

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

Katedra elektromechaniky a výkonové elektroniky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Numerická analýza při indukčních ohřevech

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta elektrotechnická
Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Michal ČERNÍČEK**
Osobní číslo: **E10B0200P**
Studijní program: **B2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor: **Elektrotechnika a energetika**
Název tématu: **Numerická analýza při indukčních ohřevech**
Zadávající katedra: **Katedra elektromechaniky a výkonové elektroniky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Uveďte obecně teorii indukčního ohřevu.
2. Uveďte přehled softwaru pro řešení problematiky indukčních ohřevů.
3. Uveďte klady a zápory numerických programů vůči analytickému řešení.
4. Uveďte závěry pro praxi.



Rozsah grafických prací: podle doporučení vedoucího

Rozsah pracovní zprávy: 20 - 30 stran

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

1. Langer: Teorie ind. a diel. tepla ČSAV 1979 - II. vyd.
2. Langer: El. tep. technika I + II - II. vyd. 1975 VŠSE
3. Langer - Kožený: El. tep. zařízení indukční - 1982 VŠSE
4. Rada a kol.: Elektrotepelná technika SNTL 1985
5. Internet

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. David Rot, Ph.D.

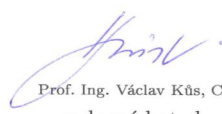
Katedra elektroenergetiky a ekologie

Datum zadání bakalářské práce: 17. října 2011

Termín odevzdání bakalářské práce: 3. června 2012


Doc. Ing. Jiří Hammerbauer, Ph.D.
děkan




Prof. Ing. Václav Kůs, CSc.
vedoucí katedry

V Plzni dne 17. října 2011

Anotace

Předkládaná bakalářská práce je zaměřena na numerickou analýzu při indukčních ohřevech. Je zde popsána teorie indukčního ohřevu. Dále je zde uveden přehled programů pro indukční ohřev. A na závěr je porovnání numerických programů s analytickým řešením.

Klíčová slova

Indukční ohřev, magnetické pole, teplotní pole, QuickField, Agros2D, ANSYS Multiphysics, COMSOL Multiphysics, RillFEM2D, Flux, metoda konečných prvků

Abstract

The presented bachelor thesis is focused on numerical analysis at induction heating. There is discibed theory of induction heating. The overwiev software for induction heating is given further. There is compare the numerical software with analytical solution at the end.

Key words

Induction heating, magnetic field, thermal field, QuickField, Agros2D, ANSYS Multiphysics, COMSOL Multiphysics, RillFEM2D, Flux, fine element method

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této bakalářské, je legální.

V Plzni dne 8.6.2012

Jméno příjmení

.....

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu Bakalářské práce Ing. Davidu Rotovi, Ph.D. za cenné profesionální rady, připomínky a metodické vedení práce.

Obsah

Seznam použitých jednotek a veličin	9
1. Úvod	10
2. Teorie indukčního ohřevu	11
2.1 Elektromagnetické pole.....	11
Třetí Maxwellova rovnice (Gaussův zákon elektrostatiky)	11
Čtvrtá Maxwellova rovnice (Zákon spojitosti indukčního toku)	12
2.1.1 Podmínky na rozhraní dvou různých oblastí.....	12
2.1.2 Materiálové vztahy.....	13
2.1.3 Zavedení vektorového magnetického potenciálu.....	13
2.1.4 Kalibrační podmínky.....	14
2.1.5 Nestacionární pole.....	15
2.1.6 Kvazistacionární pole.....	15
2.1.7 Stacionární pole	16
2.1.8 Podmínky na rozhraní	16
2.1.9 Počáteční podmínka	18
2.1.10 Rozložení Joulových ztrát	18
2.2 Teplotní pole.....	19
2.2.1 Okrajové podmínky.....	20
2.2.2 Počáteční podmínka	21
2.2.3 Podmínky na rozhraní	21
3. Přehled programů pro výpočet indukčního ohřevu	22
3.1 QuickField.....	22
3.2 Agros2D	23
3.3 ANSYS Multiphysics.....	24
3.4 Comsol Multiphysics	24
3.5 RillFEM2D	25
3.6 Flux	26
3.7 Srovnání programů	27
4. Srovnání numerických řešení vůči analytickým	28
4.1 Analytické řešení	28
4.2 Numerické řešení	28
4.2.1 Metoda konečných prvků.....	29

5. Závěr	32
Literatura.....	33

Seznam použitých jednotek a veličin

Seznam použitých jednotek a veličin pro elektromagnetické pole				
Veličina		Jednotka		
název	značka	název	značka	rozměr
permeabilita	μ	henry na metr	H/m	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
relativní permeabilita	μ_r	-	-	-
konduktivita	γ	siemens na metr	S/m	$\text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1}$
permitivita	ε	farad na metr	F/m	$\text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$
intenzita	H	ampér na metr	A/m	$\text{m}^{-1} \cdot \text{A}$
intenzita elektrického	E	volt na metr	V/m	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
vnucená intenzita	E_v	volt na metr	V/m	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
elektrická indukce	D	coulomb na čtverečný metr	C/m ²	$\text{m}^{-2} \cdot \text{s} \cdot \text{A}$
magnetická indukce	B	tesla	T	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$
proudová hustota	J	ampér na čtverečný metr	A/m ²	$\text{m}^{-2} \cdot \text{A}^2$
vnucená proudová	J_v	ampér na čtverečný metr	A/m ²	$\text{m}^{-2} \cdot \text{A}^2$
objemová hustota	ρ_v	coulomb na krychlový metr	C/m ³	$\text{m}^{-3} \cdot \text{s}$
plošná hustota náboje	σ	coulomb na čtverečný metr	C/m ²	$\text{m}^{-2} \cdot \text{s} \cdot \text{A}$
vektorový magnetický	A	weber na metr	Wb/m	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
magnetický indukční	Φ	weber	Wb	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
hustota plošného	K_n	ampér na metr	A/m	$\text{m}^{-1} \cdot \text{A}$

Seznam použitých jednotek a veličin pro teplotní pole				
Veličina		Jednotka		
název	značka	název	značka	rozměr
termodynamická	T	kelvin	K	K
hustota	ρ	kilogram na krychlový metr	kg/m ³	$\text{m}^{-3} \cdot \text{kg}$
tepelná kapacita	c	joule na kilogram a kelvin	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
tepelná vodivost	λ	watt na metr a kelvin	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
součinitel přestupu	α	watt na čtver. metr a kelvin	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
objemová hustota	Q_0	watt na krychlový metr	W/m ³	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}$
rychlost kontinua	v	metr za sekundu	m/s	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
plošná hustota energie	q	watt na čtverečný metr	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
čas	t	sekunda	s	s

1. Úvod

Předkládaná bakalářská práce je zaměřena na numerickou analýzu při indukčních ohřevech.

