ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

CELÁ ČÍSLA V UČIVU MATEMATIKY NA ZŠ A PROBLÉMY S NIMI

Diplomová práce

Bc. Dana Dimová

Učitelství pro 2.stupeň ZŠ, obor M-Ge

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň, 2017

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 26. června 2017

....
vlastnoruční podpis

Děkuji své vedoucí diplomové práce Mgr. Martině Kašparové Ph.D. za odborné vedení, trpělivost a cenné rady, které mi poskytla při psaní mé diplomové práce.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

Obsah

ÚVOD

Tématem mé diplomové práce jsou celá čísla v učivu matematiky na ZŠ a problémy s nimi. S celými čísly se setkáváme v reálném životě neustále, ale nepřipisujeme tomu velkou váhu. Už malé děti se s celými čísly setkávají a to hned jakmile si chtějí cokoliv spočítat, například kolik hraček mají v krabici. Začínají růst a zajímat se o své okolí. Pokud se s nimi v zimě podíváte na teploměr, který měří venkovní teplotu, začnou si všímat i toho, že čísla, která jsou pod nulou, mají před sebou znaménko. Ti zvídavější se začnou více vyptávat, buď doma, nebo paní učitelky ve škole. Pod celými kladnými čísly si v podstatě i malé děti umí něco představit, jelikož se s nimi setkávají běžně. Záporná celá čísla nejsou až tak běžná nebo je lidé tolik nepoužívají, proto s nimi mají žáci na ZŠ větší problémy.

Jeden z příkladů, na kterém i děti pochopí nebo alespoň si představí záporná čísla, jsou peníze. Při názorné ukázce, kde žák spolužákovi půjčí peníze a čeká, až mu je po částech vrátí, si ukážeme záporná celá čísla. Žáci se zde setkají s pojmy dluh, půjčka, zisk a jiné.

Dluh, půjčka nebo získání peněz většinu z nás provází také celý život a je to téma, které se celých čísel týká. Proto jsem se rozhodla sepsat svoji práci právě o celých číslech, protože z vlastní zkušenosti vím, že někteří žáci s nimi mají veliké problémy.

Ve své práci se zabývám tím, jaká byla historie celých čísel, celá čísla v RVP pro základní vzdělání, jak jsou ve školách vyučována a kde se dělají nejčastěji chyby. Větší část své práce věnuji aktivitám, kterými můžeme zpestřit hodiny, kde se vyučují celá čísla. Některé aktivity jsem se žáky na hodinách již zkoušela a byly pro ně zábavné. Spousta z nich se dá použít i v jiných hodinách matematiky.

Na závěr jsem navrhla písemnou práci, kde žáci ukáží, jak jsou na tom se znalostmi celých čísel. Poté zjistím, které úlohy jim dělají největší problémy.

1 HISTORICKÉ SOUVISLOSTI TÝKAJÍCÍ SE ZÁPORNÝCH ČÍSEL

Cesta k dnešní matematice byla velice dlouhá a trnitá, nikdo neví, jestli měla smysl. Mnoho lidí si myslí, že matematika začala až počítáním a rýsováním obrazců, ale není to tak. Objevila se již na začátku civilizace, kdy lidé měli první nutkání poznávat svět v pojmech, například „malý-velký“, „hodně-málo“, „blízko-daleko“. Tyto pojmy se dále rozšiřovaly na „více-méně“, „kolik-tolik“ a jiné. První stopy matematických poznatků lze vysledovat v některých archeologických nálezech, ty se objevily až později. Už tenkrát nebyla důležitá čísla a čáry, ale vztahy mezi nimi.

Matematika je věda o strukturách. Veškeré struktury si lidé vymýšleli za nějakým účelem, ne pouze pro zábavu, ale také, aby jim to ulehčilo život. Pod pojmem struktura si můžeme představit soubor vztahů mezi nějakými prvky v jednom objektu nebo také vnitřní uspořádání, které vykazuje nějakou pravidelnost. Vyznat se v některých strukturách nepotřebovali pouze matematici, lidé je používali v běžném životě. Po těchto počátcích matematika začala nabírat vysoké tempo. V některých oblastech pomaleji, jinde rychleji, v určitých oblastech zůstala souborem důležitých dovedností a oblastí filosofie. Podstata matematiky zůstala hodně podobná, učili se rýsovat, počítat a řešit složitější problémy. (Mareš, 2008, str. 11)

Matematika je založena na starých, úctyhodných objevech, ke kterým se připojují novější hodnoty a pravdy. Termín „matematika“ je odvozen od řeckého výrazu pro „vědění“. Skoro každá věc, kterou známe, je vyjádřena v číslech. První otázkou je, zdali je kvantita již přiřazená nebo číslo budeme pro naše účely teprve přiřazovat. Občas to vypadá, jako by matematika byla vrozená, protože stejné nebo podobné číselné soustavy se objevují v různých izolovaných kulturách. Mayové, Babyloňané a Indové vyvíjeli podobné matematické struktury, a pokud víme, nikdy nedocházelo mezi těmito kulturami k výměně myšlenek. Také čínská symbolika se přibližuje věštecké metodě z údolí řeky Niger. (Beatty, 2013, str. 7)

1.1 ZÁPORNÁ ČÍSLA V ČÍNSKÉ MATEMATICE

Podobně jako v jiných kulturách byla matematika ve staré Číně zaměřena na řešení praktických problémů. Zabývali se zde matematickými problémy již na přelomu tisíciletí, avšak některé poznámky čínských matematiků se nedochovaly nebo nejsou uvedeny dopodrobna. Řada matematických úloh souvisela se zemědělstvím, jelikož doba setby a sklizně obilí byla důležitá a zaměstnávala většinu obyvatel. Také byla hlavním stěžněm hospodářství. Dále se zajímali o kalendář a upravovali ho. Přesně určili délku roku na 365 a ¼ dne. Pro tyto výpočty byly velmi důležité jejich aritmetické schopnosti.

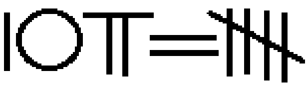
Hned jedna z prvních dochovaných matematických prací s názvem „Matematika v devíti knihách“ je dokladem mnoha matematických znalostí. Tato kniha se stala ústředním dílem staré čínské matematické literatury. Byla výsledkem mnohaleté práce matematiků. Celá kniha má velice pestrý obsah, v podstatě představuje encyklopedii matematických znalostí pro zeměměřiče, stavitele, finanční úředníky a další. Kapitoly v knize jsou rozčleněny většinou podle tématu, tj. podle předmětu úlohy nebo souvislosti úloh opírající se o profesionální zájmy, což znamená, že jedna kapitola obsahuje například příklady týkající se trojúhelníku. (Juškevič, 1977, str. 31)

Jeden dochovaný komentář Matematiky v devíti knihách sepsal ve 3. století n. l. Liu Hui. Žil ve válečné éře tzv. Tří království. Například odhadl číslo π pomocí opsaného a vepsaného mnohoúhelníku. Jeho komentář usnadňuje pochopení původního textu, navíc obohacuje původní text o nové poznatky. Byl jeden z mála tehdejších matematiků, o kterých se dochovaly nějaké informace a který ke svým tvrzením přidával alespoň náznaky důkazů. (Mareš, 2008, str. 99)

V 8. knize tohoto díla se poprvé v dějinách matematiky setkáváme s rozlišením kladných a záporných čísel. Záporná čísla byla pravděpodobně zavedena z důvodu zachování stejného postupu řešení soustav lineárních rovnic na počítací desce. V úlohách vedoucích na soustavu lineárních rovnic jde většinou o určování množství zrna ve snopech, z dobré, průměrné nebo špatné úrody. (Juškevič, 1977, str. 43)

Pro rozlišení záporných a kladných čísel byly vytvořeny speciální termíny, tyčinky a později symboly. Kladné prvky byly nazývané cheng, což znamená správný, spravedlivý a záporné fu, neboli dluh, nedostatek. Kladné hodnoty představovaly červené počítací tyčinky a záporné černé tyčinky. Využívalo se toho i v knihtisku. Existovaly i jiné postupy a označení; pro kladné hodnoty tyčinky s trojúhelníkovým průřezem a záporné tyčinky s čtvercovým průřezem.

Jiné vyjádření záporného čísla pomocí tyčinkových symbolů se provedlo přeškrtnutím poslední cifry. Například číslo 10 724 se vyjádří takto:

v symbolice 

Těžko se určují hranice mezi tím, kdy už pojem má nový smysl a tedy, kdy se začíná chápat jako záporné číslo. (Juškevič, 1977, str. 44-46)

Vrátíme se k 8. knize Matematiky v devíti kapitolách a na úloze ukážeme, v jakých souvislostech se záporná čísla objevila. Ve 3. úloze z 8. knihy se poprvé mluví o číslech cheng a fu. Úloha vyžaduje zavedení záporných čísel v průběhu výpočtu a definují se zde nejjednodušší pravidla pro operace se zápornými čísly. (Juškevič, 1977, str. 44-46)

„Mějme 2 snopy lepšího obilí, 3 snopy středního obilí a 4 snopy horšího obilí, obsah žádného není plné dou. Když lepší vezme střední, střední vezme horší a horší vezme lepší vždy po jednom snopu, je obsah plné dou. Ptáme se, kolik je obsah snopu lepšího, středního a horšího obilí?

Odpověď zní: 1 snop lepšího obilí má obsah 9 z 25 dílů dou.

1 snop středního obilí má obsah 7 z 25 dílů dou.

1 snop horšího obilí má obsah 4 z 25 dílů dou. “

Úloha vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x + y \phantom{{}+4z} &= 1 \\ 3y + z &= 1 \\ x \phantom{{}+3y} + 4z &= 1 \end{aligned}$$

Poté by měla být sestavena tabulka fang cheng. Vysvětlení, jak sestavovat tabulku v textu je, má se použít i v předchozích příkladech. Je to metoda paralelního ohodnocení tj. „metoda“ řešení soustavy lineárních rovnic. (Hudeček, 2008, str. 191)

Dle Juškeviče, 1977 úpravy vedou k záporným číslům, proto je nutné pokračovat podle pravidla cheng-fu:

„Jsou-li označení táž, pak se odečítá, jsou-li označení různá, pak se přičítá, je-li kladné samo, pak se stane záporným, je-li záporné samo, pak se stane kladným. Jsou-li označení různá, pak se bude odečítat, jsou-li označení stejná, pak se bude přičítat, je-li kladné samo, pak (zůstane) kladné, je-li záporné samo, pak (zůstane) záporné."

Odpovídající pravidla pro násobení a dělení nejsou v „Matematice v devíti knihách" uvedena.

Staročínští matematici používali záporná čísla často. Pokusili se jim také dát nějaký jednoduchý reálný výklad, tedy peněžní dluh. (Juškevič, str. 46)

Záporná řešení rovnic v této knize ovšem známa nebyla. „Zavedení záporných čísel a pravidel pro jejich sčítání a odčítání patřilo k největším objevům čínských matematiků." (Juškevič, str. 46)

Záporná čísla se objevila také v indické matematice, v Evropě první náznaky u Leonarda Pisánského ve 12. století a později u Nicolase Chuqueta v 15. století. Také Diofantos, který působil ve 3. století n. l. v Alexandrii, už používal pravidla pro operace s koeficienty odečítaných množství a přičítaných množství v polynomech. Dokonce formuloval pravidlo, kdy odečítaná veličina násobená odečítanou veličinou dává veličinu přičítanou. Nevěnoval tomu však zvláštní pozornost, proto nedochází k pojmu záporných čísel. (Juškevič, str. 46)

1.2 ZÁPORNÁ ČÍSLA V INDICKÉ MATEMATICE

V indické kultuře bylo mnoho učenců, kteří se zabývali matematikou a jejími souvislostmi. Není přesně známo, kdy se v Indii objevila záporná čísla. První zmínky o záporných číslech se objevily v díle Brahmagupty (598 - 668). V jeho díle se už vyskytovala všechna základní pravidla pro práci se zápornými čísly, je proto pravděpodobné, že Indové převzali pravidla z čínské matematiky, kde pomocí nich řešili soustavy lineárních rovnic. Indové přiřadili kladným a záporným hodnotám vlastní názvy, kladná čísla nazývali „dhana" nebo „sva", což znamená majetek a záporná čísla „rina" nebo „kšaja", tedy dluh, snížení. Záporná čísla byla označována tečkou nad číslicí, proto mohla být použita v zápisu rovnic.

Pravidla pro kladná a záporná čísla jsou obsažena v dílech Brahmagupty. Jeho pravidla se netýkají pouze sčítaní a odčítání, ale oproti čínské matematice byla rozšířena o pravidla násobení a dělení, umocňování dvěma a druhé odmocniny. (Juškevič, 1977, str. 7)

Brahmagupta byl matematik a astronom, autor veršované astronomické práce s názvem „Zdokonalené pojednání Brahmovo“. Tato kniha má jednadvacet kapitol zabývajících se jak aritmetikou, tak geometrií. Již tehdy Brahmagupta používal nulu jako plnohodnotnou číslici a vytvořil pravidla pro počítání s nulou a zápornými čísly. Pro Brahmaguptu nebyla nula ani kladné ani záporné číslo, ale byla součtem dvou opačných čísel. Tato pravidla byla ovšem známa už dříve.

Následující zpracováno podle Sýkorová, 2014, str. 197-198

Pravidla pro počítání se zápornými čísly a nulou, která nalezneme v díle Brahmagupty:

Pravidla pro součet

Součet dvou kladných čísel je kladný, dvou záporných čísel je záporný, kladného a záporného čísla je jejich rozdíl. Vědělo se, jak určit znaménko tohoto rozdílu, ale podrobnější vysvětlení nám přináší až Šrípati (1019–1066), který objasní, že znaménko rozdílu se shoduje se znaménkem většího čísla. A dále poznamenává, že součet kladného a záporného čísla je jejich rozdíl nebo jsou-li stejná je to nula. Pracoval pouze s absolutní hodnotou čísel, v této době bylo uspořádání čísel chápáno jinak než dnes. Dnešní chápání uspořádání „větší“ a „menší“ bylo v Evropě zavedeno až v 17. století.

Symbolicky: $(+a) + (+b) = +(a + b)$

$(-a) + (-b) = -(a + b)$

$(+a) + (-b) = a - b$

Pravidla pro rozdíl

Od většího je nutno odečíst menší. Výsledek je kladný, pokud odečítáme kladné od kladného a záporné od záporného. Pokud odečítáme větší od menšího (co do znaménka), rozdíl se obrací, tedy záporné se stává kladným a kladné záporným. Nakonec pokud odečítáme kladné od záporného nebo záporné od kladného, je nutné je sečíst. Při počítání s nulou je záporné mínus nula záporné, kladné je kladné a nula je nula.

Symbolicky: $(+a) - (+b) = +(a - b)$

$(-a) - (-b) = -(a - b)$

$(+ a) - (-b) = a + b$

$(-a) - (+b) = -(a + b)$

Pravidla pro násobení

Součin záporného a kladného je záporný, dvou záporných kladný a dvou kladných kladný. Součin záporného a nuly, kladného a nuly nebo nuly a nuly je nula.

Pravidla pro dělení

Kladné dělené kladným nebo záporné dělené záporným je kladné. Nula dělená nulou je nula. Kladné dělené záporným nebo záporné dělené kladným je záporné. Kladné nebo záporné dělené nulou je zlomek se jmenovatelem nula.

Další učenci, kteří se zabývali pravidly záporných čísel, byli například Mahávíra a Šrípati, pravidla si upravili a každý používal ta svá.

Za nejuznávanějšího indického matematika je považován Bhāskara II., jehož jméno je v překladu učený, vzdělaný. Podle některých pramenů byl vedoucím astronomické observatoře při matematické škole, ale tyto údaje nejsou dokázány. Bhāskara je autorem významného díla „Lílávátí“, podle legendy nese jméno jeho dcery. Dále například napsal Algebru a astronomickou práci. Právě v Algebře neboli Bījaganitě, která se skládá z osmi kapitol, věnuje první část operacím se zápornými čísly, s nulou a odmocninami. (Juškevič, 1977, str. 130)

Všechna známá indická díla o aritmetice a algebře obsahují část, která se věnuje základním operacím s nulou. Dělení nulou jim už tehdy dělalo problémy a staří Indové považovali dělení nulou za nemožné. Vzhledem k tomu, že Indové považují algebru za důležitější než aritmetiku, dokonce podle některých je algebra zdrojem pro aritmetiku, jsou všechna tato pravidla používána v algebraických výpočtech a řešeních lineárních rovnic a jejich soustav. Mnoho metod algebry se již od konce 8. století začalo šířit v arabských zemích a tím ovlivnilo vývoj matematiky v Evropě. (Sýkorová, 2014)

1.3 MATEMATIKA V EVROPĚ A FIBONACCIHO PŘÍNOS

Následující zpracováno podle Juškevič, 1977, str. 362-377

Ve středověku byla Evropa zasažena krizí, která byla doprovázena povstáním otroků a vyčerpávajícími válkami mezi národy. Postupně v rozmezí 5. - 12. století vznikalo v Západní Evropě mnoho nových sjednocujících se a rozpadajících se států. Za vládu nad těmito prakticky nezávislými státy měli zodpovědnost jejich správci. Postupně se v rozvinutějším období začala rozvíjet technika, růst obchodu, zemědělství, města začínají bojovat o svou nezávislost, začínají se stávat centrem obchodu, řemesel. Vytváří se nové národy a začínají se vytvářet pevnější monarchistické státy. To nic nemění na tom, že i tato doba od 12. století a dále je charakteristická také vykořisťováním obyvatel, rolnickými povstáními a také bojem uvnitř měst.

V roce 1170 se narodil Leonardo Pisánský, řečený Fibonacci. Jeho rodným městem je Pisa, v Itálii, kde v této době byl obrovský rozvoj řemesel, obchodu, peněžnictví a mnohá italská města se stávala centry rozvoje. Obchodníci z těchto měst hodně cestovali, snažili se poznat umění a vědu jiných národů. Probíhal obrovský rozvoj, ale také válečné konflikty o území. Postupně se začala zvyšovat poptávka po vzdělaných lidech: učitelích, umělcích, lékařích a právnících.

Jeden z městských obchodníků měl syna Leonarda, který je známý jako Leonardo Fibonacci z Pisy. Mladý Leonardo přijel na přání svého otce do osady Bougie, která se nachází v dnešním Alžíru, kde se začal učit aritmetickým postupům. Leonardo byl velice šikovný a jeho znalosti převyšovaly znalosti potřebné pro funkci úředníka nebo obchodníka. Leonardo později cestoval za obchodem do Egypta, Sýrie, Byzance, na Sicílii a také do Provance a dále si zlepšoval své matematické znalosti.

Roku 1202 vydal svou „Knihu o Abaku“, kterou ještě roku 1228 vydal upravenou. Tato kniha byla jedním z nejdůležitějších děl týkajících se nové aritmetiky a dalších matematických znalostí v Evropě. Uspořádal v ní mnoho poznatků jak z arabského světa, z geometrie a také mnoho nových poznatků vlastních konkrétních úloh a metod. Toto dílo bylo ohromující už svým objemem, v tištěné podobě mělo 459 stran. Leonardo v této knize vyložil aritmetiku a algebru lineárních a kvadratických rovnic v takové úplnosti a komplexnosti jako nikdo před ním a ani nikdo dlouho po něm. Přestože název předesílá něco jiného, vhodnější by byla asi „Kniha o početním umění“, celé dílo pojednává o velkém množství početních metod aritmetiky, algebry a teorie čísel, které jsou doplněny o mnoho demonstrativních příkladů. Snažil se v něm představit indický početní systém, hlavně italskému lidu. Je to jakési encyklopedické dílo, které se zabývá skoro celou matematikou 13. století. Obsahuje také mnoho pravidel a postupů.

Leonardo zde často používá záporná čísla, jelikož byl velmi nadaný na počítání s nimi.

Fibonacci přinesl nový indicko-arabský poziční desítkový systém a propagoval jeho používání v aritmetických operacích. Využívá arabských číslic, ale stále o nich mluví jako o indických symbolech. Také vykládá o znázornění čísel na prstech a předvádí tabulky jednotlivých součtů a součinů. Objasňuje pravidla a důkazy pro sčítání a násobení kladných a záporných čísel. Dále uvádí zajímavé příklady o obchodnících a také příklady ze života.

Přistupoval k matematice originálně, řada jeho úloh je řešena více způsoby a použité metody můžeme porovnat. Metodicky vše uspořádal a kladl veliký důraz na důkazy. Fibonacciho dílo převyšovalo jeho kolegy i následovníky. Proto ovlivnilo evropský vývoj v mnoha směrech a bylo pochopeno až na konci středověku. (Bečvář, 2001, str. 269)

2 CELÁ ČÍSLA VE VÝUCE MATEMATIKY

Tato kapitola byla zpracována podle RVP pro ZŠ str. 30-35

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace je dle RVP pro ZŠ rozdělen na čtyři tematické okruhy. Na 1. stupni jsou to: Číslo a početní operace, Závislosti, Vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a v prostoru, Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Na 2. stupni je nepatrná změna a to: Číslo a proměnná, ostatní tematické okruhy zůstávají stejné.

V tematickém okruhu Čísla a početní operace na 1. stupni, na který na 2. stupni navazuje tematický okruh Číslo a proměnná, si žáci osvojují aritmetické operace ve třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění, tedy proč je operace prováděna tímto postupem a významové porozumění, tedy umět operaci propojit se situací ze života. Učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním a poté je zpracovávají.

V rámci učiva 1. stupně na ZŠ se žáci již setkají s pojmem celá čísla. Dle RVP by se s nimi měli setkat ve 2. období 1. stupně, což je během 4. a 5. ročníku. Probírají přirozená čísla, poznají také desetinná čísla, zlomky a v rámci číselné osy se dotknou pojmu celá čísla. Porozumí významu znaku „–“ pro zápis celého záporného čísla a dokáží je vyznačit na číselné ose. Všímavější žáci přicházejí s dotazy ohledně znaku „− “ sami, hlavně ve chvíli, kdy se začne ve škole probírat číselná osa. Záporná celá čísla si žáci spojují hlavně s teploměrem. V zimě je přeci teplota pod bodem mrazu, proto je tam znaménko „−“. Právě při této příležitosti si žáci na 1. stupni všimnou, že před některými čísly se objevuje znaménko mínus. Závislé je to hlavně na učebnicích, které daná škola využívá a také na učiteli.

V rámci učiva 2. stupně se celá čísla probírají daleko více, v tematickém okruhu Číslo a proměnná, který navazuje a prohlubuje učivo probírané na 1. stupni. Patří sem například: celá čísla, čísla navzájem opačná a znovu také číselná osa. V RVP v rámci očekávaných výstupů je dáno, že žáci provádí početní operace v oboru celých, ale také racionálních čísel. Dále počítají druhou mocninu a odmocninu, určují hodnotu výrazu, sčítají a násobí mnohočleny, řeší rovnice. Analyzují a řeší jednoduché problémy, modelují konkrétní situace, v nichž využívají matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel.

2.1 Celá čísla v jednotlivých ročnících

Zařazení učiva do jednotlivých ročníků jsem čerpala ze ŠVP 5. ZŠ Cheb, Matěje Kopeckého 1, příspěvková organizace, kde pracuji jako učitelka na 2. stupni. Matematiku učím v 6. a 7. ročníku.

Na 1. stupni se žáci setkají poprvé se zápornými celými čísly ve 4. či 5. třídě, když probírají číselnou osu a dozví se, že čísla menší než nula se píší se znaménkem „–“. Mohou si s učiteli také uvést příklady, kde se tedy s takovými čísly mohou setkat. Například teploměr, podzemní podlaží v supermarketu, televizní pořad počasí – záporná čísla v zimě u teploty, půjčení a dluh v penězích, pokles vody v řekách a jiné. Na některé příklady přijdou sami žáci, jiné jim představí učitel. Další operace a vysvětlení se jim k těmto číslům většinou nedostává, až později na 2. stupni. Mají tedy ponětí, že taková čísla existují, mají před sebou znaménko „−“, tušení o uspořádání, ose a souřadnicích a to je asi vše.

Někteří učitelé jim tato čísla připomenou ještě ve chvíli, kdy se žáci učí zanášet údaje do tabulky z grafů a naopak. Zde žákům představí osu x a y a mohou jim ukázat i záporné hodnoty.

Na 2. stupni se celá čísla začínají probírat v 7. ročníku, kde se s nimi žáci seznámí již poněkud podrobněji. Kromě toho, že budou vědět, jak se záporná celá čísla zapisují, kde se s nimi setkají, tak se naučí i početní operace s nimi. Záporná čísla budou dále souviset s kapitolou racionálních čísel, kde žáci zjistí, že znaménko „–“ nemusí být spjato pouze s přirozenými čísly, ale také se může používat před desetinnými čísly, zlomky, obecně se těmto číslům říká racionální čísla.

Později se tato čísla objevují v jiných tématech probíraných v rámci matematiky na celém 2. stupni. Například v řešení rovnic a nerovnic, při řešení slovních úloh. V každém ročníku je zařazeno do učiva téma „Nestandardní aplikační úlohy a problémy“, kde se podle jednotlivých ročníků přidává na obtížnosti jednotlivých úloh. Součástí tohoto tématu jsou číselné a logické řady, které s celými čísly v některých případech také souvisí. Žáci se pomocí těchto cvičení naučí doplnit číselnou logickou řadu podle daných vlastností, řešit slovní úlohy a jiné.

Nyní se podíváme na zařazení celých čísel do jednotlivých ročníků v rámci 2. stupně.

2.1.1 7. ROČNÍK

7. ročník je v rámci tématu celých čísel nejdůležitější a hlavně ten úvodní. Žáci se zde seznámí se všemi důležitými postupy, které budou využívat i ve vyšších ročnících. V 7. ročníku se žáci s celými čísly v podstatě seznamují, přestože mají jakési tušení, že taková čísla existují, moc znalostí o nich nemají. Na naší škole lze najít v ŠVP takto sepsané konkretizované učivo:

- čísla celá – kladná, záporná, nula
- číselná osa a uspořádání celých čísel na ní
- čísla navzájem opačná
- absolutní hodnota čísla
- sčítání a odčítání celých čísel
- násobení a dělení celých čísel

Cílem těchto témat je, že žák: umí zapsat záporné a kladné číslo a zobrazit je na číselné ose, určí opačné číslo k danému číslu, určí absolutní hodnotu celého čísla, porovnává dvě celá čísla, sčítá a odčítá dvě celá čísla, násobí a dělí dvě celá čísla, řeší slovní úlohy z praxe s využitím základních početních operací s celými čísly.

