Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

René Grežďo

Vrcholové barvení grafu

Katedra matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jan Ekstein, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Plzeň 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně s použitím literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V .... dne .... Podpis autora ....

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu práce RNDr. Janu Eksteinovi, Ph.D. za cenné připomínky a veškerý čas, který mi velmi ochotně věnoval při přípravě této práce. Dále bych chtěl poděkovat panu RNDr. Přemyslu Holubovi, Ph.D. za poskytnutí literatury. Chtěl bych také poděkovat mé partnerce a její rodině za podporu, bez níž by tato práce nikdy nevznikla.

Abstrakt

Tato práce se zabývá vrcholovým barvením grafu. V první kapitole jsou uvedeny možné aplikace barvení grafu. Ve druhé kapitole definujeme jednotlivá uvažovaná barvení - vlastní, p-distanční, pakovací, acyklické a seznamové barvení. Třetí kapitola, která je rozdělena na čtyři podkapitoly, je věnována známým výsledkům uvažovaných typů barvení jak pro obecné grafy, rovinné grafy, tak zejména pro speciální třídy grafů uvažovaných v této práci v rámci daných podkapitol. V jednotlivých podkapitolách věnujeme pozornost srovnání chromatických čísel jednotlivých typů barvení v rámci dané speciální třídy grafů - cesty, kružnice, stromy, kaktusy. V poslední podkapitole věnované vrcholovému barvení kaktusů dokážeme tvrzení pro vlastní, acyklické a seznamové barvení a zároveň uvádíme hypotézy pro p-distanční a pakovací barvení subkubických kaktusů.

Klíčová slova

Vrcholové barvení; vlastní barvení; p-distanční barvení; pakovací barvení; acyklické barvení; seznamové barvení.

Abstract

This thesis deals with vertex colorings of a graph. In the first chapter there are possible applications of graph colorings. In the second chapter we define considered colorings - proper, p-distance, packing, acyclic and list colorings. Third chapter, which is splitted into four parts, is devoted to known results of the considered colorings of general graphs, planar graphs and for special classes of graphs considered in this thesis. In these chapters we focus on comparing chromatic numbers of considered types of colorings for given classes of graphs - paths, cycles, trees, cacti. In the last subchapter, which is devoted to vertex colorings of cacti, we prove theorems for the proper, the acyclic and the list coloring and we also state conjectures for the p-distance and the packing coloring of cacti.

Keywords

Vertex coloring; proper coloring; p-distance coloring; packing coloring; acyclic coloring; list coloring.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V této kapitole uvedeme historický vývoj teorie grafů, který je popsán v [21]. Protože se tato práce zabývá vrcholovým barvením grafů, je součástí této kapitoly také motivace pro barvení grafů.

1.1 Historie teorie grafů

Za zakladatele teorie grafů je považován švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler (1707 - 1783), který roku 1736 publikoval článek, ve kterém vyřešil „problém sedmi mostů města Královce". Tento problém se zabýval otázkou, zda je možné projít všemi sedmi mosty tohoto města tak, aniž by bylo nutné projít některým z nich dvakrát, přičemž bylo nutné cestu ukončit v místě, kde byla započata.

Následně zůstala teorie grafů na dalších 100 let téměř bez povšimnutí. To se však změnilo v roce 1847. Právě v tomto roce se německý fyzik Gustav Kirchhoff (1824 - 1887) začal zabývat některými problémy teorie grafů souvisejícími s jeho výpočty v elektrických obvodech.

Britský matematik Arthur Cayley (1821 - 1895) roku 1857 zjišťoval pomocí grafu počty různých uskupení molekul alkanů. Zjistil, že je-li v molekule alkanu n atomů uhlíku, pak se v ní nachází přesně $n+2$ atomů vodíku. Stanovil tedy obecný vzorec pro alkany C_nH_{n+2}.

O dva roky později irský matematik, fyzik a astronom sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865) vymyslel hru, v níž bylo úkolem hráče z výchozího vrcholu pravidelného dvanáctistěnu navštívit po hranách všechny jeho ostatní vrcholy a vrátit se zpět do výchozí vrcholu tak, aby byl každý vrchol použit právě jednou. Jednalo se o hledání hamiltonovské kružnice v grafu.

Jednou z nejznámějších úloh teorie grafů 19. století byla úloha „problému čtyř barev". Úkolem bylo zjistit, zda je možné každou mapu obarvit pomocí čtyř barev tak, aby sousední státy měly různé barvy. Ačkoliv první zmínky o tomto problému se objevily v roce 1852, vyřešen byl až v roce 1976. I díky tomuto problému se dostala teorie grafů do středu zájmu mnoha matematiků 19. a 20. století a tak od poloviny 20. století nastává její prudký rozvoj.

1.2 Motivace

Teorie grafů je velmi bohatá, co se týče aplikačních oblastí. Nalézá uplatnění například ve fyzice, kybernetice a robotice, elektrotechnice, chemii, biologii, logistice či informačních technologiích.

Jednou z možných aplikací barvení grafu, jakožto části teorie grafů, je skladování nebezpečných látek, dále pak podávání léků, přiřazování frekvencí či plánování procesů (složitých rozvrhů). Můžeme také zmínit data mining (vytěžování dat), který může sloužit například při analýze genetických informací.

Jelikož si dnešní doba žádá velmi rozsáhlé a složité výpočty, ať už se jedná o výzkum v oblastech astrofyziky (dynamika galaxií, výbuchy supernov apod.) či o analýzu dat získaných v urychlovači částic LHC (Large Hadron Collider) v CERNu a jiných problémů současné vědy, ke kterým se využívají nejmodernější superpočítače, vzniká potřeba vhodného přidělovaní procesů mnoha procesorům. Aplikací barvení grafu lze vhodného přidělení procesů procesorům dosáhnout. Barvení grafů lze také využít v kvantové teorii pole a v mnoha dalších oblastech. Není tedy divu, že se právě této oblasti teorie grafů věnuje značná pozornost.

Kapitola 2

Přehled základních pojmů

V této kapitole definujeme všechny základní pojmy teorie grafů, které budeme v tomto textu používat včetně jednotlivých typů vrcholového barvení grafu, kterými se práce bude zabývat.

2.1 Základní pojmy teorie grafů

Než přistoupíme k definování pojmu grafu, uvedeme, že naše definice se omezuje pouze na neorientované prosté grafy. Prostým grafem rozumíme graf bez smyček a násobných hran. Existují samozřejmě i grafy orientované či multigrafy, jejichž definice uvádí např. Diestel v [5].

Graf G je uspořádaná dvojice $G = (V(G), E(G))$, kde $V(G)$ je množina vrcholů grafu G a $E(G)$ je jeho množina hran. Množina hran je podmnožinou množiny všech možných dvojic různých vrcholů, tedy $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$. Poznamenejme, že vrcholy grafu budeme značit malými písmeny. U hran je tomu taktéž, nicméně hrana je určená dvojicí vrcholů, tedy hranu mezi vrcholy u a v značíme uv.

Stupeň vrcholu v grafu G je počet hran grafu, které obsahují vrchol v; značíme $d_G(v)$. Vrchol v grafu G, pro který platí, že $d_G(v) = 0$, nazýváme *izolovaným vrcholem*. *Maximální stupeň* grafu G značíme $\Delta(G)$. Tvrdíme, že dva vrcholy u a v grafu G jsou *sousední*, jestliže $uv \in E(G)$.

Graf G nazýváme *$\Delta(G)$-regulárním*, pokud všechny vrcholy grafu G mají stupeň $\Delta(G)$. *Kubický graf* je 3-regulární graf. Graf G nazýváme *subkubickým*, pokud každý vrchol v grafu G má stupeň $d_G(v) \leq 3$.

Úplným grafem K_n na n vrcholech rozumíme graf, jehož každé dva vrcholy jsou sousední. Tím jsme definovali jednu ze tříd grafů, kterou budeme v této práci používat. Další třídy grafů definujeme níže.

Cesta na n vrcholech pro $n \geq 2$ je graf $P_n = (V(P_n), E(P_n))$, kde $V(P_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ a $E(P_n) = \{x_1x_2, x_2x_3, ..., x_{n-1}x_n\}$. Cesta je tedy určena posloupností vrcholů. *Délka cesty* P_n je počet hran cesty; značíme $l(P_n)$. Pro délku cesty P_n tedy platí, že $l(P_n) = n - 1$.

Kružnice na n vrcholech pro $n \geq 3$ je graf $C_n = (V(C_n), E(C_n))$, pro který $V(C_n) = V(P_n)$ a $E(C_n) = E(P_n) \cup \{x_n x_1\}$. Poznamenejme, že pro sudá n nazýváme kružnicí sudou a pro lichá n kružnicí lichou. Kružnici C_3 se také říká *trojúhelník*.

Uvažujme dva grafy G a G'. Pokud $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') \subseteq E(G)$, pak G' je *podgrafem* grafu G; píšeme, že $G' \subseteq G$. Když $G' \subseteq G$ a G' obsahuje všechny hrany $uv \in E(G)$ příslušející vrcholům $u, v \in V(G')$, pak G' nazýváme *indukovaným podgrafem* grafu G. Podgraf $G' \subseteq G$ nazveme *faktorem* grafu G, pokud $V(G') = V(G)$ a $E(G') \subseteq E(G)$.

Podgraf grafu G, který vznikne odstraněním vrcholu $u \in V(G)$ a všech hran vedoucích z tohoto vrcholu, budeme značit $G - u$. Podgraf grafu G, který vznikne odstraněním vrcholů $u, v \in V(G)$, budeme značit $G - \{u, v\}$. Podgraf grafu G, který vznikne odstraněním hrany $uv \in E(G)$, budeme značit $G - uv$.

Dva grafy G a G' jsou *isomorfní* (značíme $G \simeq G'$), pokud existuje bijektivní zobrazení $\phi : V(G) \to V(G')$ takové, že pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí, že $uv \in E(G)$ právě tehdy, když $\phi(u)\phi(v) \in E(G')$.

Cestu v grafu G definujeme jako podgraf $G' \subseteq G$ isomorfní s nějakou cestou P_n. Podobně *kružnici v grafu* G definujeme jako podgraf $G' \subseteq G$ isomorfní s nějakou kružnicí C_n.

Vzdálenost $d_G(u, v)$ dvou vrcholů grafu G je délka nejkratší cesty mezi těmito vrcholy. V případě, že cesta mezi danými vrcholy neexistuje je $d_G(u, v) = \infty$. *Excentricita vrcholu*, značíme $exc(v)$, je největší ze všech vzdáleností vrcholu v od ostatních vrcholů grafu G. *Průměr grafu* G je maximální excentricita vrcholu v grafu G, značíme $diam(G)$.

Řekneme, že graf G je *souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy u, v grafu G existuje cesta z u do v. Graf G je *vrcholově k-souvislý*, pokud po odstranění libovolných méně než k vrcholů grafu G, zůstane výsledný graf souvislý. Největší číslo k takové, že graf G je vrcholově k-souvislý, nazveme *vrcholovou souvislostí*, značí se $\kappa(G)$. Poznamenejme, že lze také definovat hranovou k-souvislost grafu G, jejíž definici uvádí např. Diestel v [5]. V této práci budeme uvažovat pouze vrcholovou k-souvislost grafu G a proto nadále v celém textu k-souvislým grafem G budeme myslet vrcholově k-souvislý graf G. Doplňme, že souvislý graf G je 1-souvislý graf. Nechť G je souvislý graf. Pokud graf $G - x$ není souvislý, pak vrchol x nazýváme *artikulace*. Poznamenejme, že pro souvislý graf G, který obsahuje artikulaci, platí $\kappa(G) = 1$ a 2-souvislý graf neobsahuje artikulaci. *Blok* grafu G je souvislý podgraf bez artikulace obsahující maximální počet vrcholů a hran grafu G.