Práce je rozdělena do tří základních částí. První část se zabývá teorií indukčního ohřevu. Je zde popsána teorie indukčního ohřevu pomocí elektromagnetického a teplotního pole. Druhá část se zabývá softwarem pro řešení problematiky indukčního ohřevu. V této části jsou uvedeny programy, které se používají k namodelování a vyřešení daného problému. Poslední část je zaměřena na klady a zápory, numerických programů vůči analytickým řešením. Zde je srovnáno numerické řešení s analytickým a uvedena metoda konečných prvků, kterou zde uváděné programy využívají.

2. Teorie indukčního ohřevu

2.1 Elektromagnetické pole

Elektromagnetické pole je fyzikální pole, které se rovná velikosti působení magnetických a elektrických veličin v prostoru. Elektromagnetické pole je popsáno čtyřma Maxwellovými rovnicemi.

Maxwellovi rovnice je možné zapsat, buďto v integrálním nebo diferenciálním tvaru. V integrálním tvaru nám popisují elektromagnetické pole v jisté oblasti, kdežto v diferenciálním tvaru v určitém bodu této oblasti.

První Maxwellova rovnice (Ampérův zákon)

Integrální tvar

$$\oint_c \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I + \frac{d\Psi}{dt}$$

Diferenciální tvar

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

Druhá Maxwellova rovnice (Faradayův indukční zákon)

Integrální tvar

$$\oint_c \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Diferenciální tvar

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

Třetí Maxwellova rovnice (Gaussův zákon elektrostatiky)

Integrální tvar

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

Diferenciální tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v \quad (2.3)$$

Čtvrtá Maxwellova rovnice (Zákon spojitosti indukčního toku)

Integrální tvar

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Diferenciální tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

Ve výše uvedených vzorcích jsou použity vektorové veličiny \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{J} , \mathbf{E} , \mathbf{D}

Kde \mathbf{B} ... indukce magnetického pole,

\mathbf{H} ... intenzita magnetického pole,

\mathbf{J} ... proudová hustota,

\mathbf{E} ... intenzita elektrického pole,

\mathbf{D} ... indukce elektrického pole,

2.1.1 Podmínky na rozhraní dvou různých oblastí

Tyto podmínky však definují spojitost pouze jedné složky vektorů. Bodou-li vektory uvažovány z obecného hlediska, není zaručena jejich spojitost na rozhraní. To je velmi nevýhodné pro numerické výpočty. Z tohoto důvodu se zavádí popis elektromagnetického pole pomocí potenciálů.

$$E_{t1} - E_{t2} = 0$$

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma$$

$$B_{n1} - B_{n2} = 0 \quad (2.5)$$

$$H_{t1} - H_{t2} = K_n$$

$$J_{n1} - J_{n2} = -\operatorname{div} \mathbf{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

indexy 1 a 2... prostředí na jedné a druhé straně rozhraní

index t... složka vektoru tečná k rozhraní

index n... složka vektoru kolmá k rozhraní

σ ... plošná hustota náboje na rozhraní

\mathbf{K}_N ... velikost hustoty plošného proudu na rozhraní

2.1.2 Materiálové vztahy

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{J} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_v) = \gamma \mathbf{E} + \mathbf{J}_v$$

Kde $\mu = \mu_0 \mu_r$ a $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \text{ a } \varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}$$

2.1.3 Zavedení vektorového magnetického potenciálu

Při použití numerických výpočtů je dobré zavést popis elektromagnetického pole pomocí vektorového potenciálu \mathbf{A} , definovaný vztahem

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{2.7}$$

Dosadíme-li tento vztah do druhé Maxwellovy rovnice (2.2) a upravíme ho, dostaneme daný vztah

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{2.8}$$

Jelikož výraz v závorce má nulovou rotaci, dá se vyjádřit jako gradient skalárního potenciálu Φ .

$$-\text{grad } \Phi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.9)$$

Abychom získali intenzitu elektrického pole závislou pouze na potenciálech, převedeme tyto potenciály na jednu stranu rovnice

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.10)$$

Použijeme-li materiálové vztahy (2.6) a dosadíme-li vztahy (2.7) a (2.10) do první (2.1) a třetí (2.3) Maxwellovy rovnice, získáme rovnice charakterizující elektromagnetické pole jen na základě potenciálů Φ a \mathbf{A} .

$$\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} + \gamma \left(\text{grad } \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \left(\text{grad } \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{J}_v, \quad (2.11)$$

$$\text{div } \varepsilon \text{grad } \Phi + \text{div } \varepsilon \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\rho_v, \quad (2.12)$$

kde $\mathbf{J}_v \dots$ vnucený proud

$\rho_v \dots$ volný náboj

Rovnici (2.11) a (2.12) jsem nezjednodušoval, ale vycházel jsem přímo z Maxwellových rovnic (2.1) až (2.4). Zde uvedené rovnice platí stejně obecně jako výše uvedené materiálové vztahy a Maxwellovy rovnice. V dalších úpravách použiji zjednodušující podmínky, tyto podmínky vyplývají ze znalostí vlastností pole a prostředí. Dle těchto předpokladů, které můžeme použít, rozdělíme pole na stacionární, kvazistacionární a nestacionární. Prostředí na prostorově nebo časově konstantní či s proměnnými parametry. Dále ještě na lineární a nelineární.

2.1.4 Kalibrační podmínky

Coulombova kalibrační podmínka

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (2.13)$$

Tuto podmínku je výhodné použít, je-li v celém prostoru $\rho_v = 0$ a dále je permitivita lineární a prostorově konstantní.