Kromě tohoto se žáci seznámí také se složitějšími příklady, kde mají v zadání více početních operací najednou a musí vědět, jaká operace má přednost. Další důležité úlohy, jsou slovní úlohy, kde si žáci nejdříve musí vypsat to nejdůležitější z daného slovního zadání a pak teprve mohou tyto úlohy řešit.

Na učivo „celá čísla“ navazují racionální čísla, kde se dále využívají znalosti z předchozí kapitoly, jelikož v učivu se jim objevují i záporná racionální čísla a oni se s nimi učí pracovat.

Racionální čísla jsou ze zkušeností pro žáky daleko složitější než samotná celá čísla. Například práce s číselnou osou a kladnými či zápornými celými čísly je pro ně o hodně lehčí, než takto zaznamenat záporné a kladné zlomky nebo desetinná čísla. S početními operacemi je to podobné, racionální čísla jsou pro některé žáky veliký problém.

Také v kapitole týkající se „Závislosti, vztahů a práce s daty“, se žáci mohou setkat se zápornými celými čísly, například při zakreslení souřadnice bodu v pravoúhlé soustavě souřadnic.

2.1.2 8. ROČNÍK

V 8. ročníku si žáci připomenou celá čísla v situacích hned několikrát. Při probírání učiva „mocniny a odmocniny“, kde se probírá druhá mocnina a odmocnina a jejich vlastnosti, jejich určení pomocí tabulek a kalkulačky, třetí mocnina a odmocnina.

Žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel, užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu, zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor, matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných.

Dále se zde probírá téma „výrazy“, kde žák: určí hodnotu daného číselného výrazu, dokáže zapsat slovní text pomocí výrazů s proměnnými v jednoduchých případech, sčítá a odčítá výrazy, násobí a dělí mnohočlen jednočlenem, umí upravit výraz vytýkáním před závorku, násobí dvojčlen dvojčlenem. Pro veškeré tyto operace potřebuje žák znát pravidla počítání s celými čísly.

Se zápornými celými čísly se žáci mohou setkat i v učivu „rovnice“, které obsahují výpočet lineárních rovnic, kořen rovnice, řešení pomocí ekvivalentních úprav a ověření výpočtu pomocí zkoušky. Početní operace s racionálními, reálnými a celými čísly se mohou objevit také ve slovní úloze.

Další téma, které se v 8. ročníku probírá, je „závislosti a práce s daty“, kde se žáci setkají s příklady závislostí ze života, provádí jednoduchá statistická šetření a zapisují výsledky do tabulky nebo je vyjadřují pomocí různých diagramů a grafů. Žáci musejí umět jak z grafu, tak z tabulky údaje přečíst a i zde se mohou objevit celá čísla, jak kladná, tak záporná.

2.1.3 9. ROČNÍK

V posledním ročníku se žáci seznámí s novými tématy, jako jsou soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými a lomenými výrazy. Těmito všemi tématy se prolíná práce s celými čísly a žáci veškerá pravidla pro jejich počítání stále využívají.

Záporná celá čísla se objeví například i ve finanční matematice, kde kromě jiného řeší půjčky, dluhy a naopak nějaký zisk. V rámci dluhů lze znovu počítat se zápornými celými čísly.

Žáci v 9. ročníku skládají přijímací zkoušky na střední školy a znalosti počítání s celými čísly se jim velice hodí a je nutné je s nimi neustále opakovat. Žáci, kteří studují na gymnáziích, se v některých tématech dostávají do větších podrobností. Jako například u druhé mocniny se setkávají i s mocninami, kde je exponent záporné číslo, tedy 3^{-2} a jiné.

3 POJEM ZÁPORNÉHO CELÉHO ČÍSLA

Pojem záporného celého čísla a vůbec celá kladná a záporná čísla jsou ve většině učebnic pro základní školy zaváděny skoro stejně a to pomocí různých příkladů z reálného života.

Následující dvě strany byly zpracovány podle (Hejný, 2014, str. 184–187).

Žáci znaménko „–“ většinou znají jako znaménko operace odčítání. Později pomocí tohoto znaménka začnou zapisovat záporné číslo.

Představa záporných celých čísel je pro žáky docela náročná. Příčin náročnosti je hned několik. Ve stati ruské didaktičky M. D. Koškinové (1987), která je uvedena v knize profesora Hejného, jsou uvedeny čtyři příčiny náročnosti záporných čísel.

První z nich je řídký výskyt záporných čísel v reálném světě. Přestože se záporná čísla objevují na teploměru, na výtahu, při dluzích a ziscích nebo také v letopočtech, není to ani pro tyto oblasti typické a žáci se s těmito hodnotami nesetkávají ani zdaleka tak často jako například s přirozenými čísly, která všichni znají a mají o nich určitou představu. Například oblast financí je se zápornými čísly spojena, ale neřekneme „mám mínus sto korun“, spíše „jsem sto korun v mínusu“ nebo nepoužijeme „dlužíš mi mínus sto korun“, ale „dlužíš mi sto korun“. Takže znaménko „–“ jako znak záporného čísla člověk většinou nepoužije.

Druhou příčinou je náhlé začlenění záporných čísel do výuky bez náležité přípravy. Je tedy důležitá otázka, jak žákům daný problém představit. Měli bychom se nad tím nejdříve pořádně zamyslet.

Třetí příčina je způsob výuky záporných čísel zaměřený na nácvik pravidel. V některých matematických učebnicích jsou tato pravidla podávána ve velice složité formě.
V současných učebnicích je také problém s tím, že celá čísla jsou obsažena pouze v jediné kapitole, která je pro ně určena. Poté se z učebnice úplně vytratí a na průběžné procvičování již nedojde.

Čtvrtá příčina je faktická nepotřebnost záporných čísel. K čemu jsou vlastně záporná celá čísla potřeba? Jestliže máme s dětmi ve škole záporná celá čísla zavádět, měli bychom také znát důvod, k čemu je budeme potřebovat. Pokud jde o teploměr, výtah, samozřejmě znaménko můžeme použít. Ale k čemu nám opravdu v životě jsou? V reálném životě lze informaci se záporným číslem vždy sdělit pomocí přirozeného čísla. Např. Místo „Jedu do minus třetího patra.“ lze sdělit „Jedu do třetího podzemního patra.“

Podle profesora Hejného je důležité dosáhnout už v posledních dvou ročnících 1. stupně toho, aby záporné číslo nebylo v představách žáků jen někde v pozadí, ale právoplatnou součástí pojmu číslo a aby žákům zevšednělo.

Profesor Hejný na modely záporných čísel nahlíží jako na sémantické (významové) modely záporných čísel, které se vztahují k adrese, veličině, operátoru změny a s tím související opozitní modely.

Adresa je údaj místa nebo času vyjádřený záporným číslem, který lze použít na reálné stupnici teploměru, výtahu nebo na strukturálním modelu číselné osy. Adresy −1, −2 a jiné mají kotvení sémantické, ale také poukazují na číselnou osu. Tu vnímáme ve vodorovné a svislé poloze. K objevení svislé číselné osy používá profesor Hejný příběh „Tajné chodby“, který vypráví žákům již ve 2. třídě na 1. stupni ZŠ, kde hlavní hrdina v chodbě stoupá nebo klesá a žáci musí najít tajné dveře. Žáci si tuto cestu kreslí na čtverečkovaný papír a postupem času si diktování učitele začnou zjednodušovat. Nejdříve například pomocí šipek a čísel, později dojdou sami k zápisu celých čísel, např.: +3, −5.

Veličina je uspořádaná trojice (číslo, jednotka, objekt). Přestože záporná celá čísla existují, pro žáky na 1. stupni se dostanou do povědomí pouze v případě teploměru nebo pokud se týkají peněz. V představě žáka je teplota vnímána pouze jako nějaká adresa na stupnici. Někteří z nás také nerozlišují například pojem váha a hmotnost. Nejlépe žáky zaujme finanční model, kde si představí peníze.

Operátor změny měří změnu adresy nebo operátoru. Záporné číslo použijeme jen výjimečně, v případě, kdy je těchto změn více, jako například při putování tajnou chodbou. Některé žáky tyto představy zaujaly a vytvořili si takzvané opozitní modely. Jedná se o modely, v nichž vystupují dvě opozitní kvality jako: majetek – dluh, vpravo - vlevo, nahoru - dolu, vpřed - vzad a jiné. Použijeme-li výrok „Pepík dal dva vlastní góly“ a změníme ho na „Pepík dal mínus dva góly“, a necháme žáky nad naším výrokem přemýšlet, dočkáme se mnoha reakcí. Toto téma vyvolalo u žáků velikou diskuzi. Někdo třeba namítl, že pokud by Pepík dal i dva normální góly, dal by pak dva mínus dva, tedy nula gólů, což je lež, neboť on dal čtyři góly. Debata pokračovala a žáci přicházeli na další a další možnosti a tím si upevňovali představu „záporného čísla“.

Metoda Hejného v dnešní době na základních školách není ještě tolik rozšířena, jelikož učitelé v ní nejsou zběhlí a některé základní školy to ani neumožňují.

Na většině ZŠ se vyučuje podle klasických učebnic, a jak jsem již zmiňovala, záporná a kladná celá čísla jsou v učebnicích 2. stupně zaváděna pomocí příkladů z různých reálných situací.

Jedním způsobem je zavedení záporného celého čísla, kde použijeme pořadí hodnot na určité číselné ose. Záporné celé číslo můžeme také vysvětlit jako nějakou odchylku od normálu.

V učebnicích matematiky ZŠ jsou využity tyto příklady:

(První příklad jsem vzala sice z učebnice pro 5. ročník, ale v roce vydání byl 5. ročník součástí 2. stupně. Základní vzdělávání trvalo pouze 8 let.)

Normální stav hladiny v řece je dán výškou 160 cm ode dna. Tato výška se označuje číslem 0. Po velkém dešti stoupla hladina řeky o 20 cm. Za 8 dní klesla o 12 cm. Jaký byl stav vodní hladiny? (Urbanová, 1988, str. 106)

Poté se s žáky řeší odchylka od normálu a to kladná nebo záporná. Tedy 20 cm nad normálem znamená + 20. Pokud se v úloze dostane hladina pod normál, je použito znaménko „–“. V jiných učebnicích je tento příklad v různých obměnách použit také s různými doprovodnými obrázky a grafy. Výsledné hladiny jsou často zanášeny také do tabulky jako v následující úloze, viz (Urbanová, 1988, str. 108):

Žáci mají zadáno, že hladina řeky za normálních podmínek je 120 cm. Jejich úkolem je přečíst z následující tabulky odchylky od normálního stavu vodní hladiny:

výška vody (cm)	**120**	**150**	**100**	**80**
odchylka (cm)	**0**	**+30**	**-20**	**-40**

Další možnost, jak přiblížit žákům záporná celá čísla, je přiblížit je žákům na domě s výtahem a několika podlažích, jako například: V obchodním domě Regina jela prodavačka výtahem ze 4. nadzemního podlaží o pět podlaží níže. Ve kterém podzemním podlaží vystupovala? (Trejbal, 1997, str. 66)

Co se týče financí, jsou příklady také různě obměňované, jako například tento: Cyril si zapisoval, kolik korun dostal a kolik utratil. (Coufalová, 2007, str. 117)

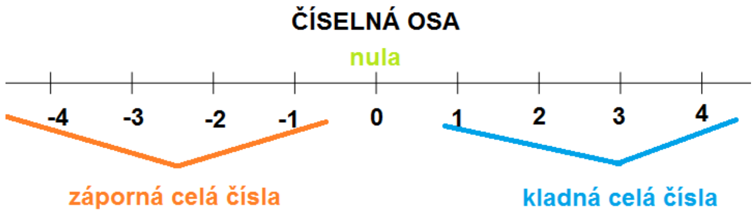
Datum	Příjmy Kč	Výdaje Kč
1. 4.	Kapesné 50	
5. 4.		Dárek babičce 35
8. 4.	Od dědy 40	
13. 4.		Časopis 20

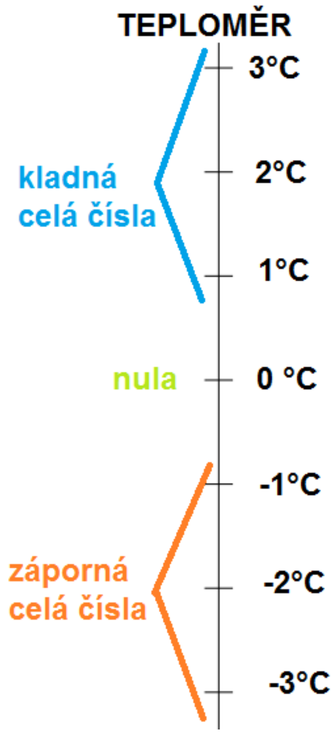
Obr. Tabulka (Coufalová, 2007, str. 117)

Žáci dostali za úkol tyto údaje zanést do grafu. Společně s učitelem si objasnili, která čísla z tabulky jsou kladná celá čísla a záporná celá čísla.

Úlohy týkající se financí jsou ve většině učebnic v různých obměnách. Někdy doplněné grafy, kde žáci vidí, co je pod osou a nad osou, tedy příjmy a výdaje.

Poslední typickou úlohou ve všech učebnicích je teploměr, jak ve svislé, tak ve vodorovné poloze. Na teploměru si žáci velice dobře představí rozdíl mezi kladnými a zápornými celými čísly. V některých případech učitel přinese teploměr do hodiny.





Teploměr je žákům představen jako číselná osa, která může být buď svislá, nebo vodorovná. Na této ose je vysvětlen rozdíl mezi zápornými, kladnými celými čísly a nulou, která není ani záporné a ani kladné číslo.

„Na svislé číselné ose kladná čísla znázorňujeme nad nulou a záporná čísla znázorňujeme pod nulou. Na vodorovné ose kladná čísla znázorňujeme vpravo od nuly a záporná čísla znázorňujeme vlevo od nuly.“ (Coufalová, 2007, str. 118)

Po prohlédnutí veškerých příkladů a procvičení nejen těch, co jsou v učebnici, ale také těch, co si učitelé vymyslí, je většinou žákům představena definice celých čísel. V učebnicích matematiky pro ZŠ jsou definice upravené a zjednodušené.

Následující definice celých čísel byla převzata (Trejbal, 1997, str. 67).

„Přirozeným číslům 1, 2, 3…říkáme kladná celá čísla. Zapisujeme je také +1, +2, +3,…. Opačným číslům k přirozeným číslům 1, 2, 3,… říkáme záporná celá čísla. Zapisujeme je −1, −2, −3,… Všechna přirozená čísla, všechna čísla k nim opačná a nula vytvářejí množinu všech celých čísel. Označujeme ji Z. Číslo nula není ani kladné ani záporné číslo.“

Ovšem strukturu celých čísel podle (Kopta, 2004, str. 12) definujeme takto:

Struktura celých čísel (Z, +, .) má tyto vlastnosti:

1. Operace **+** a **.** mají v Z stejné vlastnosti jako měly operace **+** a **.** v N.
2. Operace – (odčítání) je neomezeně proveditelné v Z.
3. Přirozená čísla patří mezi čísla celá, tzn. $N \subset Z$.
4. Každé celé číslo lze zapsat jako rozdíl čísel přirozených.

Požadavek v 1 říká, že všechny vhodné vlastnosti, které měly operace v N, musí platit i v Z. Nejdůležitější pro obě operace je asociativita, komutativita, existence nulového a jednotkového prvku a obě operace jsou svázány distributivností.

Konstrukce struktury celých čísel vypadá takto:

Doplnění množiny všech přirozených čísel o nenulová přirozená čísla opatřená znaménkem minus. Popíšeme si, jak s celými čísly v praxi skutečně pracujeme:

1. Východiskem pro konstrukci je struktura (N, +, .)
2. Chceme sestrojit (Z, +, .), musíme sestrojit množinu Z = nosič dané struktury. Každé číslo množiny Z kromě nuly bude mít znaménko. Vzniknou uspořádané dvojice [znaménko, přirozené číslo]. První složka uspořádané dvojice se nazývá znaménko, druhá složka se nazývá hodnota celého čísla. Získáme tak kladná celá čísla, záporná celá čísla a číslo nula.

Zápis celých čísel pomocí hranatých závorek je zbytečně složitý, proto přijmeme úmluvu, že tyto hranaté závorky nebudeme psát. Budeme zapisovat čísla takto: −1, −2, 0, +2, +3 …

3. Chceme-li s celými čísly pracovat, musíme umět rozhodnout o jejich rovnosti či nerovnosti. Zavedeme proto relaci „být roven“. Číslo 0 se nerovná žádnému číslu se znaménkem a jsou-li dvě libovolná celá čísla se znaménkem, pak platí, že jsou si rovna, právě když mají stejná znaménka i stejné hodnoty. Př. +5 = +5. Poté můžeme zavést operaci sčítání a operaci násobení v množině Z. Operaci sčítání v množině Z označíme + a definici rozdělíme na 3 části: přičítání čísla 0, sčítání dvou čísel se stejnými znaménky a sčítání dvou čísel s různými znaménky. V definici se prakticky popisuje, jak jsme zvyklý s celými čísly pracovat. Operaci násobení označíme . a opět ji rozdělíme na 3 části: násobení číslem 0, násobení dvou čísel se stejnými znaménky a násobení dvou čísel s různými znaménky. Po zavedení struktur všech celých čísel (Z, +, .) bychom měli objasnit vlastnosti obsažené v definici struktury celých čísel.

Asociativita

Nezáleží, jak použijeme závorky u výrazu, v jakém pořadí budeme tento výraz počítat, výsledek bude stejný.

$(x * y) * z = x * (y * z)$

Komutativita

Nezávisí na pořadí.

$x * y = y * x$

Nulový prvek

Tímto prvkem je číslo 0.

Jednotkový prvek

Tímto prvkem je číslo +1.

Distributivnost

Vlastnost násobení ke sčítání - roznásobení každým členem součtu.

V jiných učebnicích základních škol jsou definice různě obměněné, někdy také vynechané. V učebnici (Trejbal, 1997, str. 67) autoři zařadili pojem opačného čísla, což žáci velmi snadno pochopí a zapamatují si. Tyto příklady zavedení jsou na základě toho, že můžeme určit pořadí čísel. Tedy ordinální zavedení.

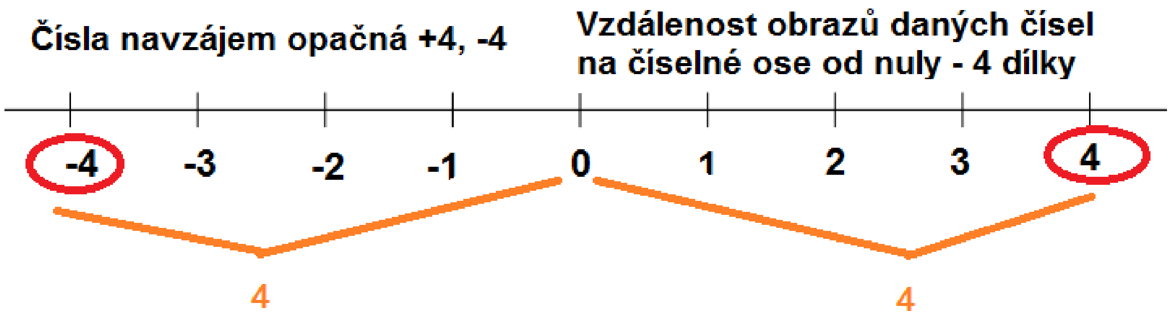
Jiná možnost je kardinální zavedení celých čísel, pomocí mohutnosti nějaké množiny. S touto metodou nemám osobní zkušenosti, ale přijde mi to jako zajímavá možnost, jak žákům ukázat rozdíl mezi kladnými a zápornými čísly a poté také čísla opačná. K tomuto zavedení potřebujeme dva druhy barevných kamenů: červené a černé. Ve škole je možno použít i něco jiného, jako třeba pastelky, magnety, barevné papíry a jiné. Jedna barva kamenů představuje celá kladná čísla a druhá celá záporná čísla. Pomocí těchto kamenů lze ukázat rozdíl mezi celými zápornými a kladnými čísly a čísla opačná. Také lze využít úlohy s dluhy a půjčením kamenů.

Problematikou záporných celých čísel se zabývá i celá řada zahraničních autorů. Jedním z nich je Cecilia Kilhalmn (Madit 6, 2008), která žáky testovala a dala dohromady různé výzkumy. Přišla na to, že záporná celá čísla jsou pro žáky problematickým učivem právě proto, že celá čísla jsou pro žáky abstraktní pojem a těžko se jim propojují se skutečným světem. Přestože jsou pro výuku používané mnohé modely pro předvedení jako teploměr, či finance, někdy nebývají dostatečné. Důležité je také jejich propojení s aritmetickými operacemi. Došla k názoru, že pokud učitel ve výuce používá více modelů, na kterých záporná celá čísla ukazuje, může to být spíše ke škodě než užitku.

4 ABSOLUTNÍ HODNOTA

K další práci s celými čísly je také velice důležitý pojem absolutní hodnoty. Většinou je vyvozován nebo spojován s pojmem čísel navzájem opačných.

Př.: Čísla +4, –4 nazýváme čísla navzájem opačná. (Coufalová, 2007, str. 121)



„Na číselné ose se vzdálenosti obrazů navzájem opačných čísel od nuly sobě rovnají.“ (Coufalová, 2007, str. 120)

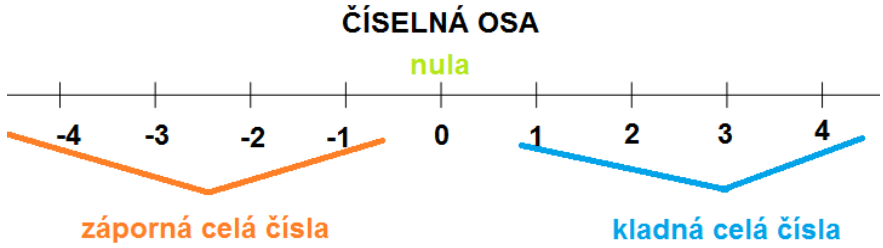
„Absolutní hodnota reálného čísla a, která se značí |a|, je definována takto: |a| = a, je-li a ≥ 0, |a| = −a, je-li a < 0, absolutní hodnota nezáporného čísla je číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné.“ (Doležalová, 2015, str. 9)

Žáci by si měli zapamatovat, že každému celému číslu můžeme přiřadit číslo, které se nazývá absolutní hodnota celého čísla. Geometricky lze absolutní hodnotu celého čísla vyjádřit jako vzdálenost obrazu celého čísla na číselné ose od nuly. Absolutní hodnota celého čísla je vždy číslo kladné nebo nula.

Důležitý je také zápis absolutní hodnoty: (Rosecká, 1998, str. 34)

|+4| = + 4 = 4	absolutní hodnota kladného čísla je číslo samo
|–4|= + 4 = 4	absolutní hodnota záporného čísla je číslo kladné
|0| = 0	absolutní hodnota nuly je nula
|+4| = |–4|	dvě navzájem opačná čísla mají tutéž absolutní hodnotu

5 POROVNÁVÁNÍ CELÝCH ČÍSEL



Pro porovnávání celých čísel nám dobře poslouží číselná osa, protože na ní hned vidíme:

Každé kladné celé číslo je větší než nula.

$5 > 0$ $7 > 0$

Každé kladné celé číslo je větší než jakékoliv záporné celé číslo.

$5 > -1$ $7 > -3$

Každé záporné celé číslo je menší než nula.

$-3 < 0$ $-8 < 0$

Každé záporné celé číslo je menší než kterékoliv kladné celé číslo.

$6 > -3$ $-8 < 2$

Záporné celé číslo, které leží na číselné ose blíže nule, je větší, než záporné celé číslo ležící dále od nuly.

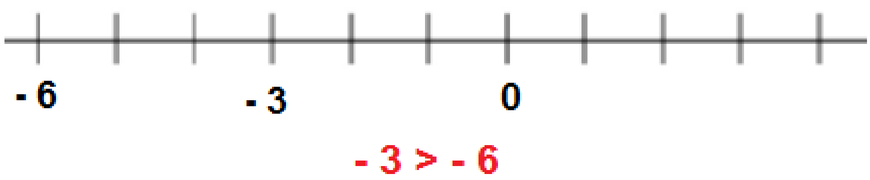
$-3 > -6$ $-5 < -1$

Nula je větší než každé záporné celé číslo.

$0 > -3$ $0 > -1$

Jak je to s porovnáváním dvou kladných celých čísel žáci dobře znají a všichni to jistě na příkladu dokáží vysvětlit. Nejproblematičtější je porovnávání dvou záporných čísel, proto zde uvádím i konkrétní příklad.

Např. Budeme porovnávat –3 a –6.



Ze dvou záporných čísel je větší to, které leží na číselné ose blíže k nule. Srovnejme to s teploměrem, kdy je tepleji. Pokud je na teploměru –3°C nebo –6°C. Tepleji je samozřejmě, pokud jsou pouze –3°C. Číslo –3 leží tedy blíže k nule a je větší než číslo –6.

6 OPERACE S CELÝMI ČÍSLY

Mezi základní operace s celými čísly patří sčítání, odčítání, násobení a dělení, v každé učebnici jsou tyto početní operace vysvětlovány trochu jinak. Podívám se na několik způsobů vysvětlení, porovnám přístupy v různých učebnicích a sestavím vlastní pracovní listy.

