ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ZLOMKY V UČIVU MATEMATIKY 1. STUPNĚ ZŠ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jitka Vlková

Učitelství pro základní školy, obor Učitelství pro 1. stupeň základní školy

Vedoucí práce: Mgr. Regina Hrabětová, Ph.D.

Plzeň, 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni dne

Tímto bych ráda poděkovala vedoucí práce Mgr. Regině Hrabětové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, věcné připomínky a čas, který mi věnovala. Dále děkuji učitelům ZŠ Chodov, ZŠ Skalná, ZŠ Toužim a ZŠ Žlutice za umožnění výzkumu potřebného při vypracování této diplomové práce.

Obsah

Úvod

Téma své diplomové práce, zlomky v učivu matematiky 1. stupně základní školy, jsem si vybrala hned z několika důvodů. Především však proto, že znalost zlomků je pro žáka neodmyslitelná v jakémkoli stupni vzdělání a bez pochopení a osvojení tohoto učiva, které probíhá právě na 1. stupni, může být jeho následná aplikace náročná. Správně pochopit zlomky znamená proniknout do celé problematiky reálných čísel, rozumět početním operacím se zlomky, ovládat úpravy algebraických výrazů, dokázat řešit rovnice, nerovnice a v neposlední řadě třeba i funkce.

Cílem mé diplomové práce je představit nejen celou problematika učiva o zlomcích na 1. stupni základní školy, ale také různé přístupy k výuce zlomků, především pak metodu prof. RNDr. Milana Hejného, CSc., a porovnat úroveň znalostí a dovedností žáků v této oblasti pomocí didaktického testu zadaného v pátém ročníku různých základních škol. Nechci rozhodovat, který z přístupů je lepší, chci jen poukázat na možnost výběru mezi těmito přístupy s ohledem především na žáka, jeho možnosti a potřeby.

Práce je rozdělena na čtyři kapitoly. První kapitola je zaměřena na historii racionálních čísel a vývoj pojmu zlomek. Dále je tato kapitola věnována definici racionálních čísel, vymezení a zavedení této množiny a nezbytné shrnutí poznatků o zlomcích na 1. stupni základní školy. V druhé kapitole si kladu za úkol vymezit postavení předmětu Matematika a její aplikace v Rámcově vzdělávacím programu. V této části jsou také popsány klíčové kompetence, které by měla vzdělávací oblast Matematika a její aplikace rozvíjet a cíle, kterých by měla v oblasti učiva o zlomcích dosáhnout. Ve třetí kapitole je uvedena charakteristika žáka 4. ročníku ZŠ se zaměřením na jeho myšlení. Čtvrtá kapitola je věnována různým přístupům k výuce zlomků v učivu matematiky, především však metodě pana prof. Hejného. Porovnání úrovně znalostí a dovedností žáků je shrnuto v poslední kapitole.

Nebude-li uvedeno jinak, definice a věty jsou převzaty ze zdrojů, které jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

1 RACIONÁLNÍ ČÍSLA

Diplomová práce je zaměřena na učivo o zlomcích. Zlomky však patří do množiny racionálních čísel, a proto se v některých kapitolách budu zabývat množinou racionálních čísel jako celkem.

1.1 HISTORIE RACIONÁLNÍCH ČÍSEL

Matematika prošla od historie k současnosti dlouhým vývojem a můžeme směle tvrdit, že je stará jako lidstvo samo. Vždyť již od počátku věků, kdy se člověk začal odlišovat od ostatních živých tvorů tím, že myslel a dorozumíval se, potřeboval k vyjádření používat pojmy označující nejen počty, ale například i tvary. Matematika se tak postupem času stala disciplínou, která poskytuje nejen sobě, ale i ostatním disciplínám způsoby, jak řešit úlohy nejen vědecké, ale i z běžného života. Ten také stál za rozvojem matematiky a následně i zlomků.

Od 6. tisíciletí př. n. l. docházelo v podnebně příznivých oblastech k postupnému rozvoji tamních říší. Patří sem starý Egypt, státní útvary na území zvaném kdysi Mezopotámie a v povodí velkých řek v Indii a Číně.[1] Rozvíjela se zde nejen řemesla a obchod, ale také zemědělství. Právě z důvodu nutnosti vyměřování polí vznikly kolem roku 1000 př. n. l. v Egyptě zlomky. Zlomek se proto vyjadřoval jako část jednotky plochy „setata“[2]. Užívaly se především tzv. kmenné zlomky čili zlomky mající v čitateli číslici jedna ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$) obecně vyjádřené tvarem $\frac{1}{n}$. Výjimkou byl zlomek $\frac{2}{3}$, pro který existoval zvláštní symbol. Všechny zlomky se tedy daly zapsat s použitím kmenných zlomků a zlomku $\frac{2}{3}$. Základem pro dělení bylo půlení. Egypťané tedy potřebovali vyjádřit zlomek $\frac{2}{n}$ pomocí kmenných zlomků. Pokud byl jmenovatel sudý, bylo to snadné – čitatele i jmenovatele rozpůlili (v současné matematice bychom krátili dvěma), avšak byl-li jmenovatel lichý, používali tabulky, které byly vytvořeny podle vzorce $\frac{2}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)}$. Jak Egypťané k tomuto vzorci dospěli, není známo. Pro zjednodušení se používaly tabulky nalezené v Londýnském (Rhindově) papyru, datovaného do 19. století před naším

[1] POTŮČEK, J. *Historie matematiky pro učitele,* s. 6
[2] Tamtéž, s. 14.

letopočtem. Pro názornost je přiložena část tabulky přepsaná s použitím arabských číslic. Tabulka byla sestavena pro *n=5* až *n=331*[3].

2/3 = 1/2 + 1/6	2/5 = 1/3 + 1/15	2/7 = 1/4 + 1/28
2/9 = 1/6 + 1/18	2/11 = 1/6 + 1/66	2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104
2/15 = 1/10 + 1/30	2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68	2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114
2/21= 1/14 + 1/42	2/23 = 1/12 + 1/276	2/25 = 1/15 + 1/75
2/27 = 1/18 + 1/54	2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232	2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155
2/33 = 1/22 + 1/66	2/35 = 1/30 + 1/42	2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296
2/39 = 1/26 + 1/78	2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328	2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301
2/45 = 1/30 + 1/90	2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470	2/49 = 1/28 + 1/196
2/51 = 1/34 + 1/102	2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795	2/55 = 1/30 + 1/330
2/57 = 1/38 + 1/114	2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531	2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
2/63 = 1/42 + 1/126	2/65 = 1/39 + 1/195	2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536
2/69 = 1/46 + 1/138	2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710	2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
2/75 = 1/50 + 1/150	2/77 = 1/44 + 1/308	2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
2/81 = 1/54 + 1/162	2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498	2/85 = 1/51 + 1/255
2/87 = 1/58 + 1/174	2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890	2/91 = 1/70 + 1/130
2/93 = 1/62 + 1/186	2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570	2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776
2/99 = 1/66 + 1/198	2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606	

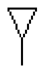
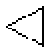
Obrázek 1 Část tabulky zlomků z Rhindova papyru

Převzato z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Matematika_starov%C4%9Bk%C3%A9ho_Egypta, 25.10.2016

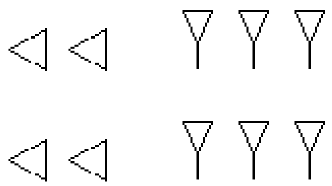
„Nejčastější úlohy, které museli Egypťané řešit, byly úlohy typu: Rozděl m chlebů mezi n lidí. Dnešní školák takovou úlohu vyřeší okamžitě. Řekne, že na každého připadne $\frac{m}{n}$ chleba. Když například mám rozdělit 5 chlebů mezi 21 lidí, každému dám $\frac{5}{21}$ chleba. Pro egyptské písaře takové řešení neexistovalo, protože oni nevěděli, co to $\frac{5}{21}$ je. Pracovali pouze s kmennými zlomky a dělení chápali jako proces, nikoli koncept. Podle egyptského písaře každý podílník dostal $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$ chleba. V historické literatuře najdeme osvětlení takového postupu přepsaného do soudobé symboliky: Číslo 5 (čitatel) rozložím na 1+2+2. V tabulkách vyhledám, jak lze 2 chleby rozdělit mezi 21 lidí. Najdu vztah $\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$. Podle toho by každý podílník měl z prvního chleba dostat $\frac{1}{21}$, z další dvojice chlebů $\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$ a totéž z poslední dvojice chlebů. Ale $\frac{1}{14}+\frac{1}{14}=\frac{1}{7}$ a $\frac{1}{42}+\frac{1}{42}=\frac{1}{21}$. Tedy každý podílník měl

[3] POTŮČEK, J. *Historie matematiky pro učitele, s.* 15

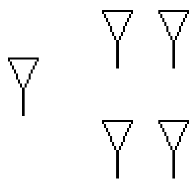
dostat $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}$. *Ale* $\frac{1}{21}+\frac{1}{21}$ *je podle tabulek totéž jako* $\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$. *Tedy* $\frac{5}{21}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$.“ [4] Tento systém počítání se zlomky byl velmi náročný, což neumožnilo jeho další rozvoj. Egyptská matematika zde ustrnula na více jak tisíc let.

Ze stejných důvodů jako v Egyptě, docházelo k rozvoji matematiky i v Mezopotámii. Zde se nepsalo hieroglyfy na papyry, ale používal se hliněné tabulky, do kterých se rylo klínové písmo. Rytí pomocí stébla či klínu do hliněné tabulky nebylo ale tak snadné jako psaní na papyrus. Existoval tedy jen omezený počet vhodných znaků, což zřejmě vedlo k objevení poziční číselné soustavy. Matematika v Mezopotámii se tak mohla daleko více rozvíjet. Zatímco Egypťané označovali každou vyšší jednotku novým symbolem, Sumerové užívali (třetí urská dynastie vládnoucí kolem roku 2100 př. n. l.) jednoho symbolu, jehož hodnotu udávalo jeho místo.[5] Čísla od 1 do 59 se zapisovala nepozičně, tedy stejně jako v Egyptě. Pro číslo 60 byl stejný znak jako pro číslo 1, tj. malý svislý klín . Velký vodorovný klín  používali pro číslo 10. [6]

Číslo 46 tedy zapíšeme:



Číslo 64 zapíšeme:



Tento poziční systém poskytuje nesmírné výhody pro počítání, o čemž se můžeme snadno přesvědčit, když provedeme jednak násobení v našem dekadickém systému, jednak v zápise s římskými číslicemi. Poziční systém odstraňuje též mnoho obtíží počítání se zlomky.[7]

[4] HEJNÝ, M., Novotná J., Stehlíková, N.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky,* s. 347
[5] STRUIK, D. J. *Dějiny matematiky*, s. 23
[6] POTŮČEK, J. *Historie matematiky pro učitele,* s. 18
[7] STRUIK, D. J. *Dějiny matematiky*, s. 23

V Mezopotámii se používala šedesátková číselná soustava. To se zachovalo i při počítání se zlomky, které bylo založeno na šedesátinném dělení. Tento způsob počítání se zlomky se používal až do konce středověku a předcházel počítání s desetinnými zlomky.[8]

Nejen díky poziční číselné soustavě, ale i z jiných dochovaných památek můžeme konstatovat, že znalost matematiky byla v Mezopotámii, pozdější Babylonské říši, vyšší než v Egyptě.

Kmenové zlomky používali Egypťané tisíce let, na rozdíl od matematiků v antickém Řecku. Ti totiž objevili, že k vyjádření délek některých úseček zlomky nestačí. Zlomky, tak jak je známe dnes, se do Evropy dostávají asi ve 13. století našeho letopočtu díky arabským matematikům, avšak jejich všeobecné používání se datuje až v 16. století.[9]

1.2 DEFINICE RACIONÁLNÍCH ČÍSEL

Název pro racionální čísla pochází z latinského slova ratio – poměr, rozum, důvod. Množinu všech racionálních čísel značíme Q z anglického quotient (kvocient), což vyjadřuje výsledek pro dělení neboli podíl.

Jednotná definice pro pojem racionální číslo neexistuje. Jednotlivé publikace uvádějí různé modifikace definice racionálního čísla. V následujícím výčtu jsou uvedeny některé z nich.

„Množina čísel racionálních Q se skládá ze všech čísel tvaru $\frac{m}{n}$, kde $m, n \in Z$ a $n \neq 0$." [10]

„Každé číslo vyjádřené zlomkem se nazývá racionální." [11]

„Racionální čísla jsou čísla, která můžeme zapsat ve tvaru zlomku, jehož čitatel i jmenovatel jsou celá čísla (a jmenovatel je různý od nuly)."[12]

„Názvem racionální číslo označujeme množinu všech navzájem ekvivalentních zlomků, tj. zlomků, které se sobě rovnají. Zlomkem rozumíme uspořádanou dvojici čísel a, b ≠ 0, kterou zapisujeme ve tvaru $\frac{a}{b}$."[13]

---

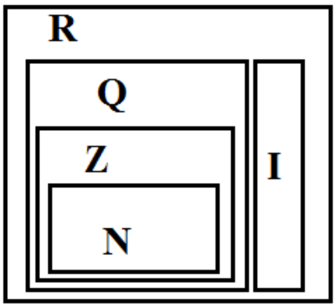
[8] BALADA, F., *Z dějin elementární matematiky*, s. 63
[9] HERMAN, J., kolektiv. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií – Racionální čísla. Procenta, s.* 9.
[10] DELVENTHAL, K. M., KISSNER A., KULICK M., *Kompendium matematiky: vzorce a pravidla, četné příklady včetně řešení: od základních operací po vyšší matematiku*, s. 34
[11] HERMAN, J., kolektiv. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií – Racionální čísla. Procenta, s.* 9
[12] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J., *Matematika pro 7. ročník základní školy 1, s.* 65

Pro žáky 1. stupně základní školy by byla asi nejpřijatelnější definice druhá Hermana a kol., i když především na 2. stupni základní školy se nejčastěji setkáme s definicí číslo tři podle Odvárka a Kadlečka. Je srozumitelná a obsahuje i nadále zásadní informaci, a to že jmenovatel se nikdy nesmí rovnat nule, neboť dělit nulou nemá smysl.

1.3 OBOR RACIONÁLNÍCH ČÍSEL

Důležitým pojmem v následujícím textu bude číselný obor. Číselným oborem tedy rozumíme číselnou množinu, na které jsou definovány bez omezení početní operace sčítání a násobení, to je číselný obor vzhledem k těmto operacím uzavřený.[14]

Pro názornost přikládám Vennův diagram znázorňující množiny číselných oborů.



Obrázek 2 Číselné obory znázorněné Vennovým diagramem

N – obor přirozených čísel (1, 2, 3……)

Pro žáky 1. stupně definujeme tento obor jako množinu čísel, jejichž obrazy jsou na číselné ose vpravo od nuly.

Z (C) – obor celých čísel (-221, -3, 0, 5)

V současnosti se používá pro označení této množiny písmeno Z. V mé práci se ale budu používat písmeno C, jelikož je užíváno v odborné literatuře, ze které jsem čerpala.

Tento obor definujeme jako množinu zahrnující přirozená čísla, čísla k nim opačná a nulu. Opačné číslo – a k číslu a je takové číslo, pro něž platí $a + (-a) = 0$. Opačné číslo

[13] DIVÍŠEK, Jiří. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ,* s. 66
[14] *Webová aplikace pro výuku základních poznatků z matematiky na střední škole: Číselné obory* [online]. [cit. 2017-02-28]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vladimira_pavlicova_bp/Ciselne_obory.php

ke kladnému číslu je číslo záporné, opačné číslo k zápornému číslu je číslo kladné. Opačné číslo k číslu nula je číslo nula.

Q – obor racionálních čísel (-6, -2,3, 0, $\frac{1}{2}$)

Tento obor nejčastěji definujeme jako množinu všech čísel, která můžeme zapsat ve tvaru zlomku, přičemž jmenovatel se nesmí rovnat nule. Nesmíme však opomenout desetinná čísla, která do této množiny také patří, neboť desetinná čísla, která mají ukončený desetinný rozvoj, mohu napsat ve tvaru zlomku. Této problematice se budu podrobněji věnovat v jedné z následujících kapitol.

I – obor iracionálních čísel (π, $\sqrt{2}$)

Jsou to čísla, která patří do množiny reálných čísel, ale nejsou racionální. Nemohu je tedy napsat ve tvaru zlomku.

R – obor reálných čísel

Tento obor je tvořen množinou obsahující všechna racionální i iracionální čísla.

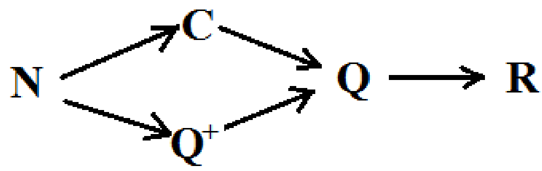
1.4 VYTVOŘENÍ MNOŽINY RACIONÁLNÍCH ČÍSEL

Nabízejí se dvě způsoby zavedení racionálních čísel.

První způsob je logický. Množina přirozených čísel neumožňovala řešit veškeré matematické problémy. Nutností a přelomem bylo tedy zavedení množiny celých čísel. Avšak ani to nestačilo k matematizaci reálných situací. Problémem se ukázalo dělení celku na části. Množina celých čísel se tedy postupně rozšiřovala o čísla, která dnes nazýváme racionální.

Druhý způsob pramení z historie. Po přirozených číslech následovalo zavedení množiny kladných racionálních čísel Q^+ , a teprve potom množiny čísel celých (k nim opačných).

Postup rozšiřování množiny přirozených čísel můžeme znázornit následujícím schématem.



Obrázek 3 Grafické znázornění zavedení množiny racionálních čísel

Převzato z: DRÁBEK, J., VIKTORA V., Základy elementární aritmetiky: pro učitelství 1. stupně ZŠ

Dodnes se odborníci přou, která z těchto dvou cest je vhodnější. Můžeme říci, že v současné době má cesta N→C→Q→R více zastánců než dříve, avšak v učebnicích je častěji volen postup N→Q^+→Q→R. [15]

Já osobně preferuji po přirozených číslech zavést čísla kladná racionální, protože s dělením na části se žák setkává od útlého věku. Nebývá tedy pro něj náročné tuto problematiku pochopit, zvláště budeme-li vycházet z jeho zkušeností. Po té se mi jeví vhodné zavést čísla celá, aby si žák důkladně osvojil početní operace v této množině. Nakonec obě množiny spojit v čísla racionální, což vyžaduje nejen znalosti problematiky početních operací s celými čísly, ale právě i znalost zlomků a desetinných čísel a vztahů mezi nimi.

1.5 VYJÁDŘENÍ RACIONÁLNÍHO ČÍSLA

Racionální číslo lze vyjádřit:

- Zlomkem
- Desetinným číslem
    - Neperiodickým
    - Periodickým číslem
        - Ryze periodickým
        - Neryze periodickým

[15] DRÁBEK, J., VIKTORA V., *Základy elementární aritmetiky: pro učitelství 1. stupně ZŠ*, s. 208

1.5.1 ZLOMKY

Definice:

Uspořádaná dvojice [a,b] všech celých čísel, kde první složka je libovolné celé číslo a druhá složka je libovolné nenulové celé číslo. Uspořádanou dvojici zapisujeme $\frac{a}{b}$ *a nazýváme ji zlomkem.*[16]

a ⟵ **čitatel** - určuje počet částí celku

——— ⟵ **zlomková čára** - zastupuje operaci dělení

b ⟵ **jmenovatel** - pojmenovává zlomek

- určuje na kolik dílů je celek rozdělen

- musí být různý od nuly

Při zapisování zlomků napíšeme nejdříve zlomkovou čáru, potom čitatele a jmenovatele. Zapisujeme-li početní výkony se zlomky, píšeme zlomkové čáry ve stejné úrovni jako početní znaménka.[17]

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$$

Zlomek čteme tak, že vyslovíme, kolik částí vyjádřených jmenovatelem zlomek obsahuje. Například $\frac{2}{5}$ (dvě pětiny). Pokud je toto vyslovování náročné, použijeme slovo „lomeno“. Například $\frac{9}{103}$ (9 lomeno sto třemi).[18] Zlomky tudíž pojmenováváme podle jmenovatele, tedy na kolik částí je celek rozdělen. Např. čtyři – čtvrtina, pět – pětina, padesát – padesátina atd. Pouze jeden zlomek tvoří výjimku. A to $\frac{1}{2}$ – polovina, která není pojmenována podle svého jmenovatele (dva – dvojina). *“Zlomek jedna polovina má název*

---

[16] DRÁBEK, J., VIKTORA V., *Základy elementární aritmetiky: pro učitelství 1. stupně ZŠ,* s. 211
[17] KINDL, K. *Matematika. Přehled učiva základní školy.,* s. 42
[18] Tamtéž, s. 42

od dělení – rozlamování celku na dvě části, což člověk dělal daleko dříve, než poznal zlomky."[19]

Přehled základních pojmů:

- **Opačný zlomek**

Ke zlomku $\frac{a}{b}$ je opačný zlomek $-\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

- **Převrácený zlomek**

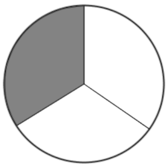
Ke zlomku $\frac{a}{b}$ je převrácený zlomek $\frac{b}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

- **Zlomek pravý**

Čitatel je menší než jmenovatel (týká se kladného čitatele i jmenovatele, pokud je jedno nebo obě z těchto čísel záporné, porovnáváme namísto něj příslušné číslo opačné, tj. kladné). Pravý zlomek je tudíž větší než -1 a menší než 1.[20]

$$\forall\ a, b \in C, b \neq 0: \frac{a}{b}, a < b$$

Příklad: $\frac{1}{3}$

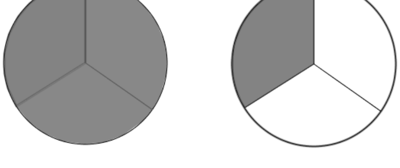


- **Zlomek nepravý**

Čitatel je větší nebo roven jmenovateli. Nepravý zlomek je tedy větší nebo roven 1 nebo menší nebo roven -1.[21]

$$\forall\ a, b \in C, b \neq 0: \frac{a}{b}, a \geq b$$

Příklad: $\frac{4}{3}$



[19] BLAŽKOVÁ, *R. Co, proč a jak ve školské matematice II* s. 397
[20] DELVENTHAL, K. M., KISSNER A., KULICK M., *Kompendium matematiky: vzorce a pravidla, četné příklady včetně řešení: od základních operací po vyšší matematiku*, s. 62
[21] Tamtéž, s. 62

- **Číslo 1 ve zlomku**

Pokud se čitatel rovná jmenovateli, celý zlomek je roven 1.

$$\frac{5}{5} = 1, \frac{21}{21} = 1$$

Pokud se jmenovatel zlomku rovná 1, rovná se celý zlomek čitateli.

$$\frac{4}{1} = 4, \frac{17}{1} = 17$$

- **Smíšené číslo**

Je to číslo složené z celého čísla a zlomku menšího než jedna.

Například: $3\frac{1}{4}$, čteme „tři a jedna čtvrtina“

Číslo smíšené se dá převést na zlomek nepravý a naopak.

$$\frac{\check{c}itatel}{jmenovatel} = cel\acute{e}\ \check{c}\acute{i}slo\ a\ zbytek$$

1) Převod smíšeného čísla zlomek

Smíšené číslo je celek a jeho část. Spojka *a* v matematice představuje početní operaci sčítání. Je tedy potřeba k celému číslu přičíst zlomek.

Převod $4\frac{2}{3}$: $4 + \frac{2}{3} = \frac{4\,.3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4\,.3+2}{3} = \frac{14}{3}$

Celé číslo 4 jsme rozšířili číslem 3, abychom měli stejné jmenovatele a mohli tak zlomky sečíst.

Pro žáky můžeme po důkladném vysvětlení celý příklad zjednodušit následujícím schématem:

$$4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

2) Převod zlomku na smíšené číslo

Zlomek převedeme na smíšené číslo pomocí dělení, neboť zlomková čára tuto operaci nahrazuje.

Převod $\frac{8}{4}$: 8 : 4 = 2 a zbytek 0, proto $\frac{8}{4} = 2$

Je-li zbytek roven nule, je převod u konce, výsledkem je celé číslo.

Je-li zbytek různý od nuly, pak výsledek – celé číslo a zbytek – převedeme na tvar: $celé\ číslo\ \frac{zbytek}{jmenovatel}$, tj. číslo smíšené.

Převod $\frac{5}{4}$: 5 : 4 = 1 a zbytek 1.

Výsledek převedeme na tvar $1\frac{1}{4}$.[22]

- **Zlomek v základním tvaru**

Zlomek je v základním tvaru, pokud jeho čitatel a jmenovatel jsou čísla nesoudělná. Abychom mohli jakýkoli zlomek vyjádřit v základním tvaru, musíme jej krátit. Krácení a rozšiřování zlomku je pro úpravy zlomků zásadní.

Krácení a rozšiřování zlomků umožňuje znalost o rovnosti zlomků. Zlomek je vyjádřen různými zápisy, ale jeho hodnota zůstává nezměněna.

Rovnost zlomků je definována takto:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a\,.\,d = b\,.\,c$$

Krátit zlomek znamená dělit čitatele i jmenovatele stejným nenulovým číslem – společným dělitelem. Pokud je největší společný dělitel roven 1, pak jsou čitatel i jmenovatel čísla nesoudělná.

$$\forall a, b, c \in C, b \neq 0, c \neq 0: \frac{a:c}{b:c}$$

Rozšířit zlomek znamená vynásobit čitatele i jmenovatele stejným nenulovým číslem.

$$\forall a, b, c \in C, b \neq 0, c \neq 0: \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

← krácení

Příklad: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \cdots$

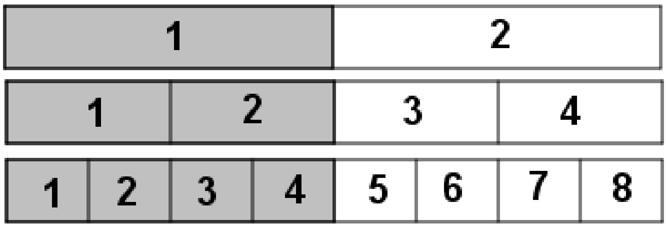
rozšiřování → [23]

[22] DELVENTHAL, K. M., KISSNER A., KULICK M., *Kompendium matematiky: vzorce a pravidla, četné příklady včetně řešení: od základních operací po vyšší matematiku*, s. 63

[23] DIVÍŠEK, Jiří. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*, s. 66

Pro lepší pochopení rozšiřování i krácení je možné žákům celou situaci znázornit.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\cdots=\frac{1\,.\,n}{2\,.\,n}$$



Obrázek 4 Rozšiřování zlomku.

Převzato z: KINDL, K. Matematika. Přehled učiva základní školy.

