Posudek oponenta bakalářské práce

Autor/Autorka	Jan Matas
Název práce	Difúzní modely na grafech
Studijní obor	Matematika a finanční studia
Oponent práce	RNDr. Jonáš Volek, Ph.D. (Katedra matematiky FAV ZČU v Plzni)

Splnění cílů práce:

☑ nadstandardně ☐ velmi dobře ☐ splněny ☐ s výhradami ☐ nebyly splněny

Odborný přínos práce:

☑ nové výsledky ☑ netradiční postupy ☐ zpracování výsledků z různých zdrojů ☐ shrnutí výsledků z různých zdrojů ☐ bez přínosu

Matematická (odborná) úroveň:

☐ vynikající ☑ velmi dobrá ☐ průměrná ☐ podprůměrná ☐ nevyhovující

Věcné chyby:

☐ téměř žádné ☑ vzhledem k rozsahu přiměřený počet ☐ méně podstatné, větší množství ☐ podstatnější, větší množství ☐ závažné

Grafická, jazyková a formální úroveň:

☐ vynikající ☐ velmi dobrá ☑ průměrná ☐ podprůměrná ☐ nevyhovující

Slovní hodnocení a dotazy:

v příloze

Práci doporučuji – ~~nedoporučuji~~ uznat jako kvalifikační (*nehodící se škrtněte*).

Navrhuji hodnocení známkou:

výborně

Datum, jméno a podpis:

V Plzni, 12. června 2017

....

RNDr. Jonáš Volek, Ph.D.
Katedra matematiky
FAV ZČU v Plzni

Oponentský posudek

bakalářské práce **Jana Matase**

Difúzní modely na grafech

ve studijním oboru Matematika a finanční studia na Katedře matematiky FAV ZČU v Plzni

Předkládám tímto oponentský posudek bakalářské práce Jana Matase, kterou vypracoval v akademickém roce 2016/17 pod vedením doc. RNDr. Petra Stehlíka, Ph.D., na Katedře matematiky Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni ve studijním oboru Matematika a finanční studia.

Jan Matas se ve své práci zabývá dynamickými systémy na grafech. Pro neorientovaný graf $G = (V, E)$ s množinou vrcholů $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ zkoumá dynamický systém daný následující soustavou obyčejných diferenciálních rovnic

$$x_i'(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \phi(x_i(t), x_j(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde $\mathcal{N}(i)$ značí množinu všech sousedních vrcholů vrcholu i. Obecně nelineární funkce ϕ je volena postupně tak, aby modelovala procesy *difúze*, *shlukování* a *koexistence* na takto prostorově strukturovaném prostředí.

Autor v nejpodstatnější části své práce nejdříve dokazuje pomocí technik klasické teorie ODR existenci a jednoznačnost lokálního řešení. Dále na základě hezkého apriorního odhadu ukazuje prodloužitelnost řešení pro všechna $t \in [0, \infty)$, což je důležité pro studium asymptotického chování. Poté vyšetřuje rovnovážné stavy a jejich stabilitu pro výše zmíněné případy difúze, shlukování a koexistence.

Práce je členěna do pěti kapitol. Po krátkém Úvodu následuje část shrnující základní nástroje teorie ODR a teorie grafů, které autor dále využívá. Kapitoly 3 a 4 tvoří jádro práce obsahující autorovy dosažené výsledky. V Kapitole 3 je analyzován systém nad grafem se dvěma vrcholy. V Kapitole 4 autor dané výsledky zobecňuje pro obecný neorientovaný graf. Chybí zde širší studium rovnovážných stavů a jejich stability v případech shlukování a koexistence. Nicméně, jak autor dokazuje např. Větou 49, toto studium bude velice obtížné a dle mého názoru jde nad rámec bakalářské práce. Tento fakt nikterak nesnižuje její kvalitu. Poslední částí je shrnující Závěr obsahující také další možné směry a otevřené otázky.

Dále uvedu nejpodstatnější klady a zápory, které jsem z práce vyrozuměl. Dopředu nutno říci, že klady nad zápory výrazně převyšují. Ty drobné nesrovnalosti, které zde vytýkám, jsou vesměs formálního či jazykového charakteru. Přesto jako matematik mající rád kromě matematických myšlenek a nápadů také formálně čisté vyjadřování cítím potřebu i toto uvést.

Na práci nejvíce oceňuji:

- snahu a konečné dosažení vlastních výsledků v oblasti matematiky, která se v současnosti zkoumá,
- představení možnosti, jak modelovat takové procesy jako je shlukování či koexistence ve strukturovaném prostorovém prostředí (grafu),
- samotné výsledky a jejich porovnání - zejména bych chtěl vyzdvihnout Větu 48 o existenci, jednoznačnosti a asymptotické stabilitě konstantního rovnovážného stavu pro model difúze na obecném neorientovaném grafu, Větu 49 o existenci nekonečně mnoha rovnovážných stavů pro model shlukování na obecném neúplném grafu a v neposlední řadě první části Kapitol 3 a 4 o existenci, jednoznačnosti, prodloužitelnosti řešení a zachování populace, kdy prodloužitelnost je dokazována pomocí velice pěkného apriorního odhadu,
- podle toho, co jsem schopen posoudit, jsou uvedená tvrzení správná (ne vždy jsou jejich důkazy úplně čisté, ale vzhledem k tomu, že se jedná o práci bakalářskou, je to pochopitelné),
- práci na velmi širokém portfoliu, které obsahovalo i nadstavbové partie matematiky - řešitelnost ODR, prodloužitelnost řešení, dynamické systémy, stabilita, grafový laplacián,

- zajímavé příklady a ilustrace - viz např. Obrázek 4.7, který ukazuje, jak může být model shlukování citlivý na počáteční data.

