ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

Gröbnerovy báze a eliminační ideály

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Monika Bláhová

Učitelství pro základní školy, obor Učitelství matematiky a geografie pro základní školy

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 30. června 2016

....

vlastnoruční podpis

Děkuji vedoucímu diplomové práce Doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za inspirativní vedení mé práce, za poskytnuté rady a připomínky, za ochotu a také čas strávený při konzultacích.

Zde bude oficiální zadání diplomové práce

Obsah

Úvod

Moje diplomová práce se zabývá teorií ideálů. Ukazuje různé metody, které lze využít pro řešení soustav rovnic nejen lineárních, ale hlavně rovnic vyššího řádu. Na soustavy lineárních rovnic máme k dispozici jednodušší metody, jako je metoda sčítací nebo dosazovací, které se vyučují již na základních školách, tím se ale zabývat nebudeme.

Tato práce je postavena tak, že v první části se čtenář seznámí s pojmem ideál. Zjistí, jak lze v daných ideálech provádět eliminaci proměnných a na příkladech uvidí využití eliminace v teorii ideálů. Tu lze s rozvojem počítačů a vhodných programů provádět snadněji. Existují různé programy, jako např. Maple nebo Mathematica, které nám dají rovnou výsledek, a my díky němu snadněji zjistíme řešení daných soustav rovnic. Proto jsou příklady vždy řešené „ručně“ bez využití počítačového programu a pak v programu Mathematica. Čtenář má tak porovnání, jak náročné je zadání do programu anebo počítání bez jeho využití. V další části se seznámí s pojmem determinant Sylvesterovy matice. Je to jedna z možných metod řešení soustavy nelineárních rovnic. Je zde uvedeno několik příkladů, které jsou rovnou řešeny i v programu Maple. První příklad je záměrně dán jako soustava lineárních rovnic, aby měl čtenář porovnání, proč tyto metody využíváme na nelineární rovnice. Pro ty lineární je to zbytečně zdlouhavé a náročné a jak jsem již zmiňovala, máme jednodušší metody řešení soustav lineárních rovnic. Ve třetí kapitole jsou zmíněné Gröbnerovy báze, které jsou další metodou řešení soustavy rovnic. Je uveden jeden příklad počítaný „ručně“ a další příklady řešeny v programech Maple a Mathematica. Více o Gröbnerových bázích by se čtenář mohl dočíst v mé bakalářské práci, která je Gröbnerovým bázím věnována.

Ve čtvrté části se čtenář dozví, co jsou eliminační ideály. V poslední části jsem se zabývala využitím eliminace při dokazování geometrických vět. Vždy je uvedena daná věta a pak důkaz, který je řešen klasicky a pak s využitím eliminace v počítačovém programu Mathematica

Cílem práce je ukázka různých metod pro řešení soustavy rovnic. Jedná se o metody, které se na školách nevyučují, ale člověk je při řešení soustavy rovnic může využít a tak snadněji nalézt řešení těchto rovnic. Dále využití eliminace při dokazování různých geometrických vět.

1 Eliminace v teorii ideálů

Definice jsou převzaty z [3]. Příklady jsou mnou vymyšlené, ale inspirovala jsem se ze stránek matematické olympiády pro střední školy. [1]

Definice 1.1:

Podmnožina $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ je ideál, jestliže splňuje tyto podmínky:

a) $0 \in I$

b) Jestliže $f, g \in I$, potom $f + g \in I$

c) Jestliže $f \in I$ a $h \in k[x_1, \dots, x_n]$, potom $hf \in I$.

Definice 1.2:

Nechť $f_1, \dots. f_s$ jsou polynomy v $k[x_1, \dots x_n]$. Potom

$$\langle f_1, \dots f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i : h_1, \dots, h_s \in k[x_1, \dots., x_n] \right\}.$$

Rozhodující fakt je, že $\langle f_1, \dots f_s \rangle$ je ideál.

Lemma: Jestliže $f_1, \dots. f_s \in k[x_1, \dots., x_n]$, potom $\langle f_1, \dots f_s \rangle$ je ideál $k[x_1, \dots x_n]$. Budeme $\langle f_1, \dots f_s \rangle$ nazývat ideálem generovaným z $f_1, \dots. f_s$.

Ideál $\langle f_1, \dots f_s \rangle$ má zajímavý výklad, pokud jde o polynomiální rovnice. Mějme $f_1, \dots. f_s \in k[x_1, \dots., x_n]$, dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{gathered} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_s = 0. \end{gathered}$$

Z těchto rovnic lze odvodit ostatní pomocí algebry. Například, pokud vynásobíme první rovnici $h_1 \in k[x_1, \dots., x_n]$, druhou rovnici $h_2 \in k[x_1, \dots., x_n]$ a tak dále. Dostaneme rovnici $h_1 f_1 + h_2 f_2 + \dots + h_s f_s = 0$, která je důsledkem naší povodní soustavy rovnic. Všimneme si, že na levé straně této rovnice je přesně prvek ideálu $\langle f_1, \dots f_s \rangle$. Můžeme si představit $\langle f_1, \dots f_s \rangle$ jako skládání ze všech „polynomiálních důsledků“ rovnic $f_1 = f_2 = \dots = f_s = 0$. Ukážeme si to na příkladu.

Příklad 1.1:

Mějme soustavu rovnic

$$x = t + 2$$
$$y = 1 + t^2.$$

Z první rovnice si vyjádříme $t, t = x - 2$. Nyní do druhé rovnice dosadíme do t a vyjádříme y: $y = 1 + (x-2)^2 = 1 + x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 5$.

Pojďme se teď vrátit k zadané soustavě rovnic. Rovnice upravíme tak, že budeme mít vše na levé straně a šikovně vynásobíme, abychom se při použití sčítací metody zbavili t.

$$x - t - 2 = 0 \ \ /.(x - 2 + t)$$
$$\underline{y - 1 - t^2 = 0 \ \ /.(-1)}$$
$$(x-2)^2 - t^2 = 0$$
$$-y + 1 + t^2 = 0$$

Použijeme sčítací metodu a dostaneme

$$x^2 - 4x + 4 - y + 1 = x^2 - 4x + 5 - y = 0.$$

Polynom $x^2 - 4x + 5 - y$, který umožní ze znalosti x snadno vypočítat y, skutečně patří do ideálu $\langle x - t - 2, y - 1 - t^2\rangle$, protože $x^2 - 4x + 5 - y = (x - t - 2).(x + t - 2) + (-1).(y - 1 - t^2)$.

Příklad 1.2:

Mějme soustavu rovnic

$$5x + 4 - t = 0$$
$$2y - 7 = t^2.$$

Opět si z první rovnice vyjádříme $t, t = 5x - 4$. Dosadíme do druhé rovnice t a vyjádříme y.

$$2y - 7 - (5x - 4)^2 = 0$$
$$2y = 7 + 25x^2 - 40x + 16$$
$$y = \frac{25x^2 - 40x + 23}{2}.$$

Nyní se opět vrátíme k zadané soustavě rovnic, kterou si upravíme. Chceme mít vše na levé straně, proto obě rovnice musíme šikovně vynásobit. Pak použijeme sčítací metodu a zbavíme se t.

$$5x + 4 - t = 0 \ \ /.(5x + 4 + t)$$
$$\underline{2y - 7 - t^2 = 0 \ \ /.(-1)}$$
$$25x^2 + 40x + 16 - t^2 = 0$$
$$\underline{-2y + 7 + t^2 = 0}$$
$$25x^2 + 40x + 23 - 2y = 0$$

Polynom $25x^2 + 40x + 23 - 2y$, který umožní ze znalosti x snadno vypočítat y, skutečně patří do ideálu $\langle 5x + 4 - t, 2y - 7 - t^2\rangle$, protože $25x^2 + 40x + 23 - 2y = (5x + 4 + t).(5x + 4 - t) + (-1).(2y - 7 - t^2)$.

Podobně bychom vyjádřili jakýkoliv jiný „polynom důsledků“ ze soustavy rovnic

$$5x + 4 - t = 0$$

$$2y - 7 - t^2 = 0$$

vedoucí k prvku tohoto ideálu. Říkáme, že ideál I je konečně generovaný, jestliže existuje $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ takové, že $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ a říkáme že $f_1, \dots, f_s$ jsou bází ideálu I. Ve třetí kapitole se budeme věnovat Gröbnerovy báze. Jedná se o speciální užitečný typ báze.

Je zde hezká analogie s lineární algebrou, které se budeme věnovat nyní. Definice ideálu je podobná definici podprostoru. Oba jsou uzavřeny vzhledem ke sčítání a násobení. Ve vektorovém podprostoru vynásobíme skaláry, v ideálu násobíme polynomy.
Ideál generovaný polynomy $f_1, \dots, f_s$ je podobný množině generované ve vektorovém prostoru V konečným počtem vektorů $v_1, \dots, v_s$. V obou případech se vezme lineární kombinace, pomocí koeficientů vektorového prostoru se vytvoří vektorový podprostor prostoru V generovaný konečným počtem vektorů $v_1, \dots, v_s$ a pomocí koeficientů z $k[x_1, \dots, x_n]$, což jsou polynomy, se vytvoří ideál generovaný polynomy $f_1, \dots, f_s$.

Definice 1.3:
Nechť k je pole (tj. komutativní těleso) a nechť $f_1, \dots, f_s$ jsou polynomy v $k[x_1, \dots, x_n]$. Označme $V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \epsilon k^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ pro všechny $1 \leq i \leq s\}$. Množinu $V(f_1, \dots, f_s)$ nazýváme afinní varietou definovanou $f_1, \dots, f_s$.

Tvrzení:
Jestliže $f_1, \dots., f_s$ a $g_1, \dots, g_r$ jsou bází stejného ideálu v $k[x_1, \dots., x_n]$ tak, že $\langle f_1, \dots., f_s \rangle = \langle g_1, \dots. g_r \rangle$, potom $V(f_1, \dots., f_s) = V(g_1, \dots., g_r)$.

Příklad 1.3:
Mějme soustavu rovnic

$$3x^2 + 4y^2 - 19 = 0$$

$$x^2 - y^2 + 3 = 0,$$

pokud druhou rovnici vynásobíme číslem (-3) a přičteme k ní rovnici první, dostaneme rovnici $7y^2 - 28 = 0$. Danou rovnici můžeme vydělit číslem 7 a dostaneme $y^2 - 4 = 0$. Odtud tedy vidíme, že $y = \pm 4$. Kdybychom druhou rovnici tentokrát vynásobili číslem 4, dostaneme rovnici $7x^2 - 7 = 0$, kterou opět můžeme vydělit číslem 7. Vznikne rovnice $x^2 - 1 = 0$. Řešením je $x = \pm 1$.

Takže $V(3x^2 + 4y^2 - 19, x^2 - y^2 + 3) = V(x^2 - 1, y^2 - 4) = \{(\pm 1, \pm 2)\}$.

1.1 Příklady

Příklady použité v této kapitole jsou ze stránek matematické olympiády. Některé příklady jsou přímo převzaté, jiné příklady jsou mnou vymyšlené a příklady ze stránek matematické olympiády jsem se nechala jen inspirovat.

Příklad 1.1.1:

Pomocí eliminace proměnných řešte soustavu rovnic

$$3x^2 + 4y^2 - 19 = 0$$

$$x^2 - y^2 + 3 = 0.$$

Řešení:

Danou soustavu jsme si společně vyřešili v příkladě 1.3. Nyní si ukážeme řešení pomocí počítačového programu Mathematica.

Nejdříve budeme eliminovat neznámou x. Vyjde nám rovnice, ve které bude jen neznámá y, a tu pak snadno vypočítáme. Zadaný příkaz do programu:

$$\text{Eliminate}[\{3x^2 + 4y^2 - 19 == 0, x^2 - y^2 + 3 == 0\}, x]$$

$$y^2 == 4$$

Z rovnice $y^2 = 4$ vidíme, že řešení je $y = \pm 2$. Je to stejné řešení, ke kterému jsme došli v příkladě 1.3.

Teď si eliminujeme neznámou y. Rovnici, která nám tentokrát vyjde, bude obsahovat pouze neznámou x. Zadaný příkaz:

$$\text{Eliminate}[\{3x^2 + 4y^2 - 19 == 0, x^2 - y^2 + 3 == 0\}, y]$$

$$x^2 == 1$$

Z rovnice $x^2 == 1$ opět vidíme, že řešení je ve tvaru $x = \pm 1$.

Řešení dané soustavy je $\{(\pm 1, \pm 2)\}$.

Poznámka: Když zadáváme dané soustavy do programu Mathematica, nesmíme zapomenout dát znak „=“ dvakrát, jinak nám daný příkaz nebude fungovat.

Příklad 1.1.2:

Pomocí eliminace řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 2y^2 - 3 = 0$$
$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0.$$

Řešení:

Nejdříve provedeme eliminaci neznámé x. Vznikne nám rovnice pouze s neznámou y, kterou vypočítáme. Příkaz zadaný do programu:

Eliminate$[\{x\^{}2 + 2y\^{}2 - 3 == 0, x\^{}2 + x * y + y\^{}2 - 3 == 0\}, x]$

$$-y + y^3 == 0$$

Rovnici $-y + y^3 = 0$ si upravíme tak, že vytkneme $-y$ a dostaneme rovnici $-y.\left(1 - y^2\right) = 0.$

Odtud vidíme, že daný rovnice má celkem tři řešení $y = 0, y = 1, y = -1.$

Nyní budeme eliminovat neznámou y příkazem:

Eliminate$[\{x^2 + 2y^2 - 3 == 0, x^2 + x * y + y^2 - 3 == 0\}, y]$

$$-4x^2 + x^4 == -3$$

Při řešení rovnice $-4x^2 + x^4 == -3$ si pomůžeme matematickým počítačovým programem. Danou rovnici si upravíme, aby byla v součinovém tvaru. To uděláme pomocí příkazu $Factor$.

$$\text{Factor}[-4x^2 + x^4 + 3]$$
$$(-1 + x)(1 + x)(-3 + x^2).$$

Odtud vidíme, že daná soustava má v množině reálných čísel celkem čtyři řešení, která jsou $x = \pm 1, x = \pm\sqrt{3}$.

Mohli jsme si práci ušetřit ještě více. V programu Mathematica existuje příkaz $Solve$, který nám danou rovnici vyřeší rovnou.

$$\text{Solve}[-4x^2 + x^4 == -3, x]$$
$$\{\{x \to -1\}, \{x \to 1\}, \{x \to -\sqrt{3}\}, \{x \to \sqrt{3}\}\}$$

Dostali jsme stejné řešení, ke kterému jsme došli i my.

Nyní budeme jednotlivá řešení dosazovat do zadané soustavy rovnic, abychom zjistili řešení dané soustavy rovnic. Zjistíme, že daná soustava rovnic má celkem čtyři řešení $P = \left\{\left(\sqrt{3}, 0\right), \left(-\sqrt{3}, 0\right), (1,1), (-1,-1)\right\}$.

Příklad 1.1.3:

Řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$$
$$y^2 + 2xz = 6.(z + x - 2)$$
$$z^2 + 2xy = 6.(x + y - 2).$$

Řešení:

Zadání příkladu jsem získala na stránkách české matematické olympiády. Konkrétně šlo o 53. ročník, školní kolo, kategorii A.

Nejdříve si soustavu rovnic vyřešíme bez použití počítačového programu tak, jak by jí řešili žáci na střední škole.

Druhou rovnici odečteme od první rovnice a dostaneme rovnici, kterou budeme postupně upravovat na součinový tvar.

$$y^2 - x^2 + 2xz - 2yz = 6.(z + x - 2) - 6.(y + z - 2)$$
$$y^2 - x^2 + 2xz - 2yz = 6z + 6x - 12 - 6y - 6z + 12$$
$$y^2 - x^2 + 2xz - 2yz - 6x + 6y = 0$$
$$(-x + y).(x + y) - 2z.(-x + y) + 6.(-x + y) = 0$$
$$(-x + y).(x + y - 2z + 6) = 0.$$

Nyní si odečteme od třetí rovnice první rovnici podobným způsobem. Opět se danou rovnici budeme snažit dostat do součinového tvaru.

$$z^2 - x^2 + 2xy - 2yz = 6.(x + y - 2) - 6.(y + z - 2)$$
$$z^2 - x^2 + 2xy - 2yz = 6z + 6x - 12 - 6y - 6z + 12$$
$$z^2 - x^2 + 2xy - 2yz - 6x + 6z = 0$$
$$(z - x).(z + x) - 2y.(-x + z) + 6.(-x + z) = 0$$
$$(z - x).(z + x - 2y + 6) = 0.$$

Z původní soustavy rovnic nyní dostáváme soustavu rovnic

$$x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$$
$$(-x + y).(x + y - 2z + 6) = 0$$
$$(z - x).(z + x - 2y + 6) = 0.$$

Nově vzniklou soustavu již vyřešíme snáze, protože vidíme, že mohou nastat celkem čtyři případy $(-x + y) = 0 \land (z - x) = 0$, $(-x + y) = 0 \land (z + x - 2y + 6) = 0, (z - x) = 0 \land (x + y - 2z + 6) = 0$, $(x + y - 2z + 6) = 0 \land (z + x - 2y + 6) = 0$. My si dané případy teď rozebereme každý zvlášť a dostaneme dílčí řešení dané soustavy souřadnic.

1) $(-x + y) = 0 \land (z - x) = 0$

Vidíme, že z první rovnice se $x = y$ a z druhé $z = x$.

Platí tedy podmínka $x = y = z$.

My teď do první rovnice soustavy dosadíme, upravíme a vypočítáme neznámou x.

$$x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$$
$$x^2 + 2.x.x = 6.(x + x - 2)$$
$$3x^2 = 12x - 12$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici, kterou vypočítáme pomocí diskriminantu $D = b^2 - 4ac$. Dostaneme výsledek $D = 16 - 16 = 0$. Rovnice má tedy jeden dvojnásobný reálný kořen, který vypočítáme pomocí vzorce $x = \frac{-b}{2a}$. Po dosazení $x = 2$.

Vrátíme se na začátek, kde jsme vyjadřovali neznámou z podmínek. Díky tomu máme jedno řešení zadané soustavy rovnic ve tvaru $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

2) $(-x + y) = 0 \wedge (z + x - 2y + 6) = 0$

Z první rovnice vidíme rovnou $x = y$. Tuto podmínku teď dosadíme do druhé rovnice $z + x - 2y + 6 = 0$. Dostaneme $z + x - 2x + 6 = 0$. Odtud vidíme, že $z = x - 6$. Opět budeme dosazovat do první rovnice zadané soustavy, kterou budeme upravovat a vypočítáme opět neznámou x.

$$x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$$
$$x^2 + 2.x.(x - 6) = 6.(x + x - 6 - 2)$$
$$x^2 + 2x^2 - 12x = 12x - 48$$
$$3x^2 - 24x + 48 = 0$$

Danou rovnici, si ještě upravíme tak, že celou rovnici vydělíme číslem 3 a dostaneme rovnici $x^2 - 8x + 16 = 0$.

Vypočítáme diskriminant $D = 64 - 64 = 0$. Diskriminant je roven nule, dostáváme dvojnásobný reálný kořen $x = \frac{8}{2} = 4$. Nyní se vraťme na začátek, kde jsme si stanovili podmínky. $x = y$ a $z = x - 6 = 4 - 6 = -2$. Našli jsme další řešení soustavy rovnic ve tvaru $(x, y, z) = (4,4,-2)$.