Nyní definujme další třídu grafů. *Strom* T je souvislý graf neobsahující žádnou kružnici. Strom T, který je faktorem grafu G, nazýváme *kostrou* grafu G. Vrchol grafu G stupně jedna je *list*. Strom T je *$\Delta(T)$-regulární*, pokud všechny vrcholy T, které nejsou listy, mají stupeň $\Delta(T)$. *Úplný binární strom* B_i definujeme induktivně tak, že B_1 je izolovaný vrchol, který nazýváme *kořen*, a strom $B_i, i > 1$ získáme z B_{i-1} připojením dvou nových vrcholů hranou ke každému listu B_{i-1}, respektive ke kořenu pro $i = 2$. Nové listy jsou na úrovni i. Obdobně *úplný ternární strom* T_i definujeme induktivně tak, že T_1 je izolovaný vrchol, který nazýváme *kořen*, a strom $T_i, i > 1$ získáme z T_{i-1} připojením třech nových vrcholů hranou ke každému listu T_{i-1}, respektive ke kořenu pro $i = 2$. Nové listy jsou opět na úrovni i. *Hloubkou* úplného binárního stromu B_i, respektive úplného ternárního stromu T_i, rozumíme vzdálenost libovolného listu a kořene stromu B_i, respektive T_i, zvětšenou o 1. *Binární strom*, respektive *ternární strom* je souvislý podgraf (na alespoň dvou vrcholech) úplného binárního, respektive úplného ternárního stromu. Poznamenejme, že binární strom je strom s vrcholy stupně 1, 2 nebo 3 a ternární strom je strom s vrcholy stupně 1, 2, 3 nebo 4.

Kaktus K je souvislý graf na n vrcholech, kde $n \geq 2$, jehož každá hrana náleží nejvýše jedné kružnici. *Triviální kaktus* je kaktus, který neobsahuje žádnou kružnici. Kaktus, který obsahuje alespoň jednu kružnici, nazýváme *netriviálním kaktusem*. Netriviální kaktus nazýváme *sudým kaktusem* (značíme K_s), jestliže každá jeho kružnice je sudá. *Lichý kaktus* je netriviální kaktus, který obsahuje alespoň jednu lichou kružnici; značíme K_l.

Bipartitní graf je graf, jehož vrcholy je možné rozdělit na dvě disjunktní množiny tak, že žádné dva vrcholy ze stejné množiny nejsou sousední. *Úplným bipartitním grafem* rozumíme bipartitní graf, jehož každý vrchol z jedné množiny velikosti m je spojen hranou se všemi vrcholy druhé množiny velikosti n, značíme $K_{m,n}$. *Hvězda* je strom, jehož jeden vrchol je stupně n a zbylých n vrcholů jsou listy, čili rovněž úplný bipartitní graf $K_{1,n}$.

Rovinný graf je graf, pro který existuje nakreslení do roviny tak, že se žádné dvě hrany tohoto grafu nekříží. *Stěna* rovinného grafu G je část roviny (souvislá oblast) ohraničená hranami grafu G při jeho nakreslení do roviny (více [5]).

2.2 Vrcholové barvení grafů

Nyní definujeme vlastní, p-distanční, pakovací, acyklické a seznamové vrcholové barvení grafu G.

Definice 2.1. (Vlastní vrcholové barvení)
Nechť G je graf. Zobrazení $f : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ takové, že pro

$$\forall u, v \in V(G) : uv \in E(G) \Rightarrow f(u) \neq f(v),$$

se nazývá vlastní vrcholové barvení grafu G pomocí k barev. Nejmenší číslo $k \in \mathbb{N}$, pro které existuje vlastní vrcholové barvení grafu G pomocí k barev, nazýváme chromatickým číslem grafu G a značíme jej $\chi(G)$. Graf G je k-obarvitelný, jestliže existuje vrcholové barvení grafu G pomocí k barev.

Výše uvedená definice vlastního vrcholového barvení říká, že žádné dva sousední vrcholy grafu G nelze obarvit stejnou barvou, přičemž chromatické číslo vyjadřuje nejmenší počet barev potřebných k barvení tohoto grafu.

Poznamenejme, že níže uvedená barvení jsou speciálními případy vlastního barvení.

Dále uveďme, že lze také definovat hranové barvení grafu G, jehož definici uvádí např. Diestel v [5]. V této práci budeme uvažovat pouze vrcholové barvení grafu G

a proto nadále v celém textu barvením grafu G budeme myslet vrcholové barvení grafu G.

Definice 2.2. **(p-distanční barvení)**
Nechť G je graf. Zobrazení $f : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ takové, že pro

$$\forall u, v \in V(G) : d_G(u, v) \leq p \Rightarrow f(u) \neq f(v),$$

kde $p \in \mathbb{N}$ je kladné číslo, se nazývá p-distanční barvení *grafu G pomocí k barev. Nejmenší číslo $k \in \mathbb{N}$, pro které existuje p-distanční barvení grafu G pomocí k barev, nazýváme* p-distančním chromatickým číslem *a značíme jej $\gamma(p, G)$.*

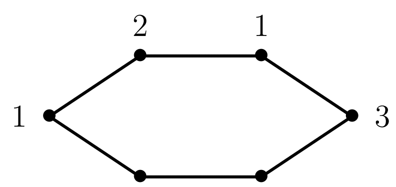
Z definice 2.2 plyne, že žádné dva vrcholy grafu G, které jsou od sebe ve vzdálenosti menší nebo rovno p, nelze obarvit stejnou barvou.

Definice 2.3. **(Pakovací barvení)**
Nechť G je graf. Zobrazení $f : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ takové, že pro

$$\forall u, v \in V(G) : d_G(u, v) \leq i \wedge f(u) = i \Rightarrow f(u) \neq f(v),$$

kde $i \in \{1, 2, ..., k\}$, se nazývá pakovací barvení *grafu G pomocí k barev. Nejmenší číslo $k \in \mathbb{N}$, pro které existuje pakovací barvení grafu G pomocí k barev, nazýváme* pakovacím chromatickým číslem *grafu G a značíme jej $\chi_\rho(G)$.*

Definice pakovacího barvení říká, že vrcholy grafu G lze obarvit shodnou barvou i, pokud jsou tyto vrcholy ve vzdáleností větší než i. Je zřejmé, že přiřazováním jednotlivých barev příslušným vrcholům grafu G, se nám vždy s každou další přibývající barvou mění i požadavek na vzdálenost dvou vrcholů, kterým lze přiřadit stejnou barvu. Příklad tohoto barvení je na obrázku 2.1, kde je kružnice C_6 obarvena právě pakovacím barvením pomocí 4 barev.



Obrázek 2.1: Pakovací barvení kružnice C_6.

Definice 2.4. (Acyklické barvení)
Nechť zobrazení $f : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ je vlastní barvení grafu G takové, že v G neexistuje žádná kružnice C_n s $\chi(C_n) = 2$. Pak toto barvení nazveme acyklickým barvením grafu G pomocí k barev. Nejmenší číslo $k \in \mathbb{N}$, pro které existuje acyklické barvení grafu G pomocí k barev, nazýváme acyklickým chromatickým číslem a značíme jej $a(G)$.

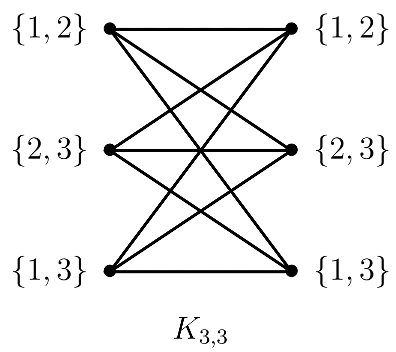
Definice 2.5. (Seznamové barvení)
Nechť G je graf. Je-li každému vrcholu $v \in V(G)$ grafu G dán seznam přípustných barev $S_v \subseteq \mathbb{N}$, pak zobrazení $f : V(G) \to S$, které je vlastním barvením grafu G, kde $S = \bigcup_{v \in V(G)} S_v$ takové, že

$$\forall v \in V(G) : f(v) \in S_v,$$

nazýváme seznamovým barvením grafu G. Graf G je seznamově k-obarvitelný, pokud pro libovolné množiny $S_v \subseteq \mathbb{N}$ a pro $\forall v \in V(G)$ existuje seznamové barvení grafu G seznamy délky $|S_v| = k$. Nejmenší číslo $k \in \mathbb{N}$, pro které je graf G seznamově k-obarvitelný, nazveme seznamovým chromatickým číslem nebo vybíravostí a značíme jej $\chi_l(G)$.

Definice seznamového barvení říká, že každému vrcholu grafu G lze přiřadit seznam přípustných barev tak, že pro libovolné volby seznamů barev obdržíme takové barvení grafu G, že žádné dva sousední vrcholy nebudou obarveny stejnou barvou. Na obrázku 2.2 je vidět, že úplný bipartitní graf $K_{3,3}$ není seznamově 2-obarvitelný (viz [19]).

Poznamenejme, že pokud každému vrcholu v grafu G přiřadíme stejný seznam barev $\{1, 2, ..., k\}$, pak seznamové barvení je vlastním barvením grafu G. Platí tedy, že $\chi_l(G) \geq \chi(G)$.



Obrázek 2.2: Úplný bipartitní graf $K_{3,3}$ s $\chi_l(K_{3,3}) = 3$.

Kapitola 3

Vrcholové barvení speciálních tříd grafů

V podkapitole 2.1 jsme definovali několik speciálních tříd grafů, jejichž barvením se budeme v této kapitole zabývat. Hlavní snahou bude srovnání chromatických čísel jednotlivých uvažovaných typů barvení v dané třídě grafů. Tato srovnání uvedeme v podkapitolách 3.1 až 3.4.

Jedinou speciální třídou grafů, jejíž srovnání chromatických čísel neuvedeme v rámci následujících podkapitol, jsou úplné grafy K_n. Důvodem je, že srovnání chromatických čísel jednotlivých typů barvení v této třídě grafů je triviální. Uveďme pro tuto třídu grafů následující pozorování.

Pozorování 3.1. *Nechť K_n je úplný graf na n vrcholech. Pak* $\chi(K_n) = \gamma(p, K_n) = \chi_\rho(K_n) = a(K_n) = \chi_l(K_n) = n$ *pro* $\forall p \in \mathbb{N}$.

Než uvedeme známé výsledky uvažovaných typů barvení definovaných v podkapitole 2.2 pro obecné a rovinné grafy, uvedeme nejprve tvrzení, které charakterizuje bipartitní grafy.

Tvrzení 3.2 [5]. *Graf G je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje lichou kružnici.*

V podkapitolách 3.1 až 3.4 se budeme zabývat barvením cesty P_n, kružnice C_n, stromu T a kaktusu K. Tvrzení 3.2 umožňuje určit společnou vlastnost těchto speciálních tříd grafů, kterou lze snadno využít pro vlastní barvení těchto grafů. Pro výše uvedené speciální třídy grafů plyne z tvrzení 3.2 následující pozorování.

Pozorování 3.3. *Cesta P_n na n vrcholech, sudá kružnice C_n, strom T a sudý kaktus K_s jsou bipartitní grafy.*

Poznamenejme, že speciálním případem kaktusu K je cesta či strom, tedy triviální kaktus, nebo kružnice. Pak triviální kaktus K dle pozorování 3.3 je rovněž bipartitní graf.

Pro bipartitní graf G platí, že $\chi(G) = 2$. Vrcholy bipartitního grafu G lze rozdělit na dvě disjunktní množiny A a B. Protože žádné dva vrcholy grafu G náležející stejné množině nejsou sousední, lze je obarvit stejnou barvou. Proto všechny vrcholy grafu G lze obarvit pomocí dvou barev tak, že žádné dva sousední vrcholy nejsou obarveny stejnou barvou.

Následuje několik známých výsledků pro vlastní barvení grafu G. Nejprve uvedeme větu, která udává horní odhad chromatického čísla grafu G pomocí maximálního stupně grafu.

