FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

Bakalářská práce

Problémy aplikace Vopěnkovy Alternativní teorie množin

Tomáš Zítka

Plzeň 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem závěrečnou práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

V Plzni dne 29. 5. 2017

Tomáš Zítka

Poděkování

Rád bych poděkoval svému školiteli Ing. Mgr. Janu Romportlovi, Ph.D. za trpělivost a cenné rady při vedení této práce.

Abstract

This thesis attempts to identify and describe main problems of application of Petr Vopěnka's (1935 – 2015) Alternative set theory (AST). In AST it's author introduces phenomenological approach to mathematics. Proposing such concepts as natural infinity, horizon bounding perception of phenomenons, blurriness and semisets. This thesis provides introduction to these basic concepts and axiomatization of the theory. Further the AST is discussed in context of important directions mathematics of the 20^{th} century, namely classical Zermelo-Fraenkel axiomatic set theory based on Cantor's set theory, intuitionism and constructivism and non-standard analysis.

Main problems of application of the AST identified in this work are: apparent contradiction between the theory and classical concept of infinity, need to admit horizon bounding one's ability to see and understand, lack of publications regarding the theory in international scientific press, uncertainty regarding strength of the theory, insufficient development of the theory and lack of motivation to contribute to the theory which is presented as rejection of previous set theories.

Abstrakt

Tato práce se pokouší identifikovat problémy v aplikaci Alternativní teorie množin (ATM) prof. Petra Vopěnky (1935 – 2015). Prostřednictvím ATM vnáší její autor do matematiky fenomenologický přístup a představuje pojmy jako přirozené nekonečno, obzor, neostrost a polomnožiny. V práci nalezne čtenář představení těchto základních pojmů a axiomatizaci teorie. Dále je ATM zasazena do kontextu ostatních směrů vývoje matematiky 20. století: klasické Zermelo-Freankelovy axiomatizace Cantorovy množinové teorie, intuicionismu a konstruktivismu a nestandardní analýzy.

Hlavní problémy aplikace ATM vyjádřené v této práci jsou: zdánlivý spor mezi ATM a klasickým pojetím nekonečna, přiznání obzoru, neznámost teorie v zahraničí, pochybnosti o síle ATM, nedostatečná rozvinutost teorie a odtržení od klasické teorie množin.

Obsah

1 Úvod

> Jak je možné, že některé poznatky klasické infinitní matematiky jsou použitelné v přirozeném reálném světě a jiné nejsou použitelné dokonce ani při výkladech světa reálného? [18, s. 9]

V numerické matematice je spojitý model považován za ideál, kterého je konečný numerický model jen nepřesné přiblížení. Je ovšem možné uvažovat i opačně, totiž konečný numerický model brát jako přesný a jeho zjemnění do kontinua považovat za aproximaci vhodnou k úvahám. Vždyť v pozorovaném světě nikdy nepracujeme s absolutně nekonečně mnoha částicemi, nekonečně malými nebo velkými vzdálenostmi. Ani spojitost, ve světle zjištění kvantové fyziky, neobstojí. Není tak nakonec bližší skutečnosti právě diskrétní a konečný numerický model? Ostatně i ten můžeme, díky výpočetní síle dnešních počítačů, zjemnit až za hranice skutečného světa.

Klasická matematika nenabízí k těmto úvahám příliš prostoru, model je buď konečný a diskrétní, nebo spojitý a nekonečný, přechod od jednoho k druhému vede skrz nedozírné dálky za obzorem. V reálném světě se nezdá být cesta tak dlouhá, vždyť Avogadrova konstanta $6,022 \cdot 10^{23}$ má k aktuálnímu nekonečnu stejně daleko jako jakékoliv jiné přirozené číslo. Jak je tedy vůbec možné aplikovat poznatky infinitní matematiky o nekonečnu? A dá se tato cesta zkrátit? Existuje elegantnější způsob, jak postihnout přechod od diskrétních částí ke spojitému celku? Alternativní teorie množin (ATM) a na ní založená nová infinitní matematika navrhovaná profesorem Vopěnkou tuto cestu nabízí, dokonce ji staví do svého středu.

Cílem této práce je ve zkratce představit čtenáři především ATM, zasadit ji do kontextu různých směrů matematiky 20. století a identifikovat a shrnout překážky, kvůli kterým se, přes potenciál, který jí přisuzuje mnoho těch, kdo se s ní seznámili, například [2, 8, 10, 20], neprosadila v širší matematické obci.

2 Alternativní teorie množin

Ve svých pozdějších publikacích se prof. Vopěnka zaměřuje na filozofické základy své teorie a méně na její formální stránku. Následující kapitola se sestává ze dvou částí, první se snaží přiblížit právě filozofická východiska a cíle ATM především podle knihy *Meditace o základech vědy* [16]. Druhá pak představuje formální axiomatický systém teorie množin a polomnožin založený na těchto východiscích a cílech, čerpá především z knihy *Úvod do matematiky v alternativnej teórii množín* [15]. V průběhu vývoje ATM docházelo k drobným změnám terminologie i výstavby celé teorie; dále se budeme držet novějšího značení a terminologie podle [16, 18], kde budou k dispozici, a podle [15] budeme postupovat při formálním budování teorie. Tento text je tak pokusem o aktualizovaný formální výklad ATM, kterému je v nových publikacích věnováno méně prostoru.

2.1 Fenomenologický přístup k matematice

Fenomenologický přístup profesora Vopěnky k matematice je inspirován dílem Edmunda Husserla (viz například [4]). Fenomenologie se snaží přivést k evidenci skutečnost, že vědecké teorie a vlastně jakékoliv naše poznání nezachycují podstatu věcí tak, jak jsou. Předmětem našeho myšlení jsou vždy pouze popisy věcí, jevů, které pozorujeme, nikdy přímo jevy samotné. Toto zjištění vystavuje na odiv otázku zmíněnou již v úvodu. Jak je možné vůbec nějaké poznání? Odpověď na ni dává následující Husserlův princip všech principů [16, s. 57].

Princip 1 (Princip všech principů) *Pramenem všeho poznání a vší pravdy je danost, a to taková, která jev podává v jeho původní podobě (v originále), to je zření jevu tak a jenom tak, jak je nám dán. Tento pramen poznání musí být vytěžen z toho, co zření jevu jako takového dává a co jenom dává.*

Následuje představení některých důležitých fenomenologických konceptů.

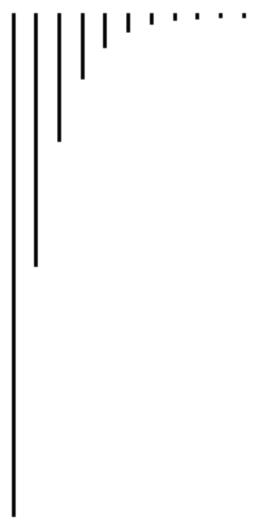
Jev je něco, co se nám jeví, „*co lze pohledem zachytit a odlišit od všeho ostatního*“ [16, s. 11]. Můžeme tedy říci, že to vidíme (v nejširším smyslu toho slova), a že víme, že to vidíme. Svět pak fenomenologie vykládá jako spleť jevů. Mezi jevy budeme rozlišovat dva důležité druhy. *Prvoevidovatelný jev* je takový jev, který jsme schopni evidovat, t.j. vidět ho a vědět, že ho vidíme, jakmile ho evidovat můžeme, to je, jakmile se nám poprvé ukáže [18, p. 43]. *Neprvoevidovatelný jev* je doplňkem jevu prvoevidovatelného, dokážeme jej evidovat až tehdy, když známe s ním spojený jev prvoevidovatelný. Příkladem prvoevidovatelného a neprvoevidovatelného jevu je vlastnost geometrických objektů „být kružnicí“; kružnici totiž rozpoznáme hned, jak ji uvidíme, i když ji tak třeba nebudeme nazývat, naopak o ostatních geometrických objektech neprohlásíme, že nejsou kružnice, dokud nebudeme kružnici znát.

Objekt je jev, který vykládáme jako samostatného jedince. Ostatní jevy pak vykládáme jako vlastnosti objektů (jednomístné jevy) nebo vztahy mezi nimi (vícemístné jevy).

Pro teorii množin je klíčový výklad nejrůznějších světů, ať už matematických nebo jiných, jako společenství objektů, přičemž velkou výhodu poskytuje výklad libovolných jevů jako objektů [16, s.23]. Tak jsme schopni vykládat nějakou vlastnost objektů jako objekt (množinu nebo třídu objektů majících tuto vlastnost) a stejně tak i vztah nějakých objektů můžeme vyložit jako objekt (relaci mezi třídami objektů do tohoto vztahu vstupujících).

