

University of West Bohemia  
Faculty of Applied Sciences  
Department of Mathematics

**Bachelor Thesis**

**Properties of generalized trigonometric functions  
and/or their applications to statistics**

Západočeská univerzita  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra matematiky

**Bakalářská práce**

**Vlastnosti zobecněných trigonometrických funkcí  
a jejich případné aplikace ve statistice**

Plzeň 2017

Petr Peterka

## Prohlášení

Tímto prohlašuji, že bakalářská práce je moje originální práce a že jsem používal pouze citované zdroje.

Plzeň .....

.....

## Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu práce Doc. Ing. Petru Girgovi, Ph.D. za jeho přístup a užitečné informace a hlavně za celkový čas, který mi věnoval při vedení této práce. Dále bych rád poděkoval Ing. Lukášovi Kotrlovi za jeho čas, který strávil na konzultacích mé bakalářské práce. Také bych moc rád poděkoval rodičům za jejich neustálou podporu při mém studiu.

## Abstrakt

Hlavním cílem této bakalářské práce je studovat vlastnosti  $p$ -trigonometrických a  $p, q$ -trigonometrických funkcí a tyto výsledky následně využít při vyšetřování dvourozměrného zobecněného normálního rozdělení. Dále je v této práci uveden přehled derivací a integrálů zobecněných trigonometrických funkcí. V poslední řadě je práce zaměřena na generování dat se zobecněným normálním rozdělením.

## Klíčová slova

$p, q$ -trigonometrické funkce, zobecněné normální rozdělení, kvantily, generování dat

## Abstract

The main goal of this bachelor thesis is to study the properties of  $p$ -trigonometric and  $p, q$ -trigonometric functions and these results to use in investigating the two-dimensional generalized normal distribution. Further, in this work is presented an overview of derivatives and integrals of generalized trigonometric functions. Finally, the work is focused on generating data with a generalized normal distribution.

## Keywords

$p, q$ -trigonometric functions, generalized normal distribution, quantiles, generate data

## Zusammenfassung

Das Hauptziel dieser Bachelorarbeit ist Eigenschaften  $p$ -trigonometrischen und  $p, q$ -trigonometrischen Funktionen studieren und dann diese Ergebnisse bei der Untersuchung der zweidimensionalen generalisierten Normalverteilung verwenden. Darüber hinaus liefert diese Arbeit einen Überblick über Ableitungen und Integrale der generalisierten trigonometrischen Funktionen. Letzlich ist die Arbeit auf der Erzeugen von Daten mit der generalisierten Normalverteilung fokussiert.

## Schlüsselwörter

$p, q$ -trigonometrischen Funktionen, generalisierten Normalverteilung, Perzentile, Erzeugen von Daten

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Některá statistická rozdělení</b>	<b>4</b>
2.1	Vybraná jednorozměrná rozdělení a jejich základní vlastnosti . . . . .	4
2.2	Šikmost a špičatost zobecněného rozdělení . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Dvourozměrné zobecněné normální rozdělení</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Zobecněné trigonometrické funkce</b>	<b>12</b>
4.1	Klasické trigonometrické funkce . . . . .	12
4.2	Analytický přístup . . . . .	13
4.3	Numerický přístup . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Zobecněné trigonometrické funkce se dvěma parametry</b>	<b>17</b>
5.1	Analytický přístup . . . . .	17
5.2	Numerický přístup . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Přehled derivací a integrálů <math>p, q</math>-trigonometrických funkcí</b>	<b>20</b>
6.1	Přehled derivací . . . . .	20
6.2	Přehled určitých integrálů . . . . .	22
6.3	Přehled neurčitých integrálů . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Grafy</b>	<b>25</b>
<b>8</b>	<b>Normalizace a kvantily</b>	<b>27</b>
8.1	Normalizace pro $p = q$ . . . . .	27
8.2	95% kvantil pro $p = q$ . . . . .	29
8.3	Normalizace pro $p \neq q$ . . . . .	31
8.4	95% kvantil pro $p \neq q$ . . . . .	32
<b>9</b>	<b>Generování dat</b>	<b>35</b>
<b>10</b>	<b>Závěr</b>	<b>38</b>

# 1 Úvod

Naším cílem je studovat vlastnosti  $p$ -trigonometrických a  $p, q$ -trigonometrických funkcí (podrobně viz v sekcích 4 a 5), jež byly studovány od konce 70. let 20. století. Dané výsledky budou následně využity při vyšetřování dvourozměrného zobecněného normálního rozdělení (podrobně viz sekce 3), které je používáno již od 60. let 20. století. V literatuře se nám nepodařilo najít článek, který by kombinoval teorii dvourozměrného zobecněného normálního rozdělení s teorií  $p, q$ -trigonometrických funkcí. Ukazuje se (viz Závěr této bakalářské práce), že námi navržená metodika vede na mnohem jednodušší výpočty v porovnání s jinými pracemi (viz [19, 20, 21]).

Nejprve si v kapitole 2 představíme některá statistická jednorozměrná rozdělení a uvedeme jejich základní vlastnosti a vztahy mezi těmito rozděleními. Dále se v této kapitole zaměříme na koeficient šikmatosti a šikmosti zobecněného normálního rozdělení.

Kapitola 3 bude věnována dvourozměrnému zobecněnému normálnímu rozdělení. Uvedeme si zde jeho historii, základní vlastnosti a také si zde vykreslíme grafy vyznačující hladiny významnosti tohoto rozdělení.

V kapitole 4 a 5 se seznámíme se zobecněnými trigonometrickými funkcemi a to nejprve s jedním parametrem a poté se dvěma parametry. Opět si zde uvedeme základní vlastnosti těchto funkcí. Dále v obou kapitolách bude cílem nalézt řešení problému dané počáteční úlohy a to nejprve pomocí analytického přístupu tak poté pomocí numerického přístupu.

Kapitola 6 bude zaměřena na přehled derivací a integrálů. V této kapitole si uvedeme vzorce pro jednotlivé derivace a integrály zobecněných trigonometrických funkcí.

Po seznámení se zobecněnými trigonometrickými funkcemi (viz kapitola 4 a 5) bude kapitola 7 věnována grafům těchto funkcí. Kromě grafů zobecněných trigonometrických funkcí vykreslíme zde také grafy změn hodnoty  $\pi_p$  popř.  $\pi_{p,q}$  v závislosti na parametru  $p$  popř.  $p$  a  $q$ .

Kapitola 8 bude věnována normalizaci a kvantilům dvourozměrného zobecněného normálního rozdělení. Cílem bude znormalizovat funkci hustoty tohoto rozdělení a vypočítat 95% kvantil na základě provedené normalizace. Tento postup bude proveden jak pro hodnotu  $p = q$  tak pro hodnotu  $p \neq q$ .

V kapitole 9 se zaměříme na generování dvourozměrných dat s dvourozměrným zobecněným normálním rozdělením. Budou zde vykresleny histogramy četností na základě vygenerovaných hodnot daného rozdělení. Tento postup bude proveden nejprve pro jednorozměrné zobecněné normované normální rozdělení a dále pro dvourozměrné zobecněné normované normální rozdělení.

Závěr této bakalářské práce je uveden v kapitole 10, kde je porovnán náš přístup s přístupem prací [19, 20, 21].

## Přehled značení

V celé bakalářské práci používáme pro exponenciálu jak značení  $e^x$  tak značení  $\exp(x)$ . Použití těchto dvou rozdílných značení téže funkce je z důvodu lepší čitelnosti daných výrazů.

$A \stackrel{\text{W.M.}}{=} B$  Výraz  $B$  byl obdržen z výrazu  $A$  pomocí softwaru Wolfram Mathematica.

$\mathbb{R}$  Množina všech reálných čísel.

$\mathbb{R}^N$  Množina všech uspořádaných  $N$ -tic reálných čísel.

$\mathbb{N}$  Množina všech přirozených čísel.

$\mathbb{Z}$  Množina všech celých čísel.

$E(\dots)$  Střední hodnota.

$D(\dots)$  Rozptyl (někdy také označován jako  $\text{var}(\dots)$ ).

$\gamma_2$  Koeficient špičatosti.

${}_2F_1(\dots)$  Hypergeometrická funkce.

$\Delta$  Laplaceův operátor.



## 2 Některá statistická rozdělení

V následujících sekcích si představíme některá rozdělení a jejich základní vlastnosti, která budou pro tuto bakalářskou práci potřebná.

### 2.1 Vybraná jednorozměrná rozdělení a jejich základní vlastnosti

#### 2.1.1 Gama rozdělení

Začneme rozdělením gama. Toto rozdělení řadíme mezi spojité rozdělení s dvěma parametry. Speciálními případy tohoto rozdělení jsou exponenciální rozdělení a  $\chi$ -kvadrát rozdělení. Gama rozdělení se využívá například při modelování pravděpodobnosti doby čekání.

Má-li tedy náhodná veličina  $X$  gama rozdělení s parametry  $\alpha, \beta > 0$ , potom můžeme psát, že  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  a její hustota pravděpodobnosti má tvar

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Označení  $\Gamma(\alpha)$  nazýváme Eulerovým integrálem druhého druhu či úplnou gama funkcí definovanou vztahem

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx = (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1). \quad (2)$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx = \left[ -x^{\alpha-1} e^{-x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty (\alpha - 1) x^{\alpha-2} e^{-x} dx = \\ &= (\alpha - 1) \int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-x} dx = (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1). \end{aligned}$$

□

Jak již bylo výše uvedeno speciálními případy tohoto rozdělení jsou exponenciální rozdělení tj.  $\alpha = 1$  a  $\chi$ -kvadrát rozdělení tj.  $\alpha = n/2$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $\beta = 2$ .

Mezi základní vlastnosti tohoto rozdělení patří střední hodnota a rozptyl, které jsou definovány vztahy

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad (3)$$

a

$$D(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}. \quad (4)$$

Dále je dobré připomenout distribuční funkci rozdělení gama, která je definována jako

$$F(x; \alpha, \beta) = \int_0^x f(u; \alpha, \beta) du = \frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (5)$$

kde  $\gamma(\alpha, \beta x)$  je nižší neúplná gama funkce definovaná vztahem

$$\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (6)$$

Poznamenejme také vyšší neúplnou gama funkci definovanou vztahem

$$\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt = Q(s, x) \Gamma(s), \quad (7)$$

kde  $Q(s, x)$  je regularizovaná gama funkce. Z rovnice (7) můžeme tak říci, že regularizovaná gama funkce je podíl vyšší neúplné gama funkce a úplné gama funkce. Jako poslední připomeneme velmi dobře známý vztah

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (8)$$

### 2.1.2 Beta rozdělení

Dalším rozdělením je rozdělení beta. Toto rozdělení opět řadíme mezi spojité rozdělení definované na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  s dvěma parametry  $\alpha, \beta > 0$ . Beta rozdělení se využívá například k modelování chování náhodných proměnných.

Má-li tedy náhodná veličina  $X$  beta rozdělení s parametry  $\alpha, \beta > 0$ , potom můžeme psát, že  $X \sim B(\alpha, \beta)$  a její hustota pravděpodobnosti má tvar

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad \text{pro } 0 \leq x \leq 1, \quad (9)$$

kde  $B(\alpha, \beta)$  je úplná beta funkce definovaná vztahem

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx. \quad (10)$$

Pro beta funkci dále platí vztah

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad (11)$$

kde  $\Gamma$  je gama funkce definovaná vztahem (2).

*Důkaz.* Vyjdeme ze vztahu

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) = \int_{x=0}^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \cdot \int_{y=0}^\infty y^{\beta-1} e^{-y} dy = \int_{y=0}^\infty \int_{x=0}^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-x-y} dx dy.$$

Zavedením substituce  $x = zt$  a  $y = z(1-t)$  dostáváme

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) &= \int_{z=0}^\infty \int_{t=0}^1 e^{-z} (zt)^{\alpha-1} (z(1-t))^{\beta-1} |J(z, t)| dt dz = \\ &= \int_{z=0}^\infty \int_{t=0}^1 e^{-z} (zt)^{\alpha-1} (z(1-t))^{\beta-1} z dt dz = \\ &= \int_{z=0}^\infty e^{-z} z^{\alpha+\beta-1} dz \cdot \int_{t=0}^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \\ &= \Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

kde  $|J(z, t)|$  je determinant Jacobiovy matice funkcí  $x = zt$  a  $y = z(1-t)$ . Z této rovnice lze už jednoduše vyjádřit vztah (11). První rovnost ze vztahu (11) plyne ze symetričnosti funkce beta.  $\square$

Mezi základní vlastnosti patří opět střední hodnota a rozptyl, které jsou definovány jako

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (12)$$

a

$$D(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}. \quad (13)$$

Dále je opět dobré definovat distribuční funkci též regularizovanou beta funkcí a to vztahem

$$F(x; \alpha, \beta) = \frac{B(x; \alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = I(x; \alpha, \beta), \quad (14)$$

kde  $I(x; \alpha, \beta)$  je regularizovaná beta funkce a  $B(x; \alpha, \beta)$  je neúplná beta funkce definovaná vztahem

$$B(x; \alpha, \beta) = \int_0^x x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx. \quad (15)$$

Z rovnice (14) můžeme neúplnou beta funkci definovat jako násobek úplné a regularizované beta funkce. **K této funkci se později vrátíme v kapitole 4 a 5.**

### 2.1.3 Normální rozdělení

Jako třetí představíme normální rozdělení. Opět se jedná o spojité rozdělení s dvěma parametry  $\mu$  a  $\sigma^2$ . Toto rozdělení se používá především ve statistice a za určitých podmínek dobře aproximuje řadu jiných pravděpodobnostních rozdělení.

Má-li tedy náhodná veličina  $X$  normální rozdělení s parametry  $\mu \in \mathbb{R}$  a  $\sigma > 0$ , potom můžeme psát, že  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  a její hustota pravděpodobnosti má tvar

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (16)$$

kde  $\mu = E(X)$  je střední hodnota,  $\sigma^2 = D(X)$  je rozptyl a  $\sigma = \sqrt{D(X)}$  je směrodatná odchylka. Dále je ještě dobré připomenout normované normální rozdělení značeno  $N(0, 1)$ , které má hustotu pravděpodobnosti definovanou vztahem

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (17)$$

Distribuční funkce normálního rozdělení nelze vyjádřit elementárními funkcemi a proto je definovaná jako

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt. \quad (18)$$

### 2.1.4 Zobecněné normální rozdělení

Posledním rozdělením, které představíme a které bude naší prioritou v této práci je zobecněné normální rozdělení. Jedná se o spojité statistické rozdělení se třemi parametry  $p$ ,  $\sigma > 0$  a  $\mu \in \mathbb{R}$ . Parametr  $p$  v tomto rozdělení představuje hodnotu, která vede k symetrickým rozdělením podobným normálnímu rozdělení. Avšak tato rozdělení mohou mít větší rozpětí, vyšší výšku či špičatější nebo strmější průběh grafu funkce. Toto rozdělení bylo poprvé

navrženo M.T. Subbotinem v roce 1923 jako obecnější model rozdělení chyb měření zobecňující Gaussovo normální rozdělení, viz [25]. V článku [25] bylo toto rozdělení odvozeno z následujících axiomů:

- (i) Pravděpodobnost chyby závisí pouze na velikosti této chyby a může být popsána funkcí jejíž první derivace je spojitá.
- (ii) Nejpravděpodobnější hodnota veličiny, kterou stanovujeme z naměřených hodnot, nesmí záviset na použitých jednotkách měření.