3) $(z - x) = 0 \wedge (x + y - 2z + 6) = 0$

Z první rovnice víme, že $x = z$. Pokud tuto podmínku dosadíme do druhé rovnice, dostaneme po úpravě $y = z - 6$. Nyní opět dosadíme do první rovnice a vypočítáme tentokrát neznámou z.

$$x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$$
$$z^2 + 2.(x - 6).z = 6.(z - 6 + z - 2)$$
$$z^2 + 2z^2 - 12z = 12z - 48$$
$$3z^2 - 24z + 48 = 0$$
$$z^2 - 8z + 16 = 0.$$

Dostali jsme stejnou rovnici jako v předchozím příkladě, až na neznámou. Můžeme proto psát ihned výsledek, kterým je dvojnásobný reálný kořen $z = 4$. Pokud dosadíme do podmínek $x = z, y = z - 6$, dostaneme uspořádanou trojici čísel $(x, y, z) = (4, -2,4)$, které jsou řešením dané soustavy rovnic.

4) $(x + y - 2z + 6) = 0 \wedge (z + x - 2y + 6) = 0$

Jako první si obě rovnice upravíme. Začneme nejdříve rovnicí $x + y - 2z + 6 = 0$. Vyjádříme si neznámou x a dostaneme rovnici $x = 2z - y - 6$. Teď do druhé rovnice dosadíme za x a vypočítáme neznámou z.

$$z + x - 2y + 6 = 0$$
$$z + 2z - y - 6 - 2y + 6 = 0$$
$$3z = 3y$$
$$z = y.$$

Dostali jsme podmínku $z = y$, kterou můžeme ještě dosadit do první rovnice, kde jsme si vyjadřovali x a dostaneme $x = z - 6$.

Nyní budeme naše podmínky dosazovat do první rovnice zadané soustavy. Opět rovnici upravíme a vypočítáme neznámou z, kterou pak dosadíme do našich podmínek a zjistíme řešení soustavy rovnic.

$$x^2 + 2yz = 6.(y + z - 2)$$
$$(z - 6)^2 + 2.z.z = 6.(z + z - 2)$$
$$z^2 - 12z + 36 + 2z^2 - 12z - 12$$
$$3z^2 - 24z + 48 = 0.$$

Danou rovnici si můžeme ještě upravit tím, že ji celou vydělíme číslem 3 a dostaneme rovnici $z^2 - 8z + 16 = 0$. Rovnice je stejná jako v předchozím případě, proto můžeme psát řešení $z = 4$. Dosazením do podmínek, dostáváme uspořádanou trojici $(x, y, z) = (-2,4,4)$, která je řešením původní soustavy rovnic.

Zadaná soustava rovnic má celkem čtyři řešení, která jsou ve tvaru $P = [(2,2,2), (4,4,-2), (4,-2,4), (-2,4,4]$.

Teď si danou soustavu vyřešíme pomocí eliminace v programu Mathematica. Daná soustava již obsahuje tři neznámé. My jsme zatím řešili případy, kdy jsme měli pouze dvě neznámé. Princip je úplně stejný, jen místo jedné musíme eliminovat dvě neznámé. Jako první si eliminujeme x a y. Dostaneme tedy rovnici o jedné neznámé z. Příkaz, který zadáme do počítačového programu:

$$\text{Eliminate}[\{x^2 + 2y * z - 6y - 6z + 12 == 0, y^2 + 2x * z - 6x - 6z + 12 = \\ = 0, z^2 + 2y * x - 6y - 6x + 12 == 0\}, \{x, y\}]$$

A vyjde nám výsledek: $-128z - 112z^2 + 64z^3 + 8z^4 - 8z^5 + z^6 == -256$.

Nyní pomocí příkazu $Solve$, zjistíme neznámé z

$$\text{Solve}[-128z - 112z^2 + 64z^3 + 8z^4 - 8z^5 + z^6 == -256].$$

Dostali jsme výsledek $\{\{z \to -2\}, \{z \to -2\}, \{z \to 2\}, \{z \to 2\}, \{z \to 4\}, \{z \to 4\}\}$

Daná rovnice má celkem tři řešení: $z = 2, z = -2, z = 4$. Nyní eliminujeme neznámé x a z. Rovnice tedy tentokrát bude obsahovat pouze neznámé y.

$$\text{Eliminate}[\{x^2 + 2y * z - 6y - 6z + 12 == 0, y^2 + 2x * z - 6x - 6z + 12 = \\ = 0, z^2 + 2y * x - 6y - 6x + 12 == 0\}, \{x, z\}]$$

$$-128y - 112y^2 + 64y^3 + 8y^4 - 8y^5 + y^6 == -256$$

Můžeme si všimnout, že výsledek se nám shoduje s předchozím výsledkem, až na neznámé. Proto můžeme ihned psát, že řešením rovnice $-128y - 112y^2 + 64y^3 + 8y^4 - 8y^5 + y^6 = -256$ je $y = \pm 2, y = 4$. Poslední nám chybí eliminovat neznámou z a y, abychom dostali rovnici jen s neznámou x. Zadáme příkaz

$$\text{Eliminate}[\{x\text{^}2 + 2y * z - 6y - 6z + 12 == 0, y\text{^}2 + 2x * z - 6x - 6z + 12 = \\ = 0, z\text{^}2 + 2y * x - 6y - 6x + 12 == 0\}, \{z, y\}]$$

$$-128x - 112x^2 + 64x^3 + 8x^4 - 8x^5 + x^6 == -256.$$

Výsledek se nám opět shoduje, můžeme rovnou psát řešení vzniklé rovnice, kterým je $x = \pm 2, x = 4$.

Získali jsme řešení vzniklých rovnic, my ale chceme znát řešení zadané soustavy rovnic. Musíme si vzít jednotlivá řešení a postupně dosazovat do soustavy rovnic a zjišťovat, pro které hodnoty bude daná soustava platit. Pokud dosadíme všechny kombinace, zjistíme, že dané soustavě rovnic vyhovují kombinace čísel $(2,2,2), (4,4,-2), (4,-2,4), (-2,4,4)$. Tyto kombinace jsou řešením zadané soustavy rovnic. Vidíme, že výsledek se nám shoduje s naším výpočtem bez použití počítače.

Uvedené příklady zatím jen dávají tušit, že by eliminace proměnných mohla být v případě, kdy řešíme soustavy polynomiálních rovnic, užitečná.

2 Rezultant polynomů

Věty a definice v této kapitole jsou převzaty z [6], [8], [11], [4], [5]. Příklady jsou inspirovány ze stránek české matematické olympiády.

V této kapitole uvedu definici rezultantu, Sylvesterovy matice a dále Sylvesterovo kritérium. Připomeneme si způsob řešení determinantu a vyřešíme si několik příkladů na řešení soustavy rovnic.

2.1 Sylvesterova matice a rezultant polynomů

Sylvesterovu matici vymyslel anglický matematik James Joseph Sylvester. Žil v 19. století a jeho práce jsou významné hlavně v oblasti lineární algebry, teorie čísel a kombinatoriky. Kromě Sylvesterovy matice je autorem Sylvestorovy posloupnosti, Sylvesterova kritéria nebo tzv. Sylvesterova zákona setrvačnosti.

Sylvesterova matice se používá pro dvojice mnohočlenů v jedné neznámé nebo polynomy v dalších proměnných. Sylvesterovu matici mnohočlenů f, g značíme $Syl\ (f, g)$.

James Joseph Sylvester

Sylvester se narodil 3. 9. 1814 v Londýně do židovské rodiny a byl vychováván v židovské víře, což v pozdějším životě někdy vedlo k problémům. James studoval dvě základní školy v Londýně. Vstoupil na Universitu College v Londýně, kterou musel ale opustit poté, co byl obviněn z vyhrožování spolužákovi nožem. Stal se studentem St. John´s College v Cambridge, kde složil závěrečné zkoušky. Zde měl Sylvester problémy, kvůli tomu, že byl žid. Nemohl být totiž graduován, protože před samotnou graduací se vyžadovalo, aby student složil církevní přísahu. Z důvodu svého původu nebyl ani přijatý pro Smithovu cenu ani pro Fellowship. Přijal místo vyučujícího fyziky na University of London, protože kvůli náboženství nebylo mnoho míst, kde by mohl učit.

Sylvester byl první židovský profesor v USA. Ve věku 27 let získal místo profesionálního matematika a byl pozván do USA na Univessity of Virginia. Zde došlo k jedné osudné události, kvůli které Sylvester odjel zpátky do Anglie. Nějakou dobu byl nezaměstnaný a po nějaké době byl přijat jako profesor matematiky na Royal Military Academy ve Woolwichi. Do důchodu odešel v 55 letech, ale pak se znovu vrátil na univerzitu v USA.

Sylvester byl druhým prezidentem Londýnské matematické společnosti. Založil časopis American Journal of Mathematics a tím velmi přispěl k rozvoji vědecké práce v matematice v USA. Napsal několik článků a vydal matematickou knihu. [8]

Definice 2.1.1: Sylvesterova matice

Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ jsou dva polynomy z $T[x]$, kde T je komutativní těleso. Sylvesterovou maticí polynomů $f(x)$, $g(x)$ nazýváme matici

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 & . & . & . \\ . & a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 & . & . & . \\ . & b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 \end{pmatrix}$$

Jde o čtvercovou matici typu $(m+n, m+n)$, mající v prvních m řádcích koeficienty $a_i, i = n, n-1, \ldots, 0$ polynomu f, vždy však „posunuté o jedno místo vpravo“ a obdobně v dalších n řádcích matice se vyskytují koeficienty $b_j, j = m, m-1, \ldots 0$. Místa, která nebudou obsazená, vyplníme nulou, abychom měli vždy čtvercovou matici. Můžeme říci, že v prvních m řádcích matice budou hodnoty polynomu $f(x)$ a v n řádcích matice budou hodnoty polynomu $g(x)$.

Příklad 2.1.1: Sestrojte Sylvesterovu matici polynomu $f(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4$ a $g(x) = 3x^4 + 6x^3 + 3x^2 + x + 1$.

Řešení:

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice 2.1.2: Rezultant polynomu

Rezultantem $resx(f(x), g(x))$ polynomů f, g se nazývá determinant Sylvesterovy matice.

Rezultant se také někdy nazývá eliminant a používá se při řešení soustavy nelineárních rovnic. Při výpočtu využíváme determinant Sylvesterovy matice.

Věta 2.1.1: Sylvesterovo kritérium

Nechť $f(x), g(x)$ jsou dva polynomy kladných stupňů. Polynomy $f(x), g(x) \epsilon T[x]$ jsou dělitelné nekonstantním společným dělitelem v $T[x]$ právě tehdy, když

$res_x\big(f(x), g(x)\big) \ = \ 0.$

Díky této větě můžeme například určovat parametr v soustavě rovnic anebo řešit soustavu rovnic o dvou neznámých.

2.2 Determinant

Determinant je číslo a je definovaný pouze na čtvercových maticích. Značí se $det\ A$ nebo $|A|$.

2.2.1 Výpočet determinantu

Matice 2x2

$$\det|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

Matice 3x3

Matice řádu n = 3 se řeší pomocí Sarrusova pravidla.

$$\begin{aligned} det|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\,.\,a_{22}\,.\,a_{33} + a_{21}\,.\,a_{32}\,.\,a_{13} + a_{31}\,.\,a_{12}\,.\,a_{23} \\ &- (a_{31}\,.\,a_{22}\,.\,a_{13} + a_{21}\,.\,a_{12}\,.\,a_{33} + a_{32}\,.\,a_{23}\,.\,a_{11}) \\ &= a_{11}\,.\,a_{22}\,.\,a_{33} + a_{21}\,.\,a_{32}\,.\,a_{13} + a_{31}\,.\,a_{12}\,.\,a_{23} - a_{31}\,.\,a_{22}\,.\,a_{13} \\ &- a_{21}\,.\,a_{12}\,.\,a_{33} - a_{32}\,.\,a_{23}\,.\,a_{11} \end{aligned}$$

Matice 4x4 a větší

Při řešení neexistuje žádné pravidlo, jak řešit determinant matice řádu $n \geq 4$. Danou matici si vždy upravíme a použijeme rozvoj podle i-tého řádku nebo j-tého sloupce, dokud nedostaneme determinant matice řádu n = 3, abychom mohli použít Sarrusovo pravidlo.

Rozvoj podle i-tého řádku a j-tého sloupce se nazývá Laplaceův rozvoj.

Pro čtvercovou matici A řádu n platí:

a) rozvoj podle i-tého řádku pokud $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}.detA_{ij}$

b) rozvoj podle j-tého sloupce pokud $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}.detA_{ij}$

kde matice A_{ij} vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Poznámka: Determinant matice se nezmění, přičteme-li libovolný násobek daného řádku (sloupce) matice k jinému řádku (sloupci) matice.

Příklad 2.2.1: Vypočítejte determinant Sylvesterovy matice, kterou jsme sestrojili v příkladu 2.1.2.

$$\det Syl\,(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Při výpočtu použijeme rozvoj podle prvního sloupce. Abychom to ale mohli udělat, musíme si determinant upravit. První řádek vynásobíme číslem -3 a následně první řádek přičteme k pátému řádku.

$$\det Syl\,(f,g) = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -12 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & -11 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}.(-3).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & -9 & -11 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Nyní opět první řádek vynásobíme číslem -3 a první řádek přičteme ke čtvrtému řádku a pak k pátému přádku. Následně provedeme rozvoj podle prvního sloupce.

$$\det Syl\,(f,g) = (-3).\begin{vmatrix} -3 & -3 & -12 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -12 & -23 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & -11 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3).(-1)^{1+1}.(-3).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ -12 & -23 & -11 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & -11 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dostali jsme determinant matice 5x5. Ten ještě neumíme pohodlně vypočítat, proto jej budeme opět upravovat, dokud nedostaneme determinant matice 3x3. Ten už umíme spočítat pomocí Sarrusova pravidla. Nejdříve si první řádek vynásobíme číslem 12. Dále čtvrtý a pátý řádek vynásobíme číslem -4. První řádek přičteme ke třetímu řádku, k čtvrtému řádku a k pátému řádku. Opět uděláme rozvoj podle prvního řádku.

$$\det Syl\,(f,g) = 9.\begin{vmatrix} 12 & 12 & 48 & 48 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -11 & 37 & 48 & 0 \\ 0 & 48 & 92 & 44 & 0 \\ 0 & -12 & 36 & 44 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 9.(-1)^{1+1}.12.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -11 & 37 & 48 & 0 \\ 48 & 92 & 44 & 0 \\ -12 & 36 & 44 & -4 \end{vmatrix}$$

Nyní můžeme první řádek opět přičíst ke čtvrtému řádku, udělat rozvoj tentokrát podle čtvrtého sloupce a dostaneme matici 3x3, kde můžeme použít Sarrusovo pravidlo.

$$\det Syl\,(f,g) = 108.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -11 & 37 & 48 & 0 \\ 48 & 92 & 44 & 0 \\ -11 & 37 & 48 & 0 \end{vmatrix} = 108.(-1)^{1+1}.4.\begin{vmatrix} -11 & 37 & 48 \\ 48 & 92 & 44 \\ -11 & 37 & 48 \end{vmatrix}$$

$$= -48\,576 + 85\,248 - 17\,908 + 48\,576 + 17\,908 - 85\,248 = 0$$

Někdo si může všimnout, že první a třetí řádek jsou stejné. Můžeme tedy říct, že tyto řádky jsou lineárně závislé, a proto rovnou bez použití Sarrusova pravidla můžeme říci, že daný determinant vyjde 0.

Znamená to, že polynomy $f(x)$ a $g(x)$ mají společný kořen, podle Sylvesterova kritéria.

2.3 Příklady

V této kapitole si ukážeme jeden příklad na soustavu lineárních rovnic. Dále jeden příklad na řešení soustavy rovnic, kde je parametr a naposledy několik příkladů na soustavu nelineárních rovnic, které se budou počítat pomocí rezultantu.

Příklad 2.3.1: V R řešte soustavu rovnic

$$x + 2y = 2005$$

$$y + 2x = 2006.$$

Řešení:

Zadání příkladu jsem získala na stránkách české matematické olympiády, konkrétně 54. ročník školního kola, kategorie C.

Jedná se o soustavu lineárních rovnic, která se dá také řešit determinantem Sylvesterovy matice, ale nepoužívá se, protože existují jednodušší metody řešení (např. dosazovací metoda nebo sčítací metoda). Já u toho příkladu vypočítám všechny tři možnosti. Nejdříve sčítací metodu, pak dosazovací metodu a naposledy řešení pomocí rezultantu (determinantem Sylvesterovy matice).

A) Sčítací metodou

   První rovnici si vynásobíme číslem -2 a dostaneme rovnici

$$-2x - 4y = -4010$$

   Nyní si sečteme upravenou první rovnicí s druhou rovnicí.

$$-3y = -2004$$

$$y = 668$$

   Odtud již vidíme, že $y = 668$. Neznámou x zjistíme dosazením y do jedné ze zadaných rovnic. Já budu dosazovat do druhé rovnice.

$$668 + 2x = 2006$$

$$2x = 1338$$

$$x = 669$$

   Rovnice má jedno řešení, kterým je $P = \{669, 668\}$.

B) Dosazovací metodou

   Z první rovnice si vyjádříme x.

$$x + 2y = 2005 \Rightarrow x = 2005 - 2y$$

   Dosadíme do druhé rovnice za x.

$$y + 2\,.\,(2005 - 2y) = 2006$$

Dostáváme jednu rovnici, ve které se vyskytuje jen neznámá y. Danou rovnici vyřešíme a dostáváme y.

$$y + 4010 - 4y = 2006$$

$$2004 = 3y$$

$$y = 668$$

Nyní se vrátíme k vyjádřené neznámé x a dosadíme y.

$$x = 2005 - 2\,.\,668$$

$$x = 2005 - 1336$$

$$x = 669$$

Řešením dané soustavy rovnic je $P = \{669, 668\}$.

C) Pomocí Sylvesterovy matice

Rovnice si upravíme tak, že vše převedeme na levou stranu, aby na pravé straně zůstala jenom 0, a dané rovnice si označíme jako $f(x)$ a $g(x)$.

$$f(x) = x + 2y - 2005$$

$$g(x) = y + 2x - 2006$$

Poté si sestavíme Sylvesterovu matici a z ní uděláme determinant, který vypočítáme. Proměnou y nebudeme brát v úvahu. Budeme počítat pouze v jedné proměnné x.

$$\det\big(Syl(f,g)\big) = \begin{vmatrix} 1 & 2y - 2005 \\ 2 & y - 2006 \end{vmatrix} = y - 2006 - 4y + 4010 = -3y + 2004.$$

Nyní vypočítaný determinant položíme roven nule a tím vypočítáme neznámou y.

$$-3y + 2004 = 0$$

$$y = 668.$$

Teď nám již chybí vypočítat neznámou x. Zjistíme to dosazením neznámé y do jedné ze zadaných rovnic. To jsme již počítali v bodech za A) i za B) proto zde napíši už jen výsledek, který je $x = 669$.

Daná rovnice má jedno řešení, které je ve tvaru $P = \{669, 668\}$.

Výsledek se nám shoduje s tím, který jsme získali při řešení soustavy rovnic sčítací a dosazovací metodou. Ukážeme ještě jednu úlohu, při jejímž řešení by byl rezultant užitečný, a poté se budeme věnovat jeho užití při eliminaci proměnných.