Pozorujeme-li a zkoumáme nějaký předmět, ať už celý svět nebo i jediný objekt v něm, lhostejno jakými prostředky, je toto naše zkoumání omezeno, buď je ukončeno pevnou hranicí, která zkoumaný předmět ostře ukončuje, nebo v nějakém směru ztrácí na zřetelnosti a ostrosti, až už nedokážeme zřetelně poznat, jak zkoumaný předmět pokračuje. Jsme nuceni přiznat, že dále nevidíme. Takto jsme tento předmět rozdělili na dvě části – známou a neznámou. Pro to, co je odděluje se v češtině nabízí příhodný název **obzor**. Obzor poukazuje na nepřekročitelné hranice poznání a na záhady ležící za nimi. Za obzorem tedy pozorovaný předmět pokračuje plynule do části, kterou sice nevidíme, ze znalosti pozorované části o ní můžeme ale leccos usuzovat. Samotný obzor není nehybný, ale zostřením pozornosti jej lze posunovat a odhalovat tak dosud nepozorované oblasti.

Příkladem jevu ubíhajícího k obzoru a za něj je půlení úsečky, viz obrázek 1. Začneme s úsečkou uskutečněnou před obzorem, odejmeme její polovinu a druhou si ponecháme pro další půlení. Opakujeme-li tento proces dále, po čase se úsečka propadne pod obzor a na jejím místě zůstane bod. Bod ležící na obzoru rozlišitelnosti malého. Oddálíme-li tento obzor, odhalíme za bodem další úsečky, při jejich dalším půlení se nám ovšem na našem novém obzoru opět ukáže bod. Tento bod je stopou úseček propadlých za obzor, značkou označující místo na obzoru, jímž toto půlení úsečky prochází. V přirozeném geometrickém světě je bodem v Euklidovském smyslu, tedy objektem, jež nemá žádné další části. V části světa za obzorem je tento bod úsečkou. Ve světě, jehož vidění nepřiznáváme obzor, tento bod nenajdeme.



Obrázek 1: Půlení úsečky

Novověká evropská věda posouvá obzor až do absolutního nekonečna, jak ve směru množství nějakých objektů, tak i ve směru rozlišitelnosti malého, činí z něj tak pevnou mez. Celý svět je pro ni uzavřen do pevných mezí v nichž není pro neostrost místo. Přesto však není schopna se jej zcela zbavit, střetává se s ním v infinitesimálním počtu, topologii i jinde. S tímto jevem se nepřímo vyrovnává pomocí absolutního nekonečna.

2.2 Teorie množin a polomnožin

2.2.1 Základní pojmy

Následující pojmy tvoří základ formalizace výše popsaného fenomenologického přístupu. Vzhledem k jejich jednoznačnosti a významnému postavení v celém pojetí je uvádíme v přesném znění převzatém z [18, s. 15] a doplněném o některé jejich upřesňující vlastnosti podle [15].

Jestliže z některých dříve již vytvořených objektů nějaké vydělíme, vznikne **seskupení** těchto vydělených objektů.

Obor není souhrn nějakých již existujících objektů; je to zdroj či jímka, do níž padají vhodné objekty z těch, které se objevují nebo vznikají. Každé seskupení nějakých objektů lze vykládat i jako obor, byť již vyčerpaný.

Aktualizací nějakého oboru myslíme jeho vyčerpání, to je nahrazení tohoto oboru seskupením všech objektů, které do něj padají či mohou padnout.

Třídou rozumíme kterékoliv již uskutečněné seskupení nějakých daných objektů (jejích prvků), které vykládáme jako samostatného jedince neboli jako objekt jediný. Skutečnost, že objekt X je třídou, zapíšeme $\mathrm{Cls}(X)$.

Množinou rozumíme takovou třídu, která je ostře vymezená. Navíc je každá množina v ATM z klasického hlediska konečná. Skutečnost, že objekt X je množinou, budeme zapisovat $\mathrm{Set}(X)$.

Třídu, která není množinou, nazveme *vlastní třída*. Vlastní třídou rozumíme seskupení, které je vyděleno neostře. Vlastní třídy existují a jsou mnohdy vhodným nástrojem pro popis některých jevů. Například seskupení všech malých přirozených čísel je vlastní třídou. Kdybychom je chtěli nahradit množinou, existuje mnoho způsobů jak to učinit, které je všechny možné považovat za správné. To, co tyto způsoby spojuje, je právě neostře vymezená třída všech malých přirozených čísel (volně podle [15, s. 39]). Na tomto místě je třeba zdůraznit, že takto zavedené vlastní třídy nejsou třídami v Bernays-Gödelově teorii.

Polomnožinou rozumíme neostře vymezenou třídu (tedy vlastní třídu), která je podtřídou nějaké množiny. V [15, s. 40] je tento pojem širší a označuje *libovolnou* třídu, která je podtřídou nějaké množiny, v tomto textu se budeme držet novějšího, užšího významu.

Polomnožiny taktéž existují, střetáváme se s nimi dokonce téměř na každém kroku: třída všech zajímavých knih v nějaké dostatečně obsáhlé knihovně, třída všech planěk plotu, které od sebe ještě dokážeme rozlišit, nebo právě třída všech malých přirozených čísel jsou polomnožiny.

Obory budeme označovat velkými gotickými písmeny (jako $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{J}$), pro třídy vyhradíme velká písmena latinské abecedy (A, ..., X, Y ...) a pro množiny malá písmena latinské abecedy (a, ..., x, y ...). Relaci náležení označíme „$\in$“, jak je obvyklé, a pro třídy bude mít obvyklý význam náležení objektu do objektu.

Každou třídu (a tedy i množinu) si můžeme vykládat jako obor. Existují ovšem obory, které si již jako třídy nevykládáme, tedy nepřistupujeme k nim jako ke společenstvím již vytvořených objektů. Vztah náležení objektu do oboru budeme opět značit „$\in$“, je však třeba si uvědomit, že jde o jiný druh náležení, protože obory si nevykládáme jako objekty. To mimo jiné znamená, že nedovolujeme oboru být prvkem nějakého jiného oboru. Tímto se vyhýbáme Russelovu paradoxu [15, s. 43].

Kromě proměnných a konstant pro označování oborů a znaku „$\in$“ pro označení operace náležení budeme užívat běžné matematické značení. Pomocí něj budeme sestavovat *množinové formule* následovně:

1. $x_i \in x_j$ a $x_i = x_j$ jsou množinové formule.
2. pokud jsou $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ a $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ množinové formule, potom i
   - $\neg\varphi(x_0, \ldots, x_n)$,
   - $\varphi(x_0, \ldots, x_n) \wedge \psi(x_0, \ldots, x_n)$,
   - $\varphi(x_0, \ldots, x_n) \vee \psi(x_0, \ldots, x_n)$,
   - $\varphi(x_0, \ldots, x_n) \Rightarrow \psi(x_0, \ldots, x_n)$,
   - $\varphi(x_0, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \psi(x_0, \ldots, x_n)$,
   - $(\exists x_i)\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ a
   - $(\forall x_i)\varphi(x_0, \ldots, x_n)$

   jsou množinové formule.

Množinovou vlastností, popřípadě vztahem, budeme rozumět takovou vlastnost, popřípadě vztah, který lze zapsat množinovou formulí [15, s. 49]. Navíc *třídovou* formulí budeme rozumět takovou formuli, kterou lze sestavit podle stejných pravidel, kromě proměnných a konstant pro množiny v ní však mohou vystupovat i proměnné a konstanty pro třídy, obdobně pak zavedeme třídovou vlastnost a třídový vztah [15, s. 71–72].

2.2.2 Obor dědičně konečných množin

Následujících šest axiomů zavádí obor dědičně konečných množin, Hereditary Finite Sets (HFS), který se i přes rozdílné axiomy formálně shoduje s oborem konečných množin Zermelo-Fraenkel-Choice (ZFC) [3].

Axiom 2.1 (Extenzionality pro množiny)

$$(\forall x, y)(x = y \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y))$$

Axiom 2.2 (Prázdné množiny) *Existuje jedna prázdná třída, která je zároveň množinou, tedy*

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x),$$

toto x trvale označíme $\emptyset$ [16, s. 80].

Axiom prázdné množiny zaručuje existenci alespoň jedné množiny, která se posléze stane stavebním prvkem všech ostatních množin. V ZFC je existence této množiny zaručena axiomem nekonečné množiny (viz axiom 3.1).

