ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ČÍSELNÉ SOUSTAVY, JEJICH PŘEVODY A POČETNÍ OPERACE V NICH

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Lenka Němcová
Učitelství pro 2. stupeň základní školy, obor Ma-Inf

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň, 2017

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 18. dubna 2017

....
vlastnoruční podpis

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce PhDr. Lukášovi Honzíkovi, Ph.D. za inspirativní vedení, cenné rady a připomínky, za jeho ochotu a čas.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

ÚVOD

Tato diplomová práce s názvem „Číselné soustavy, jejich převody a početní operace v nich“ se zabývá teorií číselných soustav obecně, jejich historií a výkladem principů zápisů a převodů čísel ve vybraných číselných soustavách a početními operacemi s nimi. Samotný text je doplněn množstvím ilustrativních příkladů a důležitou součástí je kapitola obsahující typy úloh, s nimiž se běžně setkávají žáci základních škol. Práce je logicky rozčleněna do pěti kapitol s různým počtem podkapitol.

V první kapitole pojmenované „Úvod do číselných soustav, různé číselné soustavy v historii“ se budeme zabývat základními pojmy, které bychom měli znát při dalším čtení obsahu diplomové práce. Dále vysvětlíme pojem číselná soustava a uvedeme základní dělení na poziční a nepoziční soustavy. V dalším textu se budeme zabývat hlavně pozičními číselnými soustavami a seznámíme se se základním pravidlem zápisu čísla poziční číselné soustavy pomocí mnohočlenu. Následovat bude podkapitola týkající se historie číselných soustav. Zde se dozvíme, jak, kdy a kde vznikaly první číselné soustavy.

Druhá kapitola nese název „Číselné soustavy se základem $z = 10$ a číselné soustavy se základem jiným než 10, vyjádření čísla v číselné soustavě“. V ní se podrobně seznámíme s jednotlivými pravidly ve vybraných číselných soustavách. Samozřejmou součástí této kapitoly bude soustava desítková, následovat bude soustava dvojková a šestnáctková.

V další kapitole pojmenované „Převody mezi číselnými soustavami s různými základy“ se seznámíme s algoritmy převodu čísla z jedné číselné soustavy do druhé. Naučíme se postupně převádět mezi desítkovou a libovolnou nedesítkovou soustavou, poté se naučíme převádět i mezi dvěma nedesítkovými soustavami, což bývá považováno za poněkud obtížnější úkol. Ukážeme si příklad tzv. příbuzných číselných soustav a způsob, jak si usnadnit práci při převádění čísla mezi těmito soustavami.

Ve čtvrté kapitole se budeme zabývat početními operacemi v jednotlivých číselných soustavách. Naučíme se v číselných soustavách sčítat, odčítat, násobit a dělit. Každá tato operace bude rozepsána v samostatné kapitole, seznámíme se s obecným principem dané operace, který si názorně představíme i pomocí kardinálních čísel na matematickém počítadle.

V závěrečné, páté, kapitole se podíváme na praktické využití ve školské matematice. Zde se budeme zabývat tím, kdy se děti setkají s teorií číselných soustav při výuce na základní škole a uvedeme sérii řešených příkladů z oblasti matematiky a informatiky. Také zde nalezneme krátkou ukázku ze starší učebnice matematiky a následně vyřešený příklad z téže učebnice. Kapitolu zakončíme příklady, které se budou týkat římských číslic.

1 ÚVOD DO ČÍSELNÝCH SOUSTAV, RŮZNÉ ČÍSELNÉ SOUSTAVY V HISTORII

1.1 ČÍSELNÉ SOUSTAVY

Pravidla pro zápis čísla pomocí číslic nazýváme číselnou soustavou. Z běžného života známe soustavu desítkovou, šedesátkovou, kterou používáme nejčastěji při práci s časem, a římskou číselnou soustavu.

Pro začátek bychom si měli připomenout důležité pojmy, které bude potřeba umět rozlišit při čtení této práce:

- číslice je symbol sloužící k zapsání čísla, reprezentuje jakousi dílčí hodnotu čísla, která je předem dána
- číslo je kombinace číslic, výsledná hodnota závisí na hodnotě číslic, ze kterých se skládá, a také na pozici těchto číslic v zápise čísla
- řád číslice je váha číslice (daná pozicí číslice v zápise čísla), v praxi se jedná o řády desítky, stovky, tisíce, desetitisíce, desetiny, setiny, atd.
- váha – pozice číslice přiděluje dané číslici váhu pro výpočet celkové hodnoty čísla, váhy číslic v desítkové soustavě jsou mocninami základu, tj. $1 = 10^0$, $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, atd.

[1,2]

Z hlediska hodnot číslic podle zápisu čísla rozlišujeme číselné soustavy poziční a nepoziční.

V poziční číselné soustavě je hodnota každé číslice dána její pozicí v posloupnosti symbolů. Každá číslice má touto pozicí dánu svou váhu pro výpočet celkové hodnoty čísla. Výhodou tohoto způsobu zápisu je velká pružnost a poměrně malá množina číslic. Za nevýhodu je považována velmi snadná změna hodnoty čísla pouhým připsáním číslice před původní číslo. Proto se například před peněžité částky obvykle píše vlnovka takovou záměnu znemožňující. Patrně nezbytným předpokladem pro vynalezení pozičních číselných soustav je objevení symbolu pro nulu. Příkladem poziční číselné soustavy je desítková, dvojková, šestnáctková soustava.

[3,1]

Obecně můžeme vyjádřit pravidlo zápisu čísla poziční číselné soustavy mnohočlenem (polynomem):

$$x_n \cdot z^n + x_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + x_1 \cdot z^1 + x_0 \cdot z^0 + x_{-1} \cdot z^{-1} + \cdots + x_{-m} \cdot z^{-m}.$$

Každá číselná soustava, která zobrazuje čísla pomocí mnohočlenu (polynomu), se nazývá polyadická (polynomická) číselná soustava o základu z (např. desítková soustava má základ $z = 10$). Hodnota základu určuje, kolik číslic se v dané číselné soustavě používá pro sestavení daného čísla. Pro desítkovou soustavu je tedy k dispozici deset číslic, a to $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Základem číselné soustavy je zpravidla kladné číslo větší než jedna. Zajímavostí je, že číslice představující základ je první číslicí, která už není použitelná při zápisu čísla.

Příklad: číslo 3 542,395 v desítkové soustavě můžeme zapsat pomocí mnohočlenu

$$3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

[2]

Nepoziční číselná soustava je způsob reprezentace čísel, ve kterém není hodnota číslice dána jejím umístěním v dané posloupnosti číslic. Tyto způsoby zápisu čísel se dnes již téměř nepoužívají a jsou považovány za zastaralé. Příkladem nepoziční číselné soustavy jsou římské číslice. V nejjednodušším systému takovéto soustavy stačí sečíst hodnoty jednotlivých číslic. Pokud by například hodnoty symbolů nějaké nepoziční číselné soustavy byly následující: $A = 1, B = 10, C = 100, D = 1\,000$, pak by vyjádřením čísla 3 542 mohl být například řetězec $AABBBBCCCCCDDD$.

[4]

1.2 Historie číselných soustav

Před mnoha tisíci lety, kdy lidé ještě nevládli mnoha slovy, před vynálezem písma, lidé už čísla znali. Ačkoliv pro ně ještě neměli jména, používali je. Ještě o nich neuměli přemýšlet nebo je napsat, uměli ale rozpoznat rozdíl mezi jednou, dvěma, třemi a mnoha věcmi. První početní schopnosti se začaly uplatňovat možná při válčení jednotlivých kmenů mezi sebou. Pokud náčelník kmene poslal větší množství vojáků, aby bránili svůj lid, zřejmě pak chtěl vědět, kolik jich v boji padlo. Některé kmeny navíc tradičně vyžadovaly od protivníka jakousi náhradu škody – za každého padlého vojáka jednoho vola.

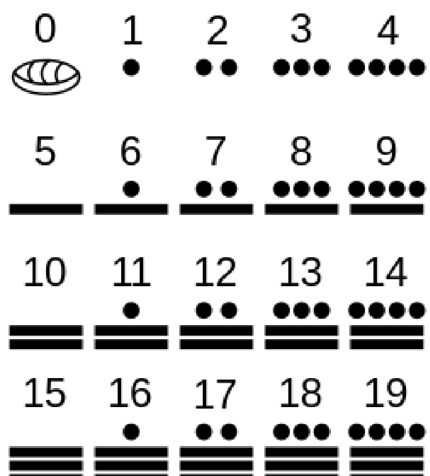
Trik pro zjištění počtu vojáků spočíval v tom, že každý z mužů odcházejících do boje dal kámen na hromadu. Když se pak vrátili zpět domů, každý zase jeden kámen odebral. Počet zbývajících kamenů se rovnal počtu mužů, kteří zahynuli. Náčelník pak každý kámen nahradil hůlkou, která se lépe přenášela, a šel k poraženým pro voly. Bez skutečného počítání, nebo dokonce i pochopení čísel tak bylo možné provozovat obchod a podobné transakce.

Ovšem metoda hůlek a kamenů nebyla zrovna nejefektivnější. Předměty zabíraly místo nebo se mohly po cestě ztratit. Už nejméně třicet tisíc let ale umíme zaznamenávat čísla účinnějším způsobem. Vodítka nám poskytují zvířecí kosti se značkami v podobě zářezů, jež vytvářeli pomocí kamenných nástrojů lidé v prehistorických dobách, aby mohli vést záznamy o počtech. Zajímavé je, že zářezy často vytvářely skupiny po pěti. První důvod je zřejmý – na ruce máme pět prstů. Druhým důvodem seskupování zářezů by mohl být fakt, že lidský mozek na první pohled nerozpozná rozdíl mezi skupinami čtyř, pěti nebo šesti zářezů těsně vedle sebe. Tato skutečnost byla zřejmě známá i Římanům při tvorbě podoby římských číslic, kdy využili toho, že při rychlém pohledu je mnohem snazší porozumět znaku „V“ nežli skupině „IIIII“.

[5]

1.2.1 MAYOVÉ

Již ve 4. století př. n. l. Mayové operovali s dvacítkovou soustavou, vigesimálním systémem (lat. vigesumus, dvacítka), s pozůstatky dřívější pětkové soustavy a se znakem pro nulu. Pro jednotku se používala tečka, pro dvojku dvě tečky a tak dále. Pětku představovala vodorovná čárka, šestka byla složena z jedné tečky a čárky, pro sedmičku až devítku použili dvě, tři, a čtyři tečky nad čárkou. Desítka byly dvě čárky nad sebou. Až do patnáctky – zastoupené třemi vodorovnými čárkami – přišly ke slovu opět tečky, které se také používaly až do devatenáctky. Nula měla tvar jakési mušle. Čísla jsou vizuálně podobná morseovce:



Obrázek 1: Mayská číselná soustava [6]

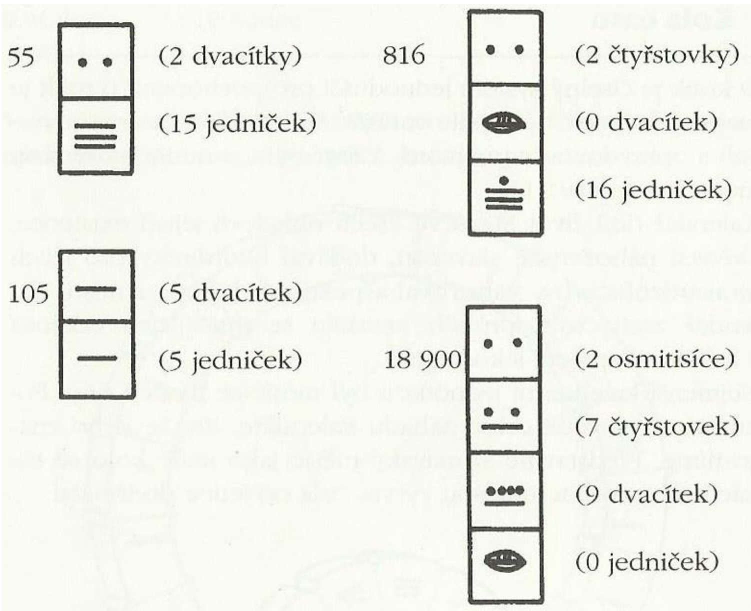
Naše čísla jsou řazena zprava doleva, každé další číselné místo představuje vyšší desítkový řád. Číslo 4 327 znamená sedm jednotek, dvě desítky, tři stovky a čtyři tisíce. Mayové psali čísla v kolmých sloupcích zdola nahoru. S každou řádkou pak stoupal dvacítkový řád. Řády tedy zjednodušeně vypadaly takto:

64 000 000 (řád čtyřiašedesátimilionů)
3 200 000
160 000
8 000
400 (řád čtyřstovek)
20 (řád dvacítek)
1 (řád jednotek)

Víme tedy, jak se psala čísla do devatenáctky. Číslo 20 se zapsalo do dvou nejnižších řádů – do spodního řádku se napsala nula, která znamenala „nula jednotek“, ve vyšší řádce se napsala jednotka označující počet dvacítek.

[5,7]

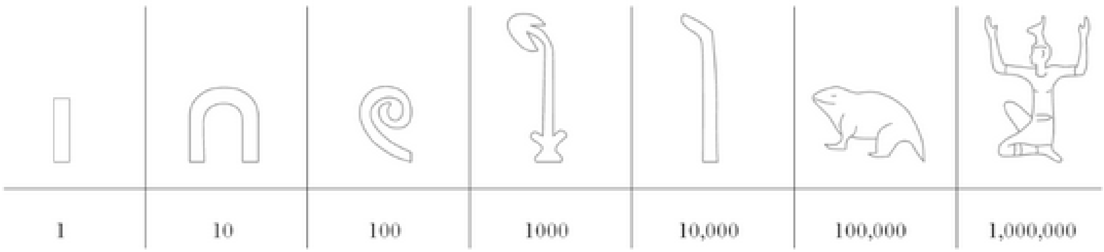
Příklad zápisu několika čísel:



Obrázek 2: Mayský zápis čísel [5]

1.2.2 STARÝ EGYPT

Staří Egypťané používali, stejně jako my, desítkovou soustavu, ale ta na rozdíl od té naší nebyla poziční. Místo toho měli pro každé z čísel jedna, deset, sto, tisíc, deset tisíc a milion jiný symbol – tedy pro čísla 10^0 až 10^6. Egyptské hieroglyfy, které se používaly k reprezentaci čísel, jsou vidět na obrázku:



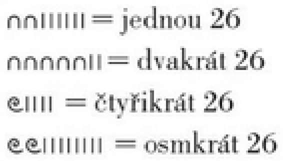
Obrázek 3: Číselné hieroglyfy

Například číslo jedna bylo reprezentováno svislou čarou, která zřejmě představovala měřící hůl. Další symbol představoval kravská pouta na nohy. Třetí symbol je stočený měřící provazec k vyměřování polí nebo svinutý palmový list. Znak pro číslo 1 000 je květ lotosu, který byl symbolem hojnosti. Pátý znak pro číslo 10 000 byl obrazem ukazováku. Šestý symbol byl obrazem pulce a poslední znak pro 1 000 000 představoval některého z bohů. Jakékoliv číslo od jedné do devíti můžeme vyjádřit pomocí příslušného počtu čar. I větší čísla se dají znázornit velmi jednoduše. Když dojdeme k dalšímu hieroglyfu, prostě ho napíšeme na začátek. I sčítání a odčítání je jednoduché. Jde pouze o systém přenášení a vypůjčování. Například

$$28 + 103 = 131 \text{ neboli}$$
∩∩|||||||| + 𓍢||| = 𓍢∩∩∩| ,

přičemž jednoduše sečteme jednotky a dostaneme jedenáct, což je deset plus jedna. Tedy ||||||||||| = ∩ |, kde vidíme podobnost s přenášením v naší desítkové aritmetice. Totéž uděláme i pro desítky a stovky.