Věta 3.4 [5]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta(G)$. Pak $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Označme vrchol $x \in V(G)$, který obarvíme barvou 1. Ostatní vrcholy grafu G obarvíme hladově, tedy každý vrchol grafu G obarvíme nejmenší volnou barvou, která není použita na jeho již obarvené sousední vrcholy. Dle předpokladu věty 3.4 má každý vrchol grafu G nejvýše $\Delta(G)$ sousedních vrcholů. Pokud $\Delta(G)$ sousedních vrcholů nějakého vrcholu $v \in V(G)$ obarvíme různými barvami, pak zcela jistě zbyde na obarvení vrcholu v jedna barva. Tímto způsobem jsme schopni obarvit celý graf G pomocí $\Delta(G) + 1$ barev.

Brooks [4] v roce 1941 ukázal, že horní odhad chromatického čísla grafu G ve větě 3.4 lze zlepšit pro grafy, které nejsou lichými kružnicemi nebo úplnými grafy.

Věta 3.5 [4]. *Nechť G je souvislý graf, který není úplný ani lichá kružnice. Pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Důkaz věty 3.5 uvedeme v jiné podobě (viz [10]), než jak jej lze najít v [4].

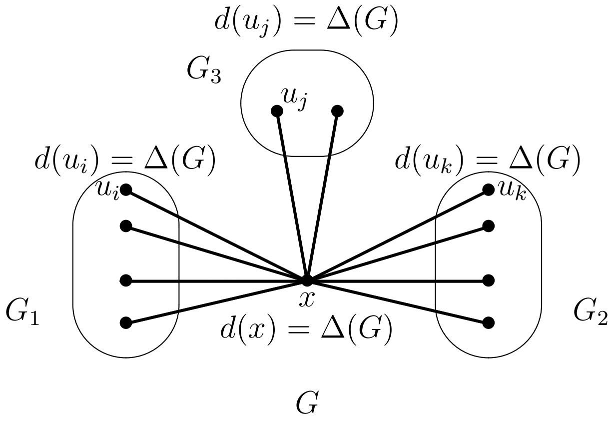
Důkaz. Nechť G je graf na n vrcholech, kde $n \in \mathbb{N}$. Pro $\Delta(G) = 0$ je $G = K_1$ a pro $\Delta(G) = 1$ je $G = K_2$, což je ve sporu s předpoklady věty.

Pro $\Delta(G) = 2$ je G cestou P_n nebo kružnicí C_n. Pro lichou kružnici C_n a cestu $P_2 = K_2$ dostáváme spor s předpoklady věty. Uvažujme tedy P_n, kde $n \geq 3$ a sudou kružnici C_n. Protože cesta P_n i sudá kružnice C_n je bipartitním grafem, zřejmě platí, že $\chi(P_n) = \chi(C_n) = 2$.

Pro $\Delta(G) \geq 3$ rozlišíme následující tři případy:

Případ 1. Graf G není $\Delta(G)$-regulární. Existuje tedy vrchol x grafu G takový, že $d_G(x) < \Delta(G)$. Vrcholy grafu G označme $v_1, ..., v_n$ tak, aby $x = v_n$ a každý další vrchol v_i grafu G měl alespoň jeden sousední vrchol v_j takový, že $i < j$. Vrcholy grafu G obarvíme hladově barvami $1, 2, ..., \Delta(G)$ následovně. Vrcholu v_1 přiřadíme barvu 1. Každý další vrchol v_i pro $i < n$, který má nejvýše $\Delta(G) - 1$ obarvených sousedních vrcholů, obarvíme nejmenší volnou barvou. Tímto způsobem jsme obarvili všechny vrcholy v_i grafu G pro $i < n$ použitím nejvýše $\Delta(G)$ barev. Protože vrchol $x = v_n$ má méně než $\Delta(G)$ sousedních vrcholů, zbyde na jeho obarvení jedna barva. Obarvíme tedy vrchol $x = v_n$ touto zbývající barvou. Tím je graf G obarven pomocí $\Delta(G)$ barev.

Případ 2. Graf G je $\Delta(G)$-regulární a obsahuje artikulaci $x \in V(G)$ (viz Obrázek 3.1). Označme G_i, kde $i \in \mathbb{N}$, komponenty grafu $G - x$. Potom každý podgraf G'_i, který vznikne z komponenty G_i přidáním vrcholu x a všech hran mezi G_i a x, má všechny vrcholy stupně $\Delta(G)$ kromě vrcholu x, jehož stupeň je menší než $\Delta(G)$.



Obrázek 3.1: Příklad $\Delta(G)$-regulárního grafu G s artikulací x.

Protože jsou splněny předpoklady *Případu 1*, každý podgraf G'_i lze obarvit $\Delta(G)$ barvami. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že vrchol x je obarven stejnou barvou v každém podgrafu G'_i. Permutací barev v různých G'_i je totiž možné dosáhnout toho, že vrchol x má v každém G'_i stejnou barvu. Máme tedy obarven celý graf G pomocí $\Delta(G)$ barev.

Případ 3. Graf G je $\Delta(G)$-regulární a 2-souvislý. Graf G tedy neobsahuje artikulaci. Protože G není úplný, obsahuje různé vrcholy $v_i, v_j, v_k \in V(G)$ takové, že $v_iv_j, v_jv_k \in E(G)$, ale $v_iv_k \notin E(G)$, kde $i, j, k \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že v_i, v_j, v_k lze vybrat tak, aby $G - \{v_i, v_k\}$ byl souvislý.

Zvolme libovolný vrchol $x \in V(G)$. Pokud $\kappa(G - x) = 1$, potom x má sousední vrchol v každém bloku $G - x$ s právě jednou artikulací. Nechť $v_j = x$ a v_i, v_k jsou sousední vrcholy vrcholu x v různých blocích $G - x$. Zřejmě $v_iv_k \notin E(G)$. Protože graf G je $\Delta(G)$-regulární s $\Delta(G) \geq 3$, graf $G - \{v_i, v_k\}$ je souvislý.

Pokud $\kappa(G - x) \geq 2$, zvolíme $v_i = x$ a vrchol v_k bude vrchol ve vzdálenosti 2 od x (takový vrchol existuje, protože G není úplný). Protože $\kappa(G - x) \geq 2$, je $G - v_i$ alespoň 2-souvislý a tak platí, že $G - \{v_i, v_k\}$ je souvislý.

Graf $G - \{v_i, v_k\}$ splňuje předpoklady z *Případu 1*, protože graf $G - \{v_i, v_k\}$ není $\Delta(G)$-regulární. Označme $v_3, ..., v_n$ vrcholy grafu $G - \{v_i, v_k\}$, přičemž $v_j = v_n$. Zřejmě vrcholy v_i, v_k jsou sousední vrcholy vrcholu $v_j = v_n$ a platí pro ně, že $v_iv_k \notin E(G)$. Vrcholy grafu $G - \{v_i, v_k\}$ (kromě vrcholu v_n) obarvíme obdobně jako v *Případě 1* nejvýše $\Delta(G)$ barvami. Protože vrchol v_n má $\Delta(G) - 2$ sousedních vrcholů, které jsou obarveny nejvýše $\Delta(G) - 2$ barvami, lze jej obarvit volnou barvou, přičemž zbyde jedna barva na vrcholy v_i a v_k, které nejsou sousední. Vrcholy v_i, v_k obarvíme zbývající volnou barvou. Máme tedy opět obarvení grafu G pomocí $\Delta(G)$ barev. $\square$

Velmi zajímavý výsledek publikovali Appel a Haken [1] v roce 1977 pro rovinné grafy. Dokázali více než 100 let starou hypotézu, ve které se tvrdilo, že každý rovinný graf G lze obarvit pomocí 4 barev.

Věta 3.6 [1]. *Každý rovinný graf G lze obarvit 4 barvami.*

Důkaz věty 3.6 je velmi složitý a rozsáhlý (přibližně 460 stran). Při dokazování této věty byla použita kombinace matematiky a počítačů a proto uvedeme slabší větu, kterou dokážeme. Nejprve uvedeme Eulerovu větu (věta 3.7) a následně tvrzení, které použijeme v důkazu věty 3.9.

Věta 3.7 [5]. *Nechť G je rovinný souvislý graf s n vrcholy, m hranami a f stěnami. Pak platí, že $n - m + f = 2$.*

Důkaz. Nechť G je rovinný souvislý graf s n vrcholy, m hranami a f stěnami. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle m. Pro $m = 0$ je $n = 1$ a $f = 1$. Tvrzení věty tedy platí. Nechť tvrzení věty platí pro všechny rovinné souvislé grafy s méně než m hranami, kde $m \geq 1$. Pokud je graf G strom, pak $n = m + 1$, $f = 1$ a tvrzení věty platí. Pokud graf G není stromem, pak v G existuje kružnice. Označme ji C. Dále označme uv hranu kružnice C. Pak souvislý graf $G' = G - uv$ má $n' = n$ vrcholů, $m' = m - 1$ hran a $f' = f - 1$ stěn. Podle indukčního předpokladu platí, že $n' - m' + f' = 2$. Dosazením za n', m', f' dostáváme, že $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$, což je po úpravě $n - m + f = 2$. $\square$

Tvrzení 3.8 [5]. *Každý rovinný graf G má vrchol stupně nejvýše 5.*

Důkaz. Jestliže G je rovinný graf s $n = 1$ nebo $n = 2$ vrcholy, pak tvrzení triviálně platí.

Nechť G je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy, m hranami a f stěnami. Zřejmě každá stěna f má alespoň tři hrany m a každá hrana m leží v nejvýše dvou stěnách f, tedy $2m \geq 3f$ a z toho plyne, že $f \leq \frac{2}{3}m$. Podle věty 3.7 a dosazením za f dostáváme $m - n + 2 \leq \frac{2}{3}m$. Po úpravě platí, že $m \leq 3n - 6$.

Sporem předpokládejme, že každý vrchol grafu G má stupeň větší nebo roven šesti. Pak součet stupňů vrcholů grafu G je větší nebo roven $6n$. Zřejmě součet stupňů vrcholů grafu G je roven dvojnásobku počtu hran, protože při sčítání stupňů vrcholů grafu započteme každou hranu dvakrát za každý její vrchol. Platí tedy, že $2m \geq 6n$. Úpravou dostáváme, že $m \geq 3n$, což je spor s tím, že pro rovinné grafy G platí, že $m \leq 3n - 6$. V rovinném grafu G tedy existuje vrchol stupně nejvýše 5. $\square$

Věta 3.9 [11]. *Každý rovinný graf G lze obarvit 5 barvami.*

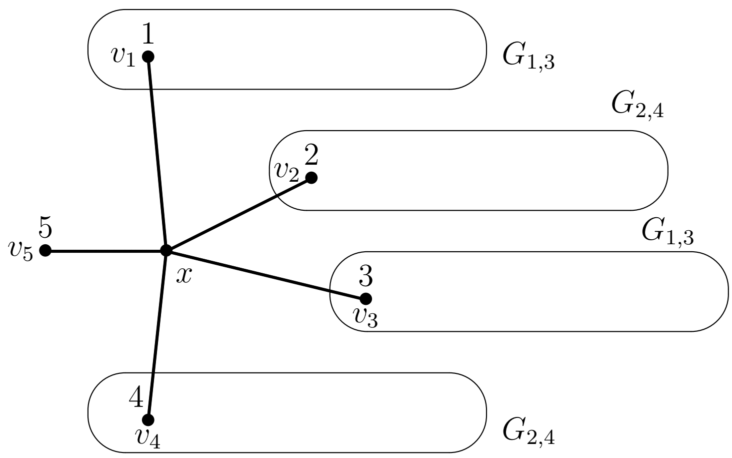
Důkaz věty 3.9 uvedeme v jiné podobě (viz [10]), než jak jej lze najít v [11].

Důkaz. Nechť G je rovinný graf na n vrcholech. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle n. Pro $n \leq 5$ tvrzení věty platí triviálně. Nechť $n \geq 6$ a tvrzení věty platí pro všechny rovinné grafy s méně než n vrcholy. Podle tvrzení 3.8 existuje vrchol $x \in V(G)$ takový, že $d_G(x) \leq 5$. Protože G je rovinný, $G - x$ je také rovinný. Podle indukčního předpokladu graf $G - x$ lze obarvit 5 barvami. Pro rovinný graf G na n vrcholech rozlišíme následující dva případy:

Případ 1. Pro $d_G(x) < 5$ má vrchol x méně než 5 obarvených sousedních vrcholů a proto na jeho obarvení zbyde alespoň jedna barva.