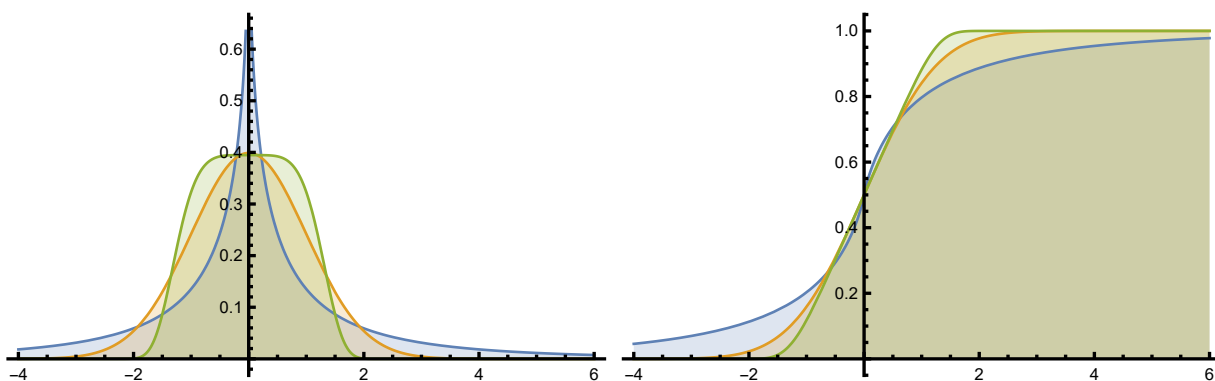
Toto rozdělení se uplatnilo ve statistickém zpracování dat ze zdravotnictví viz např. M.E. Turner [27]. Dále bylo používáno R.M. Smithem a L.J. Bainem [23] a to v polovině 70. let jako celoživotní model. Od této doby bylo toto rozdělení používáno k modelování řady jevů jako například doby přežití u pacientů trpících různými typy rakoviny nebo měření koncentrace krevní plazmy u atletů (viz např. [30]). Z numerického hlediska se tímto rozdělením zabývá např. článek A.M. Mineo a M. Ruggieri [16], kde lze nalézt odkazy na další literaturu jak numerickou tak teoretickou. Funkce hustoty zobecněného normovaného normálního rozdělení je dána jako

$$f_p(x) = \frac{\exp\left(-\frac{|x|^p}{p}\right)}{2 \cdot p^{1/p} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)}, \quad (19)$$

kde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|x|^p}{p}\right) dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^p}{p}\right) dx \stackrel{\text{W.M.}}{=} 2 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot p^{1/p} \quad \text{pro } p > 0.$$

V softwaru Wolfram Mathematica je toto rozdělení implementováno ve funkci `ExponentialPowerDistribution` a je tedy možné snadno vykreslit jak tvar funkce hustoty pravděpodobnosti tak tvar distribuční funkce tohoto rozdělení. Nyní si vykreslíme funkci hustoty a distribuční funkci zobecněného normovaného normálního rozdělení a to pro hodnotu  $p = 1/2, 2$  a  $5$ .



Obrázek 1: Graf vlevo znázorňuje funkci hustoty, graf vpravo distribuční funkci.

Můžeme vidět, že v případě  $p = 2$  se jedná o klasické normované normální rozdělení pravděpodobnosti. Zobecněné normální rozdělení také dále zobecňuje Laplaceovo rozdělení. V případě, že je hodnota  $p = 1$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  a  $\sigma = \beta > 0$  má distribuční funkce zobecněného normálního rozdělení stejný tvar jako distribuční funkce Laplaceova rozdělení s danou hodnotou  $\mu$  a  $\beta$ .

## 2.2 Šikmost a špičatost zobecněného rozdělení

Šikmost zobecněného normálního rozdělení je z důvodu sudosti funkce  $\exp(-|x|^p)$  nulová. Špičatost se u tohoto rozdělení vypočte ze vzorce (viz např. [29])

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E[X - E(X)]^4}{(\text{var}(X))^2} - 3, \quad (20)$$

kde  $\mu_4$  představuje čtvrtý centrální moment,  $\sigma$  je směrodatná odchylka,  $E(X)$  označuje střední hodnotu a  $\text{var}(X)$  je rozptyl. Pro špičatost tohoto jednorozměrné zobecněného normálního rozdělení potom platí

$$\gamma_2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot \frac{\exp(-|x|^p)}{2 \cdot \Gamma(1 + 1/p)} dx}{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{\exp(-|x|^p)}{2 \cdot \Gamma(1 + 1/p)} dx \right]^2} - 3. \quad (21)$$

Pomocí softwaru Wolfram Mathematica nyní dopočteme integrály vyskytující se v rovnici (21) a tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot \frac{\exp(-|x|^p)}{2 \cdot \Gamma(1 + 1/p)} dx \stackrel{\text{w.M.}}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{5+p}{p}\right)}{5 \cdot \Gamma(1 + 1/p)}$$

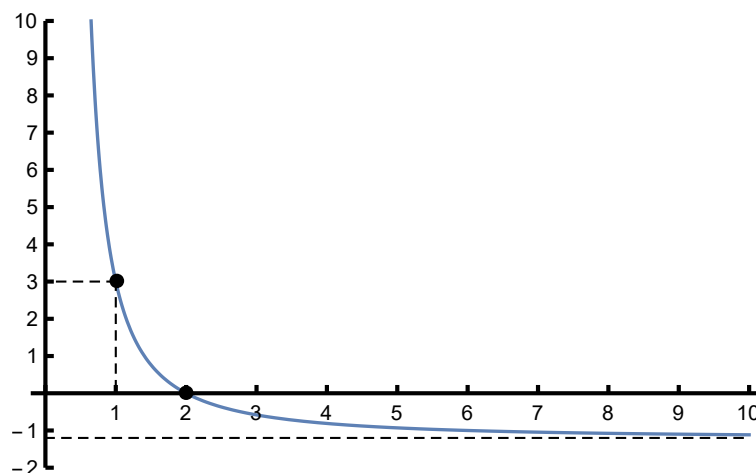
a

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{\exp(-|x|^p)}{2 \cdot \Gamma(1 + 1/p)} dx \stackrel{\text{w.M.}}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{3+p}{p}\right)}{3 \cdot \Gamma(1 + 1/p)}.$$

Po těchto výpočtech lze psát

$$\gamma_2 = \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{5+p}{p}\right)}{5 \cdot \Gamma(1 + 1/p)}}{\left[ \frac{\Gamma\left(\frac{3+p}{p}\right)}{3 \cdot \Gamma(1 + 1/p)} \right]^2} - 3 \stackrel{\text{w.M.}}{=} \frac{9 \cdot \Gamma(1 + 1/p) \Gamma\left(\frac{5+p}{p}\right)}{5 \cdot \Gamma\left(\frac{3+p}{p}\right)^2} - 3.$$

Nyní si k tomuto rozdělení vykreslíme změnu koeficientu špičatosti v závislosti na změně hodnoty  $p$ .



Obrázek 2: Graf změny koeficientu špičatosti v závislosti na hodnotě  $p$ .

Ve výše uvedeném grafu jsou zobrazeny důležité body a asymptoty. Pro koeficient špičatosti platí  $\lim_{p \rightarrow 0} \gamma_2 = \infty$ ,  $\lim_{p \rightarrow 1} \gamma_2 = 3$ ,  $\lim_{p \rightarrow 2} \gamma_2 = 0$  a  $\lim_{p \rightarrow \infty} \gamma_2 = -6/5$ . Pokud je hodnota  $p = 2$  je koeficient špičatosti nulový a funkce hustoty má normální rozdělení pravděpodobnosti. Je-li hodnota  $p > 2$  je koeficient špičatosti záporný a funkce hustoty má zobecněné normální rozdělení, které má oproti klasickému normálnímu rozdělení plošší tvar. Naopak pro hodnotu  $p < 2$  je koeficient špičatosti kladný a funkce hustoty má zobecněné normální rozdělení, které má oproti klasickému normálnímu rozdělení špičatější tvar.

### 3 Dvourozměrné zobecněné normální rozdělení

V této bakalářské práci se budeme zabývat především **dvourozměrným zobecněným normálním rozdělením** (viz např. články Goodman a Kotz (1973) [8], Taguchi (1978) [26], Osiewalski a Steel (1993) [17], Gupta a Song (1997) [10, 11, 24], Richter (2009) [19] a Kalke a Richter (2013) [12]), které vychází z jednorozměrného zobecněného normálního rozdělení. V tomto případě se předpokládají dvě nezávislé proměnné  $x$  a  $y$  z nichž každá má zobecněné normální rozdělení s mocninami  $p > 0$  a  $q > 0$ . Pravděpodobnostní rozdělení vektorové veličiny  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  je tedy dáno funkcí

$$f_{p,q}(x, y) = \frac{\exp\left(-\frac{|x|^p}{p}\right)}{2 \cdot p^{1/p} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{|y|^q}{q}\right)}{2 \cdot q^{1/q} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right)} = \frac{\exp\left(-\left(\frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}\right)\right)}{4 \cdot p^{1/p} \cdot q^{1/q} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right)}. \quad (22)$$

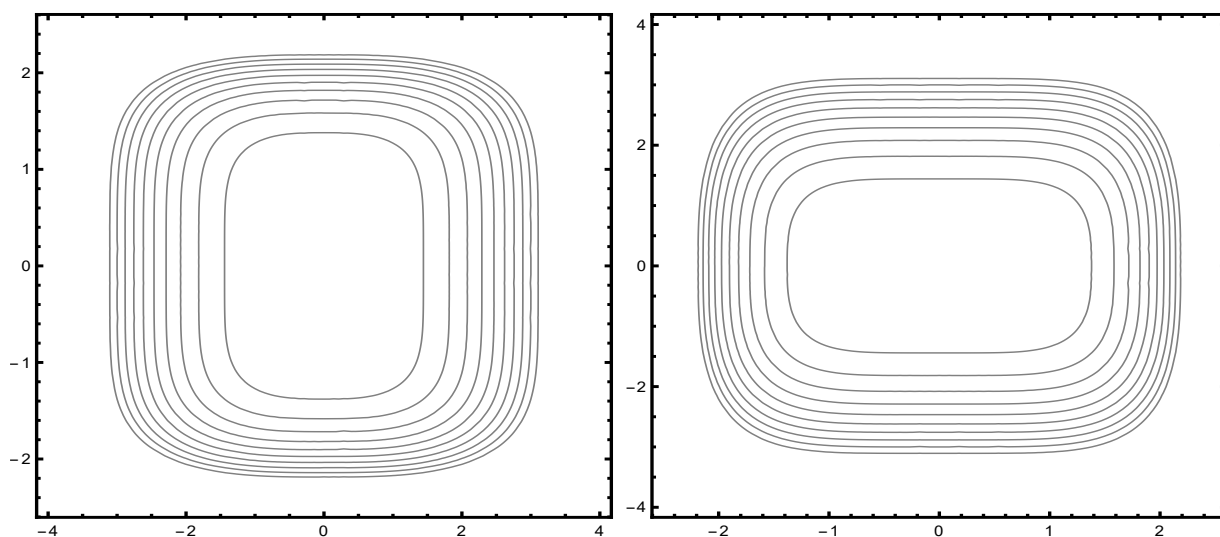
Toto rozdělení zobecňuje dvourozměrné normální rozdělení, které dostaneme jako speciální případ pro parametry  $p = q = 2$ , tedy funkce hustoty je definována jako

$$f_{2,2}(x, y) = f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2 + |y|^2}{2}\right), \quad (23)$$

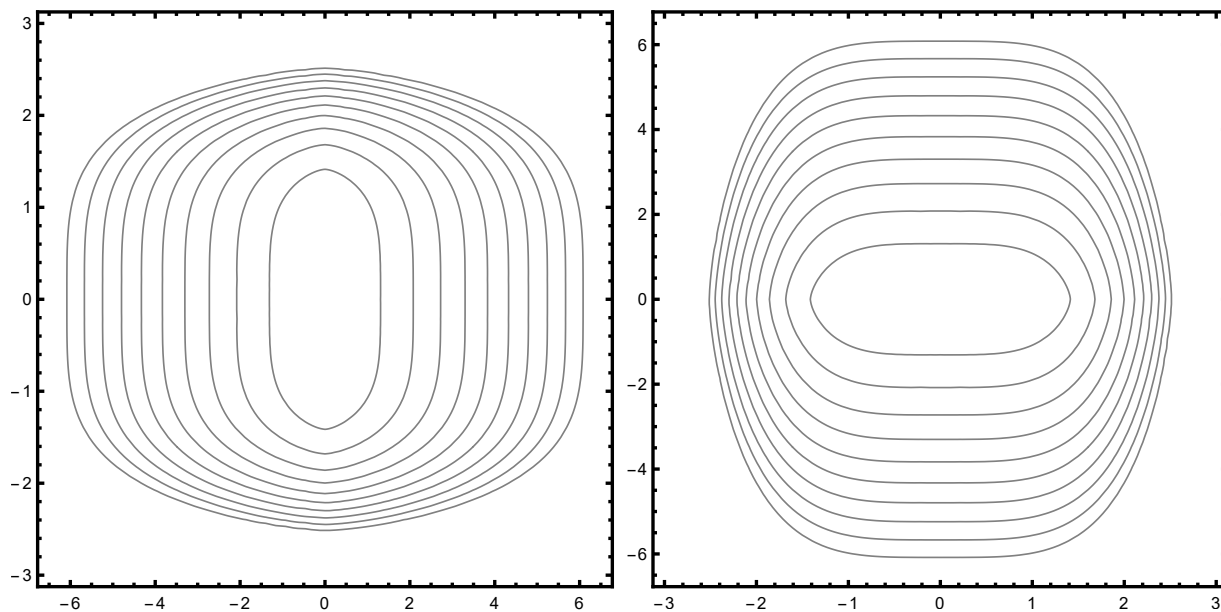
jejímiž hladinami významnosti jsou kružnice se středem v počátku a o poloměru  $r > 0$ . Hladiny tohoto rozdělení tedy splňují rovnici  $x^2 + y^2 = r^2$ . Naproti tomu, z výrazu (22) plyne, že hladinami dvourozměrného zobecněného normálního rozdělení jsou křivky splňující rovnici

$$\frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} = \text{const.} \geq 0.$$

K tomu, abychom mohli s křivkami tohoto typu pracovat, musíme definovat vhodné funkce, kterými lze tyto křivky parametrizovat. Tato parametrizace nás omezuje na hodnoty  $p > 1$  a  $q > 1$ . Pro hodnoty  $0 < p < 1$  nebo  $0 < q < 1$  je situace mnohem složitější z důvodu divergence některých integrálů a v této práci se jí tedy nezabýváme. Plánujeme se jí zabývat v budoucnu. Nyní si pro lepší představu vykreslíme hladiny významnosti dvourozměrného zobecněného normovaného normálního rozdělení pro určité hodnoty  $p > 1$  a  $q > 1$ .



Obrázek 3: Hladiny významnosti - graf vlevo pro  $p = 3$ ,  $q = 5$ , graf vpravo pro  $p = 5$ ,  $q = 3$ .



Obrázek 4: Hladiny významnosti - graf vlevo pro  $p = 3/2$ ,  $q = 4$ , graf vpravo pro  $p = 4$ ,  $q = 3/2$ .



## 4 Zobecněné trigonometrické funkce

### 4.1 Klasické trigonometrické funkce

Na úvod poznamenejme, že  $p$ -trigonometrické funkce (viz [1], [3], [4], [7], [13], [14], [15] a [31]) vznikají v souvislosti s řešením úloh na vlastní čísla pro nelineární Dirichletovu úlohu, kterou uvedeme níže v podsekcí 4.2. Z tohoto důvodu nejprve připomeneme základní vlastnosti klasických trigonometrických funkcí. Klasická lineární Dirichletova úloha na vlastní čísla je úloha pro nalezení vlastního čísla  $\lambda$  a nenulové funkce  $u$  splňující:

$$\begin{cases} -\Delta u := -u'' = \lambda u, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Tento problém má vlastní čísla  $\lambda_n = (n\pi)^2$  a k nim příslušné vlastní funkce  $u_n(x) = \sin(n\pi x)$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ . K vysvětlení co jsou zobecněné trigonometrické funkce si nejprve připomeňme základní vlastnosti trigonometrické funkce  $\sin(x)$ . Tato funkce má následující vlastnosti:

- definiční obor funkce  $\sin(x)$  je  $\mathbb{R}$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(-x) = -\sin(x)$  (tj. funkce je lichá),
- $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$  (tj. funkce je  $2\pi$ -periodická),
- $\sin(x)$  je omezená funkce a její obor hodnot je v intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  (tj. funkce nabývá svého maxima a minima v nekonečně mnoha bodech).

