matic A a B , jejich koeficienty jsou buď čísla 0 nebo 1, nebo elementární symetrické polynomy tvořené navzájem konjugovanými čísly. Ve všech případech jde o čísla racionální. Polynomy $q_{a+b}(x)$ a $q_{ab}(x)$ jsou tedy polynomy s racionálními koeficienty. Protože jsou čísla a_i a b_j reálná, jsou i kořeny těchto polynomů reálné. Minimální polynomy $p_{a+b}(x), p_{ab}(x)$ těchto polynomů jsou tedy polynomy s racionálními koeficienty, jejich kořeny jsou reálná čísla a jedním z kořenů je číslo $a + b$, respektive $a \cdot b$. Čísla $a + b$ a $a \cdot b$ jsou tedy totálně reálná.

Nakonec je třeba ukázat, že i číslo $\sqrt{1+a^2}$ je totálně reálné. Uvažujme polynom

$$q_{\sqrt{1+a^2}}(x) = \prod_{i=1}^n (x^2 - 1 - a_i^2).$$

Tento polynom je symetrický vzhledem k a_i . Podle věty 2.15 je možné jej vyjádřit pomocí elementárních symetrických polynomů v a_i . Jeho minimální polynom $p_{\sqrt{1+a^2}}(x)$ má tedy racionální koeficienty. Číslo $\sqrt{1+a^2}$ je jeho kořenem a protože jsou čísla a_i reálná, jsou čísla $1 + a_i^2$ kladná, a tudíž jsou všechny jeho kořeny ve tvaru $\sqrt{1+a_i^2}$ reálné. Číslo $\sqrt{1+a^2}$ je tedy totálně reálné. \square

Nyní již můžeme vyslovit větu, jež nám udává vztah mezi základními origami konstrukcemi a eukleidovskými konstrukcemi.

Věta 3.6. Platí $\mathbb{F}_{\sqrt{1+a^2}} = \mathbb{F}_{TR} \cap \mathbb{F}_{\sqrt{x}}$.

Důkaz. Důkaz věty je uveden v [13]. \square

Poznámka 3.3. Větu je možné interpretovat tak, že každá konstrukce, jíž lze sestavit pomocí základních konstrukcí origami je eukleidovskými sestavitelná. Obrácená implikace neplatí.

Jak je tedy vidět, základní konstrukce origami nám nepřináší oproti eukleidovským konstrukcím žádné nové možnosti. Snadno si můžeme například ukázat, že pomocí základních konstrukcí origami nelze provést duplikaci krychle. Kdyby to bylo možné, muselo by platit $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{F}_{\sqrt{1+a^2}}$. Toto číslo je kořenem polynomu $x^3 - 2$. Dalšími kořeny

tohoto polynomu (a tedy čísla s tímto číslem konjugovanými) jsou komplexní čísla $\sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Číslo $\sqrt[3]{2}$ tedy není totálně reálné a tudíž ani sestrojitelné pomocí základních konstrukcí origami.

Kapitola 4

Axiomatické zavedení origami

Podle poslední věty předchozí kapitoly by se zdálo, že origami nám nepřináší žádné nové možnosti oproti konstruování pomocí pravítka a kružítka, nicméně opak je pravdou. Uvedené základní konstrukce totiž nepopisují všechny možnosti konstruování pomocí origami. Ukazuje se, že konstrukce origami lze rozšířit ještě o další axiomy, a právě tyto axiomy nám přinesou zásadní výhodu ve srovnání s konstruováním pomocí pravítka a kružítka. Cílem čtvrté kapitoly je zavést tyto axiomy a demonstrovat jejich přínos na konkrétních příkladech.

4.1 Huzitovy axiomy origami

Tato část je zpracována hlavně dle [6, 13].

Axiomy origami nesou název *Huzitovy* po matematikovi, který je formuloval. Jejich tvar je následující.

HO_1 Pro dané dva body P_1, P_2 můžeme složit přehyb (přímku) protínající oba tyto body.

HO_2 Pro dané dva body P_1, P_2 lze přeložením zobrazit bod P_1 na bod P_2 .

HO_3 Jsou-li dány dvě přímky ℓ_1, ℓ_2 , můžeme přeložením zobrazit přímku ℓ_1 na přímku ℓ_2 .

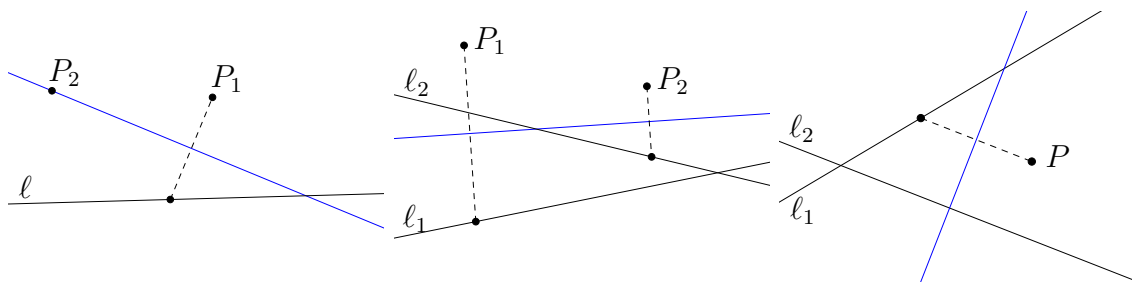
HO_4 Pro daný bod P a přímku ℓ lze složit přehyb kolmý na přímku ℓ a protínající bod P .

HO_5 Jsou-li dány dva body P_1, P_2 a přímka ℓ , můžeme složit přehyb procházející bodem P_2 , který zobrazí bod P_1 na přímku ℓ .

HO_6 Pro dané dva body P_1, P_2 a dané dvě přímky ℓ_1, ℓ_2 můžeme složit přehyb, který zobrazí bod P_1 na přímku ℓ_1 a bod P_2 na přímku ℓ_2 .

HO_7 Je-li dán bod P a dvě přímky ℓ_1, ℓ_2 , lze sestrojít přehyb kolmý na přímku ℓ_2 , který zobrazí bod P na přímku ℓ_1 .

Poslední tři Huzitovy axiomy jsou znázorněny na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Axiomatické zavedení origami (axiomy HO_5 - HO_7)

Poznámka 4.1. Axiom HO_2 tohoto zavedení origami popisuje konstrukci osy úsečky P_1P_2 . Axiom HO_3 popisuje konstrukci osy úhlu, který svírají přímky l_1 a l_2 , pokud jsou tyto přímky různoběžné. V případě, že jsou tyto přímky rovnoběžné, popisuje nám bod HO_3 konstrukci osy rovinného pásu daného těmito přímkami. Hlavní síla origami však spočívá zejména v axiomu HO_6 , který, jak si ukážeme, nám dovolí jednoduchým způsobem sestavit konstrukce, které není možné sestavit pomocí základních konstrukcí origami viz definice 3.1 a dokonce ani pomocí pravítka a kružítka. Tento šestý axiom nese jméno po své objevitelce „Beloch fold“.

4.2 Příklady využití Huzitových axiomů

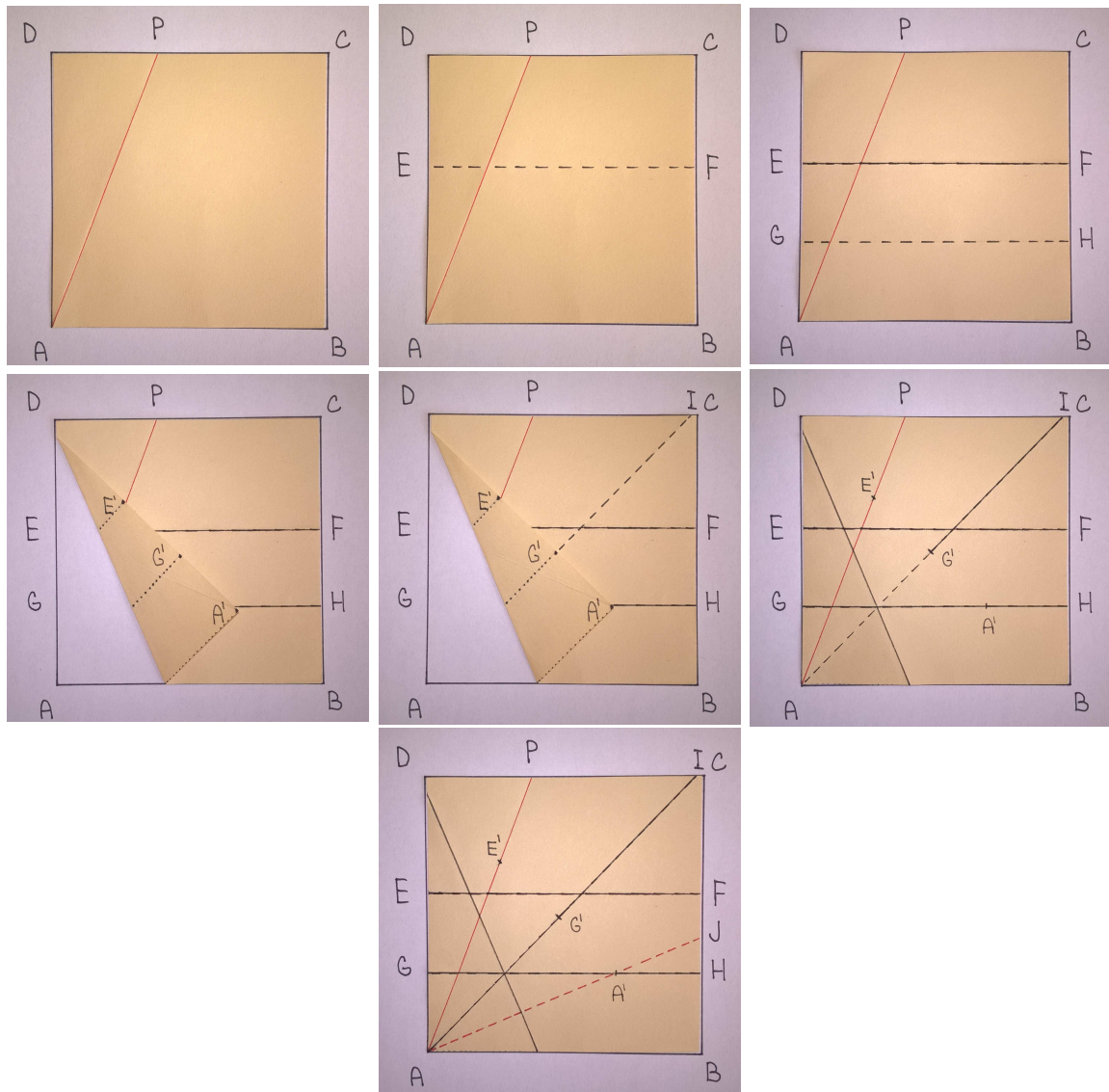
Druhá část této kapitoly je zpracována s využitím [6, 13, 17, 18]