- **Desetinný zlomek**

Tento zlomek má tvar $\frac{a}{10^n}$, kde *a* je celé číslo a *n* přirozené číslo. Každý desetinný zlomek lze zapsat jako desetinné číslo. [24]

Příklad: $\frac{5}{100}=\frac{5}{10^2}=0{,}05$ $\frac{31}{1000}=\frac{31}{10^3}=0{,}031$

$\frac{1384}{100}=\frac{1384}{10^2}=13{,}84$ $\frac{87\,354}{1000}=\frac{87\,354}{10^3}=87{,}35$

- **Nula ve zlomku**

Nula je velice záludné číslo a početní operace s ní je potřeba žákům neustále opakovat, tím spíše pokud jde o zlomky. Mohou nastat tři případy:

1. Nula v čitateli:

Pokud je čitatel roven nule, pak se celý zlomek rovná nule.

$$\forall a, b \in C,\ a = 0,\ b \neq 0\colon \frac{a}{b}=\frac{0}{b}=0$$

2. Nula ve jmenovateli:

Ať už si nulu představíme ve jmenovateli nebo jako dělitele, je potřeba žákům pravidlo o nesmyslnosti dělení nulou objasnit.

[24] DIVÍŠEK, Jiří. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*, s. 66

Pokud by platil podíl 4 : 0 = a, musel by existovat součin a . 0 = 4. Avšak součin jakéhokoliv čísla s nulou je roven nule.

3 . 0 = 0 nebo -235 . 0 = 0 => a . 0 = 0

Profesor Milan Hejný uvádí ve své knize Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky názornou argumentaci, proč nulou nelze dělit, respektive proč dělení nulou nemá smysl.

„Po několika neúspěšných pokusech jsme nakonec objevili způsob, jak vnitřní rozpornost dělení nulou otevřít žákům. Trik spočíval v tom, že jsme úlohu „rozdělit spravedlivě 12 jahod mezi 0 dětí“ vložili do série dobře řešitelných úloh: „rozdělit spravedlivě 12 jahod mezi n dětí“, kde n bylo postupně 4, 3, 2 a 1. Případy 4, 3 a 2 byly bez problémů. Případ n = 1 vyvolal diskuzi, protože „jaké pak dělení, když všechno dostane jedno dítě“. Ale případ n = 0 byl po kratší třídní diskuzi všemi prohlášen za nesmysl. Asi po měsíci jeden žák přinesl učebnici, ve které bylo v rámečku napsáno NULOU SE NESMÍ DĚLIT. Řekl, že by tam mělo být DĚLENÍ NULOU JE NESMYSLNÉ. Právě poznání nesmyslnosti této operace je poznáním příčiny onoho často opakovaného pravidla o dělení nulou.“ [25]

3. Nula v čitateli i jmenovateli

$\frac{0}{0}$ = cokoliv

0 : 0 = neexistuje

Výsledkem takového dělení by totiž bylo jakékoliv číslo. Součin kteréhokoliv čísla s nulou je totiž roven nule (x · 0 = 0). Tento příklad by měl nekonečně mnoho výsledků (např. 0 : 0 = 5, protože 5 · 0 = 0, 0 : 0 = 256, protože 256 · 0 = 0), což je v rozporu s definicí binární operace, ze které vyplývá, že pro každé dva prvky existuje v binární operaci nejvýše jeden výsledek.[26]

Opět uvádím příběh profesora Milana Hejného, jako inspiraci pro práci s žáky.

„Otázka dělení nulou se objevila opět v 6. ročníku u zlomků. Jednalo se o zlomek $\frac{0}{0}$. Ten byl podle většiny žáků 1. Argument byl nasnadě: $\frac{a}{a}$ = 1 pro všechna a, proč ne pro nulu? A navíc, kontrola vychází: 0 · 1 = 0. Toto přesvědčení vládlo ve třídě až do 7. ročníku. Až zde jeden žák objevil posloupnost, z níž vyplývalo, že $\frac{0}{0}$ = 2. Byla to

[25] HEJNÝ, M., Novotná J., Stehlíková, N.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky,* s. 341
[26] BĚLÍK, M. Celá a racionální čísla, s. 47

posloupnost rovností $\frac{10}{5}=\frac{8}{4}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=\frac{0}{0}$. *Žáci nebyli ochotni tuto posloupnost akceptovat. Pak se objevily další podobné posloupnosti a žáci, kterým vadila poslední rovnost* $\frac{2}{1}=\frac{0}{0}$ *, začali hledat její jiný tvar. Nakonec souhlasili s tím, že je nutno připustit i* $\frac{0}{0}=2$ *i* $\frac{0}{0}=5$ *i* $\frac{0}{0}=3$ *apod. Pochopili, že když* $\frac{0}{0}$ *může být cokoli, nelze s tímto číslem pracovat.“*[27]

- **PRAVIDLA PRO POČÍTÁNÍ SE ZLOMKY**

  Výpočty se zlomky provádíme takto:[28]

  Sčítání $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ (b ≠ 0, d ≠ 0)

  Odčítání $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ (b ≠ 0, d ≠ 0)

  Násobení $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ (b ≠ 0, d ≠ 0)

  Dělení $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ ((b ≠ 0, c ≠ 0, d ≠ 0)

1.5.2 DESETINNÁ ČÍSLA

Desetinná čísla se na 1. stupni základní školy zavádějí v pátém ročníku v návaznosti na desetinné zlomky.

Každé reálné číslo je možné zapsat v desetinném rozvoji.

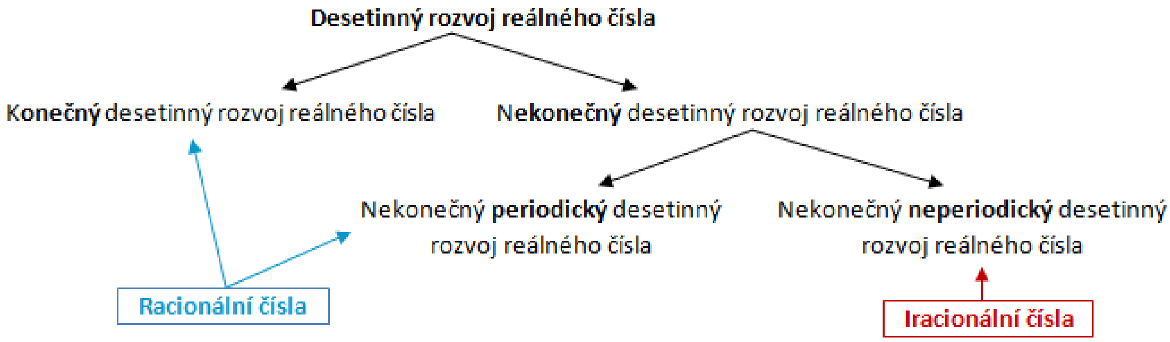
Desetinným rozvojem reálného čísla a ∈ R (a ∈ Q) rozumíme zápis ve tvaru:

$a = \pm a_0\ a_1\ a_2 \ldots . a_n \ldots = \pm (a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n})$, *kde* $a_0 \in N_0$, $a_i \in N_0$, $0 \le a_i \le 9$

(i = 1, 2, ….n, …), znaménko + se bere pro a ≥ 0 *a znaménko – pro a* < 0.[29]

[27] HEJNÝ, M., Novotná J., Stehlíková, N.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky,* s. 341
[28] DIVÍŠEK, Jiří. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*, s. 67
[29] POLÁK, J., *Středoškolská matematika v úlohách*, s. 52

Desetinné rozvoje reálného čísla dělíme podle následujícího schématu:



Obrázek 5 Desetinné rozvoje reálných čísel.

Převzato z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pavlv7an/vladka/?page=Ciselne_obory, 30.10.2016

Racionální čísla mají tedy dva druhy desetinných rozvojů:

1) Konečný periodický desetinný rozvoj

Racionální čísla zadaná desetinným zlomkem, tj. zlomkem ve tvaru $\frac{c}{10^n}$, kde c je celé číslo a n je číslo přirozené, mají konečný desetinný rozvoj, nazývaný též **desetinné číslo**.

Například: $\frac{532}{10^2} = \frac{532}{100} = 5 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} = 5{,}32$

Tato racionální čísla jsou vyjádřena takovými zlomky v základním tvaru $\frac{p}{q}$ (p ∊ C, q ∊ N), že prvočíselný rozklad jmenovatele obsahuje pouze prvočinitele dva nebo pět. Jen tak lze zlomek rozšířit, aby ve jmenovateli byla pouze mocnina čísla deset [30].

Například: $\frac{19}{20} = \frac{19.5}{20.5} = \frac{95}{100} = 0{,}95$

Nejjednodušším způsobem převodu zlomku na desetinné číslo je prosté vydělení čitatele jmenovatelem. Dělení vyjde beze zbytku.

Například: $\frac{19}{20} = 19 : 5 = 0{,}95$

Samozřejmě, že i každé desetinné číslo je možné pomocí definice přepsat do tvaru zlomku. Zlomek je potřeba vždy uvést v základním tvaru.

[30] POLÁK, J., *Středoškolská matematika v úlohách*, s. 53

Například: $0{,}12 = \frac{12}{10^2} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$

$5{,}379 = \frac{5379}{10^3} = \frac{5379}{1000}$

2) Nekonečný periodický desetinný rozvoj

Ostatní racionální čísla mají nekonečný desetinný rozvoj, který je periodický, opakuje se v něm tedy určitá skupina číslic zvaná perioda rozvoje. (Perioda se v rozvoji označuje pruhem). Před ní může být ještě skupina číslic, která se neopakuje. Takový desetinný rozvoj se nazývá neryze periodický a skupina neopakujících se číslic v něm se nazývá předperioda rozvoje (např. $1{,}2\overline{54}$). Desetinný rozvoj, v němž se předperioda nevyskytuje, se nazývá ryze periodický (např. $1{,}\overline{714285}$).

Periodický desetinný rozvoj racionálního čísla zapsaného ve tvaru zlomku získáme opět dělením čitatele jmenovatelem.

Například: $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}\overline{3}$ ryze periodický rozvoj

$\frac{14}{55} = 14 : 55 = 0{,}2\overline{54}$ neryze periodický rozvoj s předperiodou 2 [31]

Pochopitelně, že je možné převádět desetinná čísla s neukončeným periodickým rozvojem na zlomky. To je však látkou středoškolskou a pro naše potřeby tudíž vedlejší.

1.6 ZLOMKY V UČIVU 1. STUPNĚ ZŠ

Zlomky jako učivo jsou do osnov matematiky zařazeny od čtvrtého ročníku. Děti se s nimi ale setkávají již od útlého věku (půlka jablíčka, čtvrt hodiny, třetina v hokejovém zápasu, půllitr apod.). S polovinou, třetinou a čtvrtinou žáci pracují už od prvního ročníku, kdy se učí hodiny, rozdělují se při tělocviku apod.

Zlomky se zde nezavádějí jako nová množina čísel (racionální čísla), ale jako část celku.

Tato kapitola uvádí přehled jednotlivého učiva o zlomcích na 1. stupni. Obecně bychom mohli shrnout učivo, které by žáci v oblasti zlomků měli na 1. stupni znát, takto:

- zápis zlomku (žáci umí označit čitatele zlomku, zlomkovou čáru a jmenovatele zlomku)

[31] POLÁK, J., *Středoškolská matematika v úlohách,* 53

- zlomek, jako označení části celku
- zlomek jako operátor – výpočet části z celku
- porovnávání zlomků se stejnými jmenovateli
- sčítání a odčítání zlomků se stejnými jmenovateli.

1.6.1 ZLOMEK JAKO OZNAČENÍ ČÁSTI CELKU

Nejprve se žáci seznamují se zlomky, jejichž čitatel je roven jedné, tzv. kmenné zlomky $\frac{1}{n}$. Následují zlomky, ve kterých je čitatel zastoupený přirozeným číslem v intervalu od 2 do 9.

Žáci se se zlomkem jako částí celku seznamují prostřednictvím manipulativních činností. Překládají papír, vybarvují různé obrazce. *Tematický celek „Zlomek“ by měl být budován za pomoci konkrétních situací z praktického života, jako je krájení dortu či rozdělování čokolády.* [32]

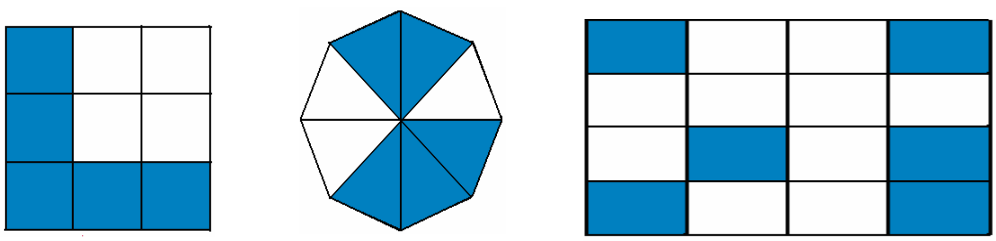
Po úvodní fázi následuje zavedení základních pojmů (čitatel, jmenovatel a zlomková čára) a jejich významu.

Důležité je aby učitel obměňoval celky, ze kterých se části určují a aby si žák uvědomil, že nezáleží na tom, jaký celek máme, ale na tom, jak jej rozdělíme.

Od konkrétních činností z praktického života jednoduše přejdeme ke znázornění celku pomocí čtverce, kruhu a jiných rovinných útvarů.

První typ úloh, které žáci řeší, reprezentuje následující úloha:

Vybarvenou část celku zapiš zlomkem:



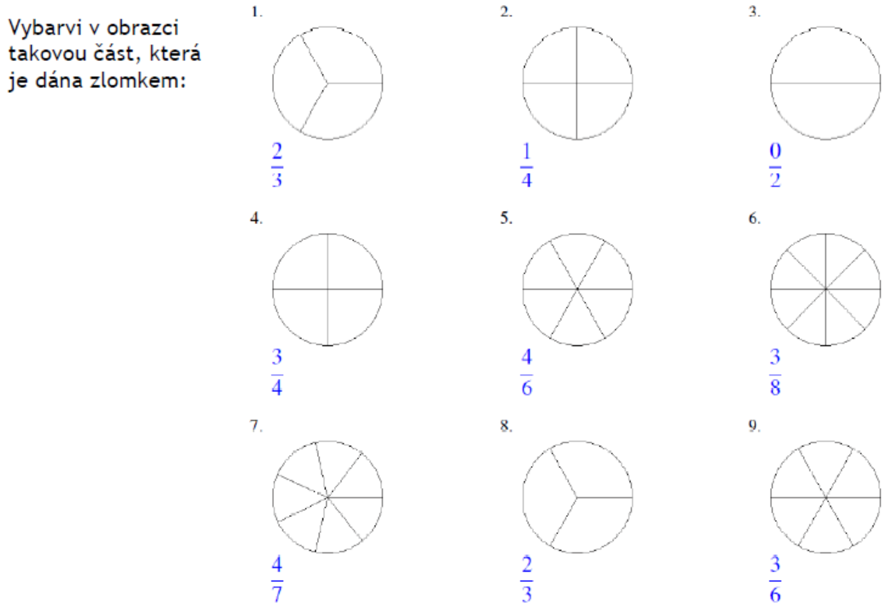
Řešení: $\frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{6}{16}$

Určení zlomku jako části z celku provádíme ve dvou krocích:

[32] BLAŽKOVÁ, R. *Co, proč a jak ve školské matematice II,* s. 395

1. Spočítáme, kolik částí je vybarveno, a toto číslo zapíšeme do čitatele.
2. Sečteme celkový počet částí a toto číslo zapíšeme do jmenovatele.

Následují úlohy opačné, ve kterých žáci vybarvují příslušnou část obrazce dle zadaného zlomku:



Obrázek 6 Zlomek jako část celku - příklad.
Převzato z: http://jane111.chytrak.cz/M7procv7_1.1.pdf, /, 29.10.2016

Zásadním pro důkladné pochopení a následné provádění početních operací se zlomky zůstává manipulace s reálnými předměty, což pomáhá žákovi celé učivo objasnit. Praktické úlohy, které nejsou znázorněny standardním způsobem, pak mohou činit žákům potíže. Je tedy důležité, aby si žáci mohli vše prakticky vyzkoušet a osvojili si tak správný význam pojmů čitatel a jmenovatel.

1.6.2 ZLOMEK JAKO ČÍSELNÝ OPERÁTOR

Chápeme-li zlomek jako operátor, pak to znamená, že se na něj díváme jako na jakýsi „matematický stroj“ (soubor instrukcí), který z daného přirozeného čísla vytvoří jiné přirozené číslo. Jeho činnost je přesně popsána matematicky a skládá se ze dvou elementárních početních úkonů. Schematicky můžeme problém znázornit takto:

operand → operátor → výsledek [33]

[33]DIVÍŠEK, Jiří. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*, s. 71

Pro ilustraci je uveden následující příklad:

$$\frac{2}{3}\ z\ 18\ je\ 12$$

operand → operátor → výsledek

celek 18 zlomek $\frac{2}{3}$ část 12

Z tohoto příkladu je patrné, že existují-li tři složky příkladu, existují také tři typy úloh, které můžeme řešit podle toho, kterou ze tří složek neznáme.

V následujících třech částech jsou postupně rozebrány všechny tři typy úloh. Pro jednoduchost je použita jako výchozí stejná úloha, pokaždé však je určována jiná složka.

Úloha: Rodina Vlkových vyrazila na cyklistický výlet. Zatím ujeli 12 km, což jsou $\frac{3}{7}$ z celkových 28 km.

1.6.2.1 URČENÍ ČÁSTI DANÉHO CELKU

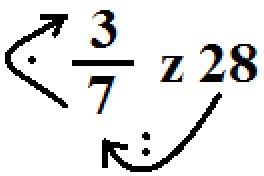
Úloha:

Rodina Vlkových vyrazila na cyklistický výlet. Zatím ujeli $\frac{3}{7}$ z celkových 28 km. Kolik kilometrů zatím ujeli?

Celou úlohu můžeme zjednodušeně vyjádřit:

Urči $\frac{3}{7}$ z 28.

Je tedy třeba rozdělit celek 28 na 7 stejných částí, čili vydělit číslo 28 sedmi. 28 : 7=4. Jedna část jsou tedy 4 km. Vlkovi ale ujeli 3 takové části. Musíme tak číslo 4 vynásobit číslem tři. 4 . 3 = 12. Celou úvahu můžeme žákům znázornit následujícím schématem:



28 : 7 = 4

4 . 3 = 12

Odpověď: Rodina Vlkových zatím ujela 12 km.

1.6.2.2 URČENÍ CELKU Z DANÉ ČÁSTI

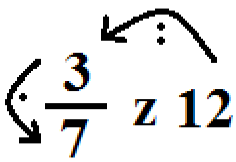
Úloha:

Rodina Vlkových vyrazila na cyklistický výlet. Zatím ujeli $\frac{3}{7}$ z celkové trasy, což je 12 km. Jak dlouhá je celková trasa?

Celou úlohu můžeme zjednodušeně vyjádřit:

Urči x, jestliže $\frac{3}{7}$ z x je 12.

Opět je potřeba rozdělit číslo 12, tentokrát na 3 stejné části. Zjistíme jak velká je jedna část, čili jedna sedmina. 12 : 3 = 4. Jedna část jsou tedy 4. Celkový počet částí je sedm. Nakonec tedy musíme číslo 4 vynásobit sedmi. 4 . 7 = 28. Celou úvahu je opět možné podpořit schématem:



12 : 3 = 4

4 . 7 = 28

Odpověď: Celková trasa je dlouhá 28 km.

1.6.2.3 URČENÍ ZLOMKU Z DANÉ ČÁSTI

Tento typ úloh se na prvním stupni řeší jen výjimečně. Je k němu potřeba znalost o rovnosti zlomků a krácení zlomků, aby bylo možné vyjádřit zlomek v základním tvaru. Pro úplnost je zde ale uveden.

Úloha:

Rodina Vlkových vyrazila na cyklistický výlet. Zatím ujeli 12 km z celkových 28 km. Jakou část z celkových 28 km už ujeli? Vyjádři danou část zlomkem.

Celou úlohu můžeme zjednodušeně vyjádřit:

Urči zlomek tak, aby platilo $\frac{x}{y}$ z 28 je 12.

Chceme vyjádřit 12 z 28, tedy $\frac{12}{28}$. Zlomek je ale potřeba uvést v základním tvaru, tedy jej vykrátit, tzn. vydělit čitatele i jmenovatele stejným číslem, dokud čitatel a jmenovatel nebudou čísla nesoudělná. $\frac{12:4}{28:4} = \frac{3}{7}$.

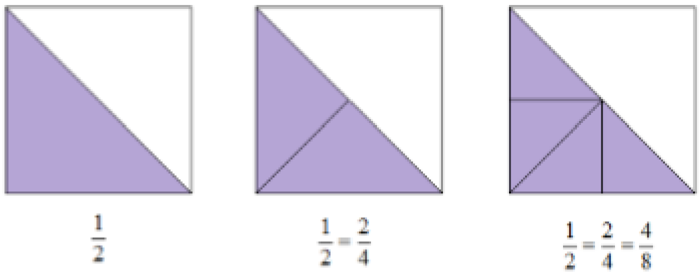
Odpověď: Rodina Vlkových ujela $\frac{3}{7}$ z celkové trasy.

1.6.3 ROVNOST ZLOMKŮ, POROVNÁVÁNÍ ZLOMKŮ

Pro porovnávání zlomků je zásadní znalost o rovnosti zlomků, kterou představuje definice:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \, . \, d = b \, . \, c$$

Efektivnější je však vysvětlit tuto problematiku žákům pomocí vhodné ilustrace. Například:



Obrázek 7 Rovnost zlomků.

Převzato z: BLAŽKOVÁ, R. Co, proč a jak ve školské matematice II.

Pro porovnávání zlomků je tedy určující jejich jmenovatel. Prakticky mohou nastat dva případy:

1. Porovnávání zlomků se stejným jmenovatelem

„Ze dvou zlomků se stejným jmenovatelem je větší ten, který má většího čitatele.“[34]

Příklad: $\frac{3}{11}$? $\frac{7}{11}$ 3 < 7 $\frac{3}{11} < \frac{7}{11}$

Tento typ příkladů je pro žáky 1. stupně snadný, neboť jde v podstatě jen o porovnávání přirozených čísel. Mnohem náročnější je porovnávat zlomky s různými jmenovateli. Milan Hejný ve své publikaci Teória vyučovania matematiky 2 uvádí: *„Porovnávání zlomků je metodicky obtížnější než porovnávání přirozených čísel. Proč je $\frac{1}{5} > \frac{1}{10}$, když 5 < 10?. Bohužel, velmi často se porovnávání zlomků redukuje na nácvik pravidla $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$ (a, b, c, d > 0) anebo na přepis zlomku na desetinné číslo a porovnání desetinných zlomků.“*[35]

[34] ODVÁRKO, O., KADLEČEK J., *Matematika pro 7. ročník základní školy,s.* 14
[35] HEJNÝ, M., *Teória vyučovania matematiky 2.*, s. 71

2. Porovnávání zlomků s různými jmenovateli

„Zlomky s různými jmenovateli porovnáme tak, že je převedeme na společného jmenovatele a porovnáme čitatele těchto rozšířených zlomků.“ [36]

„Společný jmenovatel zlomků je společný násobek čísel ve jmenovatelích zlomků.“[37]

Pro zjednodušení výpočtu se používá nejmenší společný násobek, což je nejmenší kladné celé číslo, které je celočíselným násobkem daných čísel.

Příklad: $\frac{3}{4}\ ?\ \frac{7}{5}$

Převedeme zlomky na společného jmenovatele:

$$\frac{3}{4} = \frac{3\,.5}{4\,.5} = \frac{15}{20} \qquad\qquad \frac{7}{5} = \frac{7\ .\ 4}{5\ .\ 4} = \frac{28}{20}$$

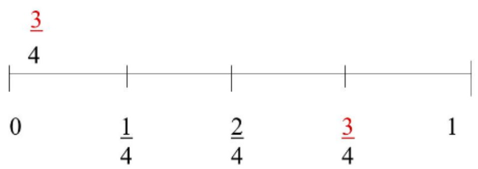
Porovnáme čitatele rozšířených zlomků: $15 < 28$

Porovnáme rozšířené zlomky: $\frac{15}{20} < \frac{28}{20}$

Porovnáme původní zlomky: $\frac{3}{4} < \frac{7}{5}$

Tento způsob porovnávání je určen žákům druhého stupně, neboť pro žáky mladšího školního věku je příliš abstraktní. Pokud chceme s žáky prvního stupně porovnávat zlomky s různými jmenovateli, měli bychom volit názorné způsoby. Nejprve například porovnávat $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$ koláče nebo čokolády. Zlomky je také možné porovnávat pomocí číselné osy, kterou žáci již dobře znají.

Abychom mohli porovnávat zlomky na číselné ose, musíme je nejprve na ose zobrazit. Část osy od 0 do 1 budeme chápat jako úsečky s krajními body 0 a 1. Jmenovatel zlomku určuje, na kolik částí je nutné danou úsečku rozdělit. Čitatel zlomku určuje, kolik částí vyznačíme.



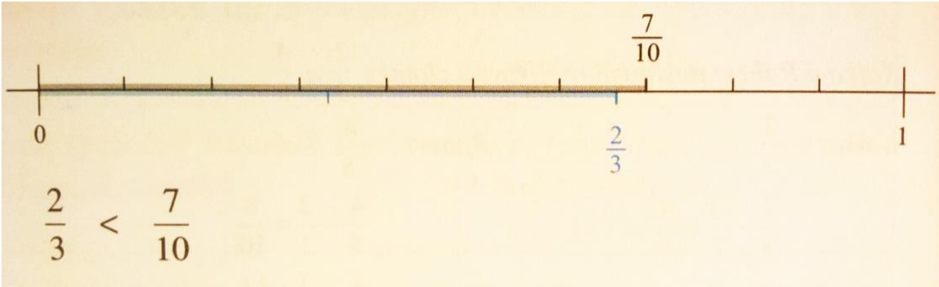
Obrázek 8 Zobrazení zlomku na číselné ose.

Převzato z: http://slideplayer. 4013145cz/slide//, 7.11.2016

[36] COUFALOVÁ, J., *Matematika pro sedmý ročník základní školy,* s. 54
[37] Tamtéž, s. 50

Jakmile žáci zobrazí zlomek na číselnou osu, použijí stejné pravidlo, které platí pro porovnávání přirozených čísel.

„Na číselné ose je znázorněn menší zlomek vlevo od zlomku většího.“[38]



Obrázek 9 Porovnávání zlomků na číselné ose

Převzato z: COUFALOVÁ, J., Matematika pro sedmý ročník základní školy, 49.

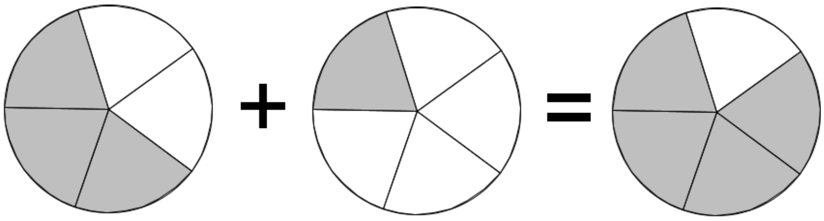
Do osnov matematiky pro 1. stupeň je zařazeno pouze porovnávání zlomků se stejným jmenovatelem. Bylo by však vhodné zařadit do výuky i porovnávání zlomků s různými jmenovateli, především pak porovnávání kmenových zlomků, popřípadě i zlomků se jmenovatelem do deseti. Stejně jako si žák musí osvojit představu o velikosti zlomku, respektive jak velkou část daný zlomek představuje, měl by umět alespoň kmenové zlomky porovnat.