Axiom 2.3 (Množinového následníka)

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(z = \{u; u \in x \vee u = y\})$$

Na základě tohoto axiomu můžeme zavést operaci množinového následníka $x \cup \{y\}$. Předešlé tři axiomy a základní množinové operace nám stačí k zavedení modelu přirozených čísel i s operací následníka $n + 1$. Abychom totiž mohli v libovolné teorii množin pracovat s přirozenými a vůbec všemi čísly, musíme vytvořit jejich množinový model. Zvolíme, jak je zvykem, von Neumanův model přirozených čísel. Modelem čísla 0 bude prázdná množina, modelem každého následujícího čísla pak bude množina všech čísel menších. Máme tedy:

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{\emptyset\}$$

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

atd.

Formálně definujeme modely přirozených čísel následovně.

Definice 1 (von Neumanovy modely přirozených čísel) *Řekneme, že množina x je von Neumanovým modelem přirozeného čísla, označení* $\mathrm{Nat}(x)$*, právě tehdy když platí:*

1. $(\forall y \in x)(y \subseteq x)$,
2. $(\forall y, z \in x)(y \in z \vee z \in y \vee y = z)$.

Operaci následníka $n + 1$ definujeme pro von Neumanovy modely jako

$$n + 1 = n \cup \{n\}.$$

Mezi číslem a jeho von Neumanovým modelem budeme rozlišovat jen tam, kde to bude nezbytné.

Axiom 2.4 (Indukce) *Nechť φ je množinová vlastnost. Potom platí*

$$\big(\varphi(\emptyset) \wedge (\forall x)(\forall y)(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x \cup \{y\}))\big) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x).$$

Tento axiom není axiomem v pravém slova smyslu, jde o schéma axiomů. Jednotlivé axiomy z něj dostaneme tak, že budeme za $\varphi(x)$ dosazovat různé množinové vlastnosti. Zde uvedená axiomatizace ATM tedy není konečná. Klasická teorie množin axiom indukce nepřijímá, samotný princip je v ní však odvoditelný z ostatních axiomů, viz sekce 3.1. V ATM hovoříme s přihlédnutím k vytrácející se ostrosti směrem k obzoru o slábnoucí indukci.

Pomocí axiomu indukce lze dokázat řadu důležitých tvrzení pro obor všech dědičně konečných množin. Uvádíme některá z nich i s jejich důkazy, především pro porovnání s některými axiomy ZFC.

Tvrzení 1 (O potenční množině)

$$(\forall x)(\exists z)(z = \{u; u \subseteq x\})$$

Důkaz Množinovou vlastnost $(\exists z)(z = \{u; u \subseteq x\})$ označíme $\varphi(x)$. Zřejmě platí $\varphi(\emptyset)$. Nechť je x takové, že platí $\varphi(x)$, $z = \{u; u \subseteq x\}$ a y je libovolné. Položme $w = \{u \cup \{y\}; u \in z\}$. Jak je okamžitě zřejmé, je $z \cup w = \{u; u \subset x \cup \{y\}\}$ a tedy platí $\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x \cup \{y\})$, podle axiomu indukce máme $(\forall x)\varphi(x)$.

Potenční množinu množiny x označíme $\mathcal{P}(x)$. Z axiomu indukce přímo plyne i úplná indukce podle přirozených čísel, respektive jejich modelů v HFS. Takto definované modely přirozených čísel tedy zachycují všechny ordinální, kardinální i aritmetické vlastnosti přirozených čísel, a tvoří model Peanovy aritmetiky uvnitř HFS [15, s. 69 a 70].

Axiom 2.5 (Regularity) *Nechť $\varphi(x)$ je množinová vlastnost taková, že $(\exists z)\varphi(z)$. Potom platí*

$$(\exists y)(\varphi(y) \wedge (\forall u \in y)\neg\varphi(u))$$

Axiom 2.6 (ε-indukce) *Nechť $\varphi(x)$ je množinová vlastnost taková, že*

$$(\forall y)\big((\forall x \in y)\varphi(x)\big) \Rightarrow \varphi(y).$$

Potom platí $(\forall z)\varphi(z)$.

Axiom ε-indukce a axiom regularity jsou ekvivalentní [15, s. 62]. Jejich přijetím zajišťujeme, že všechny množiny z oboru dědičně konečných množin jsou vytvořeny jen z prázdné množiny.

Struktura, která splňuje těchto šest axiomů je univerzum dědičně konečných množin, které si prozatím budeme vykládat jen jako obor, označíme jej $\mathfrak{M}$. Obor $\{x;\ \mathrm{Nat}(x)\}$ je podoborem oboru $\mathfrak{M}$, jde tedy o obor všech konečných přirozených čísel, označíme jej $\mathbb{FN}$.

2.2.3 Axiomatizace neostrosti a přirozeného nekonečna

Kromě množin vystupují v ATM i třídy, axiom extenzionality platí i pro ně.

Axiom 2.7 (Extenzionality pro třídy)

$$(\forall X, Y)(X = Y \Leftrightarrow (\forall z)(z \in X \Leftrightarrow z \in Y))$$

Axiom 2.8 (Cesty k obzoru) *Nechť $\varphi(X,Y)$ je takový vztah, že platí $(\forall n)(\exists X)\varphi(X,n)$. Potom existuje funkce G taková, že $\mathrm{dom}(G) = \mathbb{FN}$ a platí $(\forall n)\varphi(G(n),n)$. [15, s. 145]*

Stejně jako v případě axiomu indukce 2.4 jde o schéma axiomů, jednotlivé axiomy z něj dostaneme dosazením vztahu φ, který splní podmínku $(\forall n)(\exists X)\varphi(X,n)$. Toto φ není přítomno v $\mathfrak{M}$, ostatně ani nemůže, protože jde o vlastnost, kterou nevykládáme jako třídu. Funkci G lze považovat za jeho reprezentaci uvnitř $\mathfrak{M}$, přesněji G je jev vzniklý vyprázdněním náplně vztahu φ a jeho redukcí na společenství (třídu) objektů. Axiomem cesty k obzoru jsme zaručili její existenci. Podstatou axiomu cesty k obzoru je představa, že při zkoumání světa jako souboru objektů se lze vydat v uskutečnění směrem k obzoru a struktura této cesty je zachycena na struktuře přirozených čísel. Cesty k obzoru mohou mít ovšem i jinou strukturu než jakou mají přirozená čísla. Bezprostředními důsledky axiomu cesty k obzoru jsou:

Tvrzení 2 *Obor $\mathbb{FN}$ všech konečných přirozených čísel je třída.*

Důkaz Za $\varphi(X,Y)$ zvolíme vztah $X = Y$. Pak podle právě přijatého axiomu existuje funkce, t.j. třída, G taková, že $\mathrm{dom}(G)$ je obor všech konečných přirozených čísel. Jelikož jsou ale všechny prvky třídy G již uskutečněny, jsou uskutečněny i všechny prvky třídy $\mathrm{dom}(G)$ a tedy $\mathrm{dom}(G) = \mathbb{FN}$ je třída. [16, s. 145]

Tvrzení 3 *Obor $\mathfrak{M}$ všech dědičně konečných množin je třída (označíme* **FV***).*

Třídy $\mathbb{FN}$ a **FV** zachycují stavbu konečných přirozených čísel a množin, které leží před obzorem. Jak jsme však popsali v sekci 2.1, není studovaný předmět obzorem ostře ukončen, pokračuje za ním do krajiny známosti a obzor lze zostřením pozornosti oddálit. I obzor ohraničující náš pohled do univerza dědičně konečných množin lze oddalovat a třídy $\mathbb{FN}$ a **FV** rozšiřovat na třídy $\mathbb{F}^*\mathbb{N}$ a $\mathbf{F}^*\mathbf{V}$, ty lze opět rozšířit a tak dále. Jedno takové hodně velké rozšíření označíme $\mathbb{N}$ a **V** [15, s. 162]. Třídu **V** pak budeme považovat za třídu vůbec všech množin, viz následující axiom.

Axiom 2.9 (Prvků a podmnožin) *Pro libovolný objekt X platí $X \in \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathrm{Set}(X) \wedge X \subseteq \mathbf{V}$. [15, s. 164]*

Definice 2 (Řez) *Řekneme, že třída X je řezem na von Neumannových modelech přirozených čísel, dále jen řezem, jestliže platí, $X \subset \mathbb{N}$ a pro každé $x \in X$ je i $x \subset X$. Tedy pro každé $y < x$ je $y \in X$. [16, s. 141]*

Pro řez, jehož největším prvkem je číslo α, budeme používat značení $[\alpha]$.

