

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Plzeň 2017

Jan RENDL



ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

DIPLOMOVÁ PRÁCE

VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ KLUZNÝCH
LOŽISEK PRO ÚLOHY DYNAMIKY ROTORŮ

Jan RENDL

Prohlášení

Předkládám k posouzení tuto diplomovou práci. Prohlašuji, že jsem ji vypracoval samostatně a využil jsem jen uvedených pramenů a literatury.

V Plzni dne 31. května 2017

Jan Rendl

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval Ing. Michalu Hajžmanovi, Ph.D., za příkladné vedení diplomové práce, četné připomínky, konzultace, ochotu a trpělivost. Dále bych rád poděkoval Ing. Luboši Smolíkovi za odborné rady a pomoc při zpracování této práce. Nemalé díky patří také mé rodině, přítelkyni a všem, kteří mě podporovali během mého studia.

Jan Rendl

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá počítačovým modelováním rotorových soustav uložených na kluzných ložiskách. V první části je ukázáno modelování rotorů pomocí metody konečných prvků. Druhá část práce se zabývá kluzným ložiskem, jeho matematickým popisem a výpočtem tlakového rozložení v olejovém filmu, hydrodynamické síly a dynamických vlastností vrstvy maziva pomocí numerických metod. Numerické řešení je implementováno do vlastního výpočtového programu CALBEAR vytvořeného v pracovním prostředí MATLAB. Základní úlohy dynamiky rotorů s kluznými ložisky jako je modální analýza, stabilita systému a dynamická odezva, jsou řešeny vlastním programem CALROT v MATLABu. Na závěr práce je ukázána analýza vybraných rotorových systémů pomocí vlastních programů. Vybrané výsledky jsou srovnány s komerčními programy.

Klíčová slova: rotor, metoda konečných prvků, kluzné ložisko, dynamické vlastnosti, numerické metody, software

Abstract

This master thesis deals with the computer modelling of rotor systems with journal bearings. The modelling of shafts via finite element method is derived in the first part of the thesis. The second part is focused on journal bearings, their mathematical description and the calculation of the pressure distribution in oil film, hydrodynamic force and dynamic characteristics of oil film using numerical method. These numerical solutions are implemented into in-house programme called CALBEAR, which was made in MATLAB. The basic rotordynamic problems like modal analysis, stability and dynamic response are solved in the in-house programme CALROT, which is also created in MATLAB. There is the comparison of the solution of chosen rotor systems from in-house programs in the end of the thesis. The chosen results are compared to the results from commercial programs.

Keywords: rotor, finite element method, journal bearing, dynamic characteristics, numerical methods, software

Obsah

Seznam použitých symbolů	7
1 Úvod	8
2 Modelování rotujících hřídelů	10
2.1 Hřidelový prvek v pevném nerotujícím prostoru	10
2.2 Tuhý kotouč v pevném nerotujícím prostoru	13
2.3 Matematický model rotorového systému	15
2.4 Buzení	16
3 Modelování kluzných ložisek	18
3.1 Tlakové rozložení v ložiskové mezeře	18
3.2 Hydrodynamická síla	21
3.3 Dynamické vlastnosti olejového filmu	22
4 Počítačová implementace modelování kluzných ložisek	24
4.1 Tlakové rozložení v ložiskové mezeře	24
4.1.1 Přívod oleje drázkou	26
4.2 Hydrodynamická síla a rovnovážná poloha	29
4.3 Numerický výpočet dynamických vlastností olejového filmu	29
4.4 Výpočtový program pro modelování kluzných ložisek	32
5 Základní úlohy rotordynamiky a jejich počítačová implementace	34
5.1 Stavový prostor	34
5.2 Modální analýza a nestabilita	35
5.2.1 Problém vlastních hodnot	35
5.2.2 Analýza nestability	36
5.2.3 Modální redukce	37
5.3 Počítačová implementace úloh rotordynamiky	38
5.3.1 Počítačová implementace problému vlastních hodnot	39
5.3.2 Počítačová implementace chování rotorové soustavy v čase	41

6 Výsledky	45
6.1 Lavalův rotor	45
6.2 Čerpadlo	52
7 Závěr	66
7.1 Rozšíření diplomové práce	68
Literatura	69

Seznam použitých symbolů

$A(x)$	[m ²]	plocha průřezu hřídelového prvku
$b_{i,j}$	[N · s · m ⁻¹]	koeficienty tlumení olejového filmu
$c(X), c$	[m]	tloušťka vrstvy olejového filmu při centrické poloze čepu hřídele
d	[m]	vnitřní průměr čepu hřídele
D	[m]	vnější průměr čepu hřídele
$D(x)$	[m]	deviační moment setrvačnosti
D_ν	[−]	ν -tý poměrný útlum
e_H	[m]	excentricita čepu hřídele
E	[Pa]	Youngův modul pružnosti v tahu
G	[Pa]	modul pružnosti ve smyku
$J(x), J_p(x)$	[kg · m ²]	moment setrvačnosti, polární moment setrvačnosti
F_{By}	[N]	složka hydrodynamické síly působící na lož. pánev ve směru y
F_{Bz}	[N]	složka hydrodynamické síly působící na lož. pánev ve směru z
F_{Hy}	[N]	složka hydrodynamické síly působící na čep hřídele ve směru y
F_{Hz}	[N]	složka hydrodynamické síly působící na čep hřídele ve směru z
$h(X), h$	[m]	tloušťka vrstvy olejového filmu
$k_{i,j}$	[N · m ⁻¹]	koeficienty tuhosti olejového filmu
l	[m]	délka hřídelového prvku
L	[m]	délka ložiska
m	[kg]	hmotnost
p	[Pa]	hydrodynamický tlak ve vrstvě olejového filmu
p_{CAV}	[Pa]	tlak v kavitované oblasti
p_L	[Pa]	tlak na levé straně ložiska
p_P	[Pa]	tlak na pravé straně ložiska
p_{VST}	[Pa]	tlak oleje přiváděného mazací drážkou
R	[m]	vnější poloměr čepu hřídele
t	[s]	čas
u	[m · s ⁻¹]	obvodová složka rychlosti proudění v olejovém filmu
u_1	[m · s ⁻¹]	obvodová složka rychlosti bodu na vnitřním povrchu ložiska
u_2	[m · s ⁻¹]	obvodová složka rychlosti bodu na povrchu čepu hřídele
v	[m]	příčná výchylka kmitání ve svislém směru
w	[m]	příčná výchylka kmitání ve vodorovném směru
X	[m]	obvodová souřadnice
y_B	[m]	y -ová souřadnice středu ložiskové pánve
y_H	[m]	y -ová souřadnice středu čepu hřídele
\dot{y}_B	[m · s ⁻¹]	rychlosť středu ložiskové pánve ve směru osy y

\dot{y}_H	[m · s ⁻¹]	rychlosť středu čepu hřídele ve směru osy y
Y	[m]	radiální souřadnice
z_B	[m]	z -ová souřadnice středu ložiskové pánve
z_H	[m]	z -ová souřadnice středu čepu hřídele
\dot{z}_B	[m · s ⁻¹]	rychlosť středu ložiskové pánve ve směru osy z
\dot{z}_H	[m · s ⁻¹]	rychlosť středu čepu hřídele ve směru osy z
Z	[m]	axiální souřadnice
β	[rad]	obvodová souřadnice spolurotuujícího souřadnicového systému
γ	[rad]	polohový úhel čepu hřídele
ε_H	[—]	poměrná excentricita čepu hřídele
η	[Pa · s]	dynamická viskozita oleje
λ	[rad · s ⁻¹]	vlastní číslo
ν	[—]	Poissonovo číslo
ϱ	[kg · m ⁻³]	hustota
$\tau_{i,j}$	[N · m ⁻²]	smyková složka napětí
φ	[rad]	obvodová souřadnice
ω, ω_0	[rad · s ⁻¹]	úhlová rychlosť otáčení čepu hřídele
Ω_ν	[rad · s ⁻¹]	ν -tá vlastní frekvence
$\vartheta(x), \psi(x)$	[rad]	Eulerovy úhly natočení řezu
A		systémová matice
B		matice tlumení
E		jednotková matice
f		vektor buzení
G, G^(e), G^(k)		matice gyroskopických účinků (hřídelového prvku a kotouče)
I_i		integrální matice
J(x)		matice setrvačnosti
K, K^(e)		matice tuhosti (hřídelového prvku)
M, M^(e), M^(k)		matice hmotnosti (hřídelového prvku a kotouče)
q(t)		vektor výchylek
T		permutační matice
u(t)		vektor stavového prostoru
v_ν		ν -tý vlastní vektor
V		modální matice
Λ		spektrální matice

1 Úvod

Kluzná ložiska patří ve strojírenství k nejrozšířenějším druhům ložisek. Nejčastěji se využívají pro ukládání rychloběžných rotorů. Kluzná ložiska se vyskytují jak u velkých generátorových soustav [8] v elektrárnách tak i u malých turbodmychadel [11] v motorech aut. Hlavním důvodem jejich použití je nízké tření a relativně snadno ovlivnitelné dynamické vlastnosti olejového filmu. Samotných konstrukčních řešení jednotlivých kluzných ložisek existuje celá řada. Může se jednat o kluzná ložiska s rozdílnými průřezy ložiskové pánve (např. válcová, citronová, atd.), o ložiska s drážkami nebo bez. Dalšími variantami mohou být ložiska s naklápacími segmenty nebo ložiska s plovoucími kroužky, které se využívají zejména u malých turbodmychadel. Pro správné fungování navrhovaného stroje je potřeba znát jeho chování v okolí provozních otáček, popř. během rozběhu a doběhu rotoru. Nevhodné chování při provozních podmínkách i správně navržené rotorové soustavy je často zapříčiněno nepřesnostmi ve výrobě a může mít fatální následky pro celou rotorovou soustavu nebo v krajních případech i pro celou elektrárnu. Na základě výše zmíněných skutečností je u rotorových soustav uložených na kluzných ložiskách kladen důraz na počitačové modelování dynamické odezvy na vnější buzení.

Počitačové modelování rotorové soustavy s kluznými ložisky je rozděleno do dvou samostatných úloh. První úlohou je modelování rotujícího hřídele. Druhou úlohou je pak modelování samotného kluzného ložiska, resp. ložiskového stojanu. Pro oba subsystémy je poté nezbytné zadefinovat jejich vzájemnou vazbu. Vazba mezi subsystémy může být obecně realizována pomocí matic dynamických vlastností nebo pomocí sil, kterými mezi sebou systémy navzájem působí.

V dnešní době není problém díky vyspělé výpočetní technice modelovat rotující hřídele s dostatečně velkou přesností, aby chování modelu odpovídalo realitě. Nejrozšířenější metodou využívanou pro modelování rotorů je metoda konečných prvků. Popis modelování rotujících hřídelů je uveden v kapitole 2.

Modelování kluzných ložisek je matematicky složitější problém než modelování rotorů a přístupů jak je modelovat existuje několik. Pro jednoduchá válcová ložiska se často využívá approximace [13] tzv. krátkým nebo dlouhým ložiskem. Uvažováním těchto limitních případů a předpokladů s nimi spojených dojde ke zjednodušení Reynoldsovy rovnice, která popisuje tlakové rozložení v ložiskové mezeře. Reynoldsova rovnice je obecně parciální diferenciální rovnice druhého rádu. Analytické řešení rovnic tohoto typu je velmi obtížné a pro některé případy až nemožné. Důsledkem zjednodušení Rey-

noldsovy rovnice je pak možnost analyticky vyjádřit tlakové rozložení a následně i hydrodynamické síly, které toto tlakové pole generuje. Pro obecnější ložiska (např. ložiska s drázkami) se mohou tato zjednodušení a approximace příliš vzdalovat od přesného řešení a dějů, které se v olejovém filmu během provozu vyskytují. Proto se využívá řešení pomocí numerických metod. Jednou z těchto metod je metoda konečných diferencí. Odvození Reynoldsovy rovnice, výpočet hydrodynamické síly, koeficientů tuhosti a srovnání jednotlivých metod jejího řešení pro čistě válcová ložiska je detailně zpracováno ve vlastní bakalářské práci [7]. Dříve získané teoretické znalosti a jejich rozšíření je shrnuto v kapitole 3.

V kapitole 4 je podrobně rozepsána počítačová implementace modelování kluzných ložisek. Na základě této implementace byl vytvořen v pracovním prostředí MATLAB vlastní výpočtový program CALBEAR, který umožňuje pro ložiska s drázkami nebo bez vypočítat tlakové rozložení, hydrodynamickou sílu, stanovit rovnovážnou polohu čepu hřídele a vypočítat dynamické vlastnosti olejového filmu.

Teoretické základy dynamické analýzy rotorových soustav s kluznými ložisky jsou uvedeny v kapitole 5. Mezi základní úlohy dynamiky rotorových soustav patří modální analýza, analýza stability a v neposlední řadě i dynamická odezva na buzení. V druhé části této kapitoly je ukázána počítačová implementace úloh dynamiky rotorů do vlastního výpočtového programu CALROT.

Na závěr této diplomové práce jsou v kapitole 6 ukázány výsledky vlastních programů CALBEAR a CALROT po aplikaci na dva vybrané rotorové systémy. Vybrané výsledky jsou srovnány s výsledky z komerčních programů ARMD a AVL.

Cíle této diplomové práce lze stručně shrnout do těchto bodů:

- odvození matematického modelu rotujících hřidelů,
- odvození matematického modelu kluzných ložisek a jejich dynamických vlastností,
- počítačová implementace vlastního programu pro analýzu kluzných ložisek s drázkami,
- počítačová implementace vlastního programu pro úlohy dynamiky rotorů s kluznými ložisky,
- ověření správnosti vytvořených výpočtových programů a srovnání výsledků s komerčním programy.

2 Modelování rotujících hřídelů

Základem všech úloh rotordynamiky je vlastní rotující hřídel. Podle zadání úlohy a požadavků na řešení rozhodneme o způsobu matematického popisu rotoru. U geometricky složitějších rotorových systémů není vhodné systém popisovat matematickým modelem se soustředěnými parametry, protože bychom se mohli dopustit velké odchylinky od skutečného modelu. Diskrétní matematický model bychom použili v případě konstrukčně jednoduchých modelů, kde by hmotnost tuhého kotouče byla několikanásobně větší než hmotnost pružného hřídele. Hmota hřídele je v tomto případě poté soustředěna do kotouče. Rotor, kdy je hřídel na svých koncích uložený na dvou tuhých ložiskách a uprostřed má nasazený tuhý kotouč, označujeme [10] jako Lavalův rotor. Pro přesnější matematický popis jakéhokoli rotorového systému je výhodné uvažovat spojitě rozloženou hmotu hřídele, na který jsou v libovolných místech nasazeny tuhé kotouče a případně připojeny i další členy (např. visko-elastické). Tuhými kotouči můžeme modelovat např. ventilátory, ozubená kola nebo spojky. Diskretizaci modelu se spojitě i diskrétně rozloženými parametry provedeme [10] pomocí metody konečných prvků. Důsledek metody konečných prvků je nahrazení tělesa konečným počtem elementů a vyčíslení hledaných parametrů probíhá pouze v uzlových bodech. Velikost elementů musíme volit s ohledem na geometrii systému. V následujících podkapitolách je postupně ukázáno odvození matematického modelu rotoru.