[38] COUFALOVÁ, J., *Matematika pro sedmý ročník základní školy,* s. 49

1.6.4 SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ ZLOMKŮ SE STEJNÝM JMENOVATELEM

„Zlomky se stejnými jmenovateli sčítáme tak, že sečteme jejich čitatele a jmenovatele opíšeme.“[39]

$$\frac{3}{5} \qquad + \qquad \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$$

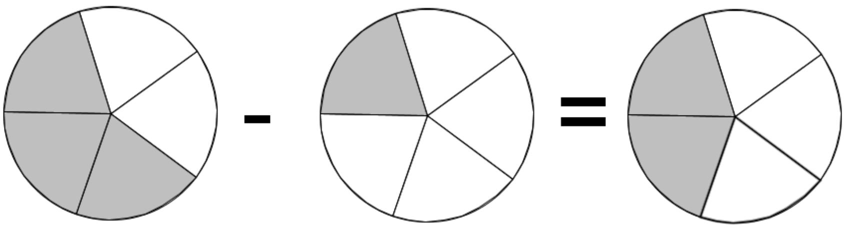


Obrázek 10 Sčítání zlomků.

Převzato z: ODVÁRKO, O., KADLEČEK J., Matematika pro 7. ročník základní školy, 22

„Zlomky se stejnými jmenovateli odčítáme tak, že odečteme jejich čitatele a jmenovatele opíšeme.“[40]

$$\frac{3}{5} \qquad - \qquad \frac{1}{5} = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5}$$



Obrázek 11 Odčítání zlomků.

Převzato z: ODVÁRKO, O., KADLEČEK J., Matematika pro 7. ročník základní školy, 22

[39] ODVÁRKO, O., KADLEČEK J., *Matematika pro 7. ročník základní školy,* s. 22
[40] Tamtéž, s. 26

2 RÁMCOVÝ VZDĚLÁVACÍ PROGRAM

„V souladu s principy kurikulární politiky zformulovanými v Národním programu rozvoje vzdělávání v ČR (tzv. Bílé knize) a zakotvenými v zákoně č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školském zákoně), ve znění pozdějších předpisů, se do vzdělávací soustavy zavádí nový systém kurikulárních dokumentů pro vzdělávání žáků od 3 do 19 let. Kurikulární dokumenty jsou vytvářeny na dvou úrovních – státní a školní.“[41]

Státní úroveň představují Národní program vzdělávání a rámcové vzdělávací programy (dále jen RVP). Národní program vzdělávání vymezuje vzdělávání jako celek a RVP udávají rámec pro jednotlivé stupně vzdělávání – předškolní, základní a střední. Na základě těchto dokumentů si každá škola vytvoří svůj vlastní školní vzdělávací program (dále jen ŠVP), podle kterého se na dané škole budou žáci vzdělávat. Tyto dokumenty jsou závazné a veřejné.

RVP pro základní vzdělávání (dále jen RVP pro ZV) má za cíl stanovit, co je společné a nepostradatelné v povinném základním vzdělání, formulovat očekávanou úroveň vzdělání, tedy vymezit učivo a výstupy při zachování jedinečnosti školy.

Základní vzdělávání je jediným obdobím vzdělávání, kterým projdou všichni žáci. Je tedy nesmírně důležité a zásadní pro další vzdělávání. Základní vzdělávání je rozděleno do dvou navazujících stupňů.

Základní vzdělávání na 1. stupni je založeno na poznávání okolí i sebe sama, na vytváření si žebříčku hodnot, respektu a úctě k druhým, rozvíjení možností a zájmů každého jedince. V neposlední řadě by základní vzdělávání mělo mít za cíl vzbudit v každém žákovi zájem o vzdělání a pochopit jeho důležitost tak, aby byl co nejsilněji vnitřně motivován a aby tuto touhu po vzdělání v následujících letech neztratil. Učitelé by se měli snažit svým přístupem usnadnit žákovi přechod mezi předškolním vzděláváním nebo rodinnou péčí a povinnou školní docházkou.

„Základní vzdělávání na 2. stupni pomáhá žákům získat vědomosti, dovednosti a návyky, které jim umožní samostatné učení a utváření takových hodnot a postojů, které

[41] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: NÚV - Národní ústav pro vzdělávání, 2016. 164 s. [cit. 2016-11-20]. Dostupné z www: www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_200707.pdf , s. 5

vedou k uvážlivému a kultivovanému chování, k zodpovědnému rozhodování a respektování práv a povinností občana našeho státu i Evropské unie.“[42]

Cílem základního vzdělávání je poskytnout každému jedinci pevné základy všeobecného vzdělání a rozvíjet jeho klíčové kompetence, čili motivovat jej k dalšímu vzdělávání, osvojit si taktiku učení se, podněcovat k tvůrčímu a logickému myšlení a ke komunikaci, rozvíjet schopnost spolupráce a tolerance, ctít zákony a plnit své povinnosti, naučit zodpovědnosti, pomáhat a chránit nejen sebe, ale i druhé a v neposlední řadě i svět jako celek.

2.1 KLÍČOVÉ KOMPETENCE

„Klíčové kompetence představují souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti. Jejich výběr a pojetí vychází z hodnot obecně přijímaných ve společnosti a z obecně sdílených představ o tom, které kompetence jedince přispívají k jeho vzdělávání, spokojenému a úspěšnému životu a k posilování funkcí občanské společnosti. Smyslem a cílem vzdělávání je vybavit všechny žáky souborem klíčových kompetencí na úrovni, která je pro ně dosažitelná, a připravit je tak na další vzdělávání a uplatnění ve společnosti.“[43]

Klíčové kompetence nejsou oddělené, ale naopak musejí být vnímány jako celek. Je potřeba rozvíjet je ve všech předmětech. Za klíčové jsou v základním vzdělávání považovány následující kompetence:

kompetence k učení

kompetence k řešení problémů

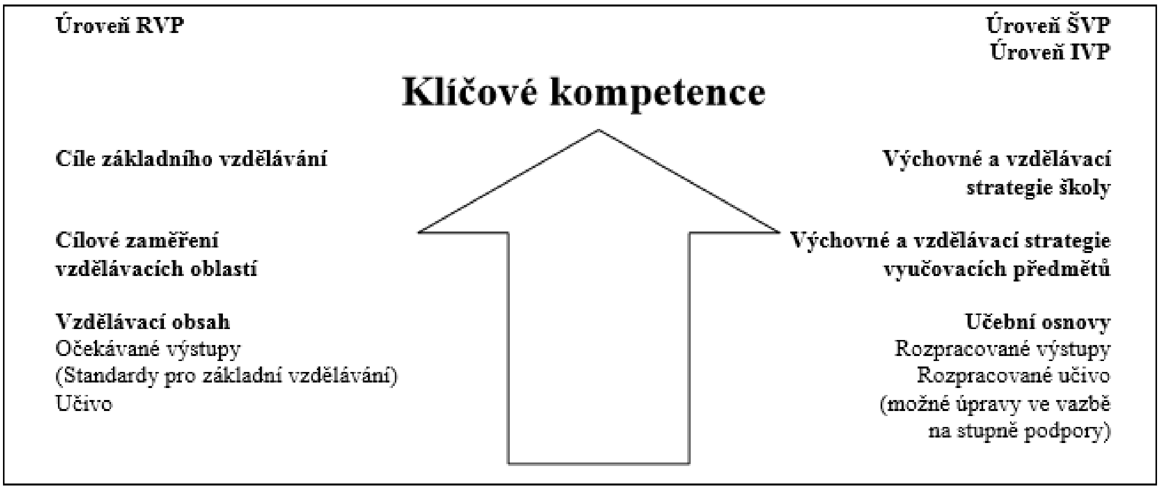
kompetence komunikativní

kompetence sociální a personální

kompetence občanské

kompetence pracovní

[42] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: NÚV - Národní ústav pro vzdělávání, 2016. 164 s. [cit. 2016-11-20]. Dostupné z www: www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_200707.pdf , s. 8
[43] Tamtéž, s. 10



Obrázek 12 Směřování k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí žáků

Převzato z: Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: NÚV - Národní ústav pro vzdělávání, 2016. 164 s. [cit. 2016-11-20]. Dostupné z www: www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_200707.pdf , s. 15

2.2 VZDĚLÁVACÍ OBLAST MATEMATIKA A JEJÍ APLIKACE

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je jednou z devíti oblastí, na které je RVP rozdělen. Je založena na aktivních a praktických činnostech a na použití matematiky v reálných situacích. Poskytuje potřebné vědomosti a dovednosti a umožňuje tak získat matematickou gramotnost. Důraz je kladen především na pochopení a následné zvládnutí základních postupů a vztahů a osvojení potřebných pojmů a symboliky.[44]

Tato vzdělávací oblast je rozdělena do čtyř tematických okruhů. Učivo o zlomcích spadá hned do dvou z nich. Na prvním stupni je to tematický okruh Číslo a početní operace a na druhém stupni se jedná o navazující okruh Číslo a proměnná, kde jsou postupně zahrnuta racionální čísla jako celek.

2.3 ČÍSLO A POČETNÍ OPERACE

Zlomky vždy patřily do učiva matematiky 1. stupně. V roce 2005 bylo toto učivo bohužel přesunuto na 2. stupeň. Od školního roku 2013/2014 začal platit nový vzdělávací program pro základní vzdělávání, na jehož základě bylo učivo o zlomcích a desetinných číslech přesunuto zpět na první stupeň. Tuto změnu schválilo Ministerstvo školství

[44] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: NÚV - Národní ústav pro vzdělávání, 2016. 164 s. [cit. 2016-11-20]. Dostupné z www: www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_200707.pdf , s. 30

a tělovýchovy na doporučení Jednoty českých matematiků a fyziků. Od vyučování zlomků a desetinných čísel na prvním stupni základní školy si ministerstvo slibuje zlepšení znalostí dětí z matematiky a jejich výsledků v mezinárodních průzkumech, ve kterých jim do této doby dělaly zlomky a desetinná čísla největší problémy.[45]

V současné době tedy tematický okruh Číslo a početní operace obsahuje tyto očekávané výstupy, které se přímo týkají učiva o zlomcích.

Žák:

- modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku
- porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel

Vrácení učiva o zlomcích na 1. stupeň byl krok správným směrem. Je naprosto nezbytné, aby si žák již v mladším školním věku naprosto osvojil a zafixoval celou problematiku zlomků, především vyjádření zlomku nebo jeho velikost. Ze zkušenosti vím, že pokud je v tomto období pochopení a osvojení učiva o zlomcích nedostatečné, mívá pak žák nemalé problémy především v 7. ročníku, kam je učivo o zlomcích zařazeno.

[45] LUKÁŠ, I. (ČT 24) Zlomky jsou zpět na prvním stupni, děti budou dělit pizzu nebo čokoládu. [online]. [cit. 201301-18]. Dostupné z www: http://www.ceskatelevize.cz/ct24/domaci/211539-zlomky-jsou-zpet-na-prvnim-stupnideti-budou-delit-pizzu-nebo-cokoladu/

3 CHARAKTERISTIKA ŽÁKA 4. ROČNÍKU

3.1 ŠKOLNÍ VĚK

Nástup do školy představuje pro každé dítě zásadní životní změnu. Začíná nová životní fáze - stává se školákem. Je to bezpochyby jeden z nejdůležitějších sociálních mezníků v lidském životě. Celé toto období je přesně vymezeno nejen časově, ale i z hlediska požadavků, které jsou na dítě, žáka, kladeny. Končí doba her a bezstarostnosti a začíná období, kdy dítě podle Vágnerové (2012) musí potvrdit své kompetence, pracovat a plnit povinnosti tak, jak to od něho společnost očekává. Z širšího hlediska jde podle Vágnerové o obecnější potvrzení vlastních kvalit v různých sociálních skupinách, tj. nejenom ve škole, ve vztahu k požadavkům dospělých, ale i mezi vrstevníky. S tím souvisí rozvoj mnoha kompetencí i celé osobnosti dítěte. Dítě potřebuje uspět v obou těchto oblastech, být za své výkony pozitivně hodnoceno a ostatními akceptováno.[46]

Školní věk, tj. období, kdy dítě chodí do základní školy, rozděluje Vágnerová na tři dílčí fáze:

Raný školní věk trvá od nástupu do školy, tj. přibližně od 6 let do devátého roku života. Toto období je pro dítě velmi náročné. Musí se naučit být školákem, tzn. dodržovat stanovená pravidla, poslouchat a ctít učitele – autoritu, vydržet sedět 45 minut atd. Především se ale musí naučit číst, psát a počítat.

Střední školní věk je období od 9 do 11-12 let. V této fázi žák přechází z 1. stupně základní školy na 2. stupeň. Žák si v tomto období upevňuje své postavení mezi spolužáky, je citově vyrovnaný. Na konci této fáze se u něj začínají projevovat psychické i fyzické změny a nastává další fáze.

Starší školní věk je obdobím 2. stupně, neboli obdobím pubescence. Dochází k psychickým i fyzickým změnám a osamostatňování, žák dospívá.

Žák 4. ročníku, kterému je 9 až 10 let se nachází přesně na rozmezí raného a střední školního věku. Pro naše potřeby tedy není toto dělení nejvhodnější. Langmeier a Krejčířová (2006) uvádějí zjednodušené dělení celého období povinné školní docházky na mladší školní období, tj. období od 6-7 let do 11-12 let, a starší školní období, tedy dospívání. Žák 4. ročníku se tedy nachází v mladším školním období.

[46] VÁGNEROVÁ, M., *Vývojová psychologie: dětství a dospívání,* s. 255

3.2 MLADŠÍ ŠKOLNÍ OBDOBÍ

Na první pohled by se mohlo zdát, že tato životní etapa je klidná a nezajímavá, porovnáváme-li ji s obdobím batolecím, předškolním nebo dokonce s dospíváním. *„Psychoanalýza tento věk skutečně označila jako období „latence“ – tedy jako etapu, kdy je ukončena jedna část psychosexuálního vývoje a základní pudová a emoční složka osobnosti dřímá nyní až do začátku pubescence.“* [47] Langmeier a Krejčířová toto období charakterizují jako věk střízlivého realismu. Školák chce vše pochopit. Nenachází se už ve světě fantazií, ale zajímá ho skutečný svět a věci v něm, jejich fungování a podstata. Tato charakteristická vlastnost se projevuje ve všech oblastech a v zájmech, které žák upřednostňuje. Čte dětské encyklopedie, historické romány, životopisy a cestopisy, rozebírá mechanické hračky, v kresbě se snaží věrně zachytit skutečnost atd. Z těchto důvodů je jasné, že žák ve škole nechce být pasivní. Chce se aktivně účastnit vyučování, chce pochopit a prozkoumat vše kolem sebe. Proto není vhodné v tomto období nutit žáka osvojovat si poznatky bez pochopení, ale naopak nechat jej bádat a prozkoumávat. Zvýší se tak jeho aktivita a bude mít kladnější vztah ke škole i k celému vzdělávacímu systému. Toto je podle mne jeden z hlavních důvodů oblíbenosti Hejného metody výuky, které se budu více věnovat v dalších kapitolách.

3.2.1 VÝVOJ POZNÁVACÍCH PROCESŮ

Dítě mladšího školního věku se podle Piageta (1966) nachází ve fázi konkrétních logických operací. Tento způsob myšlení je typický pro žáky 1. stupně základní školy. Dětské poznávání je pružnější, přesnější, dítě lépe chápe vztahy, příčiny a důsledky. Logické uvažování je základním předpokladem k úspěšnému osvojení učiva. Dítě mladšího školního věku chce tedy poznat skutečný svět, chce vědět, jak funguje, a ve svých logických úvahách nejraději čerpá z vlastních zkušeností. Potřebuje se samo přesvědčit, zda je dané tvrzení pravdivé, nedokáže je ale ještě úplně zobecnit nebo aplikovat. Piaget (1970) uvádí 3 hlavní charakteristiky konkrétního logického myšlení, a to schopnost decentrace, konzervace a reverzibility. *Decentrace je schopnost posuzovat skutečnost z více hledisek a brát v úvahu různé souvislosti a vztahy.*[48] *Konzervace je vědomí trvalosti určitých objektů, jejich znaků či vlastností množin.*[49] *Reverzibilita, tj. vratnost, je významnou složkou proměnlivosti. Školáci začínají chápat vratnost různých*

[47] LANGMEIER, J. a KREJČÍŘOVÁ D., *Vývojová psychologie,* s. 118
[48] VÁGNEROVÁ, M., Vývojová psychologie: dětství a dospívání, s. 268
[49] Tamtéž, s. 269

proměn, resp. myšlenkových operací.[50] Dítě již tedy chápe, že vezme-li například z pytlíku, ve kterém je 10 bonbonů, 2 bonbony, zbude jich tam 8, ale pokud ty 2 bonbony do pytlíku vrátí, bude jich stejně jako na začátku. Pokud dítě dokáže takto uvažovat, je na správné cestě k vyřešení různých úkolů. Začne-li dítě řešit daný problém a cesta k řešení je špatná, je schopné vrátit se na začátek a problém začít řešit znovu.

Ve věku mezi 6. a 11. rokem dochází k vývoji induktivního myšlení. Dítě již dokáže na základě jednotlivých informací dojít k jistému zobecnění. Má tedy sklon své poznatky třídit. Čím je vzdělanější, tím náročnější volí kritéria. Mladší děti si volí takové kritérium, které je pro ně nejvýhodnější.

Dochází i k vývoji deduktivního uvažování. Dedukce (z latinského deductio – odvození) je myšlenkový proces, ve kterém se od předpokladů dochází k závěru, který z těchto předpokladů vychází. Je-li předpoklad správný, je správný i závěr a naopak. *Takto dokáží uvažovat již děti ve věku 7 až 8 let. Dedukce závisí na pochopení souvislosti mezi tvrzeními.*[51] Proto mohou být u menších dětí deduktivní úvahy chybné. Např. pokud jsou všechna zvířata žijící ve vodě ryby a velryba žije ve vodě, pak je velryba ryba, jenomže ona není. Starší žák již takovou chybu neudělá, protože ví, že první předpoklad – všechna zvířata žijící ve vodě jsou ryby – není správný. Dokáže tedy například vyvodit, že pokud $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ a $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ vyplývá z toho, že $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, aniž by si to musel ověřovat.

Soubor početních dovedností jsou základní početní schopnosti, tj. znalost čísel a základních početních operací a početní dovednosti, tzn. schopnost řešit slovní úlohy. Obě tyto složky je potřeba rozvíjet současně. Bohužel se velmi často klade větší důraz na početní schopnosti, schopnost řešit slovní úlohy je pak nedostatečná.

[50] VÁGNEROVÁ, M., Vývojová psychologie: dětství a dospívání, s. 269
[51] Tamtéž, s. 273

4 Různé přístupy k výuce zlomků

Ve výuce matematiky existují dva přístupy – transmisivní a konstruktivistický.

4.1 Transmisivní přístup

„Učení bez myšlení je marné a zbytečné.“

Konfucius

Transmisivní vyučování je možné označit za klasické či tradiční. Je založeno na prostém předávání hotových poznatků (přenos = transmise). Učitel vysvětluje a žák si pamatuje. Tento způsob výuky se může jevit jako nejefektivnější a časově nejvýhodnější.[52]

Učení je tedy pouze pasivní přejímání informací. Výuka je orientována na fakta a výsledky, dochází k rozvoji především paměti a převládajícím typem výuky bývá frontální výuka, výklad. [53]

W. Okoň [54] uvádí tyto znaky tradičního vyučování:

1. Soustředěnost pedagoga na učební osnovy a na obsah vyučování, které je potřeba splnit a tudíž není příliš prostoru věnovat se potřebám žáka. Žák a jeho potřeby, schopnosti a zvládnutí učiva tak zůstává v pozadí.
2. Převažující metoda je výklad. Učitel předkládá žákům hotové vědomosti a žáci se učí buď od učitele, nebo z učebních textů.
3. Charakteristickým rysem je snadný vznik nečekané potíže nebo překážky. To může být způsobeno buď chvilkovou indispozicí učitele (třeba že použije neznámé slovo), nebo nepozorností žáků.
4. Učitel používá pro všechny žáky jedno tempo učení, které je nejčastěji orientováno na průměrné, či slabé žáky.

[52] BLAŽKOVÁ, R., *Didaktika matematiky I* [online]., 45 [cit. 2017-02-25]. Dostupné z: http://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&ved=0ahUKEwjJvMWSrqvSAhVMiCwKHfPQCI8QFghWMAc&url=http%3A%2F%2Fwww.ped.muni.cz%2Fwmath%2Finterma%2Fblazkova_cz.doc&usg=AFQjCNHBGdf5P-xHMUypyUKqdPZipRjMpA, s. 24

[53] ZMRZÍK, B., *Konstruktivistický a transmisivní přístup k výuce* [online]. [cit. 2017-02-27]. Dostupné z: http://www.mendelova.cz/files/content/150/files/Konstruktivn%C3%ADatransmisivn%C3%ADp%C5%99%C3%ADstup.pdf

[54] OKOŇ, W., *K základům problémového učení*. Praha: SPN, 1966., s. 10-13

5. Často vznikají obtíže při kontrole vědomostí, kdy učitel není schopen diagnostikovat vědomosti všech žáků, nezjistí tedy, nakolik jednotliví žáci porozuměli probranému učivu.

Ačkoliv bývá tradiční výuka často kritizována, je potřeba si uvědomit, že transmisivní výuka má i v současné škole své místo, neboť právě pomocí tohoto typu výuky má žák látku utříděnou v uceleném systému.[55]

Transmisivní výuka bývá podle Peciny a Zormanové doporučována především v těchto případech:

1. Ke zprostředkování složité, těžce pochopitelné látky, která vyžaduje širší znalosti i z dalších oblastí a odborných předmětů.
2. Ke zprostředkování abstraktního učiva.
3. Ke zprostředkování pouček a pravidel.

4.1.1 VÝUKA ZLOMKŮ TRANSMISIVNÍM PŘÍSTUPEM

Podle tohoto způsobu výuky je žákům zlomek nejprve představen a vysvětlen a na příkladě demonstrován. Následují úlohy na zapsání zlomku diktátem, dále určení jakou část celku představuje daný obrazec a vybarvení obrazce podle daného zlomku. Nechybí pochopitelně odříkání pouček o jmenovateli a čitateli zlomku.

Následují úlohy na porovnání zlomků se stejným jmenovatelem s jednoduchou poučkou, že větší je ten zlomek, který má většího čitatele a úlohy na sčítání a odčítání zlomků s poučkou – čitatele sečteme (odečteme) a jmenovatele opíšeme. Sčítání zlomků s různými jmenovateli do osnov 1. stupně nepatří.

Struktura tradiční hodiny bývá následující:

1. Opakování a (vnější) motivace
2. Nové učivo
3. Procvičování
4. Vyhodnocení

[55] PECINA, P. a ZORMANOVÁ, L., *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*.

4.2 KONSTRUKTIVISTICKÝ PŘÍSTUP

Konstruktivistický přístup se vyznačuje aktivním vytvářením poznatků. Žák zkoumá a objevuje nové poznatky, které je schopen používat a aplikovat, učitel je průvodcem. Zásadní jsou takové metody, při kterých žáci pracují samostatně, experimentují či provádějí manipulativní činnosti.[56]

V posledních letech dochází k upřednostňování tohoto přístupu výuky především proto, že je brán ohled na žáka, jeho myšlení a potřeby. Jedním z nejvýraznějších zastánců tohoto přístupu u nás je prof. Milan Hejný.

„Dítě se matematiku učí nejlépe tak, že ji samo „tvoří“ a vysvětluje své myšlenky. Často přitom objeví něco nového. Ten „aha okamžik“ si pak pamatuje napořád.“

Milan Hejný [57]

4.2.1 MILAN HEJNÝ

Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc. se narodil 23. 5. 1936 v Martině na Slovensku. Je předním českým a slovenským odborníkem v didaktice matematiky. Po absolvování Matematickofyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze (1959) působil na ČVUT v Praze, VŠD v Žilině, MFF v Bratislavě a od roku 1991 na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze.

V roce 1974 se Milan Hejný po rozporu s učitelkou svého syna rozhodl syna ve škole učit sám. Společně s několika spolupracovníky začal v Bratislavě rozpracovávat poznatky svého otce, pedagoga Víta Hejného. Hejného metoda je založená na tom, že učitel dětem neříká nové informace, žáci musí kouzlo matematiky objevovat samostatně.[58]

---

[56] BLAŽKOVÁ, R., *Didaktika matematiky I* [online]., 45 [cit. 2017-02-25]. Dostupné z: http://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&ved=0ahUKEwjJvMWSrqvSAhVMiCwKHfPQCI8QFghWMAc&url=http%3A%2F%2Fwww.ped.muni.cz%2Fwmath%2Finterma%2Fblazkova_cz.doc&usg=AFQjCNHBGdf5P-xHMUypyUKqdPZipRjMpA, s. 24

[57] TRACHTOVÁ, Z, *Matematiku má dítě v sobě, naslouchejte mu, říká autor revoluční výuky* [online]. [cit. 2017-02-25]. Dostupné z: http://zpravy.idnes.cz/rozhovor-s-profesorem-hejnym-d26-/domaci.aspx?c=A141210_140806_domaci_zt

[58] Tamtéž

4.2.2 O METODĚ

Matematika patří dlouhodobě k nejdůležitější vyučovacím předmětům nejen na základní škole, ale na všech typech škol. Bohužel tento předmět patří k těm více náročným a méně oblíbeným. Žáci mají v matematice dlouhodobě veliké mezery, kvalita matematických znalostí a schopností je nízká. Vyučování bylo v mnoha posledních letech zaměřeno na nácvik řešení standardních úloh, pamětné učení různých pravidel, vzorců a algoritmů. Takové znalosti jsou izolované, jejich následná aplikace náročná a taková znalost matematiky je pouze formální. V posledních letech se tedy didaktice matematiky věnuje nemalá pozornost a jde především o porozumění poznávacímu procesu.

Milan Hejný začal v roce 1975 v 5. ročníku základní školy dlouhodobý experiment, jehož hlavním cílem bylo hledat možnosti takové výuky matematiky, která by podstatně oslabila formalizmus poznatků žáků. Vůdčí myšlenkou záměru bylo přesvědčení převzaté od jeho otce V. Hejného, že kvalitní poznání nemůže učitel žákovi předat, ale žák se k němu musí dobrat samostatně. Těžištěm vyučování tedy není výklad, ale vhodná série úloh.[59] Během krátké doby bylo jasné, že někteří žáci jsou pomalejší a že každý uvažuje trochu jinak. Pro všechny byl ale stejný okamžik pochopení, proniknutí do problematiky a spojení dříve oddělených znalostí. Tento fakt se stal základním východiskem pro rozpracování této metody.

Postupem času byl vytvořen mechanismus poznávacího procesu, který sloužil jako východisko pro výuku. Autor se tedy nechal inspirovat nejen svým otcem, ale i Jeanem Piagetem nebo L. P. Vygotským.