Násobení a dělení je trochu složitější, ale metoda, která je použita, je docela zajímavá. Egypťané násobili tak, že postupně zdvojnásobovali jedno z čísel. Například součin $11 \cdot 26$:



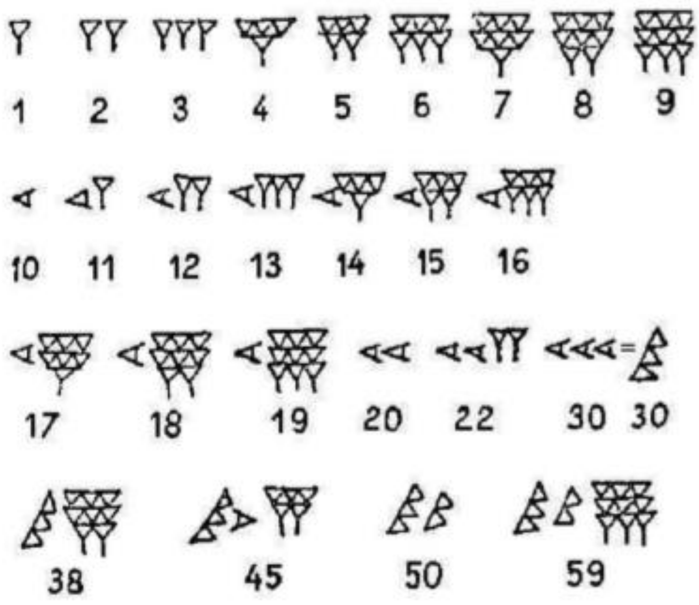
Aby pak Egypťané dostali jedenáctkrát 26, jednoduše sečetli osmkrát, dvakrát a jednou 26. Výsledkem je tedy

.

[8,7]

1.2.3 MEZOPOTÁMIE

Sumerové a později i Babyloňané používali klínové písmo, které umožňovalo i zaznamenávání čísel. Právě Sumerové nám zanechali dědictví v podobě počítání v násobcích šedesáti či dělení kruhu na 360 stupňů. Již Sumerové rozdělovali den na 24 hodin, každou hodinu na 60 minut a minutu na 60 sekund. V období kolem roku 3 000 př. n. l. používali tzv. sexagesimální nepoziční číselnou soustavu, jejímž základem je číslo 60. Jde ovšem o soustavu ne zcela šedesátkovou, jako spíše desítkově-šedesátkovou. V podstatě jde o desítkovou soustavu, kde je vyšší jednotkou šedesát, nikoliv sto. Zpočátku existoval pro každý desítkový a šedesátkový řád zvláštní znak klínopisu. Později, kolem roku 2 000 př. n. l., došlo v Mezopotámii k přechodu na šedesátkovou poziční číselnou soustavu, kde se hodnota znaku měnila podle jeho pozice v záznamu číselné hodnoty. Zároveň došlo ke zredukování znaků na pouhé dva, a to znaky pro jednotku a desítku. Znak pro jednotku ale mohl v zápisu čísla znamenat i číslo 60 nebo jeho mocninu. Ovšem ani tento způsob zápisu se nakonec neustálil a byl nahrazen nepoziční desítkovou soustavou. Sumerský písemný systém byl převzat a upraven i ostatními obyvateli Mezopotámie, například Babyloňany.



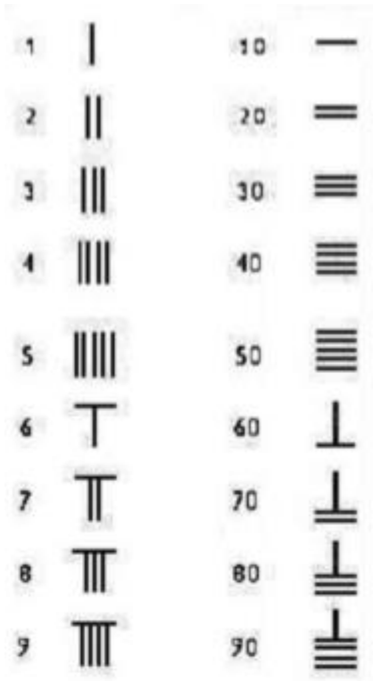
Obrázek 4: Klínové písmo

[9,10]

1.2.4 ČÍNA

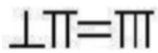
Už ve 14. století před naším letopočtem zřejmě měli v Číně rozpracovanou desítkovou číselnou soustavu. Některé prameny dokonce uvádějí, že se jednalo o poziční číselnou soustavu, která používala znak pro nulu a záporná čísla. Pokud by to byla pravda, byla by to první poziční dekadická soustava na světě. Původní čínská číselná soustava má několik prvenství, i když to není první poziční dekadická soustava v dějinách lidstva, protože je to dekadická soustava. Dále není poziční, i když náznaky toho, aby se poziční soustavou stala, měla. Například číslo $3\,058$ se zapisovalo posloupností znaků $3, 1\,000, 5, 10, 8$ – hodnota čísla se získala příslušným vynásobením a sečtením. Vzhledem k tomuto způsobu zápisu není nutné mít znak pro poziční nulu. A nakonec tedy čínská číselná soustava neměla poziční nulu. Tato soustava vydržela s malými změnami asi tisíc let a pak byla nahrazena poziční soustavou. Ta používala pro poziční nulu speciální znak (volné místo). Až na přelomu 13. a 14. století se začal používat pro poziční nulu prázdný kroužek.

Asi od 4. století př. n. l. Číňané používali k vyjádření čísel tyčinky. Používání tyčinek se udrželo až do 13. století n. l. V tomto způsobu zápisu čísel užívali znaky pro čísla od jedné do devíti a pro desítky od deseti do devadesáti. Zápis čísel pomocí tyčinek měl poziční charakter. Čísla se psala do řádku. Symboly pro jednotky označovaly také stovky, desetitisíce, atd., symboly pro desítky označovaly také tisíce, statisíce, atd.



Obrázek 5: Čínská číselná soustava

Na obrázku je pro příklad zapsáno číslo 6 728:

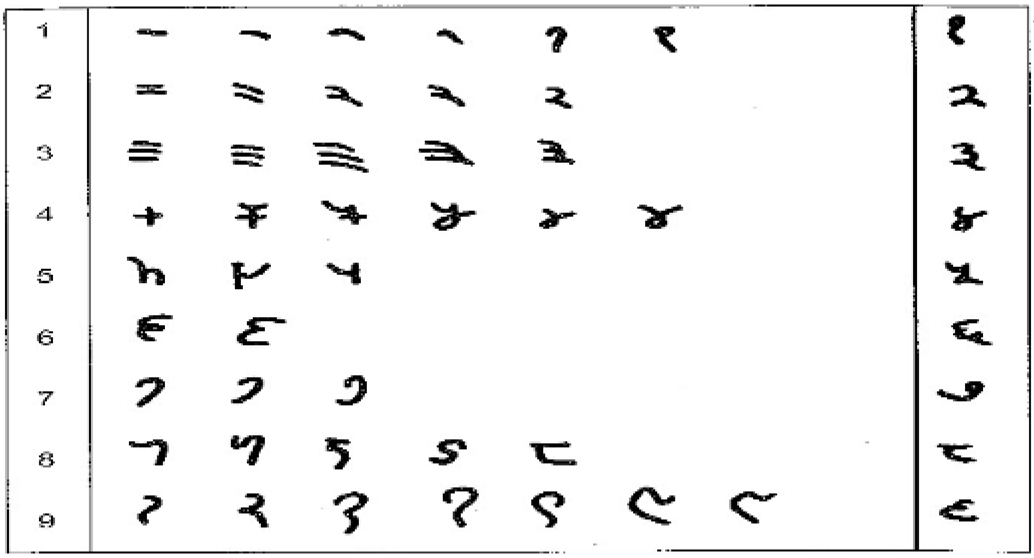


[11]

1.2.5 INDIE

Největším přínosem indické matematiky bylo zavedení desítkové poziční číselné soustavy a její pozdější rozšíření do světa. Již od 2. století př. n. l. existovaly speciální symboly pro číslice 1 až 9, prozatím ale stále existovaly speciální symboly pro čísla $10, 20, 30, 40, \dots$ a čísla se většinou tvořila součtem jednotlivých čísel napsaných za sebou (stejně jako v římském zápisu čísel). V tomto období vedle sebe existovalo několik typů zápisů čísel, ve kterých byla velká nesourodost, čemuž napomáhalo i částečné prolínání jednotlivých zápisů. Kolem 6. století n. l. se objevují první zápisy poziční nuly v matematických textech, k dovršení vývoje desítkové poziční číselné soustavy pak dochází v 9. století.

Nejběžnější poziční notace používala písmo nagari – mnohé z těchto číslic jsou již podobné číslicím našim:



Obrázek 6: Zápis čísel pomocí písma nagari

Nejstarším příkladem užití znaku pro nulu je indická nula z roku 458, která se vyskytuje v dochovaném spise o kosmologii. Existují však nepřímé doklady o tom, že byla používána již 200 let před naším letopočtem. Nula byla nejprve označována tečkou, později malým kroužkem. Ačkoliv indická nula byla poprvé zavedena k označení chybějícího čísla, rychle nabyla postavení jednoho z čísel. Na rozdíl od Babyloňanů ji indičtí počtáři bez váhání uznali za výsledek odečtení čísla od sebe samého. Roku 628 ji indický astronom Brahmagupta tímto způsobem definoval a vyjádřil algebraická pravidla pro sčítání, odčítání, násobení a dokonce i pro dělení. Brahmagupta definoval díky tomuto i nekonečno jako číslo, které vznikne dělením každého jiného čísla nulou, a vypracoval obecný soubor pravidel pro násobení a dělení kladných i záporných čísel.

[12,13]

1.2.6 ARABSKÝ SVĚT

Do 8. století n. l. Arabové ovládli Malou Asii, Kavkaz, Střední Asii, Severní Afriku a Pyrenejský poloostrov. Ke konci 8. století se mnoho evropských, ale i indických či babylonských učenců díky nástupu netolerantní křesťanské víry soustředí do Bagdádu. Právě na znalostech těchto zahraničních učenců se tvoří základy a další rozvoj arabské vědy. Arabský svět prohluboval vědomosti ve všech rovinách, tedy i v matematice. Dlouhou dobu byla využívána šedesátková soustava, která se zde udržela až do 9. století. První dílo, které popisovalo desítkovou soustavu a operace v ní, byl Al-Chwárizmího aritmetický traktát. Ten se bohužel nedochoval celý a jeho latinsky psaný rukopis z 12. století je uložen v univerzitní knihovně v Cambridge. Původní název tohoto spisu zní Kniha o sčítání a odečítání podle indického způsobu. Je tedy zřejmé, že předlohou arabské desítkové soustavy byla číselná soustava indická. Arabové se zasloužili o rozšíření indického číselného systému do Evropy. Jeho prosazení však trvalo poměrně dlouho.

[14]

1.2.7 Starý Řím

Římské číslice představují způsob zápisu čísel pomocí několika vybraných písmen latinské abecedy. Jedná se o nepoziční číselnou soustavu. V matematice se římské číslice nepoužívají už velmi dlouho, ovšem často se s nimi setkáváme i tak. Na římské číslice narazíme například jako na označení pořadí panovníků, očíslování určitých částí knih, na ciferníku hodin nebo vyznačené letopočty na různých stavbách. Dnešní způsob zapisování římských číslic vznikl ve středověku v západní Evropě. Je odvozen ze způsobu, jakým zapisovali číslice staří Římané. Podoba římských číslic vznikla přirozenou cestou. Římané počítali na prstech. Proto jsou pro jednotlivá čísla 1, 2 a 3 použity znaky I, II a III, které znázorňují jednotlivé prsty. Číslice 5, neboli V, je vyjádřením dlaně s pěti prsty – V tvoří tvar dlaně mezi palcem a malíčkem. Znak pro číslici 10 pak představuje dvě tyto dlaně u sebe. Další číslice jako C (100) a M $(1\,000)$ získaly svou podobu odvozením z latinských slov $centum$ a $mille$. Znaky pro jejich poloviční hodnoty, 50 a 500, pak vznikly grafickým rozpůlením těchto znaků. Římské číslice se tedy zapisují kombinací znaků I, V, X, L, C, D a M. V zápisu se začíná od znaků pro nejvyšší hodnoty k nejnižším. Kombinace menší číslice před větší číslicí znamená, že se nižší hodnota od té vyšší odečítá. Toto pravidlo platí obecně například pro číslo čtyři zapsané znaky IV, ovšem může se stát, že narazíme i na nesprávný zápis IIX, který představuje hodnotu osm (správný je zápis $VIII$, neboť se zpravidla odečítá pouze jeden znak). Dalšími znaky, které se používají pro odečítání, jsou X a C.

Pro zapamatování posloupnosti znaků slouží říkanka „Ivan Vedl Xénii Lesní Cestou Do Města“, přičemž hodnoty jsou popořadě 1, 5, 10, 50, 100, 500, $1\,000$.

[24,25]

2 ČÍSELNÉ SOUSTAVY SE ZÁKLADEM $z = 10$ A ČÍSELNÉ SOUSTAVY SE ZÁKLADEM JINÝM NEŽ 10, VYJÁDŘENÍ ČÍSLA V ČÍSELNÉ SOUSTAVĚ

Příkladem soustav, s nimiž se běžně setkáváme, je desítková soustava, jako soustava, ve které dnes a denně počítáme, dvojková soustava, se kterou se operuje v oblasti výpočetní techniky, stejně tak osmičková soustava nebo šestnáctková. Dále se setkáváme se soustavou šedesátkovou a to také každý den, neboť právě v ní je počítán čas – minuty, sekundy, hodiny. Šedesátková soustava je také základem pro operace s úhly, konkrétně pro převody mezi stupni a minutami. Běžně používaný vztah mezi počtem dní a týdny naznačuje existenci sedmičkové soustavy.

Mohlo by se zdát, že existuje pouze několik číselných soustav. Ale opak je pravdou. Obecně se dá říci, že existuje nekonečné množství číselných soustav o libovolném přirozeném základu. Můžeme vyjmenovat soustavu trojkovou, pětkovou, sedmnáctkovou nebo pětadvacítkovou. Jejich smysluplná využitelnost už ovšem zůstává otázkou.

2.1 DESÍTKOVÁ (DEKADICKÁ NEBO DECIMÁLNÍ) SOUSTAVA

Desítková soustava patří k běžně používaným číselným soustavám. Desítková soustava je číselná soustava o základu $z = 10$. K zápisu libovolného přirozeného čísla může být použito číslic 0 až 9. Je považována za základní číselnou soustavu, neboť ji používáme při každodenní práci. Vzhledem k tomu se u čísel neuvádí základ (index). Odvozena zřejmě byla z počtu prstů na rukou nebo nohou zdravého člověka.

Číslo v desítkové soustavě tedy nezapisujeme $(375)_{10}$, ale pouze 375. Podle výše uvedeného vzorce pro obecný zápis čísla můžeme číslo 375 rozepsat jako $375 = 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$.