Abychom demonstrovali sílu axiomu HO_6 , ukážeme nyní několik příkladů jeho využití. Nejprve se budeme zabývat trisekcí úhlu. Trisekce úhlu je jedním ze tří klasických problémů starověku. Jak jsme již uvedli v úvodní kapitole, nelze ji provést s využitím kružítka a pravítka. Existuje však několik algoritmů, jak provést trisekci úhlu pomocí origami. My si ukážeme dva z nich. Autorem prvního z nich je japonský matematik Tsune Abe.

Příklad 4.1. (*Abeho algoritmus pro trisekci úhlu*)

K provedení algoritmu potřebujeme papír ve tvaru čtverce, vrcholy čtverce si označíme A, B, C, D (viz obr. 4.2).

- 1) Sestrojíme úhel $\sphericalangle BAP$, který budeme chtít rozdělit na 3 shodné úhly.
- 2) Přeložením sestrojíme přehyb EF rovnoběžný s úsečkou AB .
- 3) Přeložením zobrazíme bod A na bod E , čímž získáme úsečku GH .
- 4) Složíme přehyb, kterým zobrazíme bod A na úsečku GH a bod E na úsečku AP . Tento přehyb necháme složený a přenesené body označíme A', E' . Bod, na který se nám tímto přehybem zobrazí bod G označíme G' .
- 5) Přeložením zobrazíme bod E' na bod A' , čímž získáme úsečku $G'I$.
- 6) Rozložíme papír do původního čtverce a úsečku $G'I$ prodloužíme na úsečku AI .
- 7) Dokončíme trisekci úhlu sestavením úsečky AJ , kterou získáme přeložením úsečky AB na úsečku AI .

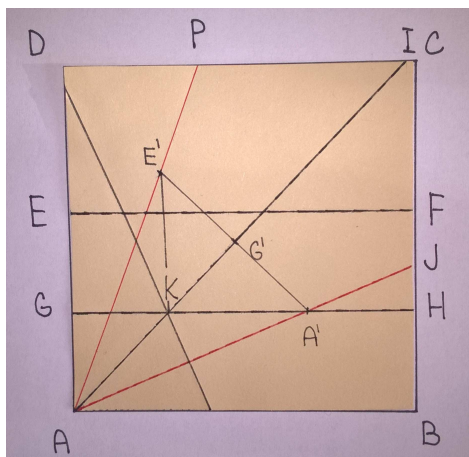


Obrázek 4.2: Abeh o trisekce úhlu (body 1 - 7)

Důkaz. Úsečka AJ je osou úhlu $\sphericalangle BAI$ viz bod 7), a proto $|\sphericalangle BAJ| = |\sphericalangle JAI|$. Podle bodu 3) platí $|AG| = |EG|$, a proto platí i $|A'G'| = |E'G'|$. Úsečka $G'I$ je tedy částí osy úsečky $A'E'$, sestrojené v bodě 5). Průnik této osy s úsečkou GH si označme jako bod K .

Vzhledem k tomu, že bod K leží na ose úsečky $A'E'$, platí $|KA'| = |KE'|$ a také $|\sphericalangle A'KG'| = |\sphericalangle E'KG'|$. Velikost úhlu $\sphericalangle AKA'$ můžeme vyjádřit jako $|\sphericalangle AKA'| = \pi - |\sphericalangle A'KG'|$ a velikost úhlu $\sphericalangle AKE'$ jako $|\sphericalangle AKE'| = \pi - |\sphericalangle E'KG'|$, a proto platí $\sphericalangle AKA' \cong \sphericalangle AKE'$. Úsečka AK je stranou trojúhelníků $\triangle AKA'$ a $\triangle AKE'$. Můžeme tedy říct, že tyto trojúhelníky jsou shodné podle věty *sus*.

Z této shodnosti vyplývá skutečnost, že $|AA'| = |AE'|$, a proto bod A jistě leží na ose úsečky $A'E'$, a můžeme tedy říct, že bod 6) je zadán korektně. Ze stejné shodnosti trojúhelníků navíc plyne shodnost úhlů $\sphericalangle JAI \cong \sphericalangle IAP$. Máme tedy $\sphericalangle JAI \cong \sphericalangle IAP \cong \sphericalangle BAJ$, a tedy $|\sphericalangle BAJ| = \frac{1}{3}|\sphericalangle BAP|$. \square



Obrázek 4.3: Důkaz Abeho algoritmu

Poznámka 4.2. Výhodou výše uvedeného algoritmu je jeho jednoduchost. Naopak jeho nevýhodou je nutnost použití čtvercového papíru a skutečnost, že jej lze použít pouze na trisekci ostrého či pravého úhlu.

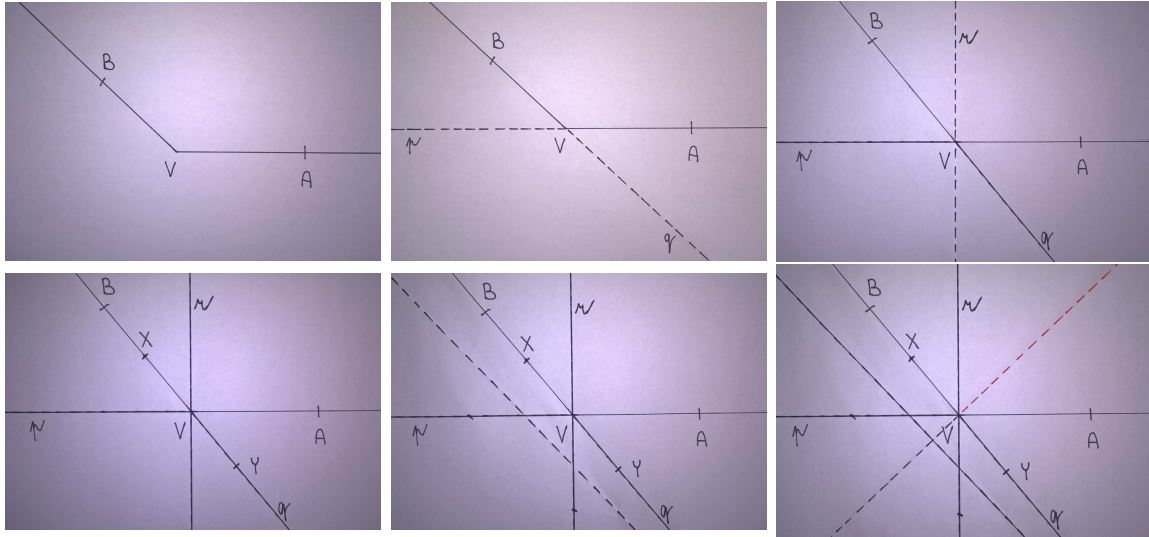
Autorem druhého algoritmu, který si ukážeme, je francouzský matematik Jacques Justin. Pomocí něj budeme moci provést trisekci tupého úhlu (viz obr. 4.4).

Příklad 4.2. (*Justinův algoritmus pro trisekci tupého úhlu*)

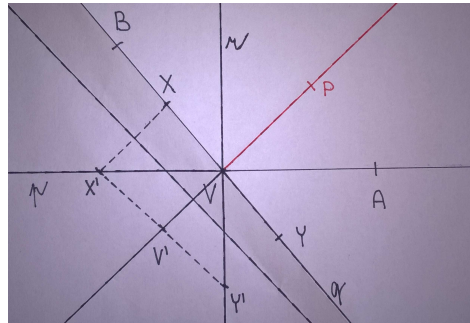
- 1) Sestrojíme tupý úhel $\sphericalangle AVB$, který budeme chtít rozdělit na tři shodné úhly.
- 2) Přeložením sestrojíme přímku p , na níž leží rameno VA a přímku q , na níž leží rameno VB .
- 3) Přeložením sestrojíme přímku r kolmou na přímku p a procházející bodem V .
- 4) Zvolíme bod X na polopřímce VB a bod Y na polopřímce opačné k této polopřímce tak, že $|XV| = |YV|$.
- 5) Přeložením přeneseme bod X na polopřímku opačnou k polopřímce VA a bod Y na přímku r . Takto vzniklou přímku pojmenujeme s .
- 6) Přeložením sestrojíme přímku t kolmou na přímku s a procházející bodem V . Na této přímce zvolíme uvnitř úhlu $\sphericalangle AVB$ bod P . Platí $|\sphericalangle AVP| = \frac{1}{3}|\sphericalangle AVB|$.

Důkaz. Označme si bod X' , na který se zobrazí v bodě 5) bod X . Dále si označme bod V' , na který se v témže bodě zobrazí bod V , a bod Y' , na který se ve stejném kroku přenesou bod Y . Podle bodu 5) je zřejmé, že jsou úsečky XX' , VV' a YY' kolmé na přímku s , a tedy jsou všechny rovnoběžné. Z téhož bodu také plyne $|XV| = |X'V'|$ (osová souměrnost je shodné zobrazení). Čtyřúhelník $XVV'V'$ je proto rovnoramenným lichoběžníkem a platí $|\sphericalangle X'V'V| = |\sphericalangle V'VX|$.