Dále připomeňme, že funkce  $\arcsin(x)$  je funkcí inverzní a je definována následovně

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds, \quad (25)$$

kde  $0 \leq x \leq 1$ . Uvažujeme-li vztah (25) v nejvyšší možné mezi, tj.  $x = 1$ , dostáváme

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Odtud lze už snadno odvodit následující vztah

$$\pi = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds. \quad (26)$$

Jelikož funkce daná výrazem  $(1-s^2)^{-1/2}$  je na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  rostoucí a prostá, zobrazuje interval  $\langle 0, 1 \rangle$  na interval  $\langle 0, \pi/2 \rangle$ . Dále tuto funkci můžeme zobecnit pro  $1 < p < \infty$  a to následujícím způsobem

$$\arcsin_p(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt[p]{1-s^p}} ds, \quad (27)$$

kde  $0 \leq x \leq 1$ . Výraz  $(1-s^p)^{-1/p}$  je opět na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  rostoucí a prostá funkce a tedy zobrazuje interval  $\langle 0, 1 \rangle$  na interval  $\langle 0, \pi_p/2 \rangle$ , kde hodnota  $\pi_p/2$  je definována následujícím vztahem

$$\frac{\pi_p}{2} = \int_0^1 (1-s^p)^{-1/p} ds \quad \Rightarrow \quad \pi_p = 2 \int_0^1 (1-s^p)^{-1/p} ds \stackrel{\text{W.M.}}{=} \frac{2\pi}{p \sin(\pi/p)}. \quad (28)$$

Lze si všimnout, že pro  $p = 2$  platí vztah  $\pi_2 = \pi$ , tj.  $\arcsin_2(x) = \arcsin(x)$ . Jak již bylo řečeno funkce  $\arcsin(x)$  je inverzní funkcí k funkci  $\sin(x)$  na intervalu  $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ . Stejným způsobem lze definovat funkci  $\sin_p(x)$  jako inverzní funkci k funkci  $\arcsin_p(x)$ . Funkce  $\sin_p(x)$  zobrazuje interval  $\langle 0, \pi_p/2 \rangle$  na interval  $\langle 0, 1 \rangle$  a je na tomto intervalu rostoucí a prostou funkcí. Dále rozšíříme tuto funkci na interval  $\langle 0, \pi_p \rangle$  a to následujícím způsobem

$$\sin_p(x) = \sin_p(\pi_p - x),$$

kde  $\pi_p/2 \leq x \leq \pi_p$ . Tuto funkci pak můžeme rozšířit na interval  $\langle -\pi_p, \pi_p \rangle$  použitím lichosti a dále lze funkci rozšířit na  $\mathbb{R}$  pomocí  $2\pi_p$ -periodičnosti. Tento postup poprvé použil Á. Elbert (1979) [7]. Celé rozšíření funkce  $\sin_p(x)$  z intervalu  $\langle 0, \pi_p/2 \rangle$  na  $\mathbb{R}$  lze zapsat následovně

$$\sin_p(x) = \begin{cases} \sin_p(\pi_p - x) & \pi_p/2 \leq x \leq \pi_p, \\ -\sin_p(x - \pi_p) & \pi_p \leq x \leq 2\pi_p, \\ \sin_p(x - 2k\pi_p) & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (29)$$

Jelikož je funkce  $\sin_p(x)$  diferencovatelná na celém  $\mathbb{R}$  můžeme definovat funkci  $\cos_p(x)$  jako

$$\cos_p(x) := \frac{d}{dx} \sin_p(x), \quad (30)$$

kde  $x \in \mathbb{R}$ . Platí zde, že funkce  $\cos_p(x)$  je sudá,  $2\pi_p$ -periodická a lichá podle hodnoty  $\pi_p$ . Dále si definujeme funkce  $\tan_p(x)$ ,  $\cotan_p(x)$ ,  $\operatorname{cosec}_p(x)$  a  $\operatorname{sec}_p(x)$ .

$$\tan_p(x) = \frac{\sin_p(x)}{\cos_p(x)} = \frac{1}{\cotan_p(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi_p, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (31)$$

$$\cotan_p(x) = \frac{\cos_p(x)}{\sin_p(x)} = \frac{1}{\tan_p(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (k\pi_p), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (32)$$

$$\operatorname{cosec}_p(x) = \frac{1}{\sin_p(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (k\pi_p), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (33)$$

$$\operatorname{sec}_p(x) = \frac{1}{\cos_p(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi_p, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (34)$$

Funkce  $\tan_p(x)$  a  $\cotan_p(x)$  jsou  $\pi_p$ -periodické a liché funkce.

## 4.2 Analytický přístup

Jak ukázal Á. Elbert [7] pomocí funkce  $\sin_p(x)$  lze vyjádřit vlastní funkce nelineárního Dirichletova problému pro zobecněný Laplacian zvaný  $p$ -Laplacian:

$$\begin{cases} -\Delta_p u := -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda|u|^{p-2}u, \\ u(0) = u(\pi_p) = 0, \end{cases} \quad (35)$$

kde  $p > 1$ ,  $\lambda > 0$  jsou reálná čísla. Vlastní čísla jsou pak ve tvaru  $\lambda_n = n^p(p-1)$  a k nim odpovídající vlastní funkce ve tvaru  $u_n(x) = \sin_p(nx)$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ . Nyní ukážeme souvislost funkcí  $\arcsin_p(x)$  a  $\sin_p(x)$  s rovnicí (35). K tomuto použijeme metodu střelby. Budeme uvažovat následující počáteční úlohu

$$\begin{cases} (|u'|^{p-2}u')' + \lambda|u|^{p-2}u = 0, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1, \end{cases} \quad (36)$$

kde  $\lambda > 0$  je zatím neurčený parametr. Necht' je splněna rovnice (36). Vynásobíme ji členem  $u'$  a poté dostáváme

$$\begin{aligned} & (|u'|^{p-1})' u' + \lambda |u|^{p-2} u u' = 0 \\ (p-1) |u'|^{p-2} u'' u' + \lambda |u|^{p-2} u u' &= 0 \quad / \int_0^x \dots dz \\ \frac{p-1}{p} (|u'(x)|^p - |u'(0)|^p) + \frac{\lambda}{p} (|u(x)|^p - |u(0)|^p) & \\ |u'(x)|^p + |u(x)|^p \frac{\lambda}{p-1} &= 1. \end{aligned}$$

Pokud budeme předpokládat  $\lambda = p - 1$  dostaneme zobecněný Pythagorův vztah

$$|u'(x)|^p + |u(x)|^p = 1 \quad (37)$$

a můžeme tak definovat funkci  $\sin_p(x)$  jako řešení problému počáteční úlohy (36) pro  $\lambda = p - 1$ . Nyní se omezíme na interval  $x \in \langle 0, a \rangle$ , kde  $a$  je voleno tak aby  $u'(x) \geq 0$  i  $u(x) \geq 0$  na intervalu  $\langle 0, a \rangle$  a zároveň interval  $\langle 0, a \rangle$  byl maximální interval s touto vlastností. Potom vztah (37) lze přepsat jako

$$(u'(x))^p + (u(x))^p = 1,$$

z čehož vyplývá

$$u'(x) = (1 - u(x)^p)^{1/p}. \quad (38)$$

Po vydělení rovnice (38) pravou stranou a zintegrováním přes  $[0, t]$  dostáváme

$$\int_0^t \frac{u'(x)}{(1 - u(x)^p)^{1/p}} dx = t.$$

Zavedením substituce

$$\left| \begin{array}{l} s = u(x) \\ ds = u'(x) dx \\ D = u(0) = 0 \\ H = u(t) \end{array} \right| \quad (39)$$

dostaneme

$$\int_0^{u(t)} \frac{1}{(1 - s^p)^{1/p}} ds = t. \quad (40)$$

Tento integrál lze vyjádřit dvěma způsoby. Prvním z nich je převedení na hypergeometrické rozdělení. Jelikož je funkce  $u(t) = \sin_p(x)$  dána implicitním vztahem (40) lze psát

$$\sin_p(x) \cdot {}_2F_1 \left( \frac{1}{p}, \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}; \sin_p^p(x) \right) = x.$$

Nyní musíme dopočítat hodnotu  $a$ . Z rovnice (38) vyplývá, že  $u'(x) > 0$  pokud  $0 \leq u(x) < 1$ . Pro  $u(x) = 1$  dostaneme  $u'(x) = 0$ . Tedy v bodě  $x = a$  nabývá funkce  $u(x)$  hodnoty 1, z čehož plyne

$$a = {}_2F_1 \left( \frac{1}{p}, \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}; 1 \right) \stackrel{\text{W.M.}}{=} \frac{\pi}{p \sin(\pi/p)} = \frac{\pi_p}{2}. \quad (41)$$

Druhým způsobem vyřešení integrálu v rovnici (40) je převedení na beta funkci. Toto provedeme zavedením následné substituce

$$\begin{cases} z = 1 - s^p \\ dz = -ps^{p-1} ds \\ D = 1 \\ H = 1 - u(t)^p \end{cases}. \quad (42)$$

Potom můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_1^{1-u(t)^p} -\frac{1}{p} \cdot z^{-1/p} \cdot (1-z)^{1/p-1} dz &= \frac{1}{p} \cdot \int_{1-u(t)^p}^1 z^{-1/p} \cdot (1-z)^{1/p-1} dz = \\ &= \frac{1}{p} \cdot \left[ \int_0^1 z^{-1/p} \cdot (1-z)^{1/p-1} dz - \int_0^{1-u(t)^p} z^{-1/p} \cdot (1-z)^{1/p-1} dz \right]. \end{aligned}$$

Lze si všimnout, že výsledné integrály jsou ve tvaru velmi dobře známé beta funkce (viz rovnice (10) a (15)) a to pro hodnoty  $\alpha = 1 - 1/p$  a  $\beta = 1/p$ . Můžeme tak psát

$$\frac{1}{p} \cdot B\left(1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} \cdot B\left(1 - \sin_p^p(x); 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) = x,$$

z čehož po drobných úpravách dostáváme

$$B\left(\cos_p^p(x); 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) = p \cdot \left(\frac{\pi_p}{2} - x\right). \quad (43)$$

Funkci  $\cos_p^p(x)$  případně  $\sin_p^p(x)$  si z rovnice (43) vyjádříme pomocí regularizované beta funkce, která byla stanovena pomocí vzorce (14). Nyní tedy rovnici (43) vydělíme úplnou beta funkcí s parametry  $\alpha = 1 - 1/p$  a  $\beta = 1/p$ . Poté dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{B\left(\cos_p^p(x); 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)}{B\left(1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)} &= \frac{p}{B\left(1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)} \cdot \left(\frac{\pi_p}{2} - x\right) \\ \Rightarrow I\left(\cos_p^p(x); 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) &= 1 - \frac{2x}{\pi_p}. \end{aligned}$$

Z tohoto tvaru lze už snadno odvodit rovnici pro funkci  $\cos_p^p(x)$ , která má tvar

$$\cos_p^p(x) = I^{-1}\left(1 - \frac{2x}{\pi_p}; 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right). \quad (44)$$

Pomocí vztahu (37) můžeme psát

$$\sin_p^p(x) = 1 - I^{-1}\left(1 - \frac{2x}{\pi_p}; 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) \quad (45)$$

a odtud pro  $x \in \langle 0, \pi_p/2 \rangle$

$$\sin_p(x) = \left(1 - I^{-1}\left(1 - \frac{2x}{\pi_p}; 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)\right)^{1/p}. \quad (46)$$

Tento tvar je vhodný pro vykreslování této funkce v softwaru Wolfram Mathematica, protože inverzní regularizovaná beta funkce je v tomto softwaru implementována. Tento přístup umožňuje počítat hodnoty  $\sin_p(x)$  s libovolnou přesností ale je výpočetně náročný a tedy relativně pomalý.

### 4.3 Numerický přístup

Pojďme si nyní najít přepis problému počáteční úlohy (36) vhodný pro použití numerických metod. Zavedeme substituci ve tvaru

$$\left| \begin{array}{l} v := u, \\ w := |u'|^{p-2}u' \Rightarrow u' = |w|^{p'-2}w = v' \end{array} \right|, \quad (47)$$

kde  $1/p + 1/p' = 1$ , z čehož plyne, že  $p' = p/(p-1)$ . Tyto dvě rovnice jsou tedy navzájem inverzní a problém řešení počáteční úlohy (36) lze přepsat jako

$$\left\{ \begin{array}{l} v' = \phi_{p'}(w), \\ w' = -(p-1)|v|^{p-2}v, \\ v(0) = 0, \\ w(0) = 1, \end{array} \right. \quad (48)$$

kde

$$\phi_{p'}(w) = \begin{cases} |w|^{p'-2}w & \text{pro } w \neq 0, \\ 0 & \text{pro } w = 0. \end{cases} \quad (49)$$

Pokud bychom chtěli tedy numericky nalézt přibližné řešení problému této počáteční úlohy pomocí softwaru Wolfram Mathematica použijeme funkci NDSOLVE na následující počáteční podmínku:

$$\begin{aligned} v' &= |w|^{1/(p-1)} \cdot \text{sgn}(w), \\ w' &= -(p-1)|v|^{p-1} \cdot \text{sgn}(v), \\ v(0) &= 0, \\ w(0) &= 1. \end{aligned}$$

Numerickým řešením této úlohy dostaneme méně přesnou aproximaci funkce  $\sin_p(x)$  ale za to je její výpočet o mnohem rychlejší.

## 5 Zobecněné trigonometrické funkce se dvěma parametry

V této kapitole se budeme zabývat zobecněnými trigonometrickými funkcemi se dvěma parametry (viz [5] a [6]), konkrétně  $p$  a  $q$ . Tyto funkce byly studovány již Schmidtem (1940) [22]. Zde budeme řešit počáteční úlohu

$$\begin{cases} (|u'|^{p-2}u')' + \lambda|u|^{q-2}u = 0, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1, \end{cases} \quad (50)$$

kde  $p > 1$ ,  $q > 1$ ,  $\lambda > 0$  jsou reálná čísla. V tomto případě je hodnota  $\pi_{p,q}$  dána vztahem

$$\pi_{p,q} = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[p]{1-t^q}} dt \stackrel{\text{w.M.}}{=} \frac{2 \cdot \Gamma(1-1/p) \Gamma(1+1/q)}{\Gamma(1-1/p+1/q)}. \quad (51)$$

### 5.1 Analytický přístup

Dále lze říci, že funkce  $\sin_{p,q}(x)$  je řešením (50) pro hodnotu  $\lambda = \frac{q(p-1)}{p}$  a také zde platí opět zobecněná Pythagorova identita:

$$|\cos_{p,q}(x)|^p + |\sin_{p,q}(x)|^q = 1. \quad (52)$$

Nechť je splněna rovnice (50) vynásobením členem  $u'$  dostáváme

$$\begin{aligned} & (|u'|^{p-1})' u' + \lambda|u|^{q-2}uu' = 0 \\ & (p-1)|u'|^{p-2}u''u' + \lambda|u|^{q-2}uu' = 0 \quad / \int_0^x \dots dz \\ & \frac{p-1}{p} (|u'(x)|^p - |u'(0)|^p) + \frac{\lambda}{q} (|u(x)|^q - |u(0)|^q) \\ & |u'(x)|^p + |u(x)|^q \frac{\lambda p}{q(p-1)} = 1. \end{aligned}$$

Z poslední rovnosti vyplývá, že pokud uvažujeme  $\lambda = \frac{q(p-1)}{p}$  dostáváme rovnici ve tvaru

$$|u'(x)|^p + |u(x)|^q = 1, \quad (53)$$

která je totožná s identitou (52). Nyní budeme uvažovat rovnici (50) pouze na intervalu  $x \in \langle 0, a \rangle$ , kde  $a$  je voleno tak aby  $u(x) \geq 0$  i  $u'(x) \geq 0$  na intervalu  $\langle 0, a \rangle$  a zároveň aby daný interval byl maximální s touto vlastností. Potom lze tuto rovnici přepsat do tvaru

$$(u'(x))^p + (u(x))^q = 1,$$

z čehož plyne

$$u'(x) = (1 - u(x)^q)^{1/p}. \quad (54)$$

Po vydělení rovnice (54) pravou stranou a následným zintegrováním přes  $[0, t]$  dostaneme

$$\int_0^t \frac{u'(x)}{(1 - u(x)^q)^{1/p}} dx = t.$$

Zavedením substituce (39) vznikne rovnice ve tvaru

$$\int_0^{u(t)} \frac{1}{(1-s^q)^{1/p}} ds = t. \quad (55)$$

Stejně jako u zobecněných trigonometrických funkcí s jedním parametrem i zde tento integrál lze vyjádřit dvěma způsoby. Prvním je opět převedení na hypergeometrické rozdělení, kdy funkce  $u(t) = \sin_{p,q}(x)$  je dána implicitním vztahem (55) a tedy platí

$$\sin_{p,q}(x) \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{q}; \sin_{p,q}^q(x)\right) = x.$$

Opět nejprve musíme spočítat hodnotu  $a$ . Z rovnice (54) vyplývá, že  $u'(x) > 0$  pokud  $0 \leq u(x) < 1$ . Opět pro hodnotu  $u(x) = 1$  dostaneme  $u'(x) = 0$  a tedy v bodě  $x = a$  nabývá funkce  $u(x)$  hodnoty 1, z čehož plyne

$$a = {}_2F_1\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{q}; 1\right) \stackrel{\text{W.M.}}{=} \frac{\Gamma(1-1/p)\Gamma(1+1/q)}{\Gamma(1-1/p+1/q)} = \frac{\pi_{p,q}}{2}. \quad (56)$$

Druhým vyjádřením integrálu v rovnici (55) je převedení na beta funkci. Toto provedeme zavedením následné substituce

$$\left. \begin{array}{l} z = 1 - s^q \\ dz = -qs^{q-1} ds \\ D = 1 \\ H = 1 - u(t)^q \end{array} \right\}. \quad (57)$$

Pomocí této substituce lze daný integrál přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \int_1^{1-u(t)^q} -\frac{1}{q} \cdot z^{-1/p} \cdot (1-z)^{1/q-1} dz &= \frac{1}{q} \cdot \int_{1-u(t)^q}^1 z^{-1/p} \cdot (1-z)^{1/q-1} dz = \\ &= \frac{1}{q} \cdot \left[ \int_0^1 z^{-1/p} \cdot (1-z)^{1/q-1} dz - \int_0^{1-u(t)^q} z^{-1/p} \cdot (1-z)^{1/q-1} dz \right]. \end{aligned}$$

Výsledné integrály jsou opět ve tvaru velmi dobře známé beta funkce (viz rovnice (10) a (15)) a to pro hodnoty  $\alpha = 1 - 1/p$  a  $\beta = 1/q$ . Rovnici (55) lze tak přepsat do tvaru

$$\frac{1}{q} \cdot B\left(1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{q} \cdot B\left(1 - \sin_{p,q}^q(x); 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = x.$$

Po drobných úpravách dostáváme vyjádření neúplné beta funkce ve tvaru

$$B\left(\cos_{p,q}^p(x); 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = q \cdot \left(\frac{\pi_{p,q}}{2} - x\right). \quad (58)$$

Funkci  $\cos_{p,q}^p(x)$  případně  $\sin_{p,q}^q(x)$  si z rovnice (58) vyjádříme opět pomocí regularizované beta funkce, která byla stanovena pomocí vzorce (14). Po vydělení rovnice (58) úplnou beta funkcí s parametry  $\alpha = 1 - 1/p$  a  $\beta = 1/q$  dostáváme

$$\frac{B\left(\cos_{p,q}^p(x); 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)}{B\left(1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)} = \frac{q}{B\left(1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)} \cdot \left(\frac{\pi_{p,q}}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow I \left( \cos_{p,q}^p(x); 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) = 1 - \frac{2x}{\pi_{p,q}}.$$

Z této regularizované beta funkce můžeme jednoduše vyjádřit, že

$$\cos_{p,q}^p(x) = I^{-1} \left( 1 - \frac{2x}{\pi_{p,q}}; 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \quad (59)$$

a pomocí rovnice (52) lze už snadno odvodit, že

$$\sin_{p,q}^q(x) = 1 - I^{-1} \left( 1 - \frac{2x}{\pi_{p,q}}; 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \quad (60)$$

a odtud pro  $x \in \langle 0, \pi_{p,q}/2 \rangle$

$$\sin_{p,q}(x) = \left( 1 - I^{-1} \left( 1 - \frac{2x}{\pi_{p,q}}; 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \right)^{1/q}. \quad (61)$$

Výše uvedený tvar lze opět použít v softwaru Wolfram Mathematica pro vykreslování funkce  $\sin_{p,q}(x)$ . Na druhou stranu pro výpočet hodnot této funkce je daný postup opět velmi náročný a relativně pomalý.