2.2 DVOJKOVÁ (BINÁRNÍ) SOUSTAVA

Dvojková soustava je číselná soustava o základu $z = 2$, což znamená, že k zápisu čísel se používají pouze číslice 0 a 1. Tato soustava je využívána hlavně v oblasti výpočetní techniky.

Příkladem čísla zapsaného ve dvojkové soustavě může být $(110101)_2$, které můžeme rozepsat jako $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

To, že má dvojková soustava pouze dvě číslice, je v oblasti výpočetní techniky, ale nejen zde, považováno za výhodu. Často je těchto dvou stavů využíváno třeba u elektronických obvodů nebo v programování. Stavy bývají interpretovány jako Zapnuto/Vypnuto, Svítí/Nesvítí nebo Pravda/Nepravda a podobné.

Také je třeba zmínit správnost čtení zapsaného čísla. Například číslo 110 vyjádřené v desítkové soustavě čteme jako „sto deset“. Ovšem to samé číslo vyjádřené ve dvojkové soustavě čteme jako „jedna jedna nula“.

2.3 Šestnáctková (hexadecimální) soustava

Šestnáctková soustava o základu $z = 16$ využívá k zápisu čísel 16 symbolů. Vzhledem k tomu, že číslic je pouze deset, jsou symboly doplněny o písmena. Symboly tedy jsou $0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F$, kde například symbol D znamená hodnotu 13 vyjádřenou jednou cifrou, nikoliv dvouciferným číslem.

Například číslo 1 459 bychom v šestnáctkové soustavě zapsali jako $(5B3)_{16}$, tedy $(5B3)_{16} = 5 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 5 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 3 \cdot 1$.

[1]

3 PŘEVODY MEZI ČÍSELNÝMI SOUSTAVAMI S RŮZNÝMI ZÁKLADY

3.1 PŘEVODY MEZI DESÍTKOVOU A NEDESÍTKOVOU SOUSTAVOU

Převod čísla z libovolné číselné soustavy do desítkové soustavy patří k nejjednodušším převodům. Algoritmus převodu spočívá v přepsání daného čísla do rozvinutého zápisu, v postupném roznásobení a sečtení daných členů.

Obecně lze převod čísla $(a_1 a_2 a_3 \dots a_k)_z$ ze soustavy o základu z do soustavy desítkové vyjádřit zápisem:

$$(a_1 a_2 a_3 \dots a_k)_z = a_1 \cdot z^{k-1} + a_2 \cdot z^{k-2} + a_3 \cdot z^{k-3} + \cdots + a_{k-1} \cdot z^1 + a_k \cdot z^0 =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot z^{k-i}$$

Tento postup si dále ukážeme na několika příkladech, kdy zvolenými soustavami jsou dvojková a šestnáctková.

Při převádění čísla vyjádřeného v desítkové soustavě do libovolné soustavy o základu jiném, než je deset, se nám nabízejí dvě jednoduché metody. První z nich je metoda využívající hodnoty mocnin daného základu, druhá je metoda postupného dělení (v podstatě jde o použití upraveného Euklidova algoritmu). V případě vyjadřování součtu hodnot mocnin základu je třeba vědět, že každá hodnota mocniny se v součtu může obecně objevit maximálně $(z-1)$krát.

Obecně lze převod postupným dělením vyjádřit:

$$\begin{aligned} c : z &= p_1 + q_1 \\ p_1 : z &= p_2 + q_2 \\ p_2 : z &= p_3 + q_3 \\ &\vdots \\ p_n : z &= 0 + q_{n+1} \end{aligned}$$

kde c je zadané číslo desítkové soustavy, z je základ soustavy, do které převádíme, p_i jsou výsledky po celočíselném dělení a q_i jsou zbytky po celočíselném dělení. Dělení končí v té chvíli, kdy je poslední výsledek dělení roven nule a nějakému zbytku. Převedené číslo je pak rovno číslu $(q_{n+1} \dots q_3 q_2 q_1)_z$.

I tyto převody názorně předvedeme za použití dvojkové a šestnáctkové soustavy.

[16]

3.1.1 Z DVOJKOVÉ SOUSTAVY DO DESÍTKOVÉ

Mějme číslo $(101)_2$ zapsané ve dvojkové soustavě. Pro jeho převedení do desítkové soustavy toto číslo vyjádříme rozvinutým zápisem. Dané číslo je trojciferné, v zápisu se tedy objeví tři první mocniny základu $z = 2$ – nultá, první a druhá mocnina čísla dvě.

$$(101)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Nyní jen zbývá spočítat hodnotu rozvinutého zápisu, tedy provést umocnění, vynásobit patřičné činitele a jejich hodnoty sečíst.

$$(101)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$
$$= 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4 + 1 = 5$$

Výsledkem převádění z dvojkové do desítkové soustavy je $(101)_2 = 5$.

Dále mějme číslo $(10110)_2$. I toto číslo budeme převádět do desítkové soustavy. Dané číslo je pěticiferné. Rozvinutý zápis tedy začne čtvrtou mocninou základu $z = 2$.

$$(10110)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$$
$$= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 16 + 4 + 2 = 22$$

Výsledkem převádění z dvojkové do desítkové soustavy je $(10110)_2 = 22$.

Samozřejmě, že díky agresivitě nuly, lze některé dílčí součiny v rozvinutém zápisu vynechat. Zde je uváděn kompletní zápis pro přesnou představu o fungování algoritmu.

3.1.2 Z ŠESTNÁCTKOVÉ SOUSTAVY DO DESÍTKOVÉ

Mějme číslo $(1C72)_{16}$ vyjádřené v šestnáctkové soustavě. Toto číslo při převodu do desítkové soustavy musíme zapsat pomocí rozvinutého zápisu. Dané číslo je čtyřciferné. V rozvinutém zápisu se tedy budou vyskytovat základy v mocninách od nulté do třetí. Základ je roven 16. Dále je třeba si uvědomit, jakou hodnotu představuje symbol C, $C = 12$.

$$(1C72)_{16} = 1 \cdot 16^3 + 12 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 =$$
$$= 1 \cdot 4\,096 + 12 \cdot 256 + 7 \cdot 16 + 2 \cdot 1 = 4\,096 + 3\,072 + 112 + 2 = 7\,282$$

Výsledkem převádění ze šestnáctkové do desítkové soustavy je $(1C72)_{16} = 7\,282$.

Dále mějme číslo $(ABC)_{16}$. Nyní je číslo trojciferné. Základ se tedy objeví v nulté, první a druhé mocnině. Také je třeba uvědomit si, že $A = 10$, $B = 11$ a $C = 12$. Dále už postupujeme podle známého algoritmu:

$$(ABC)_{16} = 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 =$$
$$= 10 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 12 \cdot 1 = 2\,560 + 176 + 12 = 2\,748$$

Výsledkem převádění ze šestnáctkové do desítkové soustavy je $(ABC)_{16} = 2\,748$.

3.1.3 Z desítkové soustavy do dvojkové

Mějme čísla 937 a 207. Tato dvě čísla budeme převádět do dvojkové soustavy.

Prvním způsobem, jak převod provést, je metoda využití hodnot mocnin základu soustavy, do které převádíme. Tyto hodnoty jsou:

$$2^0 = 1 \qquad 2^5 = 32$$
$$2^1 = 2 \qquad 2^6 = 64$$
$$2^2 = 4 \qquad 2^7 = 128$$
$$2^3 = 8 \qquad 2^8 = 256$$
$$2^4 = 16 \qquad 2^9 = 512$$

Pokusme se číslo 937 vyjádřit jako součet některých těchto hodnot. Jelikož se jedná o dvojkovou soustavu, může se každá mocnina v součtu vyskytovat maximálně jednou. Součet by vypadal následovně:

$$937 = 512 + 256 + 128 + 32 + 8 + 1.$$

Nyní tento zápis vyjádříme pomocí mocnin:

$$937 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^0 =$$
$$= 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Teď už zbývá jen sepsat nuly a jednotky z rozvinutého zápisu. Výsledkem převodu z desítkové do dvojkové soustavy je $937 = (1110101001)_2$.

Stejným způsobem převeďme i číslo 207:

$$207 = 128 + 64 + 8 + 4 + 2 + 1 =$$
$$= 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 =$$
$$= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Výsledkem převodu z desítkové do dvojkové soustavy je $207 = (11001111)_2$.

Druhou a možná i jednodušší metodou je metoda postupného dělení. Ta spočívá v opakovaném dělení základem a následném sepsání zbytků. Vysvětleme si tento postup opět na převodu čísla 937 do dvojkové soustavy. Číslo 937 tedy jako první vydělíme dvěma coby základem a podíl zapíšeme v podobě přirozeného čísla a zbytku:

$$937 : 2 = 468 + 1.$$

Dále vezmeme výsledný podíl a znovu ho vydělíme dvěma a zapíšeme zbytek. Takto budeme pokračovat až do té doby, než bude podíl roven nule.

$$\begin{aligned}
468 : 2 &= 234 + 0 \\
234 : 2 &= 117 + 0 \\
117 : 2 &= 58 \quad + 1 \\
58 : 2 &= 29 \quad + 0 \\
29 : 2 &= 14 \quad + 1 \\
14 : 2 &= 7 \quad\;\; + 0 \\
7 : 2 &= 3 \quad\;\; + 1 \\
3 : 2 &= 1 \quad\;\; + 1 \\
1 : 2 &= 0 \quad\;\; + 1
\end{aligned} \uparrow$$

Výsledek převádění získáme tak, že sepíšeme zbytky, a to odspodu. Tedy $937 = (1110101001)_2$.

Pro číslo 207 vypadá metoda postupného dělení takto:

$$\begin{aligned}
207 : 2 &= 103 + 1 \\
103 : 2 &= 51 \quad + 1 \\
51 : 2 &= 25 \quad + 1 \\
25 : 2 &= 12 \quad + 1 \\
12 : 2 &= 6 \quad\;\; + 0 \\
6 : 2 &= 3 \quad\;\; + 0 \\
3 : 2 &= 1 \quad\;\; + 1 \\
1 : 2 &= 0 \quad\;\; + 1
\end{aligned} \uparrow$$

Výsledkem převodu metodou postupného dělení je $207 = (11001111)_2$.

3.1.4 Z DESÍTKOVÉ SOUSTAVY DO ŠESTNÁCTKOVÉ

Mějme číslo 5 725. Převeďme ho do šestnáctkové soustavy pomocí první metody. K tomu potřebujeme znát hodnoty mocnin základu:

$$16^0 = 1$$
$$16^1 = 16$$
$$16^2 = 256$$
$$16^3 = 4\,096$$
$$16^4 = 65\,536$$

Dané číslo opět vyjádříme jako součet některých hodnot mocnin základu, zde už budeme ovšem využívat i násobky těchto hodnot, neboť každá z nich se v součtu může vyskytovat maximálně patnáctkrát, a dále upravíme. Nesmíme také zapomenout přepsat hodnoty násobků větších než 9 jako písmena:

$$\begin{aligned} 5\,725 &= 4\,096 + 6 \cdot 256 + 5 \cdot 16 + 13 \cdot 1 = \\ &= 1 \cdot 16^3 + 6 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 \end{aligned}$$

Výsledkem převádění z desítkové do šestnáctkové soustavy je $5\,725 = (165D)_{16}$.

Metodou postupného dělení převedeme do šestnáctkové soustavy číslo 4 826:

$$\begin{aligned} 4\,826 : 16 &= 301 + 10 \ldots A \\ 301 : 16 &= 18 \quad + 13 \ldots D \\ 18 : 16 &= 1 \quad\;\; + 2 \\ 1 : 16 &= 0 \quad\;\; + 1 \end{aligned}$$

Výsledkem převodu je $4\,826 = (12DA)_{16}$.

3.1.5 OSTATNÍ SOUSTAVY

Při převádění čísel z nebo do desítkové soustavy (do nebo z libovolné jiné číselné soustavy) fungují stále stejné algoritmy, které jsou vysvětleny výše. Ukažme si to třeba na pětkové a sedmičkové soustavě.

Mějme číslo 368 a převeďme ho do pětkové soustavy.

$$\begin{aligned} 368 : 5 &= 73 + 3 \\ 73 : 5 &= 14 \;\; + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll|} 14:5 = 2 & +4 \\ 2:5 = 0 & +2 \end{array}$$

Číslo 368 zapíšeme v pětkové soustavě jako číslo $(2433)_5$.

Nyní převeďme číslo ze sedmičkové soustavy do desítkové. Mějme číslo $(60414)_7$.

$$\begin{aligned}
&(60414)_7 = 6 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = \\
&= 6 \cdot 2\,401 + 0 \cdot 343 + 4 \cdot 49 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = \\
&= 14\,406 + 0 + 196 + 7 + 4 = \\
&= 14\,613
\end{aligned}$$

Převedením zjistíme, že zadané sedmičkové číslo je rovno číslu 14 613.

3.2 PŘEVODY MEZI NEDESÍTKOVÝMI SOUSTAVAMI

Převod mezi soustavami, které mají základ $z \neq 10$, bývá o něco obtížnější. Zpravidla se využívá mezikrok převedení do desítkové soustavy. Výjimkou jsou soustavy tzv. příbuzné. Tedy soustavy, jejichž základy jsou si navzájem mocninami. Jde o soustavu dvojkovou, čtyřkovou, osmičkovou, šestnáctkovou atd. Dále můžeme jako tzv. příbuzné soustavy označit i trojkovou, devítkovou a sedmadvacítkovou soustavu atd. Převod mezi příbuznými soustavami se provádí zpravidla prostřednictvím té ze soustav, která má nejnižší základ. Například při převádění mezi dvojkovou a osmičkovou soustavou bychom použili soustavu dvojkovou. Pokud bychom uvažovali příbuzné soustavy čtyřkovou a šestnáctkovou, pak bychom převáděli pomocí čtyřkové soustavy. A nakonec při převádění mezi trojkovou a sedmadvacítkovou soustavou by byla použita soustava trojková. Převod z nebo do dvojkové soustavy si dále vysvětlíme.

Převeďme číslo $(111011)_2$ z dvojkové soustavy do šestnáctkové. Je třeba si uvědomit, že $16 = 2^4$. Základ soustavy, do které převádíme, je čtvrtou mocninou základu soustavy, ze které převádíme. Algoritmus převodu je takový, že si původní dvojkově zapsané číslo rozdělíme zprava na skupiny po čtyřech číslicích. Každou tuto čtveřici převedeme zvlášť do desítkové soustavy a tuto hodnotu pak vyjádříme příslušným symbolem šestnáctkové soustavy.

$$\begin{aligned}
&(111011)_2 = (11|1011)_2 \\
&(11)_2 = 3 = (3)_{16} \\
&(1011)_2 = 11 = (B)_{16}
\end{aligned}$$

Výsledné číslo je pak sjednocením dílčích výsledků, tedy $(111011)_2 = (3B)_{16}$.

Zkusme toto číslo stejným způsobem převést do čtyřkové soustavy, kde $4 = 2^2$, oddělujeme tedy dvojice.

$$(111011)_2 = (11|10|11)_2$$

$$(11)_2 = (3)_4$$
$$(10)_2 = (2)_4$$

Ve čtyřkové soustavě vyjádříme číslo $(111011)_2$ jako $(323)_4$.

Dále převeďme číslo $(371)_8$ z osmičkové do dvojkové soustavy. Vztah mezi základy je $8 = 2^3$. To znamená, že každou číslici tohoto čísla vyjádříme pomocí tří číslic dvojkové soustavy. V případě zbytečných nul na začátku čísla se tyto nuly v zápisu vynechávají.

$$(3)_8 = (011)_2$$
$$(7)_8 = (111)_2$$
$$(1)_8 = (001)_2$$

Dané číslo zapíšeme ve dvojkové soustavě jako $(11111001)_2$.