Axiom 2.10 (Prodloužení) *Nechť $G : \mathbb{FN} \to \mathbf{V}$ je funkce. Potom existuje funkce g taková, že $G \subseteq g$ [15, s. 175].*

Axiom prodloužení odpovídá Robinsonově lemmatu o přetečení (více v sekci 3.2), třídu $\mathbb{FN}$ můžeme vykládat jako počáteční úsek třídy přirozených čísel $\mathbb{N}$, třídu $\mathbb{N} - \mathbb{FN}$ pak tvoří nekonečně velká přirozená čísla. Funkce g, jejíž existenci axiom 2.10 zaručuje, má explicitní tvar $g : [\gamma] \to \mathbf{V}$, kde je $\gamma \in \mathbb{N} - \mathbb{FN}$. V matematice založené na alternativní teorii množin a polomnožin nahrazuje tento axiom všechny nejrůznější podoby pojmu limity [18, s. 32]. Axiomy 2.8 a 2.10 jsme položili základ matematizaci neostrosti a zavedení σ a π-tříd. Pro srovnání následuje novější formulace stejných principů.

Definice 3 (Stabilní funkce) *Řekneme, že funkce F je stabilní na řezu $X \subset \mathbb{N}$, je-li na něm definována (tedy $\mathrm{dom}(F) = X$) a pro každé x z X je $F|_{(x+1)}$ množina náležející do třídy $\mathbf{V}$ [16, s. 142].*

Stabilní funkce je tedy taková funkce, jejíž obrazy jsou všechny množiny z univerza množin $\mathbf{V}$.

Definice 4 (Prodloužení) *Řekneme, že f je tvrdým prodloužením funkce F definované na řezu X, jestliže f je funkce, $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{N}$ a $F = f|_X$.*

Definice 5 (Obzorný řez) *Řekneme, že neprázdná množina $H \subset \mathbb{N}$ je obzorným řezem, jestliže platí:*

- *H je řez, který v uspořádání přirozených čísel nemá největší prvek.*
- *Je-li F stabilní funkce na řezu H, pak existuje její tvrdé prodloužení f [16, s. 143].*

Axiom 2.11 (Existence polomnožin, obzorného řezu) *Existuje obzorný řez, rozumí se na množině $\mathbb{N}$, označíme jej $\mathbb{FN}$. [16, s. 143]*

Axiom existence polomnožin je sjednocenou formulací axiomu cesty k obzoru 2.8 a axiomu prodloužení 2.10, tím je v novější formulaci ATM ([16] a [18]) kladen větší důraz na pokračování světa za obzorem.

Axiom 2.12 (Výběru) *Nechť $\varphi(X, x)$ je vztah takový, že platí $(\forall x)(\exists X)\varphi(X, x)$. Potom existuje relace S taková, že platí $(\forall x)\,\varphi(S\text{"}\{x\} = \mathrm{rng}(S|_{\{x\}}), x)$.*

Axiom výběru „překrývá“ axiom cesty k obzoru, je jeho silnější verzí [15, s. 401].

2.2.4 Různé druhy kardinality

Definice 6 (Konečná třída) *Řekneme, že třída X je konečná, označíme $\mathrm{Fin}(X)$, pokud je každá její podtřída, tedy i ona sama množinou. Tuto definici můžeme zapsat ve tvaru*

$$\mathrm{Fin}(X) \Leftrightarrow \mathrm{Cls}(X) \wedge (\forall Y)(Y \subset X \Rightarrow \mathrm{Set}(Y))$$

Třída X, která není konečná, platí tedy $\neg\mathrm{Fin}(X)$, se nazývá nekonečná.

Definice 7 (Spočitatelná třída) *Řekneme, že třída X je* konečně spočitatelná *právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{FN}$ takové, že existuje vzájemně jednoznačná funkce $f : n \to X$. Řekneme, že třída X je* nekonečně spočitatelná*, právě tehdy, když existuje vzájemně jednoznačná funkce $f : n \to \mathbb{FN}$. Třída X je* spočitatelná *právě tehdy, když je konečně spočitatelná nebo nekonečně spočitatelná.*

Nespočitatelná třída je pak taková třída, která není spočitatelná.

Axiom 2.13 (Kardinality (slabý)) *Každá nekonečná třída je ekvivalentní* $\mathbf{V}$*. [15, s. 188]*

Axiom 2.14 (Kardinality) *Každé dvě nespočitatelné třídy jsou ekvivalentní. [15, s. 187]*

ATM přistupuje k problému kardinality jinak než klasická teorie množin, v jejím pojetí, podobně jako v Bolzanově, není nekonečné množství různých kardinalit, ale v závislosti na přijaté verzi axiomu kardinality pouze dvě.

2.2.5 Ostatní

Následující axiomy uvádíme jen pro úplnost, v našich úvahách se neobjeví, svoje využití nalézají při metamatematických úvahách o ATM a modelování některých složitých struktur.

Definice 8 (Kódovací dvojice) *Řekneme, že $\langle K, S\rangle$ je kódovací dvojice, pokud K a S jsou třídy z rozšířeného univerza a S je relace.*

Axiom 2.15 (Třídy tříd) *Nechť $\langle K, S\rangle$ je kódovací dvojice. Potom obor*

$$\{S\text{''}\{x\} = \operatorname{rng}(S|_{\{x\}}); x \in K\}$$

je třída tříd. [15, s. 180]

Axiom 2.16 (Extenzionální kódování) *Nechť $\mathfrak{M}$ je třída tříd. Potom existuje extenzionální kódovací dvojice $\langle K, S\rangle$ taková, že $\mathfrak{M} = \{S\text{''}\{x\} = \operatorname{rng}(S|_{\{x\}}); x \in K\}$ [15, s. 181]*

2.3 Některé důležité druhy tříd a modely jevů v ATM

2.3.1 σ a π třídy

Cílem ATM je formalizace a modelování jevu neostrosti, přijetí axiomu cesty k obzoru a axiomu prodloužení je pouze prvním krokem. Samotnými modely neostrých jevů jsou σ a π-třídy.

Definice 9 (Přehledná třída) *Řekneme, že třída A je* přehledná *na obzorném řezu H (dále jen přehledná), jestliže existuje stabilní funkce F na řezu H, taková, že $A = \operatorname{rng}(F)$.*

Definice 10 (σ-třída) *Řekneme, že X je σ-třída (vzhledem k řezu H), jestliže existuje přehledná třída množin A taková, že $X = \bigcup A$. Tedy existuje stabilní funkce $F : \mathbb{FN} \to \mathbf{V}$ t.ž. $X = \bigcup \mathrm{rng}(F)$*

Tvrzení 4 (O vytvářející posloupnosti σ-třídy) *[15, s. 196] Necht' X je σ-třída. Potom existuje posloupnost $\{X_n; n \in \mathbb{FN}\}$ tříd taková, že pro každé n platí*

$$X_n \subseteq X_{n+1} \text{ a } X = \bigcup \{X_n; n \in \mathbb{FN}\}.$$

Tedy σ-třídu X lze zkonstruovat inkrementálně přidáváním dalších prvků, klidně i po skupinách. Jelikož toto přidávání sleduje cestu přirozených čísel směrem k obzoru, i na třídu X se můžeme dívat tak, že k němu ubíhá a ztrácí na ostrosti. Rozdíl oproti fuzzy množinám je tak jasně patrný: prvky, které do X již spadly, do ní prostě náležejí, bez přívlastku, přidávání dalších je však směrem k obzoru stále náročnější a neostřejší. Takto lze modelovat mnoho jevů přirozeného světa i nejrůznějších světů matematických a jiných. Například třídu všech soustav lineárních rovnic, které dokážeme vyřešit (rozumí se odpovědět na otázku, jestli má řešení, případně toto řešení nalézt) i s pomocí počítače lze považovat za σ-třídu. Dokážeme-li totiž vyřešit soustavu n rovnic jsme schopni nalézt řešení i soustavy $n + 1$ rovnic. S rostoucím počtem rovnic je však nalezení řešení stále těžší a časově náročnější až jsme nuceni připustit, že existují i tak velké soustavy, jejichž řešení již nalézt nedovedeme, bud' by na ně nestačilo ani několik lidských životů nebo pamět' počítače. Pomocí σ-tříd modelujeme prvoevidovatelné jevy. Vlastnost soustavy „být vyřešitelná“ je jev prvoevidovatelný, protože, jakmile jsme schopni jej nahlédnout, nepotřebujeme k tomu již znalost jiného jevu. Neprvoevidovatelné jevy modelujeme pomocí π-tříd.