Úhel $\sphericalangle X'VA$ je přímý, a proto $|\sphericalangle X'vA| = \pi - |\sphericalangle AVB|$. Úhly $\sphericalangle AVP$ a $\sphericalangle V'VX'$ jsou vrcholové, a tedy mají stejnou velikost. Můžeme tedy psát $|\sphericalangle V'VX| = |\sphericalangle AVP| + \pi - |\sphericalangle AVB|$.



Obrázek 4.4: Justinova trisekce úhlu (body 1 - 6)



Obrázek 4.5: Důkaz Justinova algoritmu

Trojúhelník $X'VY'$ je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu V , viz 3). Střed kružnice opsané tomuto trojúhelníku leží na středu jeho přepony $X'Y'$, kterým je bod V' , viz body 4) a 5). Protože body V a X' leží na téže kružnici se středem v bodě V' , platí $|X'V'| = |VV'|$. Trojúhelník $X'V'V$ je tedy rovnoramenný a platí $|\sphericalangle VX'V'| = |V'VX'| = |\sphericalangle AVP|$. Proto můžeme vyjádřit $|\sphericalangle X'V'V| = \pi - 2|\sphericalangle AVP|$.

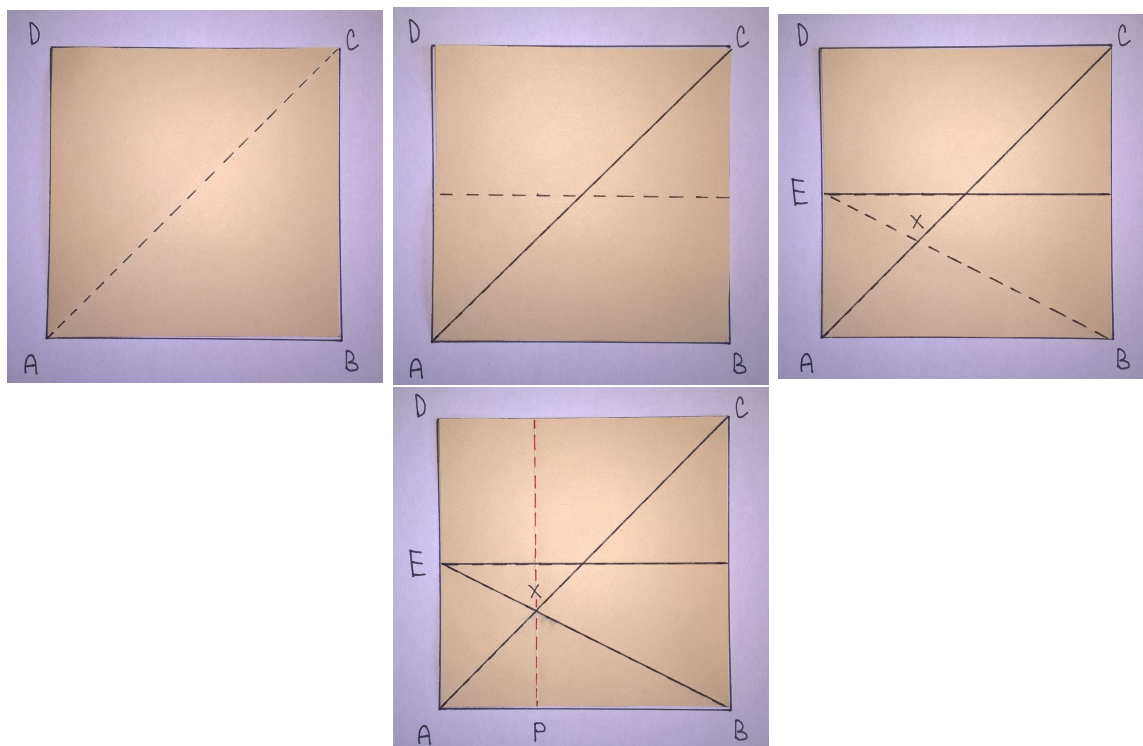
Můžeme tedy porovnat $|\sphericalangle AVP| + \pi - |\sphericalangle AVB| = \pi - 2|\sphericalangle AVP|$ a po jednoduché úpravě dostáváme $|\sphericalangle AVP| = \frac{1}{3}|\sphericalangle AVB|$. \square

Poznámka 4.3. Při Justinovu algoritmu nezáleží na tvaru použitého papíru. S využitím obou popsaných algoritmů už můžeme snadno řešit trisekci libovolného úhlu. Pro trisekci přímého úhlu můžeme sestrojít jeho osu, čímž vzniknou dva pravé úhly. Podle Abeho algoritmu umíme sestrojít úhel o velikosti $\frac{2}{3}$ jednoho z nich, čímž získáme úhel o velikosti $\frac{1}{3}$ velikosti přímého úhlu.

Stejným způsobem můžeme postupovat u nekonvexního úhlu. Sestrojíme-li jeho osu, získáme dva shodné tupé úhly. Sestrojením úhlu o velikosti $\frac{2}{3}$ jednoho z nich pak dokončíme trisekci původního úhlu. Nakonec plný úhel můžeme rozdělit libovolnou přímkou procházející jeho vrcholem na dva přímé úhly, u nichž již umíme sestrojít

jejich třetinu. Sestrojíme-li třetinu jednoho z nich a zobrazíme-li jedno rameno takto vzniklého úhlu v osové souměrnosti podle druhého ramena téhož úhlu, získáme úhel, jehož velikost bude $\frac{1}{3}$ plného úhlu.

Posledním příkladem, který si ukážeme, bude řešení dalšího z klasických problémů origami, kterým je duplikace krychle. Abychom mohli provést duplikaci krychle o jednotkovém objemu, je třeba umět sestrojít úsečku o délce $\sqrt[3]{2}$. Pro sestrojení takové úsečky budeme potřebovat čtvercový papír rozdělený na 3 shodné obdélníky. Dříve než si ukážeme samotnou duplikaci krychle, ukážeme si, jak si takový papír snadno připravit.

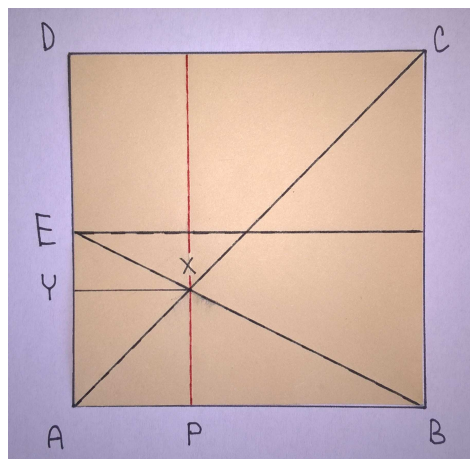


Obrázek 4.6: Rozdělení strany čtverce na třetiny (body 1 - 4)

Příklad 4.3. (Rozdělení strany čtverce na třetiny)

- 1) Přeložením sestrojíme úhlopříčku AC čtverce $ABCD$.
- 2) Přeložením zobrazíme bod A na bod D , čímž získáme osu úsečky AD . Průsečík této osy s úsečkou AD označíme E .
- 3) Složíme přehyb procházející body B a E . Průsečík této přímky s úhlopříčkou AC nazveme bodem X .
- 4) Přeložením sestrojíme kolmici na úsečku AB procházející bodem X . Její průsečík s úsečkou AB nazveme bodem P . Platí $|AP| = \frac{1}{3}|AB|$.

Důkaz. Označme si délku a strany čtverce $ABCD$. Dále označme x vzdálenost $|AP|$. Sestrojme kolmici na úsečku AD procházející bodem X a bod na jejím průsečíku s úsečkou AD nazvěme Y . Čtyřúhelník $APXY$ je obrazem čtverce $ABCD$ ve stejnolehlosti



Obrázek 4.7: Důkaz rozdělení strany čtverce na třetiny

se středem v bodě A a koeficientem podobnosti $\frac{x}{a}$ a jde tedy také o čtverec. Platí tak $|AP| = |XP| = |XY| = x$. Úhel $\sphericalangle BAD$ je shodný s úhlem $\sphericalangle BPX$ (oba jsou pravé viz 1) a 4)). Vzhledem k tomu, že úsečky AB a XY jsou rovnoběžné, platí $|\sphericalangle PBX| = |\sphericalangle YXE|$ (souhlasné úhly). Můžeme tedy říct, že $\triangle PBX \sim \triangle YXE$. Z podobnosti těchto trojúhelníků vyplývá rovnost

$$\frac{|EY|}{|XY|} = \frac{|XP|}{|PB|}.$$

Dosadíme-li $|EY| = \frac{a}{2} - x$, $|XY| = x$, $|XP| = x$ a $|PB| = a - x$, dostaneme

$$\frac{\frac{a}{2} - x}{x} = \frac{x}{a - x}.$$

Protože $x \neq 0$ a $a \neq x$, můžeme obě strany této rovnosti vynásobit číslem $x \cdot (a - x)$ a po úpravě dostaneme

$$\frac{3}{2}ax = \frac{a^2}{2}.$$

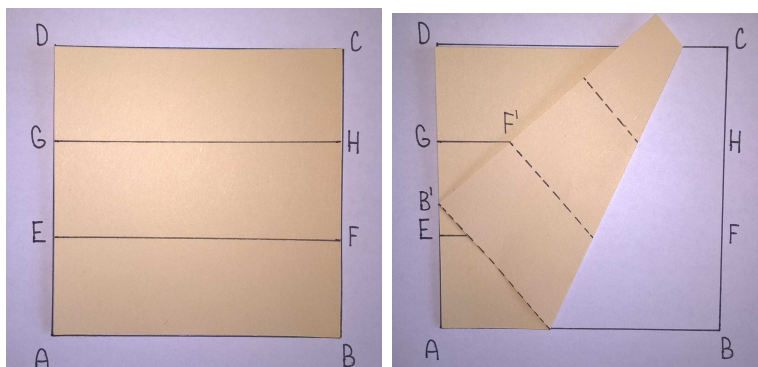
Vzhledem k tomu, že $a \neq 0$, můžeme obě strany rovnice číslem a vydělit a po úpravách dospějeme ke vztahu

$$x = \frac{a}{3}.$$

□

Poznámka 4.4. Naším cílem je rozdělit čtverec na tři shodné obdélníky. Jeden takový nám ze čtverce oddělí přímka sestavená v bodě 4). Přehyb, který nám přenesse bod B na bod P , rozdělí zbylou část čtverce, čímž získáme zbylé dva potřebné obdélníky.