Nakonec si ukažme převod například mezi trojkovou a osmičkovou soustavou. Mějme číslo $(2012)_3$. Pro tento převod využijeme mezikrok převodu do desítkové soustavy.

$$(2012)_3 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 =$$
$$= 2 \cdot 27 + 0 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 54 + 3 + 2 = 59$$

Nyní číslo 59 převedeme z desítkové soustavy do požadované osmičkové.

$$59 : 8 = 7 + 3$$
$$7 : 8 = 0 \;\; + 7$$

Výsledkem převodu je $(2012)_3 = (73)_8$.

[2,15]

4 POČETNÍ OPERACE (SČÍTÁNÍ, ODČÍTÁNÍ, NÁSOBENÍ A DĚLENÍ) V ČÍSELNÝCH SOUSTAVÁCH

4.1 SČÍTÁNÍ

4.1.1 KARDINÁLNÍ ČÍSLA

Kardinální čísla jsou jistým zobecněním pojmu čísel přirozených. Abychom mohli přirozená čísla zobecnit, musíme si napřed uvědomit, co takové číslo udává. První odpovědí, která člověka napadne, je počet nějakých objektů. Číslo 5 udává, že je někde pět hruštiček. Zobecněním tohoto pojmu získáme takzvaná kardinální čísla, která v podstatě vyjadřují počty prvků.

[18]

Součet kardinálních čísel dvou disjunktních množin (tj. množin, jejichž průnikem je prázdná množina) se rovná kardinálnímu číslu jejich sjednocení. Je třeba brát v úvahu, že se jedná o přirozená čísla zapsaná v nějaké číselné soustavě. Výsledné číslo vyjadřující součet tedy musí být zapsáno správně z hlediska dané soustavy. K tomu nám pomůže grafické seskupování prvků množiny. To spočívá ve vhodném seskupování prvků do skupinek tak, aby každá obsahovala právě takový počet prvků, kolik je rovno základu číselné soustavy. Zároveň jsou všechny skupinky disjunktní, tzn. mají prázdný společný průnik. Seskupování končí v tu chvíli, kdy zůstanou neseskupené pouze prvky, jejichž počet je méně než z. Seskupení, která jsme vytvořili, nazýváme seskupení prvního řádu. Zbylé prvky můžeme označit jako seskupení nultého řádu. Dále budeme seskupovat již vytvořené skupinky prvního řádu, a to opět po počtu rovném základu číselné soustavy. Těmto seskupením říkáme seskupení druhého řádu. Stejně bychom definovali i seskupení vyšších řádů. Výsledné číslo je pak v podstatě soupisem počtů seskupení jednotlivých řádů (jedná se o počet seskupení neseskupených do seskupení vyššího řádu).

Ukažme si, jak funguje sčítání dvou přirozených čísel v desítkové soustavě bez přechodu přes základ soustavy.

množina	*počet prvků*
• • •	3
• • • • •	5
• • • • • • • •	$3 + 5 = 8$

Celkový počet prvků sjednocení je roven osmi, toto číslo tedy nepřekračuje základ soustavy a není potřeba seskupovat.

Nyní uvažujme případ sčítání s přechodem přes základ soustavy.

množina	*počet prvků*
• • • •	4
• • • • • • • •	8
$\boxed{\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet}\,\bullet\,\bullet$	$4 + 8 = 12$

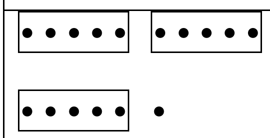
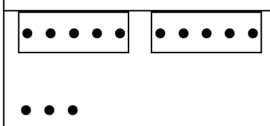
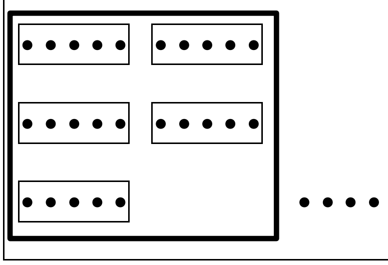
Zde vidíme, že součtem dvou kardinálních čísel je opět součet kardinálních čísel dvou disjunktních množin, a tedy kardinální číslo jejich sjednocení. Ovšem při zjišťování počtu prvků sjednocení množin lze utvořit jedno seskupení po deseti prvcích (tj. seskupení prvního řádu) a zbývají dva neseskupené prvky.

Ukažme si, že na stejném principu lze sčítat čísla i v jiné číselné soustavě. Uvažujme například šestkovou soustavu a sečtěme čísla $(5)_6$ a $(3)_6$.

množina	*počet prvků*
• • • • •	$(5)_6$
• • •	$(3)_6$
$\boxed{\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet}\,\bullet\,\bullet$	$(12)_6$

I zde vidíme, že dochází ke sčítání s přechodem přes základ soustavy. Sjednocení množin obsahuje osm prvků. Jelikož základem soustavy je 6, lze vytvořit jedno seskupení prvního řádu a dále zbývají dva prvky neseskupené. Proto se v zápisu výsledného čísla objevuje jednotka (jako počet seskupení prvního řádu) a dvojka (jako počet neseskupených prvků, seskupení nultého řádu).

Mějme vyšší čísla pětkové soustavy, například $(31)_5$ a $(23)_5$. Pokusme se je sečíst s pomocí kardinálního modelu.

množina	*počet prvků*
	$(31)_5$
	$(23)_5$
	$(31)_5 + (23)_5 = (104)_5$

Nyní máme ve sjednocení 29 prvků. V těchto prvcích lze vytvořit pět seskupení prvního řádu (po pěti samostatných prvcích, protože základ $z = 5$). Dále lze seskupovat již jednou seskupené prvky, tím získáme jedno seskupení druhého řádu. Nakonec se musíme podívat, kolik kterých seskupení máme, abychom mohli vyjádřit výsledek sčítání. Mimo jakékoliv seskupení zbývají čtyři prvky, počet samotných seskupení prvního řádu je nula (neboť ty, kterém jsme seskupili jsou „schované“ v dalším seskupení) a počet seskupení druhého řádu je roven jedné. Výsledkem je tedy $(31)_5 + (23)_5 = (104)_5$.

[17]

4.1.2 ALGORITMUS PAMĚTNÉHO SČÍTÁNÍ

Při pamětném sčítání dvou přirozených čísel využíváme rozklad jednoho ze sčítanců na jednotlivé řády a postupně přičítáme. Mějme například čísla 528 a 339. Jejich součet zpaměti provádíme následovně:

$$528+339=528+(300+30+9)=(528+300)+30+9=828+(30+9)$$
$$=(828+30)+9=858+9=867$$

[16]

4.1.3 ALGORITMUS PÍSEMNÉHO SČÍTÁNÍ

Při sčítání dvou přirozených čísel v desítkové soustavě čísla rozložíme na číslice řádů jednotek, desítek, stovek atd. Poté číslice stejných řádů sečteme.

Algoritmus písemného sčítání využíváme při sčítání čísel pod sebou. Jde o postupné sečtení stejných řádů. Jako první sčítáme řád jednotek, tedy nultý řád. Jako výsledek zapíšeme číslici součtu patřící řádu jednotek. V případě „přetečení" součtu jednotek do dvouciferného výsledku přičítáme číslici na místě desítek k součtu řádu desítek. Jako poslední sčítáme řád nejvyšší.

Mějme čísla 125 a 432. Při jejich sčítání nedochází k přechodu přes základ číselné soustavy. Algoritmus jejich sčítání vyjádříme následovně:

$$125+432=(1\cdot 100+2\cdot 10+5\cdot 1)+(4\cdot 100+3\cdot 10+2\cdot 1)=$$
$$=1\cdot 10^2+2\cdot 10^1+5\cdot 10^0+4\cdot 10^2+3\cdot 10^1+2\cdot 10^0=$$
$$=(1+4)\cdot 10^2+(2+3)\cdot 10^1+(5+2)\cdot 10^0=$$
$$=5\cdot 10^2+5\cdot 10^1+7\cdot 10^0=$$
$$=500+50+7=$$
$$=557$$

$$\begin{array}{c}125\\ \underline{432}\\ 557\end{array}$$

Mějme čísla 648 a 173. Algoritmus sčítání s přechodem přes základ číselné soustavy vypadá takto:

$$648+181=(6\cdot 100+4\cdot 10+8\cdot 1)+(1\cdot 100+8\cdot 10+1\cdot 1)=$$
$$=6\cdot 10^2+4\cdot 10^1+8\cdot 10^0+1\cdot 10^2+8\cdot 10^1+1\cdot 10^0=$$
$$=(6+1)\cdot 10^2+(4+8)\cdot 10^1+(8+1)\cdot 10^0=$$
$$=7\cdot 10^2+12\cdot 10^1+9\cdot 10^0=$$
$$=7\cdot 10^2+(1\cdot 10^2+2\cdot 10^1)+9\cdot 10^0=$$
$$=8\cdot 10^2+2\cdot 10^1+9\cdot 10^0=$$
$$=800+20+9=829$$

$$\begin{array}{r} 648 \\ \underline{181} \\ 829 \end{array}$$

Pro desítkovou soustavu lze vztahy pro sčítání vyjádřit tabulkou (přičemž dvouciferná čísla značí přechod přes základ $z = 10$, tedy „přetečení“ do vyššího řádu):

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Při sčítání přirozených čísel v nedesítkové soustavě používáme stejný princip. Ani zde zapisované číslice nesmí přesahovat hodnotu základu.

Vypočtěme výsledek součtu $(431)_7 + (25)_7$:

$$(431)_7 + (25)_7 = (4 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0) + (2 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0) =$$
$$= 4 \cdot 7^2 + (3 + 2) \cdot 7^1 + (1 + 5) \cdot 7^0 =$$
$$= 4 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = (456)_7$$

$$(431)_7 + (25)_7 = (456)_7$$

Vypočtěme výsledek součtu $(273)_8 + (54)_8$:

$$(273)_8 + (54)_8 = (2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0) + (5 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0) =$$
$$= 2 \cdot 8^2 + (7 + 5) \cdot 8^1 + (3 + 4) \cdot 8^0 =$$
$$= 2 \cdot 8^2 + 12 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 =$$
$$= 2 \cdot 8^2 + (1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1) + 7 \cdot 8^0 =$$
$$= (2 + 1) \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 =$$
$$= 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = (347)_8$$

$$(273)_8 + (54)_8 = (347)_8$$

Sečtěme písemně například čísla ve čtyřkové soustavě:

$$\begin{array}{r} (30231)_4 \\ (2230)_4 \\ \hline (33121)_4 \end{array}$$

I zde můžeme vztahy pro sčítání ve čtyřkové soustavě vyjádřit tabulkou:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

[16,17]

4.2 ODČÍTÁNÍ

4.2.1 KARDINÁLNÍ ČÍSLA

K výsledku odčítání lze dojít odhadem a jeho ověřením, tedy v podstatě na základě využití definice odčítání jako inverzní operace k operaci sčítání, nebo opět pomocí kardinálního modelu. Tedy názorným „ubíráním“ prvků, pomocí „škrtání“ prvků zobrazených na matematickém počítadle.

Opět zvolme napřed desítkovou číselnou soustavu a ukažme si, jak je možné odčítání dvou přirozených čísel znázornit. Množinu představující menšence zobrazíme černými puntíky, množinu představující menšitele bílými puntíky. Postupně odebíráme všechny dvojice různobarevných puntíků.

Od čísla 9 odečtěme číslo 3:

množina	*počet prvků*
~~• • •~~ • • • • • •	9 (menšenec)
~~∘ ∘ ∘~~	3 (menšitel)
• • • • • •	$9 - 3 = 6$

V grafickém znázornění vidíme tři dvojice různobarevných puntíků. Po jejich odstranění získáme výsledek. Jde o jednoduché odčítání, kdy není potřeba vypůjčovat si z vyšších řádů.

Nyní zkusme odečíst od čísla 15 číslo 7. Vzhledem k tomu, že jsme zvyklí běžně počítat v desítkové soustavě, nedělalo by problém znázornit patnáct černých puntíků a sedm bílých, ovšem my požadujeme obecný princip takový, aby jej bylo možné aplikovat i na jiné číselné soustavy. Musíme tedy zobrazit číslo 15 pomocí řádů.

řád desítek, $z^1 = 10^1$	*řád jednotek,* $z^0 = 10^0$	*počet prvků*
•	~~• • • • •~~	15 (menšenec)
	~~∘ ∘ ∘ ∘ ∘~~ ∘ ∘	7 (menšitel)
•	∘ ∘	$15 - 7 =?$

Při odčítání lze odčítat pouze jednotky od jednotek, obecně stejné řády od stejných řádů. Odstranili jsme pět různobarevných dvojic, ovšem tím ještě odčítání nekončí. Zbývá nám odečíst dvě jednotky. Jde tedy o odčítání s přechodem přes základ. K tomu, abychom mohli proces odčítání dokončit si musíme půjčit jeden puntík z vyššího řádu (v našem případě jednu desítku) a rozložit ho na puntíky nižšího řádu, tedy na jednotky. Jelikož počítáme v desítkové soustavě, bude nově puntíků (jednotek) deset.

řád desítek, $z^1 = 10^1$	*řád jednotek,* $z^0 = 10^0$	*počet prvků*
•	~~• • • • •~~	15 (menšenec)
	~~∘ ∘ ∘ ∘ ∘~~ ∘ ∘	7 (menšitel)
	~~• •~~ • • • • • • • •	10 (nový menšenec)
	~~∘ ∘~~	2 (nový menšitel)
	• • • • • • • •	$15 - 7 = 8$

Dále uvažujme čtyřkovou soustavu. Od čísla $(220)_4$ odečtěme číslo $(121)_4$.

$z^2 = 4^2 = 16$	$z^1 = 4^1 = 4$	$z^0 = 4^0 = 1$	*počet prvků*
~~•~~ •	~~• •~~		$(220)_4$ (menšenec)
~~∘~~	~~∘ ∘~~	∘	$(121)_4$ (menšitel)

•		◦	$(220)_4 - (121)_4 =?$
	• • • •		úprava menšence
	• • •	• • • •	nový menšenec
		◦	menšitel
	• • •	• • •	$(220)_4 - (121)_4 = (33)_4$

V tomto případě jsme odstranili všechny možné různobarevné dvojice puntíků, ale zbývalo nám odečíst stále jednu jednotku. Proto jsme museli menšence postupně upravit tak, abychom měli od čeho jednotku odečíst, čili „vypůjčili" jsme si z vyššího řádu.

[17]

4.2.2 ALGORITMUS PAMĚTNÉHO ODČÍTÁNÍ

Při pamětném odčítání dvou přirozených čísel využíváme rozkladu menšitele na jednotlivé řády a postupně odčítáme. Mějme například čísla 759 a 275. Jejich rozdíl zpaměti provádíme následovně:

$$759 - 275 = 759 - (200 + 70 + 5) = (759 - 200) - (70 + 5) = 559 - (70 + 5)$$
$$= (559 - 70) - 5 = 489 - 5 = 484$$

[16]

4.2.3 ALGORITMUS PÍSEMNÉHO ODČÍTÁNÍ

Při odčítání dvou přirozených čísel v desítkové soustavě menšence i menšitele rozložíme na číslice jednotlivých řádů. Poté odčítáme příslušné řády. Pokud je hodnota menšence u počítaného řádu menší než hodnota menšitele, musíme k němu přičíst jednotku (jejíž hodnota je rovna hodnotě základu) vypůjčenou z řádu vyššího.