V devadesátých letech se postupně buduje tým kolem prof. Hejného na Pedagogické fakultě UK a metoda proniká do vysokoškolské přípravy učitelů na PedF UK a prostřednictvím seminářů do školské praxe. Z iniciativy Nakladatelství Fraus napsal tým M. Hejného učebnice pro první stupeň (2007-2012). V roce 2013 zakládá M. Hejný společnost H-mat, o.p.s., která mu umožňuje dál metodu systematicky rozvíjet a šířit.[60] V současnosti využívá učebnice Milana Hejného asi 1/5 škol v České Republice. Připravují se učebnice pro druhý stupeň základních škol i pro školy střední.

Metoda profesora Milana Hejného je založena na dodržování 12 základních principů, jež jsou sestaveny tak, aby dítě mohlo matematiku samo objevovat.

[59] HEJNÝ, M., Novotná J., Stehlíková, N.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky,* s. 23
[60] *Hejného metoda* [online]. [cit. 2017-03-06]. Dostupné z: http://www.h-mat.cz/

1. Budování schémat: dítě ví i to, co jsme ho neučili

Schéma je komplex navzájem propojených znalostí. Například když se zeptáme dítěte, kolik mají doma květin, tak neví. Po chvilce je ale schopné odpovědět, protože má v hlavě uložené schéma bytu a květiny prostě spočítá. V mysli má každý člověk celou řadu takovýchto schémat a každý pochopitelně jiná.

Matematická schémata vznikají na základě poznání a jsou doprovázena „aha efektem“. Jsou mezi sebou navzájem propojena. Například schéma pojmu racionální číslo vzniká propojením schémat pojmů přirozené číslo, zlomek, desetinné číslo a záporné číslo.[61]

Podle Milana Hejného mají schémata tyto obecné vlatnosti:

- Schémata se utváří většinou spontánně v důsledku potřeb člověka. Kde potřeba schází, schéma se nevytvoří.
- Schémata téhož se ve vědomí různých lidí liší. To může být příčinou nedorozumění.
- Lidé, kteří společně řeší nějaký problém, mohou ve vzájemné interakci dospět k lepšímu řešení, než by došel každý sám. Navíc člověk, který má vědomost o schématech jiných lidí, může jejich znalosti využívat.
- To nové, co se ve schématu objeví ve vhodnou chvíli a opakovaně, v něm přetrvá dlouho. To, co se v něm objeví ve chvíli nevhodné nebo přichází jen občasně, rychle zaniká.
- Části schématu, které člověk používá zřídka, je nutno mít v dostupné externí paměti, aby byly v případě potřeby k dispozici. Externí paměť uvolňuje intelektuální energii na náročnější úkony.[62]

Budování schémat je základem metody, která klade důraz na samotné poznávání žáka.

2. Práce v prostředích

Pokud žák pracuje v prostředí, které zná, není rozptylován neznámými věcmi. Prostředí jsou vybrána podle žákovských zájmů. Například rodina, cesta autobusem,

[61] *Hejného metoda* [online]. [cit. 2017-03-06]. Dostupné z: http://www.h-mat.cz/
[62] Tamtéž

schody. Každé prostředí obsahuje sérii úloh, které na sebe navazují a postupně gradují. Žák tedy nemá strach z neznámého prostředí a je schopen se soustředit na objevování řešení.

3. Prolínání témat

Je nežádoucí izolovat matematické jevy a pojmy. Každý žák má v hlavě svá schémata, která si kdykoli vybaví, a použije to, které mu nejvíce vyhovuje.

4. Rozvoj osobnosti

Podporujeme samostatné uvažování dětí

5. Skutečná motivace

Důležitá je vnitřní motivace. Úlohy jsou sestaveny tak, aby děti bavily.

6. Reálné zkušenosti

Každé dítě má jiné zkušenosti a na těch je potřeba stavět.

7. Radost z matematiky

Čím více dítě matematika baví, tím více je aktivní a tím vetší má úspěchy.

8. Vlastní poznatek je trvalejší než poznatek získaný.
9. Role učitele, jako průvodce a moderátora diskusí.
10. Práce s chybou

Je potřeba dítěte zbavit strachu z chyby, neboť pokrok je možný jen tehdy, je-li žák kreativní, a nutně tedy dělá chyby. Je ale důležité, aby dítě samo dokázalo chybu najít a opravit.

11. Přiměřené výzvy

Úloha by pro žáka měla být lehce nad jeho možnostmi tak, aby ho vybízela k vyšším výkonům. Každý žák má však jinou úroveň znalostí. Je tedy na učiteli, aby pečlivě vybíral vhodné úlohy pro jednotlivé žáky.

12. Podpora spolupráce, podpora diskuse.

4.2.3 VÝUKA ZLOMKŮ PODLE MILANA HEJNÉHO

Motivace → zkušenost → poznání. To je podle Hejného (1989) základní mechanizmus poznávacího procesu.

Žák nejprve musí chtít a následně provádí činnosti, mladší žák především manipulativní. Tyto činnosti si žák uloží do paměti jako zkušenosti, které se vzájemně propojují a vznikne podle Hejného (2004) předpojem čili prekoncept, na jehož základě dojde k poznání.

Jak již bylo zmíněno, žák zlomky zná již od útlého věku. Polovina jablka, čtvrtka másla, třičtvrtě hodiny, půllitr vody atd., toto jsou žákovy zkušenosti, na kterých je potřeba stavět.

Současný způsob zavedení pojmu zlomek ve škole používá pojem kmenového zlomku, ale jen jako předstupně pojmu zlomek. Pojem zlomku je tedy založen na následující konstrukci:[63]

$$1 \rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow m.\frac{1}{n} \rightarrow \frac{m}{n}$$

Podle Hejného (2004) netvoří kmenový zlomek přechodné stádium, ale je nosným pojmem, kterému je potřeba věnovat více času.

Mějme například úkol: „Vybarvi $\frac{5}{8}$ čtverce.“ Žák nejprve rozdělí čtverec na osm stejných dílů a pak pět vybarví. To ovšem neznamená, že má o takovém zlomku představu. Mít představu o jistém pojmu přeci neznamená umět tento pojem popsat v jediném kontextu, ale umět s ním zacházet v různých kontextech. To, co žáci znají, je dvoukrokový algoritmus, jehož výsledkem je jedna reprezentace zlomku:[64]

celek → *dělení celku na 8 stejných částí* → osmina → *vyznačení 5 částí* → $\frac{5}{8}$

Tato posloupnost obsahuje tři pojmy a dva postupy. Prvnímu pojmu celek žáci velmi dobře rozumí. Postup dělení na stejné části si žáci osvojí pomocí manipulací s různými předměty (dort, pizza, čokoláda…). Tímto způsobem se vytvoří představa pojmu osmina. Poté již jen vyčlení 5 částí a vznikne zlomek $\frac{5}{8}$. Je zřejmé, že pro plnou představu o zlomcích je zásadní mít vytvořeny představy o kmenových zlomcích. Následný krok se zdá

[63] HEJNÝ, M., Novotná J., Stehlíková, N.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky,* s. 348

[64] Tamtéž s. 349

být snadným. *„Jenže právě tento zdánlivě nepodstatný krůček mění objekt popsaný jediným číslem na objekt popsaný dvěma čísly, a to výrazně přispívá k zániku představy zlomku a nahrazení této představy dvojicí čísel.“*[65]

Podle Hejného se všechny další operace se zlomky v mysli žáka ukládají jako pravidla, která jsou náročná právě z důvodu velkého počtu čísel. Podle něj je právě ten druhý postup (vyčlenění příslušného počtu částí), *příčinou kolapsu celého pojmotvorného procesu.*[66]

Přechod od kmenových zlomků ke všeobecným může být spojený s rozdílnou představou o zlomku. Například $\frac{2}{3}$ čokolády je možné chápat tak, že jsme 1 čokoládu rozdělili na 3 stejné části a následně 2 vzali, nebo že jsme měli 2 čokolády, každou jsme rozdělili na 3 stejné díly a z každé vzali jednu část. Jednodušší a častější je ta první představa, ale leckdy žák použije tu druhou. Žákovy zkušenosti tedy mají na pochopení zlomků velký vliv.

Také porovnávání kmenových zlomků může žákům činit potíže. Proč je $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, když 4 > 3 ? Porovnávání zlomků je metodicky náročnější než porovnávání přirozených čísel, je však důležité pro upevnění představy o zlomku. Bohužel velmi často se porovnávání zlomků omezuje pouze na nácvik pravidla $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$ (a, b, c, d > 0) nebo na přepis zlomku na desetinné číslo.

Po porovnávání zlomků podle Hejného následuje sčítání částí. Základní představa zlomku, kterou žák na prvním stupni získává, je zlomek jako operátor. Žák si tedy nejprve určí dané části celku, sečte je a nakonec vyjádří výslednou část zlomkem.

Příklad: Na školním pozemku je 24 stromů. $\frac{1}{3}$ jsou jabloně a $\frac{1}{4}$ hrušně. Kolik je na školním pozemku ovocných stromů?

Žák si může nejdříve nakreslit 24 koleček. Prvních 8 vybarví jako $\frac{1}{3}$ a další 6 jako $\frac{1}{4}$ a odpoví, že na školním pozemku je 14 ovocných stromů. Nakonec danou část vyjádří zlomkem, tedy $\frac{14}{24}$, po zkrácení $\frac{7}{12}$.

Snahou učitele by mělo být přivést žáka k poznání, že zlomky se dají sčítat přímo. Je tedy potřeba postupně abstrahovat od předmětné představy základu a části a to tak, že buď

---

[65] HEJNÝ, M., Novotná J., Stehlíková, N.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky,* s. 349
[66] Tamtéž, *s.* 349

obměníme počet prvků celku, nebo budeme se základem pracovat jako s univerzální jednotkou.[67] V předchozím příkladu tak místo čísla 24, použijeme 12, 48 atd., nebo bude sad jednotkou a počet stromů v něm nebude znám. Abstrakce od stromů představuje velký posun, k jehož překlenutí navrhuje Hejný používat geometrické modely, např. tyčový (úsečka), koláčový (kruh), čokoládový (obdélník) atd.

[67]HEJNÝ, M., *Teória vyučovania matematiky 2.*, s. 76

5 VÝZKUM

5.1 CÍL VÝZKUMNÉHO ŠETŘENÍ

Jedním z cílů diplomové práce je porovnat úroveň znalostí žáků o zlomcích vyučovaných klasicky a metodou Hejného. K dosažení tohoto cíle byl vytvořen nestandardizovaný didaktický test, který byl zadán na čtyřech školách. Dvě z těchto škol vyučují zlomky klasickou metodou a na dvou školách se zlomky vyučují podle metody Hejného. Z výsledků didaktických testů mohu ověřit, zda je v současnosti preferovaná Hejného metoda pro výuku žáků vhodnější a zda dosahují lepších výsledků. Z kapitoly 3, vyplývá, že by tomu tak mohlo být, protože Hejného metoda respektuje uvažování žáků mladšího školního věku.

5.2 CHARAKTERISTIKA STATICKÉHO SOUBORU

Výzkumné šetření bylo provedeno na konci pátého nebo na začátku šestého ročníku ve čtyřech školách. Pro lepší představu je uvedena i stručná charakteristika jednotlivých škol a tříd.

1. Základní škola Toužim, příspěvková organizace

Základní škola v Toužimi je úplnou základní školou se dvěma třídami v každém ročníku. Celkový počet žáků je 380 a průměrný počet žáků ve třídě je 22,4. Pedagogové této školy nejsou plně kvalifikovaní. Z celkového počtu 25 si 9 pedagogů doplňuje vzdělání, 1 je bez vysokoškolského vzdělání s více jak 20 lety praxe ve školství a 1 je zaměstnán na dobu nezbytně nutnou.

Škola je umístěna uprostřed města ve třech víceposchoďových budovách, které jsou navzájem propojeny. Nedávno bylo provedeno zateplení budovy a výměna oken. Vnitřní zařízení je průběžně modernizováno. Přibližně v polovině tříd prvního stupně jsou k dispozici interaktivní tabule, ostatní mají možnost navštěvovat interaktivní učebnu.

Chodby i třídy jsou barevné a vyzdobené pracemi žáků.

Jedná se o klasickou základní školu.

Šetření se zúčastnili žáci 5.A. Žáci v matematice stabilně dosahují chvalitebných výsledků. Třídní učitelka si doplňuje vzdělání.

2. Základní škola J. A. Komenského Chodov, Smetanova 738, okres Sokolov, příspěvková organizace

Základní škola v Chodově je úplnou základní školou. První stupeň navštěvuje 310 žáků rozdělených do 12 tříd. Průměrný počet žáků ve třídě 1. stupně je tedy přibližně 26. Na druhém stupni je celkem 204 žáků rozdělených do 8 tříd s průměrným počtem 25,5 žáka. Celkový průměr žáků na jednu třídu na této škole je 25,7. Pedagogové této školy jsou plně kvalifikovaní.[68]

Škola sídlí ve třech samostatných budovách. Budovy nejsou plně zrekonstruovány. V každé třídě prvního stupně není k dispozici interaktivní tabule.

Třídy i chodby jsou vyzdobeny pracemi žáků.

Jedná se o klasickou základní školu.

Šetření se zúčastnili žáci 6.A. Jedná se o třídu sloučenou. Nadanější žáci odešli na gymnázia, či jiné školy v blízkých Karlových Varech. Učitel je plně kvalifikovaný s krátkou praxí.

3. Základní škola Skalná, příspěvková organizace

Základní škola Skalná v okrese Cheb je úplná základní škola s jednou třídou v každém ročníku. Školu navštěvuje celkem 171 žáků. Průměrný počet žáků ve třídě je 19. Z pěti učitelek 1. stupně jsou čtyři kvalifikované. Na 2. stupni jsou všichni pedagogové kvalifikovaní, avšak jen čtvrtina vyučuje předmět, na který má aprobaci.

Škola se nachází se v klidné části města s výhledem na park. Tvoří ji dvě propojené budovy. V první dvoupatrové zděné budově postavené počátkem minulého století se nacházejí 5. - 9. ročníky, učebny fyziky a chemie, přírodopisu a zeměpisu, počítačová učebna a dílny. Tato budova byla naposledy rekonstruovaná v devadesátých letech. Je průběžně modernizována. V druhé novější budově jsou učebny 1. - 4. ročníku. Tato budova je však na konci své životnosti a vyžaduje přestavbu. Každá třída 1. stupně je vybav1ena interaktivní tabulí.[69]

Třídy jsou barevně vymalovány a vyzdobeny pracemi žáků.

[68] *Výroční zpráva o činnosti školy*
[69] *Výroční zpráva o činnosti školy za školní rok 2015/2016*

Šetření se zúčastnili žáci 6.A. Metodou Hejného jsou žáci vyučování od 4. třídy. Jedná se o třídu s průměrnými výsledky. Učitel je kvalifikovaný s dlouhou praxí.

4. Základní škola a základní umělecká škola Žlutice, příspěvková organizace

ZŠ a ZUŠ ve Žluticích je úplná základní škola s jednou až dvěma třídami v každém ročníku. Školu navštěvuje celkem 305 žáků, průměrný počet žáků ve třídě je 20,3. Na škole působí celkem 25 pedagogů, z nichž 19 je plně kvalifikovaných.

Škola se nachází v klidné části města. Budova školy je vícepatrová, zrekonstruovaná. Její součástí je základní umělecká škola. V těsné blízkosti školy se nachází plavecký bazén, který je primárně k dispozici škole.

V každé třídě prvního stupně je klasická černá tabule, interaktivní tabule i bílá tabule. Třídy jsou barevné, vyzdobené pracemi žáků. Na chodbách jsou sedací soupravy a křesla. Chodby jsou také vybaveny televizory.

Zvonění je téměř neslyšné.

Šetření se účastnili žáci 5. ročníku. Metodou Hejného jsou vyučováni od první třídy. Učitelka byla vždy kvalifikovaná.

Počty žáků z jednotlivých škol a celkový počet žáků, kteří se účastnili výzkumného šetření, uvádí následující tabulka.

Škola	**ZŠ Toužim**	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Skalná**	**ZŠ Žlutice**	**Celkový počet žáků**
Celkový počet žáků ve třídě	25	30	16	21	92
Počet žáků, kteří psali test	23	26	16	16	81

5.3 HYPOTÉZY ŠETŘENÍ

Hypotéza 1: Na jednoduché početní operace nebude mít vliv metoda výuky.

Hypotéza 2: Se slovními úlohami si lépe poradí žáci vyučovaní Hejného metodou.

Hypotéza 3: Žáci vyučovaní Hejného metodou dosáhnou celkově lepších výsledků.

5.4 VÝSLEDKY VÝZKUMNÉHO ŠETŘENÍ

V následujících kapitolách jsou uvedeny výsledky výzkumného šetření a jejich rozbor.

5.4.1 DIDAKTICKÝ TEST

Test byl zadáván v hodinách matematiky. Na vypracování testu měli žáci 40 minut.

Celé zadání testu je uvedeno v Příloze č. 1. Každý žák obdržel test vytištěný na dvou papírech formátu A4, jeden byl potištěný z obou stran. Veškeré pomocné výpočty zapisovali žáci přímo do zadání. K testu nebylo povoleno používat kalkulačky.

Didaktický test obsahuje celkem 9 úloh. Úlohy se řadí k typu otevřených úloh.

Řešení testu je uvedeno v Příloze č. 2. Žáci mohli získat celkem 54 bodů. Maximální počet bodů za jednotlivé úlohy je uveden v následující tabulce.

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Celkový počet bodů
Maximální počet bodů	6	8	7	9	4	6	3	7	4	54

Jednotlivé úlohy jsou vyhodnocovány v samostatných kapitolách. U každé úlohy je uvedeno zadání úlohy, řešení a hodnocení, tabulka s výsledky (četnost bodů v jednotlivých třídách, průměrné počty bodů, procentuální úspěšnost žáků a celkový počet žáků, kteří dosáhli jednotlivého bodového ohodnocení). Následuje sloupcový graf s tabulkou dat znázorňující procentuální zastoupení žáků s dosaženými body v jednotlivých školách.

V tabulkách a grafech jsou počty žáků nebo bodů uvedeny v přibližných procentuelních hodnotách.

Ke každé úloze jsou také přiloženy ukázky žákovských řešení správných i chybných. Rozboru žákovských prací je zaměřen jak na netypická řešení úloh, tak na časté chyby.

U každého žákovského řešení je uvedena škola, kterou žák navštěvuje.

5.4.2 ÚLOHA Č. 1: DIKTÁT ZLOMKŮ

Zadání

1) Zapiš zlomky podle diktátu.

Řešení a hodnocení

1) Zapiš zlomky podle diktátu. *(6 b; 1 b za každý správný zlomek)*

$\frac{15}{12}, \frac{7}{10}, \frac{123}{18}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{100}$

Tabulka úspěšnosti žáků jednotlivých škol

Škola	**ZŠ Toužim**	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**	**Celkový počet žáků vyjádřený v %**
Počet žáků	23	26	16	16	81	100
Počet bodů	**Počet žáků s příslušným počtem bodů**					
6	22	15	14	14	65	80,3
5	1	7	1	0	9	11,1
4	0	2	1	2	5	6,2
3	0	1	0	0	1	1,2
2	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1,2
Průměrný počet bodů	**5,96**	**5,16**	**5,81**	**5,75**		
Úspěšnost vyjádřená v %	**99,3**	**86,0**	**96,8**	**95,8**		

Graf

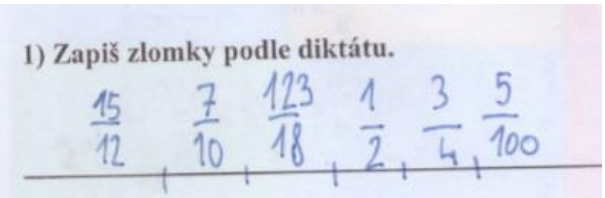
	6	5	4	3	2	1	0
ZŠ Toužim	95.7	4.4	0	0	0	0	0
ZŠ Chodov	57.7	26.9	7.7	3.8	0	0	3.8
ZŠ Žlutice	87.5	6.3	6.3	0	0	0	0
ZŠ Skalná	87.5	0	12.5	0	0	0	0

První úlohu vyřešilo bezchybně celkem 80,3 % žáků. Nejlépe dopadli žáci ze ZŠ Toužim. Pouze jeden žák získal 0 bodů. Zapisoval zlomky jako desetinná čísla.

Žákovská řešení

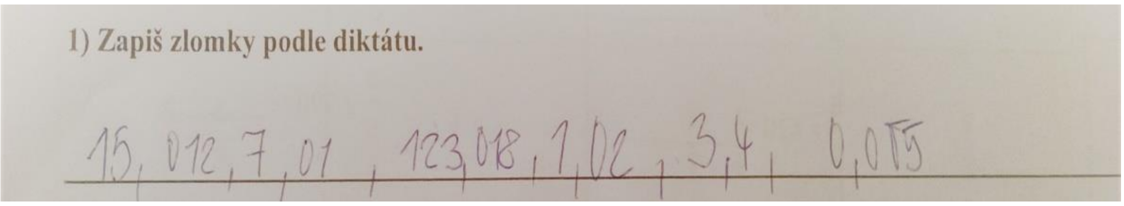
Správné řešení

ZŠ Žlutice



Chybné řešení

ZŠ Chodov

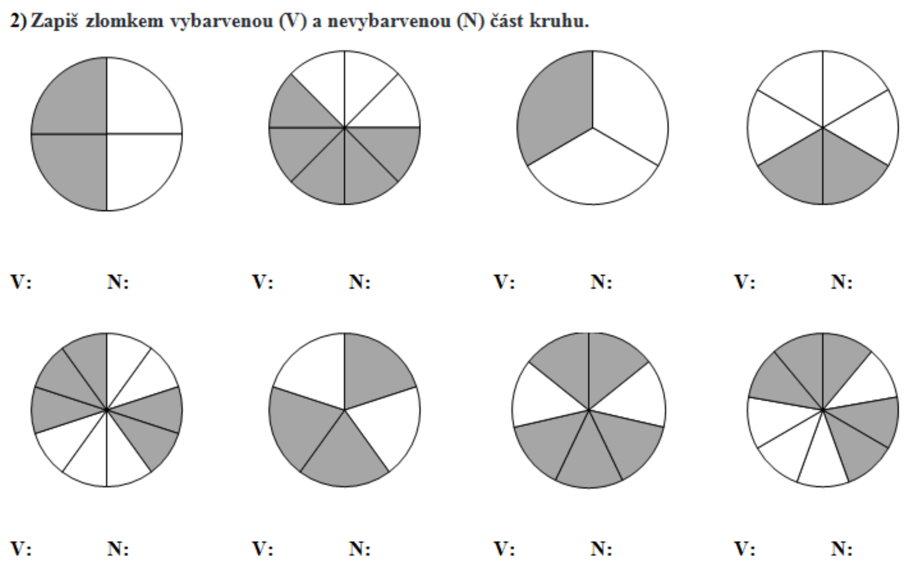


Nejčastější chybou byl nesprávný zápis jmenovatele u zlomku $\frac{1}{2}$ (7 žáků) nebo záměna čitatele se jmenovatelem (3 žáci).

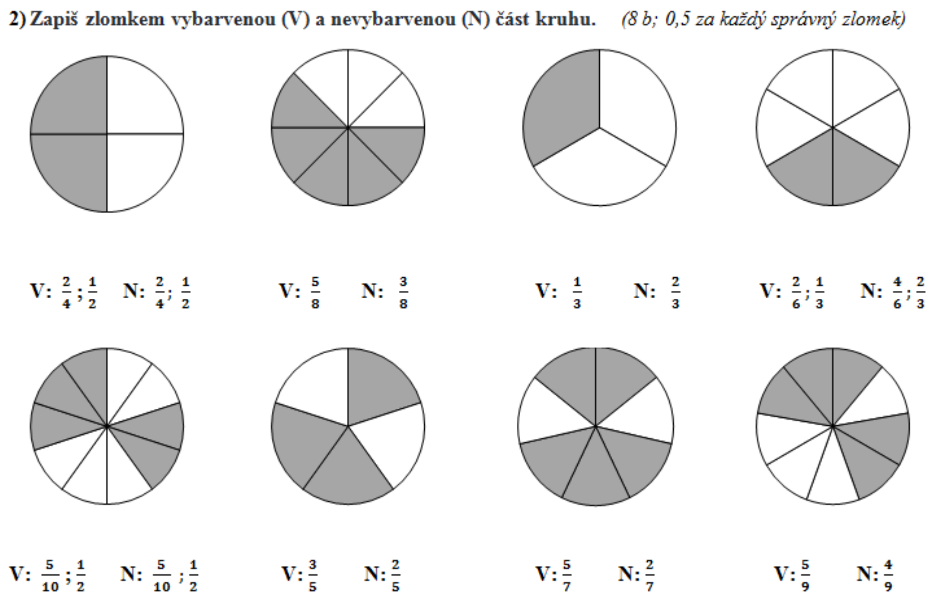
Z výsledků testů vyplývá, že na tento typ úlohy nemá způsob výuky vliv. Jde o prosté zapsání zlomků bez nutnosti složitějších myšlenkových operací.

5.4.3 Úloha č. 2: Zápis zlomku označující danou část [70]

Zadání



Řešení a hodnocení

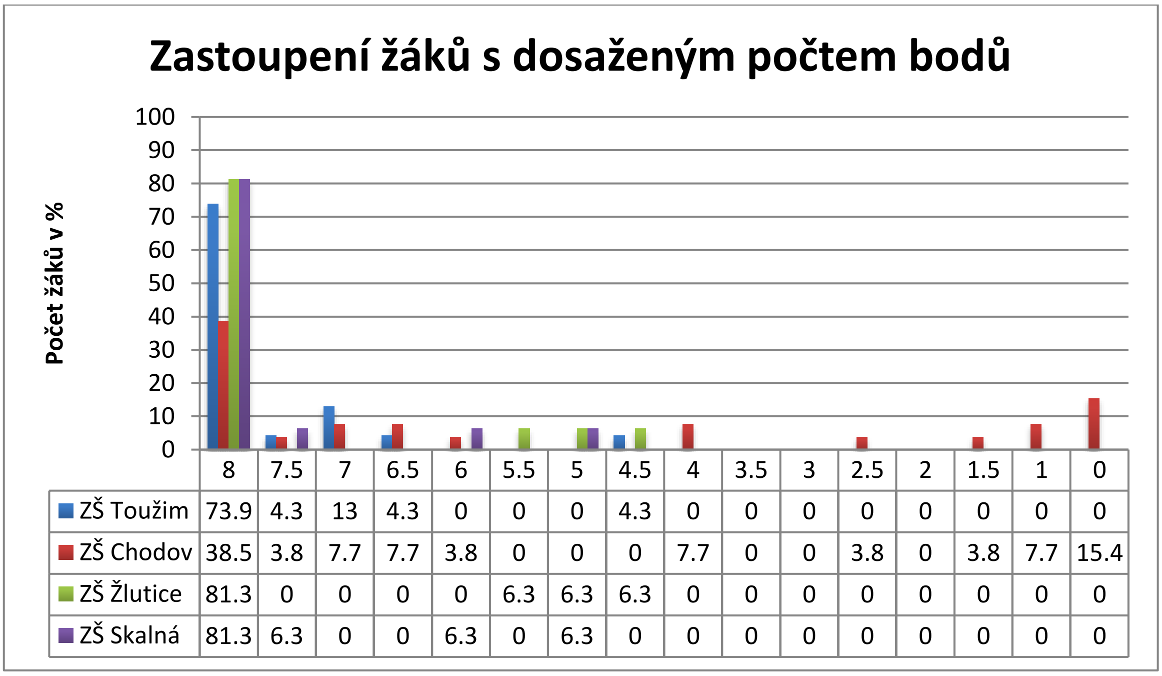


[70] *Písemné opakování učiva o zlomcích* [online]. [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: dumy.cz/stahnout/123807

Tabulka s výsledky

Škola	ZŠ Toužim	ZŠ Chodov	ZŠ Žlutice	ZŠ Skalná	Celkový počet žáků	Celkový počet žáků vyjádřený v %
Počet žáků	23	26	16	16	81	100
Počet bodů	**Počet žáků s příslušným počtem bodů**					
8	17	10	13	13	53	65,4
7,5	1	1	0	1	3	3,7
7	3	2	0	0	5	6,2
6,5	1	2	0	0	3	3,7
6	0	1	0	1	2	2,5
5,5	0	0	1	0	1	1,2
5	0	0	1	1	2	2,5
4,5	1	0	1	0	2	2,5
4	0	2	0	0	2	2,5
3,5	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
2,5	0	1	0	0	1	1,2
2	0	0	0	0	0	0
1,5	0	1	0	0	1	1,2
1	0	2	0	0	2	2,5
0,5	0	0	0	0	0	0
0	0	4	0	0	4	4,9
Průměrný počet bodů	**7,63**	**5,17**	**7,44**	**7,66**		
Úspěšnost vyjádřená v %	**95,4**	**64,6**	**93,0**	**95,7**		

Graf



	8	7.5	7	6.5	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0
ZŠ Toužim	73.9	4.3	13	4.3	0	0	0	4.3	0	0	0	0	0	0	0	0
ZŠ Chodov	38.5	3.8	7.7	7.7	3.8	0	0	0	7.7	0	0	3.8	0	3.8	7.7	15.4
ZŠ Žlutice	81.3	0	0	0	0	6.3	6.3	6.3	0	0	0	0	0	0	0	0
ZŠ Skalná	81.3	6.3	0	0	6.3	0	6.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tuto úlohu vyřešilo bezchybně 68,8 % žáků. Žáci ze Žlutic, Skalné i Toužimi dosáhli srovnatelných výsledků. Překvapivě si s touto úlohou nedokázala poradit velká část žáků z Chodova.