Objevil jsem následující nesrovnalosti:

- v Definici 4 o lokální lipschitzovskosti by mělo být „*... na každé omezené a uzavřené podmnožině ...*“, navíc toto potřebujeme pouze v druhé proměnné,
- v obou důkazech apriorních odhadů (Věty 31 a 43) nelze vyvozovat z chování funkce $x(t)$ a její derivace v bodě $t = \hat{t}$ (lokální vlastnost), její chování na celém intervalu $[\hat{t}, \tilde{t}]$, nicméně po drobné úpravě důkazů obě tvrzení platí,
- komentář za Důkazem Lemmatu 32 a stejně tak komentář za Důkazem Lemmatu 44 o vztahu řešení původní soustavy s funkcí ψ (resp. ϕ) a modifikované soustavy s rozšířenou funkcí $\tilde{\psi}$ (resp. $\tilde{\phi}$) by měl být formulován jako věta a její důkaz, je to v podstatě to, o co je od začátku usilováno; celkově bych uvítal drobnou modifikaci struktury úvodních částí Kapitoly 3 a 4,
- jazykové neobratnosti - např. „*Graf je základním matematickým objektem teorie grafů.*“, Důkaz Důsledku 30,
- interpunkce - mnoho chybějících čárek oddělujících vložené vedlejší věty, a naopak mnoho čárek přebývajících, což mnohdy snižovalo čitelnost,
- časté nekonzistence - kapitola/Kapitola, číslování tvrzení/číslování obrázků, dvojtečky před matematickými výrazy, značení vektorů, složky vektorové funkce vektorové proměnné $\mathbf{f}$, velká písmena v názvech definic a kurzíva v nich.

Při čtení bakalářské práce Jana Matase mi na mysl vyvstávaly mnohé doplňující otázky. Níže uvádím doufám reprezentativní výběr, který zastupuje jak technické matematické dotazy, tak i širší myšlenky na dané téma. Prosím o jejich zodpovězení v diskusi během obhajoby:

- *Je u Věty 29 předpoklad lichosti funkce $\tilde{\psi}$ podmínkou pouze postačující pro zachování populace, nebo se jedná i o podmínku nutnou?*
- *Jak byste opravil výše zmíněný nekorektní krok v důkazech Lemmat 32 a 44?*
- *Proč pro systém modelující shlukování nad grafem se dvěma vrcholy (Kapitola 3.2) nevolíte nejdříve funkci $\psi(s)$ jako rostoucí lineární funkci, tj. opačně než u difúze, kde je klesající lineární funkce?*
- *Co se stane, když v Kapitole 3.2 o koexistenci nad grafem se dvěma vrcholy v předpisu funkce $\psi(s)$ nastane $a = 0$ nebo $a = \pm 1$? Načrtněte takovou funkci $\psi(s)$ a na obrázku nastiňte, jak to dopadne s rovnovážnými stavy a jejich stabilitou. Jaký problém by nastal v důkazu stability pomocí Věty 12 (resp. viz Poznámku 13)? Šel by nějak vyřešit?*
- *Uvažujme systém, do kterého kromě obecného difúzního procesu daného funkcí ϕ vneseme ještě zdroje (tzv. reakční funkci). V tu chvíli již přestává otázka zachování počáteční velikosti populace dávat smysl. Přesto vyvstávají mnohé jiné zajímavé problémy. Napadají vás např. pro systém popisující shlukování s reakční funkcí nějaké atraktivní otázky?*

Při rozhodování o návrhu výsledného hodnocení jsem byl postaven před velké dilema. Na jedné straně vah byla autorova snaha studovat originální problém, pustit se do něj se vším svým matematickým uměním a nakonec i dosažení zajímavých původních výsledků a na straně druhé (do jisté míry z originality vyplývající) drobné prohřešky proti formální čistotě textu. Stál jsem před otázkou, do jaké míry mohou tyto jemné nedostatky snížit váhu samostatných výsledků a nejen jich, ale právě autorova nadšení prozkoumat neprozkoumané. Nakonec jsem dospěl k rozhodnutí, že Jan Matas se svého úkolu zhostil se ctí a že jeho vlastní výsledky jsou dobrým důvodem mu ta malá zaváhání odpustit. Proto jsem došel k následujícímu.

Závěr:

Po zvážení všech argumentů uzavírám, že bakalářská práce Jana Matase splňuje požadavky kladené na bakalářské práce a rád ji **doporučuji** k obhajobě. Pokud při obhajobě před komisí odprezentuje své výsledky se vším nasazením a v rámci následné diskuse pečlivě odpoví na mé dotazy výše shrnuté, navrhuji hodnotit tuto práci stupněm

- výborně -.

V Plzni, 12. června 2017

Volek

RNDr. Jonáš Volek, Ph.D.
Katedra matematiky
FAV ZČU v Plzni