Lorenzova kalibrační podmínka

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (2.14)$$

Zde uvedenou podmínku můžeme využít pro prostředí nevodivé, lineární, s prostorově i časově konstantní permitivitou.

2.1.5 Nestacionární pole

U nestacionárního pole musíme uvažovat posuvný proud, jelikož zdroje elektromagnetického pole jsou časově závislé. Vzhledem k tomu, že prostředí je lineární, elektricky nevodivé, s prostorově i časově konstantní permitivitou, můžeme zde použít Lorenzovu kalibrační podmínku (2.14). A je-li dále permeabilita prostorově konstantní, tak za použití vektorové identity $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$ získáme dvě nezávislé rovnice.

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_v, \quad (2.15)$$

$$\Delta \Phi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}, \quad (2.16)$$

2.1.6 Kvazistacionární pole

U kvazistacionárního pole neuvažujeme posuvný proud. Tím pádem můžeme v rovnici (2.11) vynechat tento člen $\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \left(\operatorname{grad} \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$. Vzhledem k tomu, že je ε lineární a prostorově konstantní a $\rho_v = 0$, můžeme zde využít Coulombovu kalibrační podmínku (2.13). Rovnice (2.12) pak bude vypadat následovně

$$\Delta \Phi = 0, \quad (2.17)$$

Tím pádem bude gradient skalárního potenciálu nulový.

$$\operatorname{grad} \Phi = 0, \quad (2.18)$$

Dosadíme-li do rovnice (2.11) rovnici (2.18) a zanedbáme-li posuvný proud, dostaneme následující rovnici.

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_v, \quad (2.19)$$

Uvažujeme-li μ lineárně a prostorově konstantní můžeme, za pomoci Coulombovy kalibrační podmínky (2.13) a vektorové identity $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$, upravit rovnici (2.19) na následující tvar.

$$-\Delta \mathbf{A} + \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mu \mathbf{J}_v, \quad (2.20)$$

Při simulování indukčního ohřevu se ve všech vodivých oblastech daného uspořádání využívá kvazostacionárního pole. Vzhledem k dostatečné vodivosti v daných oblastech lze posuvný proud zanedbat. Fázor posuvné proudové hustoty je určen vztahem $\mathbf{J}_{\text{posuv}} = \mathbf{j} \omega \varepsilon \mathbf{E}$ a fázor vodivostní proudové hustoty $\mathbf{J}_{\text{vod}} = \gamma \mathbf{E}$. Porovnáme-li hodnoty γ a $\omega \varepsilon$ zjistíme, že posuvný proud lze zanedbat.

2.1.7 Stacionární pole

Ve stacionárním poli neuvažujeme časové derivace, jelikož zdrojem elektromagnetického pole jsou stejnosměrné proudy. Použijeme-li Coulombovu kalibrační podmínku (2.13), získáme z rovnice (2.12) zpět rovnici (2.17). Tím pádem můžeme položit gradient Φ roven nule a z rovnice (2.11) dostaneme tvar.

$$\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{J}_v, \quad (2.21)$$

Uvažujeme-li konstantní a lineární μ , tak pomocí vektorové identity dostaneme vztah.

$$-\Delta \mathbf{A} = \mathbf{J}_v, \quad (2.22)$$

Při simulacích indukčních ohřevů v nevodivých oblastech se často využívají rovnice (2.21) a (2.22).

2.1.8 Podmínky na rozhraní

Pokud počítáme určitý model tak tento model má více oblastí s rozdílnými materiálovými vlastnostmi. Jsou-li dvě tyto oblasti s rozdílnými materiálovými konstanty vedle sebe. Body na hranicích těchto oblastí nemůžeme považovat za regulérní body, tím pádem tam neplatí Maxwellovy rovnice ani rovnice pro potenciály. Pro tyto hranice platí zde uvedené vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_2, \\ \frac{1}{\mu_1} \text{rot } \mathbf{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \text{rot } \mathbf{A}_2 &= \mathbf{K}_N, \end{aligned} \quad (2.23)$$

Pro modely elektromagnetického pole často používáme několik dalších podmínek, Neumannova a Dirichletova podmínka, dále pak podmínky periodicity a antiperiodicity.

Neumannova podmínka

Zadávat nám derivaci \mathbf{A} podle vnější normály Γ

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}(\Gamma, t) = \mathbf{g}(\Gamma, t), \quad (2.24)$$

kde $\mathbf{g} \dots$ požadovaná hodnota derivace podle vnější normály

Zde uvedená podmínka nám určuje velikost tečné složky vektoru \mathbf{B} . Budeme-li uvažovat Neumannovu podmínku rovnu nule, bude vektor $\mathbf{B}(\Gamma, t)$ mít směr normály k hranici. Toho to se často využívá při zadávání symetrie, jestliže víme, že siločáry procházejí hranicí v kolmém směru.

Dirichletova podmínka

Tato podmínka nám přímo udává požadovanou velikost počítané veličiny v každém bodě hranice Γ .

$$\mathbf{A}(\Gamma, t) = \mathbf{A}_\Gamma(\Gamma, t) \quad (2.25)$$

kde $\mathbf{A} \dots$ neznámá hodnota vektorového potenciálu počítaná pomocí rovnice (2.19)

$\mathbf{A}_\Gamma \dots$ zadaná hodnota vektorového potenciálu pro body hranice Γ .

Dirichletova podmínka nám určuje derivaci vektorového potenciálu v kterémkoliv směru tečném k hranici Γ , tím pádem i normálovou složku rotace \mathbf{A} , což je normálová složka \mathbf{B} . Požadovanou hodnotu \mathbf{B}_n je možno zadat pomocí Dirichletovi podmínky. Pokud na určité části hranice zadáme \mathbf{A}_Γ konstantní, potom \mathbf{B}_n na stejné části bude nulové. Toho to se často využívá hlavně u symetrických modelů, máme-li hranici totožnou se siločárou.