Žákovská řešení

Správná řešení

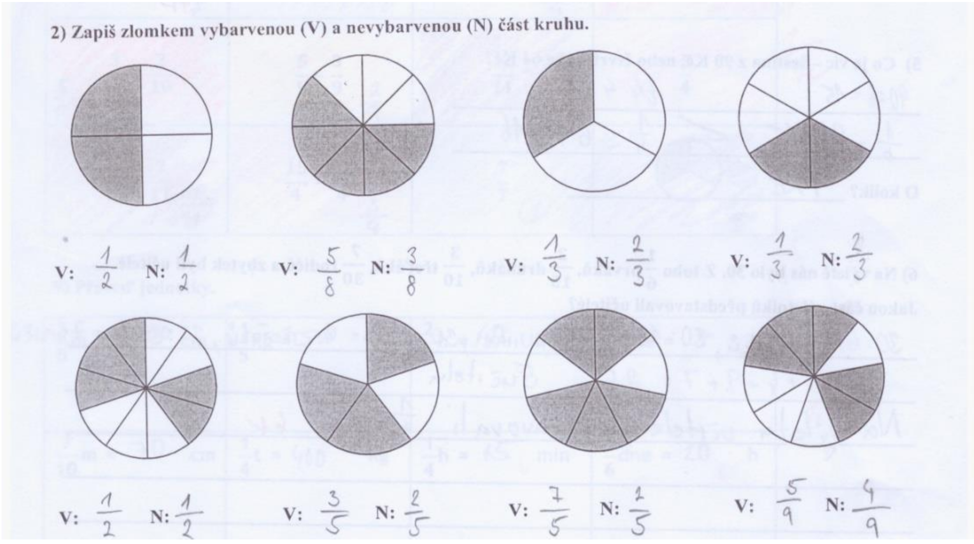
Nejčastěji žáci sečetli počet všech částí a zapsali jmenovatele, pak počet vybarvených či nevybarvených částí a zapsali čitatele. Jen několik žáků si uvědomilo, že danou část obrazce je možné zapsat různými zlomky. Chápou tedy rovnost zlomků, ačkoli se tyto úpravy ještě neučili.

Následující tabulka uvádí přehled počtu žáků, kteří pro zapsání části zlomku použili zlomek ekvivalentní.

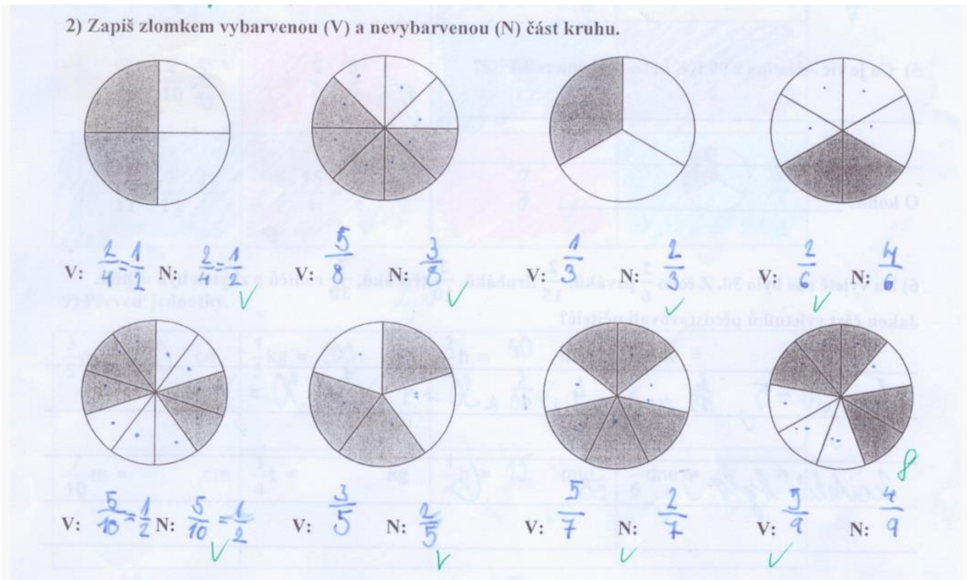
Zlomek	ZŠ Toužim	ZŠ Chodov	ZŠ Žlutice	ZŠ Skalná	Celkový počet žáků
$\frac{2}{4}$ zapsali žáci jako $\frac{1}{2}$	8	4	15	0	27
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**34,8**	**15,4**	**93,8**	**0**	**33,3**
$\frac{5}{10}$ zapsali žáci jako $\frac{1}{2}$	2	0	7	0	9
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**8,7**	**0**	**43,8**	**0**	**11,1**
$\frac{2}{6}$ zapsali žáci jako $\frac{1}{3}$	0	0	3	0	3
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**0**	**0**	**18,8**	**0**	**3,7**
$\frac{4}{6}$ zapsali žáci jako $\frac{2}{3}$	0	0	3	0	3
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**0**	**0**	**18,8**	**0**	**3,7**
Žáci zapsali $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	2	0	0	0	2
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**8,7**	**0**	**0**	**0**	**2,5**
Žáci zapsali $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	5	0	0	0	5
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**21,7**	**0**	**0**	**0**	**6,2**

Z předchozí tabulky je patrné, že žlutičtí žáci u příkladů, kde je možné na první pohled vidět řešení, použili mnohem raději zlomek v základním tvaru. Kdežto žáci vyučováni klasicky raději mechanicky opakovali zažitý postup.

ZŠ Žlutice



ZŠ Toužim



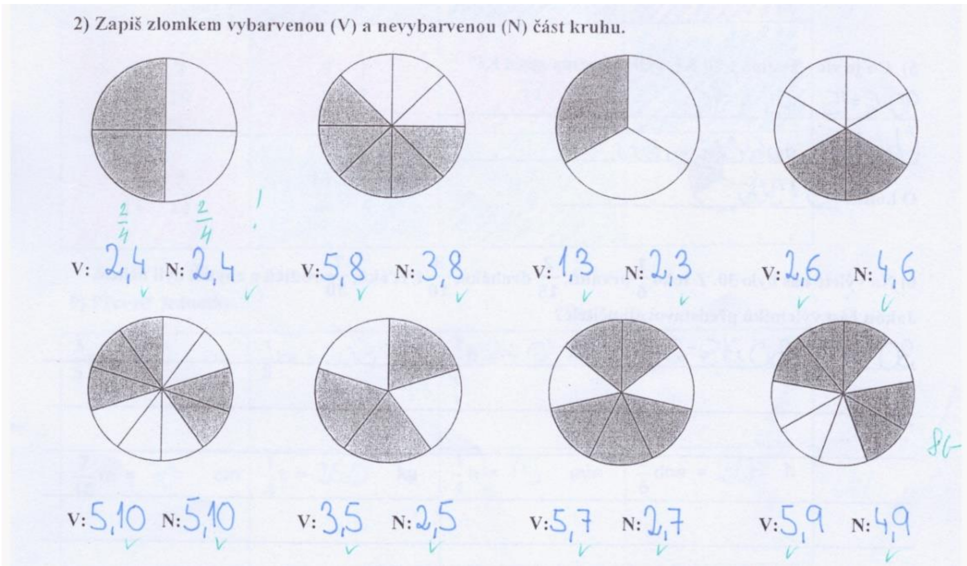
Chybná řešení

Nejčastější chyba byla, že si žáci nesprávně spočítali počet částí, na které je kruh rozdělen, a zapsali tak špatně jmenovatele zlomku, nebo zapsali pouze čitatele. Problémem také byla záměna čitatele a jmenovatele zlomku nebo zapsání zlomku jako desetinné číslo.

V následující tabulce jsou uvedeny počty žáků, kteří se dopustili jednotlivých chyb.

Chyby	**ZŠ Toužim**	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**	**Celkový počet žáků vyjádřený v %**
Zápis zlomku jako desetinné číslo	1	0	0	1	2	2,5
Záměna čitatele a jmenovatele	0	1	3	1	5	6,2
Nesprávné určení jmenovatele	3	4	0	0	7	8,6
Zápis pouze čitatele	0	3	0	0	3	3,7
Celkový počet žáků	**4**	**8**	**3**	**2**		
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**17,4**	**30,8**	**18,8**	**12,5**		

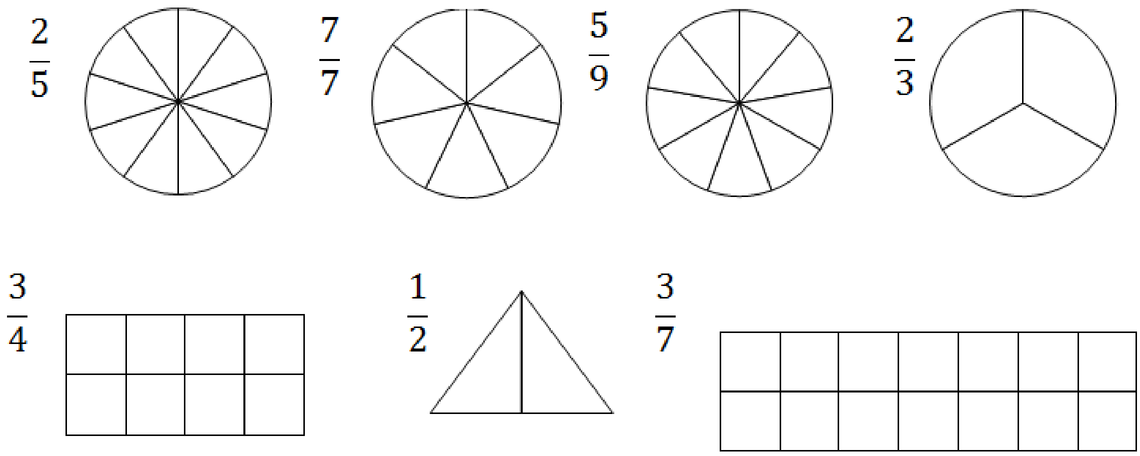
ZŠ Skalná



5.4.4 ÚLOHA Č. 3: VYBARVENÍ DANÉ ČÁSTI OBRAZCE [71]

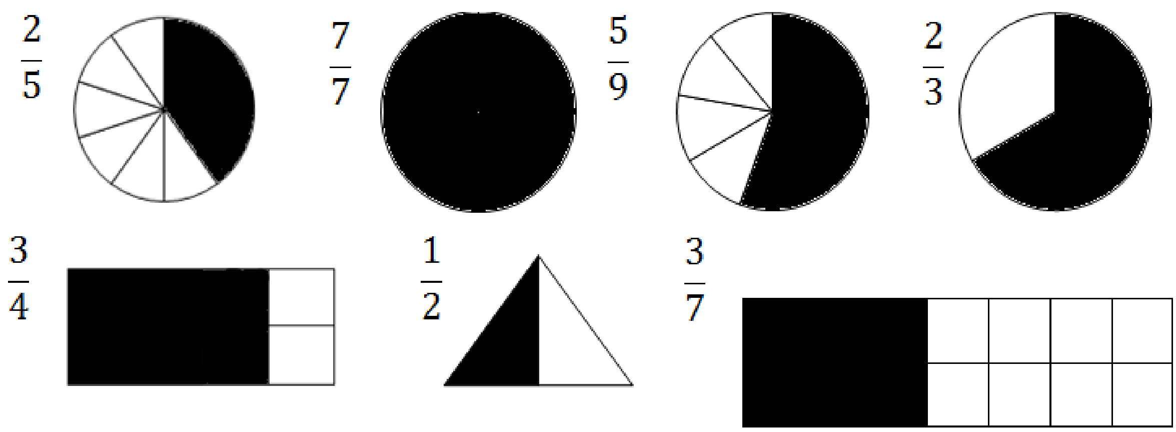
Zadání

3) Vybarvi danou část obrazce.



Řešení a hodnocení

3) Vybarvi danou část obrazce. *(7 b; 1 b za každý správně vybarvený obrazec)*

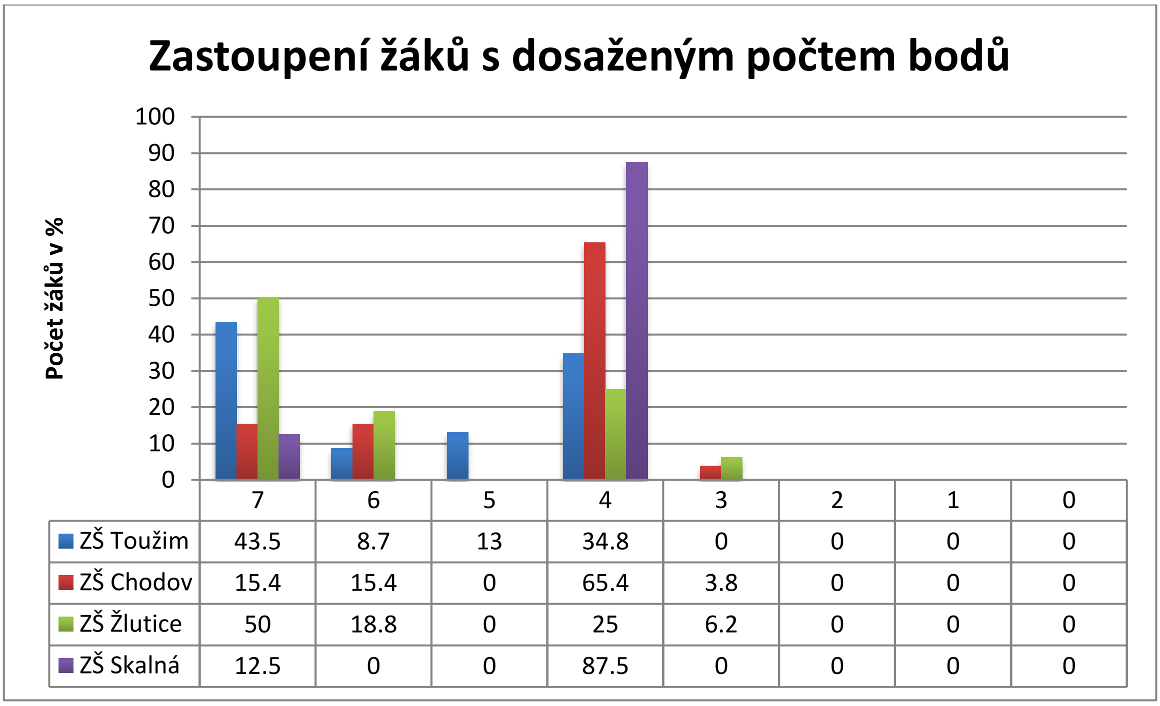


[71] *Písemné opakování učiva o zlomcích* [online]. [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: dumy.cz/stahnout/123807

Tabulka s výsledky

Škola	ZŠ Toužim	ZŠ Chodov	ZŠ Žlutice	ZŠ Skalná	Celkový počet žáků	Celkový počet žáků vyjádřený v %
Počet žáků	23	26	16	16	81	100
Počet bodů	**Počet žáků s příslušným počtem bodů**					
7	10	4	8	2	24	29,6
6	2	4	3	0	9	11,1
5	3	0	0	0	3	3,7
4	8	17	4	14	43	53,1
3	0	1	1	0	2	2,5
2	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
Průměrný počet bodů	**5,60**	**4,73**	**5,81**	**4,38**		
Úspěšnost vyjádřená v %	**80,0**	**67,6**	**83,0**	**62,6**		

Graf

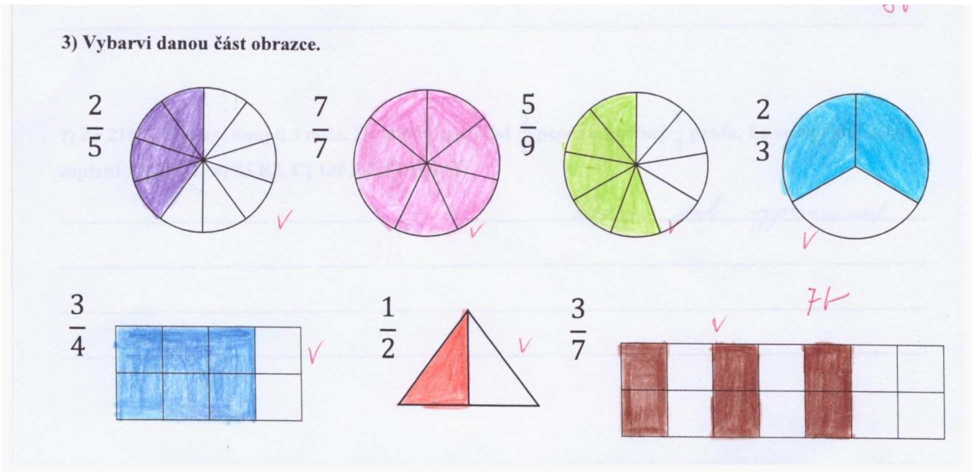


Tuto úlohu vyřešilo bezchybně 30,4 % žáků, přičemž nejlépe si s ní poradili žáci ze Žlutic. Z grafu je patrné, že nejvíce žáků získalo 4 body. Všichni žáci správně zakreslili zlomky $\frac{7}{7}$, $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{2}$. Pouze 2 žáci chybovali u zakreslení zlomku $\frac{5}{9}$ (1 žák ze ZŠ Žlutice, 1 žák ze ZŠ Chodov).

Žákovská řešení

Správné řešení

ZŠ Chodov

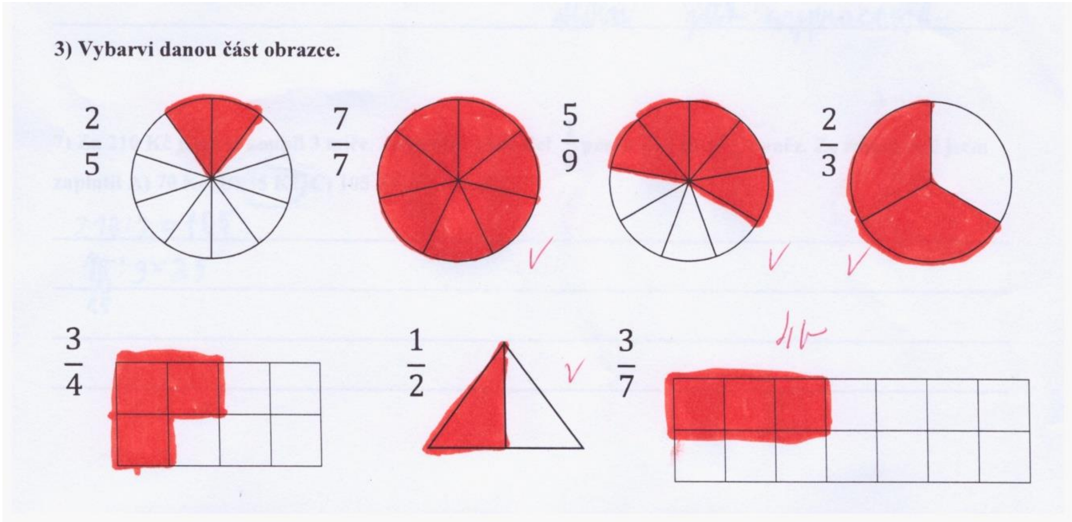


Chybná řešení

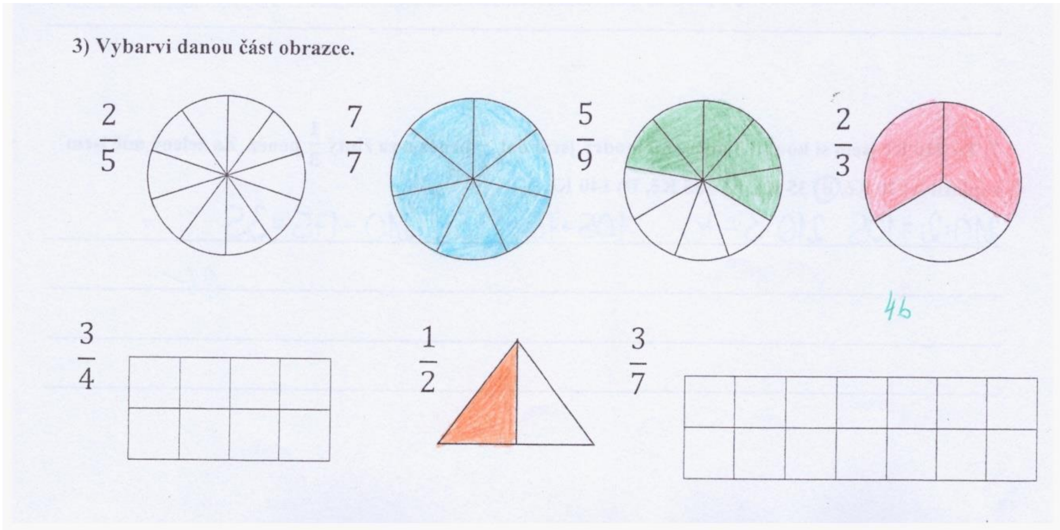
Nejčastěji žáci chybovali u zakreslení $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ a $\frac{3}{7}$. V následující tabulce jsou uvedeny počty žáků, kteří se dopustili předpokládaných chyb.

Chyby	**ZŠ Toužim**	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**
Chybné vybarvení $\frac{2}{5}$	12	20	9	14	55
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**52,2**	**76,9**	**56,3**	**87,5**	**67,9**
Chybné vybarvení $\frac{3}{4}$	9	18	6	14	47
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**39,1**	**69,2**	**37,5**	**87,5**	**58,0**
Chybné vybarvení $\frac{3}{7}$	11	18	6	14	49
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**47,8**	**69,2**	**37,5**	**87,5**	**60,5**

ZŠ Chodov



ZŠ Skalná



5.4.5 ÚLOHA Č. 4: VÝPOČET ČÁSTI Z CELKU[72]

Zadání

4) Vypočítej zlomek z čísla.

$\frac{2}{7}$ z 350 = ________	$\frac{6}{9}$ ze 720 = ________	$\frac{9}{10}$ z 800 = ________
$\frac{3}{6}$ ze 480 = ________	$\frac{2}{3}$ z 600 = ________	$\frac{4}{8}$ z 880 = ________
$\frac{1}{12}$ ze 120 = ________	$\frac{5}{6}$ ze 420 = ________	$\frac{5}{9}$ z 990 = ________

Řešení a hodnocení

4) Vypočítej zlomek z čísla *(9 b; 1 b za každé správné číslo)*

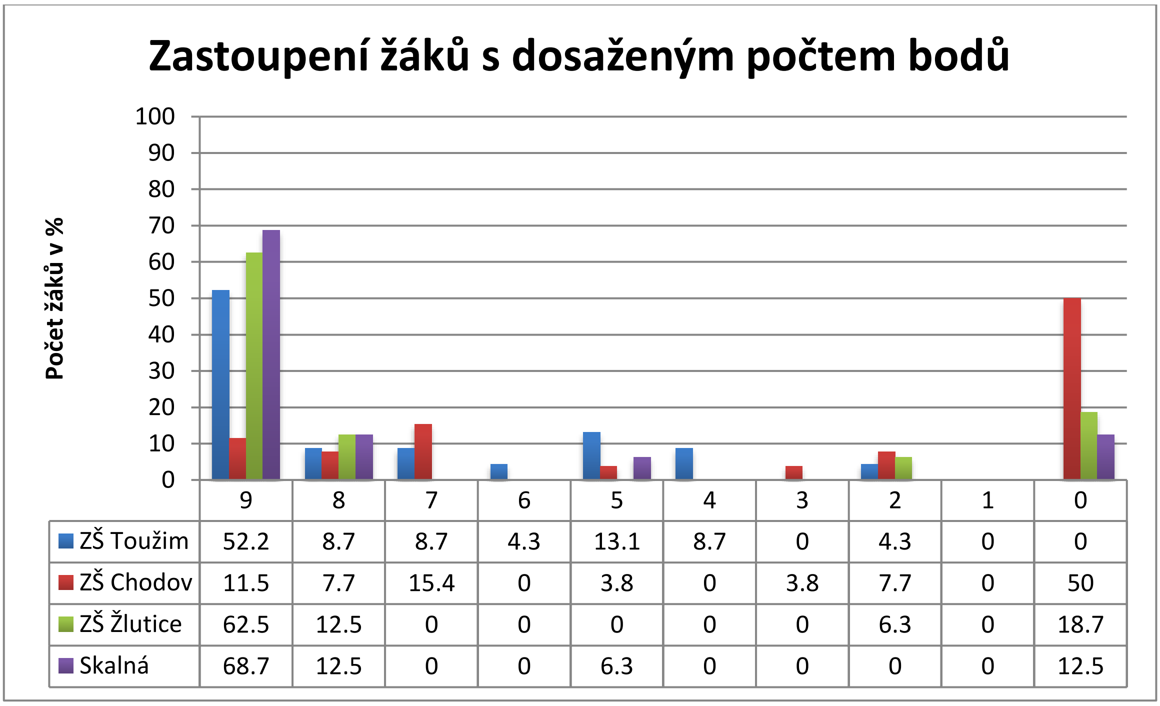
$\frac{2}{7}$ z 350 = *100*	$\frac{6}{9}$ ze 720 = *480*	$\frac{9}{10}$ z 800 = *720*
$\frac{3}{6}$ ze 480 = *240*	$\frac{2}{3}$ z 600 = *400*	$\frac{4}{8}$ z 880 = *440*
$\frac{1}{12}$ ze 120 = *10*	$\frac{5}{6}$ ze 420 = *350*	$\frac{5}{9}$ z 990 = *550*

[72] *Písemné opakování učiva o zlomcích* [online]. [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: dumy.cz/stahnout/123807

Tabulka s výsledky

Škola	ZŠ Toužim	ZŠ Chodov	ZŠ Žlutice	ZŠ Skalná	Celkový počet žáků	Celkový počet žáků vyjádřený v %
Počet žáků	23	26	16	16	81	100
Počet bodů	**Počet žáků s příslušným počtem bodů**					
9	12	3	10	11	36	44,4
8	2	2	2	2	8	9,9
7	2	4	0	0	6	7,4
6	1	0	0	0	1	1,2
5	3	1	0	1	5	6,2
4	2	0	0	0	2	2,5
3	0	1	0	0	1	1,2
2	1	2	1	0	4	4,9
1	0	0	0	0	0	0
0	0	13	3	2	18	22,3
Průměrný počet bodů	**7,35**	**3,19**	**6,86**	**7,50**		
Úspěšnost vyjádřená v %	**81,7**	**35,4**	**76,2**	**83,3**		

Graf

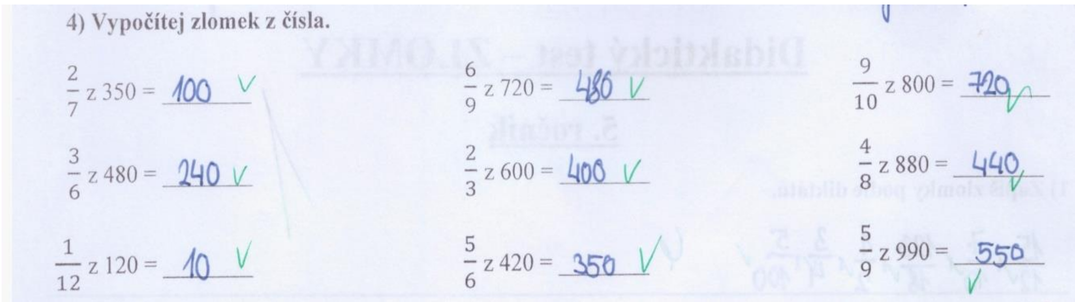


Z grafu je patrné, že tuto úlohu bezchybně vyřešilo 48,8 % žáků, přičemž opět žákům ze ZŠ Chodov tento úkol činil velké potíže. Žáci, kteří mají 0 bodů, tento úkol neřešili vůbec. Ostatní žáci chybovali pouze v početních operacích, algoritmus výpočtu ovládali.