Definice 11 (π-třída) *Řekneme, že X je π-třída (vzhledem k řezu H), jestliže existuje přehledná třída množin A taková, že $X = \bigcap A$. Tedy existuje stabilní funkce $F : \mathbb{FN} \to \mathbf{V}$ t.ž. $X = \bigcap \mathrm{rng}(F)$*

Tvrzení 5 (O vytvářející posloupnosti π-třídy) *[15, s. 196] Necht' X je π-třída. Potom existuje posloupnost $\{X_n; n \in \mathbb{FN}\}$ tříd taková, že pro každé n platí*

$$X_{n+1} \subseteq X_n \text{ a } X = \bigcap \{X_n; , n \in \mathbb{FN}\}.$$

Tedy π-třídu X lze vytvořit tak, že z nějaké obsáhlé třídy $V, A \subset V$ „ukrajujeme“ prvky, které nemají danou vlastnost. Jejich postupné odebírání, stejně jako přidávání v případě σ-tříd, ubíhá k obzoru vedeno posloupností přirozených čísel, postupně ztrácí na ostrosti, až je odebrání dalších prvků náročnější a neostřejší. Příkladem negace prvoevidovatelného jevu a π-třídy, kterou ji modelujeme je třída všech soustav lineárních rovnic jejichž řešení nalézt nedokážeme. Každou soustavu, jejíž řešení dokážeme nalézt odebereme z třídy všech soustav, tak postupně odkrýváme π-třídu neřešitelných soustav, postupně, jak se výpočet prodlužuje začne být rozhodování těžší a těžší. Vlastnost „být nevyřešitelná“ není prvoevidovatelná, k tomu abychom ji evidovali musíme nejprve znát nějaké vyřešitelné soustavy. Klasická teorie množin a nakonec i logika rozlišení prvoevidovatelných a neprvoevidovatelných jevů zakryla, když se rozhodla považovat i negace prvoevidovatelných vlastností, potažmo jevů, za plnohodnotné vlastnosti, potažmo jevy [15, s. 197]. ATM se tomuto přístupu nebrání, vynáší ovšem na světlo fundamentální odlišnost těchto druhů jevů a obohacuje tím naše vidění světa i nástroje, s nimiž jej můžeme modelovat.

Pro lepší vhled do vztahu σ a π tříd uveďme alespoň jedno tvrzení.

Tvrzení 6 *Třída X je σ-třída právě tehdy, když $\mathbf{V} - X$ je π-třída.*

Důkaz Označíme $Y = \mathbf{V} - X$, podle věty o vytvářející posloupnosti σ-třídy existuje posloupnost $\{X_n; n \in \mathbb{FN}\}$ t.ž. $X = \bigcup\{X_n; n \in \mathbb{FN}\}$. Dostáváme $Y = \mathbf{V} - \bigcup_n X_n$ a podle de'Morganových pravidel je $Y = \bigcap_n(\mathbf{V} - X_n)$.

2.3.2 Figury a monády

σ a π třídy lze mimo jiné využít k modelování nerozlišitelnosti a následně topologické spojitosti pomocí neostrosti, kterou zachycují. Spojité tvary povstávají na obzoru rozlišitelnosti malého, umístění tohoto obzoru zachytíme relací nerozlišitelnosti.

Definice 12 (Kompaktní relace) *Řekneme, že relace R je na třídě* dom(R) *kompaktní právě tehdy, když platí*

$$(\forall u \subseteq \mathrm{dom}(R))(\neg \mathrm{Fin}(u) \wedge (\exists x, y \in u)(x \neq y \wedge xRy))$$

Definice 13 (π-ekvivalence) *Řekneme, že R je π-ekvivalence, pokud R je ekvivalence a π-třída.*

Definice 14 (Ekvivalence nerozlišitelnosti) *Řekneme, že R je ekvivalence nerozlišitelnosti, pokud R je kompaktní π-ekvivalence.*

Definice 15 (Monáda) *Monádu bodu x v relaci nerozlišitelnosti R definujeme takto:*

$$Mon(x) := \{y; yRx\}$$

Monáda bodu je třída všech bodů od něj nerozlišitelných, jakási nejmenší část, kterou dokážeme z dané množiny, například roviny vydělit, tedy vlastně bod. Jelikož ale jako bod již označujeme něco jiného, budeme monádám v případě, že budeme chtít zdůraznit jejich geometrický význam, říkat *geometrické body.*

Definice 16 (Figura) *Řekneme, že X je figura, pokud platí*

$$(\forall x, y)(x \in X \wedge yRx \Rightarrow y \in X)$$

Definice 17 (Figura třídy) *Figuru třídy X definujeme takto:*

$$Fig(X) := \{y; (\exists x \in X)(yRx)\}$$

Tvrzení 7 (Vztah figur a monád) *Pro každou třídu X platí*

$$Fig(x) = \bigcup\{Mon(x); x \in X\}$$

a pro každý bod x platí

$$Mon(x) = Fig(\{x\}).$$

Tvrzení 8 $Fig(X)$ *je figura.*

Figura je stopa množiny na obzoru „poslepovaná“ ze stop jednotlivých bodů. Z hlediska topologie můžeme na monády nahlížet jako na nejmenší otevřené množiny, které ještě dokážeme rozlišit, figury z nich pak skládáme podobně jako otevřené množiny v klasické teorii z geometrických bodů.

3 ATM v kontextu klasické matematiky

Alternativní teorie množin se již svým názvem vymezuje proti klasické cantorovské teorii. Není však jedinou alternativou ke klasické teorii množin, Stanfordská encyklopedie filosofie [3] ji řadí mezi tzv. malé teorie množin („small set theories“), které obsahují méně struktur než klasická teorie množin, a přesto poskytují dostatek nástrojů pro budování matematiky.

V této kapitole popíšeme, v čem spočívají zásadní rozdíly mezi ATM a cantorovskou teorií, z čeho vyplývají a jaké mají pro obě teorie důsledky. Ze dvou nejdůležitějších axiomatizací klasické teorie množin – Bernays-Gödel (BG) a Zermelo-Fraenkel (ZF) – se budeme zabývat tou Zermelo-Fraenkelovou s axiomem výběru (Zermelo-Fraenkel-Choice (ZFC)). Axiomatizace BG se od ní odlišuje především tím, že kromě klasických množin zavádí i existenci tříd,a ač je v jejích axiomech často uváděno jedno schéma axiomů, je již od svého vytvoření Benraysem a Gödelem axiomatizovatelná konečně [12]. Mimo to se pokusíme zasadit ATM do kontextu ostatních směrů vývoje matematiky 20. století.

3.1 ATM a klasická teorie množin ZFC

Abychom pochopili vztah alternativní teorie množin s klasickou, bude nejjednodušší popsat, co vedlo k jejímu vytvoření. Nejprve připomeneme klasickou teorii množin. Nahradíme-li v axiomech ZFC axiom nekonečné množiny 3.1 jeho negací, dostáváme stejnou teorii dědičně konečných množin jako výše [3]. Jednotlivé axiomy lze na sebe převést následovně (všechny axiomy ZFC i s negací axiomu nekonečna nalezne čtenář v příloze A). Axiom extenzionality pro množiny 2.1 a A.1 je v obou teoriích ekvivalentní. Z axiomu množinového následníka 2.3 a axiomu extenzionality množin 2.1 přímo plynou axiomy dvojice A.2 i sjednocení A.4. Axiom regularity 2.5 je přímo převoditelný na axiom fundovanosti A.6. Existenci prázdné množiny zaručuje vhodná volba v negaci axiomu nekonečna A.10. Axiomy vydělení A.3 a nahrazení A.5 lze v ATM odvodit díky axiomu indukce.

Naopak indukci lze v teorii ZFC odvodit z axiomu fundovanosti, axiomu dvojice, negace axiomu nekonečna a axiomu výběru. ZFC se tak od ATM liší především přijetím následujících dvou axiomů 3.1 a 3.2.

Axiom 3.1 (Existence nekonečné množiny)

$$(\exists a)(\mathrm{Set}(a) \land \emptyset \in a \land (x \in a \Rightarrow (x \cup \{x\}) \in a))$$

Jde o jednu z mnoha verzí axiomu nekonečné množiny, v tomto případě dostáváme nekonečnou množinu von Neumanových modelů přirozených čísel, označíme ji ω_0. Existují i jiné způsoby, jak nekonečnou množinu konstruovat, které na sebe sice nejsou v přítomnosti ostatních axiomů převoditelné, nicméně lze ukázat, že vytvářejí teorie o stejné síle [3]. V terminologii zavedené výše můžeme prohlásit, že přijetím axiomu nekonečné množiny aktualizujeme obor všech přirozených čísel a rovnou z něj vytváříme množinu. Obdobně jako výše tvoří von Neumanovy modely přirozených čísel model Peanovy aritmetiky uvnitř ZFC.

Axiom 3.2 (Potenční množiny)

$$(\forall x)(\exists y)(\mathrm{Set}(y) \wedge (\forall z)(z \in y) \Leftrightarrow (\forall w)(w \in z \Rightarrow w \in x))$$

Jak jsme ukázali výše, je existence potenční množiny dokazatelná pro všechny dědičně konečné množiny pomocí indukce (viz věta 1). Toto tvrzení však nedosahuje až na nekonečnou množinu, jejíž existence je zaručena axiomem nekonečna 3.1, axiom 3.2 tedy zaručuje především existenci množiny $\mathcal{P}(\omega_0)$. K výkladu oboru všech podmnožin množiny přirozených čísel jako množiny vedl především výklad kontinua jako množiny bodů. Obor všech množin ZFC budeme označovat $\mathcal{V}$.