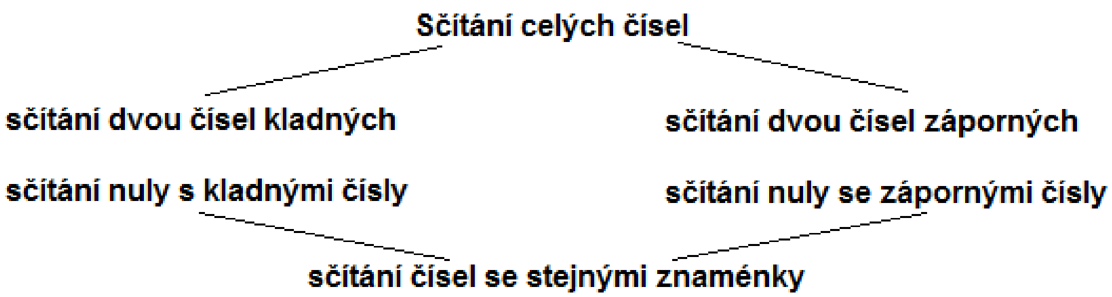
6.1 SČÍTÁNÍ CELÝCH ČÍSEL

Sčítání celých čísel je první operace, kterou se na ZŠ žáci s celými čísly naučí. Každý učitel využívá jinou učebnici a má jiný styl učení. Přístup k žákům se také liší. Podíváme se na několik možností, jak toto téma pojmout.

Než se žáky začneme sčítání celých čísel, měli bychom jim připomenout, jak se nazývají dvě čísla, které budeme sčítat a jejich výsledek.

$$\underbrace{9}_{\text{sčítanec}} + (\underbrace{+\,7}_{\text{sčítanec}}) = \underbrace{16}_{\text{součet}}$$

V první učebnici, kterou mám k dispozici, je rozděleno sčítání na několik případů. Případy jsou zde popisovány pomocí schématu:

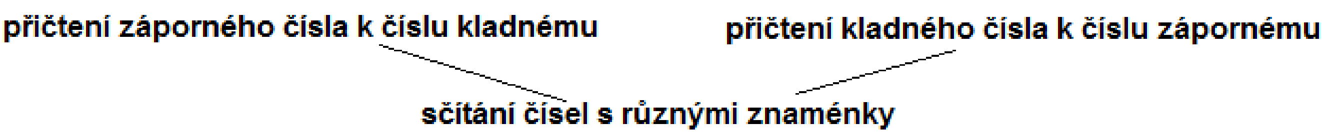


Obr. Sčítání celých čísel (Rosecká, 1998, str. 35)

Toto schéma doprovází pouze dvě číselné osy se šipkami a několik příkladů ukazující typické příklady spadající do dané kategorie. Například:

6 + (+4) = 0 + 4 = 0 + (−4) = −2 + (−4) =

Další pokračování spočívá na schématu a na příkladech typu:



Obr. Přičtení celých čísel (str. 35 zdroje Rosecká, 1998)

10 + (−5) = −10 + (+6) =

Jakékoli slovní vysvětlení či komentář v této učebnici schází. Měl by ho tedy doplnit učitel. Pokud žák zrovna není ve škole a nepatří mezi nadané matematické mozky, bude pro něj celkem složité se v některých úlohách zorientovat.

V učebnici od nakladatelství SPN (Trejbal, 1997, str. 70), která je znatelně starší než ta předchozí, se sčítání celých čísel rozděluje na tři podkapitoly:

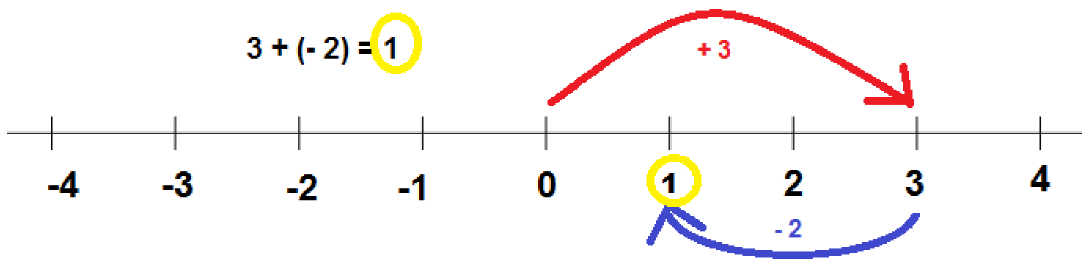
- Sčítání kladných celých čísel a nuly
- Sčítání záporných celých čísel a nuly
- Sčítání kladných celých čísel, záporných celých čísel a nuly

Velký rozdíl oproti předchozí učebnici je, že zde jsou tyto podkapitoly doplněny vzorovými příklady, kde žák i bez výkladu učitele pochopí pravidla sčítání. Vzorové příklady jsou barevně odlišené a slovně okomentované. K několika příkladům je zde uveden i obrázek.

V této učebnici se sčítání celých čísel řeší také pomocí práce s absolutními hodnotami, které je vhodné hlavně pro žáky, kteří nemají dostatečnou představivost a názornost na penězích nebo na teploměru pro ně není dostačující.
Tato pravidla zní:
„Celá kladná čísla sečteme tak, že sečteme jejich absolutní hodnoty. Pro každé celé číslo a platí: a + 0 = a."
„Záporná celá čísla sečteme tak, že sečteme jejich absolutní hodnoty a ke vzniklému součtu přidáme znak −. Pro každé celé číslo a platí: a – 0 = a."
Pravidlo pro součet kladného a záporného čísla v této učebnici sepsán přesně není, ovšem v podkapitole odčítání celých čísel je tato problematika objasněna několika konkrétními příklady a doplněna popisem autora.

V další učebnici (Coufalová, 2007, str. 124) doplnili sčítání celých čísel o zajímavou aktivitu, pohyb figurky po číselné ose. Což jde využít i ve třídě, hlavně u mladších žáků nebo žáků s IVP, kdy místo figurek nakreslíme číselnou osu na zem a sami žáci se po ní mohou pohybovat. Aktivita je velice zábavná, a pokud máme dostatek času, žáky určitě zaujme a pobaví se u toho.

Kromě figurek se v této učebnici využívají také kostky, kdy si žáci mohou hodit kostkou a podle toho vznikají příklady a pohyb figurek na číselné ose. Tento způsob je také velice zajímavý, ve dvojicích si tvoří příklady, sepisují je, skáčou figurkou po číselné ose a navzájem se kontrolují.



Př. Pohybujte figurkou po číselné ose. Kroky vpravo označíme +, kroky vlevo −.
Udělejte 3 kroky vpravo a 2 kroky vlevo.
Kromě této aktivity je tady sčítání celých čísel vysvětleno i takto:

- Sčítáme dvě kladná čísla – sečteme čísla přirozená.

  (+4) + (+2) =   4 + 2 =

- Sčítáme dvě záporná čísla – sečteme obě čísla bez ohledu na znaménko – k součtu přidáme mínus. (uplatnění absolutní hodnoty - sečteme absolutní hodnoty čísel a ke vzniklému součtu přidáme znak „−")

  (−4) + (−2) =   4 + 2 = 6   (−4) + (−2) = −6

- Sčítáme kladné a záporné číslo – čísla odečteme bez ohledu na znaménko jako čísla přirozená – k výsledku přidáme stejné znaménko, jako má číslo, které je na číselné ose zobrazeno dál od nuly. (uplatnění absolutní hodnoty – odečteme absolutní hodnoty čísel a v rozdílu přidáme znaménko čísla s větší absolutní hodnotou).

  (−4) + (+2) =   4 > 2   4 − 2 = 2   (−4) + (+2) = −2

  (ve výsledku stejné znaménko jako má číslo 4 v původním příkladu)

Toto vysvětlení je myslím pro žáky dostačující a podobá se vysvětlení z předchozí učebnice s absolutními hodnotami.

Jako poslední jsem využila učebnici (Urbanová, 1988, str. 114 - 116), která byla vydána už v roce 1988. Chtěla jsem vědět, jestli se vysvětlení bude nějak lišit. V této konkrétní učebnici je sčítání celých čísel založeno na pohybu na číselné ose, v podstatě se dost podobá pohybu figurek po číselné ose z jedné z předchozích učebnic. Pohyb po číselné ose je také doplněn obrázky a nakonec několika slovními pravidly.

Ve všech těchto učebnicích jsou ke konci kapitoly sčítání celých čísel zařazeny vlastnosti, jako je komutativita, asociativita, přičítání nuly a součet navzájem opačných čísel. Každá učebnice má popis těchto vlastností trochu jiný, ale vlastnosti jsou stejné.

Žáci tyto vlastnosti nejlépe pochopí na konkrétních příkladech, pro některé je pochopení pravidla za pomoci písmen velikým problémem. Proto vysvětlíme pravidla takto:

komutativita: $(+5) + (-3) = (-3) + (+5)$

V této vlastnosti je podstatné, to že můžeme změnit pořadí sčítanců, ale výsledek se nezmění.

asociativita: $(3 + 4) + (-2) = 3 + [4 + (-2)]$

Pokud změníme příklad tzv. „přezávorkováním“, zjistíme, že se výsledek nezmění.

přičítání nuly: $0 + 4 = 4$ nebo $(-6) + 0 = -6$

Součet nuly a čísla je číslo samo.

navzájem opačná čísla: $-7 + (+7) = 0$

Součet navzájem opačných čísel je roven nule.

S těmito vlastnostmi souvisí také pojem grupa, se kterým se žáci mohou setkat později na vysoké škole. Grupa je algebraická struktura, což znamená množina spolu s binární operací, v tomto případě operací sčítání, splňující výše popsané vlastnosti. Tyto vlastnosti jsou nazývané axiomy.

6.2 ODČÍTÁNÍ CELÝCH ČÍSEL

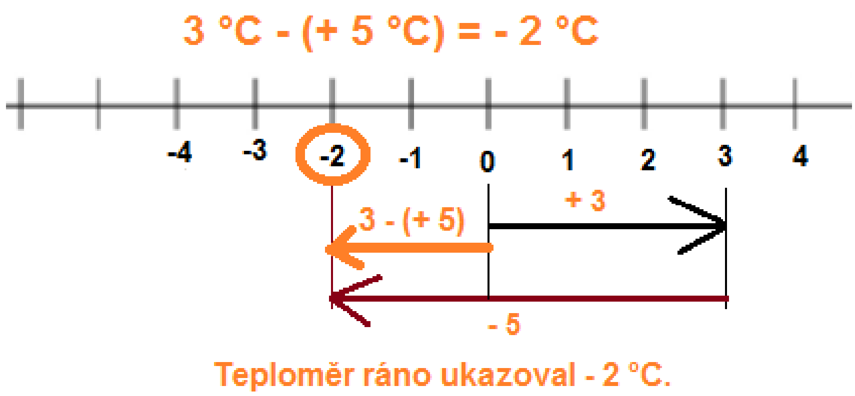
Dalším krokem po sčítání logicky následuje odčítání celých čísel. Operaci odčítání žáci dobře znají, ale se zápornými celými čísly takto ještě nepracovali.

V počátku bychom měli připomenout, jak se nazývají čísla, která se mezi sebou odčítají. Viz příklad:

$$\underbrace{9}_{\text{menšenec}} - \underbrace{(+7)}_{\text{menšitel}} = \underbrace{2}_{\text{rozdíl}}$$

Toto je ve většině učebnic také připomínáno, buď na začátku kapitoly celá čísla, nebo v průběhu.

V učebnici (Urbanová, 1988, str. 119) je odčítání celých čísel ukázáno opět na konkrétním příkladu s teploměrem. Večer ukazoval teploměr 3°C nad nulou a v noci se ochladilo a teplota klesla o 5°C. Kolik °C ukazoval teploměr ráno?



Poté můžeme řešit dva případy: 3 − (+5) =

3 + (−5) =

a dojdeme k závěru, že odčítání celého čísla nahradíme přičítáním čísla opačného. Vznikne nám pravidlo pro odčítání celých čísel. Bude to součet menšence a opačného čísla k menšiteli, což bude platit i pro odčítání dvou záporných čísel.

Příklad: (−5) − (−5) =

(−5) + (+5) =

Následující pravidlo je převzato ze str. 38 (Rosecká, 1998).

„Odečíst číslo, znamená přičíst číslo opačné.“

Konkrétně: −10 − (−5) = −10 + (+ 5) = −5

Žákům to můžeme přiblížit na konkrétním příkladu s teploměrem. Ráno teploměr ukazoval −10°C. Během dopoledne vzrostla teplota o 5°C, což je totéž, jako když řekneme: ubylo mrazu o 5°C.

Podle (Trejbal, 1997) lze postup pro odčítání celých čísel spojit s běžnou praxí a to s komentovaným příkladem ohledně výpůjček a dluhů.

Petr si v pondělí vypůjčil od svého kamaráda 10 Kč. Výši Petrova dluhu lze vyjádřit záporným číslem –10. V úterý vrátil kamarádovi 5 Kč. To znamená, že z jeho dluhu byla odečtena částka 5 Kč, což lze zapsat: $(-10) - (-5)$

Použijeme záporné celé číslo −5, protože se stále pohybujeme v dluzích.

Zároveň můžeme říci, že k dluhu 10 Kč byla přičtena splátka 5 Kč a to můžeme zapsat: $(-10) + (+5)$

Spočítáme, že po splacení 5 Kč zbyl Petrovi ještě dluh 5 Kč a platí:

$(-10) - (-5) = (-10) + (+5) = -5$ …zbytek dluhu je 5 Kč.

Ve většině učebnic, které jsem měla k dispozici, postupují s vysvětlením operace odčítání stejně. Některé jsou vysvětleny více dopodrobna s množstvím obrázků a příkladů, jiné jsou strohé.

Pro žáky základních škol podle mých zkušeností jsou konkrétní příklady na dané téma hodně důležité, příklady je nejlepší uvádět ze života, aby si je žáci mohli představit nebo vyzkoušet.

Pohyb po teploměru nebo skoky figurkami na číselné ose se dají využít i zde, stejně jako u sčítání celých čísel. Tyto ukázky mohou nejvíce pomoci žákům, kteří nemají takovou představivost, či jsou v matematice jinak znevýhodněni. Proto pokud přineseme do hodiny teploměr a ukazujeme příklady i se slovním komentářem přímo před žáky, většina z nich příklady pochopí. Další možnost je, aby si žáci zakreslili do sešitů číselnou osu a opravdu po ní pomyslně skákali.

Ukázka na penězích je také velice užitečná, protože manipulaci s penězi si žáci dokáží představit. Nejlepší je, pokud si žáci do hodiny přinesou například papírové peníze z různých společenských her a podle zadání si půjčují peníze mezi sebou. Hned zjistí, jestli jim spolužák dluží nebo ne. Tato hra je i baví.

Pro některé žáky je zajímavé také užití příkladu s výtahem, kdy člověk jezdí nahoru a dolů. Můžeme žákům diktovat příklad, jak panáček jezdí v mrakodrapu nahoru a dolů, nechat je nejdříve úlohu zakreslit a pak také správně matematicky sepsat.

6.3 NÁSOBENÍ CELÝCH ČÍSEL

Na úvod si opět u násobení připomeneme, jak nazýváme čísla, která mezi sebou násobíme, abychom s těmito pojmy mohli dále pracovat. Nejlépe si to ukážeme na konkrétním příkladu:

$$\underbrace{(-\,3)}_{\text{činitel}}\;.\;\underbrace{(-\,4)}_{\text{činitel}} = \underbrace{12}_{\text{součin}}$$

Také si na úvod připomeneme důležitá pravidla k násobení, které jsme převzali z (Rosecká, 1998).

Součin nuly s celým číslem je vždy nula.

Např. (–5) . 0 = 0 0 . (+5) = 0

Součin celého čísla s číslem jedna je číslo samo.

Např. (–5) . 1 = - 5 1 . (+5) = 5

Součin celého čísla s číslem – 1 je číslo opačné.

Např. (–5) . (−1) = 5 (−1) . (+5) = −5

Tato pravidla pro násobení by měli být učitelé také schopni objasnit nebo předvést na nějakém konkrétním příkladu. K vysvětlení můžeme použít způsoby, které v této kapitole uvádím.

Pro výpočet součinu celých čísel se ve většině případů používají ještě další pravidla, někdy nazývána znaková pravidla:

znak			
prvního činitele	**násobení**	**druhého činitele**	**součin**
+	.	+	+
-	.	-	+
+	.	-	-
-	.	+	-

Obr. Znaková pravidla (Trejbal, 1997, str. 75)

Podle těchto pravidel by se měli žáci při násobení celých čísel řídit. Vždy se ovšem mezi sebou nenásobí jen dva činitelé, ale může jich být více, a proto musíme tato pravidla ještě rozšířit.

Při **lichém počtu** záporných činitelů je součin záporný.

Např. (**−1**) . (**−3**) . 2 . (**−2**) = **−12**

Při **sudém počtu** záporných činitelů je součin kladný.

Např. (+1) . (**−3**) . 2 . (**−2**) = +**12**

Z dřívějších ročníků žáci znají pravidla pro násobení číslem 0 a 1. Umí mezi sebou také vynásobit více než dva činitele. Ostatní pravidla jsou pro ně novinkou, proto by bylo dobré žákům alespoň některé pravidlo objasnit. Nejlépe se asi bude vysvětlovat příklad, kdy násobíme kladné celé číslo záporným. Ukážeme si tedy toto pravidlo na konkrétním příkladu.

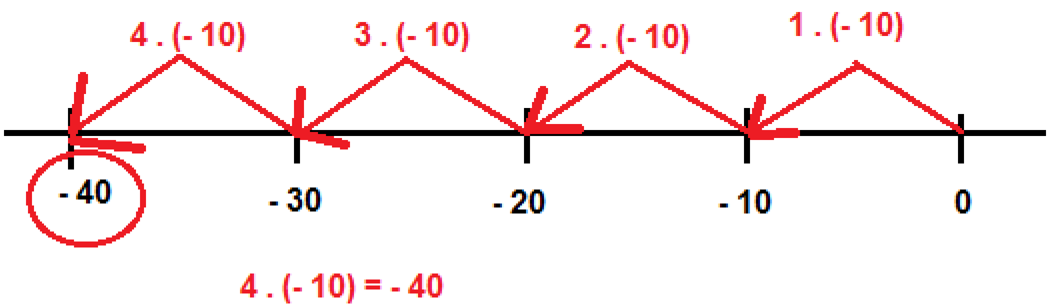
Pavel si půjčil každý týden po dobu 4 týdnů od kamaráda 10 Kč. Nyní si chce spočítat, kolik mu dluží, aby mu to mohl vrátit.

Příklad si představíme jako čtyřikrát minus deset. Možnosti řešení:

1. možnost – převedením příkladu na sčítání

4 . (−10) = (−10) + (− 10) + (−10) + (−10) = −40 To odpovídá dluhu 40 Kč.

2. možnost - ukázka na číselné ose či jiné konkrétní příklady.

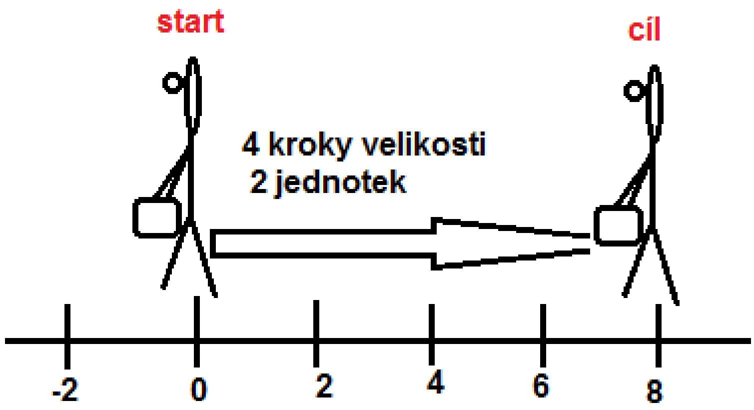


Z tohoto příkladu můžeme dojít i k jiným možnostem, jako například násobení záporného celého čísla kladným.

Ukázkou několika takovýchto příkladů dostaneme pravidlo: „Součin záporného a kladného čísla je číslo záporné, přičemž hodnota součinu je součinem hodnot násobených čísel.“ (Kopka, 2014, str. 42)

Na řešení podobných příkladů můžeme také nahlížet takto:
(Inspirováno z internetových stránek – Matematika.cz)

Máme součin dvou čísel 2 . 4. Tento součin si představíme na číselné ose jako pohyb panáčka. První číslo představuje délku kroku, druhé počet kroků, které panáček udělá. Součin vypadá takto: **délka kroku . počet kroků**
Nesmíme zapomenout na záporná celá čísla, pokud je délka kroku kladná, jde panáček dopředu. Je-li záporná, jde pozpátku. Pokud je počet kroků kladný, je panáček otočen doprava, je-li záporný, je otočený doleva. Číslo, na které panáček dojde, je výsledek daného součinu. Na počátku stojí na číselné ose u čísla 0 a dívá se směrem na kladnou část osy, tedy doprava.



Příklad 2 . 4 = 8, představuje čtyři kroky o délce dvě jednotky dopředu a je otočený doprava.

Další součin (−2) . 4 = −8, představuje čtyři kroky o délce dvou jednotek pozpátku. První číslo záporné – znamená couvání. Druhé číslo kladné – je otočen doprava.

Další možností je, že panáček bude otočený doleva a jde čtyři kroky vpřed, každý je dlouhý dvě jednotky, což zapíšeme jako 2 . (−4) = −8. Dojdeme tedy ke stejnému výsledku jako v předchozím příkladu.

Pokud nastane možnost (−2) . (−4) = 8, což znamená, že panáček je otočen doleva a jde čtyři kroky pozpátku, zjistíme, že součin dvou záporných čísel je číslo kladné. Pro celou tuto ukázku je velice důležitá názornost, veliké soustředění a znalost počátečních podmínek. Většina žáků poté systém pochopí.

Násobení dvou čísel, kde první je kladné a druhé záporné, lze objasnit také takto:
např. $3 \cdot (-5) = -15$, si můžeme představit jako součet tří stejných záporných čísel.
$(-5) + (-5) + (-5) = -15$
Podobný příklad násobení dvou čísel, kde první je záporné a druhé kladné, např. $(-5) \cdot 3 = -15$, lze vyřešit použitím komutativnosti násobení, tedy:
$(-5) \cdot 3 = 3 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$

Můžeme se na předchozí příklady také podívat takto:
V peněžence mám několik 5 Kč mincí, půjčuji je, platím s nimi, dostávám je zpět. Pokaždé trochu jinak:
$3 \cdot 5 = 15$ Dostal jsem třikrát 5 Kč a mám tedy 15 Kč.
$3 \cdot (-5) = -15$ Zaplatil jsem za sušenku 5 Kč a sušenky jsem si koupil tři. Zaplatil jsem 15 Kč. Mám tedy o 15 Kč méně.
$(-3) \cdot (-5) = 15$ Nezaplatil jsem kamarádovi 5 Kč za sušenku a nezaplatil jsem ji už třikrát. Dlužím mu tedy 15 Kč. A já mám v peněžence stále o 15 Kč více.
Na začátku ukázky bychom si se žáky měli dohodnout, jak budeme zapisovat dostal, zaplatil a nezaplatil.

Tímto jsme objasnili většinu pravidel týkajících se násobení celých čísel, konkrétně násobení kladných čísel, násobení kladného a záporného celého čísla a také násobení záporného a kladného celého čísla. Zmínila jsem i násobení dvou záporných celých čísel, které je v další podkapitole více rozvedené. Žáci v podstatě celá čísla násobí tak, že čísla násobí jako by byla přirozená a pak podle pravidel přidají znaménko.

6.3.1 NÁSOBENÍ DVOU ZÁPORNÝCH CELÝCH ČÍSEL

Vysvětlení tohoto pravidla bývá problémové, ukážeme si alespoň některou možnost, jak toto pravidlo objasnit.

Pravidlo, kdy násobíme dvě záporná celá čísla a výsledkem je kladné celé číslo, se ve školách moc často nevysvětluje, ale žáci se toto pravidlo naučí jako fakt. Sami si k němu přidají i poučku vycházející ze znaménkových pravidel a to, že složením dvou mínusů přece vzniká znak pro plus.
Přesto máme několik možností, jak násobení dvou záporných čísel objasnit.

Některé učebnice či pracovní sešity využívají sérii příkladů, na kterých logickým sledem ukazují žákům, jaké znaménko má u výsledku následovat. Tato série příkladů je většinou doplněna obrázky na číselné ose.

Např. $2 \cdot (-2) = -4$

$1 \cdot (-2) = -2$

$0 \cdot (-2) = 0$

$(-1) \cdot (-2) = 2$

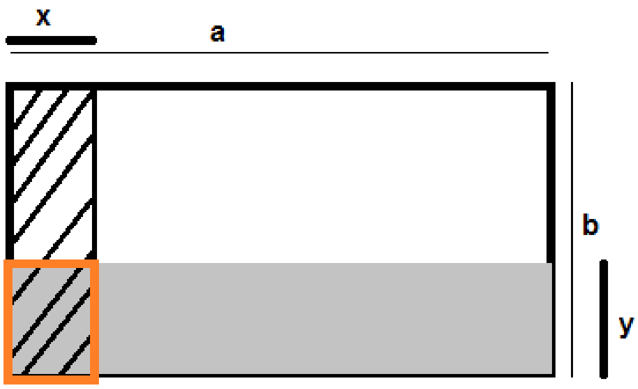
$(-2) \cdot (-2) = 4$

Žáci intuitivně dojdou k jednotlivým výsledkům, protože zjistí, že výsledek se stále zvyšuje po dvou.

Jedním z příkladů je půjčování 5 Kč z předešlého pravidla, kde žákům také pomocí série příkladů a vysvětlení předvedu, proč je výsledek kladný.

Další z možností je vysvětlit toto pravidlo na obsahu plochy nějakého obdélníku. Obdélník má strany a, b. Z každé strany odečteme délky x, y. Tím dostáváme délky stran obdélníku $a - x$, $b - y$.

Např. Obdélník má rozměry 6 x 4 jednotky. Vzdálenosti $x = 1$ a $y = 2$ jednotkám. Tedy $(6 - 1)$ a $(4 - 2)$, my ale chceme vypočítat plochu malého oranžového obdélníku. Pro výpočet obsahu tohoto obdélníku nám pomůže následující obrázek, určíme z něj i význam součinu $(-x) \cdot (-y)$.



Obsah celého obdélníku je $a \cdot b$, ostatní obdélníky musíme odečíst, aby nám vyšel výsledek pro obsah bílého obdélníku. Malý obdélník o obsahu $x \cdot y$ odečítáme dvakrát, proto ho musíme pak tedy ještě jednou přičíst. Tedy výsledek je kladný. Toto zdůvodnění se mi zdá pro žáky na ZŠ celkem složité. Pokud ovšem použijeme sérii konkrétních příkladů, i zde je možné toto pravidlo vysvětlit.