Podmínky periodicity a antiperiodicity

Podmínky periodicity

$$\mathbf{A}(\Gamma_1, t) = \mathbf{A}(\Gamma_2, t), \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}(\Gamma_1, t) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}(\Gamma_2, t), \quad (2.27)$$

Podmínky antiperiodicity

$$\mathbf{A}(\Gamma_1, t) = -\mathbf{A}(\Gamma_2, t), \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}(\Gamma_1, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}(\Gamma_2, t), \quad (2.29)$$

Zde uváděné podmínky využijeme např. při vyšetřování magnetických polí v elektrických točivých strojích.

Smíšené okrajové podmínky

Pokud máme, části hranice Γ a známe na ni okrajovou podmínku určitého typu a na zbývající části hranice známe okrajovou podmínku jiného typu, můžeme potom hovořit o smíšené okrajové podmínce.,

2.1.9 Počáteční podmínka

Pro řešení rovnic v kvazistacionárním či nestacionárním poli, musíme vždy zadat v řešeném modelu hodnoty vektorového potenciálu v počátečním čase. Většinou je tato podmínka brána jako homogenní a rovna nule.

$$\mathbf{A}(\Omega, t = 0) = \mathbf{A}_0(\Omega), \quad (2.30)$$

Budeme-li uvažovat nestacionární pole, musíme ještě zadat počáteční rychlost změny vektorového potenciálu

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\Omega, t = 0) = \mathbf{F}_0(\Omega), \quad (2.31)$$

Ve většině případů zadáváme i tuto podmínku rovnu nule.

2.1.10 Rozložení Joulových ztrát

Z toho vzorce lze získat rozložení Joulových ztrát

$$w_j = (\mathbf{J} + \mathbf{J}_v) \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}_v), \quad (2.32)$$

Pro izotropní materiál napíšeme rovnici

$$w_j = \|\mathbf{E} + \mathbf{E}_v\|^2 = \gamma \left\| \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}_v}{\gamma} \right\|^2 \quad (2.33)$$

E získáme z rovnice (2.10), při zohlednění rovnice (2.18)

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.34)$$

Dosadíme-li (2.34) do (2.33) získáme tvar

$$w_j = \gamma \left\| -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{J_v}{\gamma} \right\|^2, \quad (2.35)$$

2.2 Teplotní pole

Teplotní pole je prostor, kde je v každém místě definovaná určitá termodynamická teplota.

Termodynamickou teplotu určují zákony termodynamiky. Uvažujeme-li stacionární pole pak je zde teplota konstantní, pokud však uvažujeme nestacionární teplotní pole, je zde teplota časově závislá.

Následující rovnicí je obecně popsáno teplotní pole

$$-\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T) + \rho \cdot c \frac{dT}{dt} + \lambda \cdot \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = Q_0, \quad (2.36)$$

Vzhledem k tomu, že u indukčních ohřevů nedochází k rychlým ohřevům, je možné v rovnici (2.36) zanedbat druhou derivaci teploty podle času. Tento člen nám respektuje konečnou rychlost šíření tepla. Další člen $\rho \cdot c \frac{dT}{dt}$ nám obsahuje substanciální derivaci, kterou můžeme rozepsat pomocí vzorce

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T, \quad (2.37)$$

kde \mathbf{v} ... rychlost pohybu kontinua

Pokud uvažujeme ohřívání pohybujícího se tělesa, uplatníme zde člen $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T$. Uvažujeme-li, ale nepohybující se těleso je vždy \mathbf{v} rovno nule a derivaci $\frac{dT}{dt}$ lze nahradit parciální derivací.

Pokud, respektujeme výše uvedené skutečnosti, můžeme rovnici (2.36) napsat ve tvaru

$$-\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T) + \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \cdot c \cdot \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T = w_j, \quad (2.38)$$

Kde Q_0 je objemová hustota tepelné energie, která byla nahrazena Joulovým teplem w_j

2.2.1 Okrajové podmínky

Neumannova okrajová podmínka

Zde uvedenou podmínku často používáme tam, kde známe velikost toku energie přes hranici Γ

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(\Gamma, t) = f_0(\Gamma, t), \quad (2.39)$$

Také se vyplatí tuto podmínku využít na osách symetrie, jelikož je tam nulový tok přes hranici.

Dirichletova okrajová podmínka

Tuto podmínku používáme nejčastěji tam, kde známe hodnotu teploty na hranici Γ .

$$T(\Gamma, t) = T_r(\Gamma, t), \quad (2.40)$$

Newtonova okrajová podmínka

Tuto podmínku nejčastěji využijeme u přestupu tepla konvekcí, tj. na rozhraní pevného prostředí a kapalného či plynného.

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(T_{\text{gass}} - T), \quad (2.41)$$

kde $\alpha \dots$ součinitel přestupu tepla z jednoho prostředí do druhého

Při simulacích je povinností respektovat teplotní závislost $\alpha(T)$.

Okrajové podmínky IV. Druhu

Okrajová podmínka IV. Druhu nám respektuje přestup tepla radiací. Stefan-Boltzmannův zákon nám uvádí, že tepelný tok odváděný radiací je přímo úměrný rozdílu čtvrtých mocnin teplot na povrchu tělesa a okolí a konstantě radiačních ztrát C .

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varepsilon c (T_{\text{ext}}^4 - T^4), \quad (2.42)$$

kde $\varepsilon \dots$ Stefan-Boltzmannova konstanta $\varepsilon = 5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$

$c \dots$ emisivita

Při vyšších teplotách nelze přestup tepla radiací zanedbat. Vzhledem k tomu, že u indukčního ohřevu zahříváme těleso z nízkých teplot na poměrně vysoké teploty, je zde nutné respektovat jak přestup tepla radiací tak i konvekci. Okrajová podmínka pak bude vypadat následovně

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(T_{\text{gass}} - T) + \varepsilon c (T_{\text{ext}}^4 - T^4), \quad (2.43)$$

2.2.2 Počáteční podmínka

Uvažujeme-li nestacionární teplotní pole, musíme zadat počáteční podmínku, která má tvar

$$T(\Omega, t = 0) = T_0, \quad (2.44)$$

kde $T_0 \dots$ počáteční rozložení teploty v oblasti

2.2.3 Podmínky na rozhraní

Tyto podmínky nám udávají, že teploty na obou stranách rozhraní jsou si rovny a že rozdíl mezi toky energií od rozhraní k rozhraní je roven plošné hustotě energií.