Ovšem jak poprvé ukázal T. Skolem [6], existují nestandardní modely Peanovy aritmetiky, jejich konstrukci uvnitř ZFC pomocí ultraproduktu a ultrafiltru ukazuje i prof. Vopěnka v [17, s. 103–116]. Pomocí ultraproduktu lze obor $\mathcal{V}$ všech množin rozšířit operátorem ultraextenze na obor $\mathcal{W}$, do kterého spadnou všechny konečné množiny z $\mathcal{V}$ a navíc v něm budou všechny nekonečné množiny rozšířeny o nové prvky. Množinou všech přirozených čísel ve $\mathcal{W}$ tedy bude množina $\bar{\omega}_0$, původní množina ω_0 bude její podmnožinou, kterou již ale nebudeme schopni z $\bar{\omega}_0$ vydělit. Jinými slovy vytvoříme-li v Peanově aritmetice pomocí operace následníka množinu všech přirozených čísel, bude tato množina vždy rozšiřitelná o další nestandardní čísla. A to tak, že tato nová nestandardní čísla budou všechna větší než původní přirozená čísla, bude tedy platit $(a \in \bar{\omega}_0, n \in \omega_0)(a < n \Rightarrow a \in \omega_0)$[6, s. 12]. Tak dostáváme „zvláštní“ strukturu, pro kterou platí $(\omega_0 \subset \bar{\omega}_0) \wedge (\omega_0 \neq \bar{\omega}_0)$, která je uspořádána standardní relací „<“ na přirozených číslech, množina ω_0 ale nemá největší prvek, standardní a nestandardní přirozená čísla od sebe nejde ostře oddělit.

Vztahem mezi třídami $\mathbb{FN}$ a $\mathbb{N}$, respektive **FV** a **V**, se ATM snaží zachytit vztah mezi ω_0 a $\bar{\omega}_0$, respektive $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$, avšak již od začátku nevykládá $\mathbb{FN}$ jako množinu. Podstatný rozdíl oproti nestandardním modelům přirozených čísel je, že $\mathbb{FN}$ najdeme již uvnitř třídy $\mathbb{N}$. To znamená, že si jako extenzi nějakého menšího oboru vykládáme již třídy **V** a $\mathbb{N}$.

Cantorova teorie množin reprezentuje v matematice převažující Platonismus, tedy názor, že matematické jevy existují nezávisle na nás, mimo nás. V Platonismu jsou matematické výroky nezávislé na čase. Jak jsme viděli na příkladech v sekci 2.3.1, ATM se snaží temporalitu společně s neostrostí do matematiky vnést a tím ji obohatit.

3.2 ATM a Robinsonova nestandardní analýza

Výše popsaný princip je známý také jako Robinsonovo lemma o přetečení (overspill), A. Robinson jej využil při konstrukci modelů infinitesimálních veličin uvnitř ZFC, které využil v budování své nestandardní analýzy [9]. Ačkoliv jsou Robinsonovy infinitesimální veličiny rehabilitací původního Newtonova a Leibnizova pojetí infinitesimálního počtu, je k jejich konstrukci a pochopení jejich vlastností třeba znalostí z pokročilé teorie modelů, jmenovitě konstrukce ultraproduktu. Postrádají tak intuitivní rovinu [13], jakou měli v počátcích rozvoje infinitesimálního počtu. V mnoha pokusech o jejich využití ve výuce je tento jejich nedostatek obcházen tak, že jsou nejprve představeny intuitivně a až posléze zavedeny formálně [13]. V ATM je x nekonečně malé reálné číslo právě tehdy, když platí $(\forall n \in \mathbb{FN})(n \neq 0 \wedge |x| < \frac{1}{n})$. Což je na základě axiomu prodloužení 2.10 ekvivalentní tomu, že existuje $\alpha \in \mathbb{N} - \mathbb{FN}$, α je tedy nekonečně velké, takové, že $|x| < \frac{1}{\alpha}$ [15, s. 278]. Nekonečně malá reálná čísla jsou reálná čísla, která se propadla pod obzor rozlišitelnosti malého. Zavedeme-li relaci nekonečné blízkosti $x \doteq y \Leftrightarrow |x - y| < \frac{1}{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N} - \mathbb{FN}$, která je ekvivalencí nerozlišitelnosti (viz definice 14)[15, s. 268], tvoří všechna nekonečně malá čísla monádu čísla 0. Takto modeluje ATM infinitensimální veličiny intuitivněji a přirozeněji než nestandardní analýza.

3.3 ATM a konstruktivní matematika

Zajímavý je i vztah ATM a konstruktivní matematiky a to ve dvou rovinách. V té první – čistě formální – je třeba odpovědět na otázku, jestli se ATM řadí do proudu konstruktivní matematiky a jaký vztah k jejím principům má. V té druhé je podnětné ptát se, v čem se liší vývoj a přijetí těchto dvou přístupů k matematice, oba totiž zkoumají filozofické základy matematiky a vyvozují z nich důsledky pro formální teorie. Konstruktivní matematika má dnes mnoho odvětví, která vznikala z různých pohnutek. Z hlediska srovnání systému a filozofie matematiky je asi nejzajímavější směr, kterým se konstruktivistický přístup poprvé představil – Brouwerův intuicionismus. V následujících odstavcích se tak budeme zabývat především jím.

3.3.1 Srovnání systému ATM a intuicionistické matematiky

Konstruktivní matematika se vyhýbá užití obecného principu vyloučeného třetího („tertium non datur“) tam, kde ho není možné dokázat. Nepřijímá jej tedy jako axiom, následkem čehož v ní není přístupný ani obecný axiom výběru [1]. Jelikož je každý konstruktivní důkaz (tedy důkaz bez použití principu vyloučeného třetího a axiomu výběru) důkazem i v klasické matematice, je konstruktivní matematika zobecněním té klasické [1, s. 6].

V ATM přijímáme jistou slabší verzi axiomu výběru již s axiomem cesty k obzoru (axiom 2.8) a hned vzápětí přijímáme i jeho plnohodnotnou verzi, axiom 2.12. Přijetí těchto axiomů je ekvivalentní přijetí axiomu vyloučeného třetího. ATM se tedy neřadí do proudu konstruktivní matematiky. Ostatně se o to ani nesnaží, již v [15, s. 39] se Vopěnka vymezuje proti Brouwerově intuicionistické logice.

Proč bychom tedy měli srovnávat matematiku založenou na ATM a konstruktivní matematiku? Právě pro jejich rozdílný přístup k nekonečnu a epistemologickým a ontologickým základům matematiky, který se liší od klasického pojetí. Vopěnka podobně jako Brouwer zastával názor, že matematické myšlení přesahuje každý pokus o formalizaci [13, s. 585]. Zatímco ATM přijímá nekonečno ve formě tříd, konstruktivní matematika se zříká aktualizace nekonečna a tak i neostrosti (v intuicionistickém pojetí je nekonečno vždy považováno za potenciální [5]). Utíná obor svého studia před obzorem a nedovoluje si k němu vůbec vykročit.

Takovýto přístup k nekonečnu můžeme v obou případech vykládat jako vstup temporality do matematiky. Zatímco v ATM se temporalita projevuje přirozeně nekonečnými polomnožinami, v konstruktivní matematice se projevuje nerozhodnutelnými tvrzeními. Zatímco konstruktivní matematika nepřipouští rozhodnout některá tvrzení kvůli obzoru, za který nedohlédne, a netroufá si ani hádat, ATM v tomto směru modeluje rostoucí neostrost. Opuštění nekonečna je výsledkem snahy intuicionistů vypořádat se s krizí naivní teorie množin [15, s. 103].

Konstruktivní matematika nepracuje například ani s klasickou spojitostí nebo větou o nabývání mezihodnot, k jejichž zavedení je právě princip vyloučeného třetího nezbytný. Dokáže je však nahradit. V případě spojitosti zavedl již Brouwer její konstruktivní pojetí. Věta o nabývání mezihodnot je pak nahrazena svou slabší verzí. Zajímavým příkladem, zvláště ve srovnání s Vopěnkovým pojetím figur a monád, je „bezbodová“ topologie („pointelss topology“), ve které nejsou topologické prostory tvořeny body, ale přímo otevřenými množinami („locales“) [1]. V tomto přístupu jsou si ATM a intuicionistická topologie blízké, monády a figury zavedené v 2.3.2 můžeme ztotožnit s otevřenými množinami a na podkladové body „zapomenout“. Tento přístup se snaží přirozeněji zachytit pojem intuitivně vnímaného spojitého prostoru a je v souladu s pojetím spojitosti a reálných čísel v konstruktivní matematice. Pro úplnost dodejme, že nejde o jediný přístup ke konstruktivní topologii [7].