Napřed ukažme princip odčítání dvou přirozených čísel bez přechodu přes základ soustavy:

$$736 - 214 = (7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1) - (2 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 1) =$$
$$= (7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) - (2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) =$$
$$= (7 - 2) \cdot 10^2 + (3 - 1) \cdot 10^1 + (6 - 4) \cdot 10^0 =$$
$$= 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 =$$
$$= 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 1 =$$

$$= 500 + 20 + 2 =$$
$$= 522$$

$$\begin{array}{r} 736 \\ \underline{-214} \\ 522 \end{array}$$

Následně ukažme stejný princip, ovšem s přechodem přes základ soustavy. Bude tedy třeba vypůjčit si jednotku z vyššího řádu:

$$627 - 362 = (6 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1) - (3 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 1) =$$
$$= (6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0) - (3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0) =$$
$$= (6 - 3) \cdot 10^2 + (2 - 6) \cdot 10^1 + (7 - 2) \cdot 10^0 =$$
$$= 3 \cdot 10^2 + (2 - 6) \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 =$$
$$= (2 + 1) \cdot 10^2 + (2 - 6) \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 =$$
$$= 2 \cdot 10^2 + (10 + 2 - 6) \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 =$$
$$= 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 =$$
$$= 265$$

$$\begin{array}{r} 627 \\ \underline{-362} \\ 265 \end{array}$$

Stejně tak můžeme vyjádřit rozdíl dvou čísel v jiné soustavě, než je desítková. Mějme například čísla $(672)_9$ a $(458)_9$. Proces jejich odčítání můžeme rozepsat:

$$(672)_9 - (458)_9 = (6 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9^1 + 2 \cdot 9^0) - (4 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^1 + 8 \cdot 9^0) =$$
$$= (6 - 4) \cdot 9^2 + (7 - 5) \cdot 9^1 + (2 - 8) \cdot 9^0 =$$
$$= 2 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9^1 + (2 - 8) \cdot 9^0 =$$
$$= 2 \cdot 9^2 + (1 + 1) \cdot 9^1 + (2 - 8) \cdot 9^0 =$$
$$= 2 \cdot 9^2 + 1 \cdot 9^1 + (9 + 2 - 8) \cdot 9^0 =$$
$$= 2 \cdot 9^2 + 1 \cdot 9^1 + 3 \cdot 9^0 =$$
$$= (213)_9$$

$$\begin{array}{r} (672)_9 \\ \underline{-(458)_9} \\ (213)_9 \end{array}$$

[16,17]

4.3 Násobení

4.3.1 Kardinální čísla

Násobení znázorněné na kardinálním modelu si ukážeme na konkrétním příkladu. Mějme čísla 2 a 3. Při jejich násobení nedochází k přechodu přes základ desítkové soustavy. Je nutno poznamenat, že při násobení pomocí kardinálních čísel nacházíme rozdíl mezi součiny $3 \cdot 2$ a $2 \cdot 3$. Zatímco v prvním případě nahrazujeme každý z trojice prvků dvojicí prvků, v druhém případě nahrazujeme každý z dvojice prvků prvky třemi. Tak či tak získáme stejný výsledek a díky komutativnosti násobení kardinálních čísel je možné násobení v jednom pořadí činitelů vždy převést na násobení v opačném pořadí činitelů. Znázorníme si tedy množinu o dvou prvcích. Násobení třemi pak spočívá v tom, že každý prvek nahradíme třemi prvky.

množina	*počet prvků*
• •	2
• • • • • •	$2 \cdot 3 = 6$

Vynásobme $(123)_4 \cdot (2)_4$. Opět znázorníme první číslo pomocí puntíků. Každý prvek pak zdvojíme. Nakonec provedeme úpravu prvků tak, abychom mohli zapsat správný výsledek ve čtyřkové soustavě.

seskupení 2. řádu	*seskupení 1. řádu*	*seskupení 0. řádu*	*počet prvků*
•	• •	• • •	$(123)_4$
• ◦ •	• • ◦ • •	• • • • • •	$(123)_4 \cdot (2)_4$, úprava
• • •	•	• •	$(123)_4 \cdot (2)_4 = (312)_4$

[17]

4.3.2 ALGORITMUS PAMĚTNÉHO NÁSOBENÍ

Většinou nenásobíme například dvě trojciferná čísla zpaměti. Proto si algoritmus pamětného násobení ukážeme na násobení jednociferným činitelem.

Mějme součin 357 · 5.

$$357 \cdot 5 = (300 + 50 + 7) \cdot 5 = 300 \cdot 5 + 50 \cdot 5 + 7 \cdot 5 =$$
$$= 1\,500 + 50 \cdot 5 + 7 \cdot 5 =$$
$$= 1\,500 + 250 + 7 \cdot 5 =$$
$$= 1\,500 + 250 + 35 = 1785$$

[16]

4.3.3 ALGORITMUS PÍSEMNÉHO NÁSOBENÍ

Mějme součin 259 · 7. Algoritmus písemného násobení vyplývá z rovnosti:

$$259 \cdot 7 = (2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 9 \cdot 1) \cdot 7 =$$
$$= (2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0) \cdot 7 =$$
$$= 7 \cdot 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 9 \cdot 10^0 =$$
$$= 14 \cdot 10^2 + 35 \cdot 10^1 + 63 \cdot 10^0 =$$
$$= (1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2) + (3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1) + (6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) =$$
$$= 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 11 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 =$$
$$= 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1) + 3 \cdot 10^0 =$$
$$= 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 =$$
$$= 1 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 1 =$$
$$= 1\,000 + 800 + 10 + 3 =$$
$$= 1\,813$$

$$\begin{array}{r} 259 \\ \cdot\, 7 \\ \hline 1\,813 \end{array}$$

Nejprve vynásobíme číslem sedm řád jednotek, tedy $7 \cdot 9 = 63$, a pod řád jednotek zapíšeme číslici 3. Číslice 6 je připočtena k součinu s následujícím řádem. Dále tedy násobíme číslo sedm s číslicí na řádu desítek a připočteme 6, tj. $7 \cdot 5 + 6 = 41$. Číslici 1 zapíšeme pod řád desítek a číslici 4 připočteme k následujícímu. Nakonec spočteme $7 \cdot 2 +$

$4 = 18$. Pod řád stovek zapíšeme číslici 8, číslici jedna zapíšeme na pozici následujícího řádu, neboť je připočítána k pomyslné nule.

Vztahy pro násobení v desítkové soustavě znázorňuje tabulka:

.	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Při násobení víceciferného čísla číslem víceciferným postupujeme podobně. Násobení číslicí řádu jednotek probíhá stejně jako násobení jednociferným číslem. Násobení číslicí řádu desítek také, ovšem zápis součinu začíná až pod řádem desítek. U vyšších řádů postupujeme stejně. Nakonec se výsledky dílčích součinů písemně sečtou s tím, že pozice zůstávají zachovány.

Rozepišme součin dvou víceciferných čísel:

$$456 \cdot 23 = (4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 10 + 3 \cdot 1) =$$
$$= (4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) \cdot (2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) =$$
$$= (4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) \cdot 2 \cdot 10^1 + (4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) \cdot 3 \cdot 10^0 =$$
$$= 4 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 2 \cdot 10^1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 2 \cdot 10^0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 10^0 + 5 \cdot 3 \cdot 10^1 \cdot 10^0 + 6 \cdot 3 \cdot 10^0 \cdot 10^0 =$$
$$= 8 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10^1 + 12 \cdot 10^2 + 15 \cdot 10^1 + 18 \cdot 10^0 =$$
$$= 8 \cdot 10^3 + 22 \cdot 10^2 + 27 \cdot 10^1 + 18 \cdot 10^0 =$$
$$= 8 \cdot 10^3 + (2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2) + (2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1) + (1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) =$$
$$= 10 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 =$$
$$= (1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3) + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 =$$
$$= 10\,000 + 0 + 400 + 80 + 8 = 10\,488$$

$$\begin{array}{r} 456 \\ \cdot\, 23 \\ \hline 1368 \\ 912 \\ \hline 10488 \end{array}$$

Při výpočtu mezi sebou čísla klasicky vynásobíme. Pokud je dílčí součin roven hodnotě základu nebo ho převyšuje, zapíše se pouze to, co bez základu nebo jeho násobků zbývá a hodnota základu (popř. jeho násobku) se přičte k následujícímu součinu. Při násobení v nedesítkové soustavě je tedy vhodné znát tabulku těchto vztahů. Mějme například sedmičkovou soustavu:

.	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	21	24
4	0	4	11	15	22	26	33
5	0	5	13	21	26	34	42
6	0	6	15	24	33	42	51

V tabulce vidíme, že například u součinu $3 \cdot 5$ počítaného v sedmičkové soustavě je výsledek roven $(21)_7$. To pro násobení víceciferných čísel znamená, že se k příslušnému řádu zapíše číslice 1 a číslice 2 je připočtena k součinu s následujícím řádem.

Vynásobme $(605)_7$ a $(41)_7$.

$$\begin{array}{r} (605)_7 \\ \cdot\,(41)_7 \\ \hline (605)_7 \\ (3326)_7 \\ \hline (34165)_7 \end{array}$$

Nakonec zkusme násobení ve trojkové soustavě. Pro tu vyjádříme vztahy také tabulkou:

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Vynásobme čísla $(12010)_3$ a $(210)_3$.

$$
\begin{array}{r}
(12010)_3 \\
\cdot\,(210)_3 \\
\hline
(00000)_3 \\
(12010)_3 \\
(31020)_3 \\
\hline
(10222100)_3
\end{array}
$$

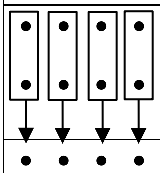
[16]

4.4 DĚLENÍ

4.4.1 KARDINÁLNÍ ČÍSLA

Princip dělení si opět ukažme napřed na kardinálním modelu. Začněme opět desítkovou soustavou a znázorněme si, jak funguje dělení bez přechodu přes základ dané číselné soustavy a následně s přechodem přes základ soustavy.

V desítkové soustavě budeme dělit napřed bez přechodu přes základ číselné soustavy číslo osm číslem dvě. Dělení spočívá v tom, že každou dvojici, jelikož dělíme dvěma, nahradíme jedním prvkem.

množina	*počet prvků*
	8
	$8 : 2 = 4$

V tabulce tedy máme znázorněno osm prvků pomocí puntíků, které budeme dělit. Při dělení dvěma označujeme všechny možné dvojice těchto prvků a každou z nich nahradíme prvkem jedním. V osmi prvcích je možné označit si čtyři dvojice, které mají navzájem prázdný průnik. Výsledný počet prvků po dělení je tedy čtyři.

Nyní si ukážeme příklad, kdy dojde k dělení s přechodem přes základ soustavy. Vydělme $15 : 3$. V první řadě si znázorníme číslo 15 pomocí plných puntíků. Číslo 15 se skládá z jedné desítky a pěti jednotek, což znamená z jednoho seskupení 1. řádu a pěti seskupení 0. řádu v rámci desítkové soustavy. Dále zvýrazníme všechny možné trojice puntíků, které vždy nahradíme jedním prázdným. Nahrazování ovšem může probíhat pouze v rámci jednoho seskupení. Nelze tedy označit například jeden puntík z desítek a dva puntíky z jednotek.

seskupení 1. řádu	*seskupení 0. řádu*	*počet prvků*
•	$\boxed{\bullet\ \bullet\ \bullet}$ • •	15
	∘ • •	
	$\boxed{\bullet\ \bullet\ \bullet}$ $\boxed{\bullet\ \bullet\ \bullet}$ $\boxed{\bullet\ \bullet\ \bullet}$ $\boxed{\bullet\ \bullet\ \bullet}$ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘	$15: 3 = 5$

Nahrazení lze provést pouze u seskupení 0. řádu, kde je možné označit si jednu trojici prvků (tzn. plných puntíků). Tu nahradíme puntíkem prázdným. Po prvním nahrazení zbývá vydělit jeden prvek seskupení 1. řádu (tzn. jednu desítku) a dva prvky seskupení 0. řádu (tzn. dvě jednotky). Proto musíme prvek z vyššího řádu převést na prvky nižšího řádu. Počítáme v desítkové soustavě, jeden puntík ze seskupení 1. řádu tedy znázorníme deseti puntíky seskupení 0. řádu, které přidáme ke zbývajícím dvěma jednotkám. Poté opět nahrazujeme trojice prvků, dokud nedojdeme k výsledku. Tedy v nově zobrazených dvanácti plných puntících označujeme zase všechny možné trojice, které nemají navzájem žádný společný prvek. Takové trojice nalezneme čtyři a každou z nich nahradíme puntíkem prázdným. Nakonec již zbývá jen podívat se, kolik prázdných puntíků se nachází v jednotlivých seskupeních. Jelikož jsme zvolili malá čísla, puntíky se nachází pouze v seskupení 0. řádu, tedy v řádu jednotek, kde jich nalezneme pět, neboť v prvním kroku nahrazování jsme získali jeden puntík a po převodu desítky na jednotky jsme získali další čtyři. Proto je výsledkem dělení $15: 3 = 5$.

4.4.2 ALGORITMUS PÍSEMNÉHO DĚLENÍ

Při dělení přirozených čísel beze zbytku i se zbytkem postupujeme stejně. Dělení je inverzní operací k násobení, využíváme tedy vlastnosti známé z násobení přirozených čísel. Při dělení k danému dělenci hledáme co největší násobek dělitele, který není větší než dělenec.

Podívejme se na princip dělení pomocí rozvinutého zápisu. Jako první vydělme $84: 2$.

$$84: 2 = (8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0): (2 \cdot 10^0) =$$

$$= [(8 \cdot 10^1): (2 \cdot 10^0)] + [(4 \cdot 10^0): (2 \cdot 10^0)] =$$

$$= 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 =$$

$$= 42$$

Dále stejným způsobem rozložme podíl $54:3$.

$$\begin{aligned}
54:3 &= (5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0):(3 \cdot 10^0) = \\
&= [(3+2) \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0]:(3 \cdot 10^0) = \\
&= [3 \cdot 10^1 + (2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0)]:(3 \cdot 10^0) = \\
&= (3 \cdot 10^1 + 24 \cdot 10^0):(3 \cdot 10^0) = \\
&= [(3 \cdot 10^1):(3 \cdot 10^0)] + [(24 \cdot 10^0):(3 \cdot 10^0)] = \\
&= 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 = \\
&= 18
\end{aligned}$$

Nyní uvažujme případ, kdy první číslice v dělenci není násobkem dělitele.

$$\begin{aligned}
125:5 &= (1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0):(5 \cdot 10^0) = \\
&= (12 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0):(5 \cdot 10^0) = \\
&= [(10+2) \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0]:(5 \cdot 10^0) = \\
&= [10 \cdot 10^1 + (2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0)]:(5 \cdot 10^0) = \\
&= (10 \cdot 10^1 + 25 \cdot 10^0):(5 \cdot 10^0) = \\
&= [(10 \cdot 10^1):(5 \cdot 10^0)] + [(25 \cdot 10^0):(5 \cdot 10^0)] = \\
&= 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = \\
&= 25
\end{aligned}$$

Nakonec uvedeme příklad rozvinutého zápisu v nedesítkové soustavě. Uvažujme sedmičkovou soustavu.

$$\begin{aligned}
(54)_7:(3)_7 &= (5 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0):(3 \cdot 7^0) = \\
&= [(3+2) \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0]:(3 \cdot 7^0) = \\
&= [3 \cdot 7^1 + (2 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0)]:(3 \cdot 7^0) = \\
&= (3 \cdot 7^1 + 18 \cdot 7^0):(3 \cdot 10^0) = \\
&= [(3 \cdot 7^1):(3 \cdot 7^0)] + [(18 \cdot 7^0):(3 \cdot 7^0)] =
\end{aligned}$$

$$= 1 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 =$$

$$= (16)_7$$

Rozvinutý zápis procesu dělení dvou čísel ovšem obvykle nepoužíváme vzhledem k jeho délce. Jako u ostatních početních operací používáme zkrácený zápis písemného dělení, a to buď s výpisem mezivýsledků, nebo pouze s výpisem zbytků.