2.1 Hřídelový prvek v pevném nerotujícím prostoru

Pokud je hřídel rotačně symetrický, je výhodné hřídelový prvek popisovat v pevném prostoru, tj v nerotujícím souřadném systému. Pro rotačně symetrický rotor platí vztahy pro momenty setrvačnosti

$$J(x) = J_y(x) = J_z(x), \quad J_p(x) = 2J(x), \quad \mathbf{J}(x) = \text{diag}(J_p(x), J(x), J(x)). \quad (2.1)$$

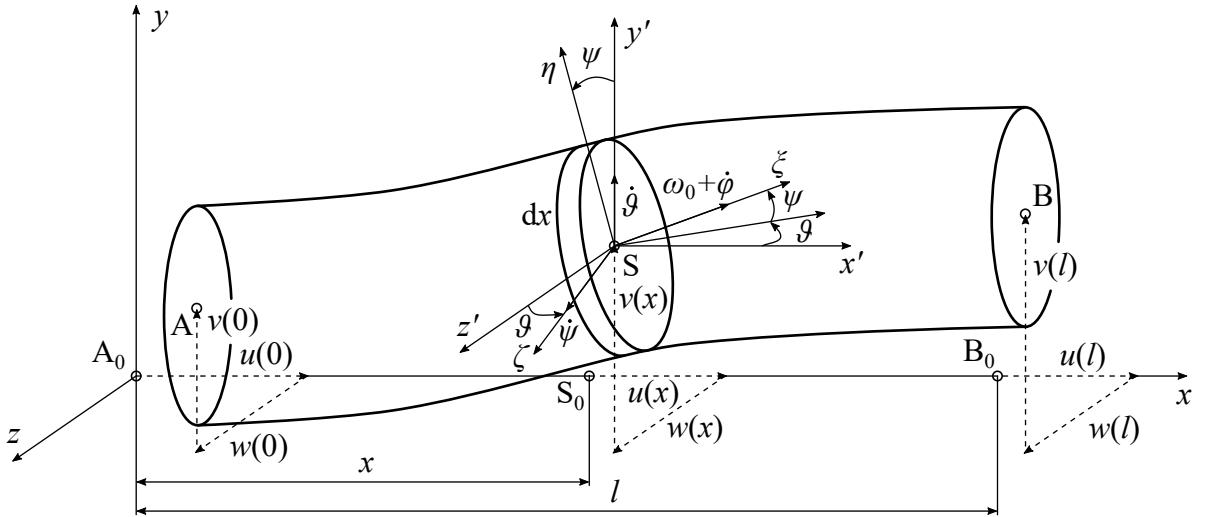
V pevném pravotočivém souřadnicovém systému xyz vyjmeme z hřídele mezi uzly i (A) a $i+1$ (B) prvek e o délce l a průřezu $A(x)$ (obr. 2.1). Současně uvažujeme [10], že hřídel je příčně nestlačitelné kontinuum. Při popisu pohybu pružného hřídele se omezíme pouze na příčné kmitání. Podélné a torzní kmitání nebudeme uvažovat. Poloha středu S diferenciálně malého řezu (obr. 2.1) tloušťky dx je poté určena příčnými výchylkami $v(x)$ a $w(x)$. Natočení řezu je definováno Eulerovými úhly $\vartheta(x)$ a $\psi(x)$. Rovina řezu hřídele zůstává kolmá k deformované podélné ose (Bernoulli-Navier hypotéza). Úhlovou rychlosť vlastní rotace označíme jako ω_0 . Orientace jednotlivých výchylek je detailně znázorněna na obr. 2.1. Hmotný element řezu koná při kmitání hřídele prostorový

pohyb. Pohyb rozložíme základním rozkladem ve středu hmotnosti S na pohyb unášivý posuvný charakterizovaný rychlostí

$$\mathbf{v}(x) = [\dot{v}(x), \dot{w}(x)]^T \quad (2.2)$$

a pohyb relativní sférický s okamžitou úhlovou rychlostí

$$\boldsymbol{\omega}(x) = [\omega_0 + \dot{\vartheta}(x) \sin \psi(x), \dot{\vartheta}(x) \cos \psi(x), \dot{\psi}(x)]^T. \quad (2.3)$$



Obr. 2.1: Hřídelový prvek

Při odvození budeme [10] dále předpokládat malé výchylky $\vartheta(x)$, $\psi(x)$, a proto můžeme zavést approximaci $\sin \psi(x) \approx \psi(x)$, $\cos \psi(x) \approx 1$. Kinetická energie elementu hřídele je s uvážením vztahů (2.2) a (2.3) rovna

$$\begin{aligned} E_k^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_0^l [A(x)\mathbf{v}^T(x)\mathbf{v}(x) + \boldsymbol{\omega}^T(x)\mathbf{J}(x)\boldsymbol{\omega}(x)] \varrho_s dx \doteq \\ &\doteq \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ A(x) [\dot{v}^2(x) + \dot{w}^2(x)] + J_p(x)\omega_0^2 + 2J_p(x)\dot{\vartheta}(x)\psi(x)\omega_0 + \right. \\ &\quad \left. + J(x) [\dot{\vartheta}^2(x) + \dot{\psi}^2(x)] \right\} \varrho_s dx, \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde ϱ_s je hustota materiálu hřídele a $\mathbf{J}(x)$ je matice setrvačnosti (2.1). Před výpočtem potenciální energie vyjádříme posunutí bodů o souřadnicích x, y, z s ohledem na obr. 2.1 jako

$$u_x(x) = -y\psi(x) + z\vartheta(x), \quad u_y(x) = v(x), \quad u_z(x) = w(x), \quad (2.5)$$

kde $\psi(x) = \frac{\partial v}{\partial x} = v'(x)$ a $\vartheta(x) = -\frac{\partial w}{\partial x} = -w'(x)$. Vektor přetvoření má poté tvar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(x) &= [\varepsilon_x(x), \gamma_{xy}(x), \gamma_{xz}(x)]^T = \left[\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right]^T = \\ &= [-y\psi'(x) + z\vartheta'(x), 0, 0]^T.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Potenciální energie hřídelového prvku je rovna

$$\begin{aligned}E_p^{(e)} &= \int_0^l \int_{A(x)} \{ E\varepsilon_x(x)^2 + G[\gamma_{xy}^2(x) + \gamma_{xz}^2(x)] \} dA(x) dx = \\ &= \int_0^l \int_{A(x)} E[-yv''(x) - zw''(x)] dA(x) dx,\end{aligned}\quad (2.7)$$

kde E je Youngův modul pružnosti v tahu a G modul pružnosti ve smyku. Při aproximaci příčných výchylek hřídelového prvku kubickým polynomem můžeme jednotlivé výchylky vyjádřit jako

$$v(x) = \Phi(x)\mathbf{c}_1, \quad w(x) = \Phi(x)\mathbf{c}_2, \quad (2.8)$$

kde $\Phi(x) = [1, x, x^2, x^3]$ a $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ jsou vektory koeficientů bázových polynomů. Výslednou konfiguraci hřídelového prvku je možné zapsat pomocí zobecněných výchylek v uzlu i pro $x = 0$ a v uzlu $i + 1$ pro $x = l$ ve tvaru

$$\mathbf{q}^{(e)} = \underbrace{[v(0), \psi(0), v(l), \psi(l)]^T}_{\mathbf{q}_1^T}, \quad \underbrace{[w(0), \vartheta(0), w(l), \vartheta(l)]^T}_{\mathbf{q}_2^T}. \quad (2.9)$$

Pomocí approximačních vztahů (2.8) zapíšeme maticově s využitím indexů vektory zobecněných výchylek jako

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{S}_j \mathbf{c}_j \quad (2.10)$$

pro $j = 1, 2$. Matice \mathbf{S}_j postupně obsahují prvky

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Matematickou úpravou vyloučíme vektory koeficientů \mathbf{c}_j a výchylky zapíšeme ve tvaru

$$v(x) = \Phi(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1, \quad w(x) = \Phi(x)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2, \quad (2.12)$$

$$\psi(x) = \Phi'(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1, \quad \vartheta(x) = -\Phi'(x)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2. \quad (2.13)$$

Charakteristické matice hřídelového prvku e (matice hmotnosti $\mathbf{M}^{(e)}$, matice gyroskopických účinků $\mathbf{G}^{(e)}$ a matice tuhosti $\mathbf{K}^{(e)}$) odvodíme z Lagrangeových rovnic II. druhu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \frac{\partial E_p^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega_0 \mathbf{G}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}, \quad (2.14)$$

kde jednotlivé matice mají po parciálních derivacích tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-T}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)\mathbf{S}_2^{-1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_2\mathbf{S}_2^{-1} \\ -2\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_2\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_3\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_3\mathbf{S}_2^{-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

V maticích (2.15) jsou pro lepší přehlednost zavedené pomocné integrální matice

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= \int_0^l \varrho A(x) \Phi^T(x) \Phi(x) dx, \\ \mathbf{I}_2 &= \int_0^l \varrho J(x) \Phi'^T(x) \Phi'(x) dx, \\ \mathbf{I}_3 &= \int_0^l E J(x) \Phi''^T(x) \Phi''(x) dx.\end{aligned}\tag{2.16}$$

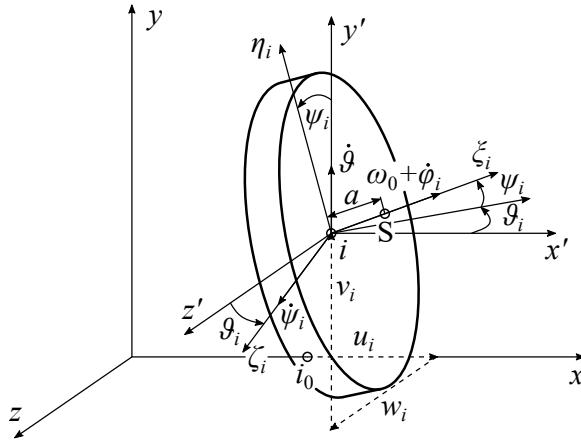
Pro pomocné matice (2.16) platí $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^4$ a charakteristické matice (2.15) jsou řádu $\mathbf{M}^{(e)}, \mathbf{G}^{(e)}, \mathbf{K}^{(e)} \in \mathbb{R}^8$. Pro prizmatický hřídelový prvek obsahují pomocné integrační matice prvky

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= \varrho Al \begin{bmatrix} l & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} \\ & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} \\ & & \frac{l^4}{5} & \frac{l^5}{6} \\ & \text{sym.} & & \frac{l^6}{7} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \varrho Jl \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & l & l^2 \\ & & \frac{4}{3}l^2 & \frac{3}{2}l^3 \\ & \text{sym.} & & \frac{9}{5}l^4 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{I}_3 &= E Jl \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 12l^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

2.2 Tuhý kotouč v pevném nerotujícím prostoru

Při modelování tuhého kotouče uvažujeme [10], že je kotouč rotačně symetrický a centricky kolmo nasazený v uzlu i konečnoprvkového modelu hřídele. Nasazení kotouče je znázorněno na obr. 2.2. Kotouč koná při rotaci hřídele prostorový pohyb. Při výpočtu kinetické energie využijeme základního rozkladu ve středu hmotnosti S vzdáleného od uzlu i o hodnotu a (obr. 2.2). Při odvození budeme stejně jako v podkapitole 2.1 předpokládat pouze příčné kmitání, platnost malých výchylek Eulerových úhlů a approximaci (linearizaci) goniometrických funkcí těchto úhlů. Rychlosť unášivého posuvného pohybu následně vyjádříme jako

$$\mathbf{v}_S \doteq \left[\dot{v}_i + a\dot{\psi}_i, \dot{w}_i - a\dot{\vartheta}_i \right]^T.\tag{2.18}$$



Obr. 2.2: Rotačně symetrický kotouč

Okamžitá úhlová rychlosť relativného sférického pohybu tuhého kotouče je formálne totožná se vzťahom (2.3) a po uvážení linearizace nabývá tvaru

$$\boldsymbol{\omega}_i \doteq [\omega_0 + \dot{\vartheta}_i \psi_i, \dot{\vartheta}_i, \dot{\psi}_i]^T. \quad (2.19)$$

Kinetická energia tuhého kotouče je poté s uvážením podmínky malých Eulerových úhlů rovna

$$E_k^{(k)} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_S^T m \mathbf{v}_S + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_i \doteq \frac{1}{2} m \left[(\dot{v}_i + a\dot{\vartheta}_i)^2 + (\dot{w}_i - a\dot{\vartheta}_i)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[I_0 \left(\omega_0^2 + 2\omega_0 \dot{\vartheta}_i \psi_i \right) + I \left(\dot{\vartheta}_i^2 + \dot{\psi}_i^2 \right) \right], \quad (2.20)$$

kde m je hmotnosť kotouče a rozloženie hmotnosti v souřadnicovém systému $\xi_i \eta_i \psi_i$ je popsáno maticí setrvačnosti $\mathbf{I} = \text{diag}(I_0, I, I)$. K sestavení charakteristických matic tuhého kotouče opět využijeme Lagrangeovy rovnice II. druhu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(k)}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}^{(k)}} \right) - \frac{\partial E_k^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(k)}} = \mathbf{M}^{(k)} \ddot{\mathbf{q}}^{(k)} + \omega_0 \mathbf{G}^{(k)} \dot{\mathbf{q}}^{(k)}, \quad (2.21)$$

kde $\mathbf{q}^{(k)}$ je vektor zobecněných výchylek

$$\mathbf{q}^{(k)} = [v_i, \psi_i, w_i, \vartheta_i]^T. \quad (2.22)$$

Matice $\mathbf{M}^{(k)}$, $\mathbf{G}^{(k)}$ jsou po řadě matice hmotnosti kotouče a matice gyroskopických účinků a platí $\mathbf{M}^{(k)}, \mathbf{G}^{(k)} \in \mathbb{R}^4$. Jednotlivé matice obsahují prvky

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{bmatrix} m & ma & 0 & 0 \\ ma & I + ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & -ma \\ 0 & 0 & -ma & I + ma^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

2.3 Matematický model rotorového systému

V prostoru izolovaný rotorový systém rotující s úhlovou rychlostí ω_0 nahradíme n hřídelovými prvky a m tuhými kotouči. Rozčleněním tak celkově vznikne $n + 1$ uzlů. V podkapitolách 2.1 a 2.2 je detailně popsáno odvození charakteristických matic jednotlivých hřídelových prvků a tuhých kotoučů. Matice hřídelových prvků (2.15) a tuhých kotoučů (2.23) budeme transformovat [10] do vhodnějších konfiguračních prostorů, které jsou definovány vektory zobecněných výchylek

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} = [v(0), w(0), \vartheta(0), \psi(0), v(l), w(l), \vartheta(l), \psi(l)]^T, \quad (2.24)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(k)} = [v_i, w_i, \vartheta_i, \psi_i]^T. \quad (2.25)$$

Mezi vektory zobecněných výchylek (2.9) a (2.24), resp. (2.22) a (2.25) platí transformační vztahy

$$\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)} \tilde{\mathbf{q}}^{(e)}, \quad \mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)} \tilde{\mathbf{q}}^{(k)}, \quad (2.26)$$

kde jednotlivé permutační matice mají prvky

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Transformaci charakteristických matic hřídelových prvků a tuhých kotoučů do konfiguračních prostorů provedeme [10] pomocí vztahů

$$\tilde{\mathbf{X}}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{X}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}, \quad \tilde{\mathbf{X}}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)T} \mathbf{X}^{(k)} \mathbf{T}^{(k)}, \quad (2.28)$$

kde za $\mathbf{X}^{(e)}$, resp. $\mathbf{X}^{(k)}$ postupně dosazujeme $\mathbf{M}^{(e)}, \mathbf{G}^{(e)}, \mathbf{K}^{(e)}$, resp. $\mathbf{M}^{(k)}, \mathbf{G}^{(k)}$. Pro rotorový systém zavedeme globální vektor zobecněných výchylek uzlů s pořadovým označením $i = 1, 2, \dots, n$ korespondující s konfiguračním prostorem (2.24) a (2.25)

$$\mathbf{q}(t) = [\dots, \mathbf{q}_{i-1}(t), \mathbf{q}_i(t), \mathbf{q}_{i+1}(t), \dots]^T = [\dots, v_i(t), w_i(t), \vartheta_i(t), \psi_i(t), \dots]^T. \quad (2.29)$$

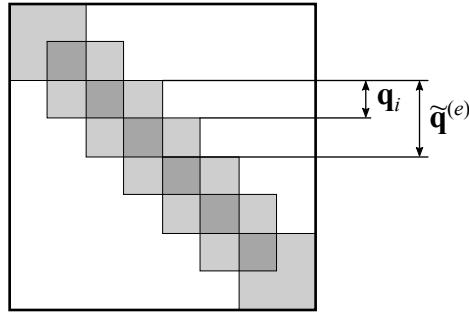
Charakteristické matice celé rotorové soustavy v matematickém modelu volného kmitání

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

získáme „sečtením“ matic od jednotlivých prvků ve smyslu MKP“. Proces sestavování globálních matic z blokových matic je zjednodušen naznačen na obr. 2.3. Za blokové matice nemusí být uvažovány pouze charakteristické matice elementů (2.15) a (2.23), ale např. uložení rotoru nebo dalsí připojená tělesa pomocí pružně-viskózních vazeb v uzlu i s uvážením pořadí výchylek z vektoru (2.25). Matice \mathbf{B} označuje vnitřní tlumení a je nejčastěji vyjádřena v proporcionálním tvaru

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (2.31)$$

kde α a β jsou koeficienty proporcionálního tlumení.