$$T_1 = T_2$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}} = q, \quad (2.45)$$

kde $\mathbf{n} \dots$ jednotkový normálový vektor

$q \dots$ plošná hustota energie [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$]

Na ose symetrie platí:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (2.46)$$

Jestliže na rozhraní nevzniká tepelná energie a rozhraní má konečnou vodivost, pak na tomto rozhraní platí následující podmínky

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(T_2 - T_1), \quad (2.47)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}}, \quad (2.48)$$

kde $\alpha \dots$ součinitel přestupu tepla prouděním [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$]

3. Přehled programů pro výpočet indukčního ohřevu

3.1 QuickField

Tento program je produktem společnosti Tera Analysis Ltd. Která má hlavní sídlo v Dánsku a byla založena roku 1999. Je to mezinárodní firma která prodává svoje produkty hlavně po internetu. Výhradní distributor pro Českou republiku je firma Energy Consulting Service, s.r.o. se sídlem v Českých Budějovicích.

Zde uváděný program je distribuovaný ve třech verzích ve verzi Professional, v tzv. Lite verzi a ve verzi pro studenty, která je zdarma. Rozdíl mezi těmito verzemi je v tom, že studentská verze má omezení počtu uzlů a to 255, tím pádem je vhodná jen pro modely s jednoduchou geometrií. Verze Lite je navržena jako síťová, je omezena počtem 4000 uzlů a zároveň tato verze slouží pouze pro účely výuky ne pro komerční využití. Professional verze, jak z názvu vyplývá je určena pro komerční použití, nemá omezení počtu uzlů. Cena verzí Lite a Professional je individuální záležití např. na zemi ve, které bude používána nebo na organizaci která ji bude používat a na mnoha dalších aspektech.

Program se zaměřuje na řešení teplotních deformačních a elektromagnetických polí. Program dokáže řešit daná pole, jako slabě sdružené úlohy tzn., že jednotlivé moduly jsou spolu spojeny tak abychom výsledky z jednoho pole mohly využít jako vstupní veličiny pro výpočet jiného pole. Daná pole je schopen řešit ve 2D. Řešení je prováděno pomocí metody konečných prvků a je využíváno nejmodernějších algoritmů. Program provádí řešení úlohy pomocí tří základních kroků: 1)preprocessing-je to příprava vstupních dat, definování úlohy. 2)processing-vlastní řešení úlohy. 3)postprocessing-prezentace a vyhodnocení vypočtených výsledků. Program dále obsahuje objektové QuickField knihovny díky nimž, lze vytvářet vlastní programovací skripty. Této technologii se říká Active Field a je založena na bázi OLE Automation.

3.2 Agros2D

Tento program je ve vývoji na katedře teoretické elektrotechniky FEL ZČU v Plzni. Vývoj programu byl započat v květnu roku 2009 tím pádem je tato aplikace poměrně mladá na trhu. Agros2D je volně ke stažení pod GNU General Public License.

Je to multiplatformní univerzální program, který je schopen řešit řadu fyzikálních polí např. pole magnetické, teplotní elektrostatické a mnohé další. Je napsán v jazyce C++ a vyvíjen na platformě linuxu.

Zde bych rád uvedl několik open-source knihoven, které program využívá. Pro výpočet parciálních diferenciálních rovnic používá knihovnu Hermes 2d. Zde uváděná knihovna je založena na adaptivní metodě vyššího řádu s přesností. Knihovna Hermes 2d je vyvíjena v USA na univerzitě v Reno pod vedením Pavla Šolína. Pomocí knihovny Qt je vytvořeno grafické prostředí. Vzhledem k tomu, že program využívá knihovnu Qt je možná lokalizace v Českém jazyce. Pro výpočet dat a vykreslování geometrie je využita knihovna OpenGL. Pro využití formátu DXF je použita knihovna dxflib.

Jak už z názvu vyplývá, program dokáže řešit 2D pole v osově symetrickém nebo kartézském souřadném systému. K dispozici máme analýzu přechodového děje, ustáleného stavu a harmonickou analýzu. Program provádí řešení úlohy pomocí tří základních kroků:

- 1)Preprocesor-tento modul slouží k vytvoření geometrie, definování materiálů a okrajových podmínek. Můžeme si, ale také importovat geometrii z jiného programu ve formátu DXF.
- 2)Procesor-zde probíhá vlastní řešení úlohy, probíhá zde např. vykreslování sítě. Vzhledem k tomu, že program využívá při výpočtu elementy vyššího řádu s přesností a automatickou hp-adaptivitu, dokáže program sám určit, kde má být síť jemnější a vyšší řád polynomu.
- 3)Postprocesor- slouží k analýze spočtených dat. Zde si můžeme zobrazit spočtené hodnoty pomocí vektorů, barevných map dále si zde můžeme pomocí povrchových nebo objemových integrálů spočítat veličiny charakterizující dané pole. Dá se tu také zobrazit pomocí grafů námi získané lokální veličiny.

3.3 ANSYS Multiphysics

Program je produktem firmy ANSYS Inc., která byla založena roku 1970 a pochází ze Spojených Států Amerických, konkrétně s hlavním sídlem ve městě Canonsburg státu Pensylvánie. Tato společnost působí na celosvětovém trhu už přes 40 let a má mnoho poboček po celém světě. Výhradním zástupcem pro Českou republiku je firma SVS FEM s.r.o. se sídlem v Brně, která působí na zdejším trhu od roku 1991.

ANSYS Multiphysics se řadí mezi špičkové programy. Je to nejrozšířenější program v oblasti FEM programů to jsou programy, využívající pro své výpočty metodu konečných prvků. Ovládá více jak čtvrtinu celosvětového trhu v této kategorii. Je také dokonce nepoužívanějším softwérem na univerzitách. Vzhledem k tomu, že program patří do kategorie strategický software, nelze ho bez kontroly vyvážet z USA a podléhá příslušným vývozním předpisům pro tuto kategorii. Dále ANSYS Multiphysics podléhá kvalitativní kontrole USNRC tzn., že nová verze programu musí podstoupit více než 10000 testů na daných pracovištích, než může být vydána. Program je v dostání pouze v placené verzi, jeho cena se značně liší je závislá na mnoha parametrech a účelech použití.