Žákovská řešení

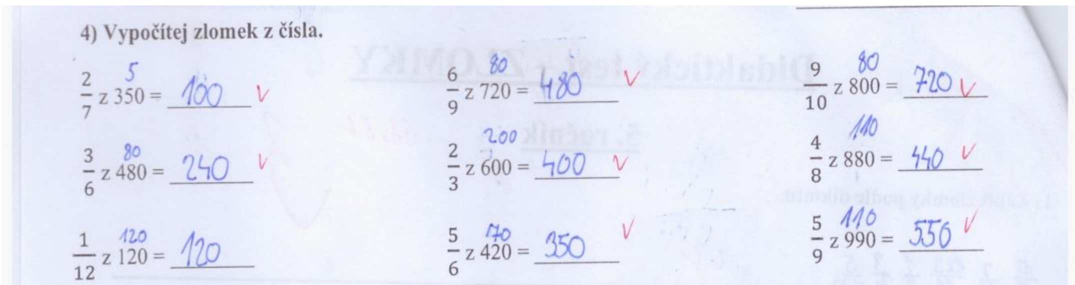
Správné řešení

ZŠ Toužim



Ukázka řešení, kde se vyskytla chyba

ZŠ Žlutice



V této úloze dosáhli lepších výsledků žáci vyučovaní podle Hejného, ačkoli se jedná o zažitý matematický algoritmus. Důležitou roli hraje také znalost násobilky.

5.4.6 ÚLOHA Č. 5: SLOVNÍ ÚLOHA S POROVNÁNÍM

Zadání

5) Co je víc – šestina z 90 Kč, nebo čtvrtina z 64 Kč?

____

____

O kolik? ____________________________

Řešení a hodnocení

5) Co je víc – šestina z 90 Kč, nebo čtvrtina z 64 Kč?

(4 b; 1b za určení šestiny, 1b za určení čtvrtiny, 1b za porovnání zlomků, 1b za určení rozdílu)

$\frac{1}{6}\ z\ 90\ je\ 15$

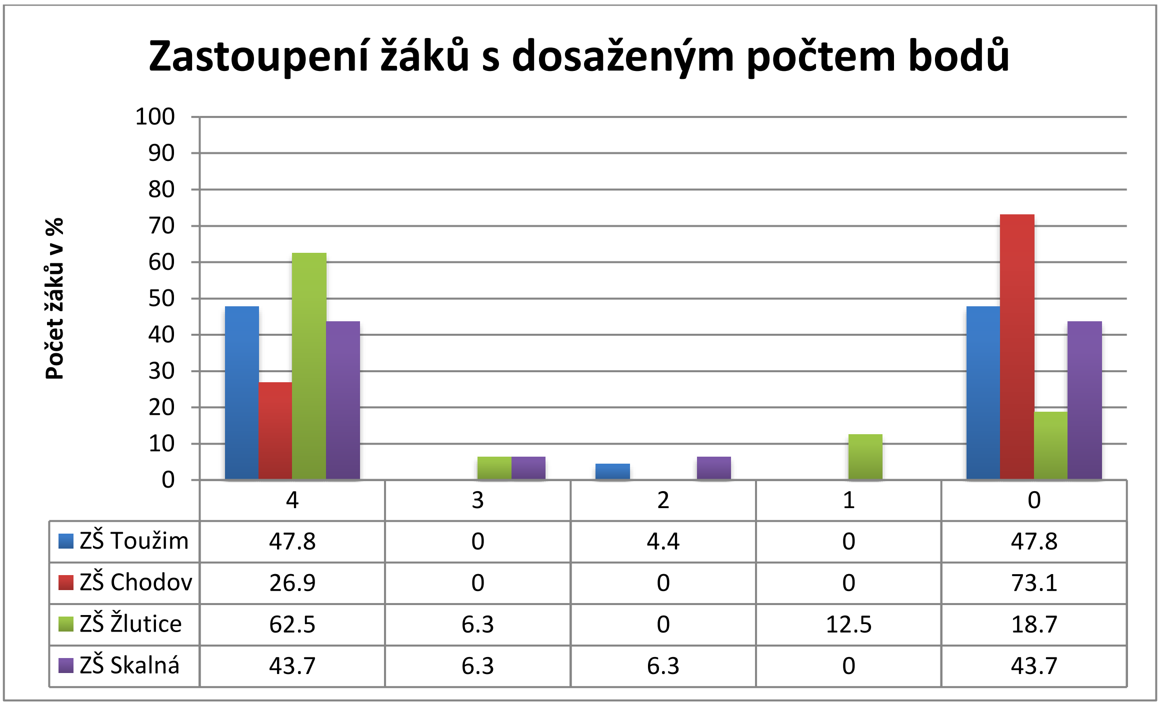
$\frac{1}{4}\ ze\ 64\ je\ 16$

O kolik? $\boldsymbol{\frac{1}{4} ze\ 64 > \frac{1}{6}\ z\ 90}$ *o 1*

Tabulka s výsledky

Škola	ZŠ Toužim	ZŠ Chodov	ZŠ Žlutice	ZŠ Skalná	Celkový počet žáků	Celkový počet žáků vyjádřený v %
Počet žáků	23	26	16	16	81	100
Počet bodů	**Počet žáků s příslušným počtem bodů**					
4	11	7	10	7	35	43,2
3	0	0	1	1	2	2,5
2	1	0	0	1	2	2,5
1	0	0	2	0	2	2,5
0	11	19	3	7	40	49,3
Průměrný počet bodů	**2,00**	**1,08**	**2,75**	**2,06**		
Úspěšnost vyjádřená v %	**50**	**27,5**	**70**	**52,5**		

Graf



	4	3	2	1	0
ZŠ Toužim	47.8	0	4.4	0	47.8
ZŠ Chodov	26.9	0	0	0	73.1
ZŠ Žlutice	62.5	6.3	0	12.5	18.7
ZŠ Skalná	43.7	6.3	6.3	0	43.7

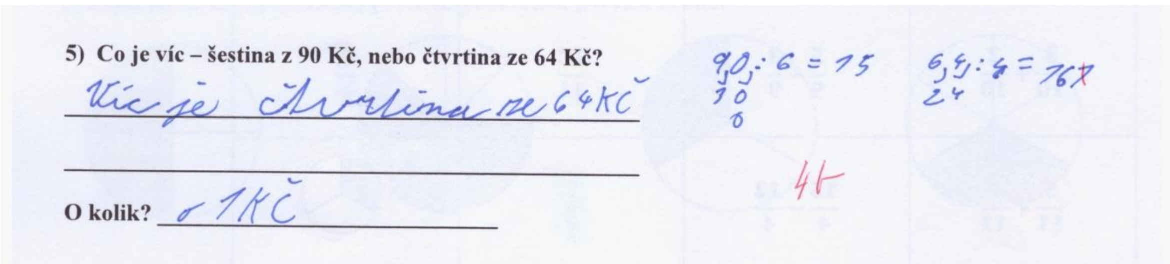
Z grafu je evidentní, že buď si žáci s touto úlohou věděli rady, nebo ji neřešili. Všichni žáci, kteří mají 0 bodů, úlohu neřešili vůbec. Tento jev je nejvíce patrný u žáků ze ZŠ Chodov, správně tuto úlohu vyřešilo jen 7 žáků. Naopak nejmenší počet žáků, kteří úlohu nevyřešili, je ze ZŠ Žlutice a ZŠ Skalná, tedy tam, kde se vyučuje podle Hejného.

Žákovská řešení

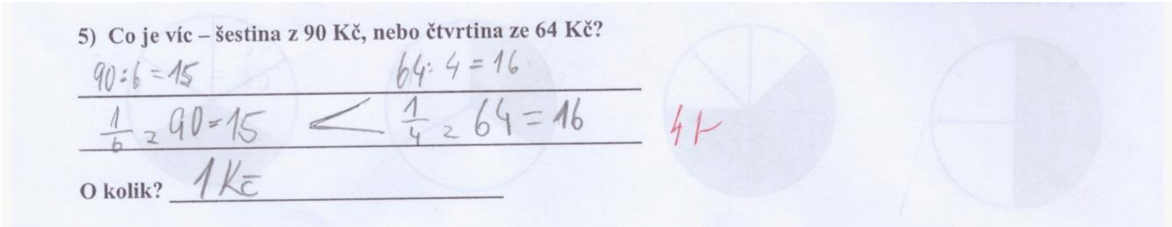
Správná řešení

Žáci zpravidla uváděli výpočet jednotlivých částí, porovnání v podobě slovní odpovědi a rozdíl. Pouze jeden žák (ZŠ Žlutice) zapsal $\frac{1}{4}$ *ze* 64 > $\frac{1}{6}$ *z* 90.

ZŠ Chodov



ZŠ Žlutice



Chybná řešení

Následující tabulka shrnuje počty žáků jednotlivých tříd, kteří úlohu neřešili vůbec. Jeden žák výsledné části neporovnal (ZŠ Žlutice), jeden neurčil rozdíl a jeden neuvedl výpočet (oba ZŠ Skalná).

Chyby	ZŠ Toužim	ZŠ Chodov	ZŠ Žlutice	ZŠ Skalná	Celkový počet žáků
Neřešený příklad	11	15	3	7	36
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**47,8**	**57,7**	**18,8**	**43,8**	**44,4**

Z tabulky je patrné, že s úlohou, kde je potřeba provést více početních operací v předem nestanoveném pořadí, si poradí lépe žáci vyučovaní Hejného metodou.

5.4.7 ÚLOHA Č. 6: SLOVNÍ ÚLOHA

Zadání

6) Na výletě nás bylo 30. Z toho $\frac{1}{6}$ prváků, $\frac{2}{15}$ druháků, $\frac{3}{10}$ třeťáků, $\frac{7}{30}$ rodičů a zbytek byli učitelé. Jakou část výletníků představovali učitelé? [73]

Řešení a hodnocení

6) Na výletě nás bylo 30. Z toho $\frac{1}{6}$ prváků, $\frac{2}{15}$ druháků, $\frac{3}{10}$ třeťáků, $\frac{7}{30}$ rodičů a zbytek byli učitelé. Jakou část výletníků představovali učitelé?

[73] HEJNÝ, Milan. *Matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání, s. 33*

(6 b; 1b za počet prváků, 1b za počet druháků, 1b za počet třeťáků, 1b za počet rodičů, 1b za počet učitelů, 1b za vyjádření část jakou přestavovali učitelé)

Prváků…………………$\frac{1}{6}$ $z\ 30\ je\ 5$

Druháků……………….$\frac{2}{15}$ $z\ 30\ je\ 4$

Třeťáků…………………$\frac{3}{10}$ $z\ 30\ je\ 9$

Rodičů…………………..$\frac{7}{30}$ $z\ 30\ je\ 7$

Učitelů…………………..*X*

X = 30 – (5 + 4 + 9 + 7)

X = 30 – 25

X = 5 $\rightarrow 5\ z\ 30\ \rightarrow \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ *Učitelů bylo* $\frac{5}{30}$ $\left(\frac{1}{6}\right)$.

Tabulka s výsledky

Škola	**ZŠ Toužim**	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**	**Celkový počet žáků vyjádřený v %**
Počet žáků	23	26	16	16	81	100
Počet bodů	**Počet žáků s příslušným počtem bodů**					
6	10	1	8	4	23	28,4
5	2	2	2	2	8	9,9
4	1	0	0	0	1	1,2
3	3	0	0	1	4	5,0
2	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1,2
0	7	23	6	8	44	54,3
Průměrný počet bodů	**3,6**	**0,6**	**3,6**	**2,4**		
Úspěšnost vyjádřená v %	**60,0**	**10,0**	**60,0**	**40,0**		

Graf

	6	5	4	3	2	1	0
ZŠ Toužim	43.5	8.7	4.3	13.1	0	0	30.4
ZŠ Chodov	3.8	7.7	0	0	0	0	88.5
ZŠ Žlutice	50	12.5	0	0	0	0	37.5
ZŠ Skalná	25	12.5	0	6.25	0	6.25	50

Tato úloha byla téměř neřešitelná pro žáky ze ZŠ Chodov. 88,5 % žáků z této školy úlohu vůbec neřešili. Naopak polovina žáků ze ZŠ Žlutice a téměř 44 % žáků z Toužimi úlohu vyřešilo bezchybně.

Příčina neúspěchu chodovských žáků tkví pravděpodobně v tom, že se s podobnou úlohou ještě nesetkali. Na školách, kde se vyučuje klasickou metodou, bývá na prvním stupni učivu o zlomcích věnována nedostatečná časová dotace, nebo toto učivo není důkladně uchopeno a s žáky procvičeno. Další příčinou může být učitelův pocit nepotřebnosti tohoto učiva pro žáky či neschopnost učitele znalosti o zlomcích žákům „předat".

Na základě hodnot z grafu je možné předpokládat, že se žáci ze ZŠ Žlutice s touto úlohou buď setkali, nebo na základě svých znalostí a dovedností v rámci učiva o zlomcích jsou schopni takový úkol vyřešit.

Žákovská řešení

Správná řešení

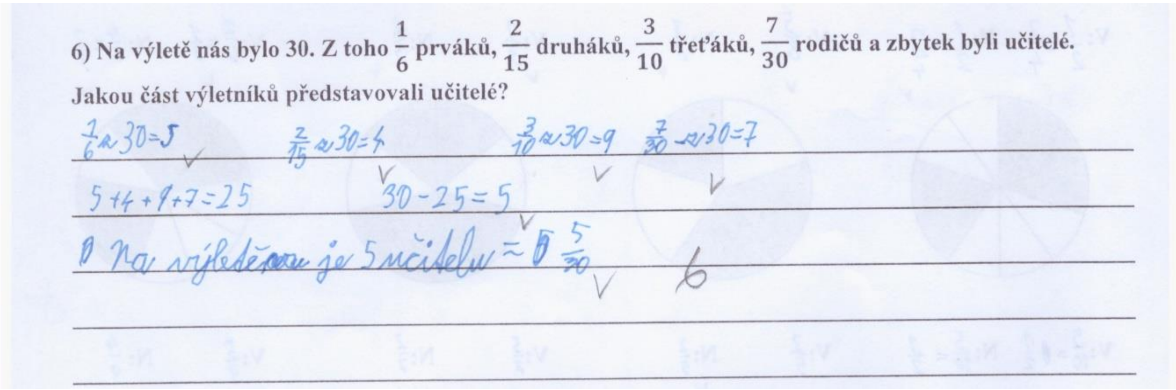
Naprostá většina žáků, kteří tuto úlohu vyřešili, uvedli jednotlivé výpočty pro počet prváků, druháků, třeťáků a rodičů. Uvedli také součet těchto čísel a zlomkem vyjádřili, jakou část výletníků představovali učitelé.

Zajímavým zjištěním bylo, že všichni úspěšní řešitelé ze ZŠ Toužim uvedli jako výsledek zlomek $\frac{5}{30}$ a úspěšní řešitelé ze ZŠ Žlutice zlomek $\frac{1}{6}$.

Všechny druhy odpovědí shrnuje následující tabulka.

Odpovědi	**ZŠ Toužim**	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**
Učitelé představovali $\frac{5}{30}$.	10	0	0	2	12
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**43,5**	**0**	**0**	**12,5**	**14,8**
Učitelé představovali $\frac{1}{6}$.	0	1	8	2	11
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**0**	**3,8**	**50,0**	**12,5**	**13,6**
Učitelů bylo 5.	2	2	2	2	8
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**8,7**	**7,7**	**12,5**	**12,5**	**9,9**

ZŠ Toužim


6) Na výletě nás bylo 30. Z toho $\frac{1}{6}$ prváků, $\frac{2}{15}$ druháků, $\frac{3}{10}$ třeťáků, $\frac{7}{30}$ rodičů a zbytek byli učitelé. Jakou část výletníků představovali učitelé?

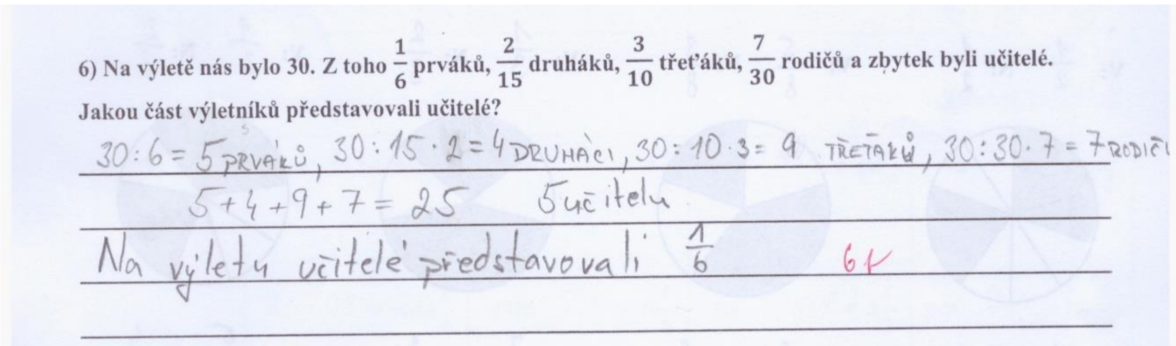
$\frac{1}{6}$ z $30=5$ $\frac{2}{15}$ z $30=4$ $\frac{3}{10}$ z $30=9$ $\frac{7}{30}$ z $30=7$

$5+4+9+7=25$ $30-25=5$

Na výletě je 5 učitelů $= \frac{5}{30}$

6

ZŠ Žlutice


6) Na výletě nás bylo 30. Z toho $\frac{1}{6}$ prváků, $\frac{2}{15}$ druháků, $\frac{3}{10}$ třeťáků, $\frac{7}{30}$ rodičů a zbytek byli učitelé. Jakou část výletníků představovali učitelé?

$30:6=5$ PRVÁKŮ, $30:15\cdot 2=4$ DRUHÁCI, $30:10\cdot 3=9$ TŘEŤÁKŮ, $30:30\cdot 7=7$ RODIČI

$5+4+9+7=25$ 5 učitelů

Na výletu učitelé představovali $\frac{1}{6}$

6

Chybná řešení

Nejčastější chybou bylo, že žáci úlohu neřešili vůbec. Dva žáci ze ZŠ Skalná a dva ze ZŠ Toužim určili správně jen počet prváků a druháků, jedna toužimská žačka chybně sečetla správně vypočítané počty prváků, druháků, třeťáků a rodičů.

Počty žáků, kteří úlohu neřešili vůbec, uvádí následující tabulka.

	ZŠ Toužim	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**
Počet žáků, kteří úlohu neřešili	7	23	6	8	44
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**30,4**	**88,5**	**37,5**	**50,0**	**54,3**

5.4.8 Úloha č. 7: Slovní úloha

Zadání

7) Za 210 Kč jsem si koupil 3 míče. Za modrý jsem dal $\frac{1}{2}$ peněz a za žlutý $\frac{1}{3}$ peněz. Za zelený míč jsem zaplatil A) 70 Kč, B) 35 Kč, C) 105 Kč, D) 140 Kč.[74]

Řešení a hodnocení

7) Za 210 Kč jsem si koupil 3 míče. Za modrý jsem dal $\frac{1}{2}$ peněz a za žlutý $\frac{1}{3}$ peněz. Za zelený míč jsem zaplatil A) 70 Kč, B) 35 Kč, C) 105 Kč, D) 140 Kč.

(3 b;, 1b za cenu modrého míče, 1b za cenu žlutého míče, 1b za cenu zeleného míče)

Modrý…………………..$\frac{1}{2}$ $z\ 210\ je\ 105\ Kč$

Žlutý…………………….$\frac{1}{3}$ $z\ 210\ je\ 70\ Kč$

<u>*Zelený……………….X*</u>

X= 210 – (105 + 70)

X = 210 – 175

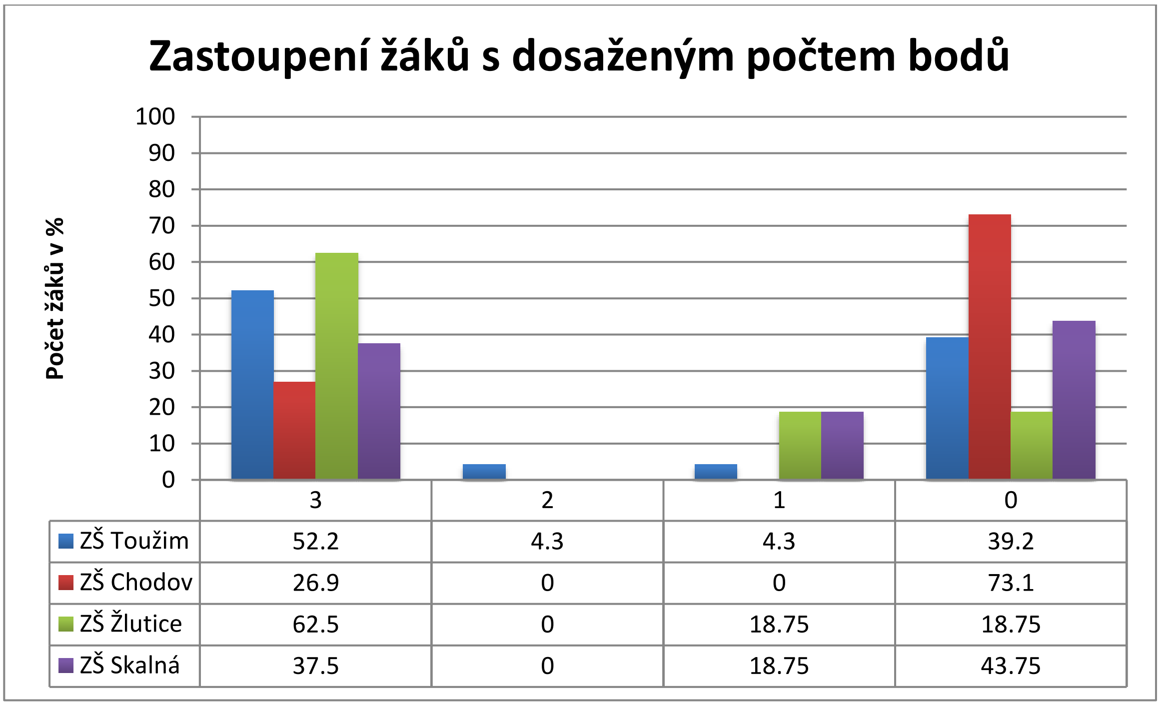
X = 35 *Za zelený míč jsem zaplatil B) 35 Kč.*

[74] HEJNÝ, Milan. *Matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání, s. 30*

Tabulka s výsledky

Škola	ZŠ Toužim	ZŠ Chodov	ZŠ Žlutice	ZŠ Skalná	Celkový počet žáků	Celkový počet žáků vyjádřený v %
Počet žáků	23	26	16	16	81	100
Počet bodů	**Počet žáků s příslušným počtem bodů**					
3	12	7	10	6	35	43,2
2	1	0	0	0	1	1,2
1	1	0	3	3	7	8,6
0	9	19	3	7	38	47,0
Průměrný počet bodů	**1,7**	**0,8**	**2,1**	**1,3**		
Úspěšnost vyjádřená v %	**56,7**	**26,7**	**70**	**43,3**		

Graf



Tato úloha dokazuje fakt, který vyplývá z předchozích úloh a to ten, že žáci si se slovní úlohou buď vědí rady a vyřeší ji, nebo ji nevyřeší. Jen velmi málo žáků řeší úlohu alespoň z části.

Důvodem může být obecná neobliba slovních úloh. Ta může být zapříčiněna jak neporozuměním textu slovní úlohy, tak i náročností slovních úloh danou množstvím početních operací nutných k vyřešení úlohy. Dalším důvodem může být neochota žáků slovní úlohy řešit. Žáci vědí, že by museli přemýšlet a to se jim mnohdy nechce.