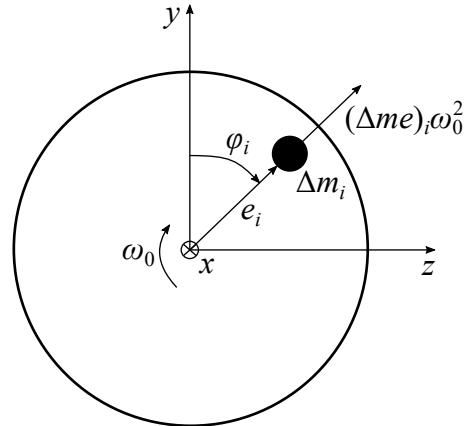


Obr. 2.3: Struktura globálních matic matematického modelu

2.4 Buzení

V podkapitole 2.3 je uveden obecný matematický model pro volné kmitání. I při obou nulových počátečních podmínkách je však možné rotorovou soustavu uvést do pohybu pomocí tzv. budicích sil. V tomto případě mluvíme o vynuceném kmitání a od volného kmitání (2.30) se model odlišuje nenulovou pravou stranou. Buzení má obecně ne-lineární charakter. Matematický model vynuceného kmitání poté zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t). \quad (2.32)$$


 Obr. 2.4: Statický nevývažek v uzlu i

Vektor buzení se může skládat z několika složek. Mezi základní patří buzení od nevývahy \mathbf{f}_{nev} (obr. 2.4) a od vlastní tíhy \mathbf{f}_{tiha} , pokud neuvažujeme výchylky z rovnovážné polohy, ale vůči počátku globálního souřadnicového systému. Zatížení od vlastní tíhy hřídelových prvků $\mathbf{f}_{tiha}^{(e)}$ a tuhých kotoučů $\mathbf{f}_{tiha}^{(k)}$ zjednodušeně rozpočítáme do příslušejících uzlů. Další typy buzení, které se mohou ve vektoru objevit, jsou síly od vazeb a kontaktů, např. přidírání (v anglické literatuře označováno jako *rubbing*). V našem případě se zaměříme hlavně na uložení rotorových systémů v kluzných ložiskách. Vlivem zatížení kluzných ložisek vzniká v olejovém filmu hydrodynamický tlak, který generuje sílu v ložisku \mathbf{f}_{loz} označovanou jako sílu hydrodynamickou. Velikost a směr síly plyne

z principu akce a reakce. Postup výpočtu hydrodynamického tlaku a hydrodynamické síly je popsán v následujících kapitolách. Výsledný vektor buzení v uzlu i zapíšeme obecně ve tvaru

$$\mathbf{f}^i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t) = \underbrace{\begin{bmatrix} F_y^i \\ F_z^i \\ M_y^i \\ M_z^i \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{nev}^i} + \underbrace{\begin{bmatrix} (\Delta me)_i \omega_0^2 \cos \varphi_i \\ (\Delta me)_i \omega_0^2 \sin \varphi_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{tiha}^{i(e)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{m_L^{(e)} + m_P^{(e)}}{2} g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{tiha}^{i(e)}} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} -m^{(k)} g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{tiha}^{i(k)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} F_{Hy} \\ F_{Hz} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{loz}^i}, \quad (2.33)$$

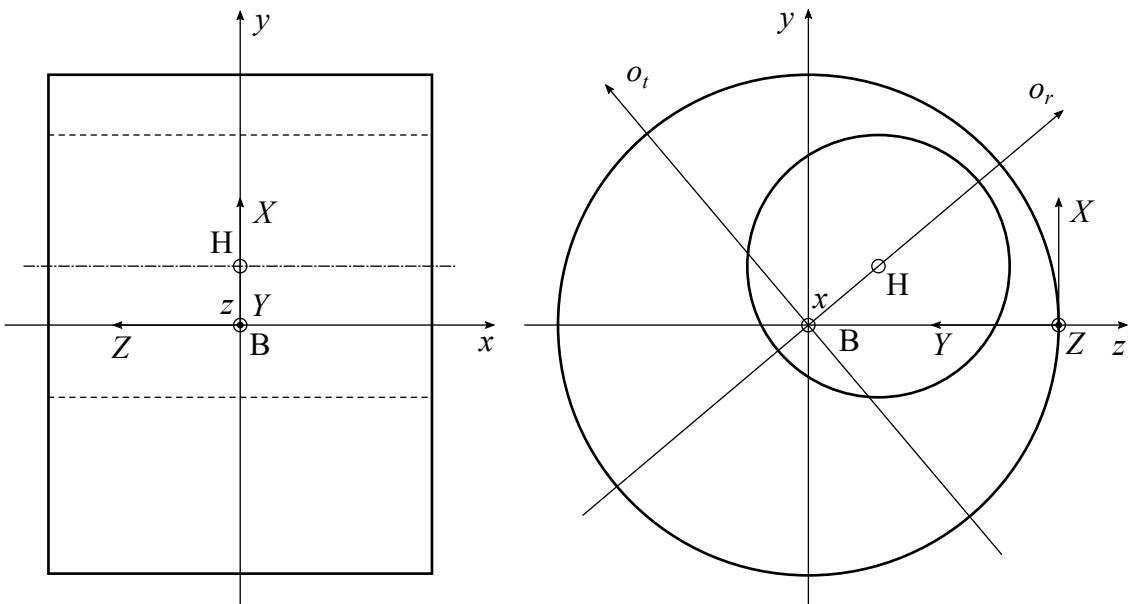
kde $(\Delta me)_i$ je statický nevývažek, ω_0 je okamžitá úhlová rychlosť, φ je natočení průřezu hřídele, $m_L^{(e)}$ resp. $m_P^{(e)}$ je hmotnosť hřídelového prvku vlevo resp. vpravo od uzlu i , $m^{(k)}$ je hmotnosť kotouče nasazeného na hřídel v místě uzlu i a F_{Hy}, F_{Hz} jsou složky hydrodynamické síly olejového filmu v uzlu i . Složky hydrodynamické síly jsou silně nelineární a závisí na poloze čepu \mathbf{q} , jeho rychlosti $\dot{\mathbf{q}}$ a také na rychlosti otáčení ω_0 . V uzlech i , kde se nenachází nevývažky, ložiska, nebo nedochází ke kontaktu čepu rotoru a ložiskové pánve, jsou příslušné vektory nulové.

3 Modelování kluzných ložisek

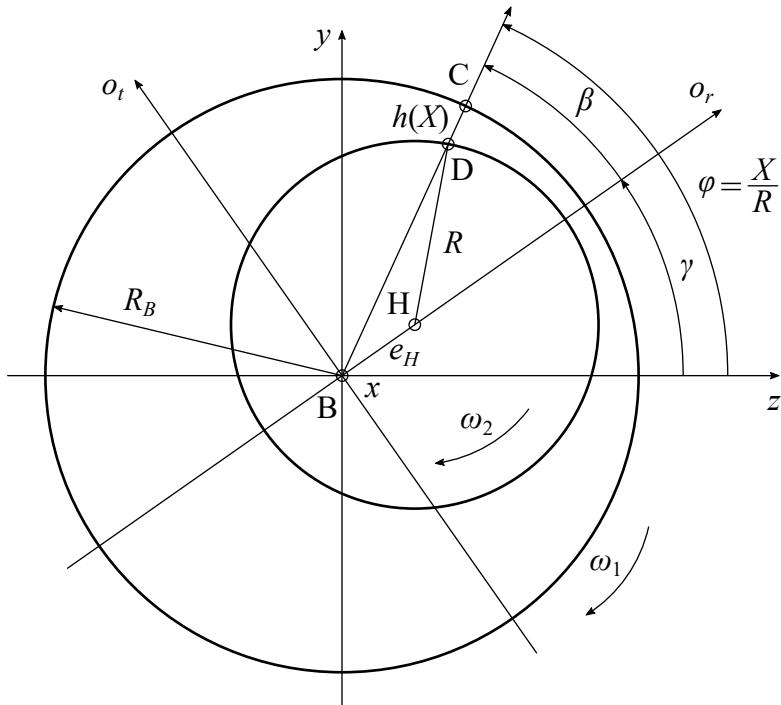
Pro ukládání rychloběžných rotorů se používají kluzná ložiska. Důvodem je jejich konstrukční jednoduchost, velká únosnost a jejich dynamické vlastnosti, které lze snadno ovlivnit a které mají velký vliv na chování rotoru. Pro správné fungování kluzných ložisek musí být vyvolán jev hydrodynamického mazání. Tento jev nastane v případě, že je zajištěna velká rychlosť pohybu povrchů, mezi nimiž se olejový film nachází. Další podmínkou pro vznik tohoto potřebného jevu je nerovnoběžnost povrchů a vytvoření tzv. klínové mezery [7]. V této kapitole se seznámíme s teoretickými základy potřebnými pro popis chování ložisek a stanovení charakteristických vlastností hydrodynamických ložisek.

3.1 Tlakové rozložení v ložiskové mezeře

Pro popis tlakového rozložení v olejovém filmu je nutné znát nejprve geometrický popis ložiskové mezery. Zavedeme [13] proto kartézský souřadnicový systém XYZ odlišný od globálního systému xyz . Osu X ztotožníme s obvodovým směrem, osu Y se směrem radiálním a osu Z se směrem axiálním. Počátek tohoto souřadnicového systému umístíme na povrch ložiskové pánve do středu její délky (obr. 3.1).



Obr. 3.1: Zavedení souřadnicového systému XYZ



Obr. 3.2: Příčný řez ložiskem

Na obr. 3.2 je znázorněn příčný řez ložiskem. Tloušťka olejového filmu h je obecně funkcí obvodové souřadnice X a axiální souřadnice Z . Poloha středu čepu hřídele je v ložiskové pánvi jednoznačně určena polohovým úhlem γ a poměrnou excentricitou

$$\varepsilon_H = \frac{e_H}{c}, \quad (3.1)$$

kde c je radiální ložisková vůle při centrické poloze čepu hřídele a e_H je vzdálenost středu čepu hřídele od středu ložiskové pánve. Tloušťka olejového filmu tak v každém příčném řezu závisí pouze na tvaru ložiskové pánve, poměrné excentricitě a polohovém úhlu. Na základě detailního odvození [7], [13] je pro ložisko válcového tvaru tloušťka olejového filmu v daném příčném řezu zapsána jako

$$h(X) = c \left[1 - \varepsilon_H \cos \left(\frac{X}{R} - \gamma \right) \right]. \quad (3.2)$$

Proudění oleje v kluzném radiálním ložisku popsal v roce 1886 irský fyzik Osborne Reynolds. Při odvození Reynoldsovy rovnice uvažujeme [13] předpoklady klasické teorie hydrodynamického mazání:

- čep hřídele a ložisková pánev jsou absolutně tuhé,
- jejich povrchy jsou dokonale hladké,
- čep hřídele je válcový,
- příčný průřez ložiskové pánve má obecný tvar,

- tvar ložiskové pánve se v axiálním směru nemění,
- šířka ložiskové mezery je velmi malá vzhledem k poloměru čepu hrídele ($R \approx R_B$),
- mazivo je Newtonovská tekutina,
- proudění v ložiskové mezeře je laminární a izotermické,
- tlak maziva se v radiálním směru nemění, protože mazivo v tomto směru ne-proudí,
- zanedbáváme setrvačné účinky maziva kvůli jejich malým hodnotám,
- vliv zakřivení olejového filmu je zanedbatelný.

Uvažováním výše uvedených předpokladů dojde ke zjednodušení při popisu rychlostí a tlakového rozložení. Na základě rovnováhy sil ve vyjmutém elementu z ložiskové mezery a rovnice kontinuity je detailně odvozena [7] Reynoldsova rovnice do výsledného tvaru

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\varrho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\varrho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial Z} \right) = 6 \frac{\partial}{\partial X} [\varrho h (u_1 + u_2)] + 12 \frac{\partial}{\partial t} (h\varrho), \quad (3.3)$$

kde p je hydrodynamický tlak, h je tloušťka olejového filmu, η je dynamická viskozita oleje, ϱ je hustota oleje, u_1, u_2 jsou obvodové rychlosti pánve, resp. čepu, X je obvodová a Z axiální prostorová souřadnice. Obvodovou rychlosť bodu C na vnitřním povrchu ložiskové pánve lze vyjádřit ze složek rychlosti bodu B ve směru y a z jako

$$u_1 = -\dot{z}_B \sin \frac{X}{R} + \dot{y}_B \cos \frac{X}{R} - R \omega_1, \quad (3.4)$$

kde ω_1 je úhlová rychlosť ložiskové pánve. Analogicky zapíšeme obvodovou rychlosť bodu D na povrchu čepu hrídele s využitím složek rychlosti bodu H a úhlové rychlosťi ω_2 čepu hrídele jako

$$u_2 = -\dot{z}_H \sin \frac{X}{R} + \dot{y}_H \cos \frac{X}{R} - R \omega_2. \quad (3.5)$$

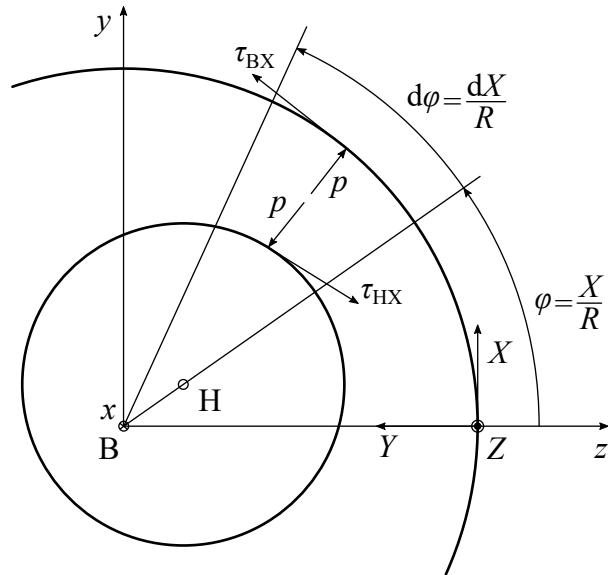
Squeeze člen $\frac{\partial h}{\partial t}$, neboli změna tloušťky olejového filmu v čase, má pro úlohy rotordynamiky velký význam. Při chodu rotorů totiž dochází k neustálým vibracím, a proto po vypuštění tohoto člena z Reynoldsovy rovnice by byla aktuální poloha čepu v ložiskové pánvi zohledněna pouze v členech parciálních derivacích tloušťky podle prostorových proměnných X a Z a omezili bychom se pouze na stacionární řešení. Za předpokladu, že kluzné ložisko je kruhového průřezu, pak časová derivace tloušťky olejového filmu (3.2) je

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -c \left[\dot{\varepsilon} \cos \left(\frac{X}{R} - \gamma \right) + \varepsilon \dot{\gamma} \sin \left(\frac{X}{R} - \gamma \right) \right], \quad (3.6)$$

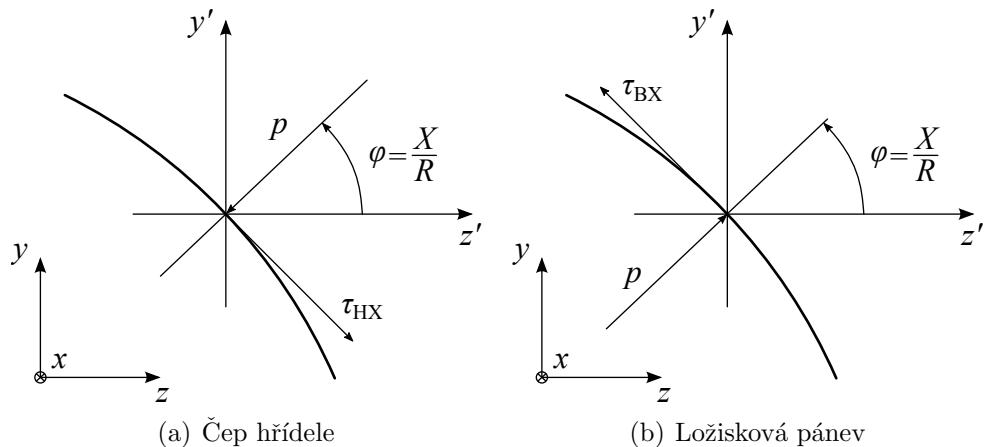
kde $\dot{\varepsilon}$ a $\dot{\gamma}$ je rychlosť změny poměrné excentricity a polohového úhlu v čase.