Jak už zde bylo řečeno, program využívá pro výpočet metodu konečných prvků, pomocí této metody je schopen řešit celou řadu fyzikálních polí např. teplotní, elektromagnetická, elektrostatická atd. Tyto pole je schopen řešit jako silně sdružené úlohy ve 2D nebo ve 3D.

Program se skládá z Preprocesoru, Solutionu, General Postprocessoru a TimeHist Postpro Postprocessoru. Preprocessor slouží k vytvoření modelu, vytváření sítě konečných prvků, volbě typů elementů, zadávají se zde také materiálové vlastnosti okrajové, popř. počáteční podmínky. Solution je prostředí samotného řešiče, slouží k volbě typu analýzy, nastavení podmínek řešení a především k samotnému řešení úlohy. General Postprocessor slouží k vyhodnocování a prohlížení výsledků. TimeHist Postpro Postprocessor slouží k prohlížení a vyhodnocování časově závislých dějů.

Díky novému prostředí nazývanému ANSYS Workbench environment, které je v programu implementováno je možné oboustranné propojení s CAD systémy. Program dále obsahuje vlastní programovací jazyk, který se označuje APDL a díky němu je možné vytváření maker. Makro je sekvence po sobě jdoucích příkazů uložených v textovém souboru, které ANSYS

Multiphysics po zavolání vykoná jako posloupnost příkazů v jednom celku bez použití grafického uživatelského rozhraní.

3.4 COMSOL Multiphysics(FEMLAB)

Tento program je od společnosti COMSOL, Inc., která byla založena roku 1986. Společnost sídlí v hlavním městě Švédska tedy ve Stockholmu. Společnost COMSOL, Inc. má mnoho poboček po celém světě. Pro český trh je výhradním distributorem firma HUMUSOFT s.r.o., která byla založena roku 1991 s hlavním sídlem v Praze.

V roce 1998 byla vydána první verze tohoto programu, od té doby prošel program mnoho změnami. Dříve se program jmenoval Femlab, ale od roku 2005 byl přejmenován na COMSOL Multiphysics.

Program je distribuovaný pouze v placené verzi, která stojí 257 980 Kč, k této verzi možné dokoupit ještě další moduly, tyto moduly stojí nemalé peníze. Je zde možnost si program vyzkoušet po dobu 14-ti dnů v podobě zkušební trial verze, která není nijak omezena a obsahuje všechny dostupné moduly.

Program COMSOL dokáže řešit fyzikální úlohy popsané parciálními diferenciálními rovnicemi pomocí metody konečných prvků. Program je schopen vyřešit snad všechny druhy fyzikálních polí, které je možno popsat diferenciálními rovnicemi. Tyto pole je schopen řešit jako sdružené úlohy buďto v 1D, 2D nebo dokonce ve 3D. Jako mnoho dalších programů umí i COMSOL import geometrie z jiného programu ve formátu DXF, ale zvládne i další formáty např. STL, STEP, SAT nebo VRML. COMSOL Dále obsahuje vlastní skriptovací nástroj pomocí něhož můžeme komunikovat s COMSOLEM přes příkazovou řádku, v tomto nástroji je možné modelovat a řešit úlohy bez použití grafického rozhraní.

3.5 RillFEM2D

Program je k dostání ve dvou variantách a to ve variantě placené pro komerční účely a ve variantě studentské, která je volně ke stažení. Studentská verze má oproti té komerční omezení maximálního počtu uzlů a to 2500.

Program RillFEM2D je multifyzikální program, který je schopen řešit elektromagnetické, teplotní a deformační pole. Tato pole je schopen řešit jako každé zvlášť nebo jako sdruženou úlohu. Využívá jako většina dnešních moderních programů metodu konečných prvků. Jak už z názvu vyplývá, program řeší danou úlohu ve 2D. Řešení problému je rozděleno do tří základních kroků stejně jako u většiny programů na preprocessor, solver a postprocessor. RillFEM2D využívá rychlý řešič založený na BiConjugateGradientní metodě. Zvládne také import a export souborů ve formátu DXF. Je možné RillFEM2D spustit pomocí konzole z příkazové řádky. Tím pádem si můžeme vytvořit dávkový soubor, který program vyřeší od prvního do posledního příkazu, takže můžeme v klidu řešit něco jiného, zatímco program počítá. Součástí programu je použitelná knihovna materiálů, ve které jsou přednastavené materiálové konstanty pro všechna tři pole.

3.6 Flux

Tento program je od firmy CEDRAT, zde uváděná firma působí na celosvětovém trhu už přes 30 let a má mnoho zkušeností. Je to francouzská firma s hlavním sídlem ve městě Meylan. Bohužel tento software není distribuovaný žádnou tuzemskou firmou, takže software je možno objednat přímo u výrobce nebo u partnerů v některém okolním státě.

Program je pouze v placené verzi. Jeho cena se odvíjí od řady parametrů např., ve kterém státě se bude používat, jestli bude využíván v síti nebo na daném počítači a mnohé další. Je zde možnost si program vyzkoušet v tzv. demo verzi a to po dobu 60 dní. Jsou zde určitá omezení oproti plné verzi, není tu podpora 3D zvládá pouze 2D a ještě nezvládne všechny fyzikální pole jako u plné verze, ale zato nemá žádné omezení počtu uzlů.

Jako většina programů je i tento založen na metodě konečných prvků. Program je schopen řešit magnetické, elektrické a teplotní pole buď ve 2D nebo 3D. Tyto pole je schopen řešit buďto zvlášť nebo jako silně sdružené úlohy. Řešení daného problému je rozděleno do pěti částí. V první části se nakreslí geometrie nebo se importuje z jiného CAD programu. V druhé fázi probíhá vytvoření sítě buď, automaticky nebo manuálně. Ve třetí fázi se daný problém analyzuje. V předposlední fázi dochází k samotnému řešení. A nakonec nám program zobrazí výsledek řešení.