## 5.2 Numerický přístup

Funkce  $\sin_{p,q}(x)$  je definována jako řešení problému počáteční úlohy

$$\begin{cases} (|u'|^{p-2}u')' + \frac{q(p-1)}{p}|u|^{q-2}u = 0, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1, \end{cases} \quad (62)$$

která po zavedení substituce (47) je opět ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{cases} v' = \phi_{p'}(w), \\ w' = -\frac{q(p-1)}{p}|v|^{q-2}v, \end{cases} \quad (63)$$

kde

$$\phi_{p'}(w) = \begin{cases} |w|^{p'-2}w & \text{pro } w \neq 0, \\ 0 & \text{pro } w = 0. \end{cases} \quad (64)$$

Opět v softwaru Wolfram Mathematica bychom pro nalezení přibližné hodnoty problému této počáteční úlohy použili funkci NDSOLVE na počáteční úlohu:

$$\begin{aligned} v' &= |w|^{1/(p-1)} \cdot \text{sgn}(w), \\ w' &= -\frac{q(p-1)}{p}|v|^{q-1} \cdot \text{sgn}(v), \\ v(0) &= 0, \\ w(0) &= 1. \end{aligned}$$

Numerickým řešením této úlohy dostaneme opět méně přesnou aproximaci funkce  $\sin_{p,q}(x)$  ale její výpočet je mnohem rychlejší.



## 6 Přehled derivací a integrálů $p, q$ -trigonometrických funkcí

Při práci se zobecněnými trigonometrickými funkcemi často používáme substituci v určitém integrálu. Než si ukážeme pár těchto integrálů definujeme základní vzorce pro derivace zobecněných trigonometrických funkcí, které poslouží jako pomůcka při následném integrování. Tato sekce doplňuje a rozšiřuje výsledky z bakalářské práce M. Vašinové [28]. Pro snazší referenci jsou výsledky této sekce uspořádány v duchu tabulek integrálů Gradštejna a Ryžika [9] nebo Prudnikova, Bryčkova a Maričeva [18].

### 6.1 Přehled derivací

Nechť  $p, q > 1$  a  $x \in (0, \pi_{p,q}/2)$  potom užitím vztahů (30) až (34) a vztahu (52) lze odvodit následující derivace. Výpočty derivací jsou o mnohem snazší než výpočty integrálů. Některé z následujících výsledků těchto derivací lze nalézt např. v [2].

$$6.1.1 \quad \frac{d}{dx} \cos_p(x) = -\tan_p^{p-1}(x) \cos_p(x)$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos_p(x) &= \frac{d}{dx} \left(1 - \sin_p^p(x)\right)^{1/p} = -\cos_p(x) \cdot p \cdot \sin_p^{p-1}(x) \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(1 - \sin_p^p(x)\right)^{1/p-1} = \\ &= -\cos_p^{2-p}(x) \sin_p^{p-1}(x) = -\frac{\sin_p^{p-1}(x)}{\cos_p^{p-1}(x)} \cos_p(x) = -\tan_p^{p-1}(x) \cos_p(x). \end{aligned}$$

$$6.1.2 \quad \frac{d}{dx} \tan_p(x) = 1 + \tan_p^p(x)$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan_p(x) &= \frac{d \sin_p(x)}{dx \cos_p(x)} = \frac{\cos_p(x) \cos_p'(x) - \sin_p(x) \cos_p''(x)}{\cos_p^2(x)} = \\ &= 1 - \frac{-\cos_p^{2-p}(x) \sin_p^{p-1}(x) \sin_p(x)}{\cos_p^2(x)} = 1 + \tan_p^p(x). \end{aligned}$$

$$6.1.3 \quad \frac{d}{dx} \cotan_p(x) = -\cotan_p^{2-p}(x) - \cotan_p^2(x)$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cotan_p(x) &= \frac{d \cos_p(x)}{dx \sin_p(x)} = \frac{\cos_p'(x) \sin_p(x) - \cos_p(x) \cos_p''(x)}{\sin_p^2(x)} = \\ &= \frac{-\cos_p^{2-p}(x) \sin_p^{p-1}(x) \sin_p(x) - \cos_p^2(x)}{\sin_p^2(x)} = -\cotan_p^{2-p}(x) - \cotan_p^2(x). \end{aligned}$$

$$6.1.4 \quad \frac{d}{dx} \operatorname{cosec}_p(x) = -\cotan_p(x) \operatorname{cosec}_p(x)$$

Výpočet:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec}_p(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sin_p(x)} = \frac{-\cos_p(x)}{\sin_p^2(x)} = -\cotan_p(x) \operatorname{cosec}_p(x).$$

$$6.1.5 \quad \frac{d}{dx} \sec_p(x) = \tan_p^{p-1}(x) \sec_p(x)$$

$$\frac{d}{dx} \sec_p(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos_p(x)} = \frac{\tan_p^{p-1}(x) \cos_p(x)}{\cos_p^2(x)} = \tan_p^{p-1}(x) \sec_p(x).$$

$$6.1.6 \quad \frac{d}{dx} (\cos_p^p(x) - \sin_p^p(x)) = -2p \cdot \sin_p^{p-1}(x) \cos_p(x)$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\cos_p^p(x) - \sin_p^p(x)) &= -p \cdot \cos_p^{p-1}(x) \cos_p^{2-p}(x) \sin_p^{p-1}(x) - p \cdot \sin_p^{p-1}(x) \cos_p(x) = \\ &= -2p \cdot \sin_p^{p-1}(x) \cos_p(x). \end{aligned}$$

$$6.1.7 \quad \frac{d}{dx} \sin_{p,q}(x) = \cos_{p,q}(x)$$

Definice funkce  $\cos_{p,q}(x)$ :

$$\cos_{p,q}(x) := \frac{d}{dx} \sin_{p,q}(x).$$

$$6.1.8 \quad \frac{d}{dx} \cos_{p,q}(x) = -\frac{q}{p} \cos_{p,q}^{2-p}(x) \sin_{p,q}^{q-1}(x)$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos_{p,q}(x) &= \frac{d}{dx} (1 - \sin_{p,q}^q(x))^{1/p} = -\cos_{p,q}(x) \cdot q \cdot \sin_{p,q}^{q-1}(x) \cdot \frac{1}{p} \cdot (1 - \sin_{p,q}^q(x))^{1/p-1} = \\ &= -\frac{q}{p} \cos_{p,q}^{2-p}(x) \sin_{p,q}^{q-1}(x). \end{aligned}$$

$$6.1.9 \quad \frac{d}{dx} \tan_{p,q}(x) = 1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{\sin_{p,q}^q(x)}{\cos_{p,q}^p(x)}$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan_{p,q}(x) &= \frac{d}{dx} \frac{\sin_{p,q}(x)}{\cos_{p,q}(x)} = \frac{\cos_{p,q}(x) \cos_{p,q}(x) + \sin_{p,q}(x) \cdot \frac{q}{p} \cdot \cos_{p,q}^{2-p}(x) \sin_{p,q}^{q-1}(x)}{\cos_{p,q}^2(x)} = \\ &= 1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{\sin_{p,q}^q(x)}{\cos_{p,q}^p(x)}. \end{aligned}$$

$$6.1.10 \quad \frac{d}{dx} (\cos_{p,q}^p(x) - \sin_{p,q}^q(x)) = -2q \cdot \sin_{p,q}^{q-1}(x) \cos_{p,q}(x)$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\cos_{p,q}^p(x) - \sin_{p,q}^q(x)) &= -p \cdot \cos_{p,q}^{p-1}(x) \frac{q}{p} \cos_{p,q}^{2-p}(x) \sin_{p,q}^{q-1}(x) - q \cdot \sin_{p,q}^{q-1}(x) \cos_{p,q}(x) = \\ &= -2q \cdot \sin_{p,q}^{q-1}(x) \cos_{p,q}(x). \end{aligned}$$

Poznamenejme také, že  $\frac{d}{dx} (\cos_p^p(x) + \sin_p^p(x)) = \frac{d}{dx} (\cos_{p,q}^p(x) + \sin_{p,q}^q(x)) = 0$ .

## 6.2 Přehled určitých integrálů

Nechť  $p, q > 1$  a  $m, n \in \mathbb{N}$  potom platí

$$\mathbf{6.2.1} \quad \int_0^{\pi_p/2} \cos_p(x) dx = 1$$

Výpočet:

$$\int_0^{\pi_p/2} \cos_p(x) dx = \sin_p\left(\frac{\pi_p}{2}\right) = 1.$$

$$\mathbf{6.2.2} \quad \int_0^{\pi_p/2} \sin_p^n(x) dx = \frac{1}{p} B\left(\frac{n+1}{p}, \frac{p-1}{p}\right)$$

[Viz [2].]

Výpočet:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi_p/2} \sin_p^n(x) dx &= \left. \begin{array}{l} z = \sin_p(x), \\ dz = \cos_p(x) dx = (1 - \sin_p^p(x))^{1/p} dx, \\ D = 0, \\ H = 1 \end{array} \right| = \\ &= \int_0^1 \frac{z^n}{(1 - z^p)^{1/p}} dz \stackrel{\text{W.M.}}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{p}\right)}{n \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} = \frac{1}{p} B\left(\frac{n+1}{p}, \frac{p-1}{p}\right). \end{aligned}$$

$$\mathbf{6.2.3} \quad \int_0^{\pi_p/2} \cos_p^n(x) dx = \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 + \frac{n-1}{p}\right)$$

[Viz [2].]

Výpočet:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi_p/2} \cos_p^n(x) dx &= \int_0^{\pi_p/2} (1 - \sin_p^p(x))^{n/p} dx \left. \begin{array}{l} z = \sin_p(x), \\ dz = \cos_p(x) dx = (1 - \sin_p^p(x))^{1/p} dx, \\ D = 0, \\ H = 1 \end{array} \right| = \\ &= \int_0^1 (1 - z^p)^{(n-1)/p} dz \stackrel{\text{W.M.}}{=} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{n-1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+p}{p}\right)} = \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 + \frac{n-1}{p}\right). \end{aligned}$$

$$6.2.4 \quad \int_0^{\pi_p/2} \sin_p^m(x) \cos_p^n(x) dx = \frac{1}{p} B\left(\frac{m+1}{p}, 1 + \frac{n-1}{p}\right)$$

[Viz [2].]

Výpočet:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi_p/2} \sin_p^m(x) \cos_p^n(x) dx &= \left. \begin{array}{l} z = \sin_p(x), \\ dz = \cos_p(x) dx = (1 - \sin_p^p(x))^{1/p} dx, \\ D = 0, \\ H = 1 \end{array} \right| = \\ &= \int_0^1 \frac{z^m \cdot (1 - z^p)^{n/p}}{(1 - z^p)^{1/p}} dz = \int_0^1 z^m \cdot (1 - z^p)^{(n-1)/p} dz \stackrel{\text{W.M.}}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{p+n-1}{p}\right)}{p \cdot \Gamma\left(\frac{p+m+n}{p}\right)} = \\ &= \frac{1}{p} B\left(\frac{m+1}{p}, 1 + \frac{n-1}{p}\right). \end{aligned}$$

### 6.3 Přehled neurčitých integrálů

Nechť  $p, q > 1$  a  $n \in \mathbb{N}$  potom platí

$$6.3.1 \quad \int \tan_p^{p-1}(x) dx = -\ln(\cos_p(x))$$

[Pro  $x \in (0, \pi_p/2)$ . Viz [2].]

Výpočet:

$$\begin{aligned} \int \tan_p^{p-1}(x) dx &= \frac{\sin_p^{p-1}(x)}{\cos_p^{p-1}(x)} dx = \left. \begin{array}{l} z = \cos_p(x), \\ dz = -\cos_p^{2-p}(x) \sin_p^{p-1}(x) dx \end{array} \right| = \\ &= -\int \frac{1}{z} dz = -\ln(\cos_p(x)). \end{aligned}$$

$$6.3.2 \quad \int \sin_p^{p-1}(x) \cos_p^n(x) dx = \frac{\cos_p^{n+p-1}(x)}{n+p-1}$$

[Pro  $x \in (0, \pi_p/2)$ . Viz [2].]

Výpočet:

$$\begin{aligned} \int \sin_p^{p-1}(x) \cos_p^n(x) dx &= \left. \begin{array}{l} z = \cos_p(x), \\ dz = -\cos_p^{2-p}(x) \sin_p^{p-1}(x) dx \end{array} \right| = \\ &= \int z^{n+p-2} dz = \frac{\cos_p^{n+p-1}(x)}{n+p-1}. \end{aligned}$$

$$6.3.3 \quad \int \frac{1}{\sin_p(x) \cos_p^{p-1}(x)} dx = \ln(\tan_p(x))$$

[Pro  $x \in (0, \pi_p/2)$ . Viz [2].]

Výpočet:

$$\int \frac{1}{\sin_p(x) \cos_p^{p-1}(x)} dx = \int \frac{1}{\frac{\sin_p(x)}{\cos_p(x)} \cos_p^p(x)} dx = \int \frac{\cos_p^{-p}(x)}{\tan_p(x)} dx.$$

Jelikož ze vztahu 6.1.2 víme, že  $\frac{d}{dx} \tan_p(x) = 1 + \tan_p^p(x) = 1 + \frac{\sin_p^p(x)}{\cos_p^p(x)} = \cos_p^{-p}(x)$  můžeme říci, že v integrálu 6.3.3 je derivace jmenovatele rovna čitateli a tedy uplatněním vztahu  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(f(x))$  lze psát

$$\int \frac{\cos_p^{-p}(x)}{\tan_p(x)} dx = \ln(\tan_p(x)).$$

Zintegrováním vztahu 6.1.2 lze také odvodit, že

$$\int \tan_p^p(x) dx = \tan_p(x) - x.$$

[Pro  $x \in (0, \pi_p/2)$ .]

$$\mathbf{6.3.4} \quad \int \sin_{p,q}^{q-1}(x) \cos_{p,q}^n(x) dx = \frac{p}{q} \left( \frac{\cos_p^{n+p-1}(x)}{n+p-1} \right)$$

[Pro  $x \in (0, \pi_{p,q}/2)$ .]