Případ 2. Nechť $d_G(x) = 5$. V případě, že sousední vrcholy vrcholu x jsou obarveny méně než 5 barvami, zbyde na obarvení vrcholu x alespoň jedna barva.

Předpokládejme, že sousední vrcholy vrcholu x jsou obarveny 5 barvami. Nechť zobrazení $f : V(G - x) \to \{1, 2, ..., 5\}$ je vlastním barvením grafu $G - x$. Zvolme nakreslení grafu G v rovině tak, že sousední vrcholy $v_1, v_2, ..., v_5 \in V(G)$ vrcholu x jsou obarveny posloupností barev $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tak, že $f(v_1) = 1, ..., f(v_5) = 5$. Označme $G_{1,3}$, respektive $G_{2,4}$ podgraf grafu G indukovaný všemi vrcholy s barvou 1 nebo 3, respektive 2 nebo 4 (viz Obrázek 3.2). Uvažujme $G_{1,3}$. Pokud vrcholy v_1 a v_3 patří do různých komponent $G_{1,3}$, potom můžeme prohodit barvy 1 a 3 v komponentě obsahující vrchol v_3. Tedy v_3 je obarven barvou 1 a vrcholu x lze přiřadit barvu 3. Obdobně postupujeme pro podgraf $G_{2,4}$ a tak lze vrcholu x přiřadit barvu 4. Tím jsme obarvili graf G 5 barvami.



Obrázek 3.2: Podgrafy $G_{1,3}$, $G_{2,4}$ indukované barvami $1, 3$ resp. $2, 4$.

Nechť v_1 a v_3 leží v jedné komponentě $G_{1,3}$. Pak v $G_{1,3}$ a tedy i v grafu G existuje cesta mezi vrcholy v_1 a v_3. Označme ji $P_{1,3}$.

Nechť v_2 a v_4 leží v jedné komponentě $G_{2,4}$. Pak v $G_{2,4}$ a tedy i v grafu G existuje cesta mezi vrcholy v_2 a v_4. Označme ji $P_{2,4}$. Pak ale, díky volbě nakreslení grafu G v rovině (viz Obrázek 3.2), cesta $P_{2,4}$ protíná cestu $P_{1,3}$ nebo alespoň jednu z hran xv_1, xv_3, což je spor s tím, že G je rovinný. Pokud cesta $P_{2,4}$ a $P_{1,3}$ má společný vrchol $z \in V(G)$, potom vrchol z je obarven 1 nebo 3 a zároveň 2 nebo 4, což nelze. Graf G jsme tedy obarvili 5 barvami. $\square$

Pro vlastní barvení rovinných grafů uvedeme ještě jeden další známý výsledek. Grötzsch [8] v roce 1959 ukázal, že lze k vlastnímu barvení rovinného grafu G použít pouze tři barvy, pokud G neobsahuje trojúhelníky.

Věta 3.10 [8]. *Každý rovinný graf G bez trojúhelníků lze obarvit 3 barvami.*

Následuje přehled několika známých výsledků pro p-distanční, acyklické a seznamové barvení grafů. Protože je velmi obtížné stanovit horní mez pakovacího chromatického čísla pro obecné grafy, kvůli jejich neznámé struktuře, není v současné době žádná taková mez stanovena. Existují pouze odhady pakovacího chromatického čísla pro různé třídy grafů. Některé z těchto odhadů uvedeme v rámci daných tříd grafů uvažovaných v této práci (viz podkapitoly 3.1 až 3.4).

Obdobně jako v případě vlastního barvení grafu G, uvedeme horní odhady chromatických čísel pomocí maximálního stupně $\Delta(G)$. Jelikož uvažované třídy grafů v následujících podkapitolách 3.1 až 3.4 jsou rovinnými grafy, uvedeme také několik tvrzení pro rovinné grafy podobně jako v případě vlastního barvení grafu G.

Wong [24] stanovil horní mez pro 2-distanční chromatické číslo rovinných grafů G s maximálním stupněm $\Delta(G)$.

Věta 3.11 [24]. *Nechť G je rovinný graf s maximálním stupněm $\Delta(G)$. Pak $\gamma(2, G) \leq 3\Delta(G) + 5$.*

Van den Heuvel a McGuinnes [12] vylepšili mez ve větě 3.11 pro rovinné grafy s $\Delta(G) \geq 20$.

Věta 3.12 [12]. *Nechť G je rovinný graf s maximálním stupněm $\Delta(G) \geq 20$. Pak $\gamma(2, G) \leq 2\Delta(G) + 25$.*

Pro distanční barvení rovinných grafů G uvedeme ještě následující tři věty.

Věta 3.13 [14]. *Nechť G je rovinný graf s maximálním stupněm $\Delta(G)$. Nechť $M = max\,\{8, \Delta(G)\}$. Pak $\gamma(p, G) \leq 6 + \frac{3M+3}{M-2}((M-1)^{p-1} - 1)$.*

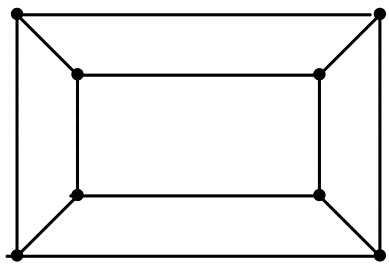
Madaras a Marcinová [17] vylepšili mez ve větě 3.13.

Věta 3.14 [17]. *Nechť G je rovinný graf s maximálním stupněm $\Delta(G)$. Nechť $M = max\,\{8, \Delta(G)\}$. Pak $\gamma(p, G) \leq 6 + \frac{2M+12}{M-2}((M-1)^{p-1} - 1)$.*

Horní mez p-distančního chromatického čísla ve větě 3.14 je lepší než ve větě 3.13 pro $\Delta(G) \geq 10$, což lze zjistit dosazením za $\Delta(G)$ do těchto vět. Pro $\Delta(G) < 10$ je tomu naopak.

Věta 3.15 [16]. *Nechť G je rovinný bipartitní graf s maximálním stupněm $\Delta(G) \leq 3$. Pak $\gamma(3, G) \leq 8$.*

Poznamenejme, že odhad 3-distančního chromatického čísla pro rovinné bipartitní grafy ve větě 3.15 je nejlepší možný, protože existují kubické rovinné bipartitní grafy s $\gamma(3, G) = 8$. Příklad takového kubického rovinného bipartitního grafu je na obrázku 3.3. Z obrázku je zřejmé, že $\gamma(3, G) = 8$, protože průměr grafu je roven třem a tedy podle definice 2.2 (pro $p = 3$) žádné dva vrcholy grafu nelze obarvit stejnou barvou. Každý vrchol grafu tedy obarvíme jinou barvou. Protože graf má osm vrcholů, použijeme k obarvení jeho vrcholů právě osm barev.



Obrázek 3.3: Kubický rovinný bipartitní graf G takový, že $\gamma(3, G) = 8$.

Srovnejme větu 3.14 s větami 3.11, 3.12 a 3.15. Srovnání provedeme dosazením za $\Delta(G)$ do vztahů pro stanovení horní meze p-distančního, 2-distančního a 3-distančního chromatického čísla těchto vět. Nechť G je rovinný graf, respektive rovinný bipartitní graf v případě, kdy uvažujeme větu 3.15. Pro $\Delta(G) < 14$ je horní mez 2-distančního chromatického čísla ve větě 3.11 lepší než ve větě 3.14 pro $p = 2$, nicméně pro $14 \leq \Delta(G) < 20$ je tomu naopak. Pro $\Delta(G) \geq 20$ a $p = 2$ je horní mez 2-distančního chromatického čísla ve větě 3.14 lepší než ve větě 3.12. Pro $\Delta(G) \leq 3$ je horní mez pro 3-distanční chromatické číslo ve větě 3.15 lepší než ve větě 3.14 (pro $p = 3$).

Poznamenejme, že věta 3.14 umožňuje stanovit horní mez p-distančního chromatického čísla pro libovolnou volbu parametru p, nicméně pro některé třídy grafů se nemusí jednat o nejlepší možnou horní mez, což bude zřejmé z následujících podkapitol.

Pro acyklické barvení Grünbaum v [9] dokázal, že pro každý rovinný graf G existuje acyklické barvení pomocí nejvýše 9 barev. V [9] zároveň vyslovil hypotézu, že pro každý rovinný graf G existuje acyklické barvení pomocí 5 barev. Tuto hypotézu později dokázal Borodin v [3].

Věta 3.16 [3]. *Pro každý rovinný graf G existuje acyklické barvení pomocí 5 barev.*

Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta(G)$, pak pro seznamové chromatické číslo platí, že $\chi_l(G) \leq \Delta(G) + 1$ (viz [6]). Důkaz je obdobný jako v případě vlastního barvení grafu G.

Vizing [23] a Erdős a kol. [6] nezávisle na sobě dokázali analogii Brooksovy věty pro seznamové barvení.

Věta 3.17 [23] [6]. *Nechť G je souvislý graf, který není úplný ani lichá kružnice. Pak $\chi_l(G) \leq \Delta(G)$.*

Na závěr této kapitoly uvedeme ještě jeden zajímavý výsledek.

Věta 3.18 [22]. *Každý rovinný graf G je seznamově 5-obarvitelný.*

3.1 Vrcholové barvení cest

V této a v následujících podkapitolách věnovaným barvení speciálních tříd grafů uvedeme výsledky pro jednotlivá barvení v pořadí, v jakém jsme je definovali v podkapitole 2.2.

Protože cesta P_n na $n \in \mathbb{N}$ vrcholech je bipartitním grafem, pro vlastní barvení cesty P_n platí, že $\chi(P_n) = 2$.

Následující dvě věty jsou známými výsledky problematiky určení p-distančního a pakovacího chromatického čísla cesty P_n.

Věta 3.19 [2]. *Nechť P_n je cesta na n vrcholech a $p \in \mathbb{N}$. Pak*
$\gamma(p, P_n) = 2$ *pro* $p = 1$,
$\gamma(p, P_n) = n$ *pro* $p \geq diam(P_n)$,
$\gamma(p, P_n) = p + 1$ *pro* $p < diam(P_n)$.

Pro $p = 1$ je p-distanční barvení vlastním barvením. Platí tedy, že

$$\gamma(1, P_n) = \chi(P_n) = 2.$$

Pro $p \geq diam(P_n)$ potřebujeme k p-distančnímu barvení vrcholů cesty P_n právě n barev, protože pro každé dva vrcholy u, v cesty P_n platí, že vzdálenost libovolných dvou vrcholů u a v je vždy menší nebo rovna p.

Nechť $p < diam(P_n)$. Tedy počet vrcholů cesty P_n je alespoň $p + 2$ a zřejmě vrcholy $x_1, x_2, ..., x_{p+1}$ cesty P_n musí být obarveny různými barvami. Z toho plyne, že $\gamma(p, P_n) > p$.

Vrcholům $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ cesty P_n přiřadíme posloupnost barev

$$\{1, 2, ..., p + 1, 1, 2, ...p + 1, ...\}.$$

Pak jsou obarveny vrcholy stejnou barvou pouze takové, které jsou ve vzdálenosti $p+1$. Vrcholy cesty P_n jsme tedy obarvili $p+1$ barvami. Tím jsme ukázali, že $\gamma(p, P_n) = p+1$.

Věta 3.20 [7]. *Nechť P_n je cesta na n vrcholech. Pak*
$\chi_\rho(P_n) = 2$ pro $n = 2, 3$,
$\chi_\rho(P_n) = 3$ pro $n > 3$.