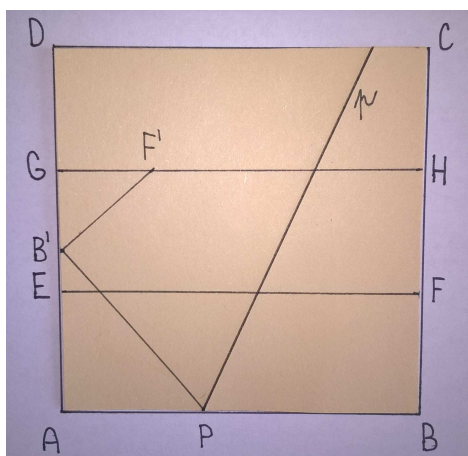
Nyní již můžeme přistoupit k samotné duplikaci krychle. Postupů jak duplikovat krychli je několik. My si ukážeme ten nejznámější, jehož autorem je Peter Messer. Jeho algoritmus nám umožní rozdělit stranu čtverce na dvě části v poměru $\sqrt[3]{2} : 1$, čímž ukážeme sestrojitelnost čísla $\sqrt[3]{2}$ pomocí origami.



Obrázek 4.8: Messerova duplikace krychle

Příklad 4.4. (*Messerův algoritmus duplikace krychle*)

Označme si body čtverce rozděleného na tři shodné obdélníky A, B, C, D, E, F, G, H viz obr. 4.8. Složíme přehyb p , kterým zobrazíme bod B na úsečku AD a bod F na úsečku GH . Bod, na který se zobrazí při tomto kroku bod B , nazvěme bodem B' . Platí $|DB'| : |AB'| = \sqrt[3]{2} : 1$.



Obrázek 4.9: Důkaz Messerovy duplikace krychle

Důkaz. Označme bod, na který se nám zobrazí při konstruování přehybu p bod F , jako bod F' . Dále si označme průsečík P přímky p s úsečkou AB . Nakonec si označme vzdálenosti $|DB'| = x$, $|AB'| = y$ a $|AP| = z$. Pak platí $|AD| = |AB| = x + y$. Protože bod B' je obrazem bodu B v osové souměrnosti podle přímky p , platí $|PB'| = |PB| = x + y - z$. Úsečka $B'F'$ je obrazem úsečky BF v téže osové souměrnosti. Navíc jsme použili papír rozdělený na tři shodné obdélníky, a víme tedy $|B'F'| = |BF| = \frac{x+y}{3}$. Dále platí $|GB'| = |DB'| - |DG| = x - \frac{x+y}{3} = \frac{2x-y}{3}$.

Úhly $\sphericalangle PAB'$ a $\sphericalangle B'GF'$ jsou pravé. Použitím Pythagorovy věty v trojúhelníku $\triangle APB'$ dostáváme $y^2 + z^2 = (x + y - z)^2$. Po umocnění výrazu na pravé straně této rovnosti a následných úpravách máme $2z(x + y) = x^2 + 2xy$. Vzhledem k tomu, že x, y jsou vzdálenosti, a tedy kladná čísla, můžeme obě strany rovnosti vydělit výrazem $2(x + y)$

a tím získáme vyjádření

$$z = \frac{x^2 + 2xy}{2(x + y)}.$$

Označíme-li si $|\sphericalangle APB'| = \alpha$, pak ze součtu vnitřních úhlů trojúhelníku $\triangle APB'$ plyne $|\sphericalangle AB'P| = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Z osové souměrnosti podle přímky p plyne $|\sphericalangle PBF| = |\sphericalangle PB'F'| = \frac{\pi}{2}$. Protože úhel $\sphericalangle AB'D$ je přímý, platí

$$|\sphericalangle GB'F'| = |\sphericalangle AB'D| - |\sphericalangle AB'P| - |\sphericalangle PB'F'| = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{\pi}{2} = \alpha.$$

Můžeme tedy říct, že $\triangle APB' \sim \triangle GB'F'$.

S využitím této podobnosti trojúhelníků můžeme psát

$$\frac{|GB'|}{|B'F'|} = \frac{|AP|}{|PB'|},$$

a po dosazení

$$\frac{\frac{2x-y}{3}}{\frac{x+y}{3}} = \frac{\frac{x^2+2xy}{2(x+y)}}{x + y - \frac{x^2+2xy}{2(x+y)}}.$$

Protože $(x + y)$ je jistě kladné číslo, můžeme tuto rovnost upravit na tvar

$$\frac{2x - y}{x + y} = \frac{x^2 + 2xy}{x^2 + 2xy + 2y^2}.$$

Vzhledem k tomu, že výrazy v obou jmenovatelích jsou jistě kladné, můžeme obě strany rovnosti vynásobit oběma těmito jmenovateli. Po následných úpravách již dostaneme vztah

$$x^3 = 2y^3 \text{ a tedy } x = \sqrt[3]{2}y.$$

□

Kapitola 5

Počítačové origami

V této kapitole stručně nastíníme, jakým způsobem je možné využívat výpočetní techniku při práci s origami konstrukcemi a při automatickém dokazování.

5.1 Automatické dokazování

Tato část byla napsána s využitím zdrojů [14, 15, 16].

Jak jsme si ukázali ve čtvrté kapitole, origami nám přináší oproti eukleidovským konstrukcím nové možnosti. To s sebou nese také možnost formulování nových matematických vět. Dokazování takových vět „ručně“ bývá často velmi složité. Pro zrychlení důkazů v geometrii (a nejen v geometrii) lze použít výpočetní techniku a to k tzv. *automatickému dokazování*. Pro náročnost této teorie uvedeme pouze základní vlastnosti, které budeme potřebovat pro demonstraci na příkladech. Podrobně je tato teorie popsána v [16].

Abychom mohli provést důkaz daného tvrzení, je třeba daný geometrický problém nejprve správně matematicky popsat. K tomu potřebujeme zvolit soustavu souřadnou. Většinou volíme kartézskou soustavu souřadnou s počátkem umístěným tak, aby formulace daného problému byla co nejjednodušší. S využitím této soustavy souřadné pak již můžeme vyjádřit množinu předpokladů dokazovaného tvrzení $\{h_1 = 0, \dots, h_n = 0\}$ a závěr tvrzení $c = 0$, kde $h_1 = 0, \dots, h_n = 0, c$ jsou jisté polynomy. Naším cílem je pak dokázat tvrzení ve tvaru:

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = 0 \\ \vdots \\ h_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c = 0 \quad (5.1)$$

Lze ukázat, že tvrzení ve tvaru (5.1) je pravdivé, platí-li $c \in I = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$. Jinými slovy můžeme říci, že tvrzení je pravdivé, pokud lze jeho závěr vygenerovat pomocí jeho

předpokladů. K rozhodování, zda je tvrzení pravdivé, se tedy nabízí například využití Gröbnerových bází, jež jsme popsali v poslední části druhé kapitoly. Pro naše výpočty bude zásadní následující věta.

Věta 5.1. Tvrzení ve tvaru (5.1) je pravdivé právě tehdy, když redukovanou Gröbnerovou bází ideálu $\langle h_1, \dots, h_n, 1 - uc \rangle$ je množina $\{1\}$.

Důkaz. Důkaz věty je k dispozici v [16]. □

Poznámka 5.1. Písmenem u v předchozí větě značíme novou formální proměnnou. Jsou-li tedy polynomy h_1, \dots, h_n prvky okruhu $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_k]$, pak $\langle h_1, \dots, h_n, 1 - uc \rangle$ je podmnožinou okruhu $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_k, u]$. Podrobnosti lze nalézt v [16].

Pro důkaz daného tvrzení po formulaci příslušného problému budeme používat software MATHEMATICA, s jehož pomocí budeme moci jednoduše určit příslušnou redukovanou Gröbnerovu bází. Celý postup si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 5.1. Dokažte, že se těžnice v libovolném trojúhelníku protínají v jediném bodě.