Výpočet:

$$\begin{aligned} \int \sin_{p,q}^{q-1}(x) \cos_{p,q}^n(x) dx &= \left| \begin{array}{l} z = \cos_{p,q}(x), \\ dz = -\frac{q}{p} \cos_{p,q}^{2-p}(x) \sin_{p,q}^{q-1}(x) dx \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{p}{q} z^{n+p-2} dz = \frac{p}{q} \left( \frac{\cos_p^{n+p-1}(x)}{n+p-1} \right). \end{aligned}$$

$$\mathbf{6.3.5} \quad \int \cos_{p,q}^{p+1}(x) dx = \sin_{p,q}(x) - \frac{\sin_{p,q}^{q+1}(x)}{q+1}$$

[Pro  $x \in (0, \pi_{p,q}/2)$ .]

Výpočet:

$$\int \cos_{p,q}^{p+1}(x) dx = \left| \begin{array}{l} z = \sin_{p,q}(x), \\ dz = \cos_{p,q}(x) dx \end{array} \right| = \int (1 - z^q) dz = \sin_{p,q}(x) - \frac{\sin_{p,q}^{q+1}(x)}{q+1}.$$

$$\mathbf{6.3.6} \quad \int \tan_{p,q}^{q-1}(x) dx = -\frac{p}{q(p-q)} \cos_{p,q}^{p-q}(x)$$

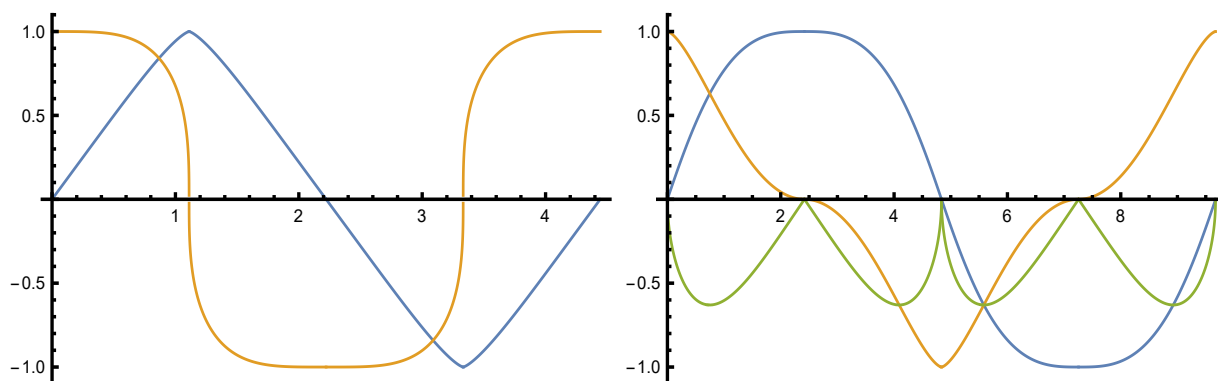
[Pro  $x \in (0, \pi_{p,q}/2)$ .]

Výpočet:

$$\begin{aligned} \int \tan_{p,q}^{q-1}(x) dx &= \int \frac{\sin_{p,q}^{q-1}(x)}{\cos_{p,q}^{q-1}(x)} dx \left| \begin{array}{l} z = \cos_{p,q}(x), \\ dz = -\frac{q}{p} \cos_{p,q}^{2-p}(x) \sin_{p,q}^{q-1}(x) dx \end{array} \right| = \\ &= -\frac{p}{q} \int \frac{1}{z^{q-p+1}} dz = -\frac{p}{q} \int z^{p-q-1} dz = -\frac{p}{q(p-q)} \cos_{p,q}^{p-q}(x). \end{aligned}$$

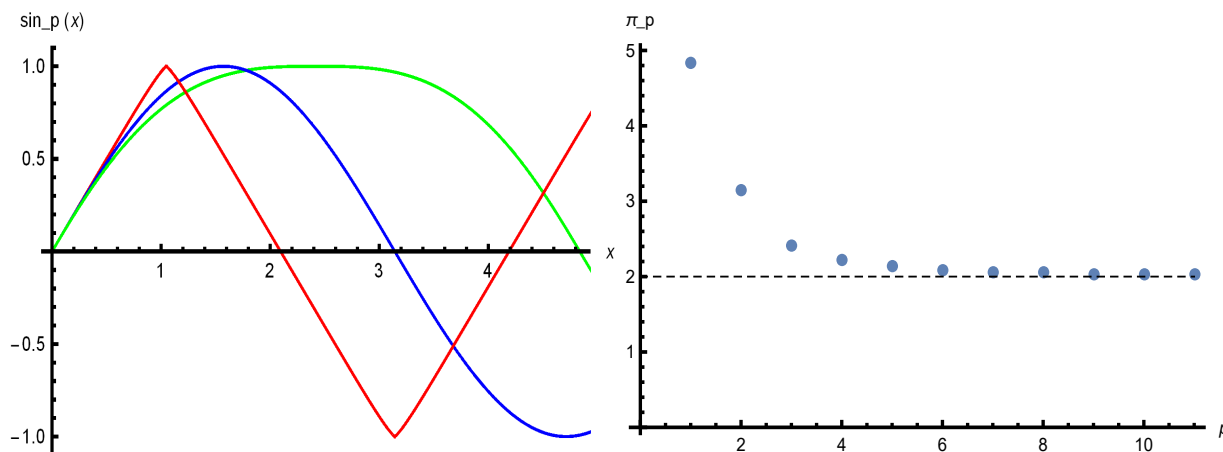
## 7 Grafy

Z níže uvedených grafů lze vidět, že pro hodnotu  $p \rightarrow 1$  hodnota  $\pi_p$  roste do nekonečna (tj.  $\lim_{p \rightarrow 1} \pi_p = \infty$ ) a tedy se daný graf rozšiřuje. Naopak pro hodnotu  $p \rightarrow \infty$  hodnota  $\pi_p$  klesá k hodnotě 2 (tj.  $\lim_{p \rightarrow \infty} \pi_p = 2$ ) a daný graf se zužuje. Pomocí derivace funkce  $\cos_p(x)$  jsme dále schopni vykreslit graf druhé derivace funkce  $\sin_p(x)$ . Avšak graf druhé derivace této funkce lze vykreslit pouze pro hodnoty  $p \in (1, 2)$ , jelikož pro hodnoty  $p > 2$  by druhá derivace klesala k hodnotě  $-\infty$  z důvodu dělení nulou.



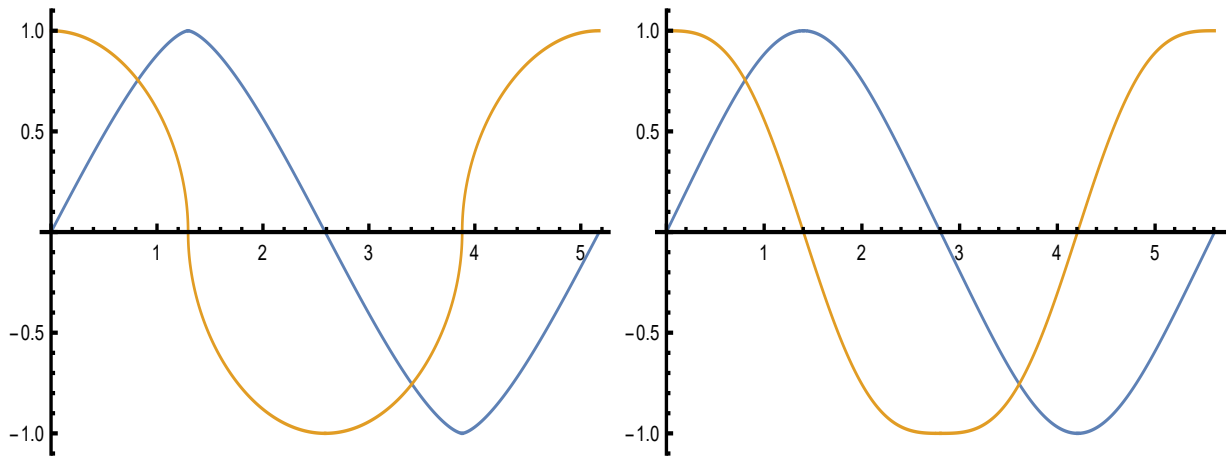
Obrázek 5: Graf vlevo znázorňuje  $\sin_4(x)$  a  $\cos_4(x)$ , vpravo zas  $\sin_{1.5}(x)$ ,  $\cos_{1.5}(x)$  a  $\cos'_{1.5}(x)$ .

Na následujících obrázcích můžeme vidět, jak se mění hodnota  $\pi_p$  v závislosti na hodnotě  $p$  a to i včetně funkce  $\sin_p(x)$ .

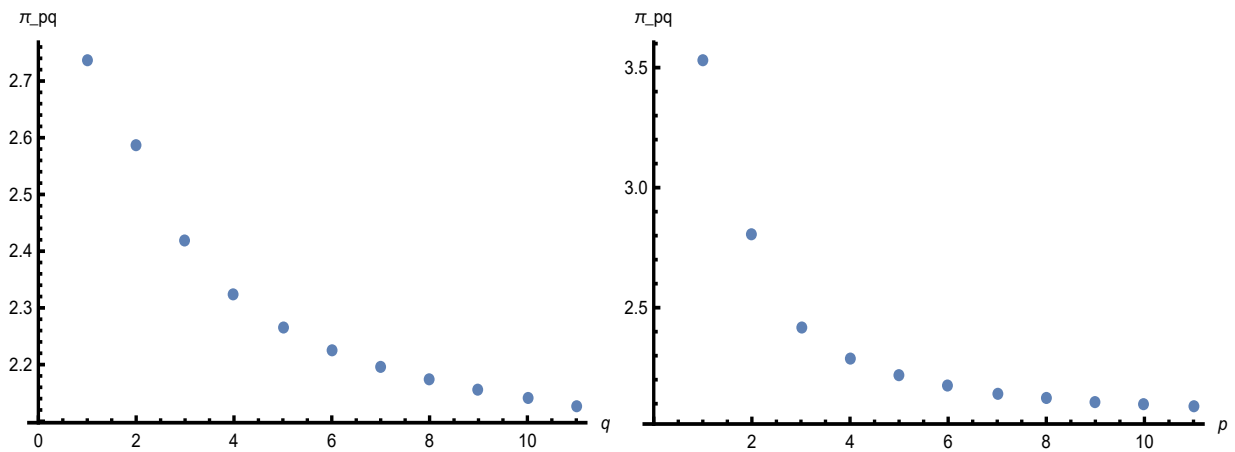


Obrázek 6: Graf vlevo znázorňuje funkce  $\sin_{1.5}(x)$ ,  $\sin_2(x)$  a  $\sin_6(x)$  a graf vpravo znázorňuje změnu hodnoty  $\pi_p$  v závislosti na hodnotě  $p \in \{3/2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ .

Nyní si vykreslíme grafy pro  $p, q$ -trigonometrické funkce (tj.  $\sin_{p,q}(x)$  a  $\cos_{p,q}(x)$ ), kdy budeme uvažovat nejprve hodnotu  $p = 3$  a  $q = 2$  a v druhém případě zas hodnotu  $p = 2$  a  $q = 3$ . Také vykreslíme opět graf znázorňující změnu hodnoty  $\pi_{p,q}$  při změnách parametru  $p$  a  $q$ . V prvním případě budeme nejprve uvažovat konstantní hodnotu  $p = 3$  a budeme měnit hodnotu  $q$  a v druhém případě budeme uvažovat konstantní hodnotu  $q = 3$  a budeme měnit hodnotu  $p$ .



Obrázek 7: Vlevo vidíme graf  $\sin_{p,q}(x)$  a  $\cos_{p,q}(x)$  pro hodnoty  $p = 3$ ,  $q = 2$ , vpravo vidíme stejné funkce avšak pro hodnoty  $p = 2$ ,  $q = 3$ .



Obrázek 8: Graf vlevo znázorňuje změnu hodnoty  $\pi_{p,q}$  při konstantní hodnotě  $p = 3$  a  $q \in \{3/2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ , vpravo zas změnu hodnoty  $\pi_{p,q}$  při konstantní hodnotě  $q = 3$  a  $p \in \{3/2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ .

Pro hodnotu  $\pi_{p,q}$  platí (viz [13]) následující:

$$\pi_{p,q} = \begin{cases} 2p' & \text{pro } 1 < p < \infty, q = 1, \\ 2 & \text{pro } 1 < p < \infty, q = \infty, \\ \infty & \text{pro } p = 1, 1 < q < \infty, \\ 2 & \text{pro } p = \infty, 1 < q < \infty. \end{cases}$$

## 8 Normalizace a kvantily dvourozměrného zobecněného normálního rozdělení

V této kapitole se budeme zabývat dvourozměrným zobecněným normálním rozdělením se střední hodnotou  $\mu_x = \mu_y = 0$  a rozptylem  $\sigma_x = (1/p)^{1/p}$  a  $\sigma_y = (1/q)^{1/q}$ . Tedy v případě  $p = q$  se bude jednat o funkci ve tvaru

$$f_{p,p}(x, y) = \exp(-|x|^p - |y|^p), \quad (65)$$

splňující  $|x|^p + |y|^p \leq r^p$ . V případě  $p \neq q$  se bude jednat o funkci ve tvaru

$$f_{p,q}(x, y) = \exp(-|x|^p - |y|^q), \quad (66)$$

splňující  $|x|^p + |y|^q \leq r^{pq}$ . Pro případ *dvourozměrného rozdělení není pojem kvantilu přesně definován, neboť se jedná o oblast v  $\mathbb{R}^2$  a tudíž závisí nejen na obsahu dané oblasti ale i na jejím tvaru*. Proto se omezíme na oblasti, které jsou vymezené hladinami významnosti daného rozdělení. Tím se problém zredukuje na výpočet jednoho reálného parametru.

### 8.1 Normalizace dvourozměrného zobecněného normálního rozdělení pro $p = q$

Než se pokusíme o výpočet určitého kvantilu tohoto rozdělení budeme se snažit o normalizaci funkce (65) a (66). Nejprve si ukážeme základní normalizaci funkce (65), kdy předpokládáme  $p = q = 2$ . Chceme tedy nyní nalézt řešení

$$\frac{1}{K} = \int \int \exp(-|x|^2 - |y|^2) dx dy, \quad (67)$$

kdy integrujeme přes oblast  $\{x^2 + y^2 \leq r^2\}$ . Přejdeme do polárních souřadnic a to zavedením substituce

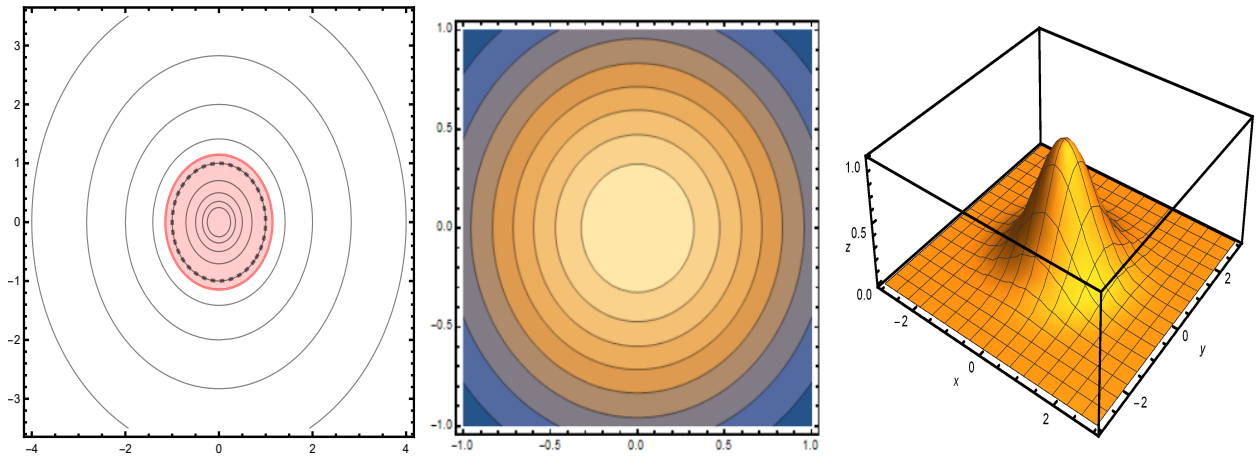
$$\left. \begin{array}{l} x = r \cdot \cos(\phi) \\ y = r \cdot \sin(\phi) \\ r \in \langle 0, \infty \rangle, \phi \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ |J(x, y)| = \begin{vmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{vmatrix} = r \end{array} \right|, \quad (68)$$

kde  $|J(x, y)|$  je Jakobián funkcí  $x = r \cdot \cos(\phi)$  a  $y = r \cdot \sin(\phi)$ . Po této substituci dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r d\phi dr = \int_0^\infty \exp(-r^2) r dr \int_0^{2\pi} 1 d\phi = \\ &= \left[ -\frac{1}{2} \exp(-r^2) \right]_0^\infty \cdot 2\pi = \pi \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Pro přehled vykreslíme graf znázorňující funkci (65) pro hodnotu  $p = q = 2$ . Dále vykreslíme graf hladin významnosti této funkce a vyznačíme oblast 95% kvantilu.