3.3.2 Srovnání přijetí ATM a konstruktivní matematiky

Přestože byla konstruktivní matematika ve svých počátcích zatracována [1], podařilo se jí od poloviny 20. století prosadit a nyní se těší přízně v mnoha oborech a její techniky jsou považovány za obohacení matematiky.

Tak jako jsou pro studium neeukleidovských geometrií nedocenitelné jejich modely, využívají se i při studiu konstruktivní matematiky její nejrůznější modely v klasické matematice [1]. ATM zatím žádný model v klasické teorii množin vypracovaný nemá, což ji v očích mnohých matematiků snižuje.

Mimo existence modelů v klasické matematice přispěly k rozšířenému přijetí konstruktivní matematiky její větve zaměřující se na vyčíslitelnost („computability“), které našly mnoho uplatnění v informatice, numerice i topologii. Konstruktivní pojetí umožňuje převést problémy těchto oborů do logiky – numerická nestabilita, nespojitost v topologii, nevyčíslitelnost v informatice se v konstruktivní logice projevují jako spory [1, s. 14]. Mnoho matematiků i nematematiků tak vidí v konstruktivní matematice vhodný nástroj, který rozvíjejí.

Proč podobný rozvoj nezažívá i ATM? Která zprostředkovala, lidem, kteří ji pěstovali, hluboký vhled do mnohých problémů ať už teorie množin, alternativní analýzy nebo pojetí nekonečna [2, 10, 20]. Alespoň směry, které by mohly vést k odpovědi na tuto otázku naznačíme v následující kapitole.

4 Problémy aplikace ATM

Jak jsme viděli výše, snaží se ATM vyřešit spornou existenci množiny všech přirozených čísel v klasické teorii množin a zároveň s tím poskytnout vhodnou matematizaci neostrosti, čímž v mnohém obohacuje současnou matematiku. Proč se tedy nestala, jak ji prof. Vopěnka označoval, novou teorií množin, a nestála u zrodu obnoveného pojetí infinitesimálního počtu a matematiky vůbec? V následující kapitole se pokusím představit některé překážky, na které ATM narazila.

4.1 ATM se jeví sporná

Z klasického hlediska je přítomnost $\mathbb{FN}$, konečné množiny přirozených čísel, která ale nemá poslední prvek, *uvnitř* klasické množiny $\mathbb{N}$ přirozených čísel spor. Nahlížen klasickou teorií množin není tento spor zdánlivý, v klasickém pojetí nekonečna je skutečný a neřešitelný. Pročež je ATM často odmítnuta téměř bez zamyšlení se nad podstatou tohoto zdánlivého sporu. Ten však zachycuje lidskou zkušenost blíže než klasické absolutní nekonečno, je vlastní našemu vidění světa, matematika nad ním nemůže zavírat oči. To vyžaduje oproštění se od absolutního pohledu na svět, jak jej razí klasická matematika. Alternativní teorie množin se tento spor nesnaží odstranit přepracováním systému množin a přirozených čísel, ale jejich výkladu. Tak tento spor nemizí, ale stává se ústředním principem.

Překoná-li prvotní odpor, staví ATM před toho, kdo se ji jal studovat, mnohem větší výzvu než jiné převratné teorie.

4.2 Přiznání obzoru

Přiznání obzoru našemu vidění světa je upřímným až krutým přiznáním si vlastní nedokonalosti a omezenosti. Odhalením, že nevidíme a nikdy neuvidíme ani nepochopíme všechno, že ani v myšlení není člověk osvobozen od obzoru. Který činorodý středoevropan je ochoten po všech úžasných úspěších evropské vědy a potažmo evropského vidění světa na něco takového přistoupit? I bez těchto výzev vyžaduje změna samotných základů matematiky mnoho sebezpytování a odvahy [8]. ATM nezpochybňuje jen klasickou teorii množin.

Tento nový přístup se snaží Petr Vopěnka vyložit a ospravedlnit. Jak je popsáno v úvodu kapitoly 2, zaměřoval se v pozdějších publikacích především na filozofické a epistemologické základy ATM. Nově příchozí matematik tak naráží na filozofické úvahy, které se mu mohou zdát zbytečné a mnohdy jej vůbec nezajímají. Chybí snadno dostupné čistě matematické pojetí ATM aktualizované vzhledem k vývoji matematiky za posledních 20 let.

4.3 Neznámost v zahraniční

Téměř každá kontroverzní teorie, která později významně ovlivnila směřování evropské vědy, se ve svých počátcích potýkala s problémy, mnohé nemohly být ani publikovány. Proti námi zmiňované a kritizované Cantorově teorii množin se postavil Leopold Kronecker, který bránil svým vlivem jejímu autorovi v jejím publikování [17].

Profesoru Vopěnkovi a jeho alternativní teorii množin se v 70. a 80. minulého století postavil do cesty tehdejší komunistický režim. Po roce 1968 byly přerušeny jeho kontakty s polskými matematiky, mnoho jeho žáků a účastníků semináře emigrovalo do zahraničí, on sám nemohl od roku 1971 v Čechách přednášet ani publikovat, jeho seminář se až do roku 1989 pohyboval na hranici povoleného [11].

Není tedy divu, že nevyšlo mnoho textů, které by mohly s alternativní teorii množin seznámit čtenáře za hranicemi tehdejšího Československa. Jedinou knihou v angličtině zabývající se ATM stále je *Mathematics in Alternaive Set Theory* [14], tu v roce 1979 vydalo německé nakladatelství Teubner Texte. Přestože roku 1981 vyšla v Buletinu Londýnské matematické společnosti pozitivní recenze [8] zmiňující bezvýchodnou situaci, do které zabředla teorie množin, a eleganci, s níž ATM zapadá do běžně užívané matematiky, nedočkala se kniha většího ohlasu. Mimo jiné nejspíše i proto, že, jak recenze [8] zdůrazňuje, je kniha pouhým náčrtem teorie, ve které chybí i tak důležitá součást jako ε, δ-kalkul. Mimo tuto publikaci se v zahraničním odborném tisku objevilo již jen několik článků Antonína Sochora a další vývoj ATM, který probíhal v Praze, zůstal před světovou odbornou veřejností skryt. Těžko tak vinit světovou matematiku z nezájmu o Vopěnkovo dílo, vždyť jeho objevy před rokem 1968, nejznámější je asi Vopěnkův princip, se dočkaly v době své publikace značného ohlasu. Naději skýtá připravovaná kniha *New Infinitary Mathematics* [19].

4.4 Síla teorie

Dle P. Zlatoše [20] nenabízí ATM stejně silné a zároveň jednoduché nástroje jako klasická teorie množin, není proto (stejně) vhodná jako základ vyšší matematiky. Vhodnost klasické teorie množin spočívá v přímočarém vytváření nadstruktur a jednoduchém společném jazyce, který takto poskytuje všem matematikům a nejen jim. To vše zejména díky chápání libovolných oborů jako společenstev jejich objektů. Díky tomuto přístupu se podařilo vypracovat v klasické teorii množin pojetí téměř všech matematických disciplín, což jim poskytlo záruku bezespornosti [17, s. 83].

Vopěnkova teorie se takovému zjednodušení vyhýbá přijetím oborů, které nelze vykládat jakožto společenstva objektů a které nelze považovat za samostatné objekty. Tento přístup je částečně motivován snahou, která provází teorii množin od jejích počátků, vyhnout se paradoxům, například Russelovu [15, s. 43]. Odmítnutí některých oborů jakožto společenstev objektů však mnohdy stěžuje ATM cestu. Především tam, kde klasická teorie množin lehce vytváří z vlastností nebo relací mezi objekty třídy a pracuje s vlastnostmi popřípadě relacemi mezi těmito třídami atd., musí ATM složitě hledat cestu jinudy, pomocí kódování (viz sekce 2.2.5) [20, s. 528].

Zároveň se však jeví ATM rozšířená o vlastní třídy bohatší [15, s. 306] než klasická teorie množin,ostatně v samotné ATM lze klasickou teorii množin uspokojivě modelovat [15, s. 374-388]. V ATM tak lze nepochybně vypracovat pojetí všech důležitých matematických disciplín, i přes snahu Vopěnkových žáků však zůstává tato výzva nenaplněna.