3.7 Srovnání programů

Programy	Výhody	Nevýhody
Quickfield	-je k dostání ve studentské verze -jednoduchost, přehlednost	-cena -není lokalizován v češtině -nedokáže řešit úlohy ve 3D
ANSYS Multiphysics	-řeší 3D úlohy -řeší silně sdružené úlohy -oboustranné propojení s CAD systémy -vytváření maker	-složitost programu -není lokalizován v češtině -cena
Agros2D	-česká lokalizace -program je zdarma využívá adaptivní metodu vyššího řádu s přesností	-nedokáže řešit 3D úlohy
COMSOL Multiphysics	-vlastní skriptovací nástroj - řeší úlohy ve 3D -je k dostání 14-ti denní triál verze -řeší silně sdružené úlohy	-není lokalizován v češtině -cena -složitost programu
RillFEM2D	-je k dostání studentská verze - využívá BiConjugateGradientní metodu -je spustitelný z příkazové řádky	-není lokalizován v češtině
Flux	-řeší úlohy ve 3D -je k dostání 60-ti denní demo verze -řeší silně sdružené úlohy	-není lokalizován v češtině -cena

Tabulka 3.1: Srovnání programů

4. Srovnání numerických řešení vůči analytickým

4.1 Analytické řešení

Pokud řešíme danou úlohu analyticky, vždy se snažíme najít výsledek ve tvaru spojitých funkcí. Při tomto řešení úlohy využíváme postupů, matematické analýzy s využitím integrálního a diferenciálního počtu. Výhodou zde uváděného staršího postupu je, že pokud najdeme analytické řešení v uzavřeném tvaru, máme k dispozici obecnou funkční závislost mezi výstupními veličinami a vstupními veličinami daného problému. Pro podobný typ problému, můžeme takto získaný předpis jednoduše použít a dále s ním pracovat. Nejtěžší na tom všem je, že nalezení analytického řešení v uzavřeném tvaru je poměrně složité a dá se použít pouze pro omezenou škálu úloh. Ve většině případů můžeme využít analytické řešení jenom u úloh s jednoduchou geometrií a ještě k tomu musíme při odvozování použít dosti zjednodušujících podmínek. Tím pádem potom může být toto řešení značně nepřesné.

4.2 Numerické řešení

Numerické řešení je vždy přibližné. Při použití toho postupu převedeme problém hledání spojitých funkcí na problém hledání konečného počtu neznámých parametrů, díky kterým se hledaná funkce aproximuje. Tomuto procesu se říká diskretizace spojitého problému. Diskretizovaný problém se řeší algebraickými prostředky v konečném počtu kroků. Zde uváděný proces je velice těžko řešitelný, bez využití výpočetní techniky, proto se tyto metody začaly hojně využívat až od druhé poloviny dvacátého století. Jakoukoliv úlohu, kterou lze matematicky popsat můžeme touto metodou teoreticky řešit. Nezáleží na tom jak je komplikovaná. Bohužel to v praxi úplně takhle nefunguje, protože jsme omezeni výpočetním výkonem daného zařízení a časem. Vypočtené výsledky jsou však použitelné jen pro konkrétní úlohu, kterou jsme řešily. Pokud bychom chtěli udělat kterékoliv úpravy nebo optimalizace v dané úloze musíme celý proces řešení, tvorby modelu opakovat. V dnešní době existuje celá řada metod pro numerické řešení. Nejpoužívanější z nich je, ale metoda konečných prvků neboli MKP, kterou využívá většina programů, jež jsem v minulé kapitole popisoval.

4.2.1 Metoda konečných prvků

Pomocí metody konečných, lze numericky řešit technické úlohy. Tato metoda patří v současnosti mezi jednu z neúčinnějších přibližných metod, využívajících diferenciální rovnice. Metoda konečných prvků vychází z variačních principů.

Veličiny pole (potenciál, intenzita, indukce) nabývají takových hodnot, že při daných podmínkách je minimální rozdíl mezi energií elektrického pole W_e (popř. energií magnetického pole W_m) a energií W , která musela být vynaložena na vytvoření zdrojů pole (tj. daného rozložení nábojů nebo proudů). Symbolicky jej vyjádříme rovnicí[4]

$$W_e - W = \min, \text{ resp. } W_m - W = \min \quad (4.1)$$

Pro daný okrajový problém, lze získat konkrétní tvar energetického funkcionálu pomocí variačního počtu. Uvažujme např. smíšenou okrajovou úlohu v rovinné oblasti Ω s hranicí $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$: Řešíme Poissonovu rovnici

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -f \quad \text{na } \Omega \quad (4.2)$$

s Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$u = g_1 \quad \text{na } \Gamma_1 \quad (4.3)$$

a Neumannovou okrajovou podmínkou

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2 \quad (4.4)$$

Oblast Ω může být složena z podoblastí, na jejichž rozhraní jsou splněny přechodové (hraniční) podmínky. Tento okrajový problém je ekvivalentní s variačním problémem: Stanovit funkci u , pro kterou nabývá minima energetický funkcionál [4]

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} k \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\Omega} f u dx dy \quad (4.5)$$

Metoda konečných prvků spočívá v následujících krocích:

1. Provedeme triangulaci dané rovinné oblasti Ω tj. rozdělíme ji na konečný počet trojúhelníkových podoblastí Ω_p ($p = 1, 2, \dots, Q$) takových, že každé dvě z nich mají právě jednu ze tří vzájemných poloh:

- jsou disjunktní (tj. nemají žádný společný bod),
- mají společný pouze jeden vrchol,
- mají společnou celou jednu stranu.