Obrázek 9: Hladiny významnosti a graf funkce  $f(x, y) = \exp(-|x|^2 - |y|^2)$ . Křivka vyznačená silnou černou čárkovanou čarou odpovídá bodům splňujícím rovnici  $|x|^2 + |y|^2 = 1$ . Červeně vybarvená plocha ohraničená křivkou vyznačenou silnou červenou čarou představuje oblast 95% kvantilu.

Pojďme se nyní vrátit k integrálu funkce (65), kdy se budeme snažit nalézt normalizovanou verzi této funkce. Budeme se tedy snažit o vyřešení rovnice ve tvaru

$$1 = \int \int K \cdot \exp(-|x|^p - |y|^p) dx dy, \quad (69)$$

kdy integrujeme přes oblast  $\{|x|^p + |y|^p \leq r^p\}$ . Jelikož se snažíme o normalizaci funkce (65) musíme integrovat přes celý definiční obor (tj. plocha pod grafem) a tedy  $\phi \in \langle 0, 2\pi_p \rangle$  a  $r \in \langle 0, \infty \rangle$ . Nejprve pomocí převodu do zobecněných polárních souřadnic zavedeme následnou substituci

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cdot \cos_p(\phi) \\ y = r \cdot \sin_p(\phi) \\ r \in \langle 0, \infty \rangle, \phi \in \langle 0, \pi_p/2 \rangle \\ |J(x, y)| = \begin{vmatrix} \cos_p(\phi) & -r \cos_p^{2-p}(\phi) \sin_p^{p-1}(\phi) \\ \sin_p(\phi) & r \cos_p(\phi) \end{vmatrix} = r \cdot (\cos_p^2(\phi) + \cos_p^{2-p}(\phi) \sin_p^p(\phi)) \end{array} \right|, \quad (70)$$

kde  $|J(x, y)|$  je Jakobián funkcí  $x = r \cdot \cos_p(\phi)$  a  $y = r \cdot \sin_p(\phi)$ . Integrujeme pouze přes oblast  $\phi \in \langle 0, \pi_p/2 \rangle$  a to z důvodu, že zde platí osová symetrie jak podle osy  $y$  tak podle osy  $x$ , z čehož plyne, že zde platí i středová symetrie a proto jsou všechny čtyři části symetrické. Výsledný integrál tedy pouze přenásobíme hodnotou 4. Po zavedení výše uvedené substituce a aplikování **Fubiniovy věty** lze psát

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} &= \int \int \exp(-|x|^p - |y|^p) dx dy = \\ &= 4 \cdot \left( \int_0^{\pi_p/2} \cos_p^2(\phi) d\phi + \int_0^{\pi_p/2} \cos_p^{2-p}(\phi) \sin_p^p(\phi) d\phi \right) \cdot \int_0^\infty \exp(-r^p) \cdot r dr \end{aligned}$$

První integrál spočteme využitím vztahu 6.2.3 pro  $n = 2$  a tedy

$$\int_0^{\pi_p/2} \cos_p^2(\phi) d\phi = \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}\right).$$

Druhý integrál spočteme zavedením substituce

$$\left. \begin{array}{l} z = \sin_p(\phi), \\ dz = \cos_p(\phi) d\phi = (1 - \sin_p^p(\phi))^{1/p} d\phi, \\ D = 0, \\ H = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{z^p (1 - z^p)^{(2-p)/p}}{(1 - z^p)^{1/p}} dz =$$

$$= \int_0^1 z^p (1 - z^p)^{(1-p)/p} dz \stackrel{\text{W.M.}}{=} \frac{4^{-1/p} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right)}.$$

Třetí integrál spočteme ihned pomocí softwaru Wolfram Mathematica a tedy v tomto případě

$$\int_0^\infty \exp(-r^p) \cdot r dr \stackrel{\text{W.M.}}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{2+p}{p}\right)}{2}.$$

Po těchto výpočtech tak můžeme rovnici danou vztahem (69) definovat jako

$$\frac{1}{K} = 2 \cdot \Gamma\left(\frac{2+p}{p}\right) \cdot \left(\frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{4^{-1/p} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right)}\right) \quad (71)$$

a hodnotu  $K$  lze už snadno vyjádřit jako

$$K = \frac{1}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{2+p}{p}\right) \cdot \left(\frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{4^{-1/p} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right)}\right)}.$$

Poznamenejme také, že pomocí **Fubiniovy věty** lze výpočítat hodnotu

$$\frac{1}{K} = 4 \cdot \int_0^\infty \exp(-|x|^p) dx \cdot \int_0^\infty \exp(-|y|^p) dy \stackrel{\text{W.M.}}{=} 4 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{4 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)}.$$

Pomocí softwaru Wolfram Mathematica bylo ověřeno, že tyto dva výsledky se shodují.

## 8.2 Výpočet 95% kvantilu dvourozměrného zobecněného normálního rozdělení pro $p = q$

Nyní budeme předpokládat  $r \in \langle 0, R \rangle$ . Budeme se snažit dopočítat hodnotu  $R$ , tak aby objem pod grafem tvořil 95 % z celkového objemu. Víme, že platí

$$1 = \int \int K \cdot \exp(-|x|^p - |y|^p) dx dy =$$

$$= 4 \cdot K \cdot \left( \int_0^{\pi_p/2} \cos_p^2(\phi) d\phi + \int_0^{\pi_p/2} \cos_p^{2-p}(\phi) \sin_p^p(\phi) d\phi \right) \cdot \int_0^\infty \exp(-r^p) \cdot r dr$$

Naším cílem je tedy nalézt hodnotu  $R$  takovou pro kterou platí

$$0,95 = 4 \cdot K \cdot \left( \int_0^{\pi_p/2} \cos_p^2(\phi) d\phi + \int_0^{\pi_p/2} \cos_p^{2-p}(\phi) \sin_p^p(\phi) d\phi \right) \cdot \int_0^R \exp(-r^p) \cdot r dr \quad (72)$$

Označme nyní

$$C = 4 \cdot K \cdot \left( \int_0^{\pi p/2} \cos_p^2(\phi) d\phi + \int_0^{\pi p/2} \cos_p^{2-p}(\phi) \sin_p^p(\phi) d\phi \right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)} \cdot \left( \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{4^{-1/p} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right)} \right).$$

Po zavedení této substituce lze psát

$$0,95 = C \cdot \int_0^R \exp(-r^p) \cdot r dr \stackrel{\text{W.M.}}{=} C \cdot \left( \frac{\Gamma\left(\frac{2+p}{p}\right)}{2} - \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p}, R^p\right)}{p} \right). \quad (73)$$

Po drobných úpravách dostáváme vyjádření vyšší neúplné gama funkce ve tvaru

$$\Gamma\left(\frac{2}{p}, R^p\right) = p \cdot \left( \frac{\Gamma\left(\frac{2+p}{p}\right)}{2} - \frac{0,95}{C} \right). \quad (74)$$

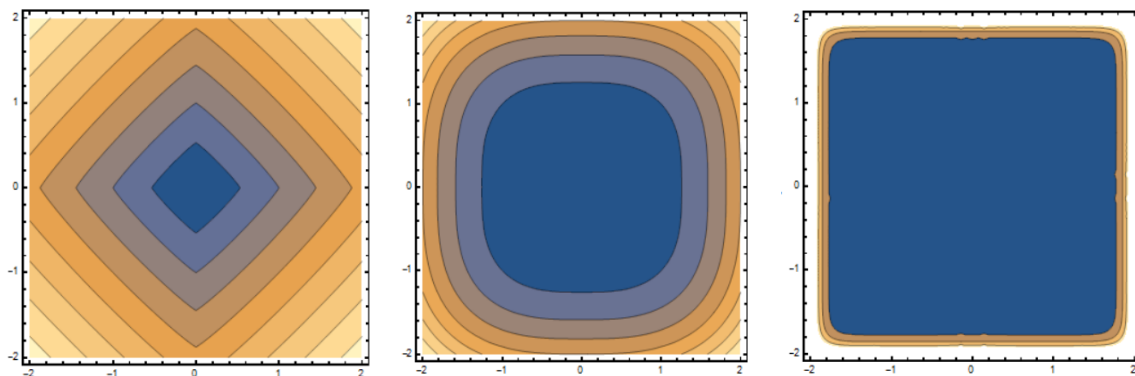
Nyní pro dopočtení hodnoty  $R$  vyjádříme pomocí vztahu (7) regularizovanou gama funkci. Z tohoto vztahu tedy plyne, že

$$Q\left(\frac{2}{p}, R^p\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p}, R^p\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)} = \frac{p \cdot \left( \frac{\Gamma\left(\frac{2+p}{p}\right)}{2} - \frac{0,95}{C} \right)}{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}. \quad (75)$$

Odtud vyjádříme hodnotu  $R$  pomocí inverzní regularizované gama funkce a tedy

$$R = \left[ Q^{-1} \left( \frac{2}{p}, \frac{p \cdot \left( \frac{\Gamma\left(\frac{2+p}{p}\right)}{2} - \frac{0,95}{C} \right)}{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)} \right) \right]^{1/p}. \quad (76)$$

Pokud hodnota  $R$  bude větší nebo rovna výše uvedenému výrazu můžeme se spolehnout, že objem pod grafem bude minimálně z 95 % pokryt. Nyní si vykreslíme hladiny významnosti této funkce pro hodnoty  $p = 11/10$ , 3 a 16. Lze si všimnout jaký vliv má parametr  $p$  na změnu těchto hladin. Pro  $p \rightarrow 1$  můžeme vidět, že hladiny se tvarují do čtverce s vrcholy  $[1, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[-1, 0]$  a  $[0, -1]$ . Naopak pro  $p \rightarrow \infty$  se hladiny tvarují do čtverce s vrcholy  $[1, 1]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[-1, -1]$  a  $[1, -1]$ . Pro hodnotu  $p = 2$  dostáváme hladiny ve tvaru kružnice.



Obrázek 10: Hladiny významnosti funkce  $f_{p,p}(x,y) = \exp(-|x|^p - |y|^p)$  při hodnotě  $p = 11/10, 3$  a  $16$ .

### 8.3 Normalizace dvourozměrného zobecněného normálního rozdělení pro $p \neq q$

Nyní si zkusíme znormalizovat vztah (66), kdy předpokládáme  $p \neq q$ . Bude se tedy jednat o vyřešení rovnice ve tvaru

$$\frac{1}{K} = \int \int \exp(-|x|^p - |y|^q) dx dy, \quad (77)$$

kdy budeme integrovat přes oblast  $\{|x|^p + |y|^q \leq r^{pq}\}$ . Opět se přesuneme do zobecněných polárních souřadnic a to zavedením substituce ve tvaru

$$\left| \begin{array}{l} x = r^q \cdot \cos_{p,q}(\phi) \\ y = r^p \cdot \sin_{p,q}(\phi) \\ r \in \langle 0, \infty \rangle, \phi \in \langle 0, \pi_{p,q}/2 \rangle \\ |J(x,y)| = \begin{vmatrix} q \cdot r^{q-1} \cdot \cos_{p,q}(\phi) & -\frac{q}{p} \cdot r^q \cdot \cos_{p,q}^{2-p}(\phi) \cdot \sin_{p,q}^{q-1}(\phi) \\ p \cdot r^{p-1} \cdot \sin_{p,q}(\phi) & r^p \cdot \cos_p(\phi) \end{vmatrix} \\ = q \cdot r^{p+q-1} \cdot \left( \cos_{p,q}^2(\phi) + \cos_{p,q}^{2-p}(\phi) \cdot \sin_{p,q}^q(\phi) \right) \end{array} \right| =, \quad (78)$$

kde  $J|(x,y)|$  je Jakobián funkcí  $x = r^q \cdot \cos_{p,q}(\phi)$  a  $y = r^p \cdot \sin_{p,q}(\phi)$ . Opět integrujeme pouze přes oblast  $\phi \in \langle 0, \pi_{p,q}/2 \rangle$ , jelikož zde platí osová symetrie jak podle osy  $x$  tak podle osy  $y$  tj. rovnici  $|x|^p + |y|^q \leq r^{pq}$  splňují body  $(x,y)$ ,  $(-x,y)$ ,  $(x,-y)$  a  $(-x,-y)$ . Jelikož platí symetrie podle obou os platí zde i středová symetrie a tedy daný integrál opět pouze přenásobíme hodnotou 4. Na základě aplikování **Fubiniovy věty** lze poté psát

$$\frac{1}{K} = 4 \cdot \int_0^\infty \left( \exp(-r^{pq}) \cdot q \cdot r^{p+q-1} \right) dr \cdot \left( \int_0^{\pi_{p,q}/2} \cos_{p,q}^2(\phi) d\phi + \int_0^{\pi_{p,q}/2} \cos_{p,q}^{2-p}(\phi) \sin_{p,q}^q(\phi) d\phi \right) \quad (79)$$

Pomocí softwaru Wolfram Mathematica opět dopočteme jednotlivé integrály. Tedy

$$\int_0^\infty \left( \exp(-r^{pq}) \cdot q \cdot r^{p+q-1} \right) dr \stackrel{\text{W.M.}}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}{p}.$$

Druhý integrál je zobecnění integrálu 6.2.3 pro dva parametry  $p, q$  a opět pro hodnotu  $n = 2$ . Tedy platí

$$\int_0^{\pi_{p,q}/2} \cos_{p,q}^2(\phi) d\phi = \frac{1}{q} B\left(\frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{p}\right).$$

Poslední integrál spočteme zavedením substituce

$$\left. \begin{array}{l} z = \sin_{p,q}(\phi), \\ dz = \cos_{p,q}(\phi) d\phi = (1 - \sin_{p,q}^q(\phi))^{1/p} d\phi, \\ D = 0, \\ H = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{z^q (1 - z^q)^{(2-p)/p}}{(1 - z^q)^{1/p}} dz =$$

$$= \int_0^1 z^q (1 - z^q)^{(1-p)/p} dz \stackrel{\text{W.M.}}{=} \frac{p}{q(p+q)} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right).$$

Rovnici (79) můžeme tak vyjádřit následujícím vztahem

$$\frac{1}{K} = 4 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}{p} \cdot \left[ \frac{1}{q} B\left(\frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{p}{q(p+q)} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \right]. \quad (80)$$

Hodnota  $K$  je tedy opět udána jako

$$K = \frac{1}{4 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}{p} \cdot \left[ \frac{1}{q} B\left(\frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{p}{q(p+q)} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \right]}.$$

I v tomto případě aplikováním **Fubiniovy věty** platí

$$\frac{1}{K} = 4 \cdot \int_0^\infty \exp(-|x|^p) dx \cdot \int_0^\infty \exp(-|y|^q) dy \stackrel{\text{W.M.}}{=} 4 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right)$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{4 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right)}.$$

Opět pomocí softwaru Wolfram Mathematica bylo ověřeno, že tyto dva výsledky se shodují.