3.2 Hydrodynamická síla

Po zatížení kluzného ložiska se vytvoří nosná olejová vrstva působící na čep hřídele a ložiskovou pánev silou, kterou nazýváme [13] hydrodynamickou silou. Výsledná hydrodynamická síla je způsobena normálovým tlakem a smykovou složkou napětí vyvolanou přilínáním oleje na povrch čepu a ložiskové pánve (obr. 3.3).



Obr. 3.3: Rozložení tlaku a smykových složek napětí v ložiskové mezeře



Obr. 3.4: Směry působení tlaku a smykových složek napětí

Při výpočtu hydrodynamické síly budeme obecně uvažovat, že v ložisku dojde ke kavitaci. Ke kavitaci dochází v části ložiskové mezery, kde se nevytváří nosný olejový film. V kavitované oblasti je mazivo tvořeno směsí kapaliny a plynu. Důsledek tohoto jevu je pokles tlaku v této oblasti. Při uvážení kavítace je [13] rozložení smykových složek

napětí a tlaku následující

$$\tau_{dHX} = \tau_{HX}, \quad \tau_{dHZ} = \tau_{HZ}, \quad p_d = p \quad \text{pro} \quad p \geq p_{CAV}, \quad (3.7)$$

$$\tau_{dBX} = \tau_{BX}, \quad \tau_{dBZ} = \tau_{BZ}, \quad p_d = p \quad \text{pro} \quad p \geq p_{CAV}, \quad (3.8)$$

$$\tau_{dHX} = \tau_{HXC}, \quad \tau_{dHZ} = 0, \quad p_d = p_{CAV} \quad \text{pro} \quad p < p_{CAV}, \quad (3.9)$$

$$\tau_{dBX} = \tau_{BXC}, \quad \tau_{dBZ} = 0, \quad p_d = p_{CAV} \quad \text{pro} \quad p < p_{CAV}, \quad (3.10)$$

kde p je hydrodynamický tlak jako řešení Reynoldsovy rovnice (3.3) a složky τ jsou složky smykových napětí v olejovém filmu. Složky smykových napětí s indexem C a normálový tlak p_{CAV} jsou pak hodnoty v kavitované oblasti. Výpočet jednotlivých složek smykových napětí v ložiskové mezeře je detailně popsán v [7], [13]. Normálový tlak p_d v olejovém filmu je [13] mnohonásobně větší než smyková napětí, a proto je můžeme zanedbat, aniž bychom se dopustili výrazné odchylky. Při uvážení elementární plochy

$$dS = dXdZ, \quad (3.11)$$

lze s ohledem na rozložení tlaku podle obr. 3.3 (matematicky (3.7) až (3.10)) vyjádřit složky hydrodynamické síly působící na čep hrídele F_H a pánev F_B v pevném souřadnicovém systému yz pomocí plošných integrálů

$$F_{Hy} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi R} p_d \sin \frac{X}{R} dXdZ, \quad (3.12)$$

$$F_{Hz} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi R} p_d \cos \frac{X}{R} dXdZ, \quad (3.13)$$

$$F_{By} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi R} p_d \sin \frac{X}{R} dXdZ, \quad (3.14)$$

$$F_{Bz} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi R} p_d \cos \frac{X}{R} dXdZ. \quad (3.15)$$

3.3 Dynamické vlastnosti olejového filmu

Jedním z hlavních důvodů aplikace kluzných ložisek v rychloběžných rotorových soustavách jsou jejich dynamické vlastnosti. Mezi ně patří tuhost a tlumení olejového filmu. Tuhost olejového filmu velmi ovlivňuje vlastní frekvence celé rotorové soustavy. Jednotlivé koeficienty tuhosti je možné do matice tuhosti ložiska zapsat [9] jako

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{Hy}}{\partial y} & \frac{\partial F_{Hy}}{\partial z} \\ \frac{\partial F_{Hz}}{\partial y} & \frac{\partial F_{Hz}}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Olejový film má díky svému velkému poměrnému útlumu pozitivní vliv na chování rotoru při přejízdění kritických otáček. Jednotlivé koeficienty tlumení lze v matici tlumení vyjádřit [9] jako

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{Hy}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_{Hy}}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial F_{Hz}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_{Hz}}{\partial \dot{z}} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Při zanedbání setrvačných účinků maziva je možné působící sílu na čep rozepsat [9], [2] jako

$$\begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{y}_H \\ \Delta \dot{z}_H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_H \\ \Delta z_H \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Z uvedeného vztahu (3.18) plyne, že pokud budeme při znalosti všech koeficientů tuhosti a tlumení působit na čep silou o složkách F_y a F_z , vychýlíme ho ze statické rovnovážné polohy o neznámý přírůstek Δy_H a Δz_H s přírůstkem rychlosti $\Delta \dot{y}_H$ a $\Delta \dot{z}_H$.

4 Počítačová implementace modelování kluzných ložisek

V této kapitole je pro uvedené teoretické základy a vztahy z kapitoly 3 postupně ukázána počítačová implementace modelování kluzných ložisek. Na závěr kapitoly je stručně popsán vlastní program zpracovaný v pracovním prostředí MATLAB.

4.1 Tlakové rozložení v ložiskové mezeře

Obecná Reynoldsova rovnice (3.3) je parciální diferenciální rovnící druhého řádu. Tento typ rovnice je výhodné řešit pomocí numerických metod. Jednou z těchto metod je [6] metoda konečných differencí. Princip této metody je založen na pokrytí ložiskové mezery sítí uzlů a nahrazení parciálních derivací konečnými differencemi. Rozdělením ložiskové mezery [13] v obvodovém směru na M a v axiálním směru na $N - 1$ stejně velkých úseků vznikne dvourozměrná síť ekvidistantních uzlů s krokem ΔX v obvodovém a ΔZ v axiálním směru (obr. 4.1). Jednotlivé parciální derivace nahradíme [6] vztahy

$$\frac{\partial p}{\partial X} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta X}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial X^2} = \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta X^2}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial Z} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta Z}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2} = \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta Z^2}, \quad (4.4)$$

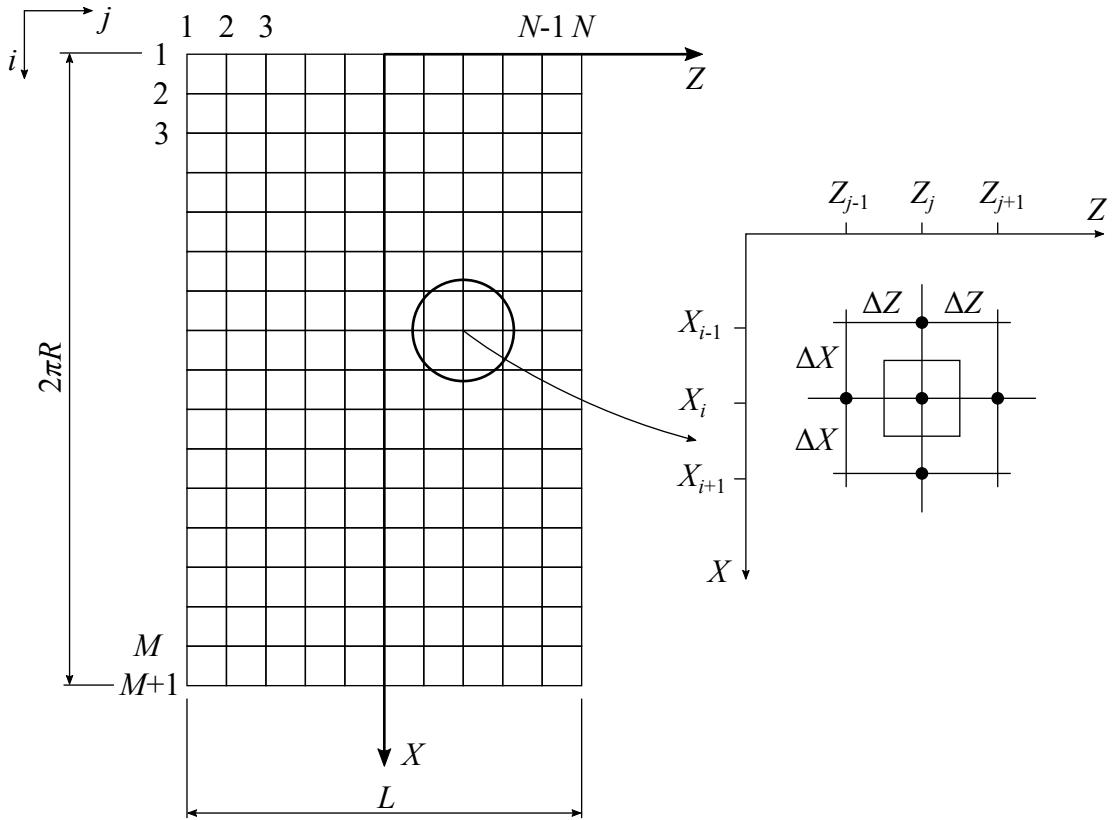
kde $p_{i,j}$ je tlak v uzlu i, j vnitřní sítě $i = 1, 2, 3, \dots, M$, $j = 2, 3, \dots, N - 1$. Po dosazení vztahů (4.1) až (4.4) do rovnice (3.3) můžeme tuto rovnici pro příslušný uzel i, j vyjádřit jako lineární kombinaci tlaků v uzlových bodech pomocí pětibodového schématu (obr. 4.1)

$$a_{i,j} p_{i+1,j} + b_{i,j} p_{i-1,j} + c_{i,j} p_{i,j} + d_{i,j} p_{i,j+1} + e_{i,j} p_{i,j-1} = f_{i,j}, \quad (4.5)$$

kde $a_{i,j}$ až $f_{i,j}$ jsou příslušné lineární koeficienty [7]. Po sestavení rovnice (4.5) pro všechny vnitřní uzly sítě dostáváme soustavu algebraických rovnic, kterou lze maticově zapsat jako

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{f}, \quad (4.6)$$

kde matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M(N-2), M(N-2)}$ a vektory $\mathbf{p}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{M(N-2)}$.



Obr. 4.1: Pokrytí ložiskové mezery sítí uzlů

Řešení soustavy rovnic (4.6) musí vyhovovat [13] okrajovým podmínkám:

- na stranách ložiska z obr. 3.1 předpokládáme rozdílné tlaky p_L a p_P ,

$$p_{i,1} = p_P, \quad (4.7)$$

$$p_{i,N} = p_L, \quad (4.8)$$

- v obvodovém směru je tlakové rozložení periodické (pro první hladinu je v pětibodovém schématu potřeba nultá hladina, pro M -tou hladinu je potřeba hladina $M + 1$),

$$p_{0,j} = p_{M,j}, \quad (4.9)$$

$$p_{M+1,j} = p_{1,j}, \quad (4.10)$$

- uzlům, které odpovídají přívodům oleje, předepisujeme hodnotu tlaku p_{VST} odpovídající tlaku přiváděného oleje

$$p_{i,j} = p_{VST}. \quad (4.11)$$

Rovnice (4.5) pro uzly i, j odpovídající známým uzlům z okrajových podmínek (4.7) až (4.11) při sestavování výsledné soustavy rovnic (4.6) vynecháváme. Hodnoty tlakových okrajových podmínek se vyskytují ve vektoru pravé strany (4.13).

Maticovou rovnici (4.6) můžeme dále rozepsat pomocí submatic

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_2 \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{B}_i & \mathbf{C}_i & \mathbf{A}_i \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{B}_{M-1} & \mathbf{C}_{M-1} & \mathbf{A}_{M-1} \\ \mathbf{B}_M & \mathbf{C}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{M-1} \\ \mathbf{B}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{M-1} \\ \mathbf{p}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{M-1} \\ \mathbf{f}_M \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

kde jednotlivé submatice mají pro příslušný řez i v obvodovém směru (obr. 4.1) s ohledem na okrajové podmínky (4.7) a (4.10) tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \text{diag}(a_i) \in \mathbb{R}^{N-2, N-2}, \\ \mathbf{B}_i &= \text{diag}(b_i) \in \mathbb{R}^{N-2, N-2}, \\ \mathbf{C}_i &= \begin{bmatrix} c_i & d_i & & \\ e_i & c_i & d_i & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & e_i & c_i & d_i \\ & e_i & c_i & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-2, N-2}, \\ \mathbf{p}_i &= \begin{bmatrix} p_{i,2} \\ p_{i,3} \\ \vdots \\ p_{i,j} \\ \vdots \\ p_{i,N-2} \\ p_{i,N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-2}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} f_i - e_i p_P \\ f_i \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_i \\ f_i - d_i p_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N-2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.1.1 Přívod oleje drážkou

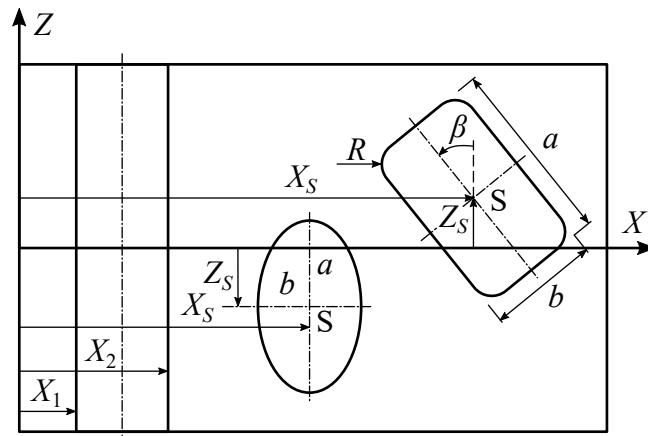
Kluzná ložiska můžeme rozdělit podle druhu mazání do dvou hlavních skupin:

- ložiska samomazná – pouzdro je nasyceno mazivem, které se během chodu postupně uvolňuje,
- ložiska s vnějším mazáním – tento druh ložisek obsahuje drážky a otvory, kterými je mazivo o známém tlaku přiváděno.

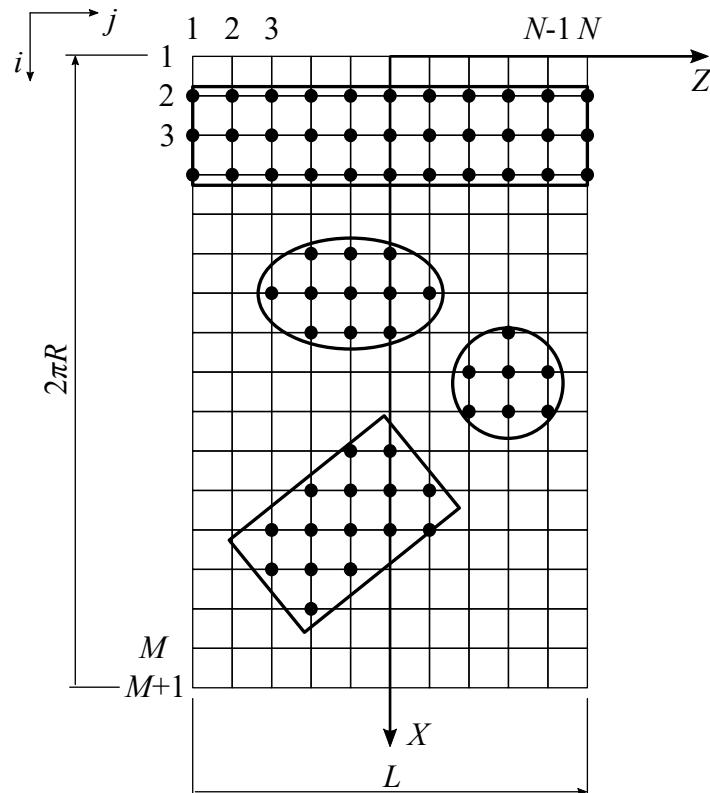
V této podkapitole je ukázáno, jak počítačově modelovat přívod oleje do ložiskové mezery pomocí drážky. V praxi se nejčastěji vyskytují tyto mazací drážky:

- axiální drážka po celé délce ložiska,
- mazací otvor ve tvaru kružnice nebo elipsy,
- čtvercový nebo obdélníkový mazací otvor.