Příklad 2.3.2:

Pro která reálná čísla p mají rovnice $x^2 - 2x + p = 1$ a $2x^2 - 3px = 2$ společný kořen?

Řešení:

Řešení pomocí rezultantu se dá použít i na řešení soustavy rovnic o jedné neznámé s parametrem. V našem případě je parametr p. Zapíšeme si obě rovnice v anulovaném tvaru a jejich levou stranu si označíme jako $f(x)$ a $g(x)$. Poté zapíšeme rezultant těchto polynomů vzhledem k x:

$$f(x) = x^2 - 2x + p - 1$$
$$g(x) = 2x^2 - 3px - 2.$$

Determinant Sylvesterovy matice:

$$\det\big(Syl(f,g)\big) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & p-1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & p-1 \\ 2 & -3p & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3p & -2 \end{vmatrix}$$

Determinant si můžeme upravit tak, že první řádek si vynásobíme číslem -2 a uděláme si ještě jeden krok, kdy přičteme ke třetímu řádku, řádek první a dostaneme determinant

$$\det\big(Syl(f,g)\big) = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -2p+2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & p-1 \\ 0 & 4-3p & -2p & 0 \\ 0 & 2 & -3p & -2 \end{vmatrix}$$

Nyní použijeme rozvoj podle prvního řádku a dostaneme determinant 3x3. V tuto chvíli nám již nic nebrání k tomu, abychom použili Sarrusovo pravidlo a dostaneme rovnici o jedné neznámé, v našem případě p.

$$\det\big(Syl(f,g)\big) = (-2).(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & p-1 \\ 4-3p & -2p & 0 \\ 2 & -3p & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 4p + (p-1).(-3p).(4-3p) - [2.(-2p).(p-1) + 4.(4-3p)]$$
$$= 4p + (4p - 3p^2 - 4 + 3p).(-3p) - [-4p^2 + 4p + 16 - 12p]$$
$$= 4p - 12p^2 + 9p^3 + 12p - 9p^2 + 4p^2 - 4p - 16 + 12p$$
$$= 9p^3 - 17p^2 + 24p - 16$$

Parametr p zjistíme, když daný polynom položíme rovný 0 a tuto rovnici upravíme do součinového tvaru. Můžeme si opět pomoci matematickým programem, kde zadáme příkaz $Factor$.

Získáme $(-1+p).(16 - 8p + 9p^2) = 0$. Odtud vidíme, že $p = 1$. Musíme ještě vyřešit kvadratickou rovnici $9p^2 - 8p + 16 = 0$. Rovnici vyřešíme pomocí diskriminantu D.

$$D = b^2 - 4ac$$

$D = 64 - 4.9.16 = -512$. Diskriminant nám vyšel záporný, to znamená, že neexistuje žádné reálné řešení.

Parametr $p = 1$ můžeme dosadit do našich rovnic, vyřešit je a dostaneme společný kořen.

Nejdříve dosadíme do první rovnice: $x^2 - 2x + 1 = 1$

Rovnici si upravíme a zjistíme, že jejím řešením je $x = 0$ a $x = 2$. Nyní si $p = 1$ dosadíme do druhé rovnice a získáme $2x^2 - 3x = 2$. Do této rovnice postupně dosadíme $x = 0$ a $x = 2$. Pouze pro $x = 2$ bude mít rovnice řešení, proto je $x = 2$ společný kořen rovnic $x^2 - 2x + p = 1$ a $2x^2 - 3px = 2$.

Příklad 2.3.3:

Řešte soustavu rovnic v oboru reálných čísel pomocí determinantu Sylvesterovy matice

$$x^2y^2 + x + y - 2 = 0$$
$$x + y - 2 = 0.$$

Řešení:

Nejdříve si dané rovnice označíme $f(x)$ a $g(x)$.

$$f(x) = x^2y^2 + x + y - 2$$
$$g(x) = x + y - 2.$$

Nyní sestrojíme Sylvesterovu matici. Polynomy $f(x)$ a $g(x)$ jsou pro nás jen v jedné proměnné a ne ve dvou proměnných $f(x, y)$ a $g(x, y)$. Proměnnou y nebudeme nyní brát jako proměnnou, ale jen jako parametr.

$$Syl(f, g) = \begin{pmatrix} y^2 & 1 & y-2 \\ 1 & y-2 & 0 \\ 0 & 1 & y-2 \end{pmatrix}$$

Z matice teď sestrojíme determinant, který vypočítáme.

$$\begin{vmatrix} y^2 & 1 & y-2 \\ 1 & y-2 & 0 \\ 0 & 1 & y-2 \end{vmatrix} = y^2.(y^2 - 4y + 4) + y - 2 - y + 2 = y^4 - 4y^3 + 4y^2$$

Rezultant je determinant Sylvesterovy matice, v tomto příkladě je rezultantem $y^4 - 4y^3 + 4y^2$. Neznámou y vypočítáme tak, že rezultant se bude rovnat nule, podle Sylvesterova kritéria.

Rezultant můžeme rozložit na součinový tvar.

$$y^4 - 4y^3 + 4y^2 = y^2.(y^2 - 4y + 4) = y^2.(y-2)^2$$

Nyní součinový tvar položíme roven nule a zjistíme příslušné hodnoty y.

$$y^2.(y-2)^2 = 0$$

Daná rovnice má dvě řešení.

$y_1 = 0$ a $y_2 = 2$

Když známe hodnoty y, můžeme y dosadit do jedné z původní rovnice. Já budu dosazovat do druhé rovnice, kterou jsme si označili jako $g(x)$.

$$y_1 = 0: x + 0 - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$y_2 = 2: x + 2 - 2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Řešením dané soustavy rovnic jsou dvě řešení $P = \{(2,0), (0,2)\}$.

Příklad 2.3.4: Řešte soustavu rovnic pomocí determinantu Sylvesterovy matice.

$$y + 3x = 4x^3$$

$$x + 3y = 4y^3.$$

Řešení:

Zadání příkladu jsem získala na stránkách matematické olympiády, konkrétně 61. ročník školního kola kategorie A.

Danou soustavu rovnic si upravíme, tak abychom všechno měli na levé straně a na pravé straně nám zůstala jen 0. Pak si dané polynomy na levé straně označíme jako $f(x)$ a $g(x)$.

$$f(x) = -4x^3 + 3x + y$$

$$g(x) = x + 3y - 4y^3.$$

Sestrojíme si determinant Sylvesterovy matice.

$$\det\left(Syl(f,g)\right) = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 3 & y \\ 1 & 3y - 4y^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3y - 4y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3y - 4y^3 \end{vmatrix}$$

Determinant upravíme tak, že si druhý řádek vynásobíme číslem 4 a přičteme jej k prvnímu řádku. Dostaneme determinant

$$\det\left(Syl(f,g)\right) = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 3 & y \\ 0 & 12y - 16y^3 & 3 & y \\ 0 & 1 & 3y - 4y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3y - 4y^3 \end{vmatrix}$$

Nyní použijeme rozvoj podle první sloupce tak, že vynecháme první řádek a první sloupec a vznikne nám matice řádu $n = 3$. A my můžeme k výpočtu determinantu použít Sarrusovo pravidlo.

$$\det(Syl(f,g)) = (-1)^{1+1}.(-4).\begin{vmatrix} 12y-16y^3 & 3 & y \\ 1 & 3y-4y^3 & 0 \\ 0 & 1 & 3y-4y^3 \end{vmatrix}$$

$$= -4.[(12y-16y^3).(3y-4y^3).(3y-4y^3) + y - 3.(3y-4y^3)]$$

$$= -4.[(12y-16y^3).(9y^2-24y^4+16y^6) + y - 9y + 12y^3]$$

$$= -4.[-256y^9 + 576y^7 - 432y^5 + 120y^3 - 8y]$$

$$= 1024y^9 - 2304y^7 + 1728y^5 - 480y^3 + 32y.$$

Výsledek zadáme do počítačového programu např. Mathematica a zadáme příkaz $Factor$, který nám výsledek determinantu dá do součinového tvaru.

$$32.(-1+y).y.(1+y).(-1+2y^2).(-1-2y+4y^2).(-1+2y+4y^2)$$

Daný součinový tvar položíme roven nule a dostaneme celkem devět řešení pro neznámou y. Konkrétně $y=0, y=\pm 1, y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y=\frac{1}{4}.(-1\pm\sqrt{5}), y=\frac{1}{4}.(1\pm\sqrt{5})$. Nejdříve si upravíme rovnici $x+3y=4y^3$ na tvar $x=y.(4y^2-3)$. Poté budeme do této rovnice dosazovat neznámou y.

a) $y=0$

$x = 0.(4.0-3) = 0.$

b) $y=1$

$x = 1.(4.1-3) = 1.$

c) $y=-1$

$x = -1.(4.1-3) = -1.$

d) $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}.\left(4.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\left(4.\frac{1}{2} - 3\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e) $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\left(4.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\left(4.\frac{1}{2} - 3\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

f) $y=\frac{1}{4}.(-1+\sqrt{5})$

$$\frac{1}{4}.(-1+\sqrt{5}).\left(4.\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2.(-1+\sqrt{5})^2 - 3\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right).\left(4.\frac{1}{16}.(1-2\sqrt{5}+5) - 3\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{4}-\frac{12}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}.\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{5}-3-5+\sqrt{5}}{8} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{1}{4}.\left(-1-\sqrt{5}\right)$$

g) $y = \frac{1}{4}.\left(-1-\sqrt{5}\right)$

$$\frac{1}{4}.\left(-1+\sqrt{5}\right).\left(4.\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2.\left(-1+\sqrt{5}\right)^2-3\right)\right)$$

Postup výpočtu bude stejný jako za f), změna bude jenom ve znaménku. Konečný výsledek je $x = \frac{1}{4}.\left(-1+\sqrt{5}\right)$.

$$P_7 = \left(\frac{1}{4}.\left(-1+\sqrt{5}\right), \frac{1}{4}.\left(-1-\sqrt{5}\right)\right)$$

h) $y = \frac{1}{4}.\left(1-\sqrt{5}\right)$

$$\frac{1}{4}.\left(1-\sqrt{5}\right).\left(4.\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2.\left(1-\sqrt{5}\right)^2-3\right)\right)$$

Po úpravě dostaneme výsledek $x = \frac{1}{4}.\left(1+\sqrt{5}\right)$.

i) $y = \frac{1}{4}.(1+\sqrt{5})$

$$\frac{1}{4}.\left(1-\sqrt{5}\right).\left(4.\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2.\left(1-\sqrt{5}\right)^2-3\right)\right)$$

Postup je opět podobný jako za f), výsledek se opět liší jen ve znaménku $x = \frac{1}{4}.\left(1+\sqrt{5}\right)$.

Řešením zadané soustavy rovnic je celkem devět řešení $P = \left\{(0,0), (1,1), (-1,-1), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{4}.\left(-1-\sqrt{5}\right), \frac{1}{4}.\left(-1+\sqrt{5}\right)\right), \left(\frac{1}{4}.\left(-1+\sqrt{5}\right), \frac{1}{4}.\left(-1-\sqrt{5}\right)\right) \left(\frac{1}{4}.\left(1+\sqrt{5}\right), \frac{1}{4}.\left(1-\sqrt{5}\right)\right), \left(\frac{1}{4}.\left(1-\sqrt{5}\right), \frac{1}{4}.\left(1+\sqrt{5}\right)\right)\right\}$.

Příklad 2.3.5: Určete všechna řešení soustavy rovnic pomocí rezultantu.

$$x^2y^2 + xy - y + 1 = 0$$

$$xy + y - 2 = 0.$$

Řešení:

Nejdříve se vytvoříme Sylvesterovu matici a uděláme determinant Sylvesterovy matice, který vyřešíme.

$$\begin{vmatrix} y^2 & y & -y+1 \\ y & y-2 & 0 \\ 0 & y & y-2 \end{vmatrix} = y^2.(y-2)^2 + y^2.(-y+1) - y^2.(y-2) =$$

$$= y^4 - 4y^3 + 4y^2 - 2y^3 + 3y^2 = y^4 - 6y^3 + 7y^2$$

Příkazem $Factor$ budeme mít determinant Sylvesterovy matice v součinovém tvaru. A pak příkazem $Solve$ zjistíme konkrétní hodnoty pro y. Pokud zadáváme příkaz $Solve$, nesmíme zapomenout, že musíme zadat dvakrát = a pak hodnotu, kterou chceme vyřešit.

$Factor[y\string^4 - 6y\string^3 + 7y\string^2]$

$$y^2(7 - 6y + y^2)$$

Solve$[y^2(7 - 6y + y^2) == 0, y]$

$$\{\{y \to 0\}, \{y \to 0\}, \{y \to 3 - \sqrt{2}\}, \{y \to 3 + \sqrt{2}\}\}$$

Po upravení můžeme vypočítat neznámou y. Dostaneme tři řešení ve tvaru $y_1 = 0, y_2 = 3 - \sqrt{3}, y_3 = 3 + \sqrt{3}$. Nyní dosadíme neznámou y do jedné ze zadaných rovnic. Já dosadím do lineární rovnice a tím dostaneme neznámou x.

$y_1 = 0$:

$$0.x + 0 - 2 = 0$$

$$-2 = 0$$

Když dosadíme $y = 0$, pak soustava rovnic nemá řešení.

$$y_2 = 3 - \sqrt{2}:$$

$$(3 - \sqrt{2}).x + 3 - \sqrt{2} - 2 = 0$$

$$(3 - \sqrt{2}).x = \sqrt{2} - 1$$

$$x = \frac{\sqrt{2} - 1}{3 - \sqrt{2}}$$

Dané řešení si ještě můžeme rozšířit, abychom neměli ve jmenovateli odmocninu.

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{3 - \sqrt{2}} \cdot \frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 3 + 2 - \sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{7}$$

$$y_3 = 3 + \sqrt{2}:$$
$$(3 + \sqrt{2}).x + 3 + \sqrt{2} - 2 = 0$$
$$x = \frac{-\sqrt{2} - 1}{3 + \sqrt{2}}$$

Zlomek vyjadřující neznámou x si můžeme opět usměrnit, aby se nám ve jmenovateli nevyskytovala odmocnina.

$$\frac{-\sqrt{2} - 1}{3 + \sqrt{2}} \cdot \frac{3 - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2} - 3 + 2 + \sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{7}$$

Řešením dané soustavy rovnic jsou dvě řešení

$$P = \left\{ \left(\frac{-1 - 2\sqrt{2}}{7}, 3 + \sqrt{2} \right), \left(\frac{-1 + 2\sqrt{2}}{7}, 3 - \sqrt{2} \right) \right\}.$$

Příklad 2.3.6: Určete všechna řešení soustavy rovnic pomocí rezultantu.

$$x^2y - 2x = 1$$
$$y^2x - 2y = 1.$$

Řešení:

Jako první si upravíme danou soustavu tak, že si vše převedeme na jednu stranu rovnice. Poté si dané rovnice označíme jako $f(x)$ a $g(x)$.

$$f(x) = x^2y - 2x - 1$$
$$g(x) = y^2x - 2y - 1.$$

Sestrojíme si determinant Sylvesterovy rovnice a vypočítáme jej. Proměnou y nyní nebudeme brát jako proměnou.

$$\begin{vmatrix} y & -2 & -1 \\ y^2 & -2y - 1 & 0 \\ 0 & y^2 & -2y - 1 \end{vmatrix} = y.(-2y - 1)^2 - y^4 - y^2.(-2).(-2y - 1)$$
$$= y.(4y^2 + 4y + 1) - y^4 + 2y^2.(-2y - 1)$$
$$= 4y^3 + 4y^2 + y - y^4 - 4y^3 - 2y^2 = -y^4 + 2y^2 + y$$

Determinant Sylvesterovy matice má tvar $-y^4 + 2y^2 + y$, abychom vypočítali neznámou y, rozložíme daný determinant na součinový tvar a pak jej položíme roven 0.

$$-y^4 + 2y^2 + y = -y.(y^3 - 2y - 1) = -y.(1 + y).(-1 - y + y^2)$$

Našli jsme neznámou y, která má čtyři řešení$y = 0, y = -1, y = \frac{1}{2}.(1 \pm \sqrt{5})$. Nyní tyto řešení dosadíme do jedné ze zadané rovnice a zjistíme neznámou x.

a) $y = 0$: Budu dosazovat do první rovnice $x^2y - 2x = 1$.

$$x^2.0 - 2x = 1$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

b) $y = -1$: Hodnotu dosadíme opět do první rovnice $x^2y - 2x = 1$.

$$x^2.(-1) - 2x = 1$$

$$-x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Vznikla nám kvadratická rovnice, kterou vyřešíme pomocí diskriminantu $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$. Diskriminant vyšel roven 0, to znamená, že rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$.

c) $y = \frac{1}{2}.(1 + \sqrt{5})$: Daný výraz tentokrát dosadíme do druhé rovnice $y^2x - 2y = 1$, ze které se nám bude lépe vyjadřovat x.

$$\left(\frac{1}{2}.(1+\sqrt{5})\right)^2 x - 2.\left(\frac{1}{2}.(1+\sqrt{5})\right) = 1$$

$$\frac{1}{4}.(1 + 2\sqrt{5} + 5).x - \sqrt{5} = 1 + 1$$

$$\frac{2.(3+\sqrt{5})}{4}.x - \sqrt{5} = 2$$

$$\frac{(3+\sqrt{5})}{2}.x = 2 + \sqrt{5}$$

$$(3+\sqrt{5}).x = 4 + 2\sqrt{5}$$

$$x = \frac{4+2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

Zjistili jsme neznámou x, někdo by ale mohl namítat, že se mu nelíbí odmocnina ve jmenovateli. Z tohoto důvodu si výsledek ještě upravíme do konečné podoby tak, že si daný výsledek usměrníme, abychom neměli odmocninu ve jmenovateli.

$$x = \frac{4+2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{12 + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 10}{9-5} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Nyní již máme konečný výsledek.

d) $y = \frac{1}{2}.(1 - \sqrt{5})$: Hodnotu y budu dosazovat do druhé rovnice $y^2x - 2y = 1$.

$$\left(\frac{1}{2}.(1-\sqrt{5})\right)^2 x - 2.\left(\frac{1}{2}.(1-\sqrt{5})\right) = 1$$

$$\frac{1}{4}.(1 - 2\sqrt{5} + 5).x + \sqrt{5} = 1 + 1$$

$$\frac{2.(3-\sqrt{5})}{4}.x+\sqrt{5}=2$$

$$\frac{(3-\sqrt{5})}{2}.x=2-\sqrt{5}$$

$$\left(3-\sqrt{5}\right).x=4-2\sqrt{5}$$

$$x=\frac{4-2\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

Stejně jako v předchozím případě i zde si zlomek usměrníme, abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli.

$$x=\frac{4-2\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}.\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{12-6\sqrt{5}+4\sqrt{5}-10}{9-5}=\frac{2-2\sqrt{5}}{4}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Řešením dané soustavy rovnice jsou celkem čtyři a to

$$P=\left\{\left(-\frac{1}{2},0\right),(-1,-1),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

2.4 Výpočet Sylvesterovy matice pomocí počítačového programu

Sylvesterova matice se dá počítat i pomocí počítačových programů. Já zde ukážu výpočet v matematickém programu Maple.

Příklad 2.4.1:

Řešte soustavu rovnic v oboru reálných čísel pomocí determinantu Sylvesterovy matice s využitím počítačového programu.

$$x^2y^2+x+y-2=0$$

$$x+y-2=0.$$

Řešení:

Použili jsme soustavu rovnic v příkladě 2.3.3 a budeme zjišťovat, zda se výsledky budou shodovat.