## 8.4 Výpočet 95% kvantilu dvourozměrného zobecněného normálního rozdělení pro $p \neq q$

Opět i zde budeme hledat hodnotu  $R$  splňující rovnici

$$0,95 = 4 \cdot K \cdot \left( \int_0^{\pi_{p,q}/2} \cos_{p,q}^2(\phi) d\phi + \int_0^{\pi_{p,q}/2} \cos_{p,q}^{2-p}(\phi) \sin_{p,q}^q(\phi) d\phi \right) \cdot \int_0^R (\exp(-r^{pq}) \cdot q \cdot r^{p+q-1}) dr \quad (81)$$

Jako u  $p$ -trigonometrických funkcí i zde si zavedeme substituci

$$C = 4 \cdot K \cdot \left( \int_0^{\pi_{p,q}/2} \cos_{p,q}^2(\phi) d\phi + \int_0^{\pi_{p,q}/2} \cos_{p,q}^{2-p}(\phi) \sin_{p,q}^q(\phi) d\phi \right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right)} \cdot \left[ \frac{1}{q} B\left(\frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{p}{q(p+q)} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \right].$$

Potom platí

$$0,95 = C \cdot \int_0^R (\exp(-r^{pq}) \cdot q \cdot r^{p+q-1}) dr \stackrel{\text{W.M.}}{=} C \cdot \left( \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, R^{pq}\right)}{p} \right). \quad (82)$$

Nejprve jako v předchozím případě vyjádříme z výše uvedené rovnice vyšší neúplnou gama funkci a to následným způsobem

$$\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, R^{pq}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - p \cdot \frac{0,95}{C} \quad (83)$$

Nyní opět za pomoci vztahu (7) vyjádříme regularizovanou gama funkci, která bude ve tvaru

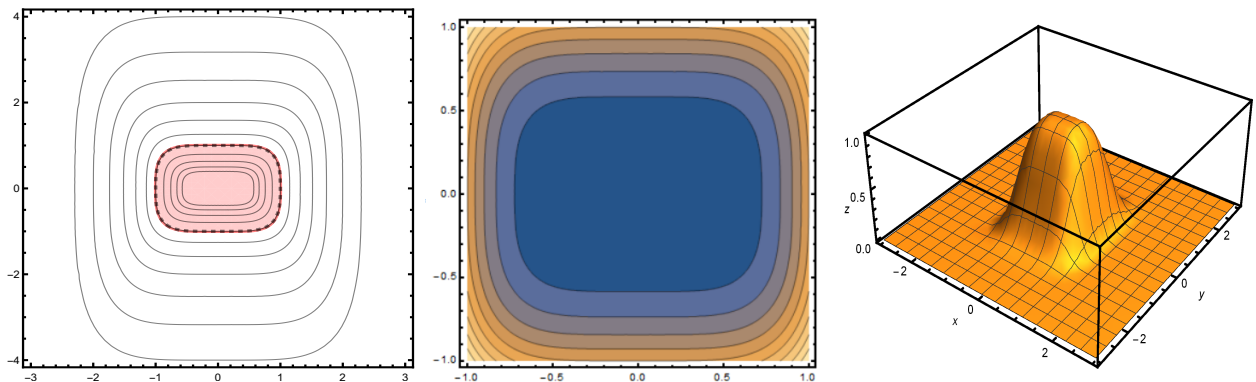
$$Q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, R^{pq}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, R^{pq}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - p \cdot \frac{0,95}{C}}{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}. \quad (84)$$

Z výše uvedené rovnice poté plyne

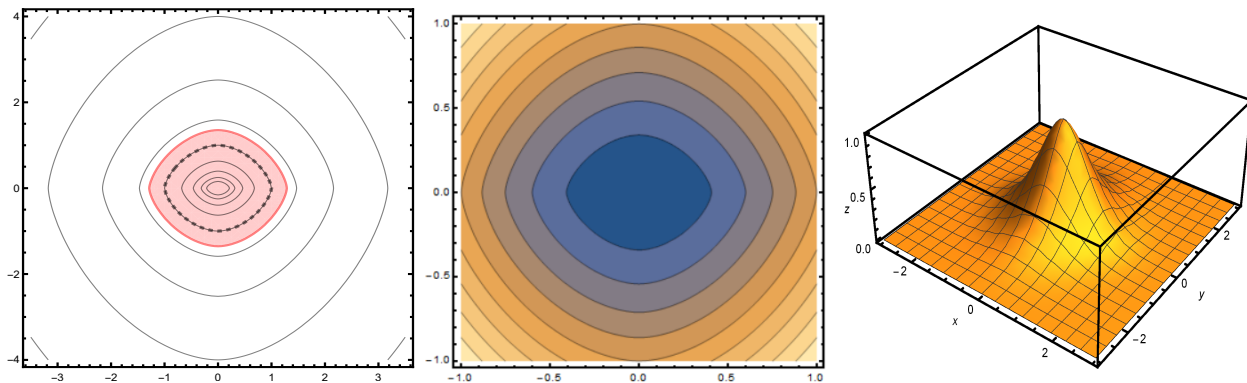
$$R = \left[ Q^{-1}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - p \cdot \frac{0,95}{C}}{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}\right) \right]^{1/pq}. \quad (85)$$

Hodnotu  $R$  nakonec dopočteme pomocí softwaru Wolfram Mathematica za použití inverzní regularizované gama funkce a to pro konkrétní hodnoty  $p$  a  $q$ .

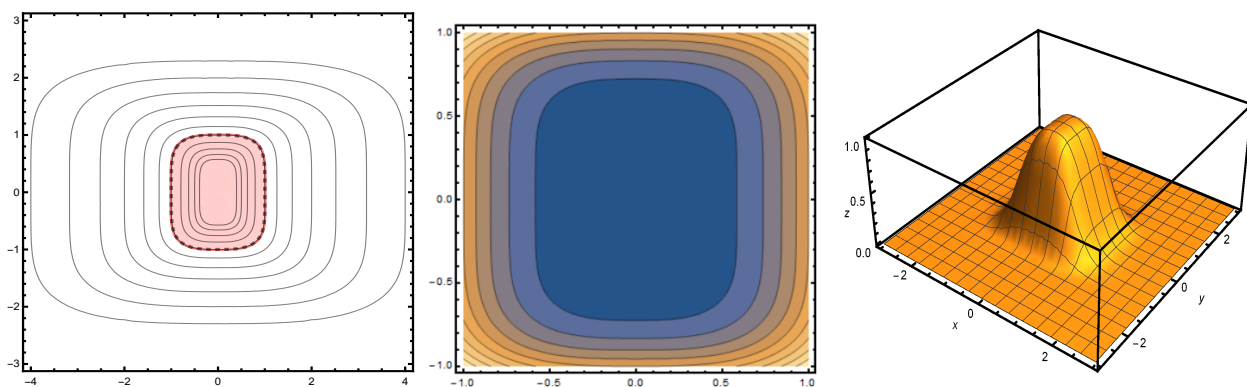
Na závěr si vykreslíme hladiny významnosti této funkce včetně jejího grafu. Nejprve budeme uvažovat  $p > q$ . Na níže uvedených grafech můžeme vidět, že hladiny jsou ve tvaru vodorovných „sudů“, v případě  $p, q \in (1, 2)$  ve tvaru vodorovného „oka“. S postupem zvyšování hodnoty  $r$  se tyto grafy tvarují do svislé polohy. V případě, že předpokládáme hodnotu  $p < q$  jsou hladiny významnosti ve tvaru svislých „sudů“, v případě  $p, q \in (1, 2)$  ve tvaru svislého „oka“. Opět s postupem zvyšování hodnoty  $r$  se tyto grafy tvarují do vodorovné polohy.



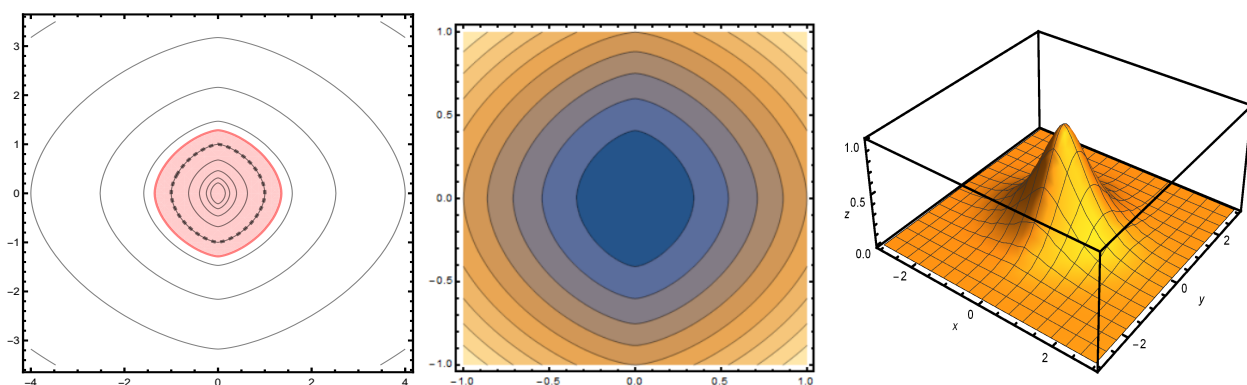
Obrázek 11: Hladiny významnosti a graf funkce  $f_{p,q}(x,y) = \exp(-|x|^p - |y|^q)$  pro  $p = 5$ ,  $q = 3$ . Křivka vyznačená silnou černou čárkovanou čarou odpovídá bodům splňujícím rovnici  $|x|^p + |y|^q = 1$ . Červeně vybarvená plocha ohraničená křivkou vyznačenou silnou červenou čarou představuje oblast 95% kvantilu.



Obrázek 12: Hladiny významnosti a graf funkce  $f_{p,q}(x,y) = \exp(-|x|^p - |y|^q)$  pro  $p, q \in (1,2)$ , kdy  $p > q$ . Křivka vyznačená silnou černou čárkovanou čarou odpovídá bodům splňujícím rovnici  $|x|^p + |y|^q = 1$ . Červeně vybarvená plocha ohraničená křivkou vyznačenou silnou červenou čarou představuje oblast 95% kvantilu.



Obrázek 13: Hladiny významnosti a graf funkce  $f_{p,q}(x,y) = \exp(-|x|^p - |y|^q)$  pro  $p = 3$ ,  $q = 5$ . Křivka vyznačená silnou černou čárkovanou čarou odpovídá bodům splňujícím rovnici  $|x|^p + |y|^q = 1$ . Červeně vybarvená plocha ohraničená křivkou vyznačenou silnou červenou čarou představuje oblast 95% kvantilu.



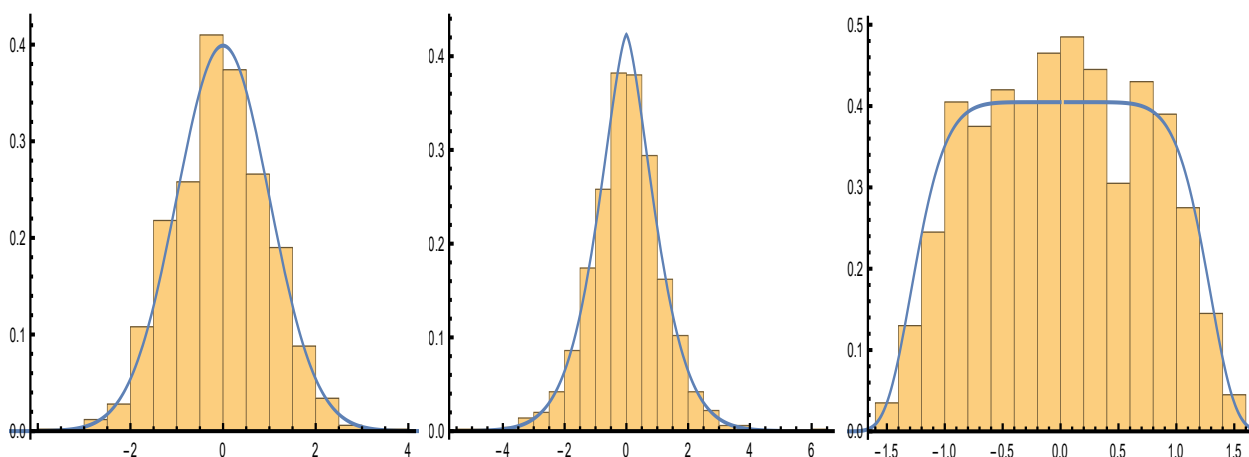
Obrázek 14: Hladiny významnosti a graf funkce  $f_{p,q}(x,y) = \exp(-|x|^p - |y|^q)$  pro  $p, q \in (1,2)$ , kdy  $p < q$ . Křivka vyznačená silnou černou čárkovanou čarou odpovídá bodům splňujícím rovnici  $|x|^p + |y|^q = 1$ . Červeně vybarvená plocha ohraničená křivkou vyznačenou silnou červenou čarou představuje oblast 95% kvantilu.

## 9 Generování náhodných dvourozměrných dat s dvourozměrným zobecněným normálním rozdělením

Nejdříve připomeneme generování jednorozměrných dat normovaného normálního rozdělení. Toto provedeme v softwaru Wolfram Mathematica pomocí funkce

`RandomVariate[NormalDistribution[0, 1], x]`, kde  $x$  představuje počet hodnot generovaných normálním rozdělením. Pro generování jednorozměrného zobecněného normovaného normálního rozdělení použijeme funkci

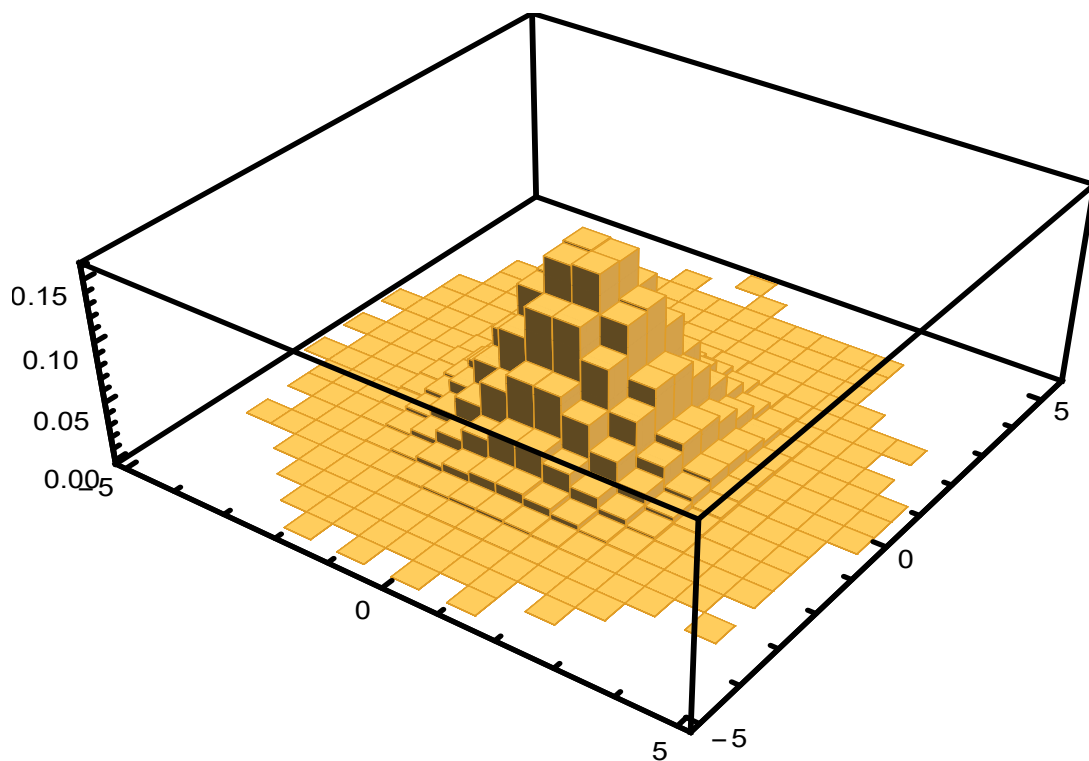
`RandomVariate[ExponentialPowerDistribution[p, 0, 1], x]`, kde  $x$  představuje počet hodnot generovaných  $p$ -zobecněným normálním rozdělením. Na ukázkou uvedeme grafy histogramů četností pro jednorozměrné normované normální rozdělení a jednorozměrné zobecněné normované normální rozdělení pro parametr  $p = 3/2$  a  $p = 7$ . Poznamenejme, že pro  $p = 2$  by se jednalo o jednorozměrné normované normální rozdělení. K histogramům četností také vykreslíme příslušné funkce hustoty daného rozdělení a to pomocí funkce `PDF`. Všechny níže uvedené grafy jsou vygenerovány pro 1000 hodnot daného rozdělení.



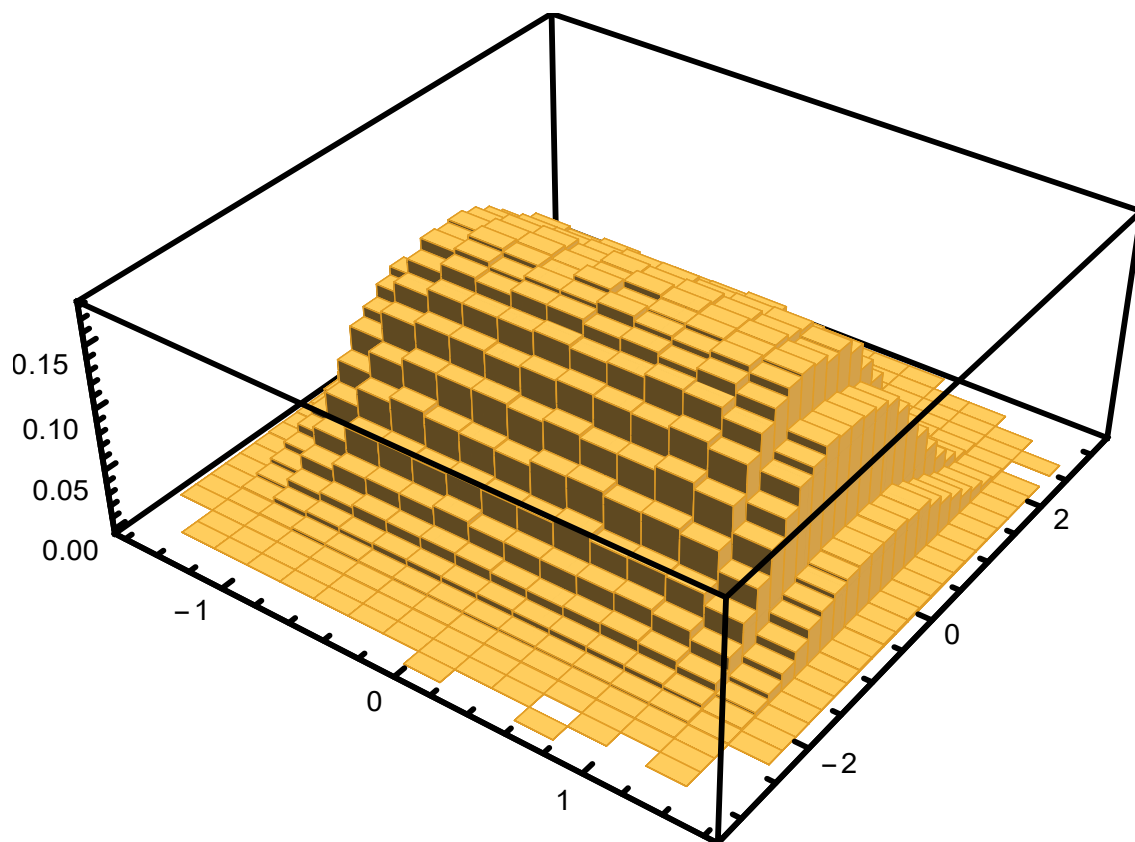
Obrázek 15: Histogramy četností a funkce hustoty příslušného jednorozměrného zobecněného normovaného normálního rozdělení.