Stanovení pakovacího chromatického čísla pro cestu P_2 a P_3 je zřejmé. Předpokládejme, že k obarvení všech vrcholů cesty P_n pro $n > 3$ stačí dvě barvy. Vrcholům $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ cesty P_n přiřadíme posloupnost barev (zřejmě nelze obarvit sousední vrcholy stejnou barvou)

$$\{1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...\}.$$

Pak ale existují vrcholy cesty P_n, které jsou obarveny barvou 2 a jsou ve vzdálenosti 2, což pro pakovací barvení nelze. K pakovacímu barvení vrcholů cesty P_n tedy nelze použít dvě barvy.

Pro pakovací barvení vrcholů $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ cesty $P_n, n > 3$ použijeme posloupnost barev

$$\{1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ...\},$$

díky níž lze všechny vrcholy cesty P_n obarvit pakovacím barvením pomocí tří barev.

Protože cesta P_n je graf, který neobsahuje žádnou kružnici, je acyklické barvení vlastním barvením. Platí tedy, že

$$a(P_n) = \chi(P_n) = 2.$$

Protože cesta P_n má chromatické číslo rovno dvěma a víme, že pro seznamové chromatické číslo platí, že $\chi_l(P_n) \geq \chi(P_n)$, tak $\chi_l(P_n) \geq 2$ a podle věty 3.17 dostáváme $\chi_l(P_n) \leq 2$. Z toho plyne, že $\chi_l(P_n) = 2$. Ukážeme jak cestu P_n seznamově 2-obarvit.

Vrcholům $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ cesty P_n přiřadíme libovolné seznamy barev délky dva. Vrcholy cesty P_n obarvíme barvami ze seznamů barev délky dva následujícím způsobem. Vrchol x_1 obarvíme libovolnou barvou ze seznamu barev. Protože vrchol x_2 má obarvený pouze jeden sousední vrchol, zbyde v seznamu barev délky dva jedna barva na jeho obarvení. Protože každý další vrchol cesty P_n má obarvený vždy pouze jeden sousední vrchol, vždy zbyde v seznamu barev délky dva barva na jeho obarvení. Tímto způsobem je cesta P_n obarvena barvami z libovolných seznamů barev délky dva, tedy $\chi_l(P_n) = 2$.

Následuje srovnání chromatických čísel jednotlivých uvažovaných typů barvení pro cesty P_n. Pro přehlednost uvádíme jednotlivá chromatická čísla v tabulce 3.1.

Chromatické číslo	Hodnota	Parametr p	Vrcholy P_n
$\chi(P_n)$	2	-	$\forall n$
$\gamma(p, P_n)$	2 n p+1	$p = 1$ $p \geq diam(P_n)$ $p < diam(P_n)$	$\forall n$ $\forall n$ $\forall n$
$\chi_\rho(P_n)$	2 3	- -	$n = 2, 3$ $n > 3$
$a(P_n)$	2	-	$\forall n$
$\chi_l(P_n)$	2	-	$\forall n$

Tabulka 3.1: Srovnání chromatických čísel pro cesty P_n pro pět typů barvení.

Z tabulky 3.1 je patrné, že $\gamma(p, P_n)$ je pro $n \geq 3$ a $p \geq 2$ vždy větší nebo rovno než ostatní chromatická čísla cesty P_n, které se rovnají dvěma až na $\chi_\rho(P_n)$, kde $n > 3$.

Na závěr této kapitoly poznamenejme, že z rovnosti chromatických čísel jednotlivých typů barvení grafu neplyne, že se jedná o tentýž typ barvení grafu.

3.2 Vrcholové barvení kružnic

Stanovíme chromatické číslo kružnic C_n na $n \in \mathbb{N}$ vrcholech. Protože maximální stupeň kružnice C_n je roven dvěma, podle věty 3.4 platí, že $\chi(C_n) \leq 3$. Jelikož sudá kružnice C_n je bipartitní graf platí, že $\chi(C_n) = 2$.

Protože lichá kružnice C_n není bipartitním grafem, při rozdělení vrcholů kružnice C_n na dvě disjunktní množiny A a B, ve kterých nejsou žádné dva vrcholy kružnice C_n náležející stejné množině sousední, vždy zbyde jeden vrchol $x \in V(C_n)$, který nemůže patřit ani do jedné z množin A, B. Na obarvení vrcholů náležejících množinám A, B stačí dvě barvy. Na obarvení vrcholu x je nutné použít další barvu. Pro vlastní barvení liché kružnice C_n platí, že $\chi(C_n) = 3$.

Pro distanční barvení platí.

Věta 3.21 [2]. *Nechť C_n je kružnice na n vrcholech, kde $n \geq 3$ a $p \in \mathbb{N}$. Pak*
$\gamma(p, C_n) = 2$ pro $p = 1$ a n sudé,
$\gamma(p, C_n) = 3$ pro $p = 1$ a n liché,
$\gamma(p, C_n) = n$ pro $p \geq diam(C_n)$,
$\gamma(p, C_n) = p + 1$ pro $p < diam(C_n)$ a $(n \bmod (p + 1)) = 0$.

Pro $p = 1$ je p-distanční barvení vlastním barvením kružnice C_n a proto pro sudá n platí, že

$$\gamma(1, C_n) = \chi(C_n) = 2.$$

Pro lichá n platí, že

$$\gamma(1, C_n) = \chi(C_n) = 3.$$

Pro $p \geq diam(C_n)$ potřebujeme k p-distančnímu barvení vrcholů kružnice C_n právě n barev, protože vzdálenost libovolných dvou vrcholů u, v kružnice C_n je vždy menší nebo rovna p.

Pro $p < diam(C_n)$ je $\gamma(p, C_n) = p + 1$, pokud počet vrcholů kružnice je roven násobkům $p + 1$. Tedy pokud platí, že $n = k(p + 1)$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $k \geq 2$. Zřejmě vrcholy $x_1, x_2, ..., x_{p+1}$ kružnice C_n musí být obarveny různými barvami. Z toho plyne, že $\gamma(p, P_n) > p$.

Pro p-distanční barvení vrcholů $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ kružnice C_n použijeme posloupnost barev

$$\{1, 2, ..., p + 1, ..., 1, 2, ..., p + 1\}.$$

Pak jsou obarveny vrcholy stejnou barvou pouze takové, které jsou ve vzdálenosti $p + 1$. Vrcholy kružnice C_n jsme tedy obarvili $p + 1$ barvami. Tím jsme ukázali, že $\gamma(p, C_n) = p + 1$.

Pro kružnice C_n, jejichž počet vrcholů není násobkem $p + 1$, tedy $n \neq k(p + 1)$, se nepodařilo nalézt žádný výsledek. Lze ovšem stanovit triviální horní mez pro p-distanční chromatické číslo takových kružnic. Vrcholům kružnice C_n zřejmě lze přiřadit výše uvedenou posloupnost barev, ve které se opakují barvy $1, ..., p + 1$, přičemž posledních $l = (n \bmod (p + 1))$ vrcholů kružnice C_n obarvíme použitím l barev, které nejsou použity na již obarvené vrcholy kružnice C_n. Pro kružnice C_n, kde $n \neq k(p + 1)$, tedy platí

$$(*) \quad \gamma(p, C_n) \leq (p + 1) + l.$$

Následující věta určuje pakovací chromatické číslo kružnic C_n.

Věta 3.22 [7]. *Nechť C_n je kružnice na n vrcholech, kde $n \geq 3$. Pak*
$\chi_\rho(C_n) = 3$ pro $n = 3$ nebo $(n$ mod $4) = 0$,
$\chi_\rho(C_n) = 4$ pro $n \neq 3$,$(n$ mod $4) \neq 0$.

Kružnice C_3 je úplným grafem K_3 a tak triviálně platí, že $\chi_\rho(C_3) = 3$.

Předpokládejme, že k obarvení všech vrcholů kružnice C_n, kde $(n \bmod 4) = 0$, stačí dvě barvy. Vrcholům $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ kružnice C_n přiřadíme posloupnost barev (zřejmě nelze obarvit sousední vrcholy stejnou barvou)

$$\{1, 2, 1, 2, ..., 1, 2\}.$$

Pak ale existují vrcholy kružnice C_n, které jsou obarveny barvou 2 a jsou ve vzdálenosti 2, což pro pakovací barvení nelze. K pakovacímu barvení vrcholů kružnice C_n tedy nelze použít dvě barvy.

Pro pakovací barvení vrcholů $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ kružnice C_n, pro kterou platí, že $(n \bmod 4) = 0$, použijeme posloupnost barev

$$\{1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3\},$$

díky níž lze všechny vrcholy kružnice C_n obarvit pakovacím barvením pomocí tří barev.

Pokud počet vrcholů kružnice C_n není násobkem čtyř, pak pro pakovací barvení vrcholů $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ kružnice C_n nestačí tři barvy, protože při barvení vrcholů kružnice C_n přiřazením výše uvedené posloupnosti barev vždy zbyde alespoň jeden vrchol, který nelze obarvit ani jednou z použitých barev, protože vzdálenost neobarveného vrcholu a již obarveného vrcholu (pro libovolnou použitou barvu) je vždy nejvýše tři.

Pro pakovací barvení vrcholů $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ kružnice C_n pro kterou platí, že $n = 4k + 1$, respektive $n = 4k + 2$ nebo $n = 4k + 3$, kde $k \in \mathbb{N}$, použijeme posloupnost barev

$$\{1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3, 4\},$$

respektive

$$\{1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3, 1, 4\}$$

nebo

$$\{1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3, 1, 2, 4\}.$$

Z definice 2.4 plyne, že každá kružnice C_n je acyklicky 3-obarvitelná. Protože vrcholy liché kružnice C_n nelze obarvit méně než třemi barvami a na obarvení vrcholů sudé kružnice C_n dle definice 2.4 nelze použít dvě barvy, je nutné vrcholy sudé i liché kružnice C_n obarvit třemi barvami. Platí tedy, že $a(C_n) = 3$ jak pro sudá, tak pro lichá n.

Nyní určíme seznamové chromatické číslo kružnic. Protože $\chi_l(C_n) \geq \chi(C_n)$, platí, že $\chi_l(C_{2k+2}) \geq 2$, respektive $\chi_l(C_{2k+1}) \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$.

Pro sudé kružnice C_n víme, že $\chi_l(C_n) \geq 2$ a podle věty 3.17 dostáváme $\chi_l(C_n) \leq 2$. Z toho plyne, že $\chi_l(C_n) = 2$ pro sudá n. Ukážeme jak sudou kružnici C_n seznamově 2-obarvit.

Vrcholům $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ sudé kružnice C_n přiřadíme libovolné seznamy barev $S_{x_i}, i = 1, ..., n$, délky dva. Označme $P = x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ cestu v kružnici C_n. Protože kružnice C_n je sudá, cesta P je sudé délky. Cesta P je seznamově 2-obarvitelná. Obarvíme tedy vrcholy $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_{n-1}$ cesty P barvami ze seznamů barev $S_{x_1}, ..., S_{x_{n-1}}$. V kružnici C_n je neobarven pouze vrchol x_n, který je sousední s vrcholy x_1, x_{n-1}.

Nechť a, b jsou dvě různé barvy. Pokud v seznamu S_{x_n} existuje barva, kterou není obarven žádný sousední vrchol vrcholu x_n na kružnici C_n, použijeme tuto barvu na obarvení vrcholu x_n. Platí tedy, že $\chi_l(C_n) = 2$ pro sudá n. Zbývá tedy, že až na symetrický případ vrchol x_1 je obarven barvou a, vrchol x_{n-1} je obarven barvou b a $S_{x_n} = \{a, b\}$. Potom je nutné přebarvit jeden z vrcholů x_1, x_{n-1}, aby bylo možné obarvit vrchol x_n volnou barvou z jeho seznamu barev S_{x_n}. Přebarvíme vrchol x_1 tak, že použijeme na jeho obarvení druhou barvu z jeho seznamu barev S_{x_1} a vrchol x_n obarvíme volnou barvou z jeho seznamu barev S_{x_n}. Jestliže je vrchol x_1 obarven jinou barvou než vrchol x_2, jsme hotovi. V opačném případě přebarvíme obdobně jako vrchol x_1 i vrchol x_2 a opakujeme postup, dokud nějaký vrchol x_i pro $i < n - 1$ cesty P má sousední vrchol, který není obarven stejnou barvou. Zřejmě takto lze částečně přebarvit vrcholy cesty P, protože cesta P je sudé délky a tak jistě existuje mezi seznamy barev $S_{x_1}, ..., S_{x_{n-1}}$ alespoň jeden seznam barev, který je různý od ostatních (jinak by vrcholy x_1, x_{n-1} nemohly být obarveny různými barvami). Vrcholy sudé kružnice C_n jsme obarvili barvami ze seznamů barev délky dva. Tím jsme ukázali, že $\chi_l(C_n) = 2$ pro sudá n.