Důkaz. Mějme trojúhelník $\triangle ABC$. Soustavu souřadnou si zavedeme tak, že vrcholy trojúhelníku budou mít souřadnice $A = [0, 0]$, $B = [2a, 0]$, $C = [2b, 2c]$. Dále si označíme body S_a, S_b, S_c jako středy stran (po řadě) BC, AC, AB trojúhelníku. Tyto středy mají souřadnice $S_a = [a + b, c]$, $S_b = [b, c]$, $S_c = [a, 0]$. Rovnice těžnic trojúhelníka $\triangle ABC$ mají tvar

$$\begin{aligned} t_a &: cx - (a + b)y = 0 \\ t_b &: cx + (2a - b)y - 2ac = 0 \\ t_c &: 2cx + (a - 2b)y - 2ac = 0 \end{aligned}$$

Dále uvažujme bod T o souřadnicích $T = [p, q]$. Aby ležel tento bod na těžnicích našeho trojúhelníka, musely by platit rovnosti

$$\begin{aligned} T \in t_a &: cp - (a + b)q = 0 \\ T \in t_b &: cp + (2a - b)q - 2ac = 0 \\ T \in t_c &: 2cp + (a - 2b)q - 2ac = 0 \end{aligned}$$

Naším cílem je ukázat, že se všechny tři těžnice protínají v jediném bodě. Předpokládejme tedy, že bod T je průsečíkem těžnic t_b a t_c . Chtěli bychom ukázat, že v takovém případě již jistě platí $T \in t_a$ (a tedy že průsečíkem dvou těžnic musí procházet i třetí těžnice). Dokazujeme tedy tvrzení ve tvaru

$$\left. \begin{aligned} cp + (2a - b)q - 2ac = 0 \\ 2cp + (a - 2b)q - 2ac = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow cp - (a + b)q = 0$$

Podle věty 5.1 tedy potřebujeme ukázat, že redukovanou Gröbnerovou bází ideálu

$$\langle cp + (2a - b)q - 2ac, 2cp + (a - 2b)q - 2ac, 1 - u(cp - (a + b)q) \rangle$$

je množina $\{1\}$. V programu MATHEMATICA tedy zadáme příkaz

```
GroebnerBasis[{c*p + (2*a - b)*q - 2*a*c, 2*c*p + (a - 2*b)*q - 2*a*c,
1 - u*(c*p - (a + b)*q)}, {p, q, u}];
```

V příkazu jsme označili nejprve množinu generátorů ideálu, jehož redukovanou Gröbnerovu bází chceme určit, a následně množinu proměnných. Po příslušném výpočtu nám program ukáže následující výstup:

```
In[5]:= GroebnerBasis[{c*p + (2*a - b)*q - 2*a*c, 2*c*p + (a - 2*b)*q - 2*a*c,
1 - u*(c*p - (a + b)*q)}, {p, q, u}]
Out[5]:= {1}
```

Obrázek 5.1: Automatický důkaz pomocí software MATHEMATICA

Jak můžeme vidět, hledanou redukovanou Gröbnerovou bází našeho ideálu je množina $\{1\}$. Tím jsme ukázali, že průsečíkem dvou těžnic prochází i těžnice třetí, a tedy že průnikem všech tří těžnic v trojúhelníku je jediný bod. \square

Příklad 5.2. Jako druhý příklad ukážeme automatický důkaz algoritmu rozdělení strany čtverce na třetiny viz příklad 4.3. Uvažujme délku strany čtverce a . Souřadnice bodů viz příklad 4.3 jsou tedy $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [a, a]$, $D = [0, a]$, $E = [0, \frac{a}{2}]$. Úhlopříčka AC má rovnici $x - y = 0$, přímka daná body B a E pak $x + 2y - a = 0$. Bod P má souřadnice $P = [p, 0]$. Bod X pak má souřadnice $X = [p, q]$. Naším cílem je ukázat, že $p = \frac{1}{3}a$. Požadovaný závěr je tedy $c : 3p - a = 0$.

Vzhledem k tomu, že bod X leží na průsečíku úhlopříčky AC a přímky dané body B, D , musí platit předpoklady ve tvaru $h_1 : p - q = 0$ a $h_2 : p + 2q - a = 0$. Chceme tedy určit redukovanou Gröbnerovu bází ideálu $\langle p - q, p + 2q - a, 1 - u(3p - a) \rangle$.

Příslušný výstup programu MATHEMATICA je pak následující:

```
In[4]:= GroebnerBasis[{p - q, p + 2*q - a, 1 - u*(3*p - a)}, {p, q, u}]
Out[4]:= {1}
```

Obrázek 5.2: Automatický důkaz úlohy příkladu 4.3

Můžeme vidět, že důkaz proběhl dle očekávání a bod P tedy leží v jedné třetině strany čtverce AB .

5.2 E-origami systém

Při tvorbě následující části byly použity zdroje [19, 20, 21].

Pro modelování origami konstrukcí je vhodný *E-origami systém* (dále *Eos*). Tento systém je dílem skupiny *Symbolic Computation Research Group*. Jde o doplněk programu MATHEMATICA, který je k dispozici zdarma na webu <http://www.i-eos.org:8080/ieos>. Zde je také možné najít návod, jak tento doplněk spustit a správně nastavit, informace o tomto doplňku a o jeho autorech.

Pro naše účely budeme používat nastavení:

```
Inexact[];  
Interaction[False];  
SetOptions[ShowOrigami, ShowFrame → False];  
$gap = 10; SetSystemAccuracy[5];
```

Pro zahájení procesu skládání origami použijeme příkaz

```
BeginOrigami[];
```

Tento příkaz nám vygeneruje jako vstup čtverec $ABCD$. Jeho líc je znázorněn modrou barvou. Provedeme-li následně přehyb, po kterém bude vidět rubová část původního čtverce, bude tato část znázorněna zelenou barvou. Vygenerovaný čtverec má rozměry 10×10 . Máme-li ji vygenerovaný čtverec, můžeme do něj libovolně umístit potřebné body, ze kterých chceme vycházet, pomocí příkazu

```
NewPoint["X" → {a, b}];
```

X je v tomto případě označení nového bodu a čísla a, b jeho souřadnice. Následně již můžeme přejít k samotnému přehybání. K tomuto účelu slouží sedm příkazů, které korespondují se sedmi Huzitovými axiomy origami, jež jsme zavedli ve čtvrté kapitole. Příkazy jsou následující:

```
H0[Q, Through → {P1, P2}];
```

 Zobrazení bodu X pomocí přehybu, procházejícího body P_1, P_2 .

```
H0[P1, P2];
```

 Přehyb, který zobrazí bod P_1 na bod P_2 .

```
H0[ℓ1, ℓ2];
```

 Přehyb, který zobrazí přímku ℓ_1 na přímku ℓ_2 .

```
H0[ℓ, Through → P];
```

 Přehyb kolmý na přímku ℓ procházející bodem P .

```
H0[P1, ℓ, Through → P2];
```

 Přehyb procházející bodem P_2 , který zobrazí bod P_1 na přímku ℓ .

```
H0[P1, ℓ1, P2, ℓ2];
```

 Přehyb, který zobrazí bod P_1 na přímku ℓ_1 a bod P_2 na přímku ℓ_2 .

```
H0[P, ℓ1, ℓ1];
```

 Přehyb kolmý na přímku ℓ_2 , který přenese bod P na přímku ℓ_1 .

Při samotném zadávání pak všechny body zadáváme v uvozovkách. V některých případech se může stát, že je daný přehyb možné provést více způsoby. V takovém případě

nám *Eos* zobrazí všech n možností označených „Case 1“ až „Case n “. Dále je třeba si jednu z těchto možností vybrat, což provedeme příslušným doplněním příkazu. Pokud například používáme šestý axiom a chceme zvolit druhou z nabízených možností, bude příslušný příkaz

```
H0[P1, ℓ1, P2, ℓ2, Case→2];
```

Chceme-rozložit poslední složený (a ještě nerozložený) přehyb, zadáme příkaz

```
Unfold[];
```

Chceme-li rozložit všechny přehyby, zadáme příkaz

```
UnfoldAll[];
```

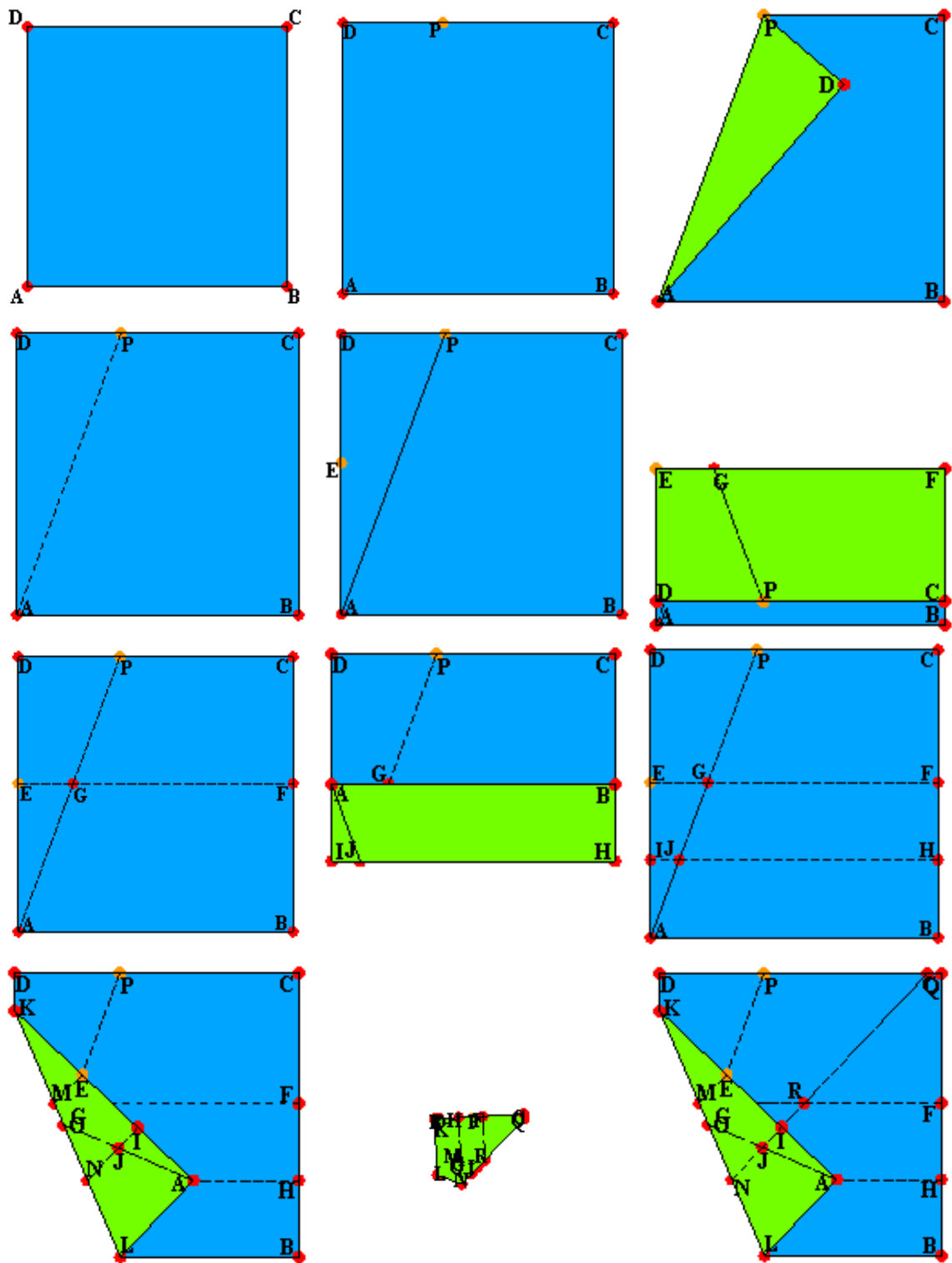
Jako příklad si můžeme ukázat model Abeho algoritmu pro trisekci ostrého úhlu (viz příklad 4.1). Příslušná posloupnost příkazů je následující:

```
BeginOrigami[];
NewPoint["P" → {3.7, 10}];
H0["D", Through → {"A", "P"}];
Unfold[];
NewPoint["E" → {0, 5.4}];
H0["DA", Through → "E"];
Unfold[];
H0["A", "E"];
Unfold[];
H0["A", "IH", "E", "AP", Case → 3];
H0["A", "E"];
UnfoldAll[];
H0["D", Through → {"Q", "R"}];
Unfold[];
H0["AB", "AQ", Case → 1];
Unfold[];
```