Žákovská řešení

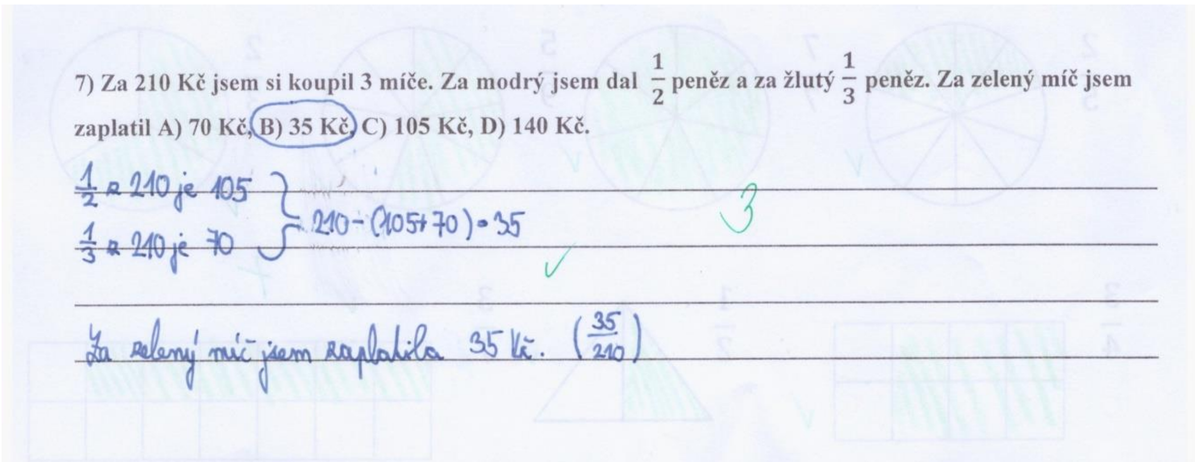
Správná řešení

U úspěšných řešitelů se setkáme prakticky jen se dvěma verzemi řešení. Buď uvedli celý postup řešení a označili odpověď, nebo odpověď jen označili.

Přehled řešení úspěšných řešitelů uvádí následující tabulka.

Řešení	**ZŠ Toužim**	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**
Postup řešení s označením odpovědi	13	2	10	6	31
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**56,5**	**7,7**	**62,5**	**37,5**	**38,3**
Jen označení odpovědi	1	5	4	0	10
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**4,3**	**19,2**	**25,0**	**0**	**12,3**

ZŠ Toužim


7) Za 210 Kč jsem si koupil 3 míče. Za modrý jsem dal $\frac{1}{2}$ peněz a za žlutý $\frac{1}{3}$ peněz. Za zelený míč jsem zaplatil A) 70 Kč, B) 35 Kč, C) 105 Kč, D) 140 Kč.

$\frac{1}{2}$ z 210 je 105

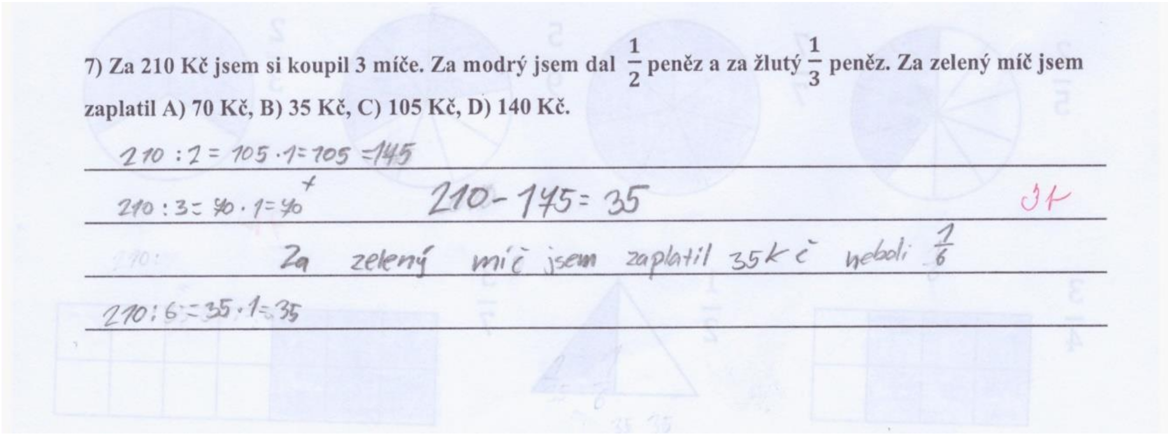
$\frac{1}{3}$ z 210 je 70

210 − (105 + 70) = 35

3

Za zelený míč jsem zaplatila 35 Kč. ($\frac{35}{210}$)

ZŠ Žlutice



7) Za 210 Kč jsem si koupil 3 míče. Za modrý jsem dal $\frac{1}{2}$ peněz a za žlutý $\frac{1}{3}$ peněz. Za zelený míč jsem zaplatil A) 70 Kč, B) 35 Kč, C) 105 Kč, D) 140 Kč.

210 : 2 = 105 · 1 = 105 = 175
210 : 3 = 70 · 1 = 70 +
210 − 175 = 35
3b
Za zelený míč jsem zaplatil 35 Kč neboli $\frac{1}{6}$
210 : 6 = 35 · 1 = 35

Tento žák ze ZŠ Žlutice navíc správně určil, jaká část peněz byla zaplacena za zelený míč. Jeho představa o zlomcích se zdá komplexní a trvalá.

Chybná řešení

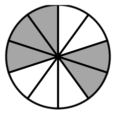
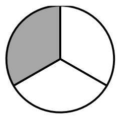
U této úlohy bylo jedinou chybou to, že ji žáci neřešili vůbec. Více v následující tabulce.

	ZŠ Toužim	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**
Počet žáků, kteří úlohu neřešili	9	19	3	7	38
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**39,1**	**73,1**	**18,6**	**43,6**	**46,9**

5.4.9 ÚLOHA Č. 8: SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ ZLOMKŮ SE STEJNÝM JMENOVATELEM

Zadání

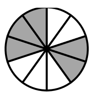
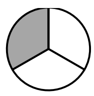
8) Vybarvi stejnou barvou políčka, která vyjadřují stejnou hodnotu.

$\frac{4}{7}+\frac{3}{7}$		$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$	1	$\frac{6}{4}-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{10}+\frac{2}{10}$	$\frac{5}{9}-\frac{3}{9}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{5}{11}+\frac{7}{11}$	$\frac{15}{4}-\frac{12}{4}$	$\frac{7}{7}$	

Řešení a hodnocení

8) Vybarvi stejnou barvou políčka, která vyjadřují totéž.

(*7 b;1b za každou správnou skupinu)*

A $\frac{4}{7}+\frac{3}{7}$	**B** 	**C** $\frac{2}{9}$	**D** $\frac{3}{4}$
E $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$	**A** 1	**F** $\frac{6}{4}-\frac{1}{4}$	**B** $\frac{1}{2}$
B $\frac{3}{10}+\frac{2}{10}$	**C** $\frac{5}{9}-\frac{3}{9}$	**G** $\frac{12}{11}$	**F** $\frac{5}{4}$
G $\frac{5}{11}+\frac{7}{11}$	**D** $\frac{15}{4}-\frac{12}{4}$	**A** $\frac{7}{7}$	**E** 

Tabulka s výsledky

Škola	ZŠ Toužim	ZŠ Chodov	ZŠ Žlutice	ZŠ Skalná	Celkový počet žáků	Celkový počet žáků vyjádřený v %
Počet žáků	23	26	16	16	81	100
Počet bodů	**Počet žáků s příslušným počtem bodů**					
7	11	1	7	1	20	24,7
6	1	0	0	1	2	2,5
5	9	5	4	14	32	39,5
4	2	2	0	0	4	4,9
3	0	2	1	0	3	3,7
2	0	2	2	0	4	4,9
1	0	5	0	0	5	6,2
0	0	9	2	0	11	13,6
Průměrný počet bodů	**5,9**	**2,1**	**4,8**	**5,2**		
Úspěšnost vyjádřená v %	**84,3**	**30,0**	**68,6**	**71,4**		

Graf

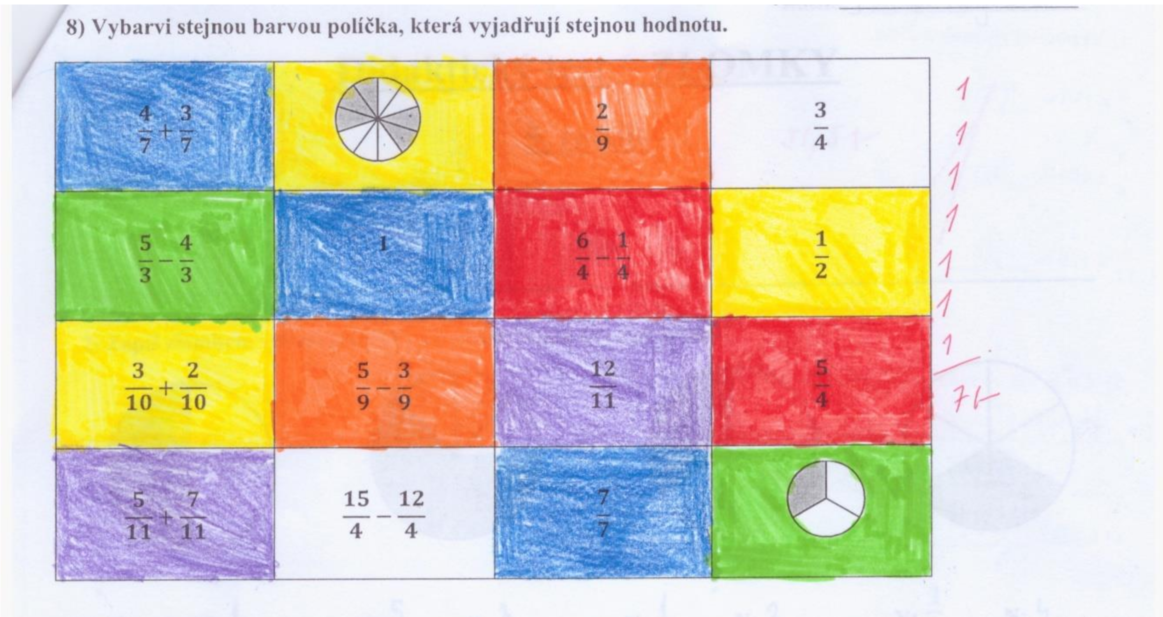
	7	6	5	4	3	2	1	0
ZŠ Toužim	47.8	4.3	39.1	8.7	0	0	0	0
ZŠ Chodov	3.9	0	19.2	7.7	7.7	7.7	19.2	34.6
ZŠ Žlutice	43.75	0	25	0	6.25	12.5	0	12.5
ZŠ Skalná	6.25	6.25	87.5	0	0	0	0	0

Z grafu je možné vyčíst, že žáci získali nejčastěji buď 7, nebo 5 bodů. 2 body tito žáci vždycky ztratili proto, že nenašli 2 trojice. Nabízí se předpoklad, že žáci trojice neobjeví. Je tedy zřejmé, že standardní je pro ně vytvářet dvojice.

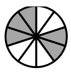
Z tohoto úkolu není patrné, zda je některá metoda vhodnější. Spíše je evidentní, jak málo času se na prvním stupni tomuto učivu věnuje.

Žákovská řešení

Správná řešení



Chybná řešení

Jak již bylo zmíněno, nejčastější chybou bylo nenalezení dvou trojic, které k sobě patří, a to $\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=\frac{7}{7}=1$ a $\frac{2}{10}=\frac{1}{2}=$  . Někteří žáci dokonce vybarvili $\frac{1}{2}=1$.

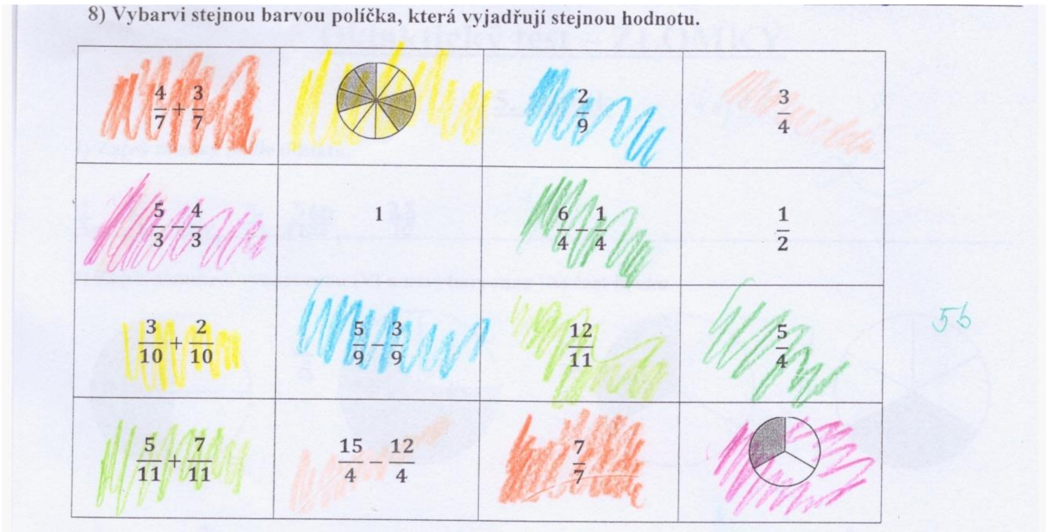
V následující tabulce jsou shrnuty počty žáků, kteří se dopustili jednotlivých chyb.

Chyby	ZŠ Toužim	ZŠ Chodov	ZŠ Žlutice	ZŠ Skalná	Celkový počet žáků
Nenalezení trojice $\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=\frac{7}{7}=1$	11	25	8	14	58
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**47,8**	**96,2**	**50,0**	**87,5**	**71,6**
Nenalezení trojice $\frac{2}{10}=\frac{1}{2}=$ 	12	25	9	15	61
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**52,2**	**96,2**	**56,3**	**93,8**	**75,3**

Překvapivě velký počet žáků danou úlohu neřešil vůbec (někteří i s odůvodněním, že neví, jak úlohu vypracovat) ačkoli jde pouze o sčítání zlomků se stejným jmenovatelem. Počty těchto žáků jsou uvedeny v následující tabulce.

	ZŠ Toužim	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**
Počet žáků, kteří úlohu neřešili	0	9	1	0	10
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**0**	**34,6**	**6,3**	**0**	**12,3**

ZŠ Skalná



ZŠ Toužim

5.4.10 ÚLOHA Č. 9: PŘEVODY JEDNOTEK

Zadání

9) Převeď jednotky.

$\frac{3}{5}$m = cm	$\frac{1}{5}$kg = g	$\frac{2}{3}$h = min	$\frac{1}{4}$dne = h
$\frac{7}{10}$m = cm	$\frac{1}{4}$t = kg	$\frac{1}{4}$h = min	$\frac{5}{6}$dne = h

Řešení a hodnocení

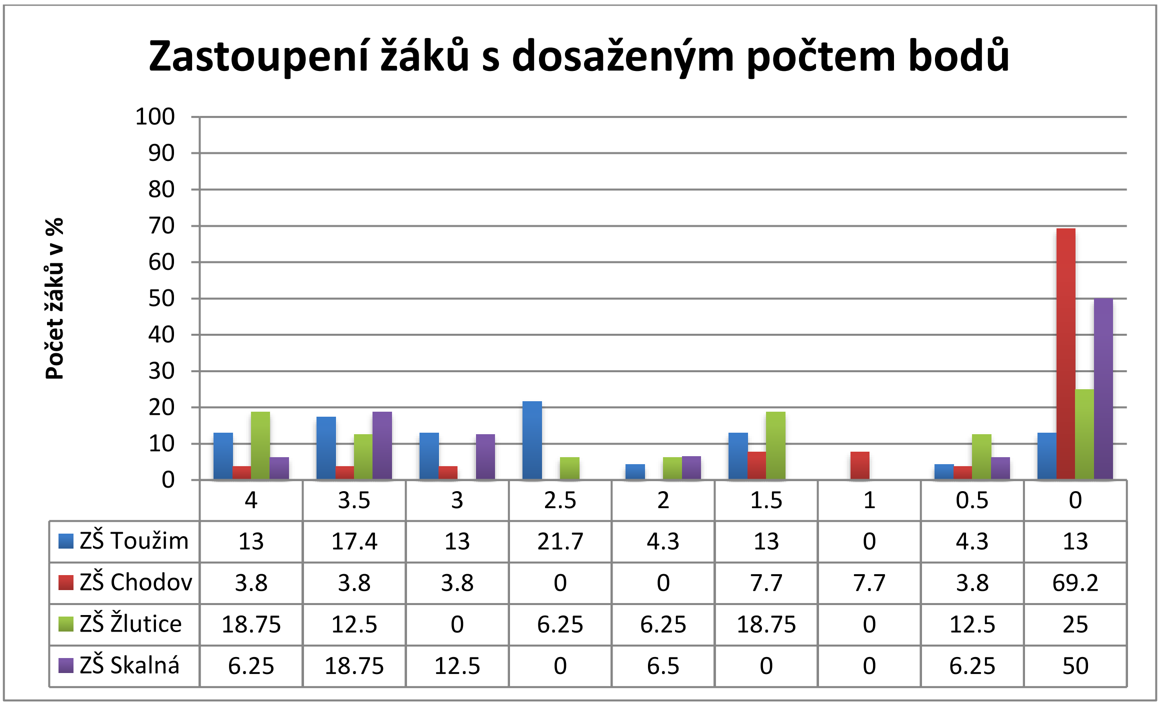
9) Převeď jednotky. *(4 b; 0,5b za každé správné číslo)*

$\frac{3}{5}$m = *60* cm	$\frac{1}{5}$kg = *200* g	$\frac{1}{4}$h = *15* min	$\frac{1}{4}$dne = *6* h
$\frac{7}{10}$m = *70* cm	$\frac{1}{4}$t = *250* kg	$\frac{2}{3}$h = *40* min	$\frac{5}{6}$dne = *20* h

Tabulka s výsledky

Škola	**ZŠ Toužim**	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**	**Celkový počet žáků vyjádřený v %**
Počet žáků	23	26	16	16	81	100
Počet bodů	**Počet žáků s příslušným počtem bodů**					
4	3	1	3	1	8	9,9
3,5	4	1	2	3	10	12,3
3	3	1	0	2	6	7,4
2,5	5	0	1	0	6	7,4
2	1	0	1	1	3	3,7
1,5	3	2	3	0	8	9,9
1	0	2	0	0	2	2,5
0,5	1	1	2	1	5	6,2
0	3	18	4	8	33	40,7
Průměrný počet bodů	**2,4**	**0,6**	**1,8**	**1,4**		
Úspěšnost vyjádřená v %	**60,0**	**15,0**	**45,0**	**35,0**		

Graf



	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0
ZŠ Toužim	13	17.4	13	21.7	4.3	13	0	4.3	13
ZŠ Chodov	3.8	3.8	3.8	0	0	7.7	7.7	3.8	69.2
ZŠ Žlutice	18.75	12.5	0	6.25	6.25	18.75	0	12.5	25
ZŠ Skalná	6.25	18.75	12.5	0	6.5	0	0	6.25	50

Převody jednotek činí žákům problémy obecně, proto se chyby u této úlohy daly předpokládat. Překvapivým faktem byl ale velký počet žáků, kteří získali 0 bodů. Nejvíce bezchybných řešitelů je ze ZŠ Žlutice, avšak nejméně žáků s nulovým počtem bodů je ZŠ Toužim.

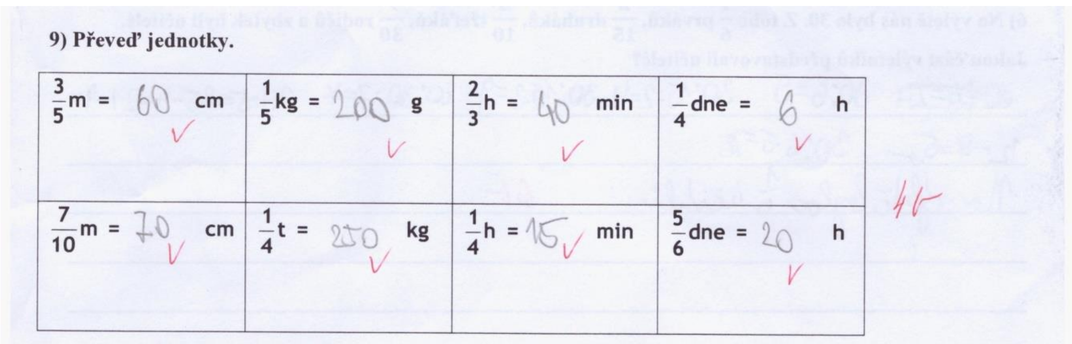
Z této úlohy tedy není jasné, která metoda výuky je vhodnější. Jedná se totiž částečně o zažitý algoritmus a znalost převodů jednotek, z části je možné uplatnit zkušenosti (například $\frac{1}{4}\ h = 15\ min$).

Žákovská řešení

Správná řešení

Bezchybné řešitele je možné nalézt na všech inkriminovaných školách.

ZŠ Chodov



9) Převeď jednotky.

$\frac{3}{5}$ m = 60 cm	$\frac{1}{5}$ kg = 200 g	$\frac{2}{3}$ h = 40 min	$\frac{1}{4}$ dne = 6 h
$\frac{7}{10}$ m = 70 cm	$\frac{1}{4}$ t = 250 kg	$\frac{1}{4}$ h = 15 min	$\frac{5}{6}$ dne = 20 h

4b

Chybná řešení

Opět se jako nejčastější chybou ukázalo, že žáci neřešili úlohu vůbec. Počet těchto žáků z jednotlivých škol uvádím v následující tabulce.

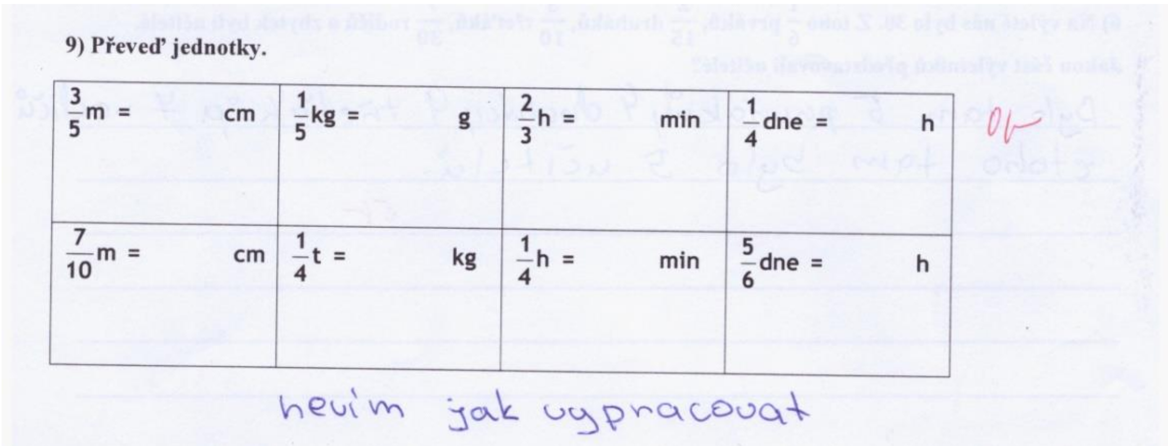
	ZŠ Toužim	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**
Počet žáků, kteří úlohu neřešili	3	19	3	8	33
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**13,0**	**73,1**	**18,6**	**50,0**	**40,7**

Velkým překvapením také bylo, že žáci nedokázali převést $\frac{1}{4}$ hodiny na minuty. Byl předpoklad, že tato znalost bude vycházet ze zkušenosti a nebude potřeba ji počítat. Chybovost v převodech znázorňuje následující tabulka.

Chyby	**ZŠ Toužim**	**ZŠ Chodov**	**ZŠ Žlutice**	**ZŠ Skalná**	**Celkový počet žáků**
$\frac{1}{4}$ h = 15 min	11	20	9	9	49
Celkový počet žáků vyjádřený v %	**47,8**	**76,9**	**56,3**	**56,3**	**60,5**

Z tabulky vyplývá, že přes 60 % všech žáků neví, že čtvrt hodiny je 15 minut. Předpokladem bylo, že žáci vyučovaní podle Hejného metody nad takovou úlohou nebudou váhat.

ZŠ Chodov


9) Převeď jednotky.

$\frac{3}{5}$m = cm	$\frac{1}{5}$kg = g	$\frac{2}{3}$h = min	$\frac{1}{4}$dne = h
$\frac{7}{10}$m = cm	$\frac{1}{4}$t = kg	$\frac{1}{4}$h = min	$\frac{5}{6}$dne = h

nevím jak vypracovat

5.4.11 Celkové hodnocení

Didaktické testy byly hodnoceny podle dosaženého počtu bodů, který byl stanoven na základě počtu procent.

Počet procent správně vyřešených úloh	Bodové rozmezí	Klasifikace
100 - 92	54 - 49,5	1
91 - 78	49 – 42,5	2
77 - 51	42 – 27,5	3
50 - 20	27 - 11	4
19 - 0	10,5 - 0	5

Následující tabulka uvádí počty žáků jednotlivých škol, kteří dosáhli výsledné klasifikace.

Škola	ZŠ Toužim	ZŠ Chodov	ZŠ Žlutice	ZŠ Skalná	Celkový počet žáků	Celkový počet žáků vyjádřený v %
Počet žáků	23	26	16	16	81	100
Klasifikace	**Počet žáků s příslušnou klasifikací**					
1	7	1	7	2	17	21,0
2	5	0	3	4	12	14,8
3	10	8	2	8	28	34,6
4	1	15	4	2	22	27,2
5	0	2	0	0	2	2,5
Průměrná klasifikace	**2,2**	**3,7**	**2,2**	**2,6**		

Test byl učiteli hodnocen jako přiměřený a pestrý.

Žáci ze ZŠ Toužim označili test jako snadný kromě slovních úloh, ty se jim zdáli obtížné, a převodů jednotek. Žáci ze ZŠ Chodov označili test jako průměrný stejně jako žáci ze ZŠ Skalná, ti ale dosáhli mnohem lepších výsledků. Žáci ze ZŠ Žlutice označili test jako lehký, což potvrdila i výsledná průměrná klasifikace žáků 2,19. Žáci, kteří dosáhli výborné klasifikace, byli schopni vyplnit test za 30 minut.

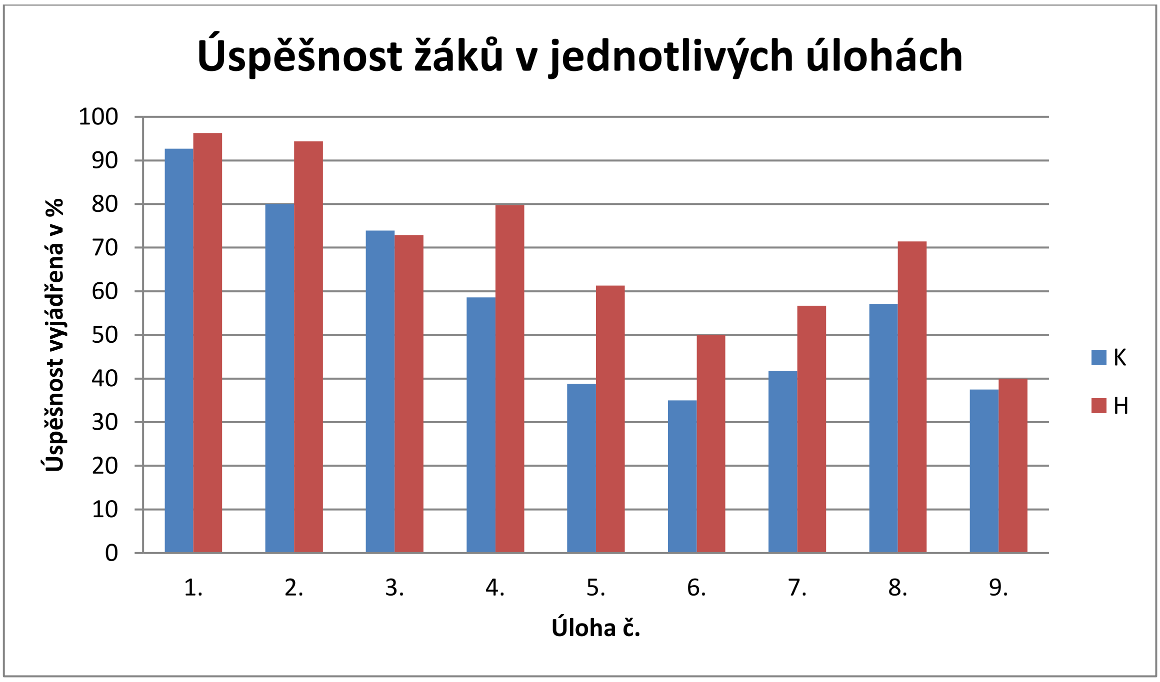
5.5 ZÁVĚRY

Cílem předchozí části práce bylo porovnat výsledky didaktického testu žáků a zjistit, která metoda je ve výuce efektivnější.