Zápis písemného dělení s mezivýsledky součinů je první způsob zápisu dělení, se kterým se děti na základní škole setkají, neboť si při něm nemusí nic pamatovat nebo počítat zpaměti. Vše najdeme v zápisu, je přehledný a názorný.

$$\begin{array}{l} 1242 : 23 = 54 \\ -115 \\ 92 \\ -92 \\ 0 \end{array}$$

Při tomto způsobu se určí nejmenší možná část dělence, kterou lze vydělit dělitelem a odhadne se násobek. V tomto případě nejmenší možnou částí dělence, kterou lze vydělit dělitelem rovným 23, je číslo 124. Odhadneme, že do 124 se číslo 23 vejde pětkrát. Pak se zpětně násobí zapsané číslo s dělitelem a výsledek se zapíše se znaménkem mínus pod právě dělenou část dělence. Tedy provedeme násobení $5 \cdot 23$, výsledkem je číslo 115, které zapíšeme se znaménkem mínus pod číslo 124, které jsme právě dělili. Následuje písemné odečtení, k jehož výsledku se sepíše další číslice z dělence. Od čísla 124 odečteme číslo 115. Rozdíl těchto dvou čísel je rovný devíti. Číslo devět zapíšeme jako výsledek rozdílu a k němu sepíšeme číslici z dělence, která následuje, tedy číslici dvě. Získáváme tedy číslo 92 a opět odhadujeme, kolikrát se dělitel vejde do 92. Odhad násobku, tedy číslo čtyři, zapíšeme jako další číslici výsledného podílu. Zpětně roznásobíme $4 \cdot 23$, číslo 92 jako výsledek tohoto součinu zase zapíšeme s opačným znaménkem pod právě dělené číslo a odečteme. Vidíme, že počítáme rozdíl $92 - 92$, jehož výsledkem je nula. Dělení beze zbytku končí v tu chvíli, když už není co dále sepsat. Pokud po sepsání poslední číslice dělence je výsledek rozdílu roven nule, říkáme, že dělíme beze zbytku. Pokud je výsledek posledního rozdílu větší než nula, říkáme že jde o dělení se zbytkem. V tom případě bychom mohli pokračovat sepisováním nul za desetinnou čárkou (která se v zápisu čísla neuvádí, neboť by to bylo zbytečné) a výsledek podílu bychom mohli vyjádřit pomocí desetinného čísla.

Nyní se podívejme na zjednodušený zápis písemného dělení:

$$\begin{array}{l} 2178 : 18 = 121 \\ \ \ 37 \\ \ \ \ \ 18 \\ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Zjednodušený zápis písemného dělení probíhá stejným způsobem jako předchozí dělení. Rozdíl je pouze v zápisu. Zde nezapisujeme výsledek zpětného násobení, ale pouze zbytek. Jako první opět určíme nejmenší možnou část z dělence, kterou lze vydělit dělitelem. Číslem 18, coby dělitelem, je možné vydělit nejmenší část dělence rovnou číslu 21. Poté se odhadne násobek. Do čísla 21 se vejde maximálně jednonásobek čísla 18. Číslici jedna zapíšeme jako první číslici výsledného podílu. Následně zpětně roznásobíme $1 \cdot 18$ a zpaměti odečteme od čísla 21. Výsledek rozdílu, číslo tři, zapíšeme pod dělenou část a sepíšeme další číslici ze zadaného dělence, tedy číslici 7. Tím získáme nového dělence a odhadujeme výsledek podílu $37 : 18$. Výsledek tohoto odhadu opět zapíšeme do výsledného podílu jako další číslici, ve výsledku se tedy objeví jako další číslice dvě. Číslem dvě pak opět zpětně roznásobíme, určíme rozdíl, sepíšeme poslední číslici a znovu zapíšeme odhad násobku. Po zpětném roznásobení vychází nula a jelikož již není co sepsat, dospěli jsme k výsledku podílu rovnému 121, a to beze zbytku.

Ověření správnosti dělení je prováděno pomocí součinu. Ve zkoušce se násobí podíl s dělitelem. V případě dělení se zbytkem je pak ještě potřeba připočítat k výsledku součinu hodnotu zbytku. Výsledek dělení je správný, pokud je výsledkem součinu ve zkoušce číslo rovné dělenci.

[16,17]

4.4.3 DĚLENÍ V NEDESÍTKOVÝCH ČÍSELNÝCH SOUSTAVÁCH

Při dělení v číselné soustavě, která není desítková, využíváme tabulku vztahů pro násobení v dané soustavě.

Podívejme se na dělení v pětkové soustavě. Napřed si ukažme, jak probíhá dělení v pětkové soustavě pouze jednociferným dělitelem. Je třeba znát tabulku vztahů pro násobení v pětkové soustavě, která vypadá takto:

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

$$
\begin{array}{l}
(3402)_5 : (3)_5 = (1114)_5 \\
-3 \\
04 \\
-\ \ 3 \\
10 \\
-3 \\
22 \\
-22 \\
0
\end{array}
$$

Dělitel je roven číslu 3 v pětkové soustavě. Bereme tedy v úvahu jeho násobky ve sloupečku nebo v řádku označeném trojkou. Nejmenší možná část dělence dělitelná třemi je přímo rovna třem a jde o jednonásobek. První číslicí ve výsledném podílu tedy bude jednotka. Provedeme zpětné roznásobení a jeho výsledek napíšeme pod dělenou část. Výsledkem součinu $1 \cdot 3$ v pětkové soustavě je tedy číslo tři, které zapíšeme se znaménkem mínus. Po písemném odečtení 3 – 3 zapíšeme do dalšího řádku nulu jako výsledek. K ní sepíšeme následující číslici dělence, čímž získáme číslo 4 a opět hledáme co možná největší násobek čísla tři v příslušném řádku. Opět jde o jednonásobek, takže tedy zapíšeme další jednotku do podílu. Zpětně roznásobíme a číslo tři zapíšeme se znaménkem mínus pod číslo čtyři. Dále zapíšeme číslo 1 jako výsledek po odečtení a opět sepíšeme další číslici ze zadaného dělence, tedy číslici nula. Při pohledu do tabulky vidíme, že v úvahu přichází opět pouze jednonásobek čísla tři. Jednotku zapíšeme do výsledku. Zpětně roznásobíme a trojku zapíšeme pod dělence. Při odečítání musíme myslet na to, že počítáme v pětkové soustavě, výsledkem je tedy číslo dvě, ke kterému sepíšeme dvojku (poslední číslici z dělence). V tabulce hledáme číslo menší nebo rovno 22. Tomu odpovídá čtyřnásobek čísla tři. Číslice čtyři bude poslední číslicí ve výsledném podílu, protože po zpětném roznásobení a odečtení dojdeme ke zbytku rovnému nule.

Nyní počítejme v sedmičkové soustavě. Vezměme v úvahu víceciferného dělitele. Vztahy pro násobení jsou v tabulce:

.	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	21	24
4	0	4	11	15	22	26	33
5	0	5	13	21	26	34	42
6	0	6	15	24	33	42	51

$$
\begin{array}{l}
(6231)_7 : (24)_7 = (232)_7 \\
-51 \\
113 \\
-105 \\
51 \\
-51 \\
0
\end{array}
$$

U tohoto příkladu je dělitel roven $(24)_7$. Proto hledáme ve sloupečku nebo řádku pro dvojku (první číslice dělitele). Dělenec je roven $(6231)_7$, proto hledáme číslo, které je nejblíže číslu 6 (nejmenší možná část z dělence), ale zároveň je menší než toto číslo. Tomu odpovídá číslo 4, které je součinem $2 \cdot 2$. Proto je první číslice výsledku rovna dvěma. Dále zpětně roznásobíme a odečteme. Další dělení probíhá stejně.

[16]

5 PRAKTICKÉ VYUŽITÍ VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

V této kapitole se budeme zabývat příklady praktického využití teorie číselných soustav ve školské matematice. Ačkoliv přímo toto téma není se žáky základních škol probíráno, setkávají se s číselnými soustavami, aniž by si to kolikrát uvědomovali nebo o tom věděli.

5.1 ŘEŠENÉ MATEMATICKÉ PŘÍKLADY

5.1.1 ČAS

Klasickým příkladem, kdy žáci pracují s jinou číselnou soustavou, než je desítková, je převod času. Při převodu sekund, minut a hodin je využíváno soustavy šedesátkové. Dále při převodu počtu hodin na počet dní využíváme soustavu čtyřiadvacítkovou, vztah mezi dny a týdny je dán soustavou sedmičkovou a v neposlední řadě mezi měsíci a roky platí pravidla dvanáctkové soustavy.

Příklad:

Vyjádřete následující časy v sekundách:

a) $11\ h$

b) $25\ min$

c) $1\ h\ 57\ min$

d) $2{,}5\ h$

Řešení:

Při řešení zadaných převodů využíváme vztahy platné pro jednotky času, a to takové, že jedna hodina se rovná šedesáti minutám a jedna minuta je rovna šedesáti sekundám. Jedna hodina je tedy rovna 3 600 sekundám (což lze vyjádřit jako 60^2). Jde tedy o klasické počítání v šedesátkové číselné soustavě s tím, že vzpomeneme-li na jednotlivá seskupení, pak jsou zde označována postupně jako sekundy, minuty a hodiny.

a) $11\ h = 11 \cdot 60\ min = 660\ min = 660 \cdot 60\ s = 39\ 600\ s$

b) $25\ min = 25 \cdot 60\ s = 1\ 500\ s$

c) $1\ h\ 57\ min = 1 \cdot 60 + 57\ min = 117\ min = 117 \cdot 60\ s = 7\ 020\ s$

d) $2{,}5\ h = 2{,}5 \cdot 60\ min = 150\ min = 150 \cdot 60\ s = 9\ 000\ s$

Příklad:

Vyjádřete v hodinách, minutách a sekundách:

a) $582\ s$

b) $48\,000\ s$

c) $5\,123\ s$

d) $9\,000\ s$

Řešení:

a) $582\ s = 540 + 42\ s = 9 \cdot 60 + 42\ s = 9min\ \ 42\ s$

b) $48\,000\ s = 800 \cdot 60\ s = 800\ min = 13 \cdot 60 + 20\ min = 13\ h\ 20\ min$

c) $5\,123\ s = 5\,100 + 23\ s = 85 \cdot 60 + 23\ s = 85\ min\ \ 23\ s = (1 \cdot 60 + 25)\ min\ \ 23\ s = 1h\ 25\ min\ \ 23\ s$

d) $9\,000\ s = 150 \cdot 60\ s = 150\ min = (2 \cdot 60 + 30)min = 2\ h\ 30\ min$

Příklad:

Petr přečetl knihu za 3 týdny, Marek za 23 dní. Kdo přečetl knihu dříve a o kolik dní?

Řešení:

Dobu, za kterou oba dva hoši přečetli knihu, musíme převést na stejné jednotky. Platí, že jeden týden je roven sedmi dnům, jde tedy v podstatě o sedmičkovou soustavu. Petr četl knihu 3 týdny $= 3 \cdot 7$ dní $= 21$ dní nebo můžeme naopak vyjádřit, že Marek četl knihu 23 dní $= 7 \cdot 3 + 2$ dní $= 3$ týdny a 2 dny.

Petr přečetl knihu dříve než Marek, a to o dva dny.

Příklad:

Doplňte znaménka nerovnosti, popř. rovnosti:

a) $15\ dní \square\ 340\ hodin$

b) $63\ měsíců \square\ 5{,}5\ roku$

c) $18\ týdnů \square\ 126\ dní$

d) $300\ dní \square\ 44\ týdnů$

e) $8\ týdnů\ \square\ 1\,330\ hodin$

f) $2\ hodiny\ \ 30\ minut\ \square\ 9\,500\ sekund$

Řešení:

a) $15\ dní > 340\ hodin$

b) $63\ měsíců < 5{,}5\ roku$

c) $18\ týdnů = 126\ dní$

d) $300\ dní < 44\ týdnů$

e) $8\ týdnů > 1\,330\ hodin$

f) $2\ hodiny\ 30\ minut <\ 9\,500\ sekund$

Příklad:

Balón letěl 8 hodin 8 minut a 8 sekund. Kolik sekund chybělo do toho, aby balón letěl 10 hodin?

Řešení:

V tomto případě musíme převést dobu, po kterou balón letěl, na sekundy – 8 hodin 8 minut 8 sekund = $8 \cdot 60 \cdot 60 + 8 \cdot 60 + 8 = 28\,800 + 480 + 8 = 29\,288\ s$. Dále převedeme 10 hodin na sekundy, abychom mohli zjistit rozdíl, tj. $10\ h = 10 \cdot 60 \cdot 60 = 36\,000\ s$. Nakonec vypočteme samotný rozdíl sekund: $36\,000 - 29\,288 = 6\,712$.

Do 10 hodin letu balónu chybělo 6 712 sekund.

Příklad:

Rychlík z Košic vyjel ve 13 hodin 33 minut. Do Prahy dorazil v 16 hodin 17 minut. Jak dlouho trvala cesta rychlíkem z Košic do Prahy?

Řešení:

Počítáme rozdíl $16\ h\ 17\ min - 13\ h\ 33\ min$. Abychom mohli snadno odečíst minutové části hodiny, je výhodné zapsat první čas tak, že převedeme jednu hodinu na minuty a ty poté přičteme k minutové části. Tím získáme v menšenci větší čísla jak u hodin, tak i u minut. Při rovnosti $1\ h = 60\ min$ je tedy $16\ h\ 17\ min = 15\ h\ 77\ min$. Nyní už není těžké odečíst časy od sebe, zvlášť hodinové části a zvlášť minutové části:

$15\ h\ 77\ min - 13\ h\ 33\ min = (15 - 13)\ h + (77 - 33)\ min = 2\ h\ 44\ min.$

Cesta z Košic do Prahy trvala 2 hodiny a 44 minut.

[19,20]

5.1.2 ÚHLY

Při početních operacích s úhly a jejich velikostmi využíváme, stejně jako při převodu mezi jednotkami času (sekundami, minutami a hodinami), šedesátkovou soustavu, neboť platí, že jeden stupeň je rovný šedesáti minutám a jedna minuta je rovna šedesáti vteřinám, tzn. $1° = 60'$, $1' = 60''$.