Výstupem programu je potom grafické znázornění jednotlivých kroků viz obrázky 5.3 a 5.4.

Kromě toho, že je doplněk *Eos* vhodným matematickým prostředím k modelování origami konstrukcí, je také velmi dobrým pomocníkem při automatickém dokazování. Jeho velkou výhodou je skutečnost, že dokáže sám s využitím provedené konstrukce vygenerovat jak množinu předpokladů, tak závěr dokazovaného tvrzení, čímž nám ušetří práci při matematickém popisování příslušného matematického problému. Způsob, jakým *Eos* generuje příslušné polynomy, je popsán v [20].

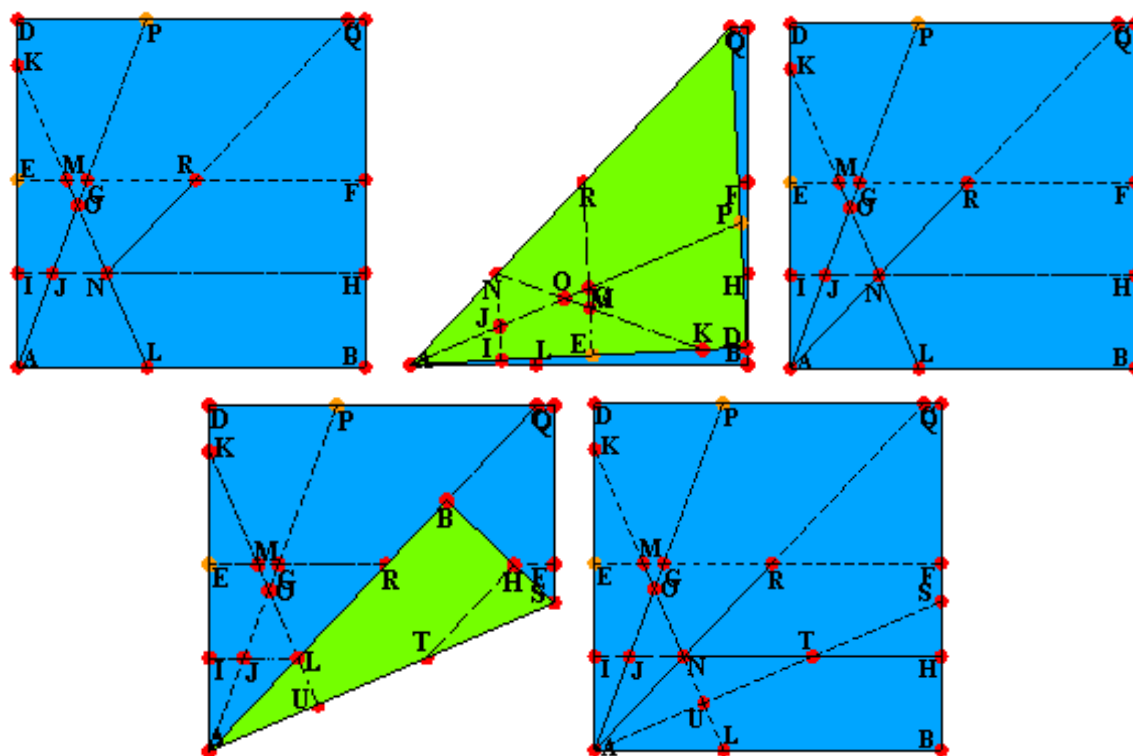
Chceme-li tedy dokázat dané tvrzení, potřebujeme jako vstup pouze provést příslušnou origami konstrukci pomocí *Eos* a následně zadat cíl, ke kterému chceme dojít. Systém *Eos* následně vygeneruje příslušné předpoklady a závěr a pomocí Gröbnerovýchází



Obrázek 5.3: Trisekce úhlu pomocí *Eos* - část 1

provede automatický důkaz. Výstupem programu je pak soubor, v němž jsou popsány kroky, které *Eos* provedl a informace, zda byl důkaz s využitím Gröbnerových bází úspěšný.

Jako příklad si ukážeme důkaz výše sestrojené Abeho trisekce ostrého úhlu. Po prove-



Obrázek 5.4: Trisekce úhlu pomocí *Eos* - část 2

dení konstrukce v systému *Eos* je třeba připravit systém na důkaz. Následující příkazy nám připraví formát důkazu:

```
ProofDocFormat[„Proof“, „Subsection“, 1];
ProofDocFormat[„Goal“, „Subsubsection“, 1];
```

Nyní již můžeme popsat cíl (goal) našeho důkazu. Naším cílem je ukázat, že platí rovnosti

$$|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle SAQ| = |\sphericalangle QAP|.$$

Vzhledem k tomu, že jde zjevně o ostré úhly, platí tyto rovnosti právě tehdy, když jsou si rovny tangenty těchto úhlů. Tento cíl pak zadáme pomocí příkazu

```
Goal[ToTangent[„B“, „A“, „S“] == ToTangent[„S“, „A“, „Q“]
== ToTangent[„Q“, „A“, „P“]];
```

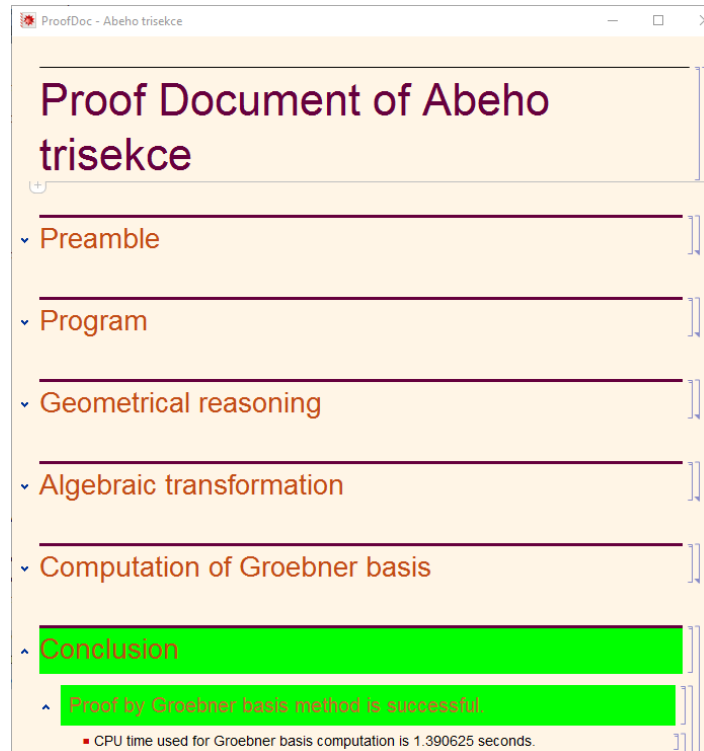
Po zadání cíle je ještě třeba zadat „mapu“ bodů na vstupu. Souřadnice bodů A, B, C, D jsou určeny rozměry čtverce na vstupu. Dále bod P má obecně souřadnice $[a, 10]$ a bod E souřadnice $[b, 0]$. Tyto body popíšeme následovně:

```
map = {„A“ → {0, 0}, „B“ → {10, 0}, „C“ → {10, 10}, „D“ → {0, 10}, „P“ → {a, 10},
„E“ → {0, b}};
```

Následně již můžeme zadat příkaz pro provedení požadovaného automatického důkazu.

```
Prove["Abeho trisekce", Mapping → map, GroebnerBasis → {MonomialOrder → DegreeLexicographic, CoefficientDomain → RationalFunctions}];
```

Po provedení tohoto posledního kroku je již výstupem systému požadovaný soubor s důkazem viz obr. 5.5.



Obrázek 5.5: Důkaz Abeho trisekce pomocí systému *Eos*

Z tohoto výstupu je patrné, že požadovaný důkaz proběhl úspěšně.

Na závěr si ještě všimněme, že v příkazu pro provedení důkazu pracujeme s polynomy s racionálními koeficienty. Na tuto skutečnost musíme brát ohled při zadávání požadovaného cíle. Chceme-li například jako cíl důkazu vyjádřit vzdálenost dvou bodů, je třeba pracovat s druhou této vzdálenosti. Pokud bychom tak neučinili, způsobili bychom vzhledem k tomu, že vzdálenost dvou bodů je vyjádřena pomocí druhé odmocniny jistého výrazu a tedy příslušné vyjádření není polynomem s racionálními koeficienty, problém, kvůli němuž by důkaz neproběhl správným způsobem.