Poslední příklad, který mě zaujal, a dají se s ním vysvětlit všechna pravidla násobení celých čísel, jsem popsala v předchozím - panáček a jeho počet a délka kroku na číselné ose.

Pokud se podíváme na různá zdůvodnění pravidel celých čísel, některá jsou pro žáky ZŠ složitá a ani názornost v ukázkách nepomáhá. Například u panáčka a jeho pohybu na číselné ose jsou velice důležité počáteční podmínky, pokud žáci tyto podmínky nepochopí, celé ukázky ztrácí úplně smysl.

Vysvětlení pravidla násobení dvou záporných celých čísel je pro žáky asi nejméně pochopitelný. Přestože na ukázce s obsahem nějaké plochy chápou, že obsah plochy nemůže být záporný, některé souvislosti jim unikají.

Dle mých zkušeností se někteří učitelé na ZŠ ani s odůvodněním těchto pravidel nezdržují. Žáci dostanou pouze pravidla, která jim hned řeknou, zda má vyjít kladný či záporný výsledek.

Kromě pravidel pro násobení celých čísel máme ještě vlastnosti násobení celých čísel a podle (Trejbal, 1997) zní takto:

komutativnost

$(-3) \cdot (+9) = (+9) \cdot (-3)$

asociativnost

$(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2)$

Těmto vlastnostem se však více věnuji v kapitole, kde zavádím celá čísla.

6.4 DĚLENÍ CELÝCH ČÍSEL

Pro dělení si připomeneme také, jak nazýváme čísla a výsledek dělení.

$$\underbrace{(-36)}_{\text{dělenec}} : \underbrace{6}_{\text{dělitel}} = \underbrace{-6}_{\text{podíl}}$$

Dělení celých čísel lze vysvětlit analogicky jako násobení celých čísel, pravidla týkající se znamének zůstávají stejná. Žáci tedy počítají příklady, jako by počítali s přirozenými čísly a pak podle pravidel přidávají znaménka.

Většina učitelů při dělení celých čísel využívá toho, co se žáci naučili při násobení, jelikož vlastnosti týkající se znamének celých čísel zůstávají stejné.

Někdy můžeme vidět dělení zapsané také ve tvaru zlomku a s tím souvisí i jedno velmi důležité pravidlo a to, že **nulou nelze dělit, proto také jmenovatel zlomku nemůže být nikdy nula.**

Opět si na příkladu ukážeme některé pravidlo pro dělení.

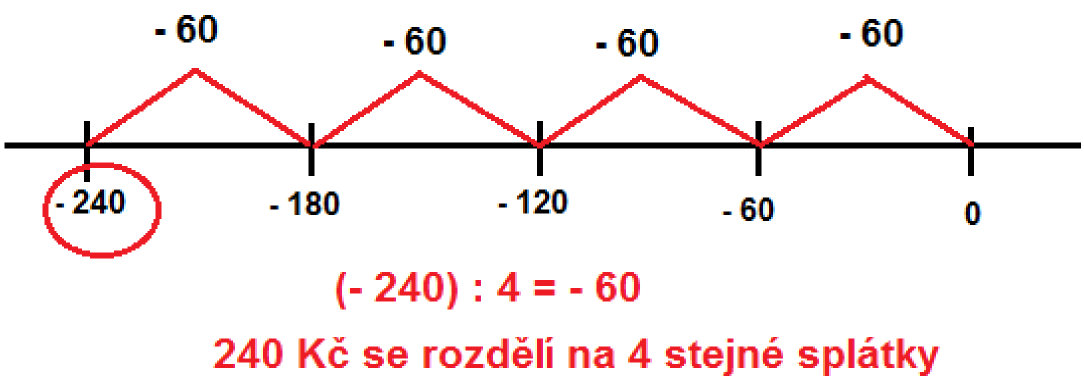
Ukázka je převzata z učebnice (Rosecká, 1998, str. 42).

Pokud tvůj dluh činí 240 Kč, jako záporné celé číslo lze zapsat −240. Rozhodneš se dluh splatit ve 4 splátkách. Jak tedy budeš dluh platit?

240 : 4 = 60 Kč, tedy jedna splátka bude 60 Kč.

Dluh zapíšeš jako −240 a rozdělíš ho na 4 stejné díly, tedy (−240) : 4 = −60

Tento příklad můžeme také znázornit na číselné ose, například takto:



Nakonec je důležité připomenout, že násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním.

7 NÁMĚTY AKTIVIT DO HODIN

Pro výuku matematiky, především na základní škole, je důležité osvojení a pochopení základních matematických algoritmů. Žáci je používají i v dalším studiu a navazují na ně, proto je tento základ velice důležitý. Žáci si nejdříve osvojují jednotlivé matematické operace zvlášť, později jsou spojovány do jednoho nebo více složitějších příkladů. Spojení těchto operací do jednoho příkladu můžeme využít například ve slovní úloze, která se týká reálného života. Tyto typy úloh jsou pro žáky nejzajímavější.

Hodiny matematiky, které jsou založeny pouze na tom, že žáci počítají jeden příklad za druhým, tedy tzv. dril, je sice dobrý pro získání důležitých znalostí a jejich zautomatizování, ovšem hodiny jsou pro žáky nezáživné a vůbec je nebaví. Proto i hodiny matematiky potřebují jisté zpestření, například pomocí skupinových prací, různých projektů či úloh ze skutečného života.

Nejen zpestření výuky je pro žáky důležité, ale jejich častým dotazem také bývá, k čemu probíranou látku budou v životě potřebovat. Proto by součástí hodin také měly být ukázky úloh z praktického života, aby viděli, k čemu zrovna toto v životě využijí.

Snažila jsem se vytvořit několik ukázek příkladů, které lze k výuce celých čísel využít. Úlohy pro žáky představují zábavnější formu procvičování. Příklady jsem roztřídila podle činností, které jsou v nich procvičovány. Většinu činností už jsem v hodinách využila, jak při výuce celých čísel, tak v jiných tématech, proto jsou zde popisovány také různé obměny aktivit. U jednotlivých úloh se vyjadřuji konkrétněji k problematice jejich realizace.

7.1 ZÁPIS A POROVNÁVÁNÍ CELÝCH ČÍSEL

<u>Příklad 1 – číselné osy</u>

(Inspirováno příklady Odvárko – Kadleček, 2014, str. 40, 41.)

Úkol – Zakreslení celých čísel do připravených číselných os, či teploměrů podle zadání.

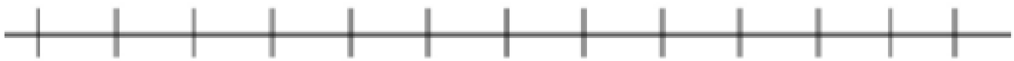
Pomůcky – Pracovní list s číselnými osami a zadáním.

Cíl – Procvičení orientace na číselné ose.

Popis – Žáci z počátku pracují jednotlivě, poté si sednou do dvojic a svoji práci kontrolují a řeší případné nedostatky. Nakonec dojde ke kontrole s učitelem a zjištění počtu chyb u jednotlivců. Ve 2. cvičení můžeme nechat žáky narýsovat také graf.

Ukázka pracovního listu

1. Do připravené osy zakresli čísla: 0, −2, −5, 4, 1



2. Podle tabulky odpověz na otázky

Čas	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**
teplota (°C)	−16°C	−12°C	−8°C	−8°C	−11°C

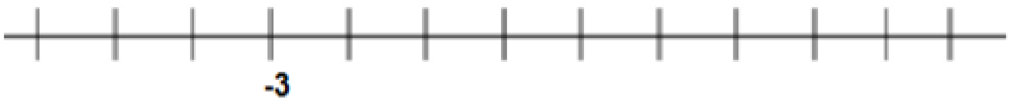
V kolik hodin bylo naměřeno – 8°C?

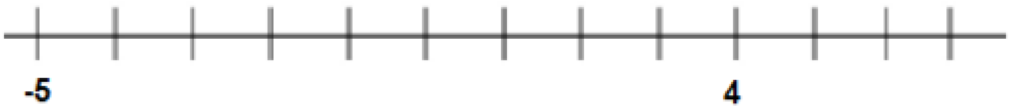
V kolik hodin byla zaznamenána nejnižší teplota?

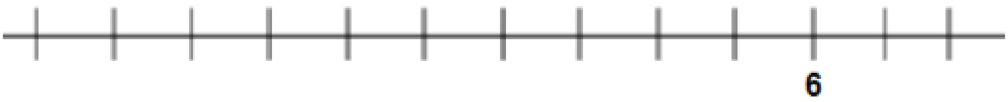
Mezi 4. a 8. hodinou teplota klesla nebo stoupla?

Urči rozdíl teplot mezi 20. a 4. hodinou.

3. Do připravených os zakresli 0

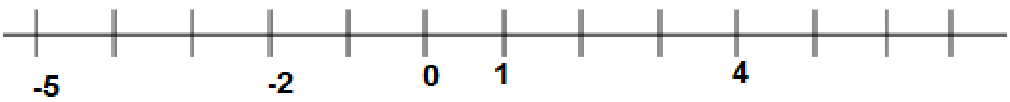






Řešení

1.



2.

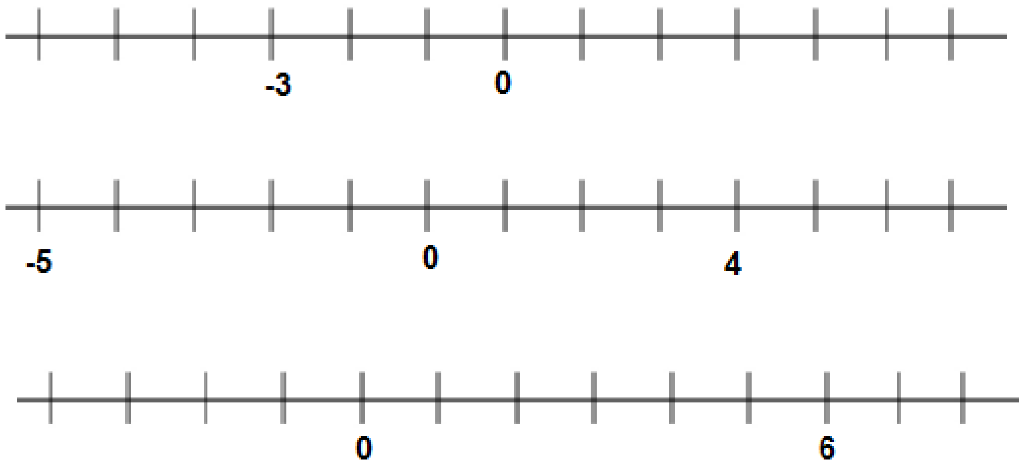
V kolik hodin bylo naměřeno – 8°C? **Ve 12 a v 16 hodin.**

V kolik hodin byla zaznamenána nejnižší teplota? **Ve 4 hodiny ráno.**

Mezi 4. a 8. hodinou teplota klesla nebo stoupla? **Stoupla.**

Urči rozdíl teplot mezi 20. a 4. hodinou. **Rozdíl je 5°C.**

3.Toto je jedno z mnohých možností řešení.



Komentář: Pracovní list mi posloužil na úvod celých čísel v 7. ročníku jako opakování již získaných znalostí. Pro některé žáky byl velice jednoduchý, jelikož většinu znali. Úlohu jsem zkomplikovala tím, že ve třetím úkolu zkoušeli najít více možností řešení. Někteří byli velice úspěšní. Ve druhém cvičení někteří žáci měli problém, jak správně sestrojit graf k tabulce. Největší problém jim dělalo to, jaká čísla zvolit na ose x a y.

<u>Příklad 2 – diktát čísel</u>

(Inspirováno z internetových stránek – Online cvičení – matematika – 7. ročník – celá čísla kladná a záporná – diktát čísel)

Úkol – Správný zápis celých čísel a zakreslení na číselnou osu.

Pomůcky – Pracovní list s popisem hodnot celých čísel.

Cíl – Procvičení a orientace v zápisu celých čísel, procvičování početních operací s celými čísly.

Popis – Žáci jsou rozděleni do dvojic. Každý žák dostane pracovní list. Jeden žák předčítá svůj pracovní list, druhý si čísla zapisuje. Žáci si mohou navzájem pomoci. Pro slabší žáky je možné použít vytisknutou číselnou osu, aby se lépe orientovali. Pro zvýšení složitosti daného úkolu si žáci mohou narýsovat do svých sešitů také číselnou osu a kromě zápisu celých čísel zakreslují celá čísla také na číselnou osu.

Ukázka pracovních listů

Zapiš číslo:	**Zapiš číslo:**
o 14 větší než (−13)	o 17 větší než (−8)
o 6 menší než (+3)	o 7 menší než (+10)
o 3 větší než (−8)	o 9 větší než (−13)
2-krát větší než (−2)	2-krát větší než (−3)
o 7 menší než (+1)	o 6 menší než (+2)
2-krát menší než (+10)	o 5 větší než (−8)
o 2 větší než (−7)	2-krát menší než (+12)
opačné k číslu (−3)	opačné k číslu (−5)

Řešení

Pracovní list 1.:

(−13) + 14 = +1

(+3) − 6 = −3

(−8) + 3 = −5

(−2) . 2 = −4

(+1) − 7 = −6

(+10) : 2 = 5

(−7) + 2 = −5

opačné číslo: 3

Pracovní list 2.:

(−18) + 17 = −1

(+10) − 7 = 3

(−13) + 9 = −4

(−3) . 2 = −6

(+2) − 6 = −4

(−8) + 5 = −3

(+12) : 2 = +6

opačné číslo: 5

Komentář: Na tomto pracovním listu se žákům nejvíce líbilo to, že si příklady diktují navzájem sami. Pokud je tento list praktikován ve dvojicích, pro učitele je to náročné na udržení pozornosti a aktivitu všech žáků, proto lze tento pracovní list praktikovat i naráz pro celou třídu, kdy vždy jeden žák diktuje ostatním. Také je vhodné rychlejším žákům zkomplikovat zadání tím, že čísla musí zakreslit na číselnou osu.

V tomto zadání příklad 2-krát větší než (−2) vyvolal diskuzi, jelikož většina žáků si příklad zapsala ve tvaru (−2) . 2 = −4, ovšem jeden spolužák s výsledkem nesouhlasil, protože −2 > −4 a jeho výsledek se rovnal 4. Vzhledem k tomu, že jeho zápis příkladu neodpovídal zadání, žáci mu jeho volbu vyvrátili a vysvětlili, že **krát větší** je slovní spojení pro násobení.

Příklad 3 – číselná řada

(Inspirováno z internetových stránek – Online cvičení)

Úkol – Správné doplnění chybějících celých čísel podle určitého pravidla do připravených pracovních listů.

Pomůcky – Pracovní listy s připravenými řadami.

Cíl – Procvičení posloupnosti celých čísel.

Popis – Žáci mohou pracovat samostatně či ve dvojicích. Postupně si jednotlivé pracovní listy mezi řadami vyměňovat. Pracovní listy mohou sloužit jako rozcvička na začátku hodiny, zpestření během hodiny nebo práce na konci hodiny.

Ukázka pracovního listu

1. 15, ..., 9, 6, ..., 0, −3, ..., …

2. −25, ..., …, −10, −5, …, …, 10, …

3. −14, …, 0, 7, …, …, …

4. −30, …, −10, ..., …, 20, 30, …

5.…**,** −4, −2, …, 2, 4, …, …

Řešení:

1. 15, **12**, 9, 6, **3**, 0, −3, **−6**, **−9**

2. −25, **−20**, **−15**, −10, −5, **0**, **5**, 10, **15**

3. −14, **−7**, 0, 7, **14**, **21**, **28**

4. −30, **−20**, −10, **0**, **10**, 20, 30, **40**

5. **−6**, −4, −2, **0**, 2, 4, **6**, **8**

Komentář: Rychlejší žáci dostali za úkol vymyslet vlastní řady a pak měli možnost je předvést ostatním a zkontrolovat řešení.

Příklad 4 – rekordy na světadílech

(Inspirováno příklady z Odvárko – Kadleček, 2014)

Úkol – Práce s připravenou tabulkou a plnění zadaných úkolů – porovnávání, seřazení sestupně, vzestupně.

Pomůcky – Připravené tabulky s rekordy na jednotlivých světadílech.

Cíl – Procvičení porovnávání celých čísel.

Popis – Žáci pracují samostatně a plní zadané úkoly. Pro zpestření můžeme žáky vzít do počítačové učebny a nechat je vyhledat, na kterých místech byly tyto rekordní hodnoty naměřeny.

Práci můžeme také nechat dělat žáky ve dvojicích s využitím toho, že tabulky dostanou dvě a jednu si mohou rozstříhat a pracovat s ní.

Ukázka tabulky

SVĚTADÍL	TEPLOTNÍ REKORDY	
AFRIKA	−24°C	55°C
SEVERNÍ AMERIKA	−63°C	57°C
EVROPA	−58°C	52°C
AUSTRÁLIE	−23°C	51°C
OCEÁNIE	−22°C	42°C
JIŽNÍ AMERIKA	−33°C	49°C
ANTARKTIDA	−89°C	15°C
ASIE	−68°C	54°C

1. Na kterém světadílu byla naměřena nejvyšší teplota a na kterém nejnižší teplota?

2. Uspořádej světadíly podle jejich nejnižších teplotních rekordů a to od nejvyšší po nejnižší naměřenou teplotu.

3. Uspořádej světadíly podle jejich nejvyšších teplotních rekordů a to od nejnižší po nejvyšší naměřenou teplotu.

Řešení

1. Nejvyšší teplota byla naměřena v Severní Americe a nejnižší teplota na Antarktidě.

2. Oceánie, Austrálie, Afrika, Jižní Amerika, Evropa, Severní Amerika, Asie, Antarktida

3. Antarktida, Oceánie, Jižní Amerika, Austrálie, Evropa, Asie, Afrika, Severní Amerika

Komentář: Některé žáky úloha zaujala právě díky tomu, že se týkala také zeměpisu. Chtěli zjistit, jestli jsou to pravdivé hodnoty. Někteří aktivní žáci si na příští hodinu vytvořili ještě jiné porovnávání, které spojili se zeměpisem nebo také s přírodopisem – velikost zvířat.
V této úloze lze také využít rozdíl mezi naměřenými teplotami na jednotlivých světadílech a nechat žáky uspořádat světadíly podle rozdílu mezi naměřenými teplotami.

7.2 Opačná čísla a Absolutní hodnota

Příklad 5 - diktát a opačná čísla

Úkol – Zápis čísel a zakreslení na číselnou osu podle diktování ostatních.

Pomůcky – Připravené číselné osy a pracovní listy s popisem hodnot celých čísel.

Cíl – Procvičení a orientace v zápisu celých čísel – opačná čísla a absolutní hodnoty.

Popis – Žáci dostanou připravené prázdné číselné osy, bez jakéhokoli popisu. Je na učiteli, jaké číselné údaje, či zvolenou jednotku jim zadá. Podle diktování spolužáků zakreslují opačná čísla nebo absolutní hodnoty čísel do číselných os. Pracují jednotlivě, probíhá společná kontrola. Jeden z žáků vždy ostatním diktuje.

Ukázka pracovního listu

Zakresli na číselnou osu:

1) opačné číslo k číslu 5

2) všechna čísla, která mají od nuly vzdálenost 4

3) absolutní hodnotu čísla −1

4) všechna celá čísla, která mají od nuly vzdálenost menší nebo rovna 2

5) absolutní hodnotu čísla 3

Řešení

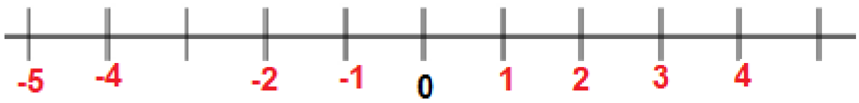
1) −5

2) 4, −4

3) 1

4) −2, −1, 0, 1, 2

5) 3



Komentář: Z počátku žákům zakreslování do číselných os velké problémy nedělalo, jelikož měli volnou ruku ve zvolených jednotkách. Ve chvíli, kdy jsem začala přidávat podmínky a zakreslovala jim daná čísla do os, někteří žáci si nevěděli rady nebo se čas, který potřebovali k řešení, prodloužil. I dobrovolníků, kteří vymýšleli ostatním příklady, ubylo.

7.3 Sčítání a odčítání celých čísel

Příklad 6 – matematický had

(Inspirováno z internetových stránek – Metodický portál)

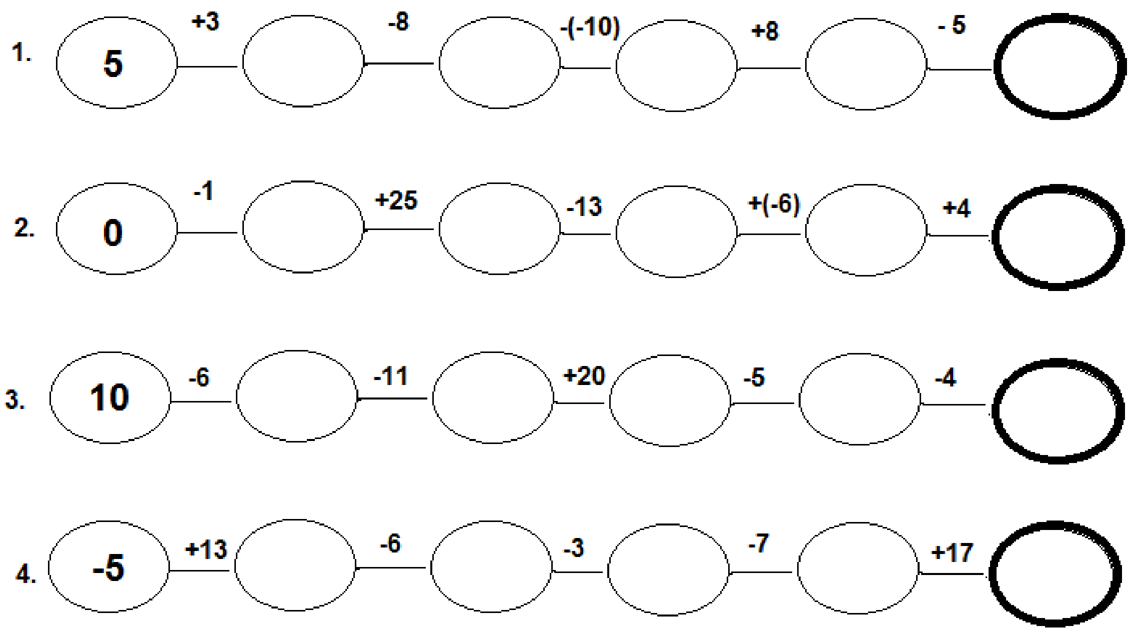
Úkol – Postupné dopočítávání chybějících čísel v matematickém hadovi.

Pomůcky – Pracovní list se zadáním.

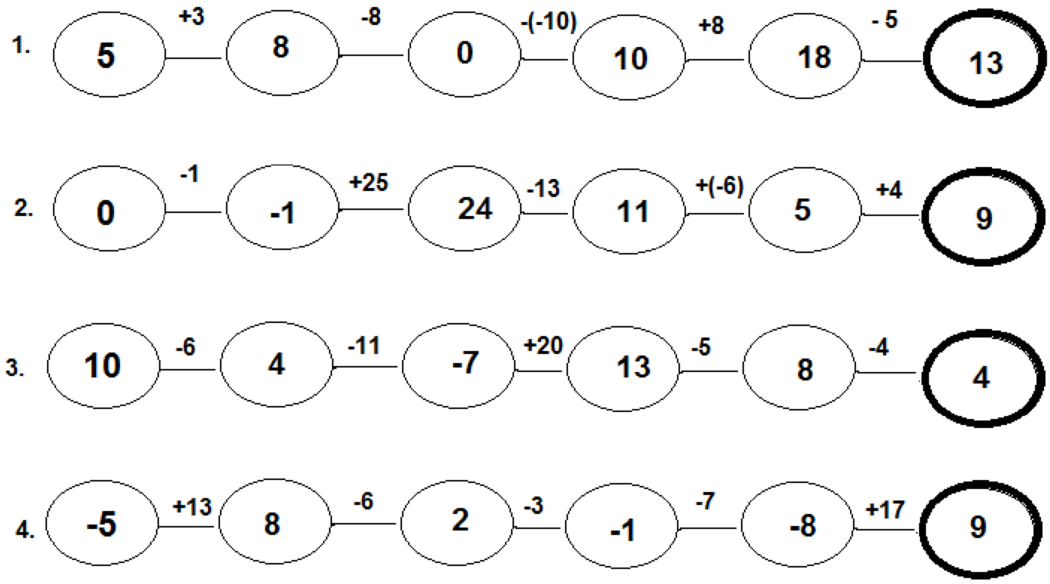
Cíl – Procvičení sčítání a odčítání celých čísel.

Popis – Žáci ve dvojicích počítají jednotlivé matematické hady. Mohou si je mezi sebe rozdělit. Po spočítání všech hadů si své výsledky zkontrolují s vedlejší dvojicí. Nakonec ještě s učitelem.

Ukázka pracovního listu



Řešení



<u>Příklad 7 – pyramidy</u>

(Inspirováno z internetových stránek – Metodický portál)

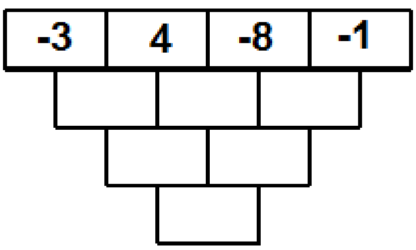
Úkol – Žák sečte dvě sousední čísla a výsledek zapíše do rámečku pod (nad) nimi. Dopočítává chybějící místa v pomyslné pyramidě.

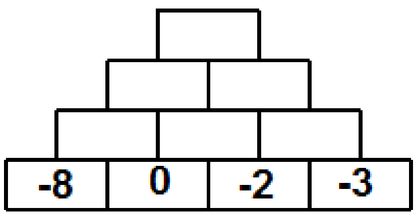
Cíl – Procvičení sčítání celých čísel.

Pomůcky – Připravený pracovní list.