Nejdříve si musíme jednotlivé rovnice soustavy označit. Já si je označím jako $f\ =\ x^2y^2+x+y-2$ a $g\ =x+y-2$. Stejně tak si je označíme i v programu. Pozor na to, že musíme před znak "=" vždy dát znak ":", jinak nám to nebude fungovat.

```
> f := x^2·y^2 + x + y − 2
```

$$f:=x^2y^2+x+y-2$$

```
> g := x + y − 2
```

$$g:=x+y-2$$

Nyní si v programu vytvoříme Sylvesterovu matici příkazem:

$>Syl := LinearAlgebra[SylvesterMatrix](f, g, x)$

$$Syl := \begin{bmatrix} y^2 & 1 & -2+y \\ 1 & -2+y & 0 \\ 0 & 1 & -2+y \end{bmatrix}$$

Sylvesterova matice se nám shoduje s naší vytvořenou maticí v příkladě 2.3.3. My jsme v zadání měli dvě proměnné, ale stejně jako u našeho počítání, tak i do programu musíme zadat, jakou chceme proměnnou. Proto je v příkazu i x.

Nyní si vypočítáme determinant Sylvesterovy matice tzv. rezultant, který zjistíme příkazem:

$>Rezultant1 := linalg[det](Syl)$

$$Rezultant1 := y^2\,(-2+y)^2$$

Rezultant se přesně neshoduje s tím, co jsme vypočítali my. Je to proto, že zde je již rezultant zapsán v součinovém tvaru, ke kterému jsme se i my úpravou dostali. V programu Maple existuje přímo příkaz pro rezultant, který budeme používat. Příkaz v programu vypadá takto:

$>Rezultant := resultant(f, g, x)$

$$Rezultant := y^4 - 4\,y^3 + 4\,y^2$$

Vzniklý rezultant se nám shoduje s tím, co jsme vypočítali. Pomocí příkazu $Solve$, zjistíme kořeny vzniklého rezultantu. Jsou uvedeny i s násobností.

$>Reseniy := solve(Rezultant1, \{y\})$

$$Reseniy := \{y=0\}, \{y=0\}, \{y=2\}, \{y=2\}$$

My budeme $y = 0$ a $y = 2$ brát jenom jednou. Pak se nám řešení shodují opět s tím, co jsme vypočítali bez použití počítače. Kdybychom dosadili za x, dostaneme stejné řešení soustavy rovnic, ke kterému jsme došli v příkladě 2.3.3.

Příklad 2.4.2:

Řešte soustavu rovnic v oboru reálných čísel pomocí determinantu Sylvesterovy matice s využitím počítačového programu.

$$y + 3x = 4x^3$$
$$x + 3y = 4y^3.$$

Řešení:

Zadání jsme použili z příkladu 2.3.4. Nejdříve si dané rovnice upravíme tak, aby bylo vše na levé straně.

$$y + 3x - 4x^3 = 0$$
$$x + 3y - 4y^3 = 0.$$

Nyní si takto upravenou soustavu rovnic označíme $f = y + 3x - 4x^3$ a $g = x + 3y - 4y^3$.

Zadáme do počítačového programu příkaz:

$>f := -4x\verb|^|3 + 3x + y$

$$f := -4x^3 + 3x + y$$

$>g := x + 3y - 4y\verb|^|3$

$$g := -4y^3 + x + 3y$$

Nyní si vytvoříme Sylvesterovu matici příkazem:

$>Syl := LinearAlgebra[SylvesterMatrix](f, g, x)$

$$Syl := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & y \\ 1 & -4y^3 + 3y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4y^3 + 3y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4y^3 + 3y \end{bmatrix}$$

Vidíme, že Sylvesterova matice se nám shoduje s naší maticí v příkladě 2.3.4. Nyní příkazem vypočítáme rezultant Sylvestrovy matice.

$>Rezultant := resultant(f, g, x)$

$$Rezultant := 256y^9 - 576y^7 + 432y^5 - 120y^3 + 8y$$

$>Reseniy := solve(Rezultant, \{y\})$

$$Reseniy := \{y = 0\}, \{y = 1\}, \{y = -1\}, \left\{y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}, \left\{y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}, \left\{y = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\right\}, \left\{y = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\right\}, \left\{y = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\right\}, \left\{y = -\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\right\}$$

Příklad 2.4.3:

Pomocí počítačového programu řešte soustavu rovnic s využitím Sylvesterovy matice.

$$x^2y^2 + xy - y + 1 = 0$$
$$xy + y - 2 = 0.$$

Řešení:

Využili jsme zadání příkladu 2.3.5. Nyní si musíme opět označit f a g, a zadat to do programu.

$>f := x\verb|^|2\cdot y\verb|^|2 + x\cdot y - y + 1$

$$f := x^2 y^2 + xy - y + 1$$

$>g := x\cdot y + y - 2$

$$g := xy + y - 2$$

Nyní si vytvoříme Sylvestrovu matici stejným příkaz, jako v předchozích příkladech.

$>Syl := LinearAlgebra[SylvesterMatrix](f, g, x)$

$$Syl := \begin{bmatrix} y^2 & y & -y+1 \\ y & -2+y & 0 \\ 0 & y & -2+y \end{bmatrix}$$

Teď když máme vytvořenou matici, si vypočítáme rezultant, opět již známým příkazem.

$>Rezultant := resultant(f, g, x)$

$$Rezultant := y^4 - 6y^3 + 7y^2$$

Rezultant se nám shoduje s tím, co jsme vypočítali v příkladě 2.3.5.

Zjistili bychom y a dosadili ho do jedné ze zadané soustavy rovnic a tím by nám vyšla neznámáx. Výsledek by se nám shodoval s tím, co jsme vypočítali v příkladě 2.3.5, proto to zde již nebudeme znovu počítat.

Příklad 2.4.4:

Pomocí rezultantu určete všechna řešení soustavy rovnic s využitím počítačového programu.

$$x^2y - 2x = 1$$
$$y^2x - 2y = 1.$$

Řešení:

Použili jsme příklad 2.3.6. Nejdříve si musíme všechno převést na jednu stranu a pak označit $f(x)$ a $g(x)$.

$>f := x\verb|^|2\cdot y - 2x - 1$

$$f := x^2 y - 2x - 1$$

$>g := y\verb|^|2\cdot x - 2y - 1$

$$g := xy^2 - 2y - 1$$

Sestavíme si Sylvesterovu matici příkazem:

$>Syl := LinearAlgebra[SylvesterMatrix](f, g, x)$

$$Syl := \begin{bmatrix} y & -2 & -1 \\ y^2 & -2y-1 & 0 \\ 0 & y^2 & -2y-1 \end{bmatrix}$$

Nyní vypočítáme rezultant.

$>Rezultant := resultant(f, g, x)$

$$Rezultant := -y^4 + 2y^2 + y$$

Rezultant se nám shoduje s tím, co jsme vypočítali v příkladě 2.3.6. Teď už nám chybí vypočítat konkrétní hodnoty pro y, což uděláme příkazem $solve$.

$>Reseniy := solve(Rezultant, \{y\})$

$$Reseniy := \{y=0\}, \{y=-1\}, \left\{y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right\}, \left\{y=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right\}$$

Když z výrazů $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ vytkneme $\frac{1}{2}$ před závorku, dostaneme řešení $y = \frac{1}{2}.\left(1-\sqrt{5}\right)$. Pokud to samé uděláme i u $y = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, řešení se nám shoduje s řešením v příkladě 2.3.6. Opět bychom mohli y dosadit do jedné ze zadaných rovnic a zjistili bychom hodnoty x.

3 Gröbnerovy báze

V této kapitole připomenu Gröbnerovy báze, kterým jsem se věnovala ve své bakalářské práci. Uvedu zde definici Gröbnerových bází a dále několik příkladů. Jeden příklad vypočtu bez použití počítače, ale protože toto počítání je velmi časově náročné, používají se různé programy, které nám práci velmi usnadní. Gröbnerovy báze můžeme počítat například v programu Maple nebo Mathematica. Ve své bakalářské práci jsem pracovala v programu Maple, proto zde ukážu řešení jak v programu Maple tak v programu Mathematica. Také v této kapitole připomenu využití programu Maple i na pomocné výpočty, jako je výpočet S-polynomu a normálního tvaru polynomu.
Veškeré definice a věty jsou převzaty z [2].

Definice 3.1.: Gröbnerova báze
Nechť v oboru integrity F$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je zavedeno přípustné uspořádání $<_T$. Báze $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$ ideálu I se nazývá Gröbnerovou bází, právě když normální formy polynomů modulo G jsou určeny jednoznačně, tzn., že ∀ f ϵ F$[x_1, x_2, \ \ldots, x_n]$ platí: je-li g = normalf (f, G) a h = normalf (f, G), pak g = h.

V definici používáme termín báze ideálu, proto si zde uvedeme i definici báze ideálu.
Definice 3.2.: Báze ideálu
Nechť I je ideál komutativního okruhu R. Množina $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ prvků tohoto okruhu se nazývá bází ideálu I, jestliže $i = \sum_{j=1}^{n} a_j r_j$, kde r_j ϵ R pro j = 1, 2, …, n. Píšeme $I = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

Věta 3.1.
Nechť v oboru integrity F$[x_1, x_2, \cdots x_n]$ je zavedeno přípustné uspořádání termů $<_T$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

a) $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$ je Gröbnerovou bází.
b) Pro všechny prvky g ideálu $\langle G \rangle$ je normalf (g, G) = 0.
c) Pro všechny f, g ϵ G je normalf (Spoly (f, g)) = 0.

Nyní budeme počítat soustavu rovnic řešenou pomocí Gröbnerových bází bez použití počítačového programu. Abychom ale mohli danou soustavu řešit, musíme si zde ještě říci některé pojmy. Budeme potřebovat připomenout několik definic.

Definice 3.3.: Lexikografické uspořádání termů

(Čisté) lexikografické uspořádání termů $<_L$ je definováno takto:

$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} <_L x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$, právě když existuje $m \in$ N takové, že $i_m < j_m$ a zároveň $i_k = j_k$ pro $k \in \{1, 2, \dots, m\text{-}1\}$.

Definice 3.4:

Nechť $f \in \mathrm{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je polynom a $<_T$ přípustné uspořádání termů z množiny $\mathrm{T}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Každý z monomů vyskytujících se v polynomu f je součinem jistého prvku z tělesa F a jistého termu z množiny $\mathrm{T}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Největší z termů vyskytujících se v polynomu f nazveme vedoucím termem polynomu f a budeme jej značit $lt_T(f)$. Příslušný monom nazveme vedoucím monomem polynomu f a označíme $lm_T(f)$ a koeficient z tělesa F v tomto monomu se vyskytující nazveme vedoucím koeficientem polynomu f a budeme jej značit $lc_T(f)$. Platí tedy $lm_T(f) = lc_T(f).\ lt_T(f)$. Pokud je zřejmé, jaké přípustné uspořádání termů $<_T$ je v dané situaci užito, píšeme prostě jen $lt\ (f), lm\ (f), lc\ (f)$.

Definice 3.5: S-polynom

Nechť p, q jsou dva polynomy z oboru integrity $\mathrm{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, na němž je zavedeno přípustné uspořádání termů $<_T$. S-polynomem polynomů p, q nazýváme polynom $\mathrm{Spoly}(p, q) = lcm\ \big(lm_T(p), lm_T(q)\big).\Big(\frac{p}{lm_T(p)} - \frac{q}{lm_T(q)}\Big)$.

Kde lcm je nejmenší společný násobek prvků a lm_T je vedoucí monom polynomu.

Definice 3.6: Normální tvar polynomu

Je-li p normální tvar polynomu f vzhledem ke Q, tj. je-li p polynom, získaný z f provedením konečného počtu redukcí, přičemž p již neobsahuje žádný monom, který by byl dělitelný vedoucími monomy polynomů z množiny Q, pak píšeme p = normalf (f, Q). Je-li speciálně Q = $\{q\}$ jednoprvková množina, píšeme pouze p = normalf (f, q).

Definice 3.7: Redukovaná a monická Gröbnerova báze

Řekneme, že Gröbnerova báze G ideálu je redukovaná, jestliže pro všechny polynomy $g \in G$ je $g = normalf\ (g, G - \{g\})$. Dále řekneme, že Gröbnerova báze G je monická, jestliže pro všechny $g \in G$ je $lc(g) = 1$.

Příklad 3.1:

Použijeme příklad 2.3.4. Pomocí Gröbnerovy báze řešte soustavu rovnic

$$y + 3x = 4x^3$$

$$x + 3y = 4y^3.$$

Řešení:

Použili jsme soustavu rovnic řešenou v příkladu 2.3.4. Danou soustavu zatím vyřešíme bez použití počítačového programu.

Dané rovnice si lexikograficky uspořádáme (pokud $x > y$) a upravíme tak, aby na pravé straně jsme dostali 0 a vše ostatní bylo na levé straně.

$$-4x^3 + 3x + y = 0$$

$$x - 4y^3 + 3y = 0.$$

Nejdříve si určíme nejmenší společný násobek $lcm(-4x^3, x) = -4x^3$.

Označíme si polynom $g_1 = -4x^3 + 3x + y$ a $g_2 = x - 4y^3 + 3y$. Tím jsme získali množinu G, kterou tvoří polynomy g_1 a g_2.

Vypočítáme si S-polynom polynomů g_1, g_2.

$$Spoly\ (g_1, g_2) = -4x^3 . \left(\frac{g_1}{-4x^3} - \frac{g_2}{x}\right) = g_1 + 4x^2 g_2$$

$$= -4x^3 + 3x + y + 4x^2 . (x - 4y^3 + 3y) = -16x^2y^2 + 12x^2y + 3x + y$$

Nyní si vypočítáme normální tvar S-polynomu

$-16x^2y^2 + 12x^2y + 3x + y + 16xy^3 . g_2$

$= -16x^2y^3 + 12x^2y + 3x + y + 16x^2y^3 - 64xy^6 + 48xy^4$

$= 12x^2y - 64xy^6 + 48xy^4 + 3x + y - 12xy. g_2$

$= 12x^2y - 64xy^6 + 48xy^4 + 3x + y - 12x^2y + 48xy^4 - 36xy^2$

$= -64xy^6 + 96xy^4 - 36xy^2 + 3x + y + 64y^6. g_2$

$= -64xy^6 + 96xy^4 - 36xy^2 + 3x + y - 64xy^6 - 256y^9 + 192y^7 - 96y^4 . g_2$

$= 96xy^4 - 36xy^2 + 3x + y - 256y^9 + 192y^7 - 96xy^4 + 384y^7 - 288y^5 + 36y^2. g_2$

$= -36xy^2 + 3x + y - 256y^9 + 192y^7 + 384y^7 - 288y^5 + 36xy^2 - 144y^5 + 108y^3$

$= 3x + y - 256y^9 + 576y^7 - 432y^5 + 108y^3 - 3. g_2$

$= 3x + y - 256y^9 + 576y^7 - 432y^5 + 108y^3 - 3x + 12y^3 - 9y$

$= -256y^9 + 576y^7 - 432y^5 + 120y^3 - 8y = h$

Tento polynom již nelze redukovat, proto si ho označíme g_3 a přidáme do množiny G, kterou teď tvoří tři polynomy (g_1, g_2, g_3).

Nyní si musíme vypočítat S-polynom polynomů g_1 a g_3. Určit normální tvar tohoto S-polynomu. Pak ještě vypočítat S-polynom polynomů g_2 a g_3 a také určit normální tvar. Abychom si mohli vypočítat S-polynom polynomů g_1 a g_3, musíme si nejdříve určit nejmenší společný násobek $lcm(-4x^3, -256y^9) = -256x^3y^9$. Nesmíme zapomínat na to, abychom dané polynomy měli vždy lexikograficky uspořádané (pokud $x > y$).

$$Spoly(g_1, g_3) = -256x^3y^9.\left(-\frac{g_1}{-4x^3} + \frac{g_3}{-256y^9}\right) = -64y^9.g_1 + x^3.g_3$$
$$= 256x^3y^9 - 192xy^9 - 64y^{10} - 256x^3y^9 + 576x^3y^7 - 432x^3y^5 + 120x^3y^3$$
$$- 8x^3 = 576x^3y^7 - 432x^3y^5 + 120x^3y^3 - 8x^3y - 192xy^9 - 64y^{10}$$

Normální tvar

$576x^3y^7 - 432x^3y^5 + 120x^3y^3 - 8x^3y - 192xy^9 - 64y^{10} + 144y^7 - g_1$
$= 576x^3y^7 - 432x^3y^5 + 120x^3y^3 - 8x^3y - 192xy^9 - 64y^{10} - 576x^3y^7 + 432xy^7$
$+144y^8 = -432x^3y^5 + 120x^3y^3 - 8x^3y - 192xy^9 + 432xy^7 - 64y^{10} + 144y^8$
$-108y^5.g_1 = -432x^3y^5 + 120x^3y^3 - 8x^3y - 192xy^9 + 432xy^7 - 64y^{10} + 144y^8$
$+432x^3y^5 - 324xy^5 - 108y^6 = 120x^3y^3 - 8x^3y - 192xy^9 + 432xy^7 - 324xy^5$
$-64y^{10} + 144y^8 - 108y^6 + 30y^3.g_1 = 120x^3y^3 - 8x^3y - 192xy^9 + 432xy^7$
$-324xy^5 - 64y^{10} + 144y^8 - 108y^6 - 120x^3y^3 + 90xy^3 + 30y^4$
$= -8x^3y - 192xy^9 + 432xy^7 - 324xy^5 + 90xy^3 - 64y^{10} + 144y^8 - 108y^6$
$+230y^4 - 2y.g_1 = -8x^3y - 192xy^9 + 432xy^7 - 324xy^5 + 90xy^3 -$
$64y^{10} + 144y^8 - 108y^6 + 30y^4 + 8x^3y - 6xy - 2y^2$
$= -192xy^9 + 432xy^7 - 324xy^5 + 90xy^3 - 64y^{10} + 144y^8 - 108y^6 + 30y^4 - 6xy$
$-2y^2 + 192y^9.g_2 = -192xy^9 + 432xy^7 - 324xy^5 + 90xy^3 - 64y^{10} + 144y^8$
$-108y^6 + 30y^4 - 6xy - 2y^2 + 192xy^9 - 768y^{12} + 576y^{10} = 432xy^7 - 324xy^5$
$+90xy^3 - 768y^{12} + 512y^{10} + 144y^8 - 108y^6 + 30y^4 - 6xy - 2y^2 - 432y^7.g_2$
$= 432xy^7 - 324xy^5 + 90xy^3 - 6xy - 768y^{12} + 512y^{10} + 144y^8 - 108y^6 + 30y^4$
$-2y^2 - 432xy^7 + 1728y^{10} - 1296 = -324xy^5 + 90xy^3 - 6xy - 768y^{12} + 2240y^{10}$
$-1152y^8 - 108y^6 + 30y^4 - 2y^2 + 324y^5.g_2 = -324xy^5 + 90xy^3 - 6xy - 768y^{12}$
$+2240y^{10} - 1152y^8 + 30y^4 - 2y^2 + 324xy^5 - 1296y^8 + 972y^6 = 90xy^3 - 6xy$
$-768y^{12} + 2240y^{10} - 2448y^8 + 864y^6 + 30y^4 - 2y^2 - 90y^3.g_2 = 90xy^3 -$
$6xy - 768y^{12} + 2240y^{10} - 2448y^8 + 864y^6 + 30y^4 - 2y^2 - 90xy^3 + 360y^6$
$-270y^4 = -6xy - 768y^{12} - 2240y^{10} - 2448y^8 + 1224y^6 - 240y^4 - 2y^2 + 6y.g_2$
$= -6xy - 768y^{12} - 2240y^{10} - 2448y^8 + 1224y^6 - 240y^4 - 2y^2 + 6xy - 24y^4$
$+18y^2 = -768y^{12} + 2240y^{10} - 2448y^8 + 1224y^6 - 264y^4 + 16y^2 - 3y^3.g_3$
$= -768y^{12} + 2240y^{10} - 2448y^8 + 1224y^6 - 264y^4 + 16y^2 + 768y^{12} - 1728y^{10}$
$+1296y^8 - 360y^6 + 24y^4 = 512y^{10} - 1152y^8 + 864y^6 - 240y^4 + 16y^2 + 2y.g_3$
$= 512y^{10} - 1152y^8 + 864y^6 - 240y^4 + 16y^2 - 512y^{10} + 1152y^8 - 864y^6 + 240y^4$
$-16y^2 = 0$

Zatím jsme si vypočítali jenom S-polynom polynomů g_1 a g_3 a normální tvar tohoto polynomy. Teď nám ještě chybí vypočítat S-polynom polynomů g_2 a g_3 a určit normální tvar.