Pro liché kružnice C_n víme, že $\chi_l(C_n) \geq 3$ a ze vztahu $\chi_l(C_n) \leq \Delta(C_n) + 1$ dostáváme $\chi_l(C_n) \leq 3$. Z toho plyne, že $\chi_l(C_n) = 3$ pro lichá n.

Následuje srovnání chromatických čísel jednotlivých uvažovaných typů barvení kružnic C_n, které je uvedené v tabulce 3.2.

Chrom. č.	**Hodnota**	**Parametr** p	**Vrcholy** C_n
$\chi(C_n)$	2	-	sudá n
	3	-	lichá n
	2	$p = 1$	sudá n
	3	$p = 1$	lichá n
$\gamma(p, C_n)$	n	$p \geq diam(C_n)$	$\forall n$
	$p + 1$	$p < diam(C_n)$	$(n \bmod (p+1)) = 0$
$\chi_\rho(C_n)$	3	-	$n = 3$,$(n \bmod 4) = 0$
	4	-	$n \neq 3$,$(n \bmod 4) \neq 0$
$a(C_n)$	3	-	$\forall n$
$\chi_l(C_n)$	2	-	sudá n
	3	-	lichá n

Tabulka 3.2: Srovnání chromatických čísel kružnic C_n pro pět typů barvení.

Pro $p \geq 2$ a $p < diam(C_n)$ je $\gamma(p, C_n)$ větší nebo rovno než ostatní chromatická čísla. Chromatická čísla nabývají hodnot $2, 3$ a 4, kromě dvou možností, kdy $p \geq diam(C_n)$ pro $n \geq 5$ a $p < diam(C_n)$ pro $p \geq 4$.

3.3 Vrcholové barvení stromů

Nejprve stanovíme chromatické číslo stromu T na $n \in \mathbb{N}$ vrcholech. Jelikož strom T je bipartitní graf platí, že $\chi(T) = 2$.

Nyní se budeme zabývat p-distančním barvením stromů. Pro p-distanční barvení hvězd $K_{1,n}$ triviálně plyne následující pozorování.

Pozorování 3.23. *Nechť T je hvězda $K_{1,n}$ na $n + 1$ vrcholech. Pak*
$\gamma(p, T) = 2$ *pro* $p = 1$,
$\gamma(p, T) = n + 1$ *pro* $p > 1$, *kde* $p \in \mathbb{N}$.

Pro $p = 1$ je p-distanční barvení vlastním barvením. Platí tedy, že

$$\gamma(1, T) = \chi(T) = 2.$$

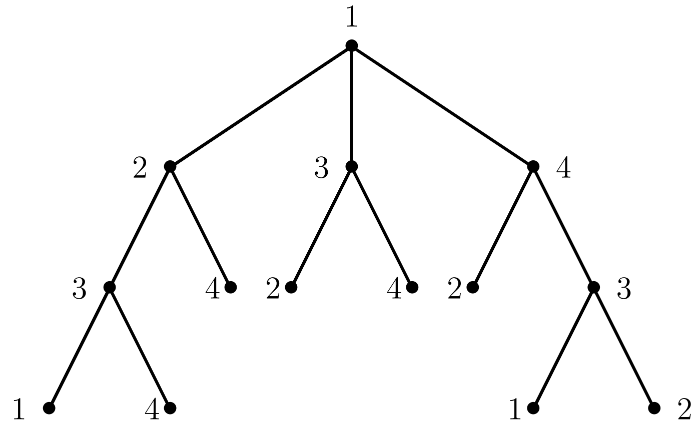
Pro $p > 1$ je vždy $p \geq diam(T)$ a tak k p-distančnímu barvení hvězdy T potřebujeme právě $n + 1$ barev.

Holub a Potyš [13] stanovili přesnou hodnotu p-distančního chromatického čísla pro $\Delta(T)$-regulární stromy s maximálním stupněm $\Delta(T) \geq 3$.

Věta 3.24 [13]. *Nechť T je $\Delta(T)$-regulární strom s $\Delta(T) \geq 3$ a $p \in \mathbb{N}$. Pak*
$\gamma(p,T) = 1 + \frac{\Delta(T)}{\Delta(T)-2}[(\Delta(T)-1)^{\frac{p}{2}} - 1]$ *pro sudá p,*
$\gamma(p,T) = \frac{2}{\Delta(T)-2}[(\Delta(T)-1)^{\frac{p+1}{2}} - 1]$ *pro lichá p.*

Poznamenejme, že pro $\Delta(T) < 3$ je $\Delta(T)$-regulárním stromem cesta $P_n, n \geq 2$, pro kterou je již stanovena hodnota p-distančního chromatického čísla v podkapitole 3.1 (viz věta 3.19).

Dosazením za $p = 1$ do věty 3.24 dostáváme, že $\gamma(1,T) = 2$, což odpovídá hodnotě chromatického čísla pro stromy. Dosazením za $p = 2$, respektive $p = 3$ do věty 3.24 dostáváme, že $\gamma(2,T) = \Delta(T)+1$, respektive $\gamma(3,T) = 2\Delta(T)$. Na obrázku 3.4 je příklad 2-distančního barvení $\Delta(T)$-regulárního stromu T pro $\Delta(T) = 3$ pomocí 4 barev, protože $\gamma(2,T) = \Delta(T) + 1 = 3 + 1 = 4$.

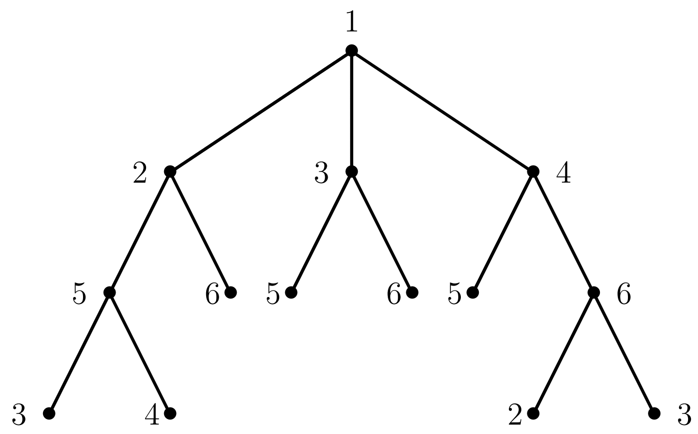


Obrázek 3.4: Příklad 2-distančního barvení 3-regulárního stromu T.

Na obrázku 3.5 je příklad 3-distančního barvení stejného $\Delta(T)$-regulárního stromu T jako je na obrázku 3.4 pro $\Delta(T) = 3$, jehož vrcholy jsou tentokrát obarveny pomocí 6 barev, protože $\gamma(3,T) = 2\Delta(T) = 6$.

Věta 3.25 je přímým důsledkem věty 3.24, jelikož udává rovněž horní mez p-distančního chromatického čísla pro stromy T s maximálním stupněm $\Delta(T) \geq 3$.

Věta 3.25 [13]. *Nechť T je strom s $\Delta(T) \geq 3$ a $p \in \mathbb{N}$. Pak*
$\gamma(p,T) \leq 1 + \frac{\Delta(T)}{\Delta(T)-2}[(\Delta(T)-1)^{\frac{p}{2}} - 1]$ *pro sudá p,*
$\gamma(p,T) \leq \frac{2}{\Delta(T)-2}[(\Delta(T)-1)^{\frac{p+1}{2}} - 1]$ *pro lichá p.*



Obrázek 3.5: Příklad 3-distančního barvení 3-regulárního stromu T.

Protože stromy jsou rovinné grafy, lze pro stanovení horní meze p-distančního chromatického čísla použít větu 3.14. Věta 3.25 tedy zlepšuje horní mez p-distančního chromatického čísla věty 3.14 právě pro stromy.

Než přistoupíme k pakovacímu barvení stromu doplňme pouze, že pro strom T na n vrcholech a pro $p \geq diam(T)$ platí, že $\gamma(p, T) = n$.

Nyní uvedeme pozorování, které udává hodnotu pakovacího chromatického čísla pro hvězdy.

Pozorování 3.26. *Nechť T je hvězda $K_{1,n}$ na $n + 1$ vrcholech. Pak* $\chi_\rho(T) = 2$.

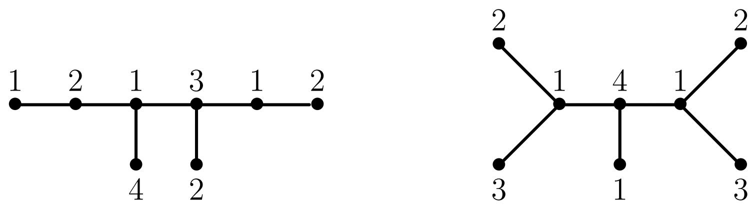
Pro pakovací barvení vrcholů hvězdy T zřejmě nelze použít pouze jednu barvu. Vrcholy hvězdy T lze obarvit tak, že listy obarvíme barvou 1 a zbývající neobarvený vrchol obarvíme nejmenší volnou barvou, tedy barvou 2. Platí tedy, že $\chi_\rho(T) = 2$.

Následuje několik výsledků pro pakovací barvení stromů. Goddard a kol. v [7] stanovili horní mez pakovacího chromatického čísla pro stromy.

Věta 3.27 [7]. *Nechť T je strom na n vrcholech. Pak*
$\chi_\rho(T) \leq \frac{n}{4} + 2$ *pro* $n = 4$ *nebo* $n = 8$,
$\chi_\rho(T) \leq \frac{n+7}{4} + 2$ *pro* $n \neq 4$ *a* $n \neq 8$.

Ve větě 3.27 je pro stromy na 4 vrcholech neostrá nerovnost pro horní mez pakovacího chromatického čísla, protože existuje strom na 4 vrcholech, jehož pakovací chromatické číslo je rovno třem; je to cesta P_4 (viz věta 3.20). Obdobně je v této větě také pro stromy na 8 vrcholech neostrá nerovnost pro horní mez pakovacího chromatického čísla, protože existují stromy na 8 vrcholech, jejichž pakovací chromatické číslo je rovno čtyřem. Příklady stromů na 8 vrcholech s průměrem $diam(T) = 5$, respektive $diam(T) = 4$, pro které platí, že jejich pakovací chromatické číslo je rovno čtyřem, jsou na obrázku 3.6 (viz [7]).

Příklad stromu T na n vrcholech, kde $n \neq 4$ a $n \neq 8$, pro který z věty 3.27 platí, že $\chi_\rho(T) = \frac{n+7}{4} + 2$, není v [7] uveden.



Obrázek 3.6: Stromy T na $n = 8$ vrcholech takové, že $\chi_\rho(T) = 4$.

Následující dvě věty jsou výsledky, které uvedl Sloper v [20] pro úplné binární a úplné ternární stromy nekonečné hloubky. Pro úplné binární stromy určil, že pakovací chromatické číslo je konečné, tedy je konečné i pro binární stromy. Pro úplné ternární stromy nekonečné hloubky určil, že pakovací chromatické číslo je neomezené, z čehož plyne, že libovolné stromy mohou mít libovolně velké pakovací chromatické číslo.