Jednotlivé typy drážek jsou spolu s jejich geometrickým popisem znázorněny na obr. 4.2. Na obr. 4.3 jsou pro ilustraci zaneseny drážky do rozvinuté sítě z obr. 4.1. Při zanesení drážky do sítě zanedbáváme konstrukční realizaci, tj. neuvažujeme zakřivení pouzdra a drážky přesně odpovídají svému matematickému popisu v rovině. Každá drážka je poté reprezentována uzly, které zahrnuje, a v těchto uzlech je předepsán tlak oleje (4.11). Pokud bude drážka zasahovat do uzlů na stranách ložiska, budeme v těchto bodech předepisovat tlaky z drážky (4.11) místo tlaků z okrajových podmínek (4.7) a (4.8).



Obr. 4.2: Geometrický popis drážek



Obr. 4.3: Síť uzlů a drážky

Jak je patrné z vektoru tlaků \mathbf{p} (4.12), resp. \mathbf{p}_i (4.13), jsou jednotlivé uzly vnitřní sítě postupně řazeny (číslovány) po rádcích. V tomto vektoru jsou současně obsaženy nejen neznámé (hledané) tlaky ale i tlaky s předepsanou hodnotou na vstupu drážky. Tyto známé tlaky je potřeba převést na pravou stranu rovnice. Nevýhodou je, že uzly reprezentující drážku nemají obecně pravidelnou strukturu, kterou by bylo snadné blokově vyjádřit a následně převést na pravou stranu. Proto si seřadíme celkový vektor \mathbf{p} do vhodnější struktury. K tomuto seřazení využijeme předpokladu, že přesně známe indexy (pořadí) známých uzlů, a provedeme transformaci

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{p}}, \quad (4.14)$$

kde \mathbf{p} je vektor tlaků v původním pořadí (4.13), \mathbf{T} je permutační matice a vektor $\tilde{\mathbf{p}}$ je složen ze dvou subvektorů známých tlaků \mathbf{p}_Z a neznámých tlaků \mathbf{p}_N v pořadí

$$\tilde{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}_Z, \mathbf{p}_N]^T. \quad (4.15)$$

Vztah (4.14) dosadíme do (4.6), celou rovnici zleva přenásobíme \mathbf{T}^T a dostáváme vztahy pro

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{f} \quad (4.17)$$

a po blokovém zápisu dostáváme

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_Z \\ \mathbf{p}_N \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{p}}} = \tilde{\mathbf{f}}. \quad (4.18)$$

Po matematické úpravě dostáváme přeurovenou soustavu rovnic

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{A}}} \mathbf{p}_N = \tilde{\mathbf{f}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{b}}} \mathbf{p}_Z, \quad (4.19)$$

která je úlohou minimalizace rezidua a řešení vyjádříme pomocí pseudoinverzní matice \mathbf{A}^+ [3] ve tvaru

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{A}^+ \hat{\mathbf{b}} = (\hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{b}}. \quad (4.20)$$

Výsledkem (4.20) jsou hodnoty neznámých tlaků mimo drážky a strany ložiska.

4.2 Hydrodynamická síla a rovnovážná poloha

Po numerickém výpočtu (4.6) tlakového rozložení z Reynoldsovy rovnice známe diskrétní hodnoty tlaků v jednotlivých uzlech sítě pokrývající ložiskovou mezeru. Tyto hodnoty ale není možné použít ve vztazích (3.12) až (3.13), kde se vyskytuje spojité rozložení hydrodynamického tlaku p . Uvedené dvojné integrály přepíšeme na dvojnásobnou sumaci na základě obr. 4.1, kde předpokládáme, že tlak v uzlu i, j působí pouze na své okolí o velikosti $\Delta X \times \Delta Z$. Po přepsání jsou výsledné vztahy

$$F_{Hy} = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N p_{i,j} \Delta X \Delta Z \sin \frac{X_i}{R}, \quad (4.21)$$

$$F_{Hz} = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N p_{i,j} \Delta X \Delta Z \cos \frac{X_i}{R}. \quad (4.22)$$

Při numerickém výpočtu složek hydrodynamické síly uvažujeme pouze hodnoty tlaků v uzlech, kde platí $p_{i,j} > 0$. Hydrodynamická síla je obecně funkcí poměrné excentricity ε_H a polohového úhlu γ a vzniká v olejovém filmu jako důsledek zátěžné síly o složkách F_y a F_z . Z tohoto plyne, že rovnováha těchto sil nastane pouze v jednom daném místě určeném poměrnou excentricitou ε_H^r a polohovým úhlem γ^r . Toto místo budeme označovat jako rovnovážnou polohu (dále RP) nebo jako pracovní bod. Matematicky vyjádříme výše uvedenou slovní podmínu jako

$$F_y + F_{Hy}(\varepsilon_H^r, \gamma^r) = 0, \quad (4.23)$$

$$F_z + F_{Hz}(\varepsilon_H^r, \gamma^r) = 0. \quad (4.24)$$

4.3 Numerický výpočet dynamických vlastností olejového filmu

Přestože vazba kluzným ložiskem je vazbou nelineární, vycházíme při numerickém výpočtu koeficientů tuhosti a tlumení z předpokladu, že v blízkém okolí pracovního bodu (RP) ji lze za vhodných podmínek nahradit lineární pružně-viskózní vazbou. Pracovní poloha čepu je jednoznačně určena poměrnou excentricitou ε_H^r a polohovým úhlem γ^r . Jedná se o ustálenou rovnovážnou polohu čepu, kdy zátěžná síla a hydrodynamická síla působící na čep hrídele jsou v rovnováze. V ustálené poloze nedochází ke stlačení olejového filmu v čase a v rovnici (3.3) tak vynecháme squeeze člen $\frac{\partial h}{\partial t}$ (3.6). Jediný pohyb (3.5), který čep v ustálené poloze koná, je rotační pohyb s úhlovou rychlosťí ω . Nyní se zaměříme na výpočet koeficientů tuhosti pružně-viskózní náhrady. Po malém vychýlení čepu hrídele z pracovní polohy ve směru y o poměrnou velikost $\Delta\varepsilon_y$, resp. ve směru z o velikost $\Delta\varepsilon_z$, určíme novou polohu čepu danou ε_H^y a γ^y , resp. ε_H^z a γ^z . Princip vychýlení čepu hrídele z rovnovážné polohy je zřejmý z obr. 4.4.

Matematicky vyjádříme novou polohu jako

$$\varepsilon_H^y = \sqrt{\varepsilon_H^r{}^2 + 2\varepsilon_H^r \Delta\varepsilon_y \sin \gamma^r + \Delta\varepsilon_y^2}, \quad (4.25)$$

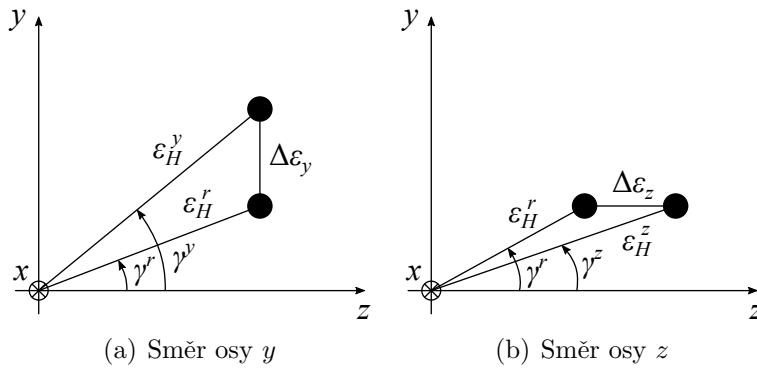
$$\varepsilon_H^z = \sqrt{\varepsilon_H^r{}^2 + 2\varepsilon_H^r \Delta\varepsilon_z \cos \gamma^r + \Delta\varepsilon_z^2}, \quad (4.26)$$

$$\gamma^y = \arccos \frac{\varepsilon_H^r \cos \gamma}{\varepsilon_H^y}, \quad \text{pro} \quad \gamma^r < \pi, \quad (4.27)$$

$$\gamma^y = 2\pi - \arccos \frac{\varepsilon_H^r \cos \gamma}{\varepsilon_H^y}, \quad \text{pro} \quad \gamma^r > \pi, \quad (4.28)$$

$$\gamma^z = \arccos \frac{\varepsilon_H^r \cos \gamma}{\varepsilon_H^z}, \quad \text{pro} \quad \gamma^r < \pi, \quad (4.29)$$

$$\gamma^z = 2\pi - \arccos \frac{\varepsilon_H^r \cos \gamma}{\varepsilon_H^z}, \quad \text{pro} \quad \gamma^r > \pi. \quad (4.30)$$



Obr. 4.4: Vychýlení čepu hřídele z rovnovážné polohy

Poměrné vychýlení ve směru osy y a z odpovídá rozměrovému vychýlení

$$\Delta y = c \Delta\varepsilon_y, \quad \Delta z = c \Delta\varepsilon_z. \quad (4.31)$$

V nové pracovní poloze (4.25) až (4.30) vypočítáme velikost složek hydrodynamické síly $F_{Hy}(\varepsilon_H^y, \gamma^y), F_{Hz}(\varepsilon_H^y, \gamma^y)$, resp. $F_{Hy}(\varepsilon_H^z, \gamma^z), F_{Hz}(\varepsilon_H^z, \gamma^z)$. Jednotlivé koeficienty tuhosti se poté s ohledem na (3.16) vypočítají jako

$$k_{yy} = -\frac{F_{Hy}(\varepsilon_H^y, \gamma^y) - F_{Hy}(\varepsilon_H^r, \gamma^r)}{\Delta y}, \quad (4.32)$$

$$k_{yz} = -\frac{F_{Hy}(\varepsilon_H^z, \gamma^z) - F_{Hy}(\varepsilon_H^r, \gamma^r)}{\Delta z}, \quad (4.33)$$

$$k_{zy} = -\frac{F_{Hz}(\varepsilon_H^y, \gamma^y) - F_{Hz}(\varepsilon_H^r, \gamma^r)}{\Delta y}, \quad (4.34)$$

$$k_{zz} = -\frac{F_{Hz}(\varepsilon_H^z, \gamma^z) - F_{Hz}(\varepsilon_H^r, \gamma^r)}{\Delta z}. \quad (4.35)$$

Postup výpočtu koeficientů tlumení je velmi podobný výpočtu koeficientů tuhosti. V tomto případě ale nedochází k vychýlení čepu hřídele ze své rovnovážné polohy,

ale udělujeme mu pouze rychlosť v jednotlivých směrech, protože tlumení je obecně závislé na rychlosti (3.17). Rychlosť čepu hřídele je obsažena ve squeeze členu $\frac{\partial h}{\partial t}$ (3.6) a ve vztazích pro obvodovou rychlosť (3.5). Zvolíme tedy bezrozměrnou rychlosť stlačení olejového filmu ve směru osy y jako $\dot{\varepsilon}_y$, resp. ve směru osy z jako $\dot{\varepsilon}_z$, ze které po přenásobení radiální vůlí c dostáváme rychlosť čepu hřídele v rozměrovém tvaru

$$\dot{y}_H^y = c \dot{\varepsilon}_y, \quad \dot{z}_H^z = c \dot{\varepsilon}_z. \quad (4.36)$$

Souřadnice středu čepu hřídele jsou v souřadném systému yz vyjádřeny jako

$$y_H^r = c \varepsilon_H^r \sin \gamma^r, \quad z_H^r = c \varepsilon_H^r \cos \gamma^r. \quad (4.37)$$

Poměrná excentricita ε_H je obecně vzdálenost středu čepu hřídele od počátku

$$\varepsilon_H = \frac{\sqrt{y_H^2 + z_H^2}}{c}. \quad (4.38)$$

Po derivaci rovnice (4.38) podle času dostáváme

$$\dot{\varepsilon}_H = \frac{y_H \dot{y}_H + z_H \dot{z}_H}{c \sqrt{y_H^2 + z_H^2}}. \quad (4.39)$$

Podobně postupujeme i u polohového úhlu γ a jeho derivace podle času

$$\gamma = \arccos \frac{z_H}{c \varepsilon_H}, \quad \text{pro } \gamma^r < \pi, \quad (4.40)$$

$$\gamma = 2\pi - \arccos \frac{z_H}{c \varepsilon_H}, \quad \text{pro } \gamma^r > \pi, \quad (4.41)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\dot{z}_H \varepsilon_H - z_H \dot{\varepsilon}_H}{c \varepsilon_H^2 \sqrt{1 - \left(\frac{z_H}{c \varepsilon_H}\right)^2}}, \quad \text{pro } \gamma^r < \pi, \quad (4.42)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{z}_H \varepsilon_H - z_H \dot{\varepsilon}_H}{c \varepsilon_H^2 \sqrt{1 - \left(\frac{z_H}{c \varepsilon_H}\right)^2}}, \quad \text{pro } \gamma^r > \pi. \quad (4.43)$$

Do obecných vztahů (4.39) a (4.42), popř. (4.43), nyní dosadíme pro udělení rychlosti ve směru osy y rychlosť $\dot{y}_H = \dot{y}_H^y$ a $\dot{z}_H = 0$ a dostáváme tak rychlosť poměrné excentricity označenou jako $\dot{\varepsilon}_H^y$ a rychlosť polohového úhlu jako $\dot{\gamma}_H^y$. Pro zjištění rychlostí $\dot{\varepsilon}_H^z$ a $\dot{\gamma}_H^z$ po udělení rychlosti ve směru osy z dosazujeme $\dot{y}_H = 0$ a $\dot{z}_H = \dot{z}_H^z$. S takto pozměněnou pravou stranou Reynoldsovy rovnice (3.3) vypočítáme jednotlivé složky hydrodynamické síly a koeficienty tlumení ložiska poté můžeme vyjádřit ve tvaru

$$b_{yy} = -\frac{F_{Hy}(\varepsilon_H^r, \gamma^r, \dot{\varepsilon}_H^y, \dot{\gamma}_H^y, \dot{y}_H, 0) - F_{Hy}(\varepsilon_H^r, \gamma^r)}{\dot{y}_H^y}, \quad (4.44)$$

$$b_{yz} = -\frac{F_{Hy}(\varepsilon_H^r, \gamma^r, \dot{\varepsilon}_H^z, \dot{\gamma}_H^z, 0, \dot{z}_H) - F_{Hy}(\varepsilon_H^r, \gamma^r)}{\dot{z}_H^z}, \quad (4.45)$$

$$b_{zy} = -\frac{F_{Hz}(\varepsilon_H^r, \gamma^r, \dot{\varepsilon}_H^y, \dot{\gamma}_H^y, \dot{y}_H, 0) - F_{Hz}(\varepsilon_H^r, \gamma^r)}{\dot{y}_H^y}, \quad (4.46)$$

$$b_{zz} = -\frac{F_{Hz}(\varepsilon_H^r, \gamma^r, \dot{\varepsilon}_H^z, \dot{\gamma}_H^z, 0, \dot{z}_H) - F_{Hz}(\varepsilon_H^r, \gamma^r)}{\dot{z}_H^z}. \quad (4.47)$$

4.4 Výpočtový program pro modelování kluzných ložisek

Na základě získaných znalostí o hydrodynamických ložiskách, popsaných v kapitole 3 a jejich následné numerické interpretaci z podkapitol 4.1 až 4.3, byl v pracovním prostředí MATLAB zpracován vlastní výpočtový program s názvem CALBEAR, který je zaměřen na výpočet tlakového rozložení v ložisku, určení rovnovážné polohy čepu hřídele, analýzu dynamických vlastností olejového filmu a popis základních charakteristických vlastností. Výsledný program se skládá z několika samostatných výpočtových modulů, které jsou níže stručně popsány.

Před veškerými výpočty je potřeba provést diskretizaci ložiskové mezery. Dalším důležitým krokem je zjištění indexů uzelů, kterými je přiváděn olej drázkami. Ze známých indexů je následně vytvořena permutační matice. K těmto úkonům slouží moduly `CALBEAR_diskretizace` a `CALBEAR_drazka`.