Příklad:

Převeďte na minuty:

a) $2°$

b) $polovina\ stupn$ě

c) $1{,}5°$

d) $jedna\ čtvrtina\ stupn$ě

e) $2{,}1°$

Řešení:

a) $2° = 2 \cdot 60' = 120'$

b) $polovina\ stupn$ě $= \frac{1}{2} \cdot 60' = 30'$

c) $1{,}5° = 1{,}5 \cdot 60' = 90'$

d) $jedna\ čtvrtina\ stupn$ě $= \frac{1}{4} \cdot 60' = 15'$

e) $2{,}1° = 2{,}1 \cdot 60' = 126'$

Příklad:

Převeďte na stupně a minuty:

a) $73'$

b) $180'$

c) $125'$

d) $100'$

e) $1\,000'$

Řešení:

a) $73' = 60' + 13' = 1 \cdot 60' + 13' = 1°13'$

b) $180' = 3 \cdot 60' = 3°$

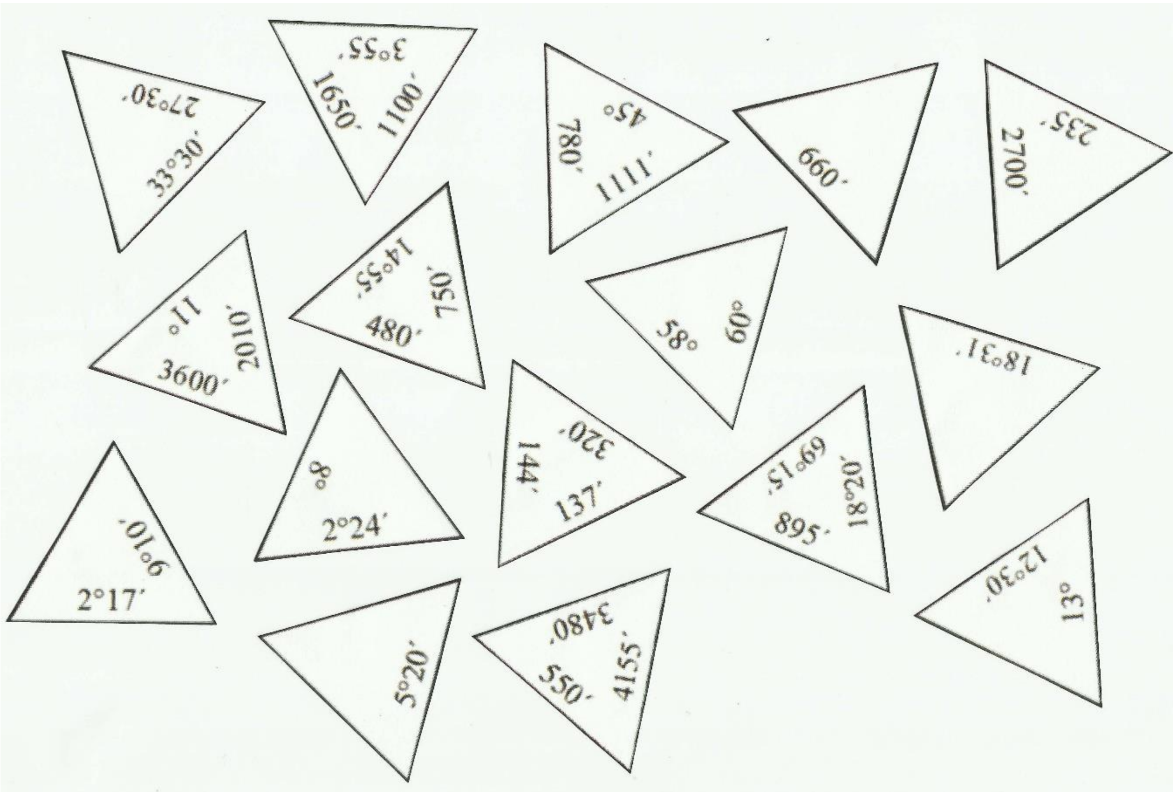
c) $125' = 120' + 5' = 2 \cdot 60' + 5' = 2°5'$

d) $100' = 60' + 40' = 1 \cdot 60' + 40' = 1°40'$

e) $1\,000' = 960' + 40' = 16 \cdot 60' + 40' = 16°40'$

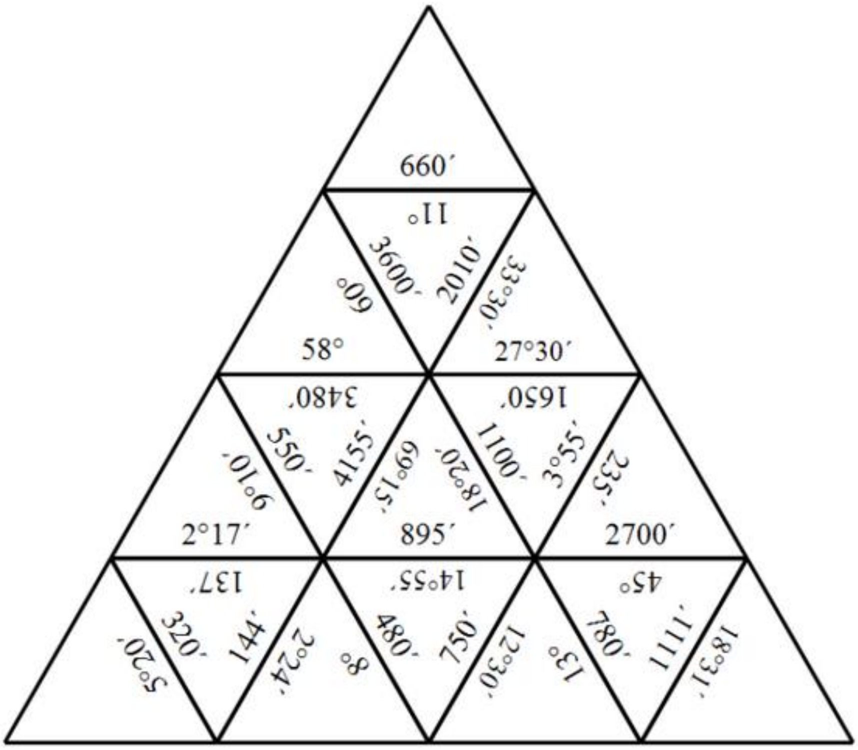
Příklad:

Poskládejte trojúhelníčky do jednoho velkého trojúhelníku k sobě tak, aby vždy dvě přilehlé strany představovaly stejnou velikost úhlu.



Řešení:

Příklad didaktické hry zaměřené na velikosti úhlů ve stupních a minutách. Cílem hry je upevnění a procvičení dané látky. Úkolem žáka je složit rozstříhané trojúhelníčky do tvaru velkého trojúhelníku tak, aby sousední strany vždy představovaly stejnou velikost úhlu. Výsledný trojúhelník pak vypadá následovně:



Příklad:

Vypočítejte:

a) $24°10' + 30°20' =$

b) $47°40' + 2°20' =$

c) $254°40' + 23°58' =$

d) $86°20' - 42°5' =$

e) $50°26' - 17°42' =$

f) $48° - 6°10' =$

Řešení:

a) $24°10' + 30°20' = (24 + 30)° + (10 + 20)' = 54°50'$

b) $47°40' + 2°20' = (47 + 2)° + (40 + 20)' = 49°60' = 50°$

c) $254°40' + 23°58' = (254 + 23)° + (40 + 58)' = 277°81' = 278°21'$

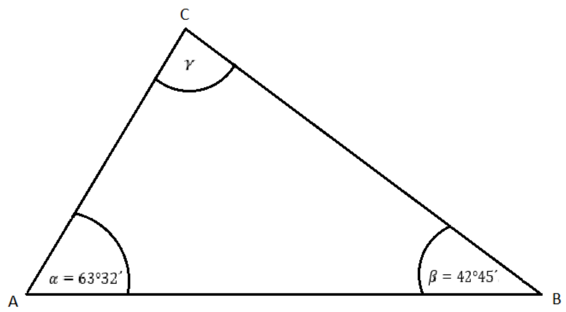
d) $86°20' - 42°5' = (86 - 42)° + (20 - 5)' = 44°15'$

e) $50°26' - 17°42' = 49°86' - 17°42' = (49 - 17)° + (86 - 42)' = 32°44'$

f) $48° - 6°10' = 47°60' - 6°10' = 41°50'$

Příklad:

Trojúhelník ABC má vnitřní úhly α, β, γ. Známe velikosti dvou z nich: $\alpha = 63°32'$, $\beta = 42°45'$. Jaká je velikost úhlu γ?



Řešení:

Při výpočtu musíme znát pravidlo o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku. Ten je roven $180°$. Abychom získali velikost úhlu γ, musíme tedy od 180° odečíst velikost dvou zadaných úhlů.

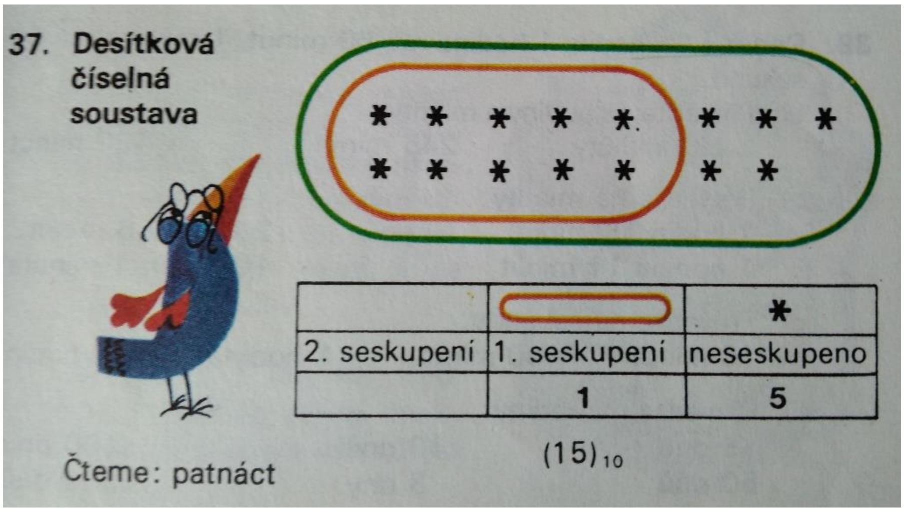
$$180° - (63°32' + 42°45') = 180° - 105°77' = 180° - 106°17' = 179°60' - 106°17' = 73°43'$$

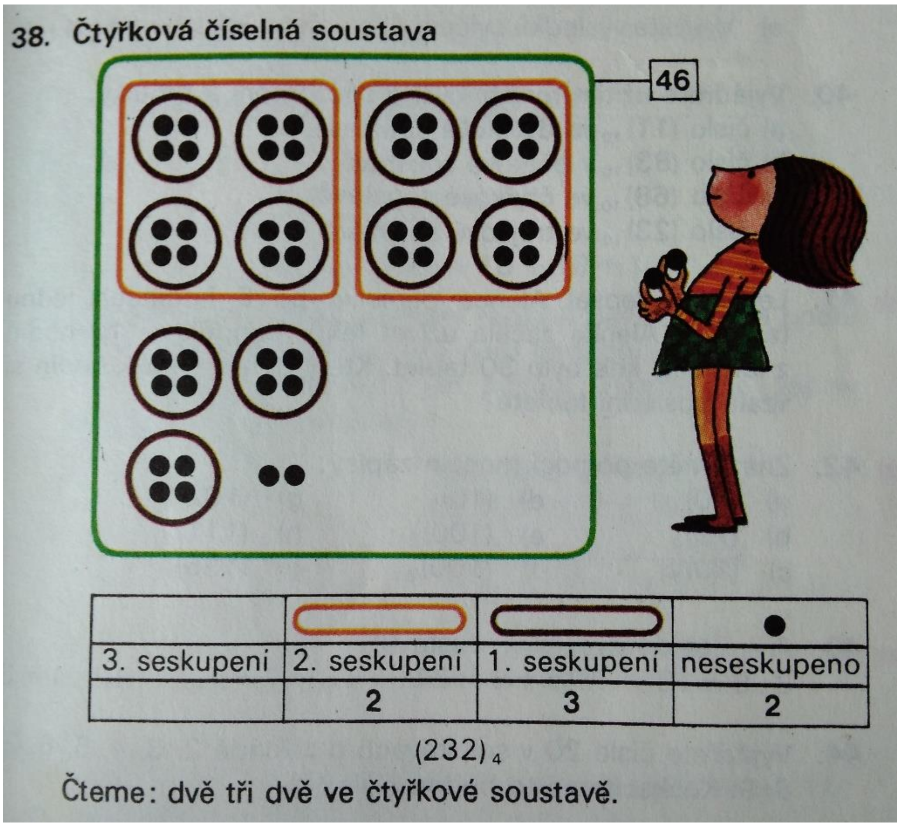
Velikost úhlu γ je rovna 73°43′.

[21,22]

5.2 UKÁZKA ZE STARŠÍ UČEBNICE MATEMATIKY

Následující příklad bychom nalezli v učebnici matematiky pro 4. ročník základní školy z roku 1987. Učebnice obsahuje stručný výklad k číselným soustavám jiným než soustava desítková a podává ho jednoduše formou kroužkování jednotlivých seskupení prvků. Ukázka výkladu:





Obrázek 7: Ukázka z učebnice Matematiky pro 4. ročník

5.2.1 Řešená úloha na převody mezi číselnými soustavami

Příklad:

Vyjádřete pomocí množinového znázornění a tabulky:

a) číslo 9 ve dvojkové soustavě

b) číslo 83 v pětkové soustavě

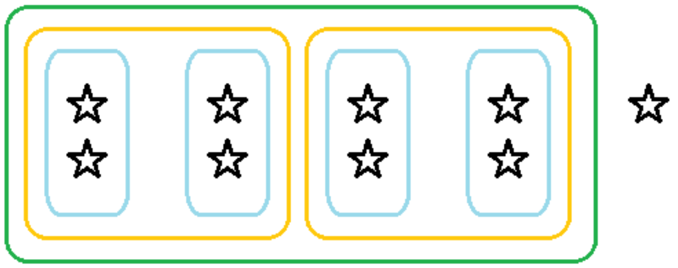
c) číslo 68 ve čtyřkové soustavě

d) číslo 23 ve trojkové soustavě

Řešení:

Žáci si znázorní zadané číslo desítkové soustavy pomocí množiny o daném počtu prvků. Dále kroužkují tolik prvků, kolik se rovná základu číselné soustavy, do které mají převádět. Kolik prvků již nejde zakroužkovat zapíší do tabulky do sloupečku neseskupeno. Dále kroužkují znovu vždy po počtu rovném základu, ale již kroužkují seskupené prvky. Počet zbylých skupinek se opět zapíše, tentokrát do sloupečku 1. seskupení. Poté by se opět kroužkovaly větší skupiny, dokud by to bylo možné, a počet zbylých by se zapsal do následujícího sloupečku.