V následující tabulce je uvedena procentuální úspěšnost a průměrný počet bodů, kterého dosáhli žáci vyučovaní metodou prof. Hejného, dále jen H (ZŠ Žlutice a ZŠ Skalná), a žáci vyučovaní klasicky, dále jen K (ZŠ Toužim a ZŠ Chodov), v jednotlivých úlohách.

Příklad č./ Max. bodů	**Celkový průměr K**	**Úspěšnost**	**Celkový průměr H**	**Úspěšnost**
1./6 b.	5,56	92,7 %	5,78	96,3 %
2./8 b.	6,40	80,0 %	7,55	94,4 %
3./7 b.	5,17	73,9 %	5,10	72,9 %
4./9 b.	5,27	58,6 %	7,18	79,8 %
5./4 b.	1,55	38,8 %	2,45	61,3 %
6./6 b.	2,10	35,0 %	3,00	50,0 %
7./3 b	1,25	41,7 %	1,70	56,7 %
8./7 b.	4,00	57,1 %	5,00	71,4 %
9./4 b.	1,50	37,5 %	1,60	40,0 %

Pro přehlednost je uvedena úspěšnost žáků v následujícím sloupcovém grafu.



Hypotéza 1: Na jednoduché početní operace nebude mít vliv metoda výuky.

Tato hypotéza nebyla potvrzena.

V úloze č. 1, kde se jedná o prostý zápis zlomků podle diktátu byli úspěšnější žáci vyučovaní Hejného metodou. Také v úloze č. 4 – výpočet části z celku, kde je k výpočtu nutné použít dvě početní operace (dělení a násobení), byli žáci vyučovaní metodou Hejného úspěšnější. Lepšího výsledku dosáhli tito žáci i u úlohy č. 8 – sčítání zlomků se stejným jmenovatelem.

Hypotéza 2: Se slovními úlohami si lépe poradí žáci vyučovaní Hejného metodou.

Tato hypotéza byla potvrzena.

Žákům vyučovaným klasickou metodou dělala největší potíže úloha č. 6 - slovní úloha o školním výletu, následovala úloha č. 9 - převody jednotek, úloha č. 5 – slovní úloha s porovnáním části z celku a úloha č. 7 - slovní úloha o míčích.

Žákům vyučovaným podle Hejného činila největší problém úloha č. 9 (převody jednotek).

Hypotéza 3: Žáci vyučovaní Hejného metodou dosáhnou celkově lepších výsledků.

Tato hypotéza byla potvrzena.

Z předchozího grafu vyplývá, že žáci vyučovaní Hejného metodou byli celkově úspěšnější. Jedinou výjimku tvoří úloha č. 3 - vybarvení dané části obrazce, kde byli o 1 % úspěšnější žáci vyučovaní klasicky.

Výuka navržená a sepsaná prof. Milanem Hejným je pro žáky na 1. stupni vhodná nejen proto, že díky ní dosahují lepších výsledků a získané matematické dovednosti jsou schopni aplikovat, ale především proto, že respektuje jejich uvažování a motivuje je k dalšímu vzdělávání.

ZÁVĚR

Předchozí kapitoly byly věnovány učivu o zlomcích, které je na 1. stupni základní školy zařazeno do tematického okruhu Číslo a početní operace. Byla vymezena množina racionálních čísel jako celek, následně pojem zlomek, jeho původ, definice i možnosti vyjádření. Čtenáři byl představen systém kurikulárních dokumentů pro základní vzdělávání. Neméně důležitou kapitolou byla charakteristika žáka 4. ročníku. Pozornost byla zaměřena především na popis poznávacích procesů, ze kterého vyplývá, že žák v tomto období chce na všechno přijít sám. Potřebuje bádat, zkoumat a ověřovat si vlastní hypotézy. Chceme-li, aby žáka matematika bavila a mohl tak dosahovat lepších výsledků, měli bychom mu toto umožnit.

V dnešní škole je však kladen důraz také na množství probrané látky, či splnění tematických plánů. Nejen z těchto důvodů nezbývá na badání dostatek času a jsou upřednostňovány metody a formy výuky, které jsou příznačné pro transmisivní přístup k vyučování. Proti těmto myšlenkám stojí, jako představitel konstruktivistického přístupu, prof. RNDr. Milan Hejný, CSc., který navrhl a zpracoval jiný přístup k výuce matematiky – Hejného metodu. V současnosti je tato metoda velmi diskutována, především pak její efektivnost a vliv na úroveň matematických znalostí a dovedností žáka.

Velmi protichůdná stanoviska těchto diskusí mne dovedla k jednomu z cílů mé diplomové práce – porovnat úroveň znalostí a dovedností žáků 1. stupně základní školy vyučovaných klasicky a metodou Hejného v oblasti zlomků.

K dosažení tohoto cíle jsem vytvořila didaktický test a zadala jej žákům čtyř různých základních škol. Z výsledků těchto testů vyplývá, že žáci vyučovaní metodou profesora Hejného dosáhli celkově lepších výsledků. Je nutné zmínit, že především s řešením slovních úloh měli tito žáci mnohem menší potíže. Jejich znalost zlomků je tedy důkladnější a komplexnější.

Mým původním záměrem bylo vytvořit vstupní test, sadu příkladů a závěrečný test, sledovat a porovnat zlepšení žáků. Tento záměr nebylo možné z technických důvodů zrealizovat. Naskytla se mi však příležitost zadat didaktický test na více školách. Není tedy možné sledovat pokrok jednotlivých žáků, pouze míru dosažených vědomostí a znalostí. Výsledky takového šetření se ale jeví objektivnější, neboť byl test zadán většímu počtu žáků a zohledňuje se i dlouhodobé hledisko – výuka podle Hejného od první třídy.

Zlomky jsou důležitým a pro žáky poměrně obtížným učivem zejména proto, že zde dochází k přechodu k abstraktním pojmům. Je tedy potřeba vycházet z žákových zkušeností a stavět na tom, co žák již zná. Je nezbytné zařazovat do výuky manipulativní činnosti, problémovou a skupinovou výuku a vyvarovat se prostému předávání faktů, jež z matematiky činí vědu pro žáka nudnou, nezajímavou a náročnou. Musíme umožnit žákům následovat jejich přirozenost.

Cílem této práce nebylo rozhodnout o tom, který z přístupů je lepší, ale poukázat na možnost výběru mezi nimi. Metoda Hejného je motivujícím a efektivním způsobem výuky. Zatracovat transmisivní výuku by ale bylo mylné, neboť právě díky ní má žák nakonec všechny znalosti uspořádané.

Jako pedagogové bychom měli pečlivě volit mezi metodami a vybírat vhodné formy práce. To ale podle mne nestačí. Měli bychom být také odborníky, vzory a nadšenci. Vždyť kdo nehoří, ten nezapálí.

Zpracování odborné literatury, sestavení a především pak vyhodnocení didaktického testu mne obohatilo o nové poznatky a přimělo mne více přemýšlet nad volenými metodami a formami práce.

RESUMÉ

Diplomová práce se zabývá zlomky v učivu 1. stupně základní školy. V teoretické části jsou rozpracována témata vztahující se k teorii tohoto tematického celku – vymezení pojmu zlomek, jeho původ, definici, možnosti vyjádření i obsah učiva. Pozornost je věnována charakteristice žáka 4. ročníku se zaměřením na jeho myšlení a různým přístupům k výuce zlomků, především metodě prof. RNDr. Milana Hejného, CSc. V praktické části je pomocí didaktického testu porovnána úroveň znalostí a dovedností žáků vyučovaných dle daných přístupů.

The thesis is concerned with fractions in primary school curriculum. The theoretical part of the thesis elaborates topics related to the theory of fractions; as it delimits the term, its origin, definition, possibilities of application and teaching content. The attention is devoted to characteristics of a 4th grade pupil and focuses on his/her thinking and also on various strategies to teaching fractions, especially to a method developed by prof. RNDr. Milan Hejný, CSc. The practical part of the thesis uses a didactic test to compare knowledge levels and proficiency of pupils taught in compliance with these methods.

SEZNAM LITERATURY

BALADA, František. *Z dějin elementární matematiky.* Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1959. 238 s.

BĚLÍK, Miroslav. *Celá a racionální čísla ve studiu učitelství prvního stupně základní školy*. Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně, 2000. ISBN 80-7044-294-8.

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Co, proč a jak ve školské matematice II. Zlomky. Matematika, fyzika, informatika*. Praha: Prometheus, 2005. vol. 14, no. 7, s. 394 - 403. ISSN 1210-1761.

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Didaktika matematiky I* [online]., 45 [cit. 2017-02-25]. Dostupné z: http://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&ved=0ahUKEwjJvMWSrqvSAhVMiCwKHfPQCI8QFghWMAc&url=http%3A%2F%2Fwww.ped.muni.cz%2Fwmath%2Finterma%2Fblazkova_cz.doc&usg=AFQjCNHBGdf5P-xHMUypyUKqdPZipRjMpA

DELVENTHAL, Katka Maria, Alfred KISSNER a Malte KULICK. *Kompendium matematiky: vzorce a pravidla, četné příklady včetně řešení: od základních operací po vyšší matematiku*. 2. vyd. Přeložil Jiří HENZLER. V Praze: Euromedia Group - Knižní klub, 2008. Universum (Knižní klub). ISBN 978-80-242-2101-4

DIVÍŠEK, Jiří. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-04-20433-3.

DRÁBEK, Jaroslav a Václav VIKTORA. *Základy elementární aritmetiky: pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství).

HEJNÝ, Milan; NOVOTNÁ, Jarmila; STEHLÍKOVÁ, Naďa. Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha : Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004. s. ISBN 80729018932.

HEJNÝ, Milan. *Matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007* [online]. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2011 [cit. 2017-03-14]. ISBN 978-80-211-0611-6.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989.
Hejného metoda [online]. [cit. 2017-03-06]. Dostupné z: http://www.h-mat.cz/

HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E., ŠIMŠA, J., *Matematika. Racionální čísla, procenta*. Praha: Prometheus, 1994. ISBN 80-85849-49-6

LANGMEIER, Josef a Dana KREJČÍŘOVÁ. *Vývojová psychologie*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Grada, 2006. Psyché (Grada). ISBN 978-80-247-1284-0.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J., *Matematika pro 7. ročník základní školy 1*, Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-111-6

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy:* [učebnice zpracovaná podle učebních osnov vzdělávacího programu Základní škola]. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-111-6.

OKOŃ, Wincenty. *K základům problémového učení*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966. Pedagogická teorie a praxe.

PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 9788021048348.

Písemné opakování učiva o zlomcích [online]. [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: dumy.cz/stahnout/123807

POLÁK, Josef. *Středoškolská matematika v úlohách*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-166-3.

POTŮČEK, Jiří. *Historie matematiky pro učitele*. 1. vyd. Plzeň: Pedagogické centrum Plzeň, 2003. ISBN 80-7020-127-4.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: NÚV - Národní ústav pro vzdělávání, 2016. 164 s. [cit. 2016-11-20]. Dostupné z www: http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2016.pdf

STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. 1. vyd. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie (Orbis).

TRACHTOVÁ, Zdeňka. *Matematiku má dítě v sobě, naslouchejte mu, říká autor revoluční výuky* [online]. [cit. 2017-02-25]. Dostupné z: http://zpravy.idnes.cz/rozhovor-s-profesorem-hejnym-d26-/domaci.aspx?c=A141210_140806_domaci_zt

VÁGNEROVÁ, Marie. *Vývojová psychologie: dětství a dospívání*. Vyd. 2., dopl. a přeprac. Praha: Karolinum, 2012. ISBN 978-80-246-2153-1.

Výroční zpráva o činnosti školy, Základní škola J. A. Komenského Chodov, Smetanova 738, okres Sokolov, příspěvková organizace, školní rok 2015/2016 [online]. [cit. 2017-04-09]. Dostupné z: http://www.zschodov.cz/upload/m010/files/Merunka/Dokumenty%20skoly/Vyrocni%20zprava%2020152016.pdf

Výroční zpráva o činnosti školy za školní rok 2015/2016 [online]. [cit. 2017-04-09]. Dostupné z: http://zsskalna.cz/dokumenty/v_zpr_1516.pdf

ZMRZÍK, Bohumil. *Konstruktivistický a transmisivní úřístup k výuce* [online]. [cit. 2017-02-27]. Dostupné z: http://www.mendelova.cz/files/content/150/files/Konstruktivn%C3%ADatransmisivn%C3%ADp%C5%99%C3%ADstup.pdf

Webová aplikace pro výuku základních poznatků z matematiky na střední škole: *Číselné obory* [online]. [cit. 2017-02-28]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vladimira_pavlicova_bp/Ciselne_obory.php

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ

PŘÍLOHY

Příloha I: Didaktický test

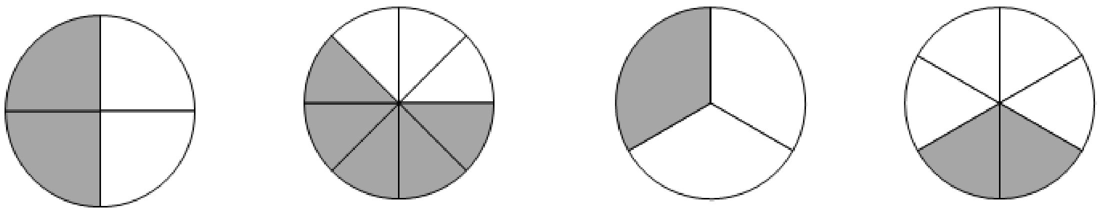
Didaktický test – ZLOMKY

5. ročník

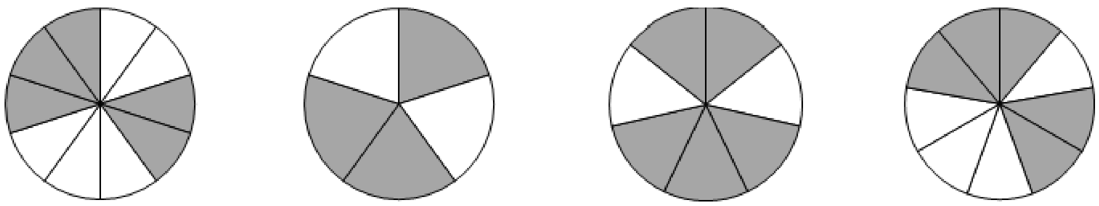
1) Zapiš zlomky podle diktátu.

---

2) Zapiš zlomkem vybarvenou (V) a nevybarvenou (N) část kruhu.

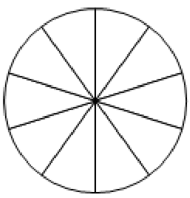
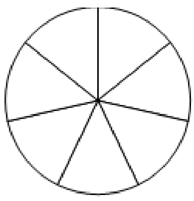
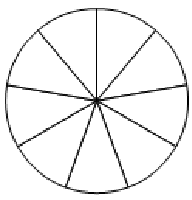
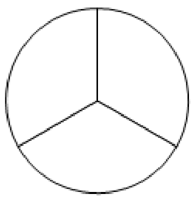


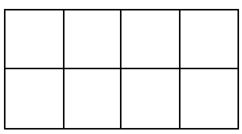
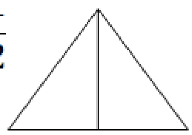
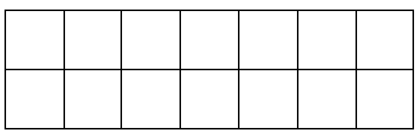
V: **N:** **V:** **N:** **V:** **N:** **V:** **N:**



V: **N:** **V:** **N:** **V:** **N:** **V:** **N:**

3) Vybarvi danou část obrazce.

$\frac{2}{5}$  $\frac{7}{7}$  $\frac{5}{9}$  $\frac{2}{3}$ 

$\frac{3}{4}$  $\frac{1}{2}$  $\frac{3}{7}$ 

4) Vypočítej zlomek z čísla.

$\frac{2}{7}$ z 350 = ________

$\frac{6}{9}$ ze 720 =________

$\frac{9}{10}$ z 800 = _______

$\frac{3}{6}$ ze 480 =________

$\frac{2}{3}$ z 600 = ________

$\frac{4}{8}$ z 880 = ________

$\frac{1}{12}$ ze 120 =________

$\frac{5}{6}$ ze 420 =________

$\frac{5}{9}$ z 990 = ________

5) Co je víc – šestina z 90 Kč, nebo čtvrtina z 64 Kč?

____

____

O kolik? ____________________________

6) Na výletě nás bylo 30. Z toho $\frac{1}{6}$ prváků, $\frac{2}{15}$ druháků, $\frac{3}{10}$ třeťáků, $\frac{7}{30}$ rodičů a zbytek byli učitelé. Jakou část výletníků představovali učitelé?

____

____

____

____

____

____

____

7) Za 210 Kč jsem si koupil 3 míče. Za modrý jsem dal $\frac{1}{2}$ peněz a za žlutý $\frac{1}{3}$ peněz. Za zelený míč jsem zaplatil A) 70 Kč, B) 35 Kč, C) 105 Kč, D) 140 Kč.

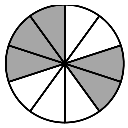
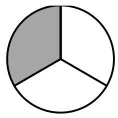
____

____

____

____

8) Vybarvi stejnou barvou políčka, která vyjadřují stejnou hodnotu.

$\frac{4}{7}+\frac{3}{7}$		$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$	1	$\frac{6}{4}-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{10}+\frac{2}{10}$	$\frac{5}{9}-\frac{3}{9}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{5}{11}+\frac{7}{11}$	$\frac{15}{4}-\frac{12}{4}$	$\frac{7}{7}$	

9) Převeď jednotky.

$\frac{3}{5}$m = cm	$\frac{1}{5}$kg = g	$\frac{2}{3}$h = min	$\frac{1}{4}$dne = h
$\frac{7}{10}$m = cm	$\frac{1}{4}$t = kg	$\frac{1}{4}$h = min	$\frac{5}{6}$dne = h

Příloha II: Didaktický test – řešení

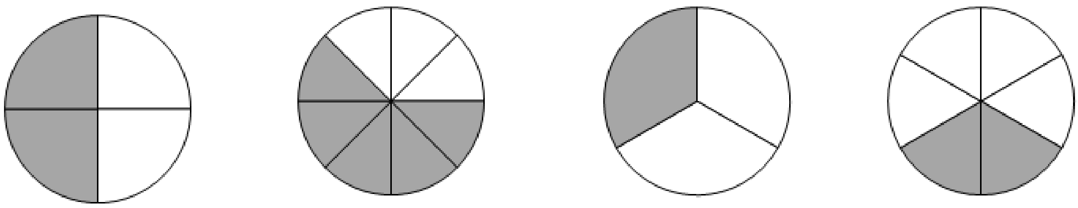
Didaktický test - ZLOMKY - ŘEŠENÍ
5. ročník

1) Zapiš zlomky podle diktátu. *(6 b; 1 b za každý správný zlomek)*

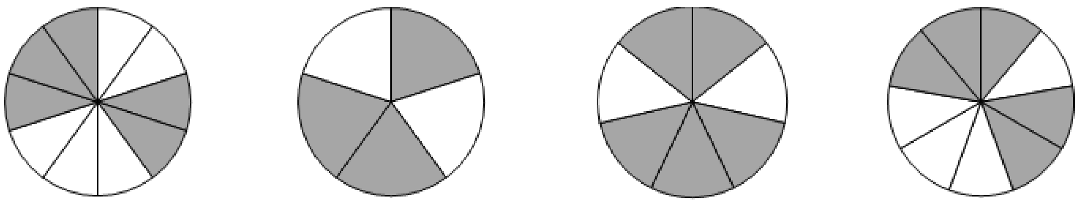
$\frac{15}{12}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{123}{18}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{100}$

2) Zapiš zlomkem vybarvenou (V) a nevybarvenou (N) část kruhu.

(8 b; 0,5 za každý správný zlomek)



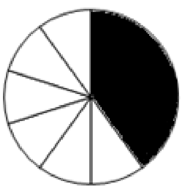
V: $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{2}$ **N:** $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{2}$ **V:** $\frac{5}{8}$ **N:** $\frac{3}{8}$ **V:** $\frac{1}{3}$ **N:** $\frac{2}{3}$ **V:** $\frac{2}{6}$; $\frac{1}{3}$ **N:** $\frac{4}{6}$; $\frac{2}{3}$



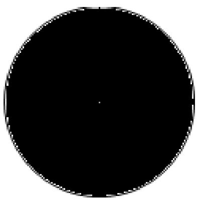
V: $\frac{5}{10}$; $\frac{1}{2}$ **N:** $\frac{5}{10}$; $\frac{1}{2}$ **V:** $\frac{3}{5}$ **N:** $\frac{2}{5}$ **V:** $\frac{5}{7}$ **N:** $\frac{2}{7}$ **V:** $\frac{5}{9}$ **N:** $\frac{4}{9}$

3) Vybarvi danou část obrazce. *(7 b; 1 b za každý správně vybarvený obrazec)*

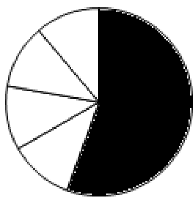
$\frac{2}{5}$



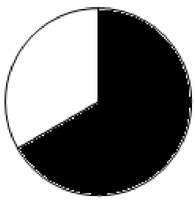
$\frac{7}{7}$



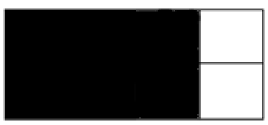
$\frac{5}{9}$



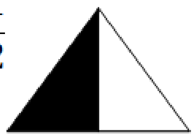
$\frac{2}{3}$



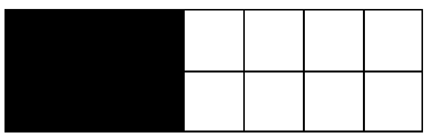
$\frac{3}{4}$



$\frac{1}{2}$



$\frac{3}{7}$



4) Vypočítej zlomek z čísla *(9 b; 1 b za každé správné číslo)*

$\frac{2}{7}$ z 350 = *100*

$\frac{6}{9}$ ze 720 = *480*

$\frac{9}{10}$ z 800 = *720*

$\frac{3}{6}$ ze 480 = *240*

$\frac{2}{3}$ z 600 = *400*

$\frac{4}{8}$ z 880 = *440*

$\frac{1}{12}$ ze 120 = *10*

$\frac{5}{6}$ ze 420 = *350*

$\frac{5}{9}$ z 990 = *550*

5) Co je víc – šestina z 90 Kč, nebo čtvrtina z 64 Kč?

(4 b; 1b za určení šestiny, 1b za určení čtvrtiny, 1b za porovnání zlomků, 1b za určení rozdílu)

$\frac{1}{6}\ z\ 90\ je\ 15$

$\frac{1}{4}\ ze\ 64\ je\ 16$

O kolik? $\boldsymbol{\frac{1}{4} ze\ 64 > \frac{1}{6}\ z\ 90}$ *o 1*

6) Na výletě nás bylo 30. Z toho $\frac{1}{6}$ prváků, $\frac{2}{15}$ druháků, $\frac{3}{10}$ třeťáků, $\frac{7}{30}$ rodičů a zbytek byli učitelé. Jakou část výletníků představovali učitelé?

(6 b; 1b za počet prváků, 1b za počet druháků, 1b za počet třeťáků, 1b za počet rodičů, 1b za počet učitelů, 1b za vyjádření část jakou přestavovali učitelé)

Prváků…………………$\frac{1}{6}\ z\ 30\ je\ 5$

Druháků………………$\frac{2}{15}\ z\ 30\ je\ 4$

Třeťáků………………$\frac{3}{10}\ z\ 30\ jsou\ 9$

Rodičů…………………$\frac{7}{30}\ z\ 30\ je\ 7$

Učitelů…………………*X*

X = 30 – (5 + 4 + 9 + 7)

X = 30 – 25

X = 5 $\rightarrow 5\ z\ 30 \rightarrow \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

Učitelů bylo $\frac{5}{30}\ \left(\frac{1}{6}\right)$.

7) Za 210 Kč jsem si koupil 3 míče. Za modrý jsem dal $\frac{1}{2}$ peněz a za žlutý $\frac{1}{3}$ peněz. Za zelený míč jsem zaplatil A) 70 Kč, B) 35 Kč, C) 105 Kč, D) 140 Kč.

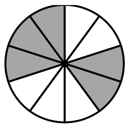
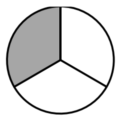
(3 b;1b za cenu modrého míče, 1b za cenu žlutého míče, 1b za cenu zeleného míče)

Modrý……………….. $\frac{1}{2}$ $z\ 210\ je\ 105\ Kč$
Žlutý………………… $\frac{1}{3}$ $z\ 210\ je\ 70\ Kč$
Zelený………………X
X= 210 – (105 + 70)
X = 210 – 175
X = 35

Za zelený míč jsem zaplatil B) 35 Kč.

8) Vybarvi stejnou barvou políčka, která vyjadřují totéž.

(*7 b;1b za každou správnou skupinu)*

A $\frac{4}{7}+\frac{3}{7}$	**B** 	**C** $\frac{2}{9}$	**D** $\frac{3}{4}$
E $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$	**A** 1	**F** $\frac{6}{4}-\frac{1}{4}$	**B** $\frac{1}{2}$
B $\frac{3}{10}+\frac{2}{10}$	**C** $\frac{5}{9}-\frac{3}{9}$	**G** $\frac{12}{11}$	**F** $\frac{5}{4}$
G $\frac{5}{11}+\frac{7}{11}$	**D** $\frac{15}{4}-\frac{12}{4}$	**A** $\frac{7}{7}$	**E** 

9) Převeď jednotky. *(4 b; 0,5b za každé správné číslo)*

$\frac{3}{5}$m = *60* cm	$\frac{1}{5}$kg = *200* g	$\frac{1}{4}$h = *15* min	$\frac{1}{4}$dne = *6* h
$\frac{7}{10}$m = *70* cm	$\frac{1}{4}$t = *250* kg	$\frac{2}{3}$h = *40* min	$\frac{5}{6}$dne = *20* h

Hodnocení:
54b – 49,5b **Výborně**
49b – 42,5b **Chvalitebně**
42b – 27,5b **Dobře**
27b – 11b **Dostatečně**
10,5b – 0b **Nedostatečně**