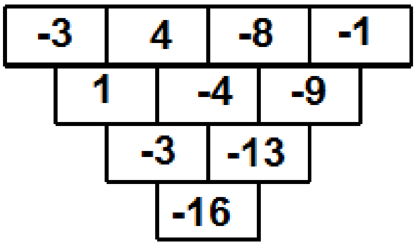
Popis – Žáci pracují samostatně, cílem je, aby všichni žáci dané pyramidy spočítali. Pokud máme ve třídě rychlejší žáky, připravíme si ještě pyramidy navíc a při dokončení zadané práce jim pyramidy přidáme. Pyramidy připravené navíc mohou být složitější, mohou mít jinak postavená čísla, či místo sčítání můžeme použít odčítání. Pyramidy je možné vytvořit i pro násobení a dělení nebo také pro racionální čísla.

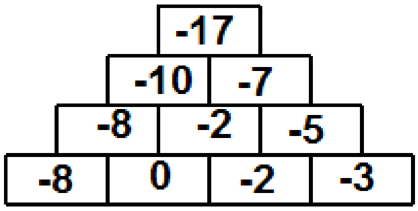
Ukázka pyramidy





Řešení





<u>Příklad 8 – složitější pyramidy</u>

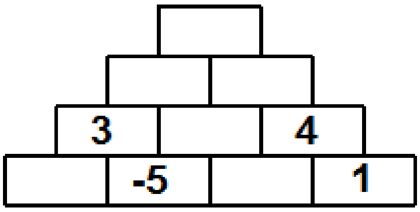
Úkol – Žák doplní čísla tak, aby součet dvou sousedních čísel (výsledek) byl zapsán v rámečku nad nimi.

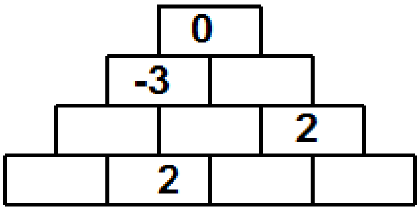
Cíl – Procvičení sčítání, odčítání celých čísel.

Pomůcky – Připravený pracovní list.

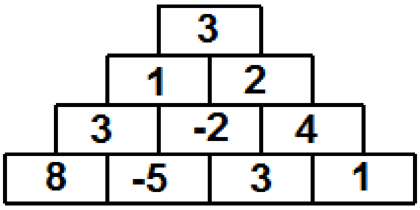
Popis – Žáci pracují samostatně nebo ve dvojicích. Následuje společná kontrola výsledků. Můžeme postupovat jako v předešlém cvičení.

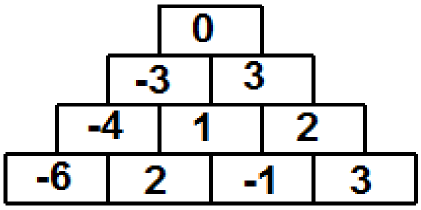
Ukázka složitější pyramidy





Řešení





Komentář: Všechny tři pracovní listy na sčítání a odčítání celých čísel mezi žáky sklidily celkem úspěch, hlavně ve chvíli, kdy mohli pracovat ve dvojicích či skupinách. Další velkou motivací pro ně byly malé jedničky, které jsem při této práci rozdávala. Přestože stále počítali, přišlo jim to zábavnější než obyčejné příklady. Některým žákům bylo nutné hlavně systém pyramid vysvětlit a na ukázce předvést.

7.4 Násobení a dělení celých čísel

Příklad 9 – tajenka

(Inspirováno z Rosecká, 1998)

Úkol – Žáci počítají jednotlivé příklady a pomocí výsledkové listiny sepisují písmena. Pokud spočítají vše správně, vyjde jim tajenka.

Cíl – Procvičení násobení a dělení celých čísel.

Pomůcky – Pracovní list s příklady a tajenkou.

Popis – Žáci pracují ve skupinách a svoji práci si rozdělí. Pro větší složitost můžeme vybrat jako výsledek nějaký hezký citát, který žáky zaujme, a najdou v něm určité poučení. Budou zvědaví, co jim vyjde. Žáky necháme pracovat ve skupinách, musí spolupracovat a navzájem se domlouvat, na řešení potřebují přijít všichni.

Ukázka tajenky

příklady:

1. (−15) : (−3) . (−7) =

2. − 24 : 8 =

3. 4 . (−1) . 9 =

4. −35 . 0 . 5 . 7 =

5. (−70) : 2 =

6. 3 . (−6) : 3 =

7. 9 . (−4) =

8. (−3) . (−1) . (−5) =

9. (−63) : (−9) =

10. (−9) . (−1) : (−3) =

Výsledková listina:

A	T	E	M	K	I
−3	−36	0	−35	7	−15

Doplň výsledek:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Řešení

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A

Komentář: Tato tajenka sloužila pouze jako navození atmosféry na začátku hodiny, je velice jednoduchá a není problém ji uhodnout. Pokud žáky chceme zaměstnat více, lze vymyslet tajenku, kde je například citát. Tyto pracovní listy lze také najít na internetu. Poté můžeme složitější křížovku využít na skupinovou práci v rámci procvičování.

<u>Příklad 10 – řetězce na násobení</u>

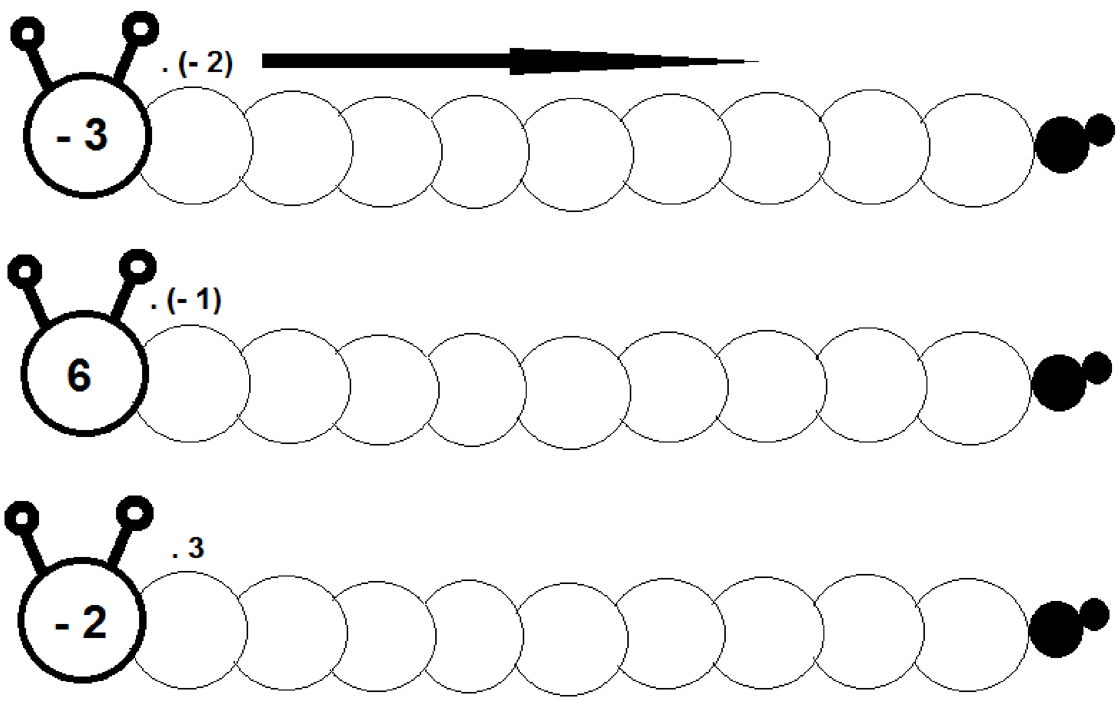
Úkol – Násobení celého čísla stále stejným číslem, až dojdou na konec řetězce.

Cíl – Procvičení násobení celých čísel.

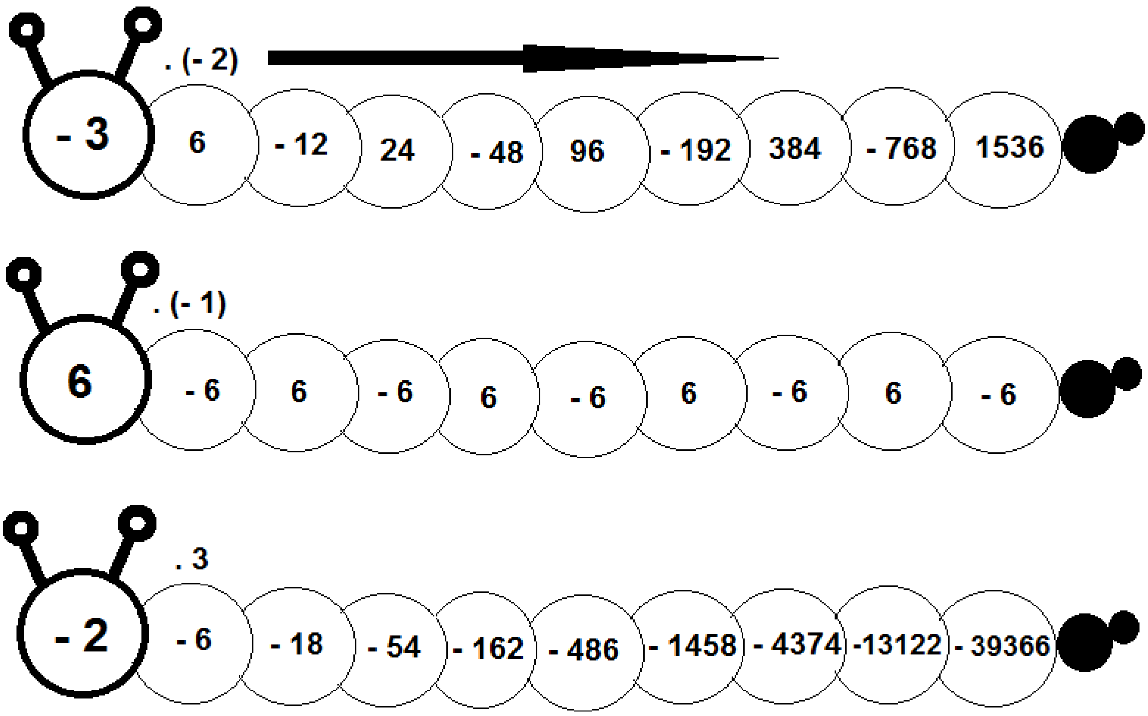
Pomůcky – Pracovní list s řetězci.

Popis – Žáci pracují ve dvojici, svoji práci si rovnoměrně rozdělí. Nakonec proběhne kontrola s učitelem a se zbytkem třídy. Všichni by měli zvládnout dané příklady na násobení spočítat.

Ukázka pracovního listu



Řešení



Komentář: Toto násobení pomocí řetězců je pro žáky složité a nedostatečně motivační, proto jsem k jeho dokončení povolila žákům využít kalkulátor. Tento druh úloh je vhodnější používat spíše pro sčítání, či odčítání.

<u>Příklad 11 – piškvorky trochu jinak</u>

Úkol – Žáci hrají piškvorky, ale aby mohli umístit svoji značku do čtverečku, musí správně vypočítat zadaný příklad – násobí dvě čísla mezi sebou.

Cíl – Procvičení násobení celých čísel.

Pomůcky – Připravená tabulka na piškvorky s čísly.

Popis – Žáci se rozdělí do dvojic, kromě tabulky na piškvorky si mohou připravit pomocné papíry pro sepsání příkladů. Pokud příklad nespočítají zpaměti, mohou si ho sepsat na papír a spočítat. Druhý z dvojice příklad i postup kontroluje a schvaluje. Tyto tabulky se mohou využít pro třídní kolo v piškvorkách, kde kromě násobení a dělení můžeme také zapojit sčítání a odčítání celých čísel. Musíme mít však pro rychlé dvojice připravenou práci navíc, aby se nenudili. Stejnou tabulku můžeme vytvořit i pro dělení.

Ukázka tabulky

	+2	−3	+5	−7	0	−4	8	−10	−2	12	7	−9
(−3)												
(1)			X									
(−2)				O								
(+5)												
(−2)												
(−5)												
(−4)												
(+7)												
(−8)												
(−9)												
(−1)												

Ukázka příkladů

pro znak X = 1 . (+5) = 5

pro znak O = (−2) . (−7) = 14

Komentář: Z počátku některým žákům hra dělala problémy, nakonec jsme si zahráli turnaj. Žáci se navzájem poctivě hlídali, jestli protihráč opravdu spočítal příklad správně. Tyto piškvorky se dají využít i pro jiné početní operace.

7.5 VŠECHNY POČETNÍ OPERACE

Příklad 12 – početní řetězec

Úkol – Žák si zapisuje čísla podle diktování a provádí početní operace, které jsou určeny. Snaží se co nejrychleji přijít na výsledek.

Cíl – Procvičení sčítání, odčítání, násobení a dělení celých čísel.

Pomůcky – Připravené řetězce čísel.

Popis – Žáci pracují samostatně a snaží se co nejrychleji dojít k výsledku. Žák, který má výsledek jako první správně, může diktovat svůj vlastní řetězec. Kromě přípravy učitele si žáci mohou vymyslet své vlastní řetězce a diktovat si je navzájem. Můžeme tuto hru ve třídě hrát také formou soutěže družstev či řad, ve kterých žáci sedí. Řetězce můžeme mít různě dlouhé, pro zvýšení složitosti prodlužujeme délku početního řetězce.

Ukázka

1. Mám číslo 17, přičtu k němu jeho opačné číslo a výsledek vynásobím 7. Co mi vyjde?

2. Mám číslo 3, vynásobím ho (−2), k výsledku přičtu (−15) a celý výsledek vynásobím (−3). Jaký výsledek mi vyšel?

Řešení

1. $17 + (-17) = 0 \quad 0 \,.\, 7 = 0$

2. $3 \,.\, (-2) = -6 \quad -6 + (-15) = -21 \quad -21 \,.\, (-3) = 63$

Komentář: Početní řetězce některým žákům dělají problémy v tom, že musí dávat pozor a sami si příklad správně zapsat. Pokud se spletou, už nemají šanci příklad vypočítat správně. Jako zpestření hodiny se tyto řetězce hodí a můžeme dát i žákům prostor k vymyšlení vlastních řetězců.

<u>Příklad 13 – příjmy a výdaje</u>

(Inspirováno z internetových stránek – ZŠ Žatec)

Úkol – Rozdělení dokladů na příjmy a výdaje a spočítání momentálního stavu účtu dané firmy.

Pomůcky – Připravený pracovní list s příjmy a výdaji dané firmy.

Cíl – Procvičení sčítání, odčítání, násobení a dělení celých čísel, také si představí situaci z reálného života.

Popis – Žáci pracují samostatně nebo ve dvojicích, vzhledem k tomu, že všichni dostanou stejné zadání, měli by také dojít ke stejnému výsledku. Úlohu můžeme obměnit jako skupinovou práci nebo příjmy a výdaje jednotlivých rodin. Také můžeme jako zadání úlohy zadat rekonstrukci nějakého bytu či domu a žáci ze všech uvedených údajů musí sestavit rozpočet. Pro tento druh činnosti se zde nemusí vyskytovat pouze celá čísla, ale také racionální čísla.

Žákům můžeme také vytisknout přímo pohyby na nějakém účtu a nechat je vše sestavit samostatně. V tomto případě rozdělíme žáky do skupin a oni sami si poté rozdělí práci. Z počátku se žáky projdeme výpis z účtu, aby se v něm zvládli nějak zorientovat. Řekneme jim, jak lze poznat příchozí a odchozí platby. Které platby k čemu patří a jaký bude nejlepší postup pro zjištění konečného zůstatku na účtu.

Ukázka úlohy

Firma se zabývá prodejem a výrobou nábytku. Firma je velice malá, skládá se ze dvou společníků. Momentálně mají na účtu velice malou částku a to 11 000 Kč, se kterými musí nějakou dobu vystačit, jelikož jim některé firmy jejich práci nezaplatily.

<u>Přehled plateb a příjmů za daný měsíc</u>

− nákup dřevěných desek … 5 ks po 1 999 Kč, 7 ks po 399 Kč a 15 ks po 199 Kč
+ příchozí platba za dodělanou kuchyňskou linku ... 71 000 Kč
+ příchozí platba za vestavěnou skříň ... 27 500 Kč
− nákup objednaných lesklých dvířek na obývací stěnu ... 4 ks po 1799 Kč a 4 ks po 5 600 Kč
− nákup věcí do kuchyňky (cukr, káva, čaj a jiné) v hodnotě 581 Kč
− výplata pro brigádníka za 1 měsíc ... 12 500 Kč
− skleněné součástky na připravovanou obývací stěnu ... 17 300 Kč
− nákup součástek na nově objednanou kuchyňskou linku ... 51 300 Kč

Jak jsou na tom na konci měsíce tito dva společníci? Jaký je jejich konečný zůstatek na účtu? Mohou si dovolit vyplatit i sobě výplatu?

Řešení

Počáteční stav 11 000 Kč	
Příjmy	**Výdaje**
71 000 Kč	5 . 1999 = 9 995 Kč
27 500 Kč	7 . 399 = 2 793 Kč
4 . 1 799 = 7 196 Kč	15 . 199 = 2 985 Kč
4 . 5 600 = 22 400 Kč	581 Kč
	12 500 Kč
	17 300 Kč
	51 300 Kč
Celkem příjmy: 128 096 Kč	**Celkem výdaje: 97 454 Kč**
Konečný stav: 11 000 + 128 096 − 97 454 = 41 642 Kč	

Tito dva společníci mají na konci měsíce na účtu 41 642 Kč. Po vzájemné domluvě si určitě budou moci vyplatit i nějakou výplatu sobě.

Komentář: Z mého pohledu je tato úloha velice praktická. Spojuje reálný život s matematikou a celými čísly. S tímto se žáci mohou později setkat ve svém životě a měli by si s tím umět poradit. Pro některé žáky byl úkol náročný, přestože zadání bylo velice zjednodušené. Dělali chyby a nedokázali se správně zorientovat v příjmech a výdajích. Tuto úlohu lze ztížit tím, že vytiskneme žákům pouze výpis z nějakého účtu, projdeme ho s nimi, objasníme určité pojmy a zadáme úkoly. Je také ideální jako projekt například do hodin „Cvičení z matematiky“ či matematicky založený zájmový kroužek.

Příklad 14 - bingo

Úkol – Žáci dostanou nebo si vytvoří tabulku 4 x 4 (5 x 5, 3 x 3) čtverců. Do této tabulky si žáci zapíší libovolná čísla od −20 do 20. Počítají zadané příklady, a pokud mají výsledek příkladu ve své tabulce, číslo přeškrtnou. Vyhrává žák, který má vyškrtaný 1 řádek, sloupec, diagonálu nebo celou tabulku, záleží na domluvě.

Cíl – Procvičení sčítání, odčítání, násobení a dělení celých čísel a také přednost jednotlivých operací.

Pomůcky – Tabulka čtverců a připravené příklady.

Popis – Příklady pro hru učitel může během hry vymýšlet, ale měl by si je zapisovat, aby nedošlo na konci k chybě a byla možná kontrola. Nebo si učitel může připravit kartičky s příklady, které žákům ukazuje. Další možností je využití projektoru ve třídě, kde učitel zapisuje příklady rovnou na projektor a posouvá je postupně dolů. Urychlí to činnost v hodině a příkladů může být mnoho. Příklady také mohou vymýšlet samotní žáci.

Ukázka tabulky

Ukázka připravených příkladů

6 . (−4) : 8 =

−25 + (−10) : (−7) =

5 − (−4) =

<u>Příklad 15 – „chobotnice“</u>

(Inspirováno z internetových stránek – Metodický portál)

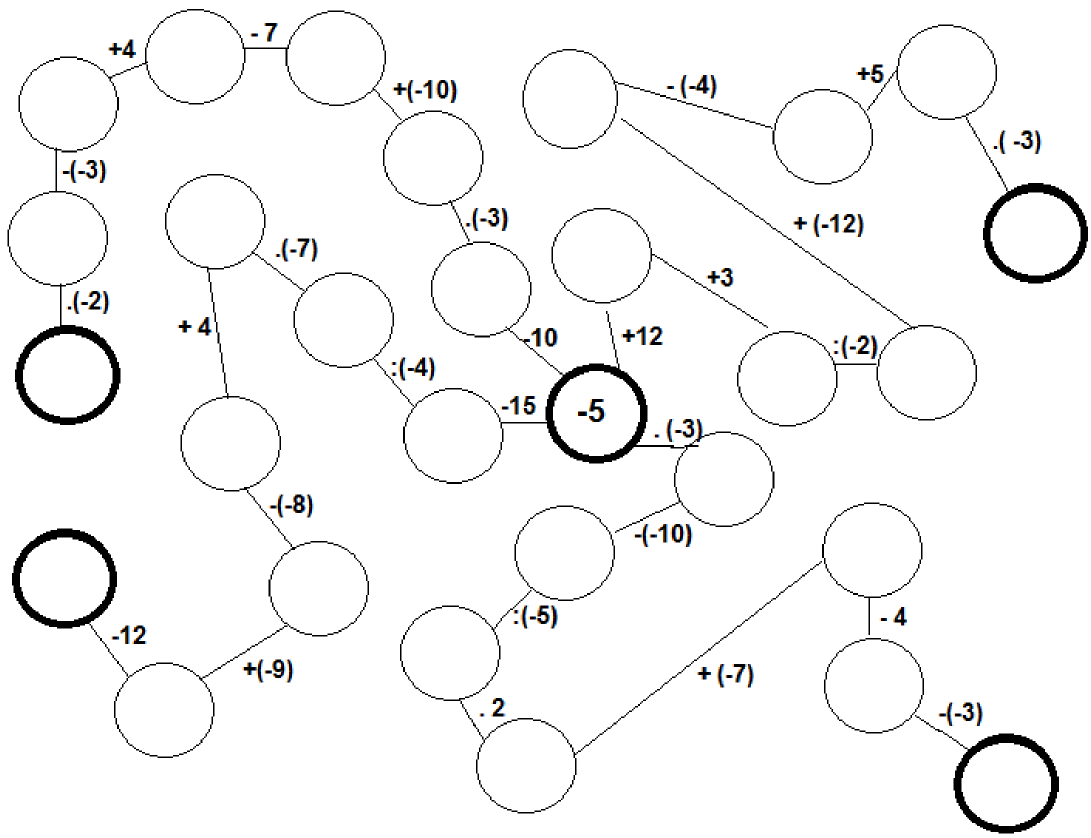
Úkol – Na základě početních operací doplnění chybějících čísel v „chobotnici“.

Pomůcky – Pracovní list pro čtyřčlennou skupinu.

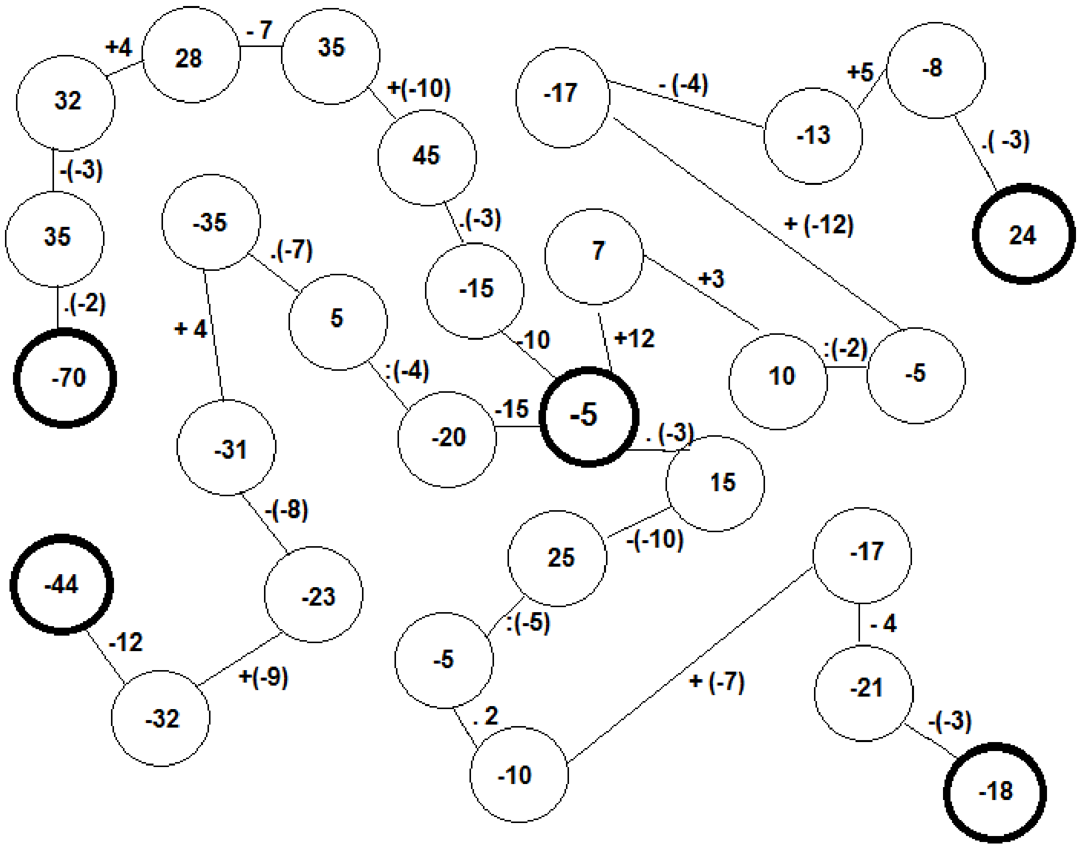
Cíl – Procvičení sčítání, odčítání, násobení a dělení celých čísel.

Popis – Žáci pracují ve čtyřčlenných skupinách, každý žák spočítá domluvené chapadlo. Jejich úkolem je také vzájemná kontrola, aby jejich pracovní list byl správně.

Ukázka jedné chobotnice



Řešení



Komentář: Pracovní list lze využít jako skupinovou práci, či pro jednotlivce. „Chobotnice“ můžeme různě upravovat. Jednou možností je také, že budeme znát výsledné číslo, ale počáteční číslo ne. Nebo pouze početní operace s operátory a nějaký mezivýsledek.

Příklad 16 – skládání příkladů

Úkol – Žáci si sami sestaví příklady, zapíší je a spočítají.

Cíl – Procvičení početních operací s celými čísly (sčítání, odčítání, násobení).

Pomůcky – Rozstříhané kartičky s čísly a početními operacemi.