Nejdříve si musíme určit nejmenší společný násobek $lcm(x, -256y^9) = -256xy^9$. Nesmíme opět zapomenout na uspořádání. Dané polynomy musí být opět lexikograficky uspořádané (pokud $x > y$).

$$Spoly(g_2, g_3) = -256xy^9.\left(\frac{g_2}{x} - \frac{g_3}{-256y^9}\right) = -256y^9.g_2 - x.g_3$$

$$= -256y^9.(x - 4y^3 + 3y) - x.(-256y^9 + 576y^7 - 432y^5 + 120y^3 - 8y)$$

$$= -256xy^9 + 1024y^{12} - 768y^{10} + 256xy^9 - 576y^7 + 432xy^5 - 120xy^3 + 8xy$$

Nyní si vypočítáme normální tvar vzniklého S-polynomu.

$$-576xy^7 + 432xy^5 - 120xy^3 + 8xy + 1024y^{12} - 768y^{10} + 576y^7.g_2$$

$$= -576xy^7 + 432xy^5 - 120xy^3 + 8xy + 1024y^{12} - 768y^{10} + 576xy^7 - 2304y^{10}$$

$$+1728y^8 = 432xy^5 - 120xy^3 + 8xy + 1024y^{12} - 3072y^{10} + 1728y^8 - 432.g_2$$

$$= 432xy^5 - 120xy^3 + 8xy + 1024y^{12} - 3072y^{10} + 1728y^8 - 432xy^5 + 1728y^8$$

$$-1296y^6 = -120xy^3 + 8xy + 1024y^{12} - 3072y^{10} + 3456y^8 - 1296y^6 + 120y^3.g_2$$

$$= -120xy^3 + 8xy + 1024y^{12} - 3072y^{10} + 3456y^8 - 1296y^6 + 120xy^3 - 480y^6$$

$$+360y^4 = 8xy + 1024y^{12} - 3072y^{10} + 3456y^8 - 1776y^6 + 360y^4 - 8y.g_2$$

$$= 8xy + 1024y^{12} - 3072y^{10} + 3456y^8 - 1776y^6 + 360y^4 - 8xy + 32y^4 - 24y^2$$

$$= 1024y^{12} - 3072y^{10} + 3456y^8 - 1776y^6 + 392y^4 - 24y^2 + 4y^3.g_3$$

$$= 1024y^{12} - 3072y^{10} + 3456y^8 - 1776y^6 + 392y^4 - 24y^2 - 1024y^{12} + 2304y^{10}$$

$$-1728y^8 + 480y^6 - 32y^4 = -768y^{10} + 1728y^8 - 1296y^6 + 360y^4 - 24y^2 - 3y.g_3$$

$$= -768y^{10} + 1728y^8 - 1296y^6 + 360y^4 - 24y^2 + 768y^{10} - 1728y^8 + 1296y^6$$

$$-360y^4 + 24y^2 = 0$$

Poznámka:

Vyšla nám 0, proto již nebudeme pokračovat dále. Kdyby nám zde vyšel polynom, který by již nešel redukovat, museli bychom ho označit g_4 a přidat do množiny G, kterou by tvořili polynomy g_1, g_2, g_3 a g_4. Dále bychom museli spočítat S-polynomy polynomů g_1, g_4, polynomů g_2, g_4 a polynomů g_3, g_4. Kromě toho bychom vypočítali normální tvary těchto S-polynomů.

Nyní se ale vraťme k našemu příkladu. Dostali jsme Gröbnerovu bázi, kterou tvoří tři polynomy g_1, g_2, g_3. To ale ještě není konečný výsledek. Kdybyste si zkusili vypočítat Gröbnerovu bázi zadané soustavy v počítačovém programu, dostali byste jiný výsledek. Je to proto, že v počítačovém programu vyjde Gröbnerova báze v monickém a redukovaném tvaru. My si nyní naší vzniklou Gröbnerovu bázi upravíme, aby byla také v monickém a redukovaném tvaru.

Množina $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ je Gröbnerovou bází, kterou tvoří polynomy: $g_1 = -4x^3 + 3x + y$, $g_2 = x - 4y^3 + 3y$ a $g_3 = -256y^9 + 576y^7 - 432y^5 + 120y^3 - 8y$. Nyní ověříme, zda nějaký term polynomu g_1 náleží ideálu $\langle lt(G - \{g_1\})\rangle$. Vidíme, že term x^3 je dělitelný vedoucím termem polynomu g_3 a platí tedy, že $x^3 \in \langle lt(G - \{g_1\})\rangle$. Polynom g_1 nepatří do redukované Gröbnerovy báze, a proto ji můžeme z množiny G odebrat. Stejným způsobem ověříme i polynomy g_2 a g_3. Zjistíme, že polynomy g_2 a g_3 patří do redukované Gröbnerovy báze. Gröbnerovu bázi nyní tvoří polynomyg_2 a g_3 a jejich násobky. Daná báze zatím ještě není v monickém tvaru. Taková báze je ta báze, která má u vedoucího termu koeficient 1.

Redukovaná a monická Gröbnerova báze má tvar

$$g_2 = x - 4y^3 + 3y$$

$$g_3 = y^9 - \frac{9}{4}y^7 + \frac{27}{16}y^5 - \frac{15}{32}y^3 + \frac{1}{32}y$$

Původní soustavu rovnic

$$y + 3x = 4x^3$$

$$x + 3y = 4y^3$$

můžeme přepsat do tvaru

$$x - 4y^3 + 3y = 0$$

$$32y^9 - 72y^7 + 54y^5 - 15y^3 + y = 0.$$

Soustavu nemáme v monickém tvaru záměrně, protože v monickém tvaru by se špatně počítala.

Vidíme, že tento postup je velmi zdlouhavý a časově náročný. S rozvojem počítačů proto byly snahy výpočtu Gröbnerových bází pomocí počítačového programu. Teď si ukážeme několik příkladů, které budeme počítat ve dvou matematických programech a to v Mathematica a Maple. V programu Maple můžeme počítat i jednotlivé mezikroky výpočtu Gröbnerových bází a to normálního tvaru polynomu a S-polynomu, jejichž výpočet pomocí počítače ukážu na příkladu, který jsme si spočítali mechanicky s použitím tužky a papíru.

Nyní se tedy ověříme naše výsledky pomocí počítačových programů.

1) V programu Maple

$with(Groebner):$
$G := [-4x^3 + 3x + y, x - 4y^3 + 3y]$
$$G := [-4x^3 + 3x + y, -4y^3 + x + 3y]$$
$Basis(G, plex(x, y))$
$$[32y^9 - 72y^7 + 54y^5 - 15y^3 + y, -4y^3 + x + 3y]$$

Nyní si ukážeme, jak pomocí programu spočítat S-polynom.

Vypočítáme si S-polynom polynomů g_1 a g_2.

$with(Groebner):$
$f := -4x\verb|^|3 + 3x + y$
$$f := -4x^3 + 3x + y$$
$g := x - 4y\verb|^|3 + 3y$
$$g := -4y^3 + x + 3y$$
$SPolynomial(f, g, plex(x, y))$
$$-16x^2y^3 + 12x^2y + 3x + y$$

Dále si můžeme vypočítat normální tvar S-polynomu polynomů g_1 a g_2.

$F := -16x^2y^3 + 12x^2y + 3x + y$
$$F := -16x^2y^3 + 12x^2y + 3x + y$$
$G := [-4x^3 + 3x + y, x - 4y^3 + 3y]$
$$G := [-4x^3 + 3x + y, -4y^3 + x + 3y]$$
$NormalForm(F, G, plex(x, y))$
$$-256y^9 + 576y^7 - 432y^5 + 120y^3 - 8y$$

Ukázali jsme si, jak zkontrolovat postupné výpočty. Nyní si zde ještě ukážeme situaci, kdy normální tvar vyjde 0.

$H := [-4x^3 + 3x + y, x - 4y^3 + 3y, -256y^9 + 576y^7 - 432y^5 + 120y^3 - 8y]$
$$H := [-4x^3 + 3x + y, -4y^3 + x + 3y, -256y^9 + 576y^7 - 432y^5 + 120y^3 - 8y]$$
$A := 576x^3y^7 - 192xy^9 - 64y^{10} - 432x^3y^5 + 120x^3y^3 - 8x^3y$
$$A := 576x^3y^7 - 192xy^9 - 64y^{10} - 432x^3y^5 + 120x^3y^3 - 8x^3y$$
$NormalForm(A, H, plex(x, y))$
$$0$$

Zde H jsou polynomy g_1, g_2 a g_3 a A je S-polynom polynomů g_1a g_3.

2) V programu Mathematica

Příkaz zadaný do programu:

$$\text{GroebnerBasis}[\{y + 3x - 4x\verb|^|3, x + 3y - 4y\verb|^|3\}, \{x, y\}]$$

Výsledek, který nám dal počítačový program

$$\{y - 15y^3 + 54y^5 - 72y^7 + 32y^9, x + 3y - 4y^3\}$$

Vidíme, že výsledky se nám shodují, jak v počítačovém programu, tak i bez jejich použití.

Nyní když máme zadanou soustavu rovnic ve tvaru Gröbnerových bází, mohli bychom si soustavu rovnic dopočítat a zjistit tak neznámou x a y.Vyšlo by nám stejné řešení jako v příkladě 2.3.4.

Příklad 3.2:

Vypočítejte soustavu rovnic pomocí Gröbnerovy báze.

$$x^2y^2 + x + y - 2 = 0$$

$$x + y - 2 = 0.$$

Řešení:

Použijeme příklad 2.3.3 a ověříme, zda se nám budou výpočty shodovat. Výpočet opět provedeme v programu Maple a pak v programu Mathematica

a) Maple

Vždy, když v tomto programu počítáme Grobnerovy báze, musíme nejdříve zadat příkaz with (Groebner):

Dále si soustavu rovnic označíme jako F. Příkaz v programu:

$>F := [x\text{^}2\cdot y\text{^}2 + x + y - 2, x + y - 2]$

$$F := [x^2\,y^2 + x + y - 2, x + y - 2]$$

A nyní zvolíme příkaz:

$>Basis(F, plex(x, y))$

$$[y^4 - 4\,y^3 + 4\,y^2, x + y - 2]$$

Basis, znamená báze. F je naše soustava rovnic a $plex\ (x, y)$ znamená lexikografické uspořádání $x > y$.

Pozor, když zadáváme soustavu rovnic, musíme napsat F:=, kdybychom zapomněli na znak ":", program by nám nefungoval. Stejně tak musíme dát pozor na zadání xy. Pokud mezi x a y nevložíme znak pro násobení, program xy bere jako další proměnou a vycházely by nám pak špatné výsledky.

b) v programu Mathematica

Zadaný příkaz do programu:

$$\text{GroebnerBasis}[\{x\text{^}2 * y\text{^}2 + x + y - 2, x + y - 2\}, \{x, y\}]$$

Dostali jsme výsledek $\{4y^2 - 4y^3 + y^4, -2 + x + y\}$

Vidíme, že výsledky z obou programů se nám shodují. To je dobrá kontrola toho, že jsme do daných programů zadali vše správně.

Při zadávání do programu Mathematica si musíme dát pozor na zadání xy, abychom nezapomněli mezi x a y dát znak „*“ (hvězdička). Stejně jako v programu Maple, kdybychom to neudělali, bral by program x a y jako novou proměnnou xy.

Příklad 3.3:

Vypočítejte soustavu rovnic pomocí Grobnerovy báze.

$$x^2y^2 + xy - y + 1 = 0$$
$$xy + y - 2 = 0.$$

Řešení:

Zadání je stejné jako příklad 2.3.5. Ukážeme si řešení v obou matematických programech.

a) v programu Maple

Zadaný příkaz:

$with(Groebner):$

$B := [x^2 \cdot y^2 + x \cdot y - y + 1, x \cdot y + y - 2]$

$$B := [x^2 y^2 + x y - y + 1, x y + y - 2]$$

$Basis(B, plex(x, y))$

$$[y^2 - 6 y + 7, 7 x - 5 + 2 y]$$

b) v programu Mathematica

Příkaz zadaný do programu:

$$\text{GroebnerBasis}[\{x\text{^}2 * y\text{^}2 + x * y - y + 1, x * y + y - 2\}, \{x, y\}]$$

Dostali jsme výsledek: $\{7 - 6y + y^2, -5 + 7x + 2y\}$

Vidíme, že Gröbnerovy báze se nám shodují, je tedy jedno, jestli je počítáme v programu Mathematica nebo Maple. Vždy dostaneme stejné řešení.

Příklad 3.4:

Vypočítejte soustavu rovnic pomocí Gröbnerovy báze.

$$x^2y - 2x = 1$$
$$y^2x - 2y = 1.$$

Řešení:

Použili jsme zadání příkladu 2.3.6. Opět si zde ukážeme řešení v obou programech.

a) Řešení příkladu pomocí programu Maple:

Zadaný příkaz:

> $with(Groebner):$

> $H := [x\text{^}2 \cdot y - 2x - 1, y\text{^}2 \cdot x - 2y - 1]$

$$H := [x^2 y - 2 x - 1, x y^2 - 2 y - 1]$$

>$Basis(H, plex(x, y))$

$$[y^3 - 2y - 1, -y + x]$$

H je zadaná soustava rovnic.

b) Příkaz zadaný do programu Mathematica

$$\mathrm{GroebnerBasis}[\{y * x^\wedge 2 - 2x - 1, x * y^\wedge 2 - 2y - 1\}, \{x, y\}]$$

Dostaneme výsledek

$$\{-1 - 2y + y^3, x - y\}$$

Gröbnerovy báze se nám shodují, soustavu rovnic jsme tedy do obou programů zadali správně.

Ve vzniklé bázi máme jeden polynom o jedné neznámé. Můžeme pomocí příkazu *Factor*, dostat polynom $-1 - 2y + y^3$ do součinového tvaru $(1 + y).(-1 - y + y^2)$.

Nyní když položíme polynom v součinovém tvaru roven 0, zjistíme hodnoty y. Pro hodnoty y bude mít soustava rovnic čtyři řešení $y_1 = 0, y_2 = -1, y_3 = \frac{1}{2}.(1 - \sqrt{5})$ a $y_4 = \frac{1}{2}.(1 + \sqrt{5})$.

Kdybychom tyto hodnoty dosadili do jedné ze zadaných rovnic, tak bychom dostali stejné řešení jako v příkladě 2.3.6.

Můžeme si všimnout, že hodnoty y se shodují s výsledkem v příkladě 2.3.6. až na $y = 0$. Ten jsme ale v průběhu počítání v příkladě 2.3.6 zamítli, protože pro x neměl řešení.

4 Eliminační ideály

V této kapitole uvedu definici eliminačního ideálu, věty o eliminaci a o rozšíření. Dále vypočítám některé příklady.

Příklad 4.1.: Mějme soustavu rovnic

$$x^4 + z^2 + y = 0$$
$$y + x^2 + z = 0$$
$$z + x + y = 0.$$

Určete řešení dané soustavy rovnic.

Pokud I je ideál

$$I = \langle x^4 + z^2 + y, y + x^2 + z, z + x + y \rangle,$$

pak nám Gröbnerova báze pro I vzhledem k lexikografickému uspořádání termů $(x > y > z)$ vyjde tak, že má tři polynomy

$$g_1 = -z + z^2$$
$$g_2 = y + y^2 + 2z + 2yz$$
$$g_3 = x + y + z.$$

Zadaná soustava rovnic a soustava daná anulovanou Gröbnerovou bází daných polynomů mají stejné řešení. Vidíme, že Gröbnerova báze je pro nás snadnější na nalezení řešení zadané soustavy. Proto se Gröbnerovy báze počítají, aby nám upravily zadanou soustavu rovnic na jednodušší rovnice.

Z polynomu g_1 můžeme vypočítat z, protože daný polynom už jiné neznámé neobsahuje. Rovnici $-z + z^2 = 0$ si můžeme rozložit na součinový tvar $z.(-1 + z) = 0$. Z toho již vidíme, že $z = 0, z = 1$. Nyní dosadíme dané řešení do rovnice $y + y^2 + 2z + 2yz = 0$ a zjistíme neznámou y.

a) $y + y^2 + 2.0 + 2y.0 = 0$

   $y^2 + y = 0.$

   Můžeme upravit $y.(y + 1) = 0$, z dané rovnice již vidíme, že $y = 0, y = -1$.

b) $y + y^2 + 2.1 + 2y.1 = 0$

   $y^2 + 3y + 2 = 0.$

   Dostali jsme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme pomocí diskriminantu

$D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$. Diskriminant vyšel větší než 0 ($D > 0$), proto řešením budou dva reálné kořeny tvaru $y_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3+1}{2} = -1, y_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3-1}{2} = -2$.

Nyní, když již známe z i y, můžeme dosadit do poslední rovnice $x + y + z = 0$ a zjistit tak neznámou x.

1) $x + 0 + 0 = 0 \rightarrow x = 0$
2) $x - 1 + 0 = 0 \rightarrow x = 1$
3) $x - 1 + 1 = 0 \rightarrow x = 0$
4) $x - 2 + 1 = 0 \rightarrow x = 1$.

Zadaná soustava rovnic má pro neznámé x, y, z celkem čtyři řešení

$$P = \{(0,0,0), (1,-1,0), (0,-1,1), (1,-2,1)\}.$$

Nalezení těchto řešení nám umožnily dvě věci, a to eliminační krok a krok rozšíření řešení. Obě dvě jsou základní myšlenkou eliminačních ideálů a my jsme je využili v předchozím příkladě.

a) Eliminační krok
   Můžeme najít důsledek $g_1 = -z + z^2$ z našich původních rovnic, kde se vyskytuje pouze z a můžeme eliminovat x a y ze soustavy rovnic.
b) Rozšíření řešení
   Poté, co jsme vyřešili jednodušší rovnice $g_1 = 0$ pro stanovení hodnoty z, mohli bychom tato řešení rozšířit na řešení původních rovnic.