Základním a nejpoužívanějším modulem je `CALBEAR_tlak`, který počítá tlakové rozložení v ložiskové mezeře. U tohoto modulu bylo důležité snížit výpočtový čas na minimum z důvodů, které budou zřejmější z podkapitol 5.3.1 a 5.3.2. Nejproblematičtější místo programu je sestavení matic \mathbf{A} a \mathbf{f} (4.13) a následně samotné řešení soustavy rovnic (4.6). Výpočtový čas zmíněné části modulu byl testován na velikosti sítě 90×20 uzelů bez drážek. Postupně byly prověřeny tyto varianty kódu:

1. přímá metoda řešení s plnou maticí \mathbf{A} – o nejvhodnější použité metodě pro řešení rozhoduje MATLAB ve svém vnitřním algoritmu,
2. přímá metoda řešení s tzv. řídkou maticí \mathbf{A} (angl. označována jako *sparse*),
3. iterační řešení [12] s nulovými počátečními podmínkami,
4. iterační řešení [12] s nenulovými počátečními podmínkami – počáteční podmínkou bylo zvoleno analytické řešení tlakového rozložení po approximaci ložiska krátkým ložiskem [7].

Výsledky časového vytížení procesoru jsou pro jednotlivé úpravy kódu uvedeny v tab. 4.1. Výpočty byly provedeny ve verzi MATLAB 2015b na počítači s operační pamětí 8 GB a procesorem Intel i5-6200U o taktu 2,3 GHz.

varianta	$\omega = 150$ ot/min	$\omega = 1000$ ot/min	$\omega = 5000$ ot/min
1	0,0951 s	0,0965 s	0,0955 s
2	0,0161 s	0,0164 s	0,0160 s
3	0,1883 s	0,1847 s	0,1867 s
4	0,1936 s	0,1941 s	0,1863 s

Tab. 4.1: Výpočtový čas

Z výsledků je patrné, že nejrychleji získáme řešení při implementaci pomocí řídkých matic. Při sestavování řídké matice **A** je využíván vnitřní MATLAB příkaz **spdiags**.

Po vyřešení tlakového rozložení je možné vypočítat hydrodynamickou sílu o složkách y (4.21) a z (4.22), kterou působí olejový film na čep hřídele. Tento modul nese označení **CALBEAR_sila**.

Dalším důležitým modulem je **CALBEAR_poloha**. Výstupem tohoto modulu je rovnovážná poloha určená polohovým úhlem γ^r a poměrnou excentricitou ε_H^r . Tento model využívá modulů **CALBEAR_tlak** a **CALBEAR_sila**. Rovnovážná poloha plyne z řešení ne-lineárních rovnic (4.23) a (4.24). K vyřešení této soustavy rovnic je používána funkce **fsoolve** z optimalizačního balíčku programu MATLAB.

Zbývajícími moduly jsou moduly **CALBEAR_tuhost** a **CALBEAR_tlumeni**. Struktura těchto modulů a postup výpočtů je detailněji popsán v podkapitole 4.3. Během výpočtu jsou volány moduly **CALBEAR_tlak** a **CALBEAR_sila**.

5 Základní úlohy rotordynamiky a jejich počítačová implementace

Tato kapitola postupně propojuje všechny poznatky a využívá odvození a vztahy z předcházejících kapitol. Jejím cílem je analýza rotorové soustavy s kluznými ložisky a jejího chování jako celku. Vlastní výpočtový program zabývající se těmito problémy je popsán na závěr této kapitoly.

5.1 Stavový prostor

V kapitole 2 je postupně odvozen matematický model pro vynucené kmitání rotorové soustavy (2.32). Matematický model (2.32) je tvořen n obyčejnými diferenciálními rovnicemi druhého řádu. Zejména z důvodu přítomnosti antisymetrické matice gyro-skopických účinků \mathbf{G} je nezbytné kmitání rotorových soustav vyšetřovat ve stavovém prostoru [2]

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (5.1)$$

Dalším důvodem zavedení stavového prostoru (5.1) mohou být nesymetrické globální charakteristické matice tuhosti a tlumení, které vzniknou tak, že na příslušné pozice odpovídající ložiskovým vazbám přičteme charakteristické matice tuhosti (3.16) a tlumení (3.17) ložisek. Tím nahradíme ložiskovou vazbu z vektoru buzení (2.33) popsanou hydrodynamickou silou. Takto vzniklé globální charakteristické matice obsahující koeficienty tuhosti a tlumení ložisek budeme dále označovat jako \mathbf{B}^* a \mathbf{K}^* . Nyní předpokládejme, že ložisková vazba je zavedena ve vektoru buzení $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t)$. Rovnici (2.32) rozšíříme [2] o identitu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}, \quad (5.2)$$

a výslednou soustavu $2n$ obyčejných diferenciálních rovnic zapíšeme v maticovém tvaru

$$\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{P}\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t), \quad (5.3)$$

čímž snížíme řád soustavy $2n$ obyčejných diferenciálních rovnic. Jednotlivé matice a vektor v (5.3) mají tvar

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B} + \omega_0\mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t) \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Maticovou soustavu rovnic (5.3) lze přepsat do tvaru

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}, \quad (5.5)$$

kde matici \mathbf{A} označíme jako systémovou matici a vektor \mathbf{b} jako vektor pravé strany o složkách

$$\mathbf{A} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{B} + \omega_0\mathbf{G}) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice. Po dodefinování počátečních podmínek

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(0) \\ \mathbf{q}(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (5.8)$$

dokážeme vyřešit maticovou rovnici (5.5) a popsat tak chování rotorové soustavy v čase. Jedná se o diferenciální soustavu rovnic prvního řádu, kterou je z hlediska velkého počtu rovnic a silné nelinearity vektoru buzení výhodné řešit pomocí metod přímé numerické integrace.

5.2 Modální analýza a nestabilita

V této podkapitole je postupně zmíněna problematika vlastních čísel soustavy, modální redukce a na závěr analýza stability.

5.2.1 Problém vlastních hodnot

Problém vlastních hodnot rotorové soustavy popsané matematickým modelem (2.32) je řešen na nebuzené soustavě, tj. bez pravé strany $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Předpokládáme tedy, že uložení rotoru na kluzných ložiskách je zohledněno v globálních maticích tuhosti \mathbf{K}^* a tlumení \mathbf{B}^* (kap. 5.1), protože by se jinak jednalo o problém vlastních čísel volného (izolovaného) rotoru. Poté převedeme soustavu rovnic do stavového prostoru popsaného maticemi \mathbf{N} a \mathbf{P} , které obsahují matice \mathbf{B}^* a \mathbf{K}^* na příslušných pozicích podle (5.4). Protože jsou matice \mathbf{B}^* a \mathbf{K}^* z důvodu přítomnosti koeficientů tuhosti a tlumení ložisek nesymetrické, musíme sestavit [2] modely adjungované s transponovanými maticemi \mathbf{N}^T a \mathbf{P}^T . Dostáváme tedy dvě maticové rovnice

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{P}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}^T\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{P}^T\mathbf{w}(t) = \mathbf{0}, \quad (5.9)$$

kde $\mathbf{u}(t)$, resp. $\mathbf{w}(t)$ označuje stavový prostor pro neadjungovaný resp. adjungovaný model. Maticové rovnice (5.9) musí vyhovovat [2] řešení $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t}$, resp. $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}e^{\lambda t}$. Po matematické úpravě dostáváme dvě charakteristické rovnice úlohy vlastních hodnot

$$(\lambda\mathbf{N} + \mathbf{P})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (\lambda\mathbf{N}^T + \mathbf{P}^T)\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Kořeny obou rovnic (5.10) mají [2] totožná vlastní čísla λ_ν . Každému vlastnímu číslu λ_ν pak přísluší pro neadjungonaý model pravostranný vektor \mathbf{u}_ν , a pro adjungovaný model levostranný vektor \mathbf{w}_ν . Jednotlivá vlastní čísla mohou být [2] komplexně sdružená

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu, \quad \lambda_{\nu+m} = \lambda_\nu^* = \alpha_\nu - i\beta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (5.11)$$

nebo reálná

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu, \quad \nu = 2m+1, 2m+2, \dots, 2n. \quad (5.12)$$

Předpokládáme, že komplexní vlastní čísla jsou seřazena vzestupně podle imaginárních částí $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_m$. Imaginární části vlastních čísel mají význam vlastních frekvencí systému v jednotkách rad/s. Pro levostranné a pravostranné vlastní vektory platí [2] podmínky biortonormality

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{N} \mathbf{u}_j = \delta_{i,j}, \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{P} \mathbf{u}_j = -\lambda_{i,j} \delta_{i,j}, \quad (5.13)$$

kde $\delta_{i,j}$ je Kroneckerův symbol. Vztahy (5.13) můžeme obecně zapsat pro pravostranné \mathbf{U} a levostranné \mathbf{W} modální matice, jejichž sloupce jsou tvořeny příslušnými vlastními vektory, a dostaváme

$$\mathbf{W}^T \mathbf{N} \mathbf{U} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{W}^T \mathbf{P} \mathbf{U} = -\mathbf{\Lambda}, \quad (5.14)$$

kde $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_\nu) \in \mathbb{R}^{2n}$ je spektrální matice a $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{2n}$ je diagonální jednotková matice.

5.2.2 Analýza nestability

O stabilitě nebo nestabilitě rotorového systému budeme rozhodovat na základě výsledků úlohy vlastních hodnot, tj. vlastních čísel (5.11) a (5.12). Konkrétně budeme zkoumat [2] reálnou část těchto čísel a rozlišovat tři druhy stability/nestability rotorové soustavy:

- asymptoticky stabilní – všechna komplexně sdružená vlastní čísla λ_ν (5.11) leží v záporné komplexní polorovině ($\alpha_\nu < 0$) a reálná vlastní čísla λ_ν (5.12) jsou záporná ($\alpha_\nu < 0$),
- nestabilita typu flutter – alespoň jeden pár komplexně sdružených čísel λ_ν (5.11) leží v kladné komplexní polorovině ($\alpha_\nu > 0$),
- nestabilita typu divergence – alespoň jedno reálné vlastní číslo λ_ν (5.11) je kladné ($\alpha_\nu > 0$).

O stabilitě/nestabilitě můžeme také rozhodnout [11] pomocí hodnot poměrného modálního útlumu pro ν -tý vlastní tvar

$$D_\nu = -\frac{\alpha_\nu}{|\lambda_\nu|}, \quad (5.15)$$

kde u komplexně sdružených čísel můžeme z důvodu dělení velikostí vlastního čísla $|\lambda_\nu|$ vybrat např. pouze vlastní čísla s kladnou imaginární částí $\beta_\nu > 0$. Pokud dodržíme

znaménkovou konvenci (5.11), (5.12) a (5.15), pak nestabilita systému nastane pro vlastní číslo λ_ν , pokud $D_\nu < 0$.

Vzhledem k tomu, že jsme schopni určit dynamické vlastnosti rotoru a kluzných ložisek relativně přesně, můžeme touto analýzou odhalit pásma, kde se studovaná soustava chová nestabilně, a v tomto daném frekvenčním rozsahu se zaměřit na její detailní zkoumání. Můžeme tak objevit například nestability, které jsou vyvolány nesprávným návrhem kluzného ložiska, resp. charakteristik jeho olejového filmu. V kluzném ložisku vzniká nestabilita s názvem víření oleje (angl. *oil whirl*), která se může rozvinout do stability nazývané tlučení oleje (angl. *oil whip*). Důvodem vzniku stability víření oleje může být [14]:

- malé zatížení ložiskového čepu a vysoké otáčky čepu rotoru,
- velká ložisková vůle,
- změny v olejovém tlaku,
- velká dynamická viskozita, změna fyzikálních vlastností maziva,
- velké gyroskopické účinky od částí rotoru na jeho převislých koncích, nevyváženosť rotoru a mnoho dalších.

Tato nestabilita se objevuje [1] v subsynchronní oblasti v rozmezí $0,4 - 0,48$ násobku první harmonické (otáčkové) složky. Důsledkem je vznik subsynchronní precesní složky, při které koná čep rotoru krouživý pohyb se stále se zvětšující poměrnou excentritou ale s menší frekvencí kroužení, než je frekvence otáčení.

Nestabilita typu tlučení se může objevit [1] tehdy, pokud se frekvence víření rovná některé z vlastních frekvencí. Tato nestabilita pak vyvolá příčné subharmonické vibrace. Tento typ stability se zvyšováním otáček neodeznívá. Naopak zůstává „uzamčena“ na vlastní frekvenci a lze ji ve frekvenčním spektru rozpoznat tak, že se téměř nemění s otáčkami rotoru.

5.2.3 Modální redukce

Po konečnoprvkové diskretizaci kontinua rotorového systému vznikne systém s velkým počtem stupňů volnosti, který lze matematicky zapsat jako

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \omega_0\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t). \quad (5.16)$$

Převedením úlohy do stavového prostoru se počet stupňů volnosti ještě zdvojnásobí. To má za důsledek významné prodloužení výpočtu úloh v časové oblasti. Zrychlení výpočtu je možné provést např. pomocí tzv. modální redukce [2], kdy využíváme pouze omezeného počtu vlastních vektorů charakterizujících dynamickou odezvu soustavy a model převádíme z prostoru zobecněných souřadnic do prostoru modálních souřadnic. K matematickému modelu (5.16) přidružíme [5] nerotující konzervativní soustavu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (5.17)$$

na které provedeme [3] modální analýzu

$$(\mathbf{K} - \Omega_\nu^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_\nu = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag} (\Omega_\nu^2), \mathbf{V} = [\dots, \mathbf{v}_{\nu-1}, \mathbf{v}_\nu, \mathbf{v}_{\nu+1}, \dots]. \quad (5.18)$$

Pro modální matici \mathbf{V} a spektrální matici $\boldsymbol{\Lambda}$ platí podmínky biortonormality

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \boldsymbol{\Lambda}. \quad (5.19)$$

Vybereme [5] m vlastních frekvencí, od kterých požadujeme, aby si je redukovaný model zachoval a k nim vybereme odpovídající vlastní vektory. Vybraný frekvenční rozsah volíme zejména s ohledem na frekvence buzení. Odpovídající vlastní vektory představují matici $\mathbf{V}_m \in \mathbb{R}^{n,m}$ a provedeme modální transformaci souřadnic

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}_m \mathbf{x}_m(t). \quad (5.20)$$

Vztah (5.20) dosadíme do (5.16), zleva přenásobíme \mathbf{V}_m^T , využijeme podmínek biortonormality (5.19) a dostáváme

$$\mathbf{E}_m \ddot{\mathbf{x}}_m(t) + \mathbf{V}_m^T (\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G}) \mathbf{V}_m \dot{\mathbf{x}}_m(t) + \boldsymbol{\Lambda}_m \mathbf{x}_m(t) = \mathbf{V}_m^T \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t). \quad (5.21)$$

Model (5.21) rozšíříme o identitu

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) - \dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

a soustavu převedeme do stavového prostoru se systémovou maticí

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_m(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_m(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{V}_m^T (\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G}) \mathbf{V}_m & -\boldsymbol{\Lambda}_m \\ \mathbf{E}_m & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\text{red}}} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_m(t) \\ \mathbf{x}_m(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{V}_m^T \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{\text{red}}}. \quad (5.23)$$

Takto jsme snížili počet stupňů volnosti ve stavovém prostoru (5.5) o velikosti \mathbb{R}^{2n} na velikost \mathbb{R}^{2m} (5.23). Modální redukcí musí samozřejmě projít i počáteční podmínky (5.8) $\mathbf{u}(0) = \mathbf{V}_m \mathbf{x}_0$, pro které po úpravě platí $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \mathbf{V}_m^{-1} \mathbf{u}_0 = \mathbf{V}_m^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0$.

5.3 Počítačová implementace úloh rotordynamiky

V pracovním prostředí MATLAB byl vytvořen výpočtový program s názvem CALROT, který se zabývá analýzou základních úloh rotordynamiky detailněji popsaných výše v kapitole 5. Program je rozdělen na tři hlavní moduly

- vytvoření MKP modelu rotorové soustavy (kap. 2),
- problém vlastních hodnot (podkap. 5.2),
- chování rotorové soustavy v čase (podkap. 5.1).