Na triangulaci oblasti s různými prostředími klademe doplňkovou podmínku: Žádný z trojúhelníků Ω_p nesmí být protínán rozhraním. Lze volit i jiné druhy rozdělení obdobných vlastností (na obdélníky aj.), triangulace je však nejobvyklejší, neboť trojúhelníky lze s dostatečnou přesností pokrýt i geometricky složité rovinné oblasti Ω , přičemž jejich tvar i velikost můžeme snadno přizpůsobit specifickým požadavkům řešené úlohy. Křivočará hranice oblasti, resp. křivočaré rozhraní prostředí se při triangulaci snadno aproximuje lomenou čarou, tvořenou stranami hraničních trojúhelníků.[4]

2. V rovině, ve které leží oblast Ω , zavedeme soustavu souřadnic, např. kartézských (x, y) a v každé podoblasti Ω_p zvolíme:

a) typ (stupeň) polynomové funkce $u_p = P_p(x, y)$, jíž budeme aproximovat v Ω_p hledanou funkci u ,

b) uzlové body (uzly) triangulace, jimiž mohou být vrcholy trojúhelníků a popř. jejich další body,

c) uzlové parametry, tj. funkční hodnoty funkce u a popř. její parciální derivace podle souřadnic v uzlových bodech, kterými musí být jednoznačně určena aproximační funkce u_p . Takto charakterizované podoblasti Ω_p se nazývají konečné prvky. Uzlové body v celé oblasti Ω očíslováme, přičemž nejprve přiřadíme pořadová čísla $m = 1, 2, \dots, N$ uzlům, v nichž jsou uzlové parametry neznámé (tzv. volné parametry) a poté pořadová čísla $m = N + 1, \dots, M$ ostatním uzlům.[4]

3. Na celé oblasti Ω aproximujeme hledanou funkci u po částech polynomem

$$u = u_p = P_p(x, y) \quad \text{v } \Omega^p; \quad p = 1, 2, \dots, Q \quad (4.6)$$

Přitom hodnoty uzlových parametrů na hranicích sousedních prvků Ω_p klademe sobě rovny, čímž docílíme spojitosti funkce u a popř. i jejich parciálních derivací podle souřadnic do určitého řádu včetně.[4]

4. Minimalizovaný funkcional (4.5) vyjádříme ve tvaru

$$F = \sum_{p=1}^Q F^p \quad (4.7)$$

kde F_p jsou příspěvky od jednotlivých prvků Ω_p

$$F_p = \int_{\Omega_p} \left[\left(\frac{\partial u^2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^2}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\Omega_p} f^p u^p dx dy \quad (4.8)$$

5. Dosazením aproximace funkce u podle vztahu (4.6) do funkcionálu F vyjádřeného na základě vztahů (4.7) a (4.8) dostaneme funkci F , jejímiž proměnnými jsou neznámé uzlové parametry. Nutné podmínky pro její extrém nám dají soustavu algebraických rovnic, jejímiž kořeny jsou hledané hodnoty uzlových parametrů. Jestliže neznámými jsou funkční hodnoty u_m v uzlových bodech m , bude soustava rovnic[4]

$$\frac{\partial F}{\partial u_m} = 0; \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (4.9)$$

5. Závěr

Celá práce, která se zabývá numerickou analýzou při indukčních ohřevech, je rozdělena do tří kapitol.

V první kapitole je popsána teorie indukčního ohřevu. Teorie indukčního ohřevu je popsána pomocí elektromagnetického a teplotního pole. Elektromagnetické pole je zde popsáno čtyřmi Maxwellovými rovnicemi. Toto pole je rozděleno na stacionární, nestacionární a kvazistacionární. Jsou zde uvedeny podmínky na rozhraní dvou prostředí. Dále jsou zde uvedeny okrajové podmínky, mezi ně patří Dirichletova podmínka, Neumannova podmínka a podmínky antiperiodicity a periodicity. Nakonec je uvedeno rozložení Joulových ztrát. Teplotní pole je popsáno rovnicí, která je dále upravena a zjednodušena. U teplotního pole jsem dále uvedl podmínky na rozhraní a okrajové podmínky mezi ně patří Neumannova, Dirichletova, Newtonova a podmínky čtvrtého druhu.

Ve druhé kapitole se zabývám přehledem programů pro indukční ohřev. Zde jsem uvedl šest programů, Quickfield, Agros2D, COMSOL Multiphysics, ANSYS Multiphysics, RillFEM2D a Flux, které se používají pro výpočet indukčního ohřevu. Vzhledem k tomu, že většina těchto programů jsou multifyzikální. Dají se tyto programy využít i v jiných odvětvích. U těchto programů jsem uvedl základní vlastnosti, jak fungují, jejich distributora, kdo je vyvíjel a další věci. Potom jsem zde uvedené programy porovnal, zhodnotil jejich výhody a nevýhody. Každý zde uvedený program má určité výhody a nevýhody. Záleží už jen na každém z nás, který z uvedených programů si vybereme a použijeme.

V poslední kapitole jsem porovnal numerická řešení vůči analytickým a popsal metodu konečných prvků.

V praxi je dnes běžné používat zde uvedené programy. Pomocí níž se namodeluje daný problém, což nám může ušetřit nemalé peníze i čas, vzhledem k tomu, že vytvoření daného modelu v praxi je ve většině případů finančně i časově nákladné.

Literatura

- [1] LANGER, E.: Teorie indukčního a dielektrického tepla. Praha 1979
- [2] MAYER, D.: Teorie elektromagnetického pole. Plzeň 2001
- [3] LANGER, E., KOŽENÝ, J.: Elektrotepelná zařízení indukční. Plzeň 1982
- [4] MAYER, Daniel a POLÁK, Josef. Metody řešení elektrických a magnetických polí: Vysokošk. učebnice pro elektrotechn. fakulty. 1. vyd. Praha: SNTL, 1983. 450 s.
- [5] POLÁK, Josef. Variační principy a metody teorie elektromagnetického pole. 1. vyd. Praha: Academia, 1988. 311 s.
- [6] ROT, David. Indukční ohřev pro montáž a demontáž obruče turborotoru. Plzeň, 2003. Diplomová práce
- [7] Internet: <http://quickfield.cz>
- [8] Internet: http://www.rillfem.com/files/RillFEM_2D_verzeR1_02_02_2009v.pdf
- [9] Internet: <http://www.abclinuxu.cz/clanky/agros2d-aplikace-pro-reseni-fyzikalnich-poli>
- [10] Internet: http://www.humusoft.cz/archived/pub/femlab/12_02/fem_sim.htm
- [11] Internet: <http://www.mmspektrum.com/clanek/comsol-multiphysics-nove-jmeno-pro-femlab.html>
- [12] Internet: <http://www.comsol.com/products/multiphysics/>
- [13] Internet: <http://www.agros2d.org/>
- [14] Internet: <http://www.cedrat.com/en/software-solutions/flux.html>
- [15] Internet: <http://ansys.com>
- [16] Internet: <http://www.svsfem.cz>