Využití eliminačního kroku lze vidět, všimneme-li si, že g_1 můžeme zapsat

$$g_1 \epsilon I \cap C[z],$$

kde I je ideál $I = \langle x^4 + z^2 + y, y + x^2 + z, z + x + y \rangle$. Skládá se ze všech kroků našich rovnic, které eliminují x a y. Tato myšlenka je obecněji popsána v následující definici.

Definice 4.1:

Nechť $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subset \mathrm{k}[\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}]$, potom eliminační ideál I_l je ideál $\mathrm{k}[\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}]$, který je definován

$$I_l = I \cap k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$$

I_l se skládají ze všech $f_1 = \cdots = f_s = 0$, které eliminují proměnné $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{l}$.

Poznámka:

Pokud $I = I_l$, pak je to nulový eliminační ideál. Různé uspořádání proměnných vede k různým eliminačním ideálům.

Eliminovat proměnné $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{l}$, znamená najít nenulové polynomy v eliminačním ideálu I_l. Řešit eliminační krok znamená poskytnout systematický postup pro nalezení prvků I_l. Gröbnerovy báze nám umožňují dělat tento postup okamžitě, při řádném uspořádání termů. Proto jsem v předchozí kapitole zopakovala Gröbnerovy báze, které budeme nyní využívat.

Příklad 4.2:

Určete řešení dané soustavy rovnic

$$x^2 + z + x - 3 = 0$$
$$y^2 + x + z - 3 = 0$$
$$z^2 + y + x - 3 = 0.$$

Řešení:

Ideál $I = \langle x^2 + z + x - 3, y^2 + x + z - 3, z^2 + y + x - 3\rangle$. Vypočítáme si Gröbnerovu bázi při lexikografickém uspořádání termů $(x > y > z)$. Vyjdou nám čtyři polynomy.

$$g_1 = -9 - 12z + 27z^2 + 4z^3 - 11z^4 + z^6$$
$$g_2 = 9 - 6y - 6z^2 + 2yz^2 + z^4$$
$$g_3 = -y + y^2 + z - z^2$$
$$g_4 = -3 + x + y + z^2.$$

Z polynomu $g_1$pomocí počítačového programu vypočítáme z. Použijeme příkaz $Solve$ (vyřeš) a dostaneme řešení dané rovnice.

$$\mathrm{Solve}[-9 - 12z + 27z^2 + 4z^3 - 11z^4 + z^6 == 0, z]$$
$$\{\{z \to -3\}, \{z \to 1\}, \{z \to -\sqrt{3}\}, \{z \to \sqrt{3}\}, \{z \to 1 - \sqrt{2}\}, \{z \to 1 + \sqrt{2}\}\}$$

Vidíme, že daná rovnice má celkem šest řešení. Musíme teď každé řešení dosadit do obou z polynomů g_2 a g_3, abychom zjistili neznámou y. Dosazením získáme dvě rovnice v proměnné y, které musíme vyřešit (najít jejich společný kořen y, pokud existuje). To je úloha, kterou již umíme.

a) $z = -3$: dostaneme rovnice $9 - 6y - 6.9 + 2y.9 + 81 = 0$ a $-y + y^2 - 12 = 0$, jejich společný kořen je $y = -3$ a případné jedno řešení původní soustavy bude mít tvar $(*, -3, -3)$, kde $*$ značí zatím neurčenou proměnnou x. Tu určíme dosazením hodnot $y = -3$ a $z = -3$ do $g_4 = 0$. Vyjde $(-3, -3, -3)$.

b) $z = 1$: dostaneme rovnice $9 - 6y - 6.1 + 2y.1 + 1 = 0$ a $-y + y^2 + 1 - 1 = 0$, jejich společný kořen je $y = 1$ a případné jedno řešení původní soustavy určíme dosazením hodnot $y = 1$ a $z = 1$ do $g_4 = 0$. Vyjde $(1, 1, 1)$.

c) $z = \sqrt{3}$:

Zde si pomůžeme počítačovým programem, abychom nemuseli „ručně“ počítat s odmocninami. Solve $\left[-y + y^2 + \sqrt{3} - \left(\sqrt{3}\right)^2 == 0, y\right]$

$$\{\{y \to \sqrt{3}\}, \{y \to 1 - \sqrt{3}\}\}$$

Dosazením y do rovnice $9 - 6y - 6\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2y\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^4 = 0$ ověříme, že oba výsledky jsou řešením dané rovnice. Zbývá nám zjistit neznámou x, kterou zjistíme dosazením y a z do $g_4 = 0$. Vyjdou dvě řešení $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right), (\sqrt{3} - 1, 1 - \sqrt{3}, \sqrt{3})$.

d) $z = -\sqrt{3}$:

Ušetříme si práci tím, že řešení zjistíme pomocí počítačového programu Mathematica. Příkaz, který zadáme Solve$[-y + y^2 - \sqrt{3} - (-\sqrt{3})^2 == 0, y]$.

Výsledek z počítače $\left\{\{y \to -\sqrt{3}\}, \{y \to 1 + \sqrt{3}\}\right\}$. Budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě. Ověříme si, zda dané výsledky jsou řešením i rovnice $9 - 6y - 6\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 2y\left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^4 = 0$ a zjistíme neznámou x, když dosadíme y a z do $g_4 = 0$. Vyjdou dvě řešení $\left(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right), (-1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

e) $z = 1 + \sqrt{2}$:

Opět si řešení najdeme s využitím počítače, kde do programu zadáme

$$\text{Solve}[-y + y^2 + 1 + \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})^2 == 0, y]$$

a dostaneme řešení $\left\{\{y \to -\sqrt{2}\}, \{y \to 1 + \sqrt{2}\}\right\}$, které dosadíme do rovnice $9 - 6y - 6\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 + 2y\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 + \left(1 + \sqrt{2}\right)^4 = 0$ a zjistíme, že dané rovnici vyhovuje pouze řešení $y = -\sqrt{2}$. Neznámou x zjistíme, když dosadíme y a z do $g_4 = 0$. Vyjde řešení $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$.

f) $z = 1 - \sqrt{2}$:

Stejně jako v předchozích případech i zde si pomůžeme počítačovým programem. Zadaný příkaz: Solve$[-y + y^2 + 1 - \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})^2 == 0, y]$

Počítač nám dá řešení $\left\{\{y \to \sqrt{2}\}, \{y \to 1 - \sqrt{2}\}\right\}$. Opět ověříme, jestli rovnici $9 - 6y - 6\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 + 2y\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{2}\right)^4 = 0$ vyhovují obě řešení. Zjistíme, že rovnice má řešení jen pro $y = \sqrt{2}$. Poslední krokem je dosadit y a z do $g_4 = 0$, abychom získali neznámou x a dostaneme $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\right)$.

Zadaná soustava rovnic má celkem 8 řešení $P = \{\left(-3, -3, -3\right), (1, 1, 1), \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3} - 1, 1 - \sqrt{3}, \sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right), \left(-1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right), \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\right)\}$.

Příklad 4.3:

Řešte soustavu rovnic

$$x^2 + z - 1 = 0$$
$$y^2 + z - 1 = 0$$
$$x - y - z = 0.$$

Řešení:

Ideál $I = \langle x^2 + z - 1, y^2 + z - 1, x - y - z \rangle$. Vypočítáme si Gröbnerovu bázi při lexikografickém uspořádání termů $(x > y > z)$. Vyjdou nám čtyři polynomy.

$$g_1 = -4z + 4z^2 + z^3$$
$$g_2 = 2yz + z^2$$
$$g_3 = -1 + y^2 + z$$
$$g_4 = x - y - z.$$

Z polynomu g_1 máme jenom jednu neznámou z, proto můžeme z vypočítat z rovnice $-4z + 4z^2 + z^3 = 0$. Příkazem $Solve$ dostaneme řešení v matematickém programu velmi snadno. Dostaneme celkem tři řešení.

$$\text{Solve}[-4z + 4z^2 + z^3 == 0, z]$$
$$\{\{z \to 0\}, \{z \to 2(-1 - \sqrt{2})\}, \{z \to 2(-1 + \sqrt{2})\}\}$$

Tato řešení můžeme dosadit do jedné ze dvou polynomů g_2 nebo g_3.

a) $z = 0$. Budu dosazovat do rovnice $-1 + y^2 + z = 0$. Vidíme, že výsledek je $y = \pm 1$.

b) $z = 2.(-1 - \sqrt{2})$. Dosazovat budu do rovnice $2yz + z^2 = 0$.

$$2y.2.\left(-1 - \sqrt{2}\right) + \left(2.\left(-1 - \sqrt{2}\right)\right)^2 = 0$$
$$4y.\left(-1 - \sqrt{2}\right) + \left(-2 - 2\sqrt{2}\right)^2 = 0$$

$$4y.\left(-1-\sqrt{2}\right)+4+8\sqrt{2}+8=0$$
$$4y.\left(-1-\sqrt{2}\right)=-12-8\sqrt{2}$$
$$4y=\frac{-12-8\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}$$
$$y=\frac{-3-2\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}$$

Daný výsledek můžeme ještě usměrnit, abychom neměli odmocninu ve jmenovateli.

$$\frac{-3-2\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}.\frac{-1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-4}{1-2}=\frac{-1-\sqrt{2}}{-1}=1+\sqrt{2}$$

c) $z=2.(-1+\sqrt{2})$. Stejně jako v předchozím příkladě budu dosazovat do rovnice $2yz+z^2=0$.

$$2y.2.\left(-1+\sqrt{2}\right)+\left(2.\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)^2=0$$
$$4y.\left(-1+\sqrt{2}\right)+\left(-2+2\sqrt{2}\right)^2=0$$
$$4y.\left(-1+\sqrt{2}\right)+4-8\sqrt{2}+8=0$$
$$4y.\left(-1+\sqrt{2}\right)=-12+8\sqrt{2}$$
$$4y=\frac{-12+8\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}$$
$$y=\frac{-3+2\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}$$

Stejně jak o předchozím příkladě si výsledek můžeme ještě upravit tak, abychom neměli ve jmenovateli odmocninu.

$$\frac{-3+2\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}.\frac{-1-\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4}{1-2}=\frac{-1+\sqrt{2}}{-1}=1-\sqrt{2}$$

Máme zjištěné neznámé z a y. Chybí nám vyjádřit poslední neznámou x. Tu zjistíme z poslední rovnice $x-y-z=0$.

1) $z=0, y=1: \rightarrow x-1-0=0 \rightarrow x=1$
2) $z=0, y=-1: \rightarrow x-(-1)-0=0 \rightarrow x=-1$
3) $z=2.\left(-1-\sqrt{2}\right), y=1+\sqrt{2}$:

$$x-1-\sqrt{2}-2.\left(-1-\sqrt{2}\right)=0$$
$$x-1-\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}=0$$
$$x+1+\sqrt{2}=0$$

$$x = -1 - \sqrt{2}.$$

4) $z = 2.\left(-1 + \sqrt{2}\right), y = 1 - \sqrt{2}$:

$$x - 1 + \sqrt{2} - 2.\left(-1 + \sqrt{2}\right) = 0$$

$$x - 1 + \sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} = 0$$

$$x + 1 - \sqrt{2} = 0$$

$$x = \sqrt{2} - 1.$$

Zadaná soustava rovnic má celkem čtyři řešení.

4.1 Věta o eliminaci a věta o rozšíření

Věta o eliminaci:

Nechť $I \subset \mathrm{k}[\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}]$ je ideálem a nechť G jsou Gröbnerovy báze z I při lexikografickém uspořádání, kde $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. Potom pro každé $0 \leq 1 \leq n$ množina

$$G_l = G \cap k[x_{l+1}, \dots, x_n]$$

je Gröbnerovou bází eliminačního ideálu I_l.

Příklad 4.1.1.

Použijeme příklad 4.1, na kterém si ukážeme, jak funguje věta o eliminaci.

Mějme soustavu rovnic

$$x^4 + z^2 + y = 0$$

$$y + x^2 + z = 0$$

$$z + x + y = 0.$$

Ideál $I = \langle x^4 + z^2 + y, y + x^2 + z, z + x + y \rangle$ a Gröbnerova báze při lexikografickém uspořádání termů

$$g_1 = -z + z^2$$

$$g_2 = y + y^2 + 2z + 2yz$$

$$g_3 = x + y + z.$$

Podle věty o eliminaci je

$I_1 = I \cap \mathbb{C}[y, z] = \langle y + y^2 + 2z + 2yz, -z + z^2 \rangle$

$I_1 = I \cap \mathbb{C}[z] = \langle -z + z^2 \rangle$.

Polynom g_1 není jen náhodný způsob eliminace x a y z daných rovnic. Je to nejlepší možný způsob, jak určit neznámou z, protože jakýkoli jiný polynom, který eliminuje x a y je násobkem polynomu g_1.

Díky větě o eliminaci můžeme Gröbnerovy báze při lexikografickém uspořádání eliminovat nejen pro první proměnnou, ale i pro první dvě proměnné, první tři proměnné, a tak dále. Někdy chceme eliminovat jen určité proměnné a zbytek ignorovat. V tomto případě je zbytečné počítat Gröbnerovy báze při lexikografickém uspořádání.

Věta o rozšíření:

Nechť $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ a nechť I_l je první eliminační ideál z I. Pro každé $1 \leq i \leq s$, píšeme f_l ve formě

$f_l = g_l(x_2, \dots x_n) x_1^{N_1} + podmínky\ ve\ kterých\ x_1\ má\ stupeň\ < N_1,$

kde $N_1 \geq 0$ a $g_1 \epsilon\, \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ je nenulový. Předpokládejme, že máme částečné řešení $(a_2, \dots, a_n)\ \epsilon\ V(I_l)$. Jestliže $(a_2, \dots, a_n) \notin V(g_1, \dots, g_s)$, pak existuje $a_1 \epsilon\, C$ tak, že $(a_1, a_2, \dots, x_n)\ \epsilon\ V(l)$.

Ve větě o rozšíření je uvedeno, že hledáme hodnoty pro $k = \mathbb{C}$. Teď si ukážeme proč je $\mathbb{C}$ tak důležité. Budeme předpokládat, že $k = R$ pro rovnici

$$x^2 - y = 0$$
$$x^2 = z.$$

Použijeme eliminaci x a dostaneme $y = z$, takže budeme mít dílčí řešení (a, a) pro všechny $a \epsilon R$. Vzhledem k tomu, že vedoucí koeficienty x v $x^2 - y$ a $x^2 - z$ nikdy nezmizí, nám věta o existenci zaručuje, že (a, a) platí, za předpokladu, že pracujeme nad $\mathbb{C}$. Nad R je situace jiná. Pokud je $x^2 = a$ záporné, pak nemá žádné skutečné řešení, ale pouze dílčí řešení pro $a \geq 0$. To je reálné řešení dané soustavy rovnic. Proto je tedy důležité, aby hledané hodnoty byly v oboru komplexních čísel.

Věta o existenci nám říká, že existenční krok může selhat pouze tehdy, když vedoucí koeficienty zmizí současně.

Ideál vedoucích koeficientů $V(g_1, \dots, g_s)$ závisí na bázi $\{f_1, \dots f_s\}$ z I. Změna jiné báze může způsobit změnu $V(g_1, \dots, g_s)$.

Příklad 4.1.2:

V reálných číslech řešte soustavu rovnic

$$x^2 - y - z = 0$$
$$y^2 - z - x = 0$$
$$z^2 - x - y = 0.$$

Vypočítejme si Gröbnerovu bázi s využitím počítačového programu Mathematica.

$$g_1 = -4z - 2z^2 - 4z^3 - z^4 + z^6$$
$$g_2 = 2y - z^2 + 2yz^2 - z^4$$
$$g_3 = y + y^2 - z - z^2$$
$$g_4 = x + y - z^2$$

Příkaz, který jsme zadali do matematického programu

$$\mathrm{GroebnerBasis}[\{x^\wedge 2 - y - z, y^\wedge 2 - z - x, z^\wedge 2 - x - y\}, \{x, y, z\}]$$

Pomocí příkazu $Solve$, najdeme řešení proměnné z. Zjistíme, že řešení je v oboru reálných čísel $z = 0, z = 2$ i v komplexních čísel $z = -1 \pm i, z = \pm i$.

Někdy se nám může stát, že nám Gröbnerova báze dá polynomy, ve který nebude z osamostatněno.

Příklad 4.1.3:

Mějme soustavu rovnic

$$x^2 + xy - y^2 - z^2 = 0$$
$$z^2 - zy - y^2 - x^2 = 0.$$

Řešení:

Vypočítáme si Gröbnerovu bázi pro $I = \langle x^2 + xy - y^2 - z^2, z^2 - zy - y^2 - x^2 \rangle$při lexikografickém uspořádání. K řešení použijeme počítačový program. Zadaný příkaz do programu

$$\mathrm{GroebnerBasis}[\{x^\wedge 2 + x * y - y^\wedge 2 - z^\wedge 2, z^\wedge 2 - z * y - y^\wedge 2 - x^\wedge 2\}, \{x, y, z\}]$$

Výsledek, který v počítači dostaneme $\{y^3 + y^2z, xy - 2y^2 - yz, x^2 + y^2 + yz - z^2\}$.

Polynom si označíme g_1, g_2, g_3

$$g_1 = y^3 + y^2z$$
$$g_2 = xy - 2y^2 - yz$$
$$g_3 = x^2 + y^2 + yz - z^2.$$

Vidíme, že zde není žádný polynom, který by obsahoval jen jednu proměnnou. Podle eliminační teorie dostaneme

$$I_1 = I \cap C[y,z] = \langle g_1 \rangle$$
$$I_2 = I \cap C[z] = \{0\}.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení: Zjistíme to příkazem

$$\mathrm{Solve}[\{x^2 + xy - y^2 - z^2 == 0, -x^2 - y^2 - yz + z^2 == 0\}, \{x, y, z\}]$$

```
Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>
```

$$\{\{x \to y, z \to -y\}, \{y \to 0, z \to -x\}, \{y \to 0, z \to x\}\}$$

Důsledek:

Nechť $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ a předpokládejme pro nějaké i, že f_i je ve tvaru

$f_i = cx_1^N + \ termy, ve\ kterým\ má\ x_1\ stupeň\ < N,$

kde $c \in \mathbb{C}$, je nenulové a $N > O$. Jestliže I_1 je první eliminační ideál z I a $(a_2, \dots, a_n) \in V(I_1)$, pak je $a_1 \in \mathbb{C}$ tak, že $a_1, a_2, \dots., a_n) \in V(I)$.

Ukážeme si příklad, kdy nám nevyjde hezké řešení.

Příklad 4.1.4:

Mějme soustavy rovnic

$$xy + 4 = 0$$
$$-y^3 - x^2 + 1 = 0.$$

Pomocí matematického programu vypočítáme Gröbnerovu bázi, při lexikografickém uspořádání a dostaneme

$$g_1 = 16 - y^2 + y^5$$
$$g_2 = 4x + y - y^4.$$

Příkaz zadaný v programu Mathematica

$$\mathrm{GroebnerBasis}[\{x * y + 4, -y^3 - x^2 + 1\}, \{x, y\}]$$
$$\{16 - y^2 + y^5, 4x + y - y^4\}$$

Pokud budeme eliminovat proměnné, zjistíme, že pro y neexistují žádné racionální kořeny. Jednou z možností jak kořeny vypočítat, je numericky. My ale můžeme opět využít počítačovou techniku a kořeny si vypočítat. Toto řešení pak můžeme substituovat do $4x + y - y^4 = 0$, abychom zjistili neznámou x. Na rozdíl od předchozích příkladů, zde můžeme najít pouze číselné přiblížení k řešení, tj. numerické řešení.