Popis – Žáci pracují ve dvojicích, navzájem se kontrolují. Kartičky leží rozstříhané na stole lícem dolů. Každý žák otočí dvě karty s čísly a jednu kartu se znaménkem početní operace, příklad sepíše a spočítá. Žáci se střídají, mohou mezi sebou soutěžit. Mohou si například zvolit časový limit a počet příkladů nebo se mohou vystřídat, až jeden z nich příklad zkazí. Příklady si mohou ztížit tím, že přidávají počet čísel a počet početních operací. Mezi kartičky si také mohou přidat závorky.

Ukázka kartiček

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	−1	−2	−3	−4
−5	−6	−7	−8	−9
−10	+	−	.	

Komentář: Tuto úlohu jsem v hodinách využila již vícekrát, nejen v problematice celých čísel. Úloha rozvíjí spolupráci ve dvojicích. Některé dvojice si přidali i závorky a příklady byly hned složitější. Závorky si však už nelosovali.

<u>Příklad 17 – počítej a domluv se</u>

(Inspirováno z internetových stránek – Metodický portál)

Úkol – Počítání zadaných příkladů a porovnání s ostatními ve skupině.

Cíl – Procvičení všech početních operací s celými čísly a složitějších příkladů s předností početních operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení).

Pomůcky – Pracovní listy pro jednotlivé žáky, výsledkové tabulky a vzorové řešení pro skupinu.

Popis – Žáci jsou rozděleni do čtyřčlenných družstev. Každý ze skupiny dostane svůj pracovní list s příklady, každá skupina má jiné příklady, aby si je mohli po vypočtení vyměnit. Žák nejdříve vypočítá všechny příklady samostatně, pak se v rámci skupiny utvoří dvojice a sepíše své výsledky po vzájemné domluvě. Nakonec sepíší výsledky celé skupiny. Během tohoto domlouvání žáci řeší, zda v daném příkladu postupovali správně, jestli dali přednost správné početní operaci. Poté jeden ze skupiny dojde pro vzorová řešení a celá skupina to zkontroluje.

Ukázka pracovního listu a výsledkové tabulky

Zadání příkladu		Výsledek samostatně	Výsledek dvojice	Výsledek skupina
27 + 3 − (−6) . 3 =				
−8 + 3 . (+6) =				
[(−6) . (−4)] : (−8 − 4) =				
−16 + 3 . (−2) + 2 . 4 =				
2 . (−2) + 18 − 6 . (−2) =				
5 . 2 + (−7) . (−6) =				
10 − 3 − 5 − 14 − 1 =				
(−7) . (−3) . (−1) . 0 . (+5) =				

Řešení

Zadání příkladu		Výsledek samostatně	Výsledek dvojice	Výsledek skupina
27 + 3 − (−6) . 3 =				**48**
−8 + 3 . (+6) =				**10**
[(−6) . (−4)] : (−8 − 4) =				**−2**
−16 + 3 . (−2) + 2 . 4 =				**−14**
2 . (−2) + 18 − 6 . (−2) =				**26**
5 . 2 + (−7) . (−6) =				**52**
10 − 3 − 5 − 14 − 1 =				**−13**
(−7) . (−3) . (−1) . 0 . (+5) =				**0**

Komentář: Tento typ úloh je vhodný nejenom kvůli procvičování početních operací, ale také aby se žáci byli schopni domluvit ve skupině a obhájit si před ostatními svoje řešení. Slouží tedy k rozvoji komunikace. V některých skupinách se nemohli shodnout, jinde zase nepracovali všichni. Někteří, přestože měli vyřešeno správně, nedokázali obhájit své řešení.

Příklad 18 – sestavení obrazce

(Inspirováno z internetových stránek – Metodický portál)

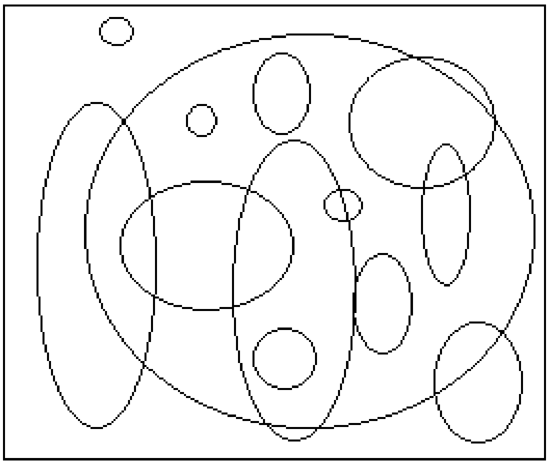
Úkol – Počítání zadaných příkladů, seřazení výsledků sestupně a po nalepení na papír vznikne na druhé straně obrazec, který si mohou vybarvit.

Cíl – Procvičení všech početních operací s celými čísly a složitějších příkladů s předností početních operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení) a porovnávání celých čísel.

Pomůcky – Rozstříhané příklady, na druhé straně s obrazcem ke složení.

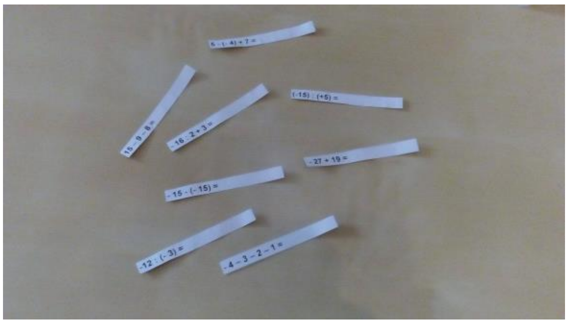
Popis – Žáci spočítají všechny zadané příklady, seřadí je sestupně nebo jinak podle zadání. Přilepí je na jiný papír a výsledkem jejich práce bude obrazec, který si mohou vybarvit. Obrazec vznikne jen tehdy, pokud jsou příklady spočítané správně.

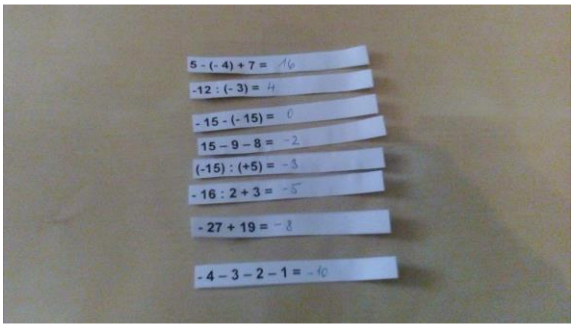
Ukázka pracovního listu se složeným obrazcem

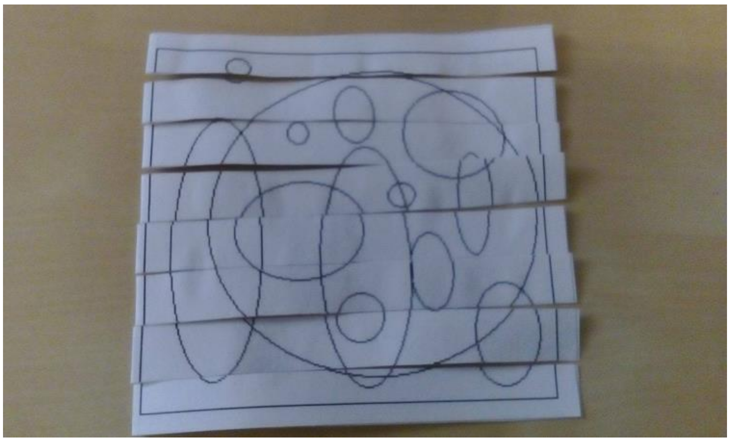
Líc	Rub
5 − (−4) + 7 =	
−12 : (−3) =	
−15 −(−15) =	
15 − 9 − 8 =	
(−15) : (+5) =	
−16 : 2 + 3 =	
−27 + 19 =	
− 4 − 3 − 2 − 1 =	

Komentář: Tento rozstříhaný pracovní list jsem používala pro žáky, kteří měli brzy hotovou práci a tento list dostali jako práci navíc. Pokud ho spočítali a obráceně nalepili, mohli ještě vybarvit. Barevné pastelky si půjčovali po celé třídě.

Dokumentace pomocí fotek:







7.6 Složitější úlohy

Příklad 19 – delší výpočty

(Inspirováno příklady - Jedličková, 2013)

Úkol – Počítání zadaných příkladů a vybarvení správných výsledků.

Cíl – Procvičení všech početních operací s celými čísly, racionálními čísly a více operacemi v jednom příkladu.

Pomůcky – Pracovní listy pro jednotlivé žáky, tabulky s výsledky.

Popis – Žáci pracují jednotlivě, počítají složitější příklady, kde je důležité uvědomit si více početních pravidel. Výsledky vybarvují v přiložené tabulce. Kontrola proběhne pomocí vybarveného tvaru a společné opravy.

Ukázka pracovního listu

Vypočítej a výsledky vybarvi v tabulce:

a) (−6) + (−23) + (−16) - (+32) =

b) −7 + 33 − (−33) =

c) −(−5,5) −15,3 − (−8,2) =

d) 2,2 − (−4,5) − 6,2 =

e) 4 . 5 . (−6) . (−2) =

f) −9 : (−3) . (−4) =

g) −7 . 9 : (−3) =

h) −6 . (−7) . (−1) =

-1,6	140	0,4	240
0,5	60	1,6	59
-42	220	-7	-12
-15	-77	21	-1,5

Řešení:

a) (−6) + (−23) + (−16) - (+32) = −77

b) −7 + 33 − (−33) = 59

c) −(−5,5) −15,3 − (−8,2) = −1,6

d) 2,2 − (−4,5) − 6,2 = −0,5

e) 4 . 5 . (−6) . (−2) = 240

f) −9 : (−3) . (−4) = −12

g) −7 . 9 : (−3) = 21

h) −6 . (−7) . (−1) = −42

-1,6	140	0,4	240
0,5	60	1,6	59
-42	220	-7	-12
-15	-77	21	-1,5

Komentář: Pro některé žáky jsou tyto příklady velice složité. Největší problémy jsem shledala v přednosti početních operací a problematice zařazení racionálních čísel.

<u>Příklad 20 – oprav chyby</u>

(Inspirováno příklady - Jedličková, 2013)

Úkol – Počítání zadaných příkladů a oprava chyb.

Cíl – Procvičení všech početních operací s celými čísly, racionálními čísly a více operacemi v jednom příkladu.

Pomůcky – Pracovní list pro jednotlivé žáky.

Popis – Žáci pracují jednotlivě, počítají složitější příklady, kde je důležité uvědomit si přednost početních operací. Příklady kontrolují a opravují, své tvrzení musí umět odůvodnit.

Ukázka pracovního listu

Oprav chyby:

a) 8 − 6 . 2 + 16 : (-2) + 1 = −3

b) -25 : (-5) + 15 − (−8) : 2 + 3 . 0 = 14

c) (5 – 36) . 10 = −310

d) [(−1,4) - (+ 2,2)] : (−0,2) = −4

e) −6,8 − (−2 + 1,5) = −7,3

f) − (+100) : (−5) − (−100) : 4 = 30

g) (−3) . (−3−4) + (−45) : (−9) = 26

h) 6 + (−1,6) : 8 + 3,6 – 1,2 . 4 − 0,8 = −0,25

Řešení

a) 8 − 6 . 2 + 16 : (−2) + 1 = **−11**

b) -25 : (-5) + 15 − (−8) : 2 + 3 . 0 = **24**

c) (5 – 36) . 10 = −310

d) [(−1,4) - (+ 2,2)] : (−0,2) = **18**

e) −6,8 − (−2 + 1,5) = **−6,3**

f) − (+100) : (−5) − (−100) : 4 = **45**

g) (−3) . (−3−4) + (−45) : (−9) = 26

h) 6 + (−1,6) : 8 + 3,6 – 1,2 . 4 − 0,8 = **3,8**

Komentář: Jako v předchozí úloze jsou tyto příklady pro žáky složité a i takovéto množství zabere mnoho času. Někteří se sami ke správnému výsledku ani nedostanou. V těchto příkladech je největším problémem přednost početních operací.

Příklad 21 – správně slož a počítej

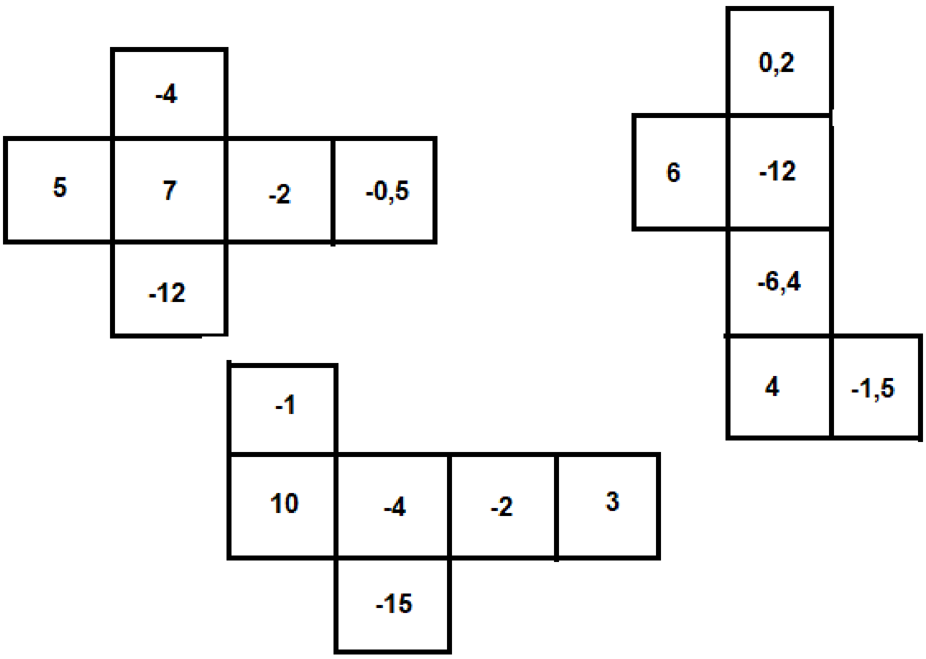
(Inspirováno příklady - Jedličková, 2013)

Úkol – Správná představa složení krychle a výpočet součtu, rozdílu, součinu nebo podílu protilehlých stran krychle.

Cíl – Procvičení všech početních operací s celými čísly, racionálními čísly a představivosti pro složení krychle.

Pomůcky – Projektor.

Popis – Žáci pracují jednotlivě, počítají příklady podle zadání učitele. Nejdříve je důležitá představivost, poté teprve samotný výpočet.



Komentář: Žákům jsem sítě krychlí promítla ve třídě a zadávala jsem jim úkoly. Většinou sčítali, odčítali, násobili, dělili protilehlé strany krychle. Pro slabší žáky jsem měla sítě i vytisknuté. Mohli si je tedy vystřihnout a složit. Práce probíhala jak jednotlivě, tak ve skupinách. Při obměnách čísel v sítích můžeme příklady ještě více ztížit.

7.7 NÁVRH PÍSEMNÉ PRÁCE NA CELÁ ČÍSLA

Jako součást aktivit na celá čísla jsem navrhla dvě oddělení písemné práce – A, B, která budou sloužit jako zopakování a ověření znalostí žáků. Písemná práce je zde i s řešením a bodovým ohodnocením. Písemnou práci vypracovali žáci 7. ročníku na 5. ZŠ Cheb. Dostali vytištěné zadání a řešení dopisovali přímo do pracovního listu. K vypracování nesměli použít kalkulátory. Časové omezení neměli, avšak do 30 minut měli všichni hotovo. Přikládám zde zadání i s bodovým ohodnocením, které je v závorkách. Součástí je řešení.

Písemná práce - A

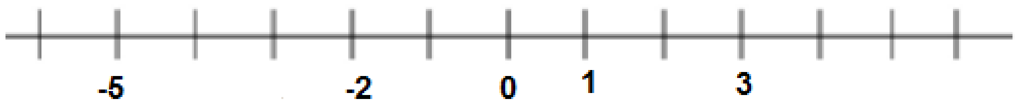
1) Ze zadaných čísel vyber čísla celá - podtrhni (1 b.)

5; 3,1; −4; +18; ½; 0; −2,7

2) Podle předpovědi počasí byla v pondělí naměřena teplota 8 stupňů pod nulou. Zapiš celým číslem: (1 b.)

−8°C

3) Na číselnou osu vhodně zakresli čísla: −5; 3; 0; −2; 1 (1 b.)



4) Urči k zadaným číslům čísla opačná: (1 b.)

a) −24 b) +6 c) 0 d) 14

opačná čísla jsou: 24; −6; 0; −14

5) Urči absolutní hodnotu zadaných čísel a správně zapiš: (1 b.)

a) 8 b) - 3 c) + 12 d) 0

$|8| = 8$ $|-3| = 3$ $|+12| = 12$ $|0| = 0$

6) Seřaď daná čísla sestupně: −7; 5; −3; −15; 4; 0; −6; 8 (1b.)

8 > 5 > 4 > 0 > −3 > −6 > −7 > −15

7) Vypočítej: (6 b.)

a) −5 + (−12) = **−17**

b) 10 − (−18) = **28**

c) +30 − (−25) = **55**

d) −16 + (+ 9) = **−7**

e) (−16) − (+7) − (−4) = **−19**

f) −8 − |−7| = **−15**

8) Vypočítej: (6 b.)

a) 4 . (−5) = **−20**

b) (−7) . (−9) = **63**

c) 3 . (−2) . (−4) . (−1) = **−24**

d) −56 : 7 = **−8**

e) (−128) : (−16) = **8**

f) (−35 + 3) : (−8) = **4**

9) Vypočítej: (2 b.)

a) 16 . (−5) − 8 . (−5) − 10 . (−4) = **0**

b) (−3) . 12 − 5 . (4 − 8) = **−16**

10) Vyřeš slovní úlohu: (3 b.)

Petr jezdil výtahem. Nastoupil ve čtvrtém patře, sjel do přízemí, pak vyjel o pět pater nahoru, sjel o tři patra dolů, o dvě nahoru a zase o jedno dolů a vystoupil. V jakém patře vystoupil?

zápis:

nástup …………….4. patro

1……………………sjel do přízemí = 0

2……………………+5 pater

3……………………−3 patra

4…………………..+2 patra

5…………………..−1 patro

vystoupil…………..x

výpočet:

x = 0 + 5 − 3 + 2 − 1

x = 3

odpověď:

Petr vystoupil ve 3. patře.

Písemná práce - B

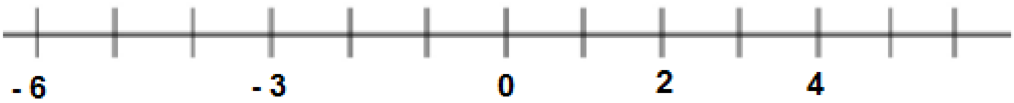
1) Ze zadaných čísel vyber čísla celá - podtrhni (1 b.)

4; 4,1; −8; ½; +16; 0; -2,6

2) Podle předpovědi počasí byla v pondělí naměřena teplota 9 stupňů nad nulou. Zapiš celým číslem: (1 b.)

+9°C

3) Na číselnou osu vhodně zakresli čísla: −6; 4; 0; −3; 2 (1 b.)



4) Urči k zadaným číslům čísla opačná: (1 b.)

a) −17 b) +8 c) 0 d) 9

opačná čísla jsou: 17; −8; 0; −9

5) Urči absolutní hodnotu zadaných čísel a správně zapiš: (1 b.)

a) −8 b) 5 c) +10 d) 0

$|-8| = 8$ $|5| = 5$ $|+10| = 10$ $|0| = 0$

6) Seřaď daná čísla vzestupně: −6; 4; −2; −14; 3; 0; −7; 9 (1b.)

−14 < −7 < −6 < −2 < 0 < 3 < 4 < 9

7) Vypočítej: (6 b.)

a) −6 + (−13) = **−19**

b) 4 − (−6) = **10**

c) −30 − (−15) = **−15**

d) −17 + (+ 9) = **−8**

e) (−15) − (+ 6) − (−3) = **−18**

f) $6 - |-7|$ = **−1**

8) Vypočítej: (6 b.)

a) 3 . (−5) = **−15**

b) (−4) . (−9) = **36**

c) 4 . (−3) . (−3) . (−1) = **−36**

d) −72 : 9 = **−8**

e) (−168) : (−12) = **14**

f) (−75 + 3) : (+8) = **−9**

9) Vypočítej: (2 b.)

a) 20 . (−4) − 8 . (−5) − 10 . (−4) = **0**

b) (−4) . 15 − 5 . (14 − 8) = **−90**

10) Vyřeš slovní úlohu: (3 b.)

Děti hrály kuličky, Honza na začátku hry žádné neměl, proto si půjčil 8 kuliček od Míši. Nejdříve prohrál sedm kuliček, poté pět kuliček vyhrál, pak 3 kuličky prohrál a 4 vyhrál. Nakonec ještě jednu vyhrál. Kolik kuliček měl na konci hry? Mohl je vrátit Míšovi?

zápis:

půjčil …………….8 kuliček

1……………………−7 kuliček

2……………………+5 kuliček

3……………………−3 kuličky

4…………………...+4 kuličky

5…………………...+1 kulička

kuliček na konci hry…………..x

výpočet:

x = 8 − 7 + 5 − 3 + 4 + 1

x = 8

odpověď:

Na konci hry měl 8 kuliček a mohl je Míšovi vrátit.

Hodnocení:

23 b. - 20,5 b. ………. 1

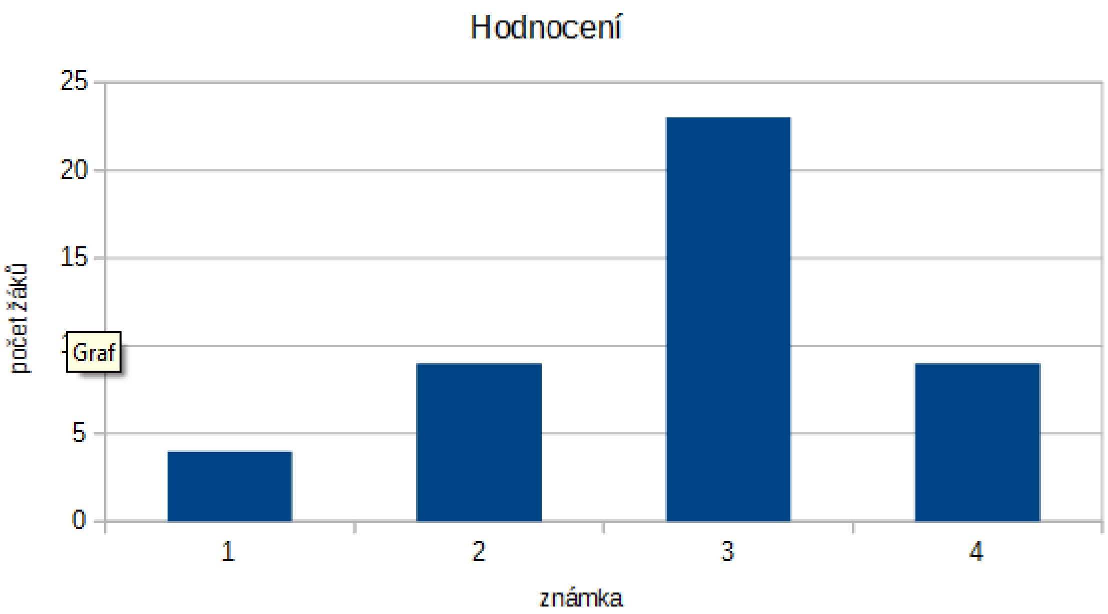
20 b. - 17 b. …………. 2

16,5 b. - 11,5 b. …….. 3

11 b. – 7 b. …………… 4

6,5 b. - 0 b. …………...5

Tuto písemnou práci jsem zadala žákům na ZŠ, kde učím. Vybrala jsem žáky 7. ročníků, kteří v tomto školním roce celá čísla probírají. Celá čísla se u nás na ZŠ probírala již v 1. pololetí, proto tento test byl takovým zopakováním a ověřením jejich znalostí. Žáci prokazovali, jak si pamatují pravidla početních operací s celými čísly. Celkem psalo písemnou práci 45 žáků. Písemné práce byly opraveny přesně podle sepsaného hodnocení a první graf ukazuje celkové hodnocení dle známek.



Pokud se zaměříme na úspěšnost v jednotlivých příkladech a nejčastější chyby, dojdeme k tomu, že první čtyři úlohy byly pro žáky nejjednodušší. Většina měla úlohy správně. První čtyři úlohy vyřešilo správně 30 – 35 žáků. Z výsledků, které žáci odevzdali, pro ně byl nejjednodušší příklad číslo 3, zakreslení čísel na číselnou osu. Já jsem si myslela, že žákům nebude dělat problémy příklad číslo 2, ovšem někteří žáci si s pojmem stupňů nad nulou nebo pod nulou nedokázali poradit.

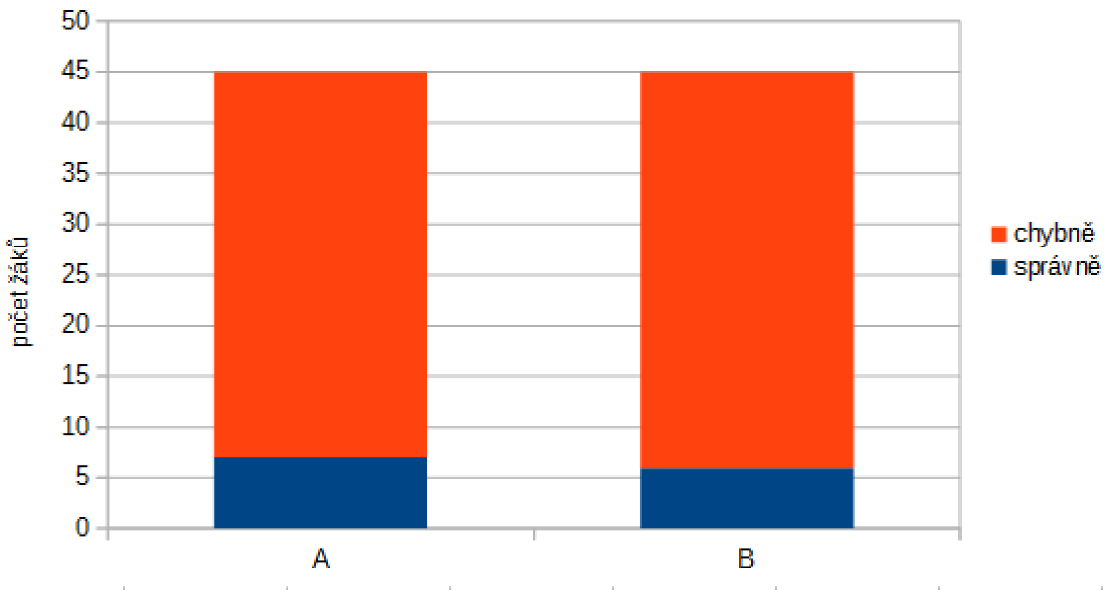
Páté cvičení mělo vyřešeno pouze 18 žáků správně, největší problém byl správný zápis. Většina si i pamatovala, že absolutní hodnota jakéhokoliv čísla je vždy kladná, ovšem zapsat to neuměli.