Věta 3.28 [20]. *Nechť T je úplný binární strom libovolné hloubky. Pak $\chi_\rho(T) \leq 7$.*

Věta 3.29 [20]. *Nechť T je úplný ternární strom libovolné hloubky. Pak $\chi_\rho(T) = \infty$.*

Protože strom T na n vrcholech je graf, který neobsahuje žádnou kružnici, je acyklické barvení vlastním barvením stromu T. Platí tedy, že

$$a(T) = \chi(T) = 2.$$

Nyní určíme seznamové chromatické číslo pro stromy T. Protože $\chi_l(T) \geq \chi(T)$ platí, že $\chi_l(T) \geq 2$. Ukážeme jak strom T seznamově 2-obarvit.

Nechť T je strom na n vrcholech. Všem vrcholům stromu T přiřadíme libovolné seznamy barev délky dva. Zvolíme libovolný vrchol stromu T a obarvíme jej libovolnou barvou ze seznamu barev délky dva. Dále postupujme v barvení vrcholů stromu T tak, že zvolíme libovolný vrchol, který má již obarvený právě jeden sousední vrchol, a obarvíme jej volnou barvou z jeho seznamu barev, která určitě existuje. Takto obarvíme všechny vrcholy stromu T barvami ze seznamů barev délky dva, protože strom je souvislý graf, který neobsahuje kružnici, tudíž existuje právě jedna cesta mezi libovolnými dvěma vrcholy stromu T. Platí tedy, že $\chi_l(T) = 2$.

Následuje tabulka 3.3, ve které jsou srovnána chromatická čísla pro stromy.

Chrom. č.	**Hodnota**	**Parametr** p	**Vrcholy** T
$\chi(T)$	2	-	$\forall n$
	2	$p = 1$	$\forall n$
	n	$p \geq diam(T)$	$\forall n$
$\gamma(p, T)$		$p < diam(T)$	
	$\leq 1 + \frac{\Delta(T)}{\Delta(T)-2}[(\Delta(T) - 1)^{\frac{p}{2}} - 1]$	sudá p	$\forall n$
	$\leq \frac{2}{\Delta(T)-2}[(\Delta(T) - 1)^{\frac{p+1}{2}} - 1]$	lichá p	$\forall n$
$\chi_\rho(T)$	$\leq \frac{n}{4} + 2$	-	$n = 4$,$n = 8$
	$\leq \frac{n+7}{4} + 2$	-	$n \neq 4$ a $n \neq 8$
$a(T)$	2	-	$\forall n$
$\chi_l(T)$	2	-	$\forall n$

Tabulka 3.3: Srovnání chromatických čísel pro stromy pro pět typů barvení.

Z tabulky 3.3 je vidět, u kterých chromatických čísel nastává rovnost. Chromatické číslo $\gamma(p, T)$ je pro $p \geq diam(T)$ vždy větší než $\chi(T), a(T), \chi_l(T)$ pro strom T na alespoň 3 vrcholech.

Z tabulky 3.3 a pozorování 3.23, 3.26 je patrné, že pro hvězdu $K_{1,n}$ na $n + 1$ vrcholech nastává rovnost všech chromatických čísel, kromě p-distančního chromatického čísla pro $p > 1$.

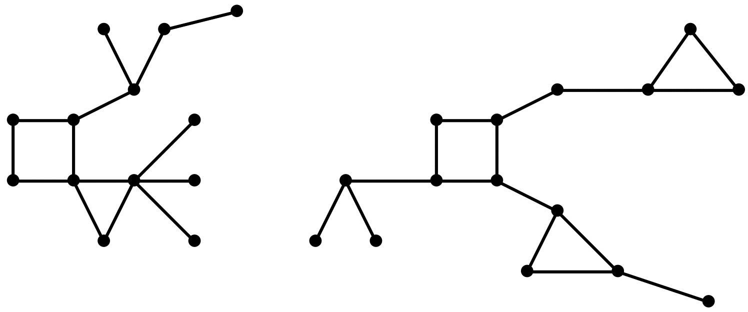
3.4 Vrcholové barvení kaktusů

V této podkapitole se budeme zabývat vrcholovým barvením kaktusů. Protože jsme pro kaktusy nenašli žádné známé výsledky, uvedeme v této podkapitole vlastní výsledky pro vlastní, acyklické a seznamové barvení. Dále uvedeme hypotézy pro pakovací a 3-distanční barvení subkubických kaktusů.

Připomeňme, že kaktus je souvislý graf na n vrcholech, kde $n \geq 2$, jehož každá hrana náleží nejvýše jedné kružnici. Kaktus, který neobsahuje žádnou kružnici, nazýváme triviálním kaktusem a kaktus, který obsahuje alespoň jednu kružnici, nazýváme netriviálním kaktusem. Rozlišujeme sudé a liché netriviální kaktusy (viz podkapitola 2.1). Subkubickým kaktusem rozumíme kaktus, jehož každý vrchol má stupeň nejvýše tři. Příklad kaktusu a subkubického kaktusu je na obrázku 3.7 (oba kaktusy jsou netriviální).

Než uvedeme první tvrzení této podkapitoly, definujeme nejprve následující pojem.

Kaktusová cesta je podgraf kaktusu K isomorfní s nějakou cestou $P_n, n \geq 2$, takovou, že žádná hrana této cesty nenáleží žádné kružnici v kaktusu K.



Obrázek 3.7: Příklad kaktusu a subkubického kaktusu.

Společně s J. Eksteinem jsme stanovili chromatické číslo pro všechny kaktusy.

Tvrzení 3.30 [J. Ekstein, R. G.]. *Nechť K je kaktus na n vrcholech. Pak* $\chi(K) \leq 3$.

Důkaz. Předpokládejme, že K je triviální kaktus. Pak na obarvení všech vrcholů kaktusu K stačí dvě barvy, protože K je bipartitní graf.

Nyní předpokládejme, že K je netriviální kaktus. Na obarvení vrcholů kružnice kaktusu K stačí nejvýše tři barvy, protože vrcholy sudé, respektive liché kružnice lze obarvit dvěma, respektive třemi barvami. Nechť C je kružnice v kaktusu K. Vrcholy kružnice C obarvíme pomocí dvou či třech barev podle toho, jestli je daná kružnice sudá či lichá. Jestliže v kružnici C neexistuje artikulace, obarvili jsme vrcholy kaktusu K použitím nejvýše tří barev.

V opačném případě najdeme artikulaci x kružnice C. Protože vrchol x je artikulace, existuje v kaktusu K alespoň jedna kaktusová cesta s vrcholy $x_1, x_2, ...$ taková, že $x_1 = x$ nebo alespoň jedna kružnice s vrcholy $y_1, y_2, ..., y_1$ taková, že $y_1 = x$.

Neobarvené vrcholy kaktusu K obarvíme následujícím způsobem:

Krok 1. Najdeme libovolně všechny hranově disjunktní kaktusové cesty $P_1, ..., P_k$, $k \in \mathbb{N}$, jejichž společným vrcholem je artikulace x. Jestliže neexistuje žádná taková kaktusová cesta, přejdeme na *Krok 2.* V opačném případě nejprve lze obarvit vrcholy každé kaktusové cesty P_i kromě vrcholu x pro $i \leq k$ dvěma barvami, protože P_i je bipartitní graf. Obarvíme tedy vrcholy kaktusové cesty P_i pomocí dvou barev podle prvního již obarveného vrcholu x.

Krok 2. Najdeme všechny kružnice $C_1, ..., C_l$, $l \in \mathbb{N}$, jejichž společným vrcholem je artikulace x. Jestliže neexistuje žádná taková kružnice, přejdeme na *Krok 3.* V opačném případě obarvíme vrcholy každé kružnice C_i kromě vrcholu x pro $i \leq l$ dvěma či třemi barvami podle toho, jestli je kružnice C_i sudá či lichá podle prvního již obarveného vrcholu x.

Krok 3. Jestliže v kaktusu K existuje obarvená artikulace s alespoň jedním neobarveným sousedním vrcholem, přejdeme na *Krok 1* s touto artikulací. V opačném případě jsme obarvili všechny vrcholy kaktusu K použitím nejvýše tří barev. □

Z důkazu tvrzení 3.30 plynou následující důsledky.

Důsledek 3.31 [J. Ekstein, R. G.]. *Jestliže K je triviální kaktus nebo sudý kaktus na n vrcholech, pak $\chi(K) = 2$.*

Zřejmě jak triviální kaktus, tak sudý kaktus jsou bipartitní grafy.

Důsledek 3.32 [J. Ekstein, R. G.]. *Nechť K_l je lichý kaktus na n vrcholech. Pak $\chi(K_l) = 3$.*

Protože kaktus K je rovinný graf, lze použít pro stanovení horní meze p-distančního chromatického čísla kaktusu K větu 3.14. Pro kaktus K s maximálním stupněm $\Delta(K)$ tedy platí, že

$$\gamma(p, K) \leq 6 + \frac{2M + 12}{M - 2}((M - 1)^{p-1} - 1),$$

kde $M = \max\{8, \Delta(K)\}$.

Podle věty 3.15 platí, že pokud G je rovinný bipartitní graf s maximálním stupněm $\Delta(G) \leq 3$, potom $\gamma(3, G) \leq 8$. Protože pro sudý subkubický kaktus K_s jsou splněny předpoklady věty 3.15, platí, že $\gamma(3, K_s) \leq 8$.

Ovšem zdá se, že pro sudý subkubický kaktus K_s bude možné stanovit nižší horní mez 3-distančního chromatického čísla než jaká je dána větou 3.15. Jak víme K_s obsahuje pouze sudé kružnice C_n, tedy použitím věty 3.21 pro $p = 3$ a sudá n a vztahu $(*)$ pro 3-distanční chromatické číslo uvedeného v podkapitole 3.2 dostáváme $\gamma(3, C_n) \leq 6$. Obdobně sudý subkubický kaktus K_s obsahuje jako podgraf cesty, pro které zřejmě platí, že jejich 3-distanční chromatické číslo je rovno nejvýše čtyřem, nebo stromy T s $\Delta(T) = 3$, pro které z věty 3.25 pro $p = 3$ dostáváme $\gamma(3, T) \leq 6$. Díky struktuře sudého subkubického kaktusu K_s pravděpodobně nebude k 3-distančnímu barvení jeho vrcholů zapotřebí použití více než šesti barev.

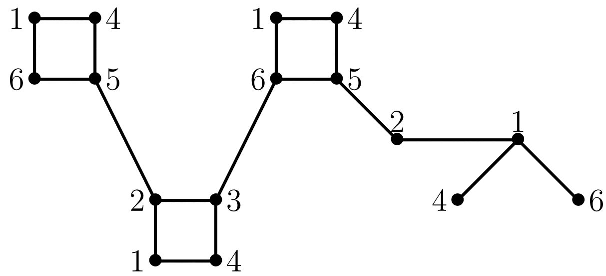
Uvedeme proto první ze dvou hypotéz uvedených v této podkapitole.

Hypotéza 3.33 [R. G.]. *Nechť K_s je sudý subkubický kaktus na n vrcholech. Pak $\gamma(3, K_s) \leq 6$.*

Příklad 3-distančního barvení sudého subkubického kaktusu K_s pomocí 6 barev je na obrázku 3.8.

Poznamenejme, že speciálním případem kaktusu je cesta, kružnice či strom, pro něž jsou známé výsledky pro pakovací barvení uvedeny v podkapitolách 3.1 až 3.3. Nyní uvedeme tvrzení, které je přímým důsledkem věty 3.29.

Důsledek 3.34. *Existují nekonečné kaktusy s nekonečným pakovacím chromatickým číslem.*



Obrázek 3.8: Příklad 3-distančního barvení kaktusu K_s.

Použití věty 3.28 vede k formulování další hypotézy.

Hypotéza 3.35 [J. Ekstein, R. G.]. *Každý subkubický kaktus K na n vrcholech má konečné pakovací chromatické číslo.*

Dalším důsledkem tvrzení 3.30 je horní mez pro acyklické chromatické číslo pro kaktusy.

Důsledek 3.36 [J. Ekstein, R. G.]. *Nechť K je kaktus na n vrcholech. Pak $a(K) \leq 3$.*

Důkaz. Předpokládejme, že K je triviální kaktus. Pak K je cesta či strom a tedy acyklické barvení je vlastním barvením kaktusu K. Zřejmě tedy na acyklické obarvení všech vrcholů kaktusu K stačí dvě barvy.