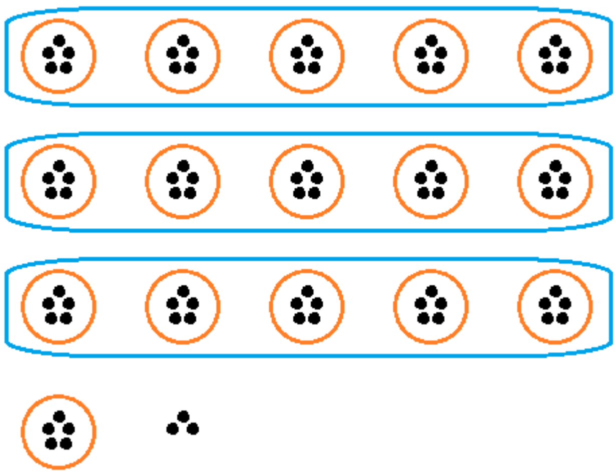
a)



3. seskupení	2. seskupení	1. seskupení	neseskupeno
			★
1	0	0	1

→ $9 = (1001)_2$

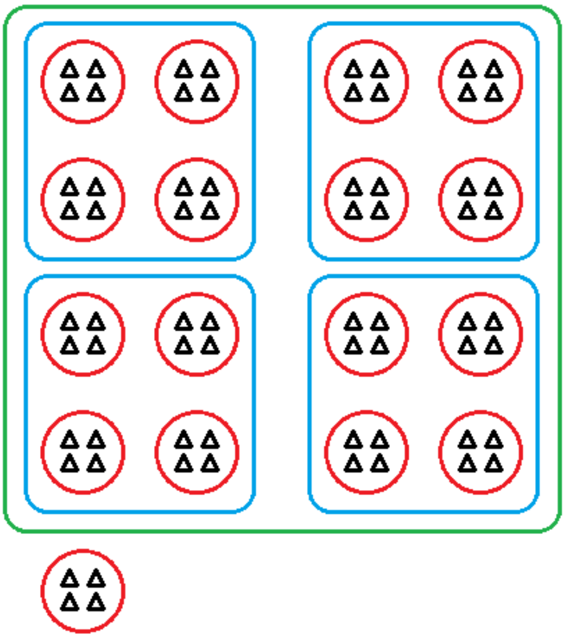
b)



2. seskupení	1. seskupení	neseskupeno
		•
3	1	3

→ $83 = (313)_5$

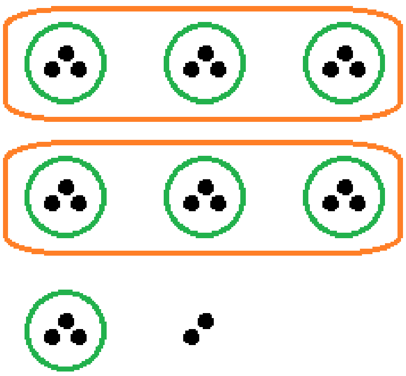
c)



3. seskupení	2. seskupení	1. seskupení	neseskupeno
			Δ
1	0	1	0

→ $68 = (1010)_4$

d)



2. seskupení	1. seskupení	neseskupeno
		•
2	1	2

→ $23 = (212)_3$

[23]

5.3 ŘEŠENÉ INFORMATICKÉ PŘÍKLADY

S klasickými převody mezi jednotlivými číselnými soustavami se žáci běžně nesetkávají. Snad jen v hodinách informatiky a informačních a komunikačních technologií, v rámci teorie o principu funkce počítače, by se měl učitel zmínit určitě o dvojkové číselné soustavě a třeba i o osmičkové a šestnáctkové. Jestli ovšem bude se žáky probírat pouze teoretický základ nebo je naučí i převody, záleží pouze na něm. My se zaměříme pouze na převod mezi desítkovou a dvojkovou soustavou, se kterým žáci obvykle nemívají problém, pokud k němu získají dostatečný a zároveň jednoduchý výklad.

Příklad:

Převeďte následující čísla z desítkové soustavy do soustavy dvojkové pomocí tabulky mocnin:

a) 18

b) 51

c) 214

d) 344

Řešení:

Žáci si vytvoří tabulku, v jejíž záhlaví si vypíší postupně mocniny čísla dvě, coby základu dvojkové soustavy. Dále doplní jednotky pod ty hodnoty, jejichž součtem získají číslo, které převádějí. Mezery mezi jednotkami doplní nulami s tím, že vědí, že na začátku čísla jsou nuly přebytečné.

a) 18

$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
			1	0	0	1	0

→ $18 = (10010)_2$

b) 51

$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
		1	1	0	0	1	1

→ $51 = (110011)_2$

c) 214

$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
1	1	0	1	0	1	1	0

→ $214 = (11010110)_2$

d) 250

$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
1	1	1	1	1	0	1	0

→ $250 = (11111010)_2$

Příklad:

Převeďte zadaná čísla dvojkové soustavy na čísla desítkové soustavy:

a) $(111)_2$

b) $(11011)_2$

c) $(101010)_2$

d) $(111000)_2$

Řešení:

Žáci využívají stejnou tabulku jako při předchozím příkladu. Do tabulky doplní jednotky a nuly podle zadaného dvojkového čísla. Musí si ovšem pamatovat, že tabulka musí být vyplněna od konce, od nejnižší mocniny. Mohou tedy začít vepisovat číslice například pozpátku. Dále už zjišťují hodnotu čísla po převedení do desítkové soustavy tak, že sečtou hodnoty, u nichž se v tabulce vyskytuje jednotka.

a) $(111)_2$

$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
					1	1	1

→ $4 + 2 + 1$ → $(111)_2 = 7$

b) $(11011)_2$

$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
			1	1	0	1	1

→ $16 + 8 + 2 + 1$ → $(11011)_2 = 27$

c) $(101010)_2$

$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
		1	0	1	0	1	0

→ $32 + 8 + 2$ → $(101010)_2 = 42$

d) $(111000)_2$

$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
		1	1	1	0	0	0

→ $32 + 16 + 8$ → $(111000)_2 = 56$

5.4 ŘÍMSKÉ ČÍSLICE

V neposlední řadě bychom neměli zapomenou na římské číslice, které se děti na základní škole učí poznávat už na prvním stupni. Často bývají i samotné třídy označovány římskými číslicemi.

Příklad:

Přečtěte správně věty:

a) Malý Pepíček chodí do III.A, jeho bratr Kája do XIII.C.

b) Zlatá bula Karla IV. byla vydána roku 1356.

c) Na štítu staré chalupy se nachází letopočet MDCCCLXVII.

d) Karlova univerzita byla založena MCCCXLVIII.

e) Sluneční hodiny ukazovaly mezi X a XI.

Řešení:

a) Malý Pepíček chodí do III.A (třetí), jeho bratr Kája do XIII.C (osmé).

b) Zlatá bula Karla IV. (čtvrtého) byla vydána roku 1356.

c) Na štítu staré chalupy se nachází letopočet MDCCCLXVII (1867).

d) Karlova univerzita byla založena roku MCCCXLVIII (1348).

e) Sluneční hodiny ukazovaly mezi X a XI (10 a 11).

ZÁVĚR

Základním cílem této diplomové práce bylo podat ucelený výklad týkající se teorie číselných soustav, převodů čísel mezi jednotlivými soustavami a možností použití matematických operací s čísly jednotlivých soustav. Práce se zabývá hlavně pozičními číselnými soustavami, konkrétně jsou obecné principy vysvětleny na vybraných soustavách – desítkové, dvojkové a šestnáctkové. V ilustrativních příkladech jsou pak používány číselné soustavy o libovolném základu, aby bylo patrné, že principy fungují opravdu ve všech soustavách.

První kapitola se zabývala obecnou teorií číselných soustav, byly v ní vysvětleny základní pojmy a zákonitosti týkající se číselných soustav. Podstatnou část tvořila historie číselných soustav. Zde jsme se dočetli o tom, proč bylo důležité nalézt vhodný způsob zaznamenávání čísel a vytvořit základy pro vznik různých číselných soustav. Uvedeny byly například mayská dvacítková soustava, egyptské hieroglyfy používané k zápisu čísel, původ arabských číslic a římských číslic.

V druhé kapitole jsme se seznámili s číselnými soustavami o základu $z = 10$ i jiném a se způsoby vyjádření čísel v jednotlivých soustavách. Dozvěděli jsme se, že teoreticky existuje nekonečné množství číselných soustav o libovolném přirozeném základu. Z hlediska využitelnosti soustav byla podrobněji rozvedena soustava desítková, dvojková a šestnáctková.

V kapitole zabývající se převody čísel mezi jednotlivými číselnými soustavami jsme si jako první ukázali, jak fungují převody mezi desítkovou a nedesítkovou soustavou. Pro převody z desítkové soustavy do jiné jsme poznali dvě jednoduché metody – metodu využívající hodnoty mocnin základu soustavy, do které převádíme, a metodu postupného dělení. Pro převod do desítkové soustavy jsme si předvedli způsob, kdy se číslo přepíše do rozvinutého zápisu. U převodů mezi dvěma nedesítkovými soustavami jsme se seznámili s pojmem příbuzné soustavy.

Čtvrtá kapitola obsahovala výklad početních operací v jednotlivých číselných soustavách. Každá početní operace, jako je sčítání, odčítání, násobení a dělení, byla napřed ukázána s pomocí matematického počítadla a kardinálního modelu. Dále byl nastíněn princip operace pomocí rozvinutých zápisů. Dozvěděli jsme se, proč je výhodné znát tabulku vztahů pro danou operaci v dané číselné soustavě.

V poslední kapitole jsme se zabývali příklady praktického využití teorie číselných soustav ve školské matematice. Zjistili jsme, že téma „Číselné soustavy“ sice není uvezeno v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání, ale žáci se s číselnými soustavami setkávají při běžné práci, aniž by si to kolikrát uvědomovali. V kapitole byly uvedeny typické příklady, při jejichž řešení je využíváno zákonitostí z teorie číselných soustav. Příklady se týkají času, úhlů, klasických převodů mezi desítkovou a dvojkovou soustavou využívaných v oblasti informatiky a římských číslic. Jako zajímavost, byla doplněna ukázka výkladu a řešený příklad ze starší učebnice matematiky.

RESUMÉ

This thesis titled “Numeral systems, their conversions and arithmetic operations” deals with the general theory of number system, their history, principles of registrations and transfers of the numbers in the selected number systems. The work is divided into five chapters. The text is supplemented by a number of illustrative examples. The beginning of the work is the general introduction into the theory of the number systems and their history. The brief list of number systems and the way of the expressing numbers in a writing system is in the second chapter. The principles of transfers between the numeral systems are explained in the next chapter. The following chapter explains the mathematical operations in different number systems – addition, subtraction, multiplication and division. The practical using in school mathematics is discussed in the last chapter. There are given calculated examples in various fields.

SEZNAM LITERATURY

[1]: Číselné soustavy. In: *Mendelova univerzita v Brně* [online]. Brno [cit. 2016-09-25]. Dostupné z: https://is.mendelu.cz/eknihovna/opory/zobraz_cast.pl?cast=7779

[2]: MARTÍNKOVÁ, Simona. Číselné soustavy. In: *Masarykovo gymnázium Plzeň* [online]. Plzeň: Martínková, c2015 [cit. 2016-09-25]. Dostupné z: http://www.mgplzen.cz/download/ivt/ivt_ciselne.pdf

[3]: Poziční číselná soustava. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2015 [cit. 2016-09-25]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pozi%C4%8Dn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADseln%C3%A1_soustava

[4]: Nepoziční číselná soustava. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2014 [cit. 2016-09-25]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Nepozi%C4%8Dn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADseln%C3%A1_soustava

[5]: DÄNIKEN, Erich von. *Jedenáctý srpen 3114 př. Kr. den, kdy přišli bohové*. Praha: Knižní klub, spol. s. r. o., 1994. ISBN 80-7176-068-4.

[6]: Obrázek převzat z: Mayská dvacítková soustava. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2016 [cit. 2016-09-25]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Maysk%C3%A1_dvac%C3%ADtkov%C3%A1_soustava

[7]: Historie číselných soustav. In: *Gymnázium Jakuba škody* [online]. Přerov [cit. 2016-09-25]. Dostupné z: https://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0ahUKEwix9sf_gKHOAhVFiRoKHZHDCacQFggdMAA&url=http%3A%2F%2Fwww.eprojekt.gjs.cz%2FServices%2FDownloader.ashx%3Fid%3D17025&usg=AFQjCNHoi18MjNJ42w7oPz_76rTimeakSA

[8]: WILLERS, Michael. *Algebra bez (m)učení: Od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě.* Praha: Grada Publishing a. s., 2012. 176 stran. ISBN 978-80-247-4123-9.

[9]: Sumerština. In: *Starověká písma a jazyky* [online]. Seven, 2007 [cit. 2016-09-26]. Dostupné z: http://www.lingvistika.mysteria.cz/cuneiform_sumer.htm

[10]: MATUŠINSKÝ, Pavel. Původ čísel 60 a 360. In: *Mýty a skutečnost* [online]. Matušinský, 2007 [cit. 2016-09-26]. Dostupné z: http://myty.info/rservice.php?akce=tisk&cisloclanku=2007100001

[11]: REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. Čínská matematika. In: *Encyklopedie fyziky* [online]. Praha: Reichl, c2006-2016 [cit. 2016-09-25]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/print/1477-cinska-matematika

[12]: Poziční číselné soustavy. In: *Matematika pro všechny* [online]. České Budějovice: Fuchs [cit. 2016-09-26]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~math4all/doc/u/H_2_4_Pozicni_ciselne_soustavy.pdf

[13]: Starověká Indie. In: *Aritmetika včera a dnes* [online]. Praha: Balková [cit. 2016-09-26]. Dostupné z: http://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc/Kultury/indie.html

[14]: Arabský svět. In: *Aritmetika včera a dnes* [online]. Praha: Balková [cit. 2016-09-26]. Dostupné z: http://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc/Kultury/arab.html

[15]: BACHURA, Pavel. Číslicová technika - číselné soustavy a kódy: Převody mezi příbuznými soustavami. In: *Pavel Bachura - osobní stránky* [online]. Ostrava, 2012 [cit. 2017-03-03]. Dostupné z: http://bachura.wz.cz/download/ciselne_soustavy.pdf

[16]: DAVIDOVÁ, Radka. *Nedesítkové číselné soustavy v učivu 1. stupně ZŠ*. Plzeň, 2003. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky. Vedoucí práce Doc. PaedDr. Jana Coufalová CSc.

[17]: BĚLÍK, Miroslav. *Poziční číselné soustavy*. Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně, 1999. ISBN 80-7044-260-3.

[18]: ŠÁMAL, Robert. Ordinály, kardinály - taková zvláštní čísla: Kardinální čísla. In: *Matematicko-fyzickální fakulta UK: Matematický korespondenční seminář* [online]. Praha [cit. 2017-03-15]. Dostupné z: https://mks.mff.cuni.cz/library/OrdinalyKardinalyRS/OrdinalyKardinalyRS.pdf

[19]: KRUPKA, Peter. *Sbírka úloh z matematiky 1. díl*. 3., přepracované vydání. Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-188-4.

[20]: Slovní úlohy na převody jednotek času. *Příklady.com - Sbírka úloh: Slovní úlohy na převody jednotek* [online]. c2012-2017 [cit. 2017-03-28]. Dostupné z: http://www.priklady.com/cs/index.php/prevody-jednotek/slovni-ulohy-na-prevody-jednotek

[21]: ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-416-2.

[22]: VAŇOUSOVÁ, Veronika. Velikost úhlu ve stupních a minutách. In: *Investice do rozvoje vzdělávání* [online]. Základní škola a mateřská škola Libchavy, 2014 [cit. 2017-03-28]. Dostupné z: https://view.officeapps.live.com/op/view.aspx?src=http://dumy.cz/nahled/137368

[23]: MELICHAR, Jan, Ludovít BÁLINT, Miroslav BĚLÍK, Miroslav ČERVINKA a Marie JANKŮ. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987.

[24]: Římská čísla: Pravidla tvorby římských čísel. *ConVERTER: Převody jednotek, fyzikální tabulky, životopisy fyziků a Nobelova cena* [online]. c2002 [cit. 2017-03-29]. Dostupné z: http://www.converter.cz/prevody/rimska-cisla.htm

[25]: Římské číslice. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2017 [cit. 2017-04-03]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%98%C3%ADmsk%C3%A9_%C4%8D%C3%ADslice