Výsledek šestého cvičení, které bylo zaměřeno na seřazení čísel vzestupně nebo sestupně mě ani nepřekvapilo. Pravidelně se na hodinách setkávám s tím, že žáci neznají význam těchto dvou pojmů, přestože jsou jim několikrát opakovány. Takže seřadit čísla by jim problém nedělalo, jen by museli vědět jak. Přes jednoduchost zadání tohoto příkladu, bylo jen 17 správných řešení.

Sedmé a osmé cvičení bylo pro některé z žáků jednoduché, jiní udělali mnoho chyb. V sedmém cvičení, kde se sčítalo či odčítalo, nejvíce chyb bylo ve znaménku u výsledku. Pokud žáci již daný příklad správně spočítali, do výsledku zapomněli napsat správné znaménko. V příkladu, kde byla absolutní hodnota, žáci zapomínali na správný zápis.

V osmém cvičení mě překvapila vysoká chybovost ve znalostech, které mají mít z předchozích ročníků, tedy malá a velká násobilka, kterou museli v těchto příkladech kromě pravidel se znaménky využít.

Jednoznačně nejtěžším cvičením bylo deváté cvičení, ke zhodnocení přikládám opět graf.



Největším problémem v těchto příkladech byla přednost početních operací, kterou žáci nedodržovali. Poslední byla slovní úloha, která ve většině případů byla vypočtena správně, tedy 31 správných řešení. Nejčastější chyby byly v nedostatečném přečtení zadání či nesprávném zápisu slovní úlohy. Početní chyby zde byly minimální.

Myslím, že písemná práce ukázala, kdo se jak v celých číslech orientuje a jaké má znalosti.

Výsledky této písemné práce mě dovedly k závěru, že je nutné i ty nejjednodušší příklady s žáky několikrát opakovat a procvičovat. Někteří žáci si nedokázali spojit celá čísla s reálným životem, jako například stupně pod nulou. Některé pojmy, které prostupují i jinými tématy matematiky, si neuměli řádně přiřadit, například slovo vzestupně.

Největším problémem byla přednost početních operací v zadaných příkladech, která žáky provází již od 1. stupně základní školy, přesto většina z nich nedokázala správně určit postup výpočtu v deváté úloze. Je tedy důležité častěji žákům dávat složitější příklady a nechat je i vysvětlit postup jejich řešení. Postup svého řešení by si každý žák měl umět obhájit a vysvětlit ostatním.

Závěrem tedy je, že v matematice je opravdu důležité neustále procvičovat a opakovat.

ZÁVĚR

Ve své práci jsem se snažila sepsat ucelený přehled výuky celých čísel na základní škole spolu s problémy a chybami, které žáci často dělají. Snažila jsem se poukázat na více možností, jak lze dané téma pojmout. Některé příklady jsem doplnila o obrázky. Součástí mé práce je také trocha historie, jak vlastně pojem celých čísel vznikl.

V praktické části se zabývám aktivitami, které lze využít v hodinách matematiky. Pro žáky hodiny, kdy stále jen počítají, nejsou záživné, proto je důležité jim některé hodiny zpestřit. To, že žáci vidí v počítání soutěž, křížovku či nějakou hru, je pro ně motivací.

Nakonec jsem také navrhla písemnou práci, která prověří znalosti žáků. Práci jsem nechala žáky 7. ročníku na ZŠ, kde vyučuji, vypracovat a jejich řešení zhodnotila a doplnila grafy.

RESUMÉ

Tato diplomová práce se zabývá výukou celých čísel v hodinách matematiky na základní škole a problémy s nimi.

Teoretická část obsahuje historické souvislosti týkající se záporných čísel, celá čísla v jednotlivých ročnících, absolutní hodnotu, porovnávání celých čísel a operace s celými čísly.

V praktické části jsou připraveny náměty aktivit do hodin v podobě pracovních listů. Jsou roztříděny podle činností, které jsou v nich procvičovány, jako například: zápis a porovnávání celých čísel, opačná čísla, operace s celými čísly, ale také složitější úlohy. Pracovní listy jsou doplněny vysvětlením, potřebnými pomůckami, popřípadě různými poznámkami a postřehy z realizace. Mají představovat zábavnější formu procvičování učiva celých čísel.

V závěrečné části je vytvořen návrh písemné práce pro ověření znalostí. Tento návrh byl využit, proto je zde také zhodnocení.

This thesis deals with teaching integers in Mathematics on primary school and with obstacles connected with this matter.

The theoretical part deals with historical context concerning negative numbers, integers in particular years, absolute value, comparison of integer numbers and operations with integers.

The practical part contains themes of activities in the form of worksheets.

The worksheets are sorted according to the activities, which are being practiced.

For instance: writing and comparing of integers, opposite numbers, operations with integers but also some more difficult tasks. The worksheets are completed with explanations, needed tools, perhaps filled with different kinds of notes or observations from the realization. It should represent a more enjoyable form of practicing the integers in Mathematics.

In the final part there is a suggestion of a written test, which should examine the student's knowledge on this matter. This test has already been tested, therefore the evaluation is attached as well.

SEZNAM LITERATURY

- BEATTY, Richard, JACKSON, Tom. *Matematika: 100 objevů, které změnily historii*. Praha: Slovart, 2013. ISBN 978-80-7391-770-8.
- BEČVÁŘ, Jindřich: *Matematika ve středověké Evropě.* Praha: Prometheus, 2001.
- COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. Praha: Fortuna, 2007. ISBN 978-80-7168-993-5.
- HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.
- HUDEČEK, Jiří. *Matematika v devíti kapitolách*. Praha: Katedra didaktiky matematiky MFFUK, 2008.
- JEDLIČKOVÁ, Michaela, Peter KRUPKA a Jana NECHVÁTALOVÁ. *Matematika: kladná a záporná čísla: pracovní sešit vytvořený v souladu s RVP ZV*. Brno: Nová škola, 2013.
- JUŠKEVIČ, Adolf Pavlovič. *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1977.
- KILHAMN, Cecilia. *Making sense of negative numbers through metaphorical reasoning*. 2008.
- KOPKA, Jan. *Kapitoly o celých číslech*. Ústí nad Labem: UJEP, 2004. ISBN 80-7044-562-9.
- MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008. ISBN 978-80-87053-16-4.
- ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Pracovní sešit z matematiky: soubor úloh pro 7. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-432-2.
- ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. *Aritmetika: učebnice pro 7. ročník*. Brno: Nová škola, 1998. ISBN 80-85607-74-3.
- SÝKOROVÁ, Irena: *Matematika ve staré Indii*. Disertační práce, MFF UK Praha, 2014.
- TREJBAL, Josef, Darina JIROTKOVÁ a Václav SÝKORA. *Matematika 7 pro 7. ročník základní školy: učebnice zpracovaná podle osnov*

vzdělávacího programu Základní škola. Praha: SPN, 1997. ISBN 80-85937-78-6.

- URBANOVÁ, Jaroslava, Milan KOMAN a Daniela ŘEBÍČKOVÁ. *Matematika pro 5.ročník ZŠ: II.díl*. Praha: SPN, 1988. ISBN 14-647-88.

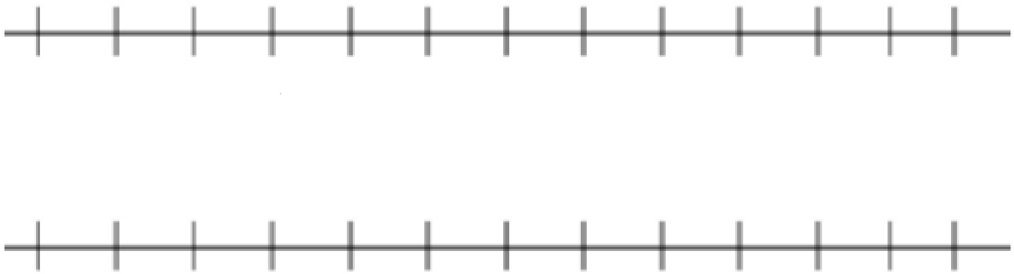
- *Online cvičení* [online]. [cit. 2017-03-10]. Dostupné z: http://www.onlinecviceni.cz/exc/list_topic_mat2.php
- *Matematika.cz: tady to pochopíš:-)* [online]. [cit. 2017-04-20]. Dostupné z: http://www.matematika.cz/nasobeni-zapornych
- *Metodický portál: inspirace a zkušenosti učitelů* [online]. [cit. 2017-03-10]. Dostupné z: http://dum.rvp.cz/index.html
- *ZŠ Žatec: Komenského Alej 749, okres Louny* [online]. [cit. 2017-03-10]. Dostupné z: http://www.komenacek.cz/matematika/karty_cd2/04_7.pdf

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK A GRAFŮ

PŘÍLOHY

Pracovní list – příklad 1

1. Do připravené osy zakresli čísla: 0, −2, −5, 4, 1



2. Podle tabulky odpověz na otázky

čas	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**
teplota (°C)	−16°C	−12°C	−8°C	−8°C	−11°C

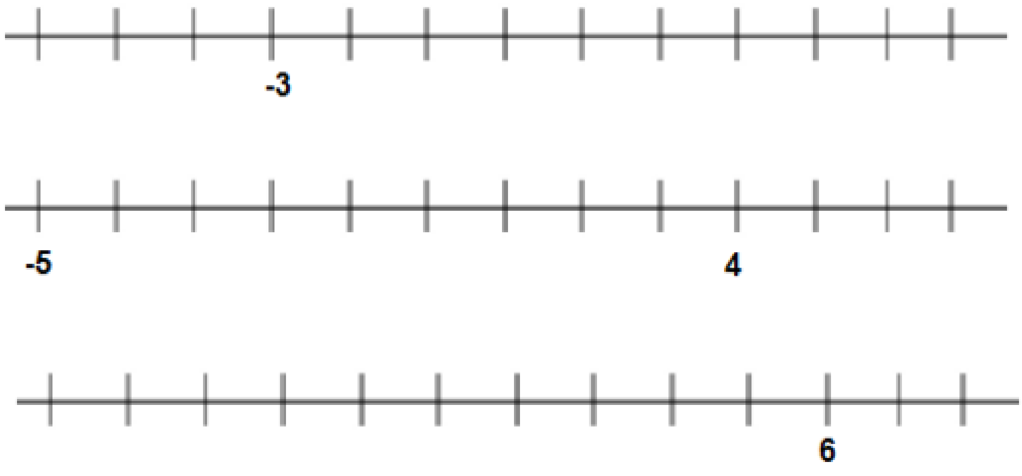
V kolik hodin bylo naměřeno – 8°C?

V kolik hodin byla zaznamenána nejnižší teplota?

Mezi 4. a 8. hodinou teplota klesla nebo stoupla?

Urči rozdíl teplot mezi 20. a 4. hodinou.

3. Do připravených os zakresli 0



Pracovní list – příklad 2

Zapiš číslo:	**Zapiš číslo:**
o 14 větší než (−13)	o 17 větší než (−8)
o 6 menší než (+3)	o 7 menší než (+10)
o 3 větší než (−8)	o 9 větší než (−13)
2-krát větší než (−2)	2-krát větší než (−3)
o 7 menší než (+1)	o 6 menší než (+2)
2-krát menší než (+10)	o 5 větší než (−8)
o 2 větší než (−7)	2-krát menší než (+12)
opačné k číslu (−3)	opačné k číslu (−5)

Zapiš číslo:	**Zapiš číslo:**
o 14 větší než (−13)	o 17 větší než (−8)
o 6 menší než (+3)	o 7 menší než (+10)
o 3 větší než (−8)	o 9 větší než (−13)
2-krát větší než (−2)	2-krát větší než (−3)
o 7 menší než (+1)	o 6 menší než (+2)
2-krát menší než (+10)	o 5 větší než (−8)
o 2 větší než (−7)	2-krát menší než (+12)
opačné k číslu (−3)	opačné k číslu (−5)

<u>Pracovní list – příklad 3</u>

1. 15, ..., 9, 6, ..., 0, −3, ..., …

2. −25, ..., …, −10, −5, …, …, 10, …

3. −14, …, 0, 7, …, …, …

4. −30, …, −10, ..., …, 20, 30, …

5.…, −4, −2, …, 2, 4, …, …

---

1. 15, ..., 9, 6, ..., 0, −3, ..., …

2. −25, ..., …, −10, −5, …, …, 10, …

3. −14, …, 0, 7, …, …, …

4. −30, …, −10, ..., …, 20, 30, …

5.…, −4, −2, …, 2, 4, …, …

---

1. 15, ..., 9, 6, ..., 0, −3, ..., …

2. −25, ..., …, −10, −5, …, …, 10, …

3. −14, …, 0, 7, …, …, …

4. −30, …, −10, ..., …, 20, 30, …

5.…, −4, −2, …, 2, 4, …, …

---

1. 15, ..., 9, 6, ..., 0, −3, ..., …

2. −25, ..., …, −10, −5, …, …, 10, …

3. −14, …, 0, 7, …, …, …

4. −30, …, −10, ..., …, 20, 30, …

5.…, −4, −2, …, 2, 4, …, …

Pracovní list – příklad 4

SVĚTADÍL	TEPLOTNÍ REKORDY	
AFRIKA	−24°C	55°C
SEVERNÍ AMERIKA	−63°C	57°C
EVROPA	−58°C	52°C
AUSTRÁLIE	−23°C	51°C
OCEÁNIE	−22°C	42°C
JIŽNÍ AMERIKA	−33°C	49°C
ANTARKTIDA	−89°C	15°C
ASIE	−68°C	54°C

SVĚTADÍL	TEPLOTNÍ REKORDY	
AFRIKA	−24°C	55°C
SEVERNÍ AMERIKA	−63°C	57°C
EVROPA	−58°C	52°C
AUSTRÁLIE	−23°C	51°C
OCEÁNIE	−22°C	42°C
JIŽNÍ AMERIKA	−33°C	49°C
ANTARKTIDA	−89°C	15°C
ASIE	−68°C	54°C

<u>Pracovní list – příklad 5</u>

Barevně zakresli na číselnou osu:

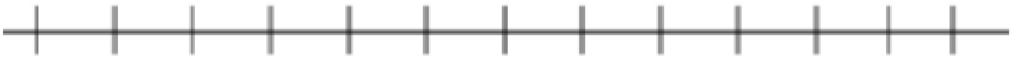
1) opačné číslo k číslu 5

2) všechna čísla, která mají od nuly vzdálenost 4

3) absolutní hodnotu čísla −1

4) všechna čísla, která mají od nuly vzdálenost menší nebo rovna 2

5) absolutní hodnotu čísla 3



Barevně zakresli na číselnou osu:

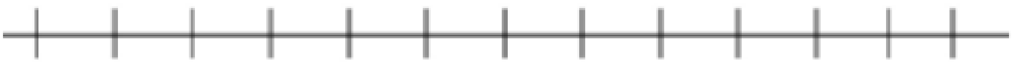
1) opačné číslo k číslu 5

2) všechna čísla, která mají od nuly vzdálenost 4

3) absolutní hodnotu čísla −1

4) všechna čísla, která mají od nuly vzdálenost menší nebo rovna 2

5) absolutní hodnotu čísla 3



Barevně zakresli na číselnou osu:

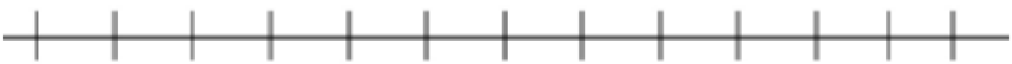
1) opačné číslo k číslu 5

2) všechna čísla, která mají od nuly vzdálenost 4

3) absolutní hodnotu čísla −1

4) všechna čísla, která mají od nuly vzdálenost menší nebo rovna 2

5) absolutní hodnotu čísla 3

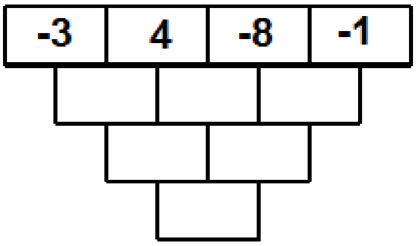


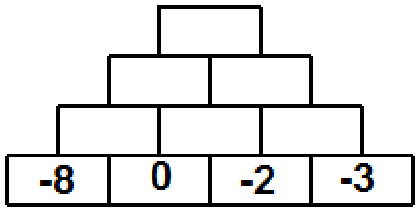
Pracovní list – příklad 6

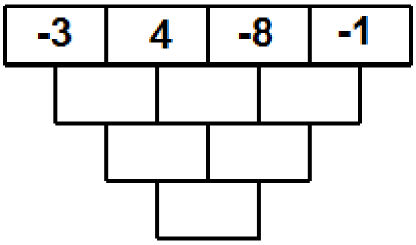
1.	5	+3		-8		-(-10)		+8		- 5	
2.	0	-1		+25		-13		+(-6)		+4	
3.	10	-6		-11		+20		-5		-4	
4.	-5	+13		-6		-3		-7		+17	

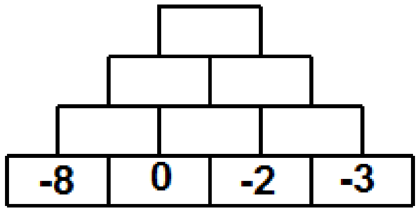
1.	5	+3		-8		-(-10)		+8		- 5	
2.	0	-1		+25		-13		+(-6)		+4	
3.	10	-6		-11		+20		-5		-4	
4.	-5	+13		-6		-3		-7		+17	

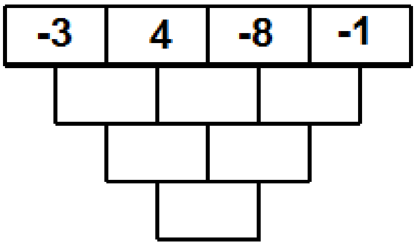
Pracovní list – příklad 7

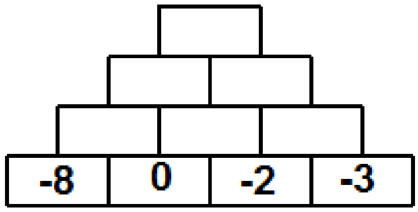


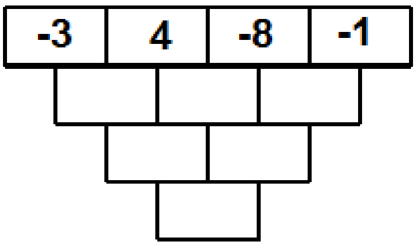


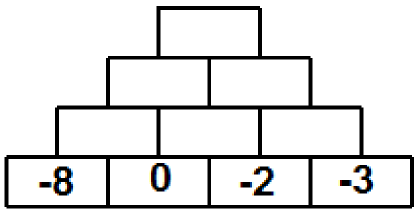




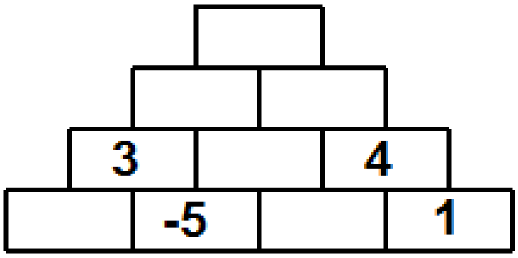


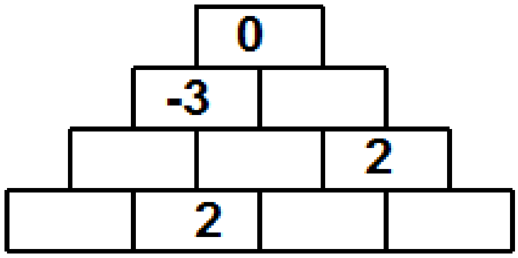


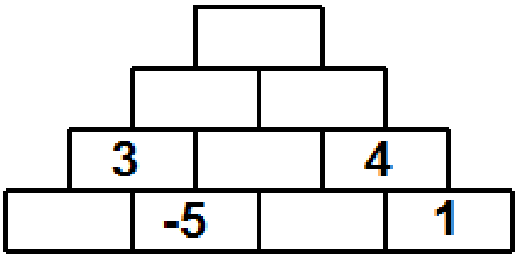


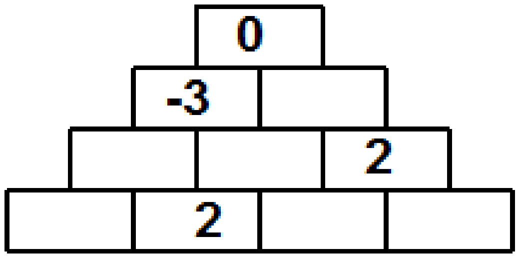


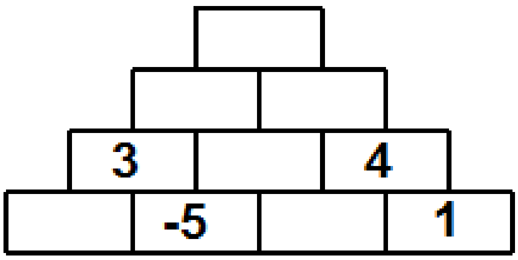
Pracovní list – příklad 8

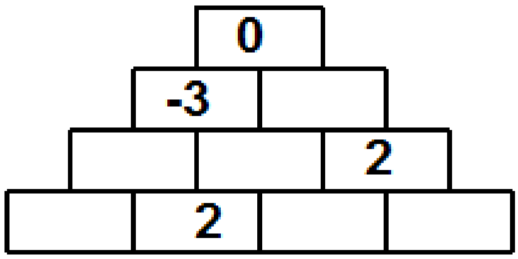


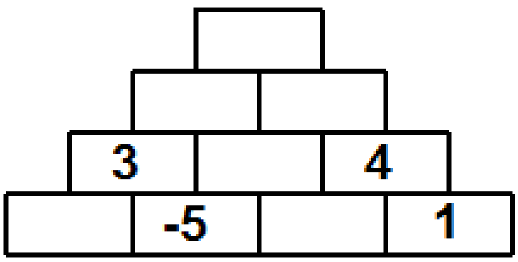


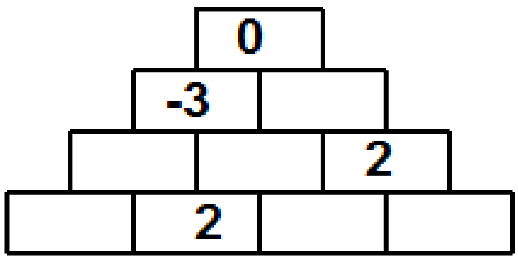












Pracovní list – příklad 9

příklady:

1. (−15) : (−3) . (−7) =

2. − 24 : 8 =

3. 4 . (−1) . 9 =

4. −35 . 0 . 5 . 7 =

5. (−70) : 2 =

6. 3 . (−6) : 3 =

7. 9 . (−4) =

8. (−3) . (−1) . (−5) =

9. (−63) : (−9) =

10. (−9) . (−1) : (−3) =

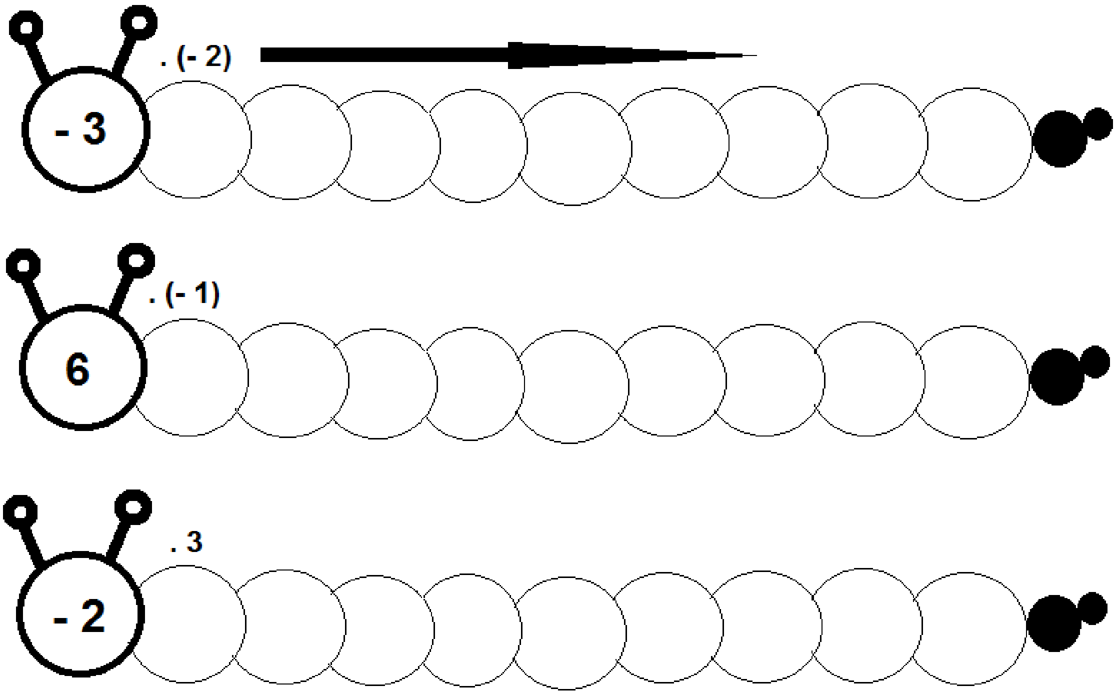
Výsledková listina:

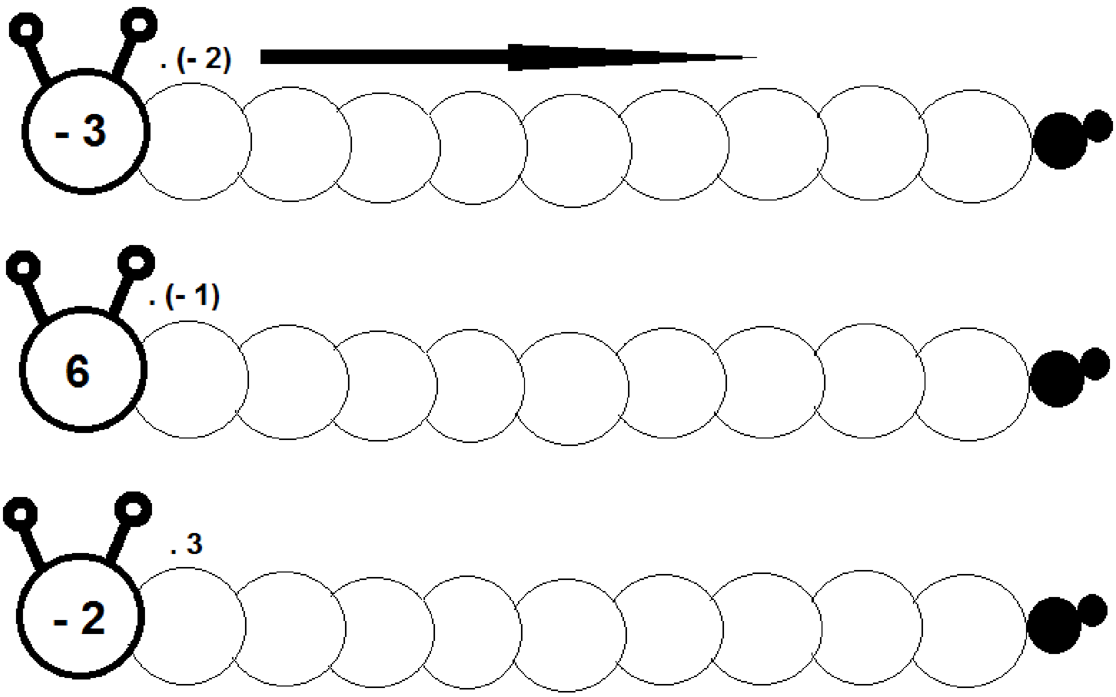
A	T	E	M	K	I
−3	−36	0	−35	7	−15

Doplň výsledek:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Pracovní list – příklad 10





Pracovní list – příklad 11

	+2	−3	+5	−7	0	−4	8	−10	−2	12	7	−9
(−3)												
(1)												
(−2)												
(+5)												
(−2)												
(−5)												
(−4)												
(+7)												
(−8)												
(−9)												
(−1)												

	+2	−3	+5	−7	0	−4	8	−10	−2	12	7	−9
(−3)												
(1)												
(−2)												
(+5)												
(−2)												
(−5)												
(−4)												
(+7)												
(−8)												
(−9)												
(−1)												

Pracovní list – příklad 13

Přehled plateb a příjmů za daný měsíc

− nákup dřevěných desek … 5 ks po 1 999 Kč, 7 ks po 399 Kč a 15 ks po 199 Kč

+ příchozí platba za dodělanou kuchyňskou linku ... 71 000 Kč

+ příchozí platba za vestavěnou skříň ... 27 500 Kč

− nákup objednaných lesklých dvířek na obývací stěnu ... 4 ks po 1799 Kč a 4 ks po 5 600 Kč

− nákup věcí do kuchyňky (cukr, káva, čaj a jiné) v hodnotě 581 Kč

− výplata pro brigádníka za 1 měsíc ... 12 500 Kč

− skleněné součástky na připravovanou obývací stěnu ... 17 300 Kč

− nákup součástek na nově objednanou kuchyňskou linku ... 51 300 Kč

Jak jsou na tom na konci měsíce tito dva společníci? Jaký je jejich konečný zůstatek na účtu? Mohou si dovolit vyplatit i sobě výplatu?