Nyní předpokládejme, že K je netriviální kaktus. Vrcholy kaktusu K obarvíme stejně jako v důkazu tvrzení 3.30 s tím rozdílem, že každou kružnici v kaktusu K obarvíme třemi barvami (každá kružnice je acyklicky 3-obarvitelná, což plyne z definice 2.4). Takové barvení je jistě acyklické a zřejmě jsme takto obarvili všechny vrcholy kaktusu K použitím nejvýše tří barev. □

Z důsledku 3.36 plynou následující důsledky pro speciální typy kaktusů.

Důsledek 3.37 [J. Ekstein, R. G.]. *Nechť K je triviální kaktus na n vrcholech. Pak $a(K) = 2$.*

Důsledek 3.38 [J. Ekstein, R. G.]. *Nechť K je netriviální kaktus na n vrcholech. Pak $a(K) = 3$.*

V následujícím tvrzení je stanovena horní mez seznamového chromatického čísla pro kaktusy.

Tvrzení 3.39 [R. G.]. *Nechť K je kaktus na n vrcholech. Pak $\chi_l(K) \leq 3$.*

Důkaz. Předpokládejme, že K je triviální kaktus. Pak K je cesta nebo strom, který je seznamově 2-obarvitelný (viz podkapitola 3.3).

Nyní předpokládejme, že K je netriviální kaktus. Na obarvení vrcholů kružnice kaktusu K stačí nejvýše seznamy barev délky tři, protože sudá, respektive lichá kružnice je seznamově 2-obarvitelná, respektive 3-obarvitelná.

Rozlišíme následující případy:

Případ 1. K je lichý kaktus. Všem vrcholům kaktusu K přiřadíme seznamy barev délky tři. Nechť C je kružnice v kaktusu K. Vrcholy kružnice C obarvíme barvami ze seznamů barev délky tři, protože lichá kružnice je seznamově 3-obarvitelná a sudá kružnice je seznamově 2-obarvitelná, tedy také seznamově 3-obarvitelná. Jestliže v kružnici C neexistuje artikulace, obarvili jsme vrcholy kaktusu K barvami ze seznamů barev délky tři.

V opačném případě najdeme artikulaci x kružnice C. Protože vrchol x je artikulace, existuje v kaktusu K alespoň jedna kaktusová cesta s vrcholy $x_1, x_2, ...$ taková, že $x_1 = x$ nebo alespoň jedna kružnice s vrcholy $y_1, y_2, ..., y_1$ taková, že $y_1 = x$.

Neobarvené vrcholy kaktusu K obarvíme obdobně jako v důkazu tvrzení 3.30 následujícím způsobem:

Krok 1. Najdeme libovolně všechny hranově disjunktní kaktusové cesty $P_1, ..., P_k$, $k \in \mathbb{N}$, jejichž společným vrcholem je artikulace x. Jestliže neexistuje žádná taková kaktusová cesta, přejdeme na *Krok 2.* V opačném případě nejprve lze obarvit vrcholy každé kaktusové cesty P_i kromě vrcholu x pro $i \leq k$ barvami ze seznamů barev délky tři, protože P_i je seznamově 2-obarvitelná, tedy i seznamově 3-obarvitelná. Obarvíme tedy vrcholy kaktusové cesty P_i barvami ze seznamů barev délky tři podle prvního již obarveného vrcholu x.

Krok 2. Najdeme všechny kružnice $C_1, ..., C_l$, $l \in \mathbb{N}$, jejichž společným vrcholem je artikulace x. Jestliže neexistuje žádná taková kružnice, přejdeme na *Krok 3.* V opačném případě obarvíme vrcholy každé kružnice C_i kromě vrcholu x pro $i \leq l$ barvami ze seznamů barev délky tři podle prvního již obarveného vrcholu x.

Krok 3. Jestliže v kaktusu K existuje obarvená artikulace s alespoň jedním neobarveným sousedním vrcholem, přejdeme na *Krok 1* s touto artikulací. V opačném případě jsme obarvili všechny vrcholy kaktusu K barvami ze seznamů barev délky tři.

Případ 2. K je sudý kaktus. Všem vrcholům kaktusu K přiřadíme seznamy barev délky dva. Vrcholy kaktusu K barvíme obdobně jako pro *Případ 1* s tím rozdílem, že pro sudý kaktus díky neexistenci liché kružnice stačí seznamy barev délky dva.

Libovolný kaktus K jsme tedy obarvili barvami ze seznamů barev délky nejvýše tři. □

Z důkazu tvrzení 3.39 plynou následující důsledky.

Důsledek 3.40 [R. G.]. *Jestliže K je triviální kaktus nebo sudý kaktus na n vrcholech, pak $\chi_l(K) = 2$.*

Důsledek 3.41 [R. G.]. *Nechť K_l je lichý kaktus na n vrcholech. Pak $\chi_l(K_l) = 3$.*

Na závěr této podkapitoly uvedeme podobně jako v předchozích podkapitolách 3.1 až 3.3 tabulku, ve které jsou srovnána chromatická čísla pro kaktusy. Z tabulky 3.4 je vidět, že vlastní, acyklické a seznamové barvení má stejnou horní mez pro příslušná chromatická čísla těchto typů barvení.

Chrom. č.	**Hodnota**	**Parametr p, typ kaktusu K**
$\chi(K)$	2	sudý nebo triviální
	3	lichý
	2	$p = 1$, sudý nebo triviální
	3	$p = 1$, lichý
$\gamma(p, K)$	n	$p \geq diam(K)$, libovolný
	$\leq 6 + \frac{2M+12}{M-2}((M-1)^{p-1} - 1)$	$M = \max\{8, \Delta(K)\}$, libovolný
$\chi_\rho(K)$	$\leq n$	libovolný
$a(K)$	2	triviální
	3	netriviální
$\chi_l(K)$	2	sudý nebo triviální
	3	lichý

Tabulka 3.4: Srovnání chromatických čísel pro kaktusy pro pět typů barvení.

Kapitola 4

Závěr

V této práci jsme se zabývali vrcholovým barvením grafu. Hlavním cílem práce bylo seznámit se s několika typy vrcholového barvení (vlastní, p-distanční, pakovací, acyklické, seznamové) a porovnat jejich chromatická čísla pro několik speciálních tříd grafů.

V úvodu práce jsme uvedli historický vývoj teorie grafů a možné aplikace barvení grafu. Po vymezení základních pojmů a definování jednotlivých typů vrcholového barvení uvažovaných v této práci následovala kapitola 3, ve které jsme shrnuli známé výsledky pro jednotlivé typy vrcholového barvení zejména pro obecné rovinné grafy, přičemž na začátku této kapitoly jsme také uvedli pozorování, ve kterém jsme srovnali chromatická čísla jednotlivých typů barvení pro úplné grafy. Tuto kapitolu jsme rozdělili na čtyři podkapitoly, které jsou věnovány vrcholovému barvení jednotlivých uvažovaných speciálních tříd grafů.

V podkapitolách 3.1 až 3.3 jsme se zabývali vrcholovým barvením cest, kružnic a stromů. V rámci těchto podkapitol jsme opět uvedli známé výsledky pro jednotlivé typy vrcholového barvení, přičemž na konci každé podkapitoly jsme uvedli tabulku (tabulky 3.1, 3.2, 3.3), ve které jsme srovnali chromatická čísla jednotlivých uvažovaných typů barvení pro danou uvažovanou třídu grafů. V podkapitole 3.2 jsme navíc stanovili triviální horní mez p-distančního chromatického čísla pro kružnice, jejichž počet vrcholů není roven násobkům $p + 1$. Výsledkem další práce by mohlo být také stanovení přesné hodnoty p-distančního chromatického čísla takových kružnic.

V podkapitole 3.4 jsme se zabývali vrcholovým barvení kaktusů. V této podkapitole jsme dokázali tvrzení pro vlastní, acyklické a seznamové barvení kaktusů. Pro stanovení p-distančního a pakovacího chromatického čísla jsme použili výsledky pro rovinné grafy, respektive pro stromy. Chromatická čísla jednotlivých typů barvení jsme srovnali v tabulce 3.4. V rámci této podkapitoly jsme také uvedli dvě hypotézy.

Kromě splnění cílů práce, kterými bylo porovnání hodnot chromatických čísel jednotlivých uvažovaných typů barvení pro několik speciálních tříd grafů v tabulkách 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, je výsledkem práce dokázání tvrzení 3.30, důsledku 3.36 a tvrzení 3.39 a stanovení hypotéz 3.33 a 3.35, kterými by v budoucnu na práci šlo navázat dalším výzkumem.

Seznam použité literatury

[1] K. Appel, W. Haken, *The solution of the four-color-map problem*, Sci. Amer. 237 (1977), no. 4, 108 - 121, 152.

[2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

[3] O. V. Borodin, *On acyclic colorings of planar graphs*, Discrete Math. 25 (1979), 211 - 236.

[4] R. L. Brooks, *On colouring the nodes of a network*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 37 (1941), 194 - 197.

[5] R. Diestel, *Texts in Mathematics: Graph Theory*, Third Edition, Springer - Verlag Heidelberg, 2005, ISBN 3-540-26183-4.

[6] P. Erdős, A. L. Rubin, H. Taylor, *Choosability in graphs*, Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium XXVI (1979), 125 - 127.

[7] W. Goddard, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. M. Harris, D. F. Rall, *Broadcast Chromatic Numbers of Graphs*, Ars Combin. 86 (2008), 33 - 49.

[8] H. Grötzsch, *Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel*, Wiss. Z. Martin Luther-Univ. Halle Wittenberg, Math. - Nat. Reihe 8 (1959), 109 - 120.

[9] B. Grünbaum, *Acyclic colorings of planar graphs*, Israel J. Math. 14 (1973), 390 - 408.

[10] F. Havet, *Combinatorial optimization - algorithms for telecommunications*, [cit. 2017-05-19], Dostupné na Inria: <http://www-sop.inria.fr/members/Frederic.Havet/Cours/coloration.pdf>.

[11] P. J. Heawood, *"Map-Colour Theorem"*, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford 24 (1890), 332 - 338.

[12] J. van den Heuvel, S. McGuinnes, *Colouring the square of a planar graph*, J. Graph Theory 42 (2003), 110 - 124.

[13] P. Holub, Š. Potyš, *On distance chromatic number of d-dimensional grids and trees*, preprint.

[14] S. Jendrol, Z. Skupień, *Local structures in plane maps and distance colourings*, Discrete Math. 236 (2001), 167 - 177.

[15] F. Kramer, H. Kramer, *A survey on the distance-colouring of graphs*, Discrete Math. 308 (2008), 422 - 426.

[16] F. Kramer, H. Kramer, *On the generalized chromatic number*, Ann. Discrete Math. 30 (1986), 275 - 284.

[17] T. Madaras, A. Marcinová, *On the structural result on normal plane maps*, Discuss. Math. Graph Theory 22 (2002), 293 - 303.

[18] M. Molloy, M. R. Salavatipour, *A bound on the chromatic number of the square of a planar graph*, J. Combin. Theory Ser. B 94 (2005), 189 - 213.

[19] B. Reed, B. Sudakov, *List colouring when the chromatic number is close to the order of the graph*, Combinatorica 25 (1) (2005), 117 - 123.

[20] C. Sloper, *An exccentric coloring of trees*, Australas. J. Combin. 29 (2004), 309 - 321.

[21] P. Šišma, *Vznik a vývoj teorie grafů*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 43 (1998), 89 - 99.

[22] C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*, J. Combin. Theory Ser. B 62 (1994), no. 1, 180 - 181.

[23] V. G. Vizing, *Colouring the vertices of graph with prescribed colours*, Metody Diskretnogo Analiza Teorii Kodov i Skhem 29 (1976), 3 - 10.

[24] S. A. Wong, *Colouring graphs with respect to distance*, M.Sc. Thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1996.