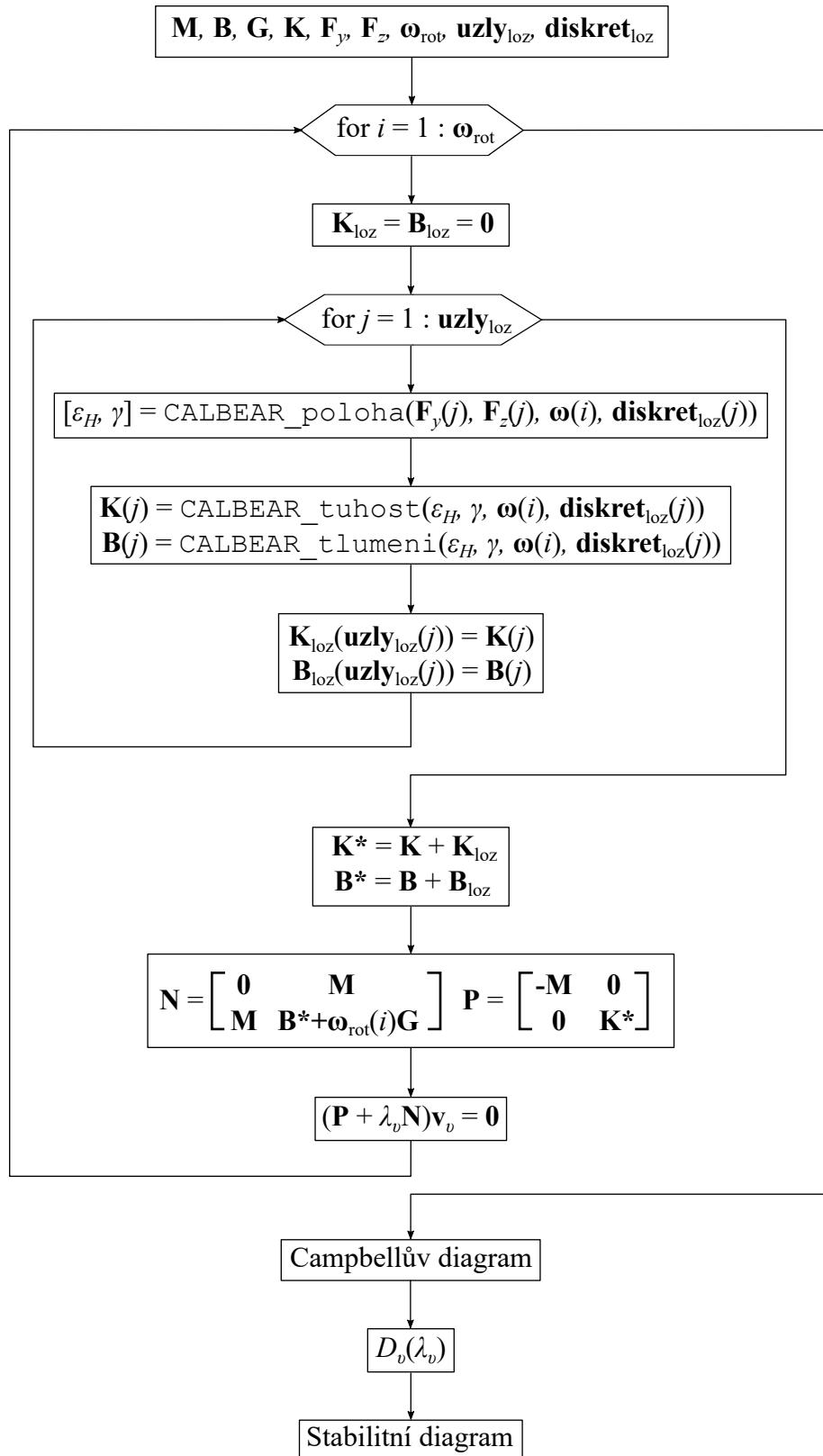
Struktura modulu CALROT_MKP pro vytváření MKP modelu a postup výpočtu je naznačen v kapitole 2 během odvozování. Zbývající části programu využívají vybrané moduly programu CALBEAR (podkap. 4.4) na analýzu kluzných ložisek. Struktura programu a postup výpočtu je postupně popsán v podkapitolách 5.3.1 a 5.3.2.

5.3.1 Počítačová implementace problému vlastních hodnot

Cílem modulu CALROT_Campbell je vykreslení Campbellova diagramu a diagramu pro určení celkové stability rotorové soustavy. Campbellův diagram se využívá k zanesení vlastních frekvencí v závislosti na úhlových rychlostech rotorové soustavy. Z Campbellova diagramu můžeme následně vyčíst kritické otáčky, při nichž může dojít k rezonanci. Postup řešení problému vlastních hodnot je zjednodušeně zanesen ve vývojovém diagramu na obr. 5.1. Pro lepší přehlednost jsou v diagramu použity názvy modulů z podkapitoly 4.4 a využívané veličiny. Jejich význam a vysvětlení je rozepsáno v tab. 5.1. Vektor statických sil v jednotlivých ložiskách je možné přibližně získat jako záporně vzaté reakce podepřeného rotoru (analogie k podepřenému nosníku). Pro jednotlivé zatěžující síly existuje pro konkrétní úhlovou rychlosť pouze jedna rovnovážná poloha, která je charakterizována maticemi dynamických vlastností ložiska. K samotnému výpočtu vlastních hodnot ve stavovém prostoru systému využívá program knihovní funkci MATLABu `eig`.

M, B, G, K	charakteristické matice rotorového systému
F_y, F_z	vektor zatěžujících sil v jednotlivých ložiskách
ω_{rot}	vektor úhlových rychlostí sledovaného rozsahu
uzly_{loz}	vektor uzelů, ve kterých se nachází ložiska
diskret_{loz}	soubor informací o diskretizaci ložisek a drážkách
ε_H, γ	poměrná excentricita a polohový úhel
K(j), B(j)	matice dynamických vlastností jednotlivých ložisek
λ_ν, v_ν	vlastní číslo a k němu příslušný vlastní vektor
D_ν	poměrný modální útlum ν -tého vlastního čísla

Tab. 5.1: Vysvětlivky vývojového diagramu implementace problému vlastních hodnot



Obr. 5.1: Vývojový diagram implementace problému vlastních hodnot

5.3.2 Počítačová implementace chování rotorové soustavy v čase

Výsledky modální analýzy (podkap. 5.3.1) a z nich sestavený Campbellův a stabilitní diagram nám dávají informaci o místech zvýšeného zájmu. Pro podrobnější analýzu v těchto místech je potřeba provést simulaci v čase, ze které následně zanalyzujeme chování soustavy při zkoumaném provozním stavu. K této analýze slouží vytvořený modul **CALROT_dynamika**, který řeší pohybovou rovnici pomocí metod přímé numerické integrace. Kvůli velkému počtu stupňů volnosti a silné nelinearitě z důvodu přítomnosti vazby kluzným ložiskem ve vektoru buzení $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t)$, která prodlužuje výpočet, využíváme pro urychlení výpočtu modální redukci a řešíme tak dynamickou odezvu na matematickém modelu (5.23) s počátečními podmínkami

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{V}_m^T \mathbf{M} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

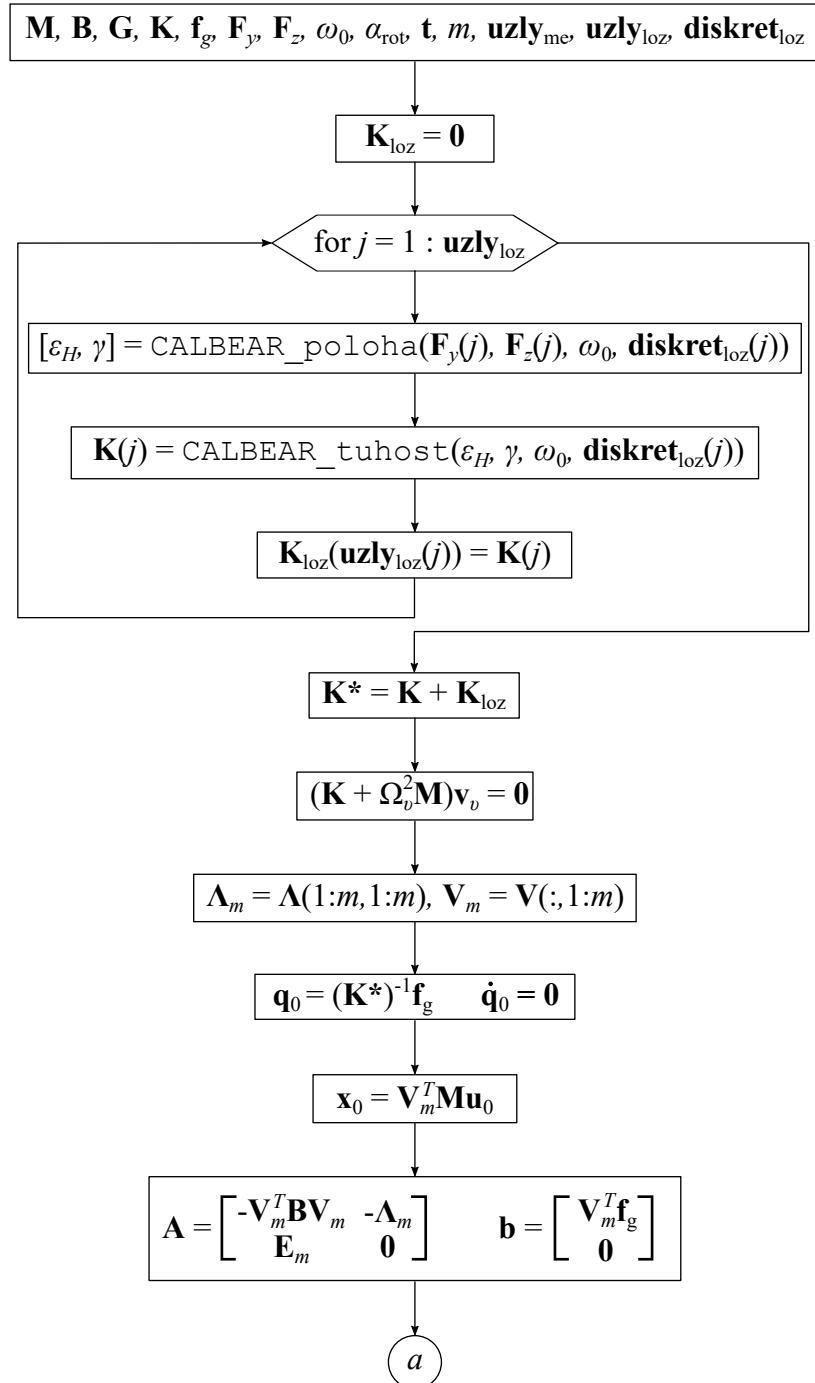
Samotné řešení diferenciální rovnice prvního řádu (5.23) je prováděno pomocí vlastních MATLAB řešičů ze skupiny **ode** pro obyčejné diferenciální rovnice. Na obr. 5.2 a obr. 5.3 je vykreslen vývojový diagram numerického řešení rovnice v čase spolu s potřebnými kroky před samotnou časovou integrací. Vývojový diagram je sepsán schématicky a podrobnější vysvětlení jednotlivých zkratek a veličin je uvedeno v tab. 5.2. Jako nenulové počáteční podmínky úlohy volíme pouze statický průhyb od vlastní tíhy rotoru, který je uložen na ložiskách o dané tuhosti příslušející počáteční úhlové rychlosti ω_0 .

Výsledky modální analýzy přidružené nerotující konzervativní soustavy využijeme k modální redukci matematického modelu. Systém převedeme do stavového prostoru a zavádeme strukturu řídkých matic (zejména u systémové matice \mathbf{A}) za pomoci MATLAB příkazu **sparse**. Vývojový diagram na obr. 5.3 nepopisuje přesně jednotlivé kroky integrace zvoleného **ode** řešiče, protože vnitřní **ode** algoritmy využívají proměnlivý časový krok a kritéria pro lepsí konvergenci řešení. Diagram znázorňuje pouze výpočet pravé strany rovnice (5.5) v každém časovém kroku integrační cyklu. Z obr. 5.3 je zřejmé, že modul **CALBEAR_tlak** je využíván v každém časovém kroku řešení, a proto byl kladen důraz na zrychlení výpočtu tlakového rozložení, které je podrobněji rozepsáno v podkapitole 4.4. Výpočet odstředivých sil nevývažků je rozepsán v podkapitole 2.4. Pro výpočet poloh středů čepů hřídele a rychlostí využíváme vztahy (4.38) až (4.43). Výsledkem řešení diferenciální rovnice je matice \mathbf{Y} složená z vektorů $\mathbf{y}(t_i)$, které odpovídají v dané časovém kroku stavovému vektoru obsahující polohy a rychlosti v modálních souřadnicích. Pro zpětné získání poloh a rychlostí v zobecněných souřadnicích musíme vektor $\mathbf{y}(t_i)$ přenásobit redukovanou modální maticí

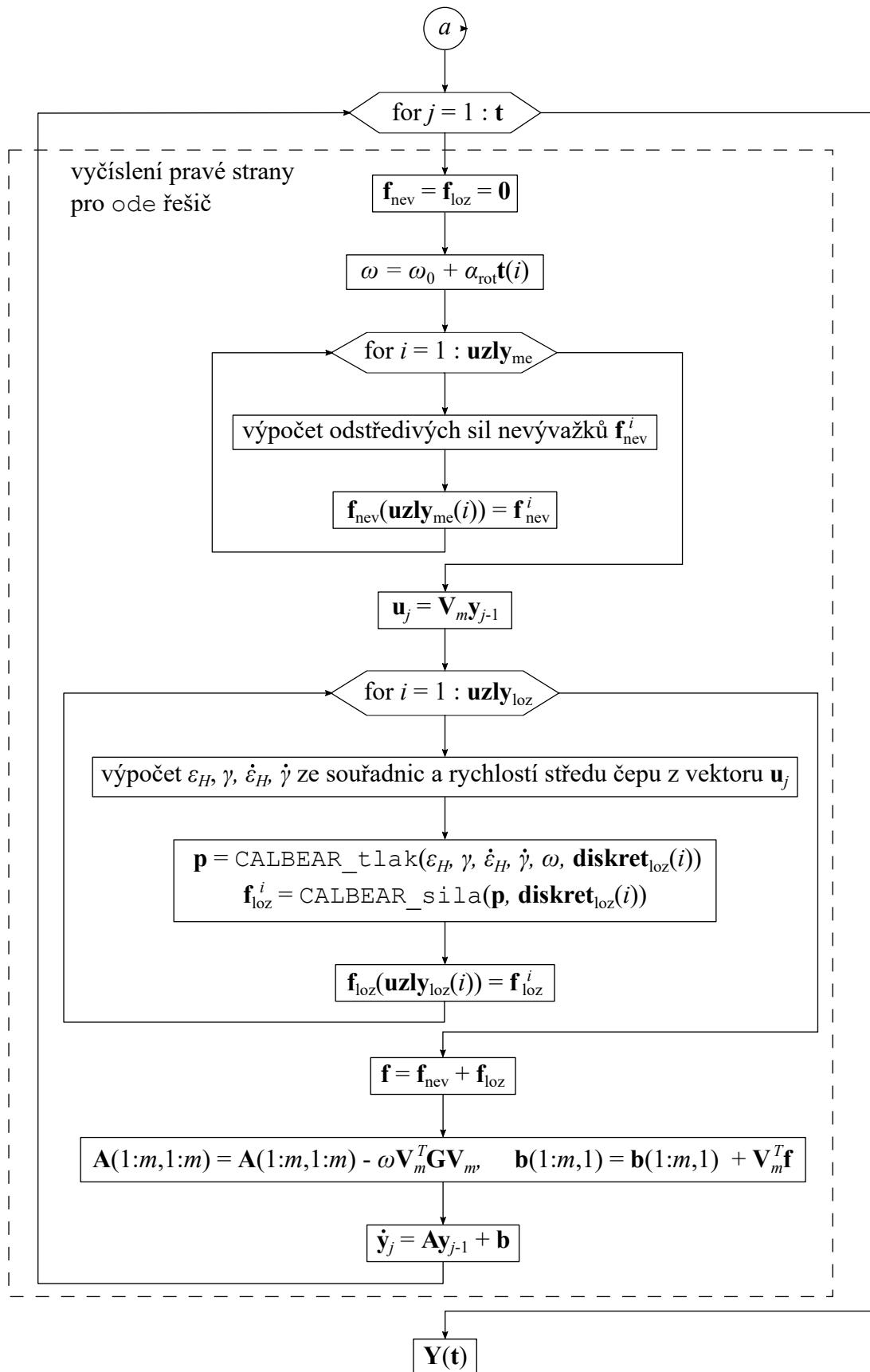
$$\mathbf{u}(t_i) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t_i) \\ \mathbf{q}(t_i) \end{bmatrix} = \mathbf{V}_m \mathbf{y}(t_i). \quad (5.25)$$

M, B, G, K	charakteristické matice rotorového systému
f_g	vektor tříhových sil působících v jednotlivých uzlech
F_y, F_z	vektor zatěžujících sil v jednotlivých ložiskách
ω_0, α_{rot}	počáteční úhlová rychlosť a úhlové zrychlení rotoru
t	vektor času
uzly_{me}	vektor uzlů statických nevývažků
uzly_{loz}	vektor uzlů, ve kterých se nachází ložiska
diskret_{loz}	soubor informací o diskretizaci ložisek a drážek
$\varepsilon_H, \gamma, \dot{\varepsilon}_H, \dot{\gamma}$	poměrná excentricita, polohový úhel a jejich rychlosti
K(j)	matice dynamické tuhosti jednotlivých ložisek
$\Omega_\nu, \mathbf{v}_\nu$	vlastní frekvence a k ní příslušný vlastní vektor
Λ, V	spektrální a modální matice
<i>m</i>	počet souřadnic kondenzace
Λ_m, V_m	redukovaná spektrální a modální matice

Tab. 5.2: Vysvětlivky vývojového diagramu výpočtu dynamické odezvy



Obr. 5.2: Vývojový diagram výpočtu dynamické odezvy – 1. část



Obr. 5.3: Vývojový diagram výpočtu dynamické odezvy – 2. část

6 Výsledky

V předcházejících kapitolách je postupně uvedeno, jak matematicky modelovat rychloběžné rotory uložené na kluzných ložiskách spolu s následnou počítačovou implementací do vlastních výpočtových programů CALBEAR a CALROT. V této kapitole jsou ukázány výsledky analýz z uvedených programů. Pro ověření správnosti vytvořených programů byl zvolen jednoduchý rotorový systém se soustředěnými parametry. Výsledky vybraných simulací tohoto systému jsou uvedeny v podkapitole 6.1. Výsledky dynamické odezvy pro složitější rotorový systém jsou uvedeny v podkapitole 6.2. Vybrané výsledky jsou srovnány s výsledky výpočtů v komerčních programech AVL a ARMD, které provedl Ing. Luboš Smolík. Program ARMD je specializovaný program zabývající se výpočty charakteristických vlastností kluzných ložisek. Řešení Reynoldsovy rovnice je v programu ARMD založeno na metodě konečných diferencí. AVL je komplexní multibody program zaměřený na řešení úloh pohonného ústrojí a Reynoldsovou rovnici řeší pomocí metody konečných prvků.