Kapitola 6

Návrh tématického celku pro výuku na střední škole

Origami vzhledem ke své popularitě otevírá poměrně zajímavou možnost, jak u žáků středních škol prohloubit a rozšířit znalosti v oblasti nejen planimetrie a analytické geometrie, ale i algebry. Krátký tématický celek týkající se origami by bylo vhodné zařadit zejména v matematických třídách gymnázií či v zájmových matematických kroužcích. Návrh zpracování tématického celku je následující:

Téma: Geometrie origami

Cíle: Seznámení žáků s axiomatickým zavedením origami, popis souvislosti mezi konstrukcemi origami a eukleidovskými konstrukcemi, otevřít novou perspektivu při řešení geometrických problémů, osvojení základů práce se software MATHEMATICA, získání povědomí o automatickém dokazování v geometrii, rozvoj analytického myšlení žáka.

Motivace: Jako motivaci pro navození origami geometrie je vhodné seznámit žáky stručně s konstrukcemi s omezenými prostředky (viz druhá část úvodní kapitoly). Zvláštní důraz pak klademe na eukleidovské konstrukce, které žáci již znají z vyučování. Dále popíšeme tři klasické problémy starověku a nastíníme, že pomocí origami (narozdíl od eukleidovské konstruovatelnosti) budou některé z nich řešitelné.

Zpracování: Po uvedení tématu je vhodné začít základními konstrukcemi origami (viz třetí kapitola), přičemž klademe důraz na to, abychom ukázali souvislosti těchto konstrukcí s eukleidovskými konstrukcemi. Poté je již možné zavést origami pomocí Huzitových axiomů a ukázat (například na úloze trisekce ostrého úhlu) přínos přidaných axiomů. Při tomto výkladu je důležité, aby si žáci konstrukce sami vyzkoušeli.

Po zavedení geometrie origami a po osvojení konstrukcí přehýbáním papíru žáky je možné přejít ke zpracování origami s využitím výpočetní techniky (viz druhá část páté kapitoly). Nejprve seznámíme žáky s konstrukcemi v systému *Eos* a poukážeme na korespondenci s Huzitovými axiomy. Následně nastíníme problematiku dokazování v geometrii a popíšeme základy potřebné k automatickému dokazování. Výklad dopl-

níme jednoduchými příklady, jež žáci zvládnou vypracovat sami s využitím programu MATHEMATICA a které vyzdvihnou výhody automatického dokazování oproti tomu „ručnímu“. Nakonec ukážeme žákům způsob, jak využít systém *Eos* k automatickému dokazování a zdůrazníme, že tento systém za nás sám generuje předpoklady a závěr, čímž nám často velmi usnadní práci. Tento fakt znovu doložíme vhodnými příklady.

Nyní si ukážeme dva příklady, které je vhodné během výkladu použít.

Příklad 6.1. Dokažte že osy stran libovolného trojúhelníku se protínají v jediném bodě. Porovnejte standardní postup s přístupem pomocí origami geometrie.

Tento příklad je vhodné zařadit jako jeden z prvních, jelikož jde o problematiku, kterou žáci z planimetrie dobře znají. Vzhledem k jeho nízké obtížnosti se příklad hodí k demonstraci jak způsobů konstruování, tak k automatickému dokazování. Nejprve provedeme fyzickou konstrukci příkladu a to jak eukleidovsky, tak pomocí origami. Zatímco při eukleidovské konstrukci osy strany trojúhelníku musíme postupně sestrojít dvě vhodné kružnice a až poté získáme osu strany trojúhelníku vedením přímky průsečíky těchto kružnic, při origami konstrukci stačí složit jediný přehyb, který zobrazí jeden krajní bod strany trojúhelníku na druhý. Tím ukážeme, že v některých případech je rychlejší konstruovat pomocí origami.

Dále přistoupíme ke znázornění konstrukce pomocí systému *Eos*. Zadání algoritmu pro konstrukci os stran trojúhelníku zapíšeme ve tvaru:

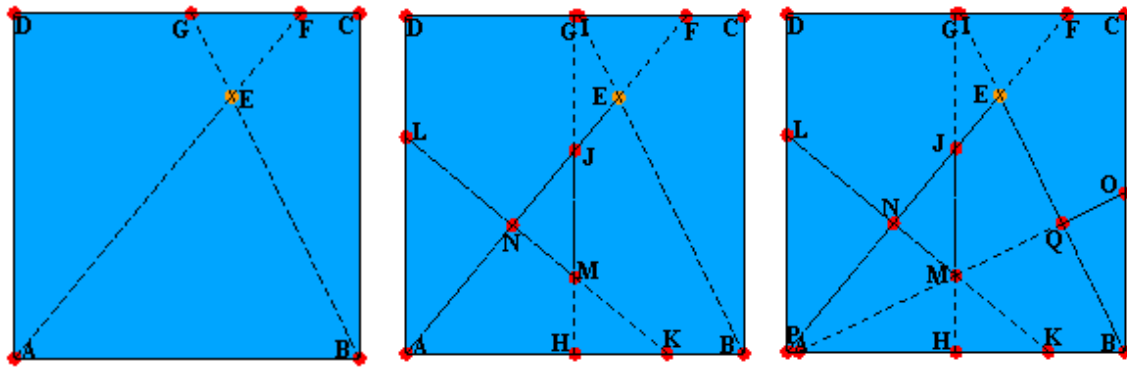
```
BeginOrigami [];
NewPoint["E" → {6.3, 7.6}];
HO["D", Through → {"A", "E"}];
Unfold[];
HO["C", Through → {"B", "E"}];
Unfold[];
HO["A", "B"];
Unfold[];
HO["A", "E"];
Unfold[];
HO["B", "E"];
Unfold[];
```

Na obrázku 6.1 jsou postupně vstupní trojúhelník, bod M jako průsečík os stran AB a AE a výsledný trojúhelník se všemi osami stran.

Po provedení všech tří způsobů konstrukce můžeme přistoupit k demonstraci automatického dokazování. Začneme důkazem s využitím redukované Gröbnerovy báze pomocí software MATHEMATICA.

Nejprve provedeme analytický popis situace. Soustavu souřadnou zavedeme tak, aby vrcholy trojúhelníku $\triangle ABC$ měly souřadnice $A = [0, 0]$, $B = [2a, 0]$, $C = [2b, 2c]$. Rovnice os stran tohoto trojúhelníku jsou následující:

$$o_a : (b - a)x + cy + a^2 - b^2 - c^2 = 0$$



Obrázek 6.1: Průsečík os stran

$$o_b : bx + cy - b^2 - c^2 = 0$$

$$o_c : x - a = 0$$

Označíme-li si průsečík $P = [p, q]$ os o_b, o_c , pak jistě platí

$$P \in o_c : p - a = 0,$$

$$P \in o_b : bp + cq - b^2 - c^2 = 0.$$

Naším cílem je ukázat, že $P \in o_a$, a tedy že $(b - a)p + cq + a^2 - b^2 - c^2 = 0$. Chceme tedy určit redukovanou Gröbnerovu bázi ideálu

$\langle p - a, bp + cq - b^2 - c^2, 1 - u[(b - a)p + cq + a^2 - b^2 - c^2] \rangle$. Po zadání adekvátního příkazu je výstup programu MATHEMATICA následující:

```
In[1]:= GroebnerBasis[{p - a, b*p + c*q - b^2 - c^2,
1 - ((b - a) * p + c*q + a^2 - b^2 - c^2)}, {p, q, u}]
Out[1]= {1}
```

Obrázek 6.2: Automatický důkaz - průsečík os stran

Důkaz tedy proběhl dle očekávání.

Na následujícím příkladu si ukážeme jeden z přínosů origami geometrie a výhodu automatického dokazování pomocí systému *Eos*.

Příklad 6.2. Demonstrujte a dokažte pomocí systému *Eos*, že je možné na základě Huzitových axiomů origami provést duplikaci krychle.

Pro naši konstrukci budeme potřebovat čtverec rozdělený na tři shodné obdélníky. K tomu využijeme algoritmus z příkladu 4.3. Zadáme tedy potřebnou posloupnost příkazů ve tvaru:

```
BeginOrigami [];
H0["D", Through -> {"A", "C"}];
```

```

Unfold[];
HO["A", "D"];
Unfold[];
HO["A", Through → {"B", "F"}];
Unfold[];
HO["AD", Through → "H"];
Unfold[];
HO["D", "J"];
Unfold[];

```

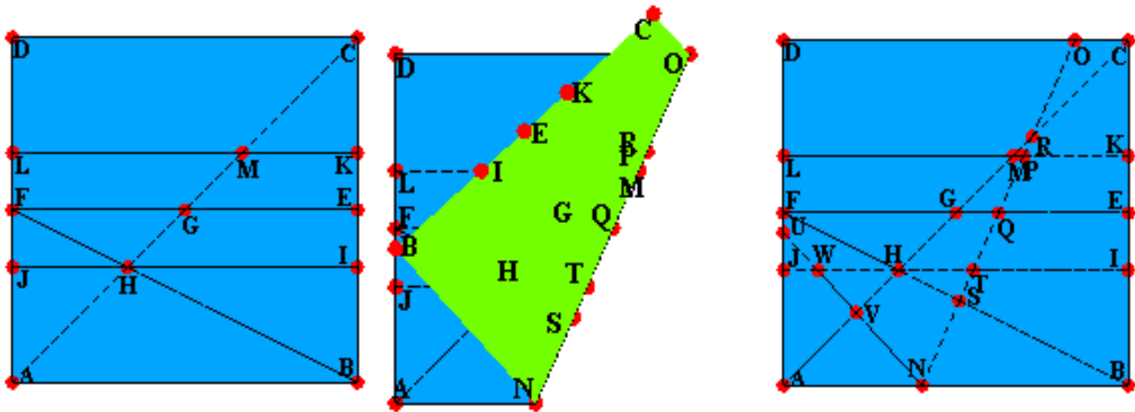
Dále již pokračujeme podle příkladu 4.4.

```

HO["B", "AD", "I", "LK"];
HO["A", Through → {"N", "B"}];
UnfoldAll[];

```

Na obrázku 6.3 je znázorněn čtverec rozdělený na tři shodné obdélníky a následně již samotné znázornění duplikace krychle.