Přehled plateb a příjmů za daný měsíc

− nákup dřevěných desek … 5 ks po 1 999 Kč, 7 ks po 399 Kč a 15 ks po 199 Kč

+ příchozí platba za dodělanou kuchyňskou linku ... 71 000 Kč

+ příchozí platba za vestavěnou skříň ... 27 500 Kč

− nákup objednaných lesklých dvířek na obývací stěnu ... 4 ks po 1799 Kč a 4 ks po 5 600 Kč

− nákup věcí do kuchyňky (cukr, káva, čaj a jiné) v hodnotě 581 Kč

− výplata pro brigádníka za 1 měsíc ... 12 500 Kč

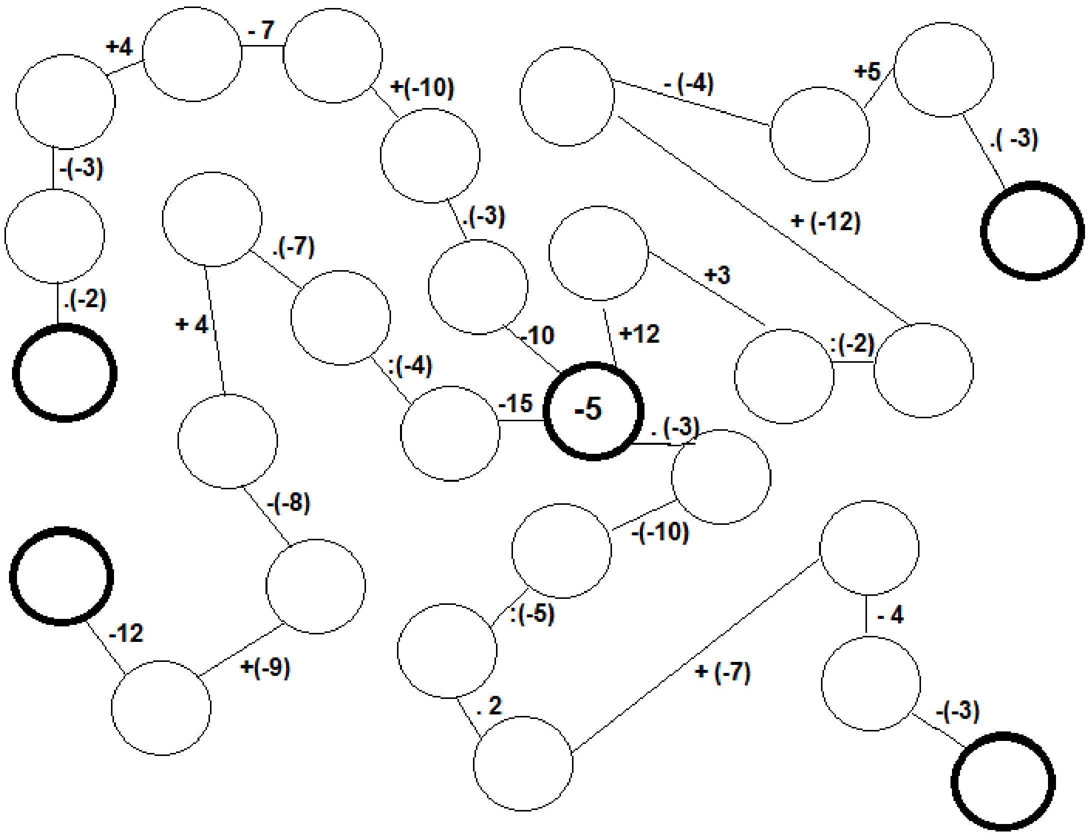
− skleněné součástky na připravovanou obývací stěnu ... 17 300 Kč

− nákup součástek na nově objednanou kuchyňskou linku ... 51 300 Kč

Jak jsou na tom na konci měsíce tito dva společníci? Jaký je jejich konečný zůstatek na účtu? Mohou si dovolit vyplatit i sobě výplatu?

Pracovní list – příklad 14

Pracovní list – příklad 15



Pracovní list – příklad 16

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	−1	−2	−3	−4
−5	−6	−7	−8	−9
−10	+	−	.	

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	−1	−2	−3	−4
−5	−6	−7	−8	−9
−10	+	−	.	

Pracovní list – příklad 17

Zadání příkladu		Výsledek samostatně	Výsledek dvojice	Výsledek skupina
27 + 3 − (−6) . 3 =				
−8 + 3 . (+6) =				
[(−6) . (−4)] : (−8 − 4) =				
−16 + 3 . (−2) + 2 . 4 =				
2 . (−2) + 18 − 6 . (−2) =				
5 . 2 + (−7) . (−6) =				
10 − 3 − 5 − 14 − 1 =				
(−7) . (−3) . (−1) . 0 . (+5) =				

Zadání příkladu		Výsledek samostatně	Výsledek dvojice	Výsledek skupina
27 + 3 − (−6) . 3 =				
−8 + 3 . (+6) =				
[(−6) . (−4)] : (−8 − 4) =				
−16 + 3 . (−2) + 2 . 4 =				
2 . (−2) + 18 − 6 . (−2) =				
5 . 2 + (−7) . (−6) =				
10 − 3 − 5 − 14 − 1 =				
(−7) . (−3) . (−1) . 0 . (+5) =				

Zadání příkladu		Výsledek samostatně	Výsledek dvojice	Výsledek skupina
27 + 3 − (−6) . 3 =				
−8 + 3 . (+6) =				
[(−6) . (−4)] : (−8 − 4) =				
−16 + 3 . (−2) + 2 . 4 =				
2 . (−2) + 18 − 6 . (−2) =				
5 . 2 + (−7) . (−6) =				
10 − 3 − 5 − 14 − 1 =				
(−7) . (−3) . (−1) . 0 . (+5) =				

Pracovní list – příklad 18 - líc

Líc
5 − (−4) + 7 =
−12 : (−3) =
−15 −(−15) =
15 − 9 − 8 =
(−15) : (+5) =
−16 : 2 + 3 =
−27 + 19 =
− 4 − 3 − 2 − 1 =

Líc
5 − (−4) + 7 =
−12 : (−3) =
−15 −(−15) =
15 − 9 − 8 =
(−15) : (+5) =
−16 : 2 + 3 =
−27 + 19 =
− 4 − 3 − 2 − 1 =

Líc
5 − (−4) + 7 =
−12 : (−3) =
−15 −(−15) =
15 − 9 − 8 =
(−15) : (+5) =
−16 : 2 + 3 =
−27 + 19 =
− 4 − 3 − 2 − 1 =

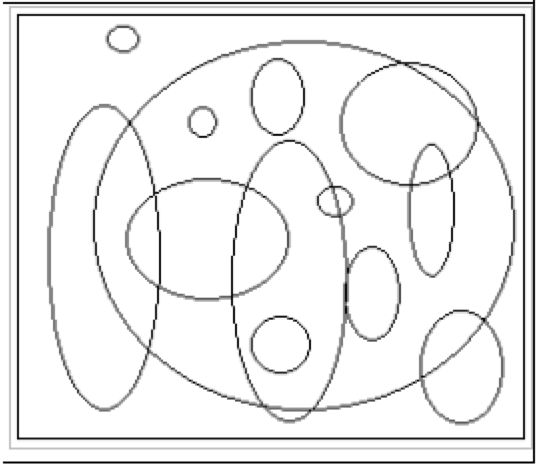
Líc
5 − (−4) + 7 =
−12 : (−3) =
−15 −(−15) =
15 − 9 − 8 =
(−15) : (+5) =
−16 : 2 + 3 =
−27 + 19 =
− 4 − 3 − 2 − 1 =

Líc
5 − (−4) + 7 =
−12 : (−3) =
−15 −(−15) =
15 − 9 − 8 =
(−15) : (+5) =
−16 : 2 + 3 =
−27 + 19 =
− 4 − 3 − 2 − 1 =

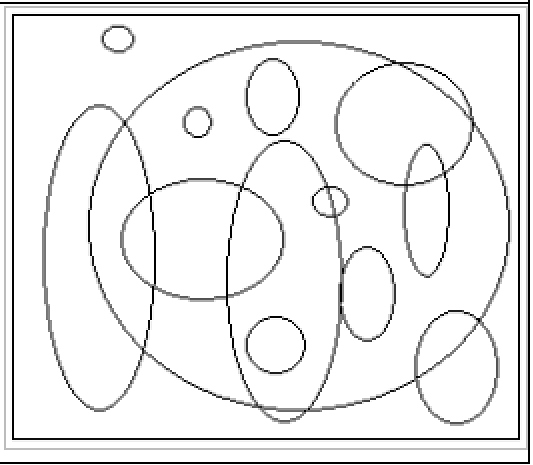
Líc
5 − (−4) + 7 =
−12 : (−3) =
−15 −(−15) =
15 − 9 − 8 =
(−15) : (+5) =
−16 : 2 + 3 =
−27 + 19 =
− 4 − 3 − 2 − 1 =

Pracovní list – příklad 18 – rub

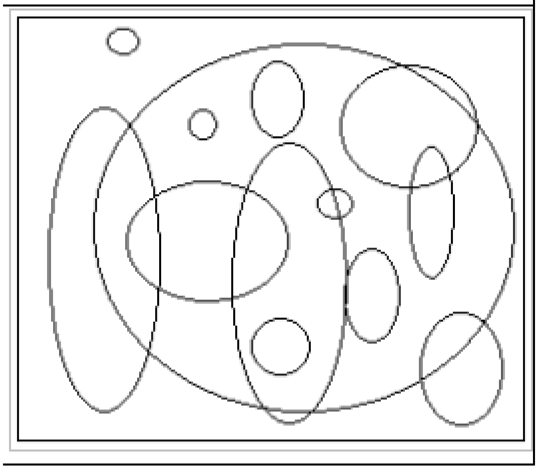
Rub



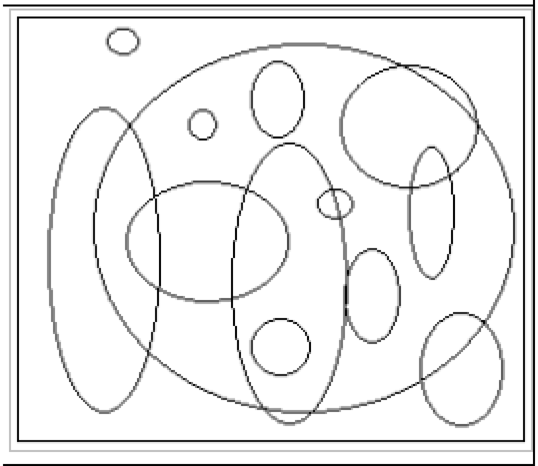
Rub



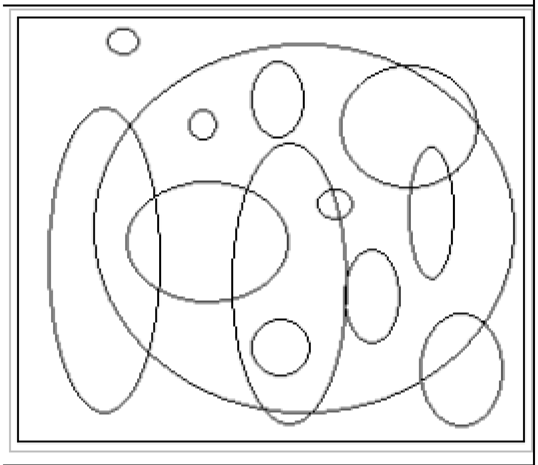
Rub



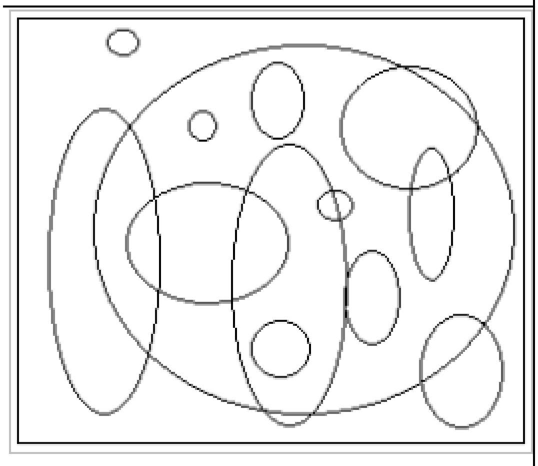
Rub



Rub



Rub



Pracovní list – příklad 19

Vypočítej a výsledky vybarvi v tabulce:

a) (−6) + (−23) + (−16) - (+32) =

b) −7 + 33 − (−33) =

c) −(−5,5) −15,3 − (−8,2) =

d) 2,2 − (−4,5) − 6,2 =

e) 4 . 5 . (−6) . (−2) =

f) −9 : (−3) . (−4) =

g) −7 . 9 : (−3) =

h) −6 . (−7) . (−1) =

-1,6	140	0,4	240
0,5	60	1,6	59
-42	220	-7	-12
-15	-77	21	-1,5

Vypočítej a výsledky vybarvi v tabulce:

a) (−6) + (−23) + (−16) - (+32) =

b) −7 + 33 − (−33) =

c) −(−5,5) −15,3 − (−8,2) =

d) 2,2 − (−4,5) − 6,2 =

e) 4 . 5 . (−6) . (−2) =

f) −9 : (−3) . (−4) =

g) −7 . 9 : (−3) =

h) −6 . (−7) . (−1) =

-1,6	140	0,4	240
0,5	60	1,6	59
-42	220	-7	-12
-15	-77	21	-1,5

Vypočítej a výsledky vybarvi v tabulce:

a) (−6) + (−23) + (−16) - (+32) =

b) −7 + 33 − (−33) =

c) −(−5,5) −15,3 − (−8,2) =

d) 2,2 − (−4,5) − 6,2 =

e) 4 . 5 . (−6) . (−2) =

f) −9 : (−3) . (−4) =

g) −7 . 9 : (−3) =

h) −6 . (−7) . (−1) =

-1,6	140	0,4	240
0,5	60	1,6	59
-42	220	-7	-12
-15	-77	21	-1,5

<u>Pracovní list – příklad 20</u>

Oprav chyby:

a) $8 - 6 . 2 + 16 : (-2) + 1 = -3$

b) $-25 : (-5) + 15 - (-8) : 2 + 3 . 0 = 14$

c) $(5 - 36) . 10 = -310$

d) $[(-1{,}4) - (+ 2{,}2)] : (-0{,}2) = -4$

e) $-6{,}8 - (-2 + 1{,}5) = -7{,}3$

f) $-(+100) : (-5) - (-100) : 4 = 30$

g) $(-3) . (-3-4) + (-45) : (-9) = 26$

h) $6 + (-1{,}6) : 8 + 3{,}6 - 1{,}2 . 4 - 0{,}8 = -0{,}25$

Oprav chyby:

a) $8 - 6 . 2 + 16 : (-2) + 1 = -3$

b) $-25 : (-5) + 15 - (-8) : 2 + 3 . 0 = 14$

c) $(5 - 36) . 10 = -310$

d) $[(-1{,}4) - (+ 2{,}2)] : (-0{,}2) = -4$

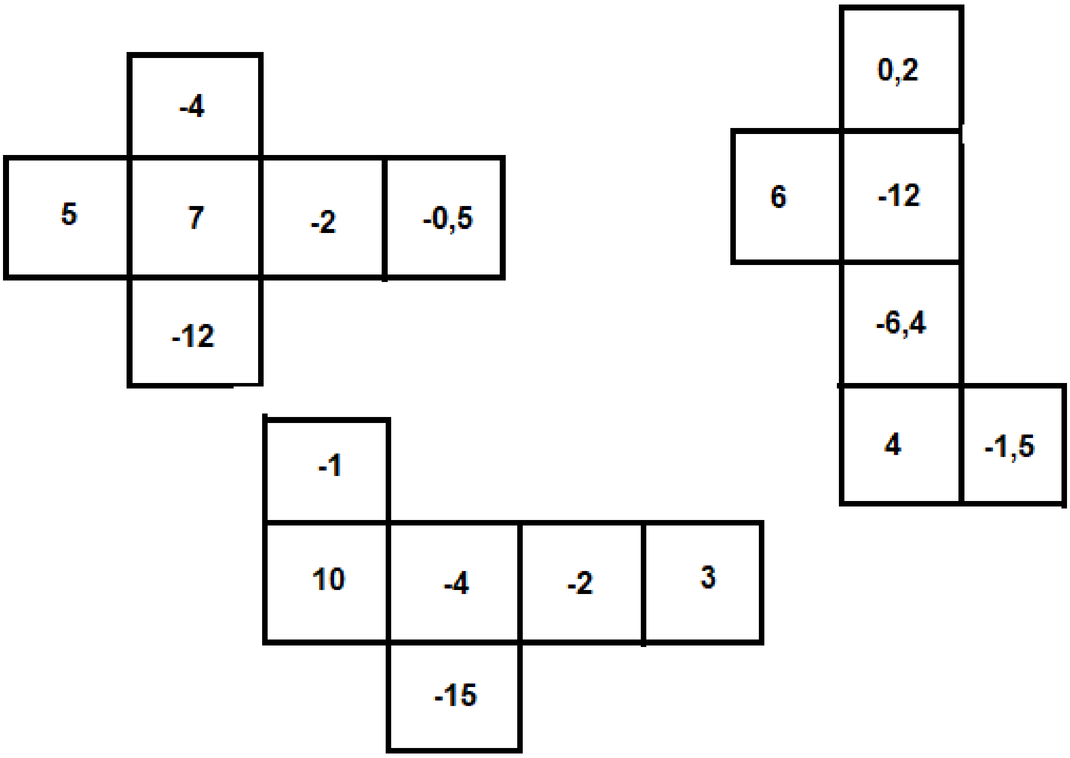
e) $-6{,}8 - (-2 + 1{,}5) = -7{,}3$

f) $-(+100) : (-5) - (-100) : 4 = 30$

g) $(-3) . (-3-4) + (-45) : (-9) = 26$

h) $6 + (-1{,}6) : 8 + 3{,}6 - 1{,}2 . 4 - 0{,}8 = -0{,}25$

Pracovní list – příklad 21



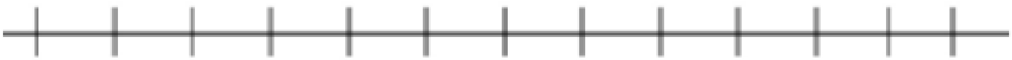
Písemná práce - A

1) Ze zadaných čísel vyber čísla celá - podtrhni (1 b.)

5; 3,1; −4; +18; ½; 0; −2,7

2) Podle předpovědi počasí byla v pondělí naměřena teplota 8 stupňů pod nulou. Zapiš celým číslem: (1 b.)

3) Na číselnou osu vhodně zakresli čísla: −5; 3; 0; −2; 1 (1 b.)



4) Urči k zadaným číslům čísla opačná: (1 b.)

a) −24 b) +6 c) 0 d) 14

5) Urči absolutní hodnotu zadaných čísel a správně zapiš: (1 b.)

a) 8 b) - 3 c) + 12 d) 0

6) Seřaď daná čísla sestupně: −7; 5; −3; −15; 4; 0; −6; 8 (1b.)

7) Vypočítej: (6 b.)

a) −5 + (−12) = b) 10 − (−18) =

c) +30 − (−25) = d) −16 + (+ 9) =

e) (−16) − (+7) − (−4) = f) $-8 - |-7| =$

8) Vypočítej: (6 b.)

a) 4 . (−5) = b) (−7) . (−9) =

c) 3 . (−2) . (−4) . (−1) = d) −56 : 7 =

e) (−128) : (−16) = f) (−35 + 3) : (−8) =

9) Vypočítej: (2 b.)

a) 16 . (−5) − 8 . (−5) − 10 . (−4) =

b) (−3) . 12 − 5 . (4 − 8) =

10) Vyřeš slovní úlohu: (3 b.)

Petr jezdil výtahem. Nastoupil ve čtvrtém patře, sjel do přízemí, pak vyjel o pět pater nahoru, sjel o tři patra dolů, o dvě nahoru a zase o jedno dolů a vystoupil. V jakém patře vystoupil?

Hodnocení:

23 b. - 20,5 b. ………. 1

20 b. - 17 b. …………. 2

16,5 b. - 11,5 b. …….. 3

11 b. - 7 b. …………… 4

6,5 b. - 0 b. …………...5

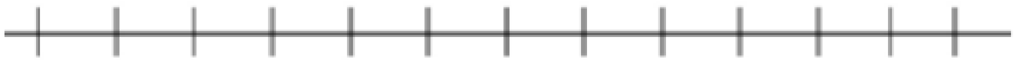
Písemná práce - B

1) Ze zadaných čísel vyber čísla celá - podtrhni (1 b.)

4;   4,1; −8; ½; +16; 0; -2,6

2) Podle předpovědi počasí byla v pondělí naměřena teplota 9 stupňů nad nulou. Zapiš celým číslem: (1 b.)

3) Na číselnou osu vhodně zakresli čísla: −6; 4; 0; −3; 2 (1 b.)



4) Urči k zadaným číslům čísla opačná: (1 b.)

a) -17 b) $+8$ c) 0 d) 9

5) Urči absolutní hodnotu zadaných čísel a správně zapiš: (1 b.)

a) -8 b) 5 c) $+10$ d) 0

6) Seřaď daná čísla vzestupně: −6; 4; −2; −14; 3; 0; −7; 9 (1b.)

7) Vypočítej: (6 b.)

a) $-6 + (-13) =$ b) $4 - (-6) =$

c) $-30 - (-15) =$ d) $-17 + (+9) =$

e) $(-15) - (+6) - (-3) =$ f) $6 - |-7| =$

8) Vypočítej: (6 b.)

a) $3 \cdot (-5) =$ b) $(-4) \cdot (-9) =$

c) $4 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-1) =$ d) $-72 : 9 =$

e) $(-168) : (-12) =$ f) $(-75 + 3) : (+8) =$

9) Vypočítej: (2 b.)

a) 20 . (−4) − 8 . (−5) − 10 . (−4) =

b) (−4) . 15 − 5 . (14 − 8) =

10) Vyřeš slovní úlohu: (3 b.)

Děti hrály kuličky, Honza na začátku hry žádné neměl, proto si půjčil 8 kuliček od Míši. Nejdříve prohrál sedm kuliček, poté pět kuliček vyhrál, pak 3 kuličky prohrál a 4 vyhrál. Nakonec ještě jednu vyhrál. Kolik kuliček měl na konci hry? Mohl je vrátit Míšovi?

Hodnocení:

23 b. - 20,5 b. ………. 1

20 b. - 17 b. …………. 2

16,5 b. - 11,5 b. …….. 3

11 b. - 7 b. …………… 4

6,5 b. - 0 b. …………...5