5 Užití eliminace a teorie ideálů při důkazech geometrických vět

Eliminace se dá využít při řešení důkazů geometrických vět. V této kapitole si ukážeme čtyři důkazy, kde využijeme eliminaci. Vždy nejdříve uvedu znění věty, její důkaz a pak důkaz s využitím počítačového programu Mathematica. Všechny důkazy, které zde uvedu, se budou týkat trojúhelníka.

Uvedené věty a jejich důkazy jsem čerpala z [9], [10], [7]. Obrázky jsem vytvořila sama v programu GeoGebra, ale nechala jsem se inspirovat [10].

5.1 Heronův vzorec

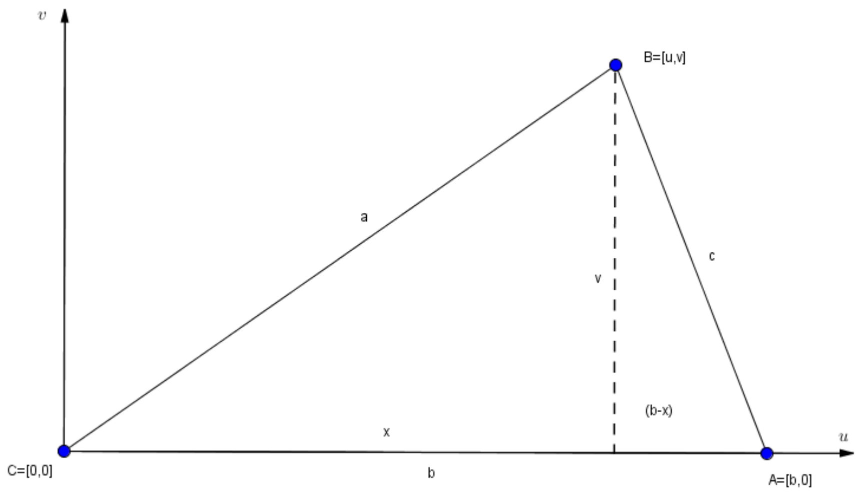
Heronův vzorec se využívá pro výpočet obsahu libovolného trojúhelníka v případě, že neznáme výšku trojúhelníka, ale známe délky všech stran. Znění Heronova vzorce

$$S = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)},$$

kde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Uděláme si důkaz tohoto vzorce nejdříve bez použití počítačového programu a pak si ukážeme, jak tento vzorec můžeme dokázat pomocí eliminace s využitím počítače.

Než začnu něco počítat, uděláme si nejdříve obrázek, abychom více rozuměli tomu, co budeme dělat.



Obr.1

Z obrázku můžeme vidět, že díky výšce můžeme trojúhelník rozdělit na dva pravoúhlé trojúhelníky. Využijeme zde Pythagorovu větu a vznikne nám soustava dvou rovnic

$$c^2 = v^2 + (b - x)^2$$

$$a^2 = x^2 + v^2.$$

Nyní druhou rovnici odečteme od první rovnice a postupně upravíme, abychom si vyjádřili neznámou x.

$$c^2 - a^2 = v^2 + (b - x)^2 - x^2 - v^2$$

$$c^2 - a^2 = v^2 + b^2 - 2bx + x^2 - x^2 - v^2$$

$$c^2 - a^2 = b^2 - 2bx$$

$$2bx = -c^2 + a^2 + b^2$$

$$x = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}$$

Teď, když jsme si zjistili x, se vrátíme k rovnici $a^2 = x^2 + v^2$ a vyjádříme si výšku v.

$$a^2 = \left(\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}\right)^2 + v^2$$

$$v^2 = a^2 - \frac{(a^2 - c^2 + b^2)^2}{4b^2}$$

$$v^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 - c^2 + b^2)^2}{4b^2}$$

$$v = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 - c^2 + b^2)^2}}{2b}$$

Vypočítali jsme si výšku v. Můžeme si připomenout vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku $S = \frac{b.v}{2}$ a do daného vzorce budeme dosazovat vše, co známe. Vypočítáme si obsah S.

$$S = \frac{\frac{b.\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 - c^2 + b^2)^2}}{2b}}{2} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 - c^2 + b^2)^2}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 - c^2 + b^2)^2}}{4}$$

Zjistili jsme obsah S, pokusíme se daný výraz zjednodušit a dostat ho do součinového tvaru.

$$S = \frac{\sqrt{(2ab).(2ab) - (a^2 - c^2 + b^2).(a^2 - c^2 + b^2)}}{4}$$

$$S = \frac{\sqrt{(2ab - a^2 + c^2 - b^2).(2ab + a^2 - c^2 + b^2}}{4}$$

$$S=\frac{\sqrt{[c^2-(a-b)^2].[(a+b)^2-c^2]}}{4}$$

$$S=\frac{\sqrt{[c.c-(a-b).(a-b)].[(a+b).(a+b)-c.c]}}{4}$$

$$S=\frac{\sqrt{(c-a+b).(c-a-b).(a+b-c).(a+b+c)}}{4}$$

Nyní si zvolíme poloviční obvod $2s=a+b+c$. Dosadíme a upravíme.

$$S=\frac{\sqrt{(2s-2a).(2s-2b).(2s-2c).2s}}{4}$$

$$S=\frac{\sqrt{2.s.2.(s-a).2.(s-b).2.(s-c)}}{4}$$

$$S=\frac{\sqrt{16s.(s-a).(s-b).(s-c)}}{4}$$

$$S=\frac{4.\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}}{4}$$

$$S=\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$$

Dostali jsme Heronův vzorec a důkaz je tak hotov.

Nyní provedeme důkaz s využitím eliminace a počítačového programu. Vraťme se k obr. 1. Výška v z bodu B na stranu b nám trojúhelník rozdělila na dva pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých platí Pythagorova věta. Můžeme tedy psát vztahy:

$$x^2+v^2=a^2$$

$$(b-x)^2+v^2=c^2.$$

Dále víme, že obsah trojúhelníku S se vypočítá jako $S=\frac{b.v}{2}$, to můžeme upravit na tvar $2S-b.v$. Nyní si řekneme, co tvoří ideál I.

$I=\{x^2+v^2-a^2,(b-x)^2+v^2-c^2,2S-b.v\}$.

Budeme eliminovat parametry x a v. Příkaz, který zadáme do programu Mathematica:

Eliminate$[\{x^2+v^2-a^2==0,(b-x)^2+v^2-c^2==0,2S-b*v==0\},\{x,v\}]$

Výsledek $16S^2==-a^4+2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4$.

Nyní si pravou stranu dáme do součinového tvaru. Můžeme opět využít počítač, kde zadáme příkaz Factor$[-a^4+2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4]$ a dostaneme výsledek

$$-(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)$$

Rovnici $16S^2=-(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)$ můžeme ještě upravit tím, že ji celou vydělíme číslem 16.

$$S^2 = \frac{-(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{16}$$

Poslední krok, který uděláme, abychom si vyjádřili S je, že si celou rovnici odmocníme. Nelíbí se nám ještě ale znaménko – (mínus) před závorkou, proto změním znaménka v závorce, abych se tak zbavila mínusu před závorkou.

$$S = \frac{\sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}}{4}$$

Zvolíme si poloviční obvod $s = \frac{(a+b+c)}{2}$ tzn. $2s = a+b+c$ a dosadíme ho do vztahu S.

$$S = \frac{\sqrt{(2s-2a).(2s-2c).(2s-b).2s}}{4}$$

Rovnici můžeme ještě upravit a závorky si trochu přeorganizovat a dostaneme

$$S = \frac{\sqrt{2.s.2.(s-a).2.(s-b).2.(s-b)}}{4} = \frac{4.\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}}{4}$$

Když zkrátíme číslo 4, dostaneme známý Heronův vzorec

$$S = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}.$$

5.2 Cevova věta

V trojúhelníku XYZ se přímky XA, YB a ZC, kde body A, B, C leží na stranách protilehlých odpovídajícím vrcholům, protínají v jednom bodě právě tehdy, když platí:

$$\frac{\|XC\|}{\|CY\|}.\frac{\|YA\|}{\|AZ\|}.\frac{\|ZB\|}{\|BX\|} = 1.$$

Tento vztah budu využívat, když budu dělat důkaz bez použití počítačového programu. Někdy se ale uvádí i vztah $(XYC).(YZA).(ZXB) = -1$. Ten využiji, když budu dělat počítačový důkaz, protože je vhodnější. První vztah je vyjádření vzdálenosti, kde se vyskytují odmocniny a součty druhých mocnin. Zatímco v druhém vztahu se využívá dělicí poměr a objevují se zde polynomy pouze 1. stupně. Než přejdu k samotnému důkazu, ukážeme si, že oba dva vztahy jsou stejné.

První vztah $\frac{\|XC\|}{\|CY\|}.\frac{\|YA\|}{\|AZ\|}.\frac{\|ZB\|}{\|BX\|} = 1$ využívá vzdálenost dvou bodů. $\|XC\|$ v tomto vztahu značí orientovanou vzdálenost bodů X a C. Stejně tak $\|YA\|$ značí orientovanou vzdálenost bodů Y a A. Takto bych mohla pokračovat u všech. Orientovaná vzdálenost bodů O, P je vzdálenost, která má znaménko + (plus) nebo – (mínus). Udává tedy určitý směr. Řekneme, že přímka OP má směr od O do P kladný, pak napíšeme $\|OP\| = |OP|$ a $\|PO\| = -|OP|$. V každém případě platí $\|OP\| = -\|PO\|$. Je-li např. R vnitřní bod úsečky

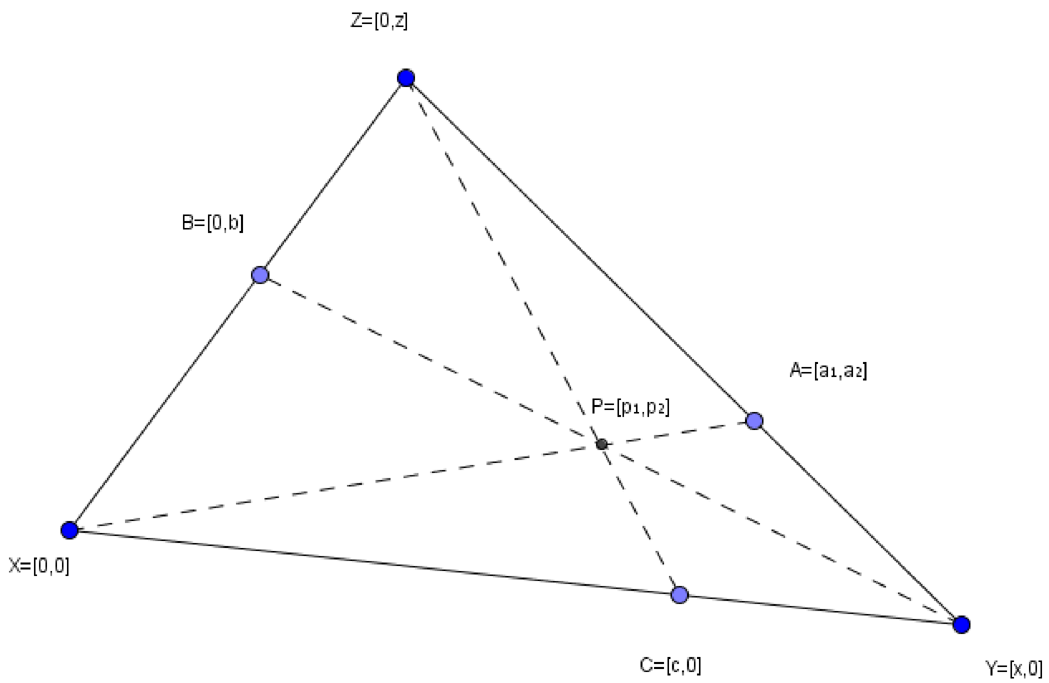
OP, potom je poměr $\frac{\|OR\|}{\|RP\|}$ kladný, leží-li bod R vně úsečky OP potom je poměr $\frac{\|OR\|}{\|RP\|}$ záporný.

Můžeme psát $(XYC) = -\frac{\|XC\|}{\|CY\|}, (YZA) = \frac{\|YA\|}{\|AZ\|}, (ZXB) = \frac{\|ZB\|}{\|BX\|}$.

Proto vztahy $\frac{\|XC\|}{\|CY\|} \cdot \frac{\|YA\|}{\|AZ\|} \cdot \frac{\|ZB\|}{\|BX\|} = 1$ a $(XYC).(YZA).(ZXB) = -1$ jsou stejné.

Nyní se ukážeme důkaz bez použití počítačového programu. Budeme chtít dokázat vztah $\frac{\|XC\|}{\|CY\|} \cdot \frac{\|YA\|}{\|AZ\|} \cdot \frac{\|ZB\|}{\|BX\|} = 1$

Důkaz provedeme pomocí poměru. Ve vztahu, který máme dokázat, jsou poměry úseček, my je převedeme na poměry obsahů trojúhelníků. Obsah trojúhelníků bude mít dané úsečky jako základny a přitom budou mít stejnou výšku. Nejlépe si to představíme na obrázku, který vidíte níže.



Obr. 2

Ve vtahu se nám objevuje poměr $\frac{\|XC\|}{\|CY\|}$ a $\frac{\|YA\|}{\|AZ\|}$ a $\frac{\|ZB\|}{\|BX\|}$. My si je teď vyjádříme pomocí obsahu trojúhelníků.

$$\frac{\|XC\|}{\|CY\|} = \frac{S_{XCZ}}{S_{YCZ}} = \frac{S_{XCP}}{S_{YCP}} = \frac{S_{XCZ} - S_{XCP}}{S_{YCZ} - S_{YCP}} = \frac{S_{XZP}}{S_{YPZ}}$$

$$\frac{\|YA\|}{\|AZ\|} = \frac{S_{YAX}}{S_{ZAX}} = \frac{S_{YAP}}{S_{ZAP}} = \frac{S_{YAX} - S_{YAP}}{S_{ZAX} - S_{ZAP}} = \frac{S_{YPX}}{S_{ZPX}}$$
$$\frac{\|ZB\|}{\|BX\|} = \frac{S_{ZBY}}{S_{XBY}} = \frac{S_{ZBP}}{S_{XBP}} = \frac{S_{ZBY} - S_{ZBP}}{S_{XBY} - S_{XBP}} = \frac{S_{ZPY}}{S_{XPY}}$$

Nyní si všechny tři poměry dáme dohromady a mezi sebou vynásobíme.

$$\frac{\|XC\|}{\|CY\|} \cdot \frac{\|YA\|}{\|AZ\|} \cdot \frac{\|ZB\|}{\|BX\|} = \frac{S_{XZP}}{S_{YPZ}} \cdot \frac{S_{YPX}}{S_{ZPX}} \cdot \frac{S_{ZPY}}{S_{XPY}} = 1.$$

Tím jsme daný důkaz dokázali bez použití počítačového programu. Teď si uděláme počítačový důkaz, kde využijeme eliminaci proměnných. Budu dokazovat rovnici

$$(XYC).(YZA).(ZXB) = -1.$$

Nejdříve si označíme $l_1 = (XYC)$, kde C je dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům X, Y. Stejně tak si označíme $l_2 = (YZA)$ a $l_3 = (ZXB)$. Můžeme si to upravit na tvar $l_1.(C - Y) = C - X$, podobně $l_2.(A - Z) = A - Y$ a $l_3.(B - X) = B - Z$. Dále budeme předpokládat, že bod P je společný bod přímek XA, YB, ZC. Bod P bude mít souřadnice $[p_1, p_2]$. Zvolíme si soustavu souřadnic tak, jak je v obrázku č. 2.

Z definice dělicího poměru plynou rovnice

$$l_1.(c - x, 0) = (c, 0), l_2.(a_1, a_2 - z) = (a_1 - x, a_2), l_3.(0, b) = (0, b - z)$$

Odtud můžeme psát předpoklady:

$$(XYC) = l_1 \leftrightarrow l_1.(c - x, 0) = (c, 0) \leftrightarrow g_1: l_1.(c - x) - c = 0$$
$$(YZA) = l_2 \leftrightarrow l_2.(a_1, a_2 - z) = (a_1 - x, a_2) \leftrightarrow$$
$$g_2: l_2.a_1 - a_1 + x = 0 \wedge g_3: l_2.(a_2 - z) - a_2 = 0$$
$$(ZXB) = l_3 \leftrightarrow l_3.(0, b) = (0, b - z) \leftrightarrow g_4: l_3.b - b + z = 0$$
$$P \in XA: g_5: a_2.p_1 - a_1.p_2 = 0$$
$$P \in YB: g_6: b.p_1 + x.p_2 - x.b = 0$$
$$P \in ZC: g_7: z.p_1 + c.p_2 - c.z = 0.$$

Máme ideál I obsahující polynomy $g_1, \ldots . g_7$. V daném ideálu I budeme eliminovat proměnné a_1, a_2, b, c, p_1, p_2.

Příkaz, který zadáme do programu Mathematica.

$$\text{Eliminate}[\{l[1] * (c - x) - c == 0, l[2] * a[1] - a[1] + x =$$
$$= 0, l[2] * (a[2] - z) - a[2] == 0, l[3] * b - b + z =$$
$$= 0, a[2] * p[1] - a[1] * p[2] == 0, b * p[1] + x * p[2] - x * b =$$
$$= 0, z * p[1] + c * p[2] - c * z == 0\}, \{a[1], a[2], b, c, p[1], p[2]\}]$$

Dostaneme výsledek: $xzl[1]l[2]l[3] == -xz$

Poznámka: Opět nesmíme zapomínat zadávat znak „=“ (rovná se) dvakrát. Dále musíme indexy zadávat do hranatých závorek a opět nesmíme zapomínat dát mezi dvě proměnné znak „*“. Jinak nám daný příkaz nebude fungovat.

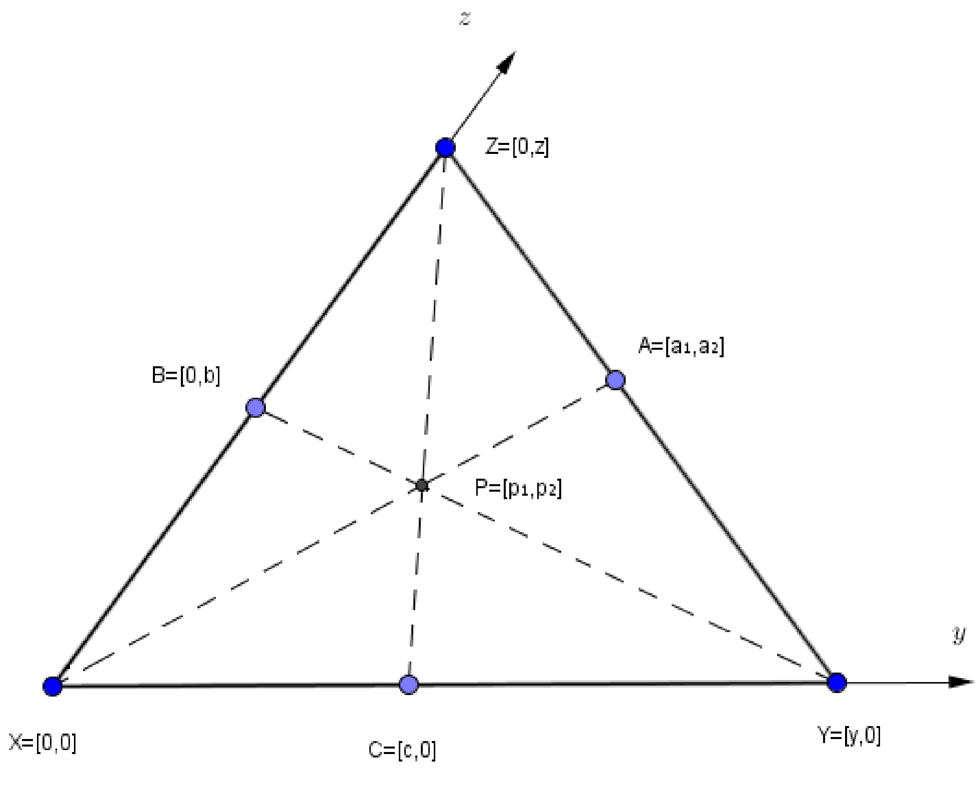
Důkaz dokončíme, když budeme předpokládat, že $x \neq 0, z \neq 0$. Budeme zkoumat, zda $xzl_1l_2l_3 = -xz$ je hledaná podmínka. Výraz $xzl_1l_2l_3 = -xz$ můžeme upravit na tvar $xz.(l_1l_2l_3 + 1) = 0$. Vypočítáme normální formu výrazu $l_1l_2l_3 + 1$, která nám vyjde 0 a proto implikace platí. Důkaz je tedy hotov.