4.5 Rozvinutost teorie

Přestože ATM nabízí dostatečné prostředky ke zkoumání libovolných jevů, v mnoha případech příhodnější než klasická teorie množin, ještě není ve stavu, kdy by byla snadno aplikovatelná. Mnoho pojmů není dostatečně rozpracováno, navíc by jejich rozpracování razilo novou cestu, tam kde již existuje cesta v klasické matematice [20, s. 522]. Její rozvinutí by tak vyžadovalo příliš mnoho úsilí a zapojení mnoha lidí, s nejistým výsledkem.

4.6 Odtržení teorie od klasické matematiky

Kromě neznámé, zpočátku neintuitivní, půdy pod nohama naráží matematik při studiu alternativní teorie množin z novějších knih na závažný problém v motivaci. Bez vazby na klasickou a známou matematiku se cítí jaksi vyděděně, téměř nepatřičně. Jakoby se obracel zády k celému matematickému světu s pocitem, že je mu zapovězen a že se sám zříká možnosti příspěvku k současné matematice, potažmo vědě. To, co jistě motivuje člověka v bádání, je právě pocit budování matematiky, přispívání svým oblázkem do mozaiky. Tohoto pocitu nedostává se při studiu ATM neprávem. Jak je ukázáno v sekci 3.1, staví ATM na překonání nedostatků ZFC a dokonce modeluje některé její důležité výsledky (Robinsovnovo lemma o přetečení viz axiom 2.10 a sekce 3.2). ATM tak lze považovat nikoli za popření klasické matematiky a teorie množin, ale za pokračování jejich snah.

5 Závěr

Co tedy alternativní teorie množin nabízí oproti té klasické, když, jak ukázal A. Robinson [9] ve své nestandardní analýze vybudované na nestandardních modelech ZFC, máme i v klasické matematice nekonečně malé veličiny? Především intuici podepřenou fenomenologickým přístupem, kterou žádný formální model nemůže nabídnout. Tyto intuice by mohly podpořit především didaktiku infinitesimálního počtu skrze právě nestandardní analýzu, jejíž výuka ve světě již poskrovnu probíhá [13, s. 581–582]. Mimo to také ATM upozorňuje na dědictví předmnožinové matematiky, inspirována Husserlovou fenomenologii nás vede zpět k věcem samým t.j. k matematickým pojmům jako takovým, ne k jejich modelům. Vyjasňuje teologické předpoklady Cantorovy teorie množin.

V této práci jsem se pokusil shrnout nejvýznamnější překážky, na které narazila Alternativní teorie množin profesora Petra Vopěnky ve svém rozvoji a pokusech o aplikaci. Přestože teorie představovala pro mnoho z těch, kdo se s ní seznámili, inspiraci a cestu k novým intuicím, nepodařilo se ji rozšířit mezi odbornou veřejnost.

Jak je vidět na srovnání s konstruktivní matematikou, potřebuje teorie ke svému prosazení především konkrétní aplikace, ve kterých je užitečná, na rozdíl od konstruktivní matematiky nachází ATM tyto aplikace tam, kde její místo již uspokojivě zabírá klasická teorie množin. Za hlavní překážku tak považuji „dostatečnost" klasické teorie množin, jak je shrnuta ve srovnání s možnostmi ATM v sekci 4.4. Všechno, co by mohla ATM nabídnout, již klasická matematika nějak zvládla. Často ne stejně elegantním způsobem a mnohdy za většího úsilí, než které by bylo třeba vynaložit v ATM (viz např. modelování nekonečně malých veličin), jinde však stojí před větším obtížemi právě ATM. Z hlediska přímého uplatnění ATM v aplikované matematice nebo základech matematiky je tak již nejspíš pozdě snažit dohnat vývoj klasické teorie množin za posledních téměř 50 let.

Rovněž otázky, jak by vypadala matematika, kdyby prof. Vopěnka představil svou teorii dříve nebo kdyby se namísto ní věnoval klasické teorii množin, jsou dnes již bezpředmětné. Mnohem podnětnější je ptát se, jak naložit s ATM za současného stavu. Jak zprostředkovat odborné veřejnosti její fenomenologické pojetí a intuice, které jsou bezpochyby jejím největším vkladem matematice a vědě vůbec.

Literatura

[1] Andrej Bauer. Five stages of accepting constructive mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2016.

[2] Miroslav Holeček. Polomnožiny a matematika možného. *Filozofický časopis*, (4):601–618, 2016.

[3] M. Randall Holmes. Alternative axiomatic set theories. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2014.

[4] Edmund Husserl. *Krize evropských věd a transcendentální filozofie*. Academia, 1972.

[5] Rosalie Iemhoff. Intuitionism in the philosophy of mathematics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2016.

[6] Richard Kaye. *Models of Peano arithmetic*. Oxford university Press, 1991.

[7] Erik Palmgren. Two approaches to constructive topology. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2013.

[8] J. B. Paris. Mathematics in alternative set theory. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 13(3):244–245, 1981.

[9] Abraham Robinson. *Non-standard analysis*. North-Holland Publishing co., 1966.

[10] Jan Romportl. Polomnožiny a emergence v umělé inteligenci. *Filozofický časopis*, (4):587–599, 2016.

[11] Antonín Sochor. Petr vopěnka (*16. 5. 1935). *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 45(2):125–134, 2000.

[12] Antonín Sochor. *Metamatematika teorií množin*. Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2005.

[13] Alena Vencovská. Mnoho povyku pro nekonečně málo? *Filozofický časopis*, (4):575–586, 2016.

[14] Petr Vopěnka. *Mathematics in the Alternative Set Theory*. Teubner Texte, 1979.

[15] Petr Vopěnka. *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*. Alfa, 1989.

[16] Petr Vopěnka. *Meditace o základech vědy*. Práh, 2001.

[17] Petr Vopěnka. *Nová infinitní matematika I.: Velká iluze matematiky 20. století*. Karolinum, 2015.

[18] Petr Vopěnka. *Nová infinitní matematika II.: Nová teorie množin a polomnožin*. Karolinum, 2015.

[19] Petr Vopěnka. *New Infinitary Mathematics*. 2017. Manuskript v přípravě.

[20] Pavol Zlatoš. Vopěnkova alternatívna teória množín alebo t'ažký údel génia mimo hlavného prúdu. *Filozofický časopis*, (4):513–535, 2016.

A Axiomy ZFC

Axiom A.1 (Extenzionality) *[12, s. 17]*

$$(\forall x, y)(x = y \Leftrightarrow (\forall e)(e \in x \Leftrightarrow e \in y))$$

Axiom A.2 (Dvojice)

$$(\forall x, y)(\exists z)(\forall e)(e \in z \Leftrightarrow e \in x \vee e \in y)$$

Axiom A.3 (Podmnožin (též vydělení)) *Je-li φ množinová vlastnost s parametrem p, pak platí*

$$(\forall x, p)(\exists y)(\forall u)(u \in y \Leftrightarrow (u \in x \wedge \varphi(u, p)))$$

Axiom A.4 (Sjednocení) *[12, s. 17]*

$$(\forall x)(\exists u)(\forall e)(e \in u \Leftrightarrow (\exists y)(y \in x \wedge e \in y))$$

Axiom A.5 (Schéma nahrazení) *[12, s. 17]*

$$(\forall x)\Big((\forall y, e, e')\big((\varphi \wedge \varphi(e/e') \wedge y \in x) \Rightarrow e = e'\big) \Rightarrow (\exists z)(\forall e)\big(e \in z \Leftrightarrow (\exists y)(y \in x \wedge \varphi)\big)\Big)$$

Axiom A.6 (Fundovanosti (též regularity)) *[12, s. 17]*

$$(\forall x)\big((\exists y)(y \in x) \Rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge (\forall e)\neg(e \in y \wedge e \in x)\big)$$

Axiom A.7 (Výběru)

$$(\forall x)(\exists S)(\forall a)(a \in x \Leftrightarrow (S(a) \in a))$$

Axiom A.8 (Potence) *[12, s. 17]*

$$(\forall x)(\exists p)(\forall z)(z \in p \Leftrightarrow (\forall e)(e \in z \Rightarrow e \in x))$$

Axiom A.9 (Nekonečna) *[12, s. 17]*

$$(\exists x)\Big((\exists z)\big(z \in x \wedge (\forall e)(e \notin z)\big) \bigwedge (\forall y)\big(y \in x \Rightarrow (\exists z)(z \in x \wedge (\forall e)(e \in z \Leftrightarrow (e \in y \vee e = y))))\Big)$$

Axiom A.10 (Negace axiomu nekonečna)

$$(\forall x)\Big(\neg(\exists z)\big(z \in x \wedge (\forall e)(e \notin z)\big) \bigvee \neg(\forall y)\big(y \in x \Rightarrow (\exists z)(z \in x \wedge (\forall e)(e \in z \Leftrightarrow (e \in y \vee e = y))))\Big)$$