Naším cílem je však provést generování náhodných dvourozměrných dat a to s dvourozměrným zobecněným normálním rozdělením. Opět nejprve vygenerujeme hodnoty pomocí funkce `RandomVariate` a to jak pro dvourozměrné normované normální rozdělení tak pro dvourozměrné zobecněné normované normální rozdělení. Toto generování musíme provést nejprve jak pro složky  $x$  tak pro složky  $y$ . Dále pak pomocí funkce `Transpose` transponujeme tyto dvě složky do uspořádané dvojice  $(x, y)$ . Poté můžeme vykreslit 3D histogram četností dělený na určitý počet dílků jak ve směru osy  $x$  tak ve směru osy  $y$ . Na níže uvedených grafech můžeme vidět 3D histogramy četností pro  $10^6$  hodnot dělených na 20 dílků ve směru každé z os  $x$  a  $y$ . Pro 3D histogram dvourozměrného normovaného normálního rozdělení platí  $p = q = 2$ . Naopak 3D histogramy dvourozměrných zobecněných normovaných normálních rozdělení jsou vykresleny nejprve pro hodnotu  $p = 10$ ,  $q = 3$ , poté pro hodnotu  $p = 3/2$ ,  $q = 5$  a nakonec pro hodnotu  $p = q = 5$ .

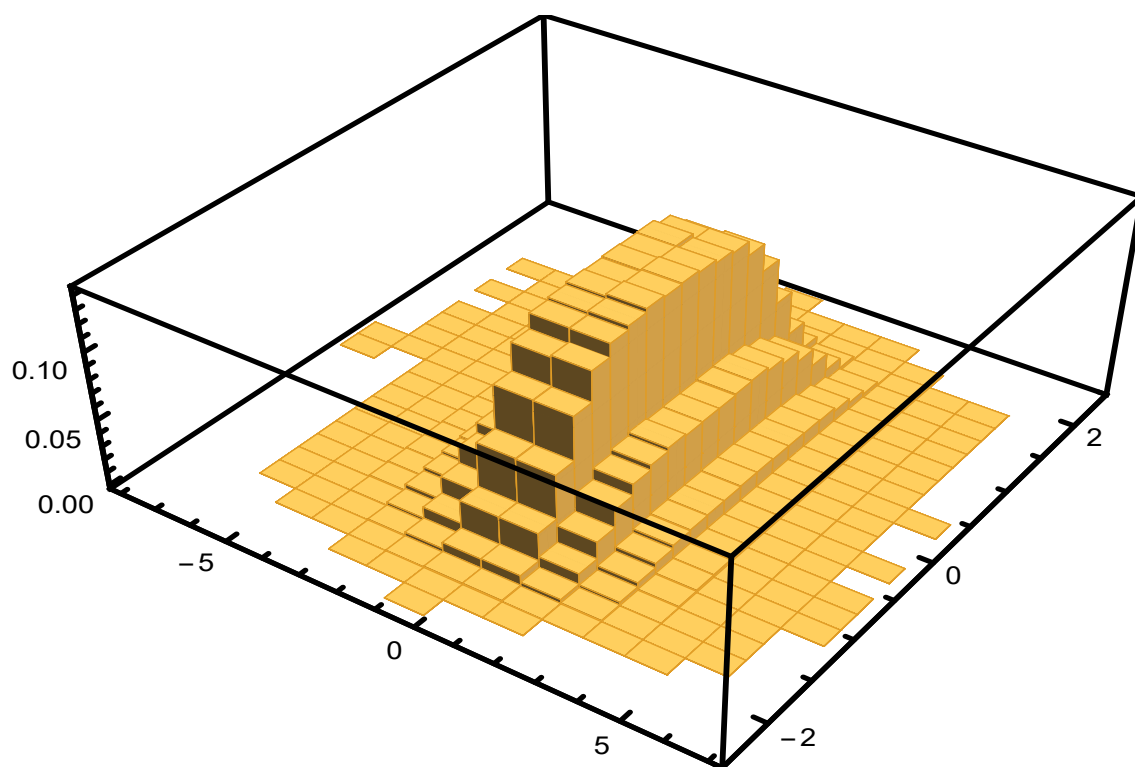




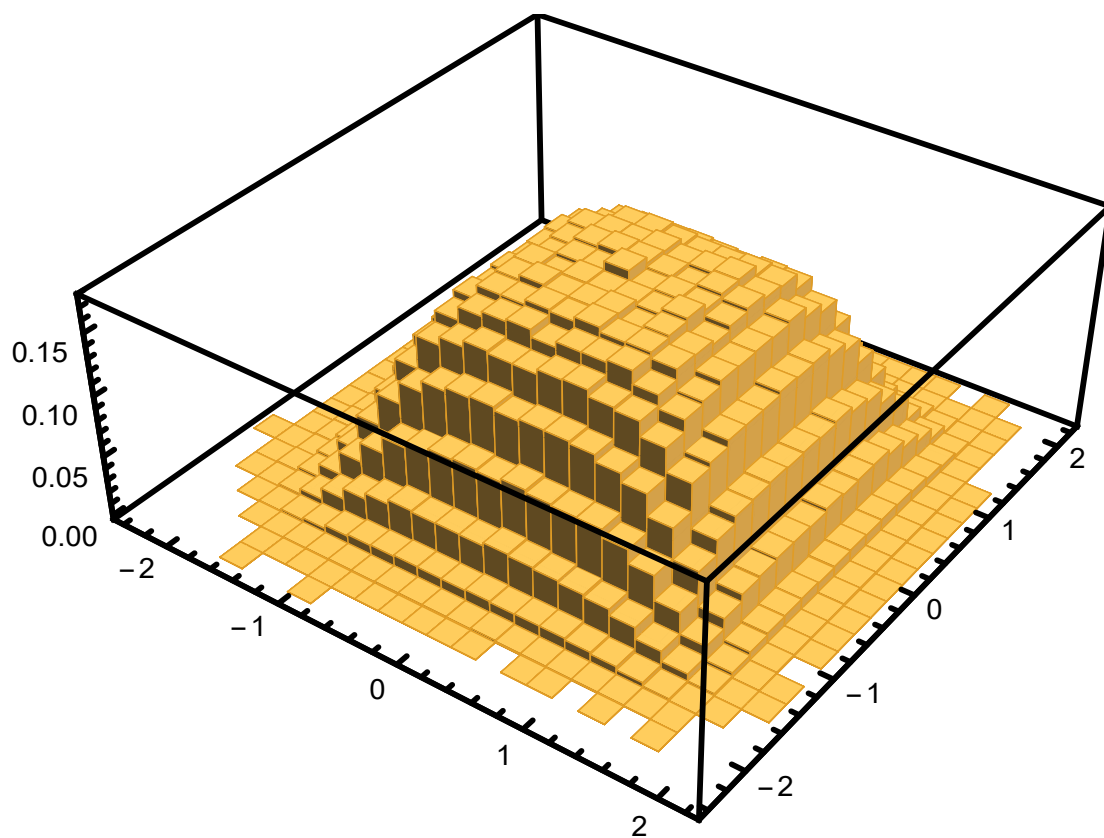
Obrázek 16: 3D histogram četností dvourozměrného normovaného normálního rozdělení tj. pro  $p = q = 2$ .



Obrázek 17: 3D histogram četností dvourozměrného zobecněného normovaného normálního rozdělení pro hodnotu  $p = 10$  a  $q = 3$ .



Obrázek 18: 3D histogram četností dvourozměrného zobecněného normovaného normálního rozdělení pro hodnotu  $p = 3/2$  a  $q = 5$ .



Obrázek 19: 3D histogram četností dvourozměrného zobecněného normovaného normálního rozdělení pro hodnotu  $p = q = 5$ .

## 10 Závěr

V článcích [19, 20, 21] Richter pracuje v dimenzi  $\mathbb{R}^N$ , kde  $N \geq 2$  a používá zobecněné sférické souřadnice s jedním parametrem  $p > 0$ . Pro případ  $N = 2$ , kterým se zabýváme v této práci toto odpovídá zobecněným polárním souřadnicím

$$x = r \cdot C_p(\phi),$$

$$y = r \cdot S_p(\phi)$$

s Jacobiánem

$$|J(x, y)| = \frac{r}{(|\sin(\phi)|^p + |\cos(\phi)|^p)^{2/p}}.$$

Richter definuje funkce  $S_p(\phi)$  a  $C_p(\phi)$  jako

$$S_p(\phi) = \frac{y}{(|x|^p + |y|^p)^{1/p}} = \frac{\sin(\phi)}{(|\sin(\phi)|^p + |\cos(\phi)|^p)^{1/p}}$$

a

$$C_p(\phi) = \frac{x}{(|x|^p + |y|^p)^{1/p}} = \frac{\cos(\phi)}{(|\sin(\phi)|^p + |\cos(\phi)|^p)^{1/p}}.$$

Platí zde  $-1 \leq S_p(\phi) \leq 1$ ,  $-1 \leq C_p(\phi) \leq 1$  a zároveň také  $|S_p(\phi)|^p + |C_p(\phi)|^p = 1$ . Výpočty v těchto zobecněných polárních souřadnicích vyžadují výpočty integrálu typu

$$\int_0^{\pi/4} \frac{d\phi}{(\sin^p(\phi) + \cos^p(\phi))^{2/p}}, \quad (86)$$

který je velice obtížný vypočítat pro obecné  $p > 0$  i  $p > 1$ .

Naproti tomu naše volba zobecněných polárních souřadnic založených na  $p$ -trigonometrických funkcích  $\sin_p(\phi)$  a  $\cos_p(\phi)$  (která vede na jiný Jacobián) umožňuje *mnohem jednodušší výpočty* (viz kapitola 8). Díky tomu jsme mohli v této kapitole stanovit dvourozměrný 95% kvantil dvourozměrného zobecněného normálního rozdělení. Náš přístup umožňuje též uvažovat toto rozdělení pro dva parametry  $p$  a  $q$ . Tyto výpočty lze provést pro libovolnou hodnotu  $p, q > 1$ .

V budoucnu bychom se rádi věnovali případům, kdy alespoň jedna z hodnot  $p$  nebo  $q$  leží v intervalu  $(0, 1)$ . Dále bychom chtěli zkusit naším přístupem řešit vícerozměrná zobecněná normální rozdělení pro dimenze větší než 2.

## Reference

- [1] Baricz, A.; Bhayo, B. A.; Pogány, T. K.: Functional inequalities for generalized inverse trigonometric and hyperbolic functions. *J. Math. Anal. Appl.* 417, 2014, pp. 244-259.
- [2] Bushell, P. J.; Edmunds, D. E.: Remarks on generalized trigonometric functions. *Rocky Mountain J. Math.* 42 (2012), no. 1, 25–57.
- [3] del Pino, M.; Elgueta, M.; Manásevich, R.: A homotopic deformation along  $p$  of a Leray-Schauder degree result and existence for  $(|u'|^{p-2}u')' + f(t, u) = 0, u(0) = u(T) = 0, p > 1$ . *J. Differential Equations* 80 (1989), no. 1, 1-13.
- [4] del Pino, M.A.; Drábek, P.; Manásevich, R.F.: The Fredholm Alternative at the First Eigenvalue for the One Dimensional  $p$ -Laplacian. *J. Differential Equations* 151 (1999), pp. 386-419.
- [5] Drábek, P.; Manásevich, R.: On the closed solution to some nonhomogeneous eigenvalue problems with  $p$ -Laplacian. *Differential Integral Equations* 12 (1999), no. 6, 773–788.
- [6] Edmunds, D. E.; Gurka, P.; Lang, J.: Properties of generalized trigonometric functions. *J. Approx. Theory* 164 (2012), no. 1, pp. 47–56.
- [7] Elbert, Á.: A half-linear second order differential equation. *Qualitative theory of differential equations, Vol. I, II (Szeged, 1979)*, pp. 153–180, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 30, NorthHolland, Amsterdam-New York, 1981.
- [8] Goodman, I. R.; Kotz, S.: Multivariate  $\theta$ -generalized normal distributions. *J. Multivariate Anal.* 3 (1973), 204–219.
- [9] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M.: *Table of integrals, series, and products*. Translated from the Russian. Translation edited and with a preface by Daniel Zwillinger and Victor Moll. Eighth edition. Revised from the seventh edition. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2015.
- [10] Gupta, A. K.; Song, D.:  $L_p$ -norm spherical distribution. *J. Statist. Plann. Inference* 60 (1997), no. 2, 241–260.
- [11] Gupta, A. K.; Song, D.: Characterization of  $p$ -generalized normality. *J. Multivariate Anal.* 60 (1997), no. 1, 61–71.
- [12] Kalke, S.; Richter, W.-D.: Simulation of the  $p$ -generalized Gaussian distribution. *J. Stat. Comput. Simul.* 83 (2013), no. 4, 641–667.
- [13] Lang, J.; Edmunds, D.: *Eigenvalues, Embeddings and Generalised Trigonometric Functions*, in: *Lecture Notes in Mathematics 2016*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2011).
- [14] Lindqvist, P.: Note on a nonlinear eigenvalue probleme, *Rocky Mountains Journal of Mathematics*, 23, no. 1 (1993), pp. 281–288.

- [15] Lindqvist, P.: Some remarkable sine and cosine functions. *Ricerche Mat.* 44 (1995), no. 2, pp. 269–290.
- [16] Mineo, A.M.; Ruggieri, M.: A Software Tool for the Exponential Power Distribution: The normalp package. *Journal of Statistical Software.* 12, (2005), no. 12, pp. 1–24.
- [17] Osiewalski, J.; Steel, M. F. J.: Robust Bayesian inference in  $l_q$ -spherical models. *Biometrika* 80 (1993), no. 2, 456–460.
- [18] Prudnikov, A. P.; Brychkov, Yu. A.; Marichev, O. I.: Интегралы и ряды. Том 1 - 3. (Russian) [Integrals and series. Vol. 1 - 3]. Second revised edition. Fiziko-Matematicheskaya Literatura, Moscow, 2003.
- [19] Richter, W.-D.: Continuous  $l_{n,p}$ -symmetric distributions. *Lith. Math. J.* 49 (2009), no. 1, 93–108.
- [20] Richter, W.-D.: On  $l_{2,p}$ -circle numbers. *Lith. Math. J.* 48 (2008), no. 2, 228–234.
- [21] Richter, W.-D.: Generalized spherical and simplicial coordinates. *J. Math. Anal. Appl.* 336 (2007), no. 2, 1187–1202.
- [22] Schmidt, E.: Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet. (German) *Math. Ann.* 117, (1940). 301–326.
- [23] Smith, R.M.; Bain, L.J.: An exponential power life-time distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 4, (1975), 469–481.
- [24] Song, D.; Gupta, A. K.:  $L_p$ -norm uniform distribution. *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997), no. 2, 595–601.
- [25] Subbotin, M.T.: On the law of frequency of error, *Matematicheskii Sbornik*, 31 (1923), 296–301.
- [26] Taguchi, T.: On a generalization of Gaussian distribution. *Ann. Inst. Statist. Math.* 30 (1978), no. 2, 211–242.
- [27] Turner, M.E.: On Heuristic Estimation Methods. *Biometrics*, Vol 16, No. 2 (1960), pp. 299–301.
- [28] Vašinová, M.: Properties of generalized trigonometric functions. Bachelor thesis. University of West Bohemia at Pilsen, Pilsen, 2016.
- [29] Westfall, P. H.: Kurtosis as peakedness, 1905–2014. R.I.P.. *Amer. Statist.* 68 (2014), no. 3, 191–195.
- [30] Reference.wolfram.com. Wolfram Language & System Documentation Center. [online]. [cit. 2017-05-14]. Dostupné z: <https://reference.wolfram.com/language/ref/ExponentialPowerDistribution.html>
- [31] Wood, W. E.: Squigonometry. *Math. Mag.* 84 (2011), no. 4, pp. 257–265.