5.3 Eulerova věta

Nechť P je libovolný bod v rovině trojúhelníka XYZ a nechť přímky XP, YP, ZP protínají po řadě strany YZ, ZX, XY nebo jejich prodloužení v bodech A, B, C, potom platí

$$\frac{\|PA\|}{\|XA\|} + \frac{\|PB\|}{\|YB\|} + \frac{\|PC\|}{\|ZC\|} = 1.$$

Danou větu vymyslel L. Euler.

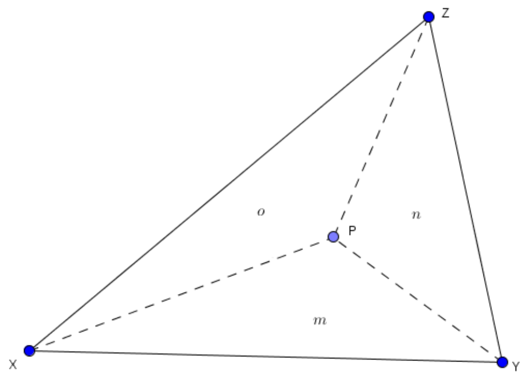


obr. 3

Než budeme dělat klasický důkaz, bez použití počítače, uvedeme si zde ještě vztah, který publikoval L. Euler v roce 1780. Pomůže nám to při dokazování.

Je dán trojúhelník XYZ a libovolný bod P roviny trojúhelníka, který neleží na stranách trojúhelníka XYZ. Potom platí:

$$\frac{\|XP\|}{\|PA\|}\cdot\frac{\|YP\|}{\|PB\|}\cdot\frac{\|ZP\|}{\|PC\|}=\frac{\|XP\|}{\|PA\|}+\frac{\|YP\|}{\|PB\|}+\frac{\|ZP\|}{\|PC\|}+2$$



obr. 4

Klasický důkaz vztahu $\frac{\|XP\|}{\|PA\|}\cdot\frac{\|YP\|}{\|PB\|}\cdot\frac{\|ZP\|}{\|PC\|}=\frac{\|XP\|}{\|PA\|}+\frac{\|YP\|}{\|PB\|}+\frac{\|ZP\|}{\|PC\|}+2$

uděláme tak, že si označíme orientované obsahy $m = XYP, n = YZP, o = ZXP.$ Potom platí:

$$\frac{\|XP\|}{\|PA\|}=\frac{\|XA\|-\|PA\|}{\|PA\|}=\frac{\|XA\|}{\|PA\|}-1=\frac{m+n+o}{n}-1=\frac{m+o}{n}$$

$$\frac{\|YP\|}{\|PB\|}=\frac{\|YB\|-\|PB\|}{\|PB\|}=\frac{\|YB\|}{\|PB\|}-1=\frac{m+n+o}{o}-1=\frac{m+n}{o}$$

$$\frac{\|ZP\|}{\|PC\|}=\frac{\|ZC\|-\|PC\|}{\|PC\|}=\frac{\|ZC\|}{\|PC\|}-1=\frac{m+n+o}{m}-1=\frac{n+o}{m}$$

Nyní můžeme psát

$$\frac{\|XP\|}{\|PA\|}.\frac{\|YP\|}{\|PB\|}.\frac{\|ZP\|}{\|PC\|}=\frac{m+o}{n}.\frac{m+n}{o}.\frac{n+o}{m}=\frac{(m^2+mn+om+on).(n+o)}{nom}$$

$$=\frac{m^2n+m^2o+mn^2+mno+omn+o^2m+on^2+o^2n}{nom}$$

$$=\frac{m}{o}+\frac{m}{n}+\frac{n}{o}+1+1+\frac{o}{n}+\frac{n}{m}+\frac{o}{m}=\frac{m+n}{o}+\frac{m+o}{n}+\frac{n+o}{m}+2$$

$$=\frac{\|XP\|}{\|PA\|}+\frac{\|YP\|}{\|PB\|}+\frac{\|ZP\|}{\|PC\|}+2$$

Tímto je důkaz hotov. Vraťme se nyní k Eulerově větě a dokažme $\frac{\|PA\|}{\|XA\|}+\frac{\|PB\|}{\|YB\|}+\frac{\|PC\|}{\|ZC\|}=1.$

Na základě předchozího důkazu můžeme psát:

$$\frac{\|PA\|}{\|XA\|}=\frac{n}{m+n+o},\frac{\|PB\|}{\|YB\|}=\frac{o}{m+n+o},\frac{\|PC\|}{\|ZC\|}=\frac{m}{m+n+o}$$

Takže bude platit:

$$\frac{\|PA\|}{\|XA\|}+\frac{\|PB\|}{\|YB\|}+\frac{\|PC\|}{\|ZC\|}=\frac{n}{m+n+o}+\frac{o}{m+n+o}+\frac{m}{m+n+o}=\frac{n+o+m}{m+n+o}=1.$$

Tím jsme dokázali Eulerovu větu.

Teď provedeme důkaz Eulerovy věty s využitím eliminace v počítačovém programu Mathematica.

Stejně jako u důkazu Cevovy věty můžeme psát, že $\frac{\|PA\|}{\|XA\|}=(PXA),\frac{\|PB\|}{\|YB\|}=(PYB)$, $\frac{\|PC\|}{\|ZC\|}=(PZC)$. Označíme si $t_1=(PXA)$. To můžu zapsat jako $t_1.(A-X)=A-P$. Stejně tak to udělám u ostatních. Označíme si $t_2=(\,PYB)$, což zapíšeme jako $t_2.(B-Y)=B-P$. Poslední si označíme $t_3=(PZC)$ a napíšeme $t_3.(C-Z)=C-P$.

Zvolíme si soustavu souřadnic tak, jak je v obrázku č. 3. Platí nám vztahy:

$$t_1.(a_1,a_2)=(a_1-p_1,a_2-p_2)$$

$$t_2.(-y,b)=(-p_1.b-p_2)$$

$$t_3.(c,-z)=(c-p_1,-p_2).$$

Odtud můžeme psát předpoklady:

$t_1=(PXA)\leftrightarrow t_1.(a_1,a_2)=(a_1-p_1,a_2-p_2)\leftrightarrow$

$$g_1\colon t_1.a_1-a_1+p_1=0\wedge g_2\colon t_1.a_2-a_2+p_2=0$$

$t_2=(\,PYB)\leftrightarrow t_2.(-y,b)=(-p_1.b-p_2)\leftrightarrow$

$$g_3\colon -t_2.y+p_1=0\wedge g_4\colon t_2.b-b+p_2=0$$

$t_3=(PZC)\leftrightarrow t_3.(c,-z)=(c-p_1,-p_2)\leftrightarrow$

$$g_5\colon t_3.c-c+p_1=0\wedge g_6\colon -t_3.z+p_2=0$$

$A \in YZ \;\leftrightarrow\; g_7\colon a_1.z + a_2.y - y.z = 0.$

Nejdříve si řekneme, co tvoří ideál I. Ideál obsahuje všechny polynomy $g_1, \dots, g_7$.

My budeme eliminovat proměnné a_1, a_2, b, c, p_1, p_2. Příkaz, který zadáme do programu Mathematica:

$$\begin{aligned}\text{Eliminate}[\{&t[1]*a[1]-a[1]+p[1]==0, t[1]*a[2]-a[2]+p[2]=\\ &=0, -t[2]*y+p[1]==0, t[2]*b-b+p[2]==0, t[3]*c-c+p[1]\\ &==0, -t[3]*z+p[2]==0, a[1]*z+a[2]*y-y*z=\\ &=0\}, \{a[1], a[2], b, c, p[1], p[2]\}]\end{aligned}$$

Dostaneme výsledek

$$yz(1-t[2]-t[3]) == yzt[1].$$

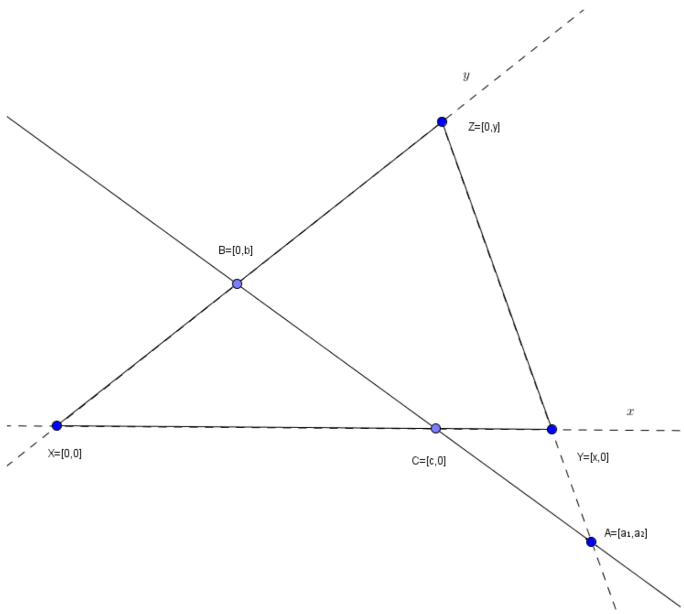
Výsledek si můžeme upravit na tvar $yz.(1-t_2-t_3)-yz.t_1=0 \rightarrow yz.(1-t_1-t_2-t_3=0$. Chceme dokázat, že $t_1+t_2+t_3=1$. Budeme předpokládat, že $yz \neq 0$. Vypočítáme si normální formu, která vyjde 0 a tím je věta dokázána.

5.4 Menelaova věta

Nechť A, B, C jsou po řadě tři body na stranách YZ, ZX, XY trojúhelníka XYZ. Potom body A, B, C leží na jedné přímce, právě když platí

$$(XYC).(YZA).(ZXB) = 1$$

Důkaz:



Obr. 5

Klasický důkaz se bude dělat podobně jako u Cevovy věty, kdy si $\frac{\|XC\|}{\|CY\|} \cdot \frac{\|YA\|}{\|AZ\|} \cdot \frac{\|ZB\|}{\|BX\|} = -1$ vyjádříme pomocí poměrů obsahů trojúhelníků BCX, BCY, BCZ. Všechny tři trojúhelníky mají stejnou stranu BC. Platí

$$\frac{\|XC\|}{\|CY\|} = \frac{\|CBX\|}{\|BCY\|}$$

$$\frac{\|YA\|}{\|AZ\|} = \frac{\|BCY\|}{\|CBZ\|}$$

$$\frac{\|ZB\|}{\|BX\|} = \frac{\|BCZ\|}{\|CBX\|}$$

Nyní můžeme psát:

$$\frac{\|XC\|}{\|CY\|} \cdot \frac{\|YA\|}{\|AZ\|} \cdot \frac{\|ZB\|}{\|BX\|} = \frac{\|CBX\|}{\|BCY\|} \cdot \frac{\|BCY\|}{\|CBZ\|} \cdot \frac{\|BCZ\|}{\|CBX\|} = -1.$$

Teď si uděláme důkaz s využitím eliminace v počítačovém programu. Zvolíme si soustavu souřadnic, tak jak máme v obr. 4. Označíme si $k_1 = (XYC)$ je dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům X, Y. Stejně tak to uděláme u ostatních. Označíme si $k_2 = (YZA)$ a $k_3 = (ZXB)$. Z tohoto dostáváme podmínky:

$k_1 = (XYC) \leftrightarrow m_1: k_1.(c - x) - c = 0$

$k_2 = (YZA) \leftrightarrow m_2: k_2.a_1 - a_1 - x = 0 \wedge m_3: k_2.(a_2 - y) - a_2 = 0$

$k_3 = (ZXB) \leftrightarrow m_4: k_3.b - b + y = 0$

Body ABC jsou kolineární, právě když platí $m_5: a_1 b + a_2 c - bc = 0$

Budeme eliminovat c, b, a_1, a_2. Ideál I tvoří polynomy $m_1, \dots, m_5$.

Příkaz, který zadáme do programu Mathematica

$$\begin{aligned}\text{Eliminate}[\{k[1] * (c - x) - c == 0, k[2] * a[1] - a[1] + x = \\ = 0, k[2] * (a[2] - y) - a[2] == 0, k[3] * b - b + y = \\ = 0, a[1] * b + a[2] * c - b * c == 0\}, \{a[1], a[2], b, c\}]\end{aligned}$$

Výsledek, který dostaneme

$$xyk[1]k[2]k[3] == xy,$$

můžeme upravit na tvar $xy.k_1 k_2 k_3 - xy = 0 \rightarrow xy.(k_1 k_2 k_3 - 1) = 0$.

Chceme dokázat $k_1 k_2 k_3 - 1 = 0$.

Nyní vypočítáme normální formu $k_1 k_2 k_3 - 1 = 0$, která nám vyjde 0 a důkaz je hotový.

Závěr

Cílem mé diplomové práce byla ukázka různých metod řešení soustavy rovnic, seznámení s pojmem ideál a využití eliminace při dokazování geometrických vět. S rozvojem počítačů došlo k velkému usnadnění řešení těchto příkladů, proto jsou příklady v této práci počítané ručně, a pak v matematickém programu Maple nebo Mathematica.

Na začátku práce jsem uvedla definici ideálu, řekli jsme si, co je eliminace a vypočítali jsme si některé příklady. Následně jsme se věnovali dvěma metodám a to determinantu Sylvesterovy matice a Gröbnerovým bázím. Nejdříve jsme si řekli, co je Sylvesterova matice a kdo ji vymyslel. Následně jsme si připomněli pojem determinant, a pak si ukázali, jak se řeší soustava rovnic s využitím determinantu Sylvesterovy matice na příkladech. Příklady jsme si vyřešili "ručně", a pak s použitím matematického programu. V kapitole Gröbnerovy báze jsme si museli nejdříve uvést několik definic. Ukázali jsme si, jak vypočítat soustavu algebraických rovnic bez použití počítače. Bylo to časově velmi náročné, a tak další příklady jsou počítány už jen v matematických programech Maple a Mathematica. Dále jsme se seznámili s eliminačními ideály. Při jejich počítání jsme využili Gröbnerovy báze. Uvedli jsme si větu o eliminaci a o rozšíření. Vyřešili jsme si několik příkladů. Poslední část je věnována vybraným geometrickým větám a jejich dokazování. Vždy je uvedená daná věta, klasický důkaz, a pak důkaz s využitím eliminace.

Zpracování této práce pro mě bylo velmi zajímavé a přínosné, měla jsem možnost prostudovat více metod pro řešení soustavy rovnic, se kterými jsem se do této doby nesetkala. Mohla jsem více rozšířit své vědomosti o programech Maple nebo Mathematica. Využila jsem i program GeoGebra na vytvoření obrázků daných geometrických vět. Měla jsem možnost vyzkoušet si dokazování geometrických vět jiným než jen klasickým způsobem.

Příklady, kde jsem využívala matematické programy, jsou v přiloženém CD ve složkách Maple17 a Mathematica.

Resumé

The target of my thesis is an illustration of different methods of solving the sets of equations, explanation of the term ideal and utilization elimination for a proof of geometrical phrases. The development of computers has been a major facilitation, so these mathematical problems are solved manually and then in a mathematical program Maple or Mathematica.

At the beginning of the thesis there is a definition of the term ideal and elimination and some of the problems are solved. Then there are explained determinant of the Sylvester matrix and Groebner basis and what determinant is. After that there is showed how to solve a set of equation with the determinant of the Sylvester matrix. The problems are solved manually and then by the mathematical programs. In a chapter Groebner basis there are a few definitions. It is showed how to solve a set of equations without mathematical programs. It was time consuming so the rest of problems are solved by the programs Maple or Mathematica. Then it is explained the elimination ideals. Groebner basis is used to count them. It is showed a statement of the elimination and expansion and some of the problems are solved.

The last part is dedicated to some geometric statements and their proof. It is always showed a statement, its classical proof and then a proof with the elimination.

Working on this thesis was very instructive for me. I had change to study more methods for solving the sets of equations. I could expand knowledge about the programs Maple and Mathematica. I used the program GeoGebra for creating geometrical pictures, too.

Problems that are solved by the mathematical programs are on the CD in files Maple17 and Mathematica.

Seznam použité literatury

[1] *Matematická olympiáda pro střední školy.* [online]. [cit. 2016-06-20]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-stredni-skoly

[2] DRÁBEK, Jaroslav a HORA, Jaroslav. *Algebra.Polynomy a rovnice.*1.vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2001, 125 s, ISBN 80-708-2787-4.

[3] COX, David, LITTLE, John, O´SHEA, Donal. *Ideals, varieties, and algorithms.*Springer. 3.vydání. 2007, ISBN 0-387-94680-2.

[4] *Determinanty matic řádu n.* [online]. [cit. 2016-06-20]. Dostupné z: http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/10_MI_KAP%202_3.pdf

[5] *Determinanty, matice a Sarrusovo pravidlo.* [online]. [cit. 2016-06-20]. Dostupné z: http://www.aristoteles.cz/matematika/linearni_algebra/determinanty/determinanty-a-matice-sarrusovo-pravidlo.php

[6] HAŠEK, Roman. *Řešení soustav nelineárních rovnic.* [online]. [cit. 2016-06-20]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/Algebra5/Soustavy_nelinearnich_rovnic_Resultant.pdf

[7] HAŠEK, Roman. *Cevova věta a její užití.* [online]. [cit. 2016-06-20]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO2/CevovaVeta.pdf

[8] HORA, Jaroslav. *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole,III.díl.* 1. vyd. Vydalo pedagogické centrum Plzeň, 2001,74 stran, ISBN 80-7020-092-8

[9] HORA, Jaroslav. *O počítačových důkazech matematických vět.* [cit. 2016-06-20].

[10]PECH, Pavel. *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii*. [online].2005 [cit. 2016-06-20]. Dostupné z: *http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Metody.pdf*

[11]TYR, Daniel. *Základní sumační techniky.* [online]. 2012 [cit. 2016-06-20]. Dostupné z: https://otik.uk.zcu.cz/bitstream/handle/11025/5434/BCP%20-%20Zakladni%20sumacni%20techniky%20-%20Daniel%20Tyr.pdf?sequence=1