Obrázek 6.3: Duplikace krychle pomocí *Eos*

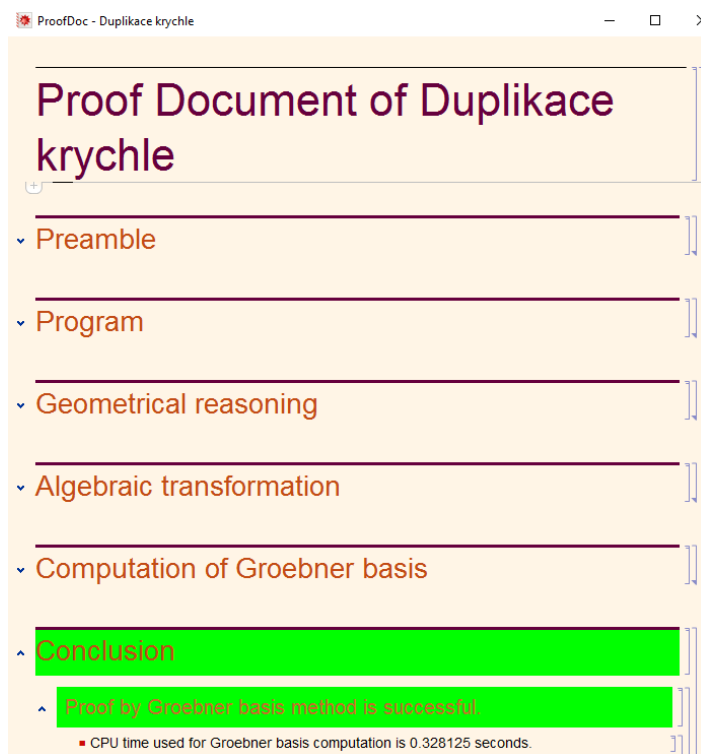
Cílem našeho důkazu je ukázat, že platí $|DU| = \sqrt[3]{2}|AU|$. Vzhledem k tomu, že se na obou stranách této rovnosti vyskytují výrazy pod druhou odmocninou a na pravé straně je i výraz pod třetí odmocninou, je třeba umocnit obě strany rovnosti na šestou, abychom získali výraz s racionálními koeficienty. Protože jsou na obou stranách jistě nezáporná čísla (jde o vzdálenosti), můžeme tuto úpravu provést, aniž bychom se dopustili nějaké neekvivalentnosti. Příkaz pro provedení důkazu bude tedy ve tvaru:

```

ProofDocFormat["Proof", "Subsection", 1];
ProofDocFormat["Goal", "Subsubsection", 1];
Goal[Distance["D", "U"]6 == (Distance["A", "U"]6) * 4];
map = {"A" → {0, 0}, "B" → {10, 0}, "C" → {10, 10}, "D" → {0, 10}};
Prove["Duplikacekrychle", Mapping → map, GroebnerBasis →
{MonomialOrder → DegreeLexicographic, CoefficientDomain → RationalFunctions}];

```


Výstup programu je pak znázorněn na obrázku 6.4.



Obrázek 6.4: Důkaz duplikace krychle pomocí systému *Eos*

Můžeme tedy konstatovat, že důkaz proběhl úspěšně. Zde je třeba zdůraznit, že za nás systém *Eos* provedl analytický popis situace, který by pro žáky mohl být velmi náročný.

Kapitola 7

Závěr

Úvod práce je věnován stručnému popisu historického vývoje origami. Následně se první kapitola zaměřuje na konstrukce s omezenými prostředky, zejména pak na eukleidovské konstrukce, které vzhledem k tomu, že jsou používány při výuce matematiky na základních i středních školách, následně slouží ke srovnávání s konstrukcemi origami.

Druhá kapitola je tvořena souborem základních pojmů, jejichž znalost je pro zkoumané téma nezbytná. Třetí kapitola je již věnována základním konstrukcím origami. Jejím cílem je ukázat souvislost mezi těmito konstrukcemi a eukleidovskou geometrií. Ukazuje se, že základní konstrukce origami nám neposkytují oproti eukleidovským konstrukcím žádné nové možnosti. Proto je potřeba tyto základní konstrukce rozšířit.

Právě rozšíření konstrukcí origami je věnována čtvrtá kapitola práce. V jejím úvodu zavádíme origami konstrukce pomocí Huzitových axiomů, přičemž zejména šestý axiom nám poskytuje nové možnosti konstruování, jež ukazujeme ve zbytku této kapitoly, kde řešíme problémy trisekce úhlu a duplikace krychle.

Pátá kapitola pojednává o možnostech využití výpočetní techniky zejména pro automatické dokazování. Dále zde představujeme systém *Eos*, doplněk programu MATHEMATICA, s jehož využitím následně provádíme jak samotné konstrukce pomocí Huzitových axiomů, tak automatické dokazování. Poslední šestou kapitolou je pak návrh tematického celku pro výuku na střední škole.

Cílem práce bylo popsat možnosti konstrukcí geometrických pomocí origami, vytvořit příklady modelových konstrukcí a to jak reálných, tak virtuálních a následně navrhnout tematický celek pro výuku origami geometrie pro výuku na střední škole. Tyto cíle se podařilo splnit. Přínosem práce je zejména skutečnost, že ačkoli je v několika částech postavena na poměrně složité teorii, neklade příliš velké nároky na teoretické znalosti čtenáře.

Dodejme, že práce rozhodně nevyčerpala všechny možnosti, které poskytuje zkoumání origami z matematického hlediska. Jde o obor, který je velmi mladý a velmi rychle se vyvíjí. V současnosti je populární zejména počítačové modelování origami ve $3D$.

Literatura

- [1] HATORI, Koshiro. History of Origami. *K's Origami* [online]. 2015 [cit. 2017-03-27]. Dostupné z: <http://origami.ousaan.com/library/historye.html>
- [2] *Origami Resource Center* [online]. 2017 [cit. 2017-03-28]. Dostupné z: <http://www.origami-resource-center.com/>
- [3] BOHÁČOVÁ, Jana. *Origami jako didaktické prostředí v matematickém vzdělávání*. Praha, 2009. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce PhDr. Filip Roubíček, PhD.
- [4] NEWTON, Liz. The power of origami. *Plus magazine* [online]. 2009 [cit. 2017-03-27]. Dostupné z: <https://plus.maths.org/content/power-origami>
- [5] Mathematics of paper folding. *Revolvy* [online]. 2017 [cit. 2017-03-27]. Dostupné z: https://www.revolvy.com/main/index.php?s=Mathematics%20of%20paper%20folding&item_type=topic
- [6] YIN, Sheri. *The Mathematics of Origami* [online]. 2009 [cit. 2017-03-27]. Dostupné z: https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_09/papers/Sheri.pdf
- [7] LÁVIČKA, Miroslav. *Syntetická geometrie*. Plzeň, 2007.
- [8] BLAŽKOVÁ, Růžena. *Zajímavá geometrie pro každého* [online]. Brno, 2015 [cit. 2017-03-28]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/pedf/ps11/geomet/web/index.html>
- [9] LANG, Robert. Origami Conferences. *Robert J. Lang Origami* [online]. 2017 [cit. 2017-03-27]. Dostupné z: <http://www.langorigami.com/article/origami-conferences>
- [10] MAIN, Douglas. From Robots To Retinas: 9 Amazing Origami Applications. *Popular Science* [online]. 2014 [cit. 2017-04-18]. Dostupné z: <http://www.popsci.com/article/science/robots-retinas-9-amazing-origami-applications>
- [11] SAUNDERS MAC LANE a Garrett BIRKHOFF. *Algebra*. 3. ed. Providence: AMS, 1999. ISBN 9780821816462.
- [12] LANG, Serge. *Algebra*. Rev. 3rd ed. New York: Springer, c2002. ISBN 0-387-95385-x.

- [13] AUCKLY, David a CLEVELAND John. Totally Real Origami and Impossible Paper Folding. *The American Mathematical Monthly*. 1995, (3), 215-226.
- [14] MADLENER, Ken. *Automatic Geometric Theorem Proving using Gröbner Bases*. Radboud University, 2008. Bakalářská práce. Vedoucí práce W. Bosma.
- [15] PECH, Pavel. *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii*. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, 2005. ISBN 80-7040-805-7.
- [16] COX, David A., John B. LITTLE a Donal. O'SHEA. *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. 3rd ed. New York: Springer, c2007. ISBN 978-0-387-35650-1.
- [17] HIRAOKA, Kenji a Laura KOKOT. *Trisecting an Angle and Doubling the Cube Using Origami Method*. Nagasaki University, 2016.
- [18] LANG, Robert. *Origami and Geometric Constructions*. 2003.
- [19] KASEM, Asem, Tetsuo IDA, Hidekazu TAKAHASHI, Mircea MARIN a Fadoua GHOURABI. *E-Origami System Eos*. 2006.
- [20] GHOURABI, Fadoua, Tetsuo IDA a Asem KASEM. *Proof Documents for Automated Origami Theorem Proving*. University of Tsukuba, 2006.
- [21] *Eos Project* [online]. University of Tsukuba, 2000 [cit. 2017-08-01]. Dostupné z: <http://www.i-eos.org:8080/ieos>
- [22] TESKOVÁ, Libuše. *Lineární algebra*. 3. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010 [cit. 2017-08-06]. ISBN 978-80-7043-966-1.