6.1 Lavalův rotor

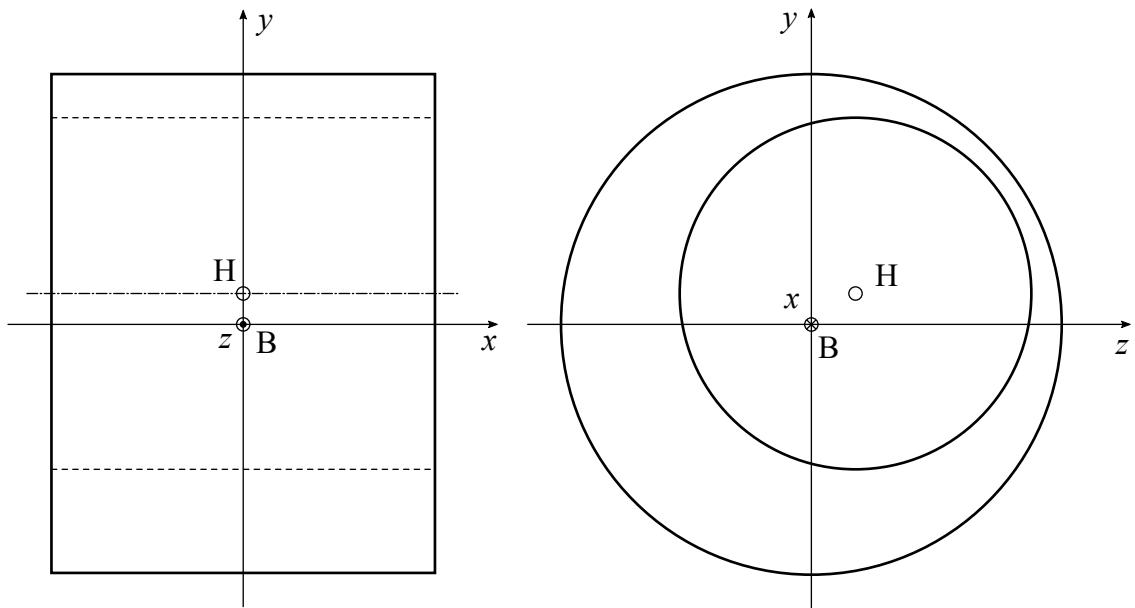
Pro základní otestování programu byl zvolen modifikovaný Lavalův rotor [4] na obr. 6.1 o dvou stupních volnosti, tj. příčných výchylkách ve směru osy y a z . Rotor uvažujeme jako dokonale tuhý bez tlumení. Matematický model takto zvoleného systému je

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega, t), \quad (6.1)$$

kde $\mathbf{M} = \text{diag}(m, m)$ je matice hmotnosti, $\mathbf{q} = [y, z]^T$ je vektor zobecněných výchylek a \mathbf{f} je vektor buzení obecně se složkami odstředivé síly nevývažku, těhové a hydrodynamické síly

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega, t) = \begin{bmatrix} F_{Hy} - mg + \Delta me \omega^2 \cos(\varphi_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2) \\ F_{Hz} + \Delta me \omega^2 \sin(\varphi_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2) \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Ve vektoru buzení je α úhlové zrychlení rotoru, ω je okamžitá úhlová rychlosť, t je čas a φ_0 je počáteční natočení rotoru. Pro vybranou rotorovou soustavu s válcovým kluzným ložiskem bez drážky byly zvoleny parametry uvedené v tab. 6.1. Mazivo v ložisku uvažujeme jako dokonale nestlačitelné a teplotně nezávislé.

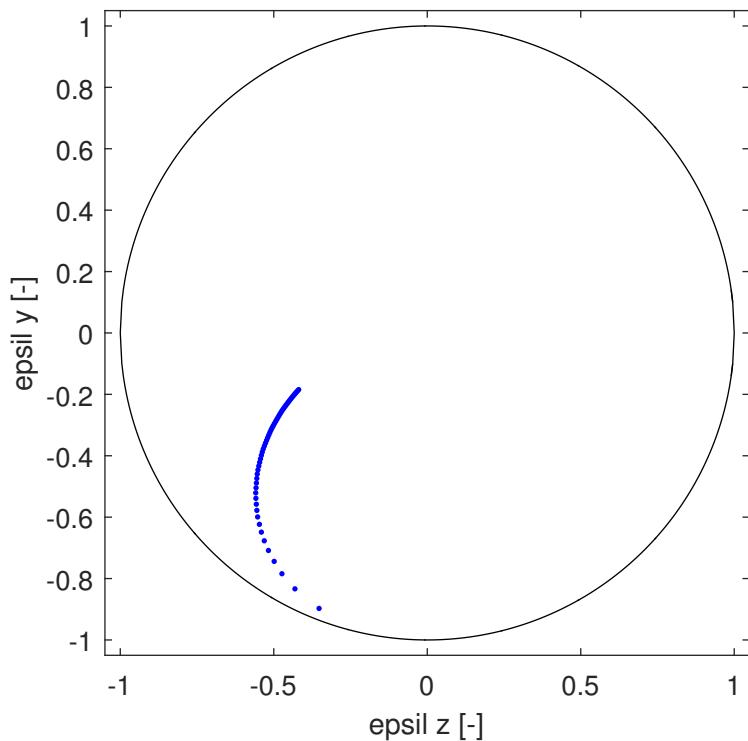


Obr. 6.1: Lavalův rotor

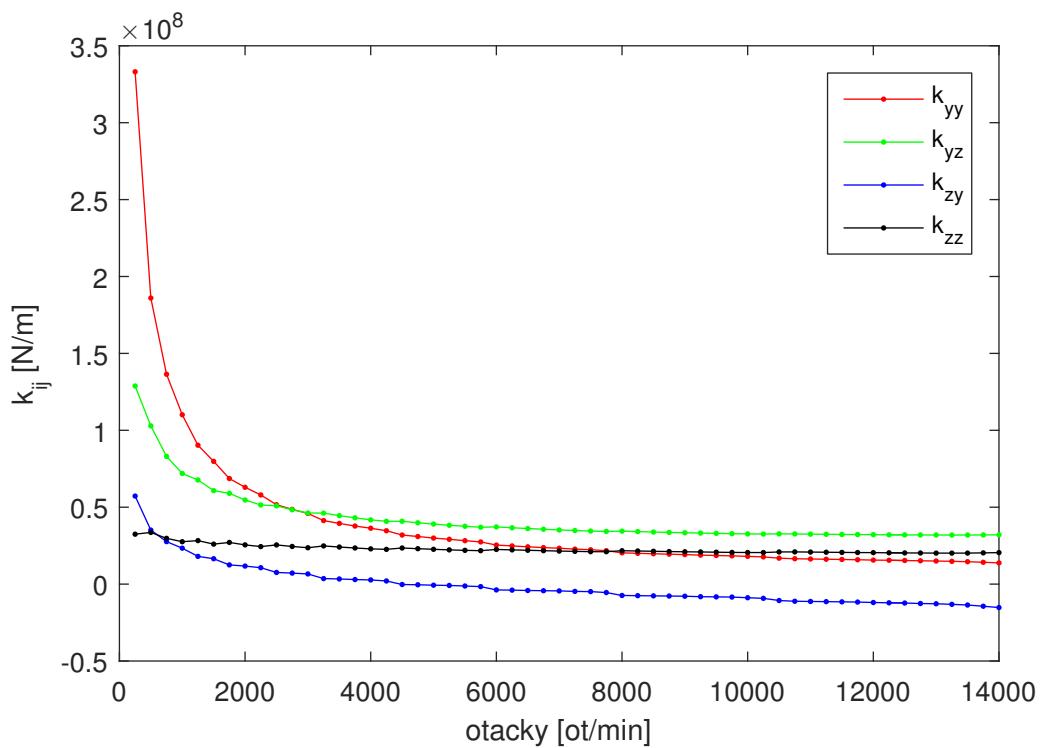
hmotnost rotoru	m	50 kg
tíhové zrychlení	g	$9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
průměr čepu	D	38 mm
délka ložiska	L	20 mm
radiální vůle	c	$50 \mu\text{m}$
dynamická viskozita	η	$10 \text{ mPa} \cdot \text{s}$
tlak na levé straně ložiska	p_L	$1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
tlak na pravé straně ložiska	p_P	$1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
počet uzlů v axiálním směru		20
počet uzlů v obvodovém směru		90

Tab. 6.1: Parametry Lavalova rotoru a kluzného ložiska

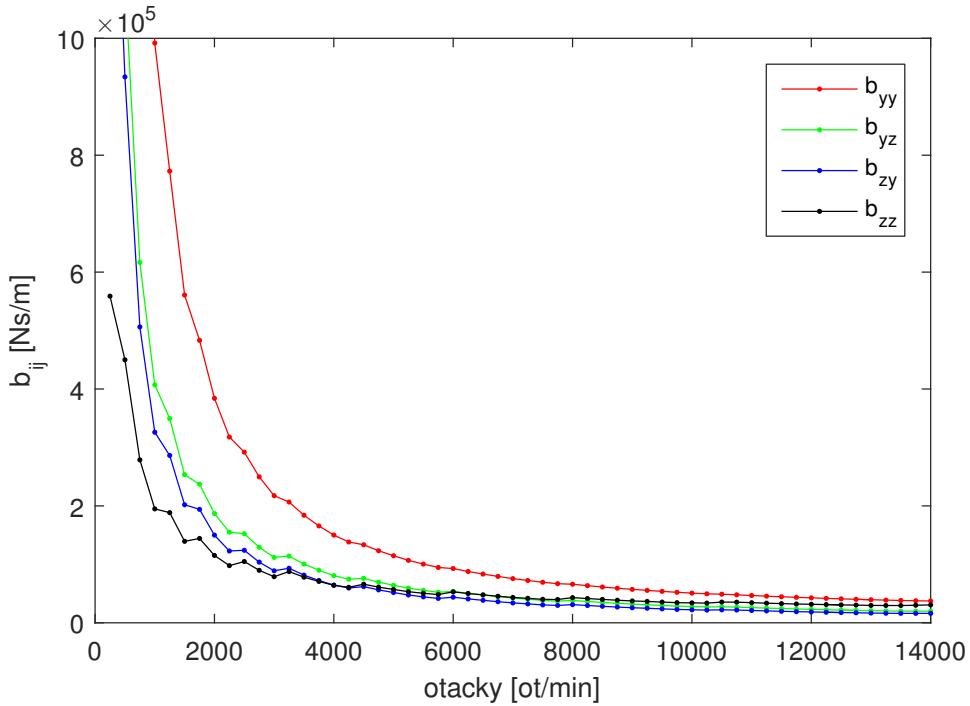
Pro čistě válcové kluzné ložisko o parametrech z tab. 6.1 zatížené pouze hydrodynamickou silou a tíhovou silou rotoru jsou na obr. 6.2 vykresleny rovnovážné polohy (RP) rotoru pro zvyšující se otáčky. Rovnovážné polohy jsou napočítány v rozsahu 250 – 14000 ot/min s krokem 250 ot/min. Se zvyšujícími se otáčkami střed rotoru postupně vyplavává [4] zespodu pánve směrem ke středu ložiska. Na obr. 6.3 a obr. 6.4 jsou pro jednotlivé rovnovážné polohy vykresleny závislosti koeficientů tuhosti a tlumení na jmenovitých otáčkách rotoru. Pro lepší přehlednost grafu závislostí koeficientů tlumení na otáčkách jsou koeficienty shora omezeny hranicí $1 \cdot 10^6 \text{ Ns/m}$.



Obr. 6.2: Rovnovážné polohy Lavalova rotoru



Obr. 6.3: Závislost koeficientů tuhosti olejového filmu na otáčkách

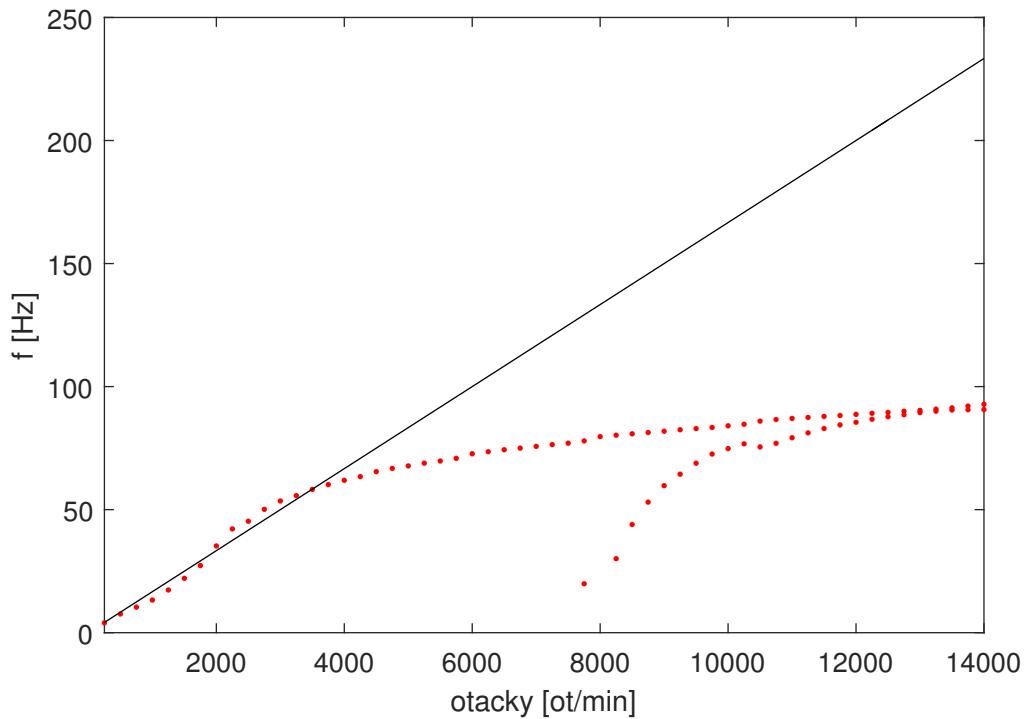


Obr. 6.4: Závislost koeficientů tlumení olejového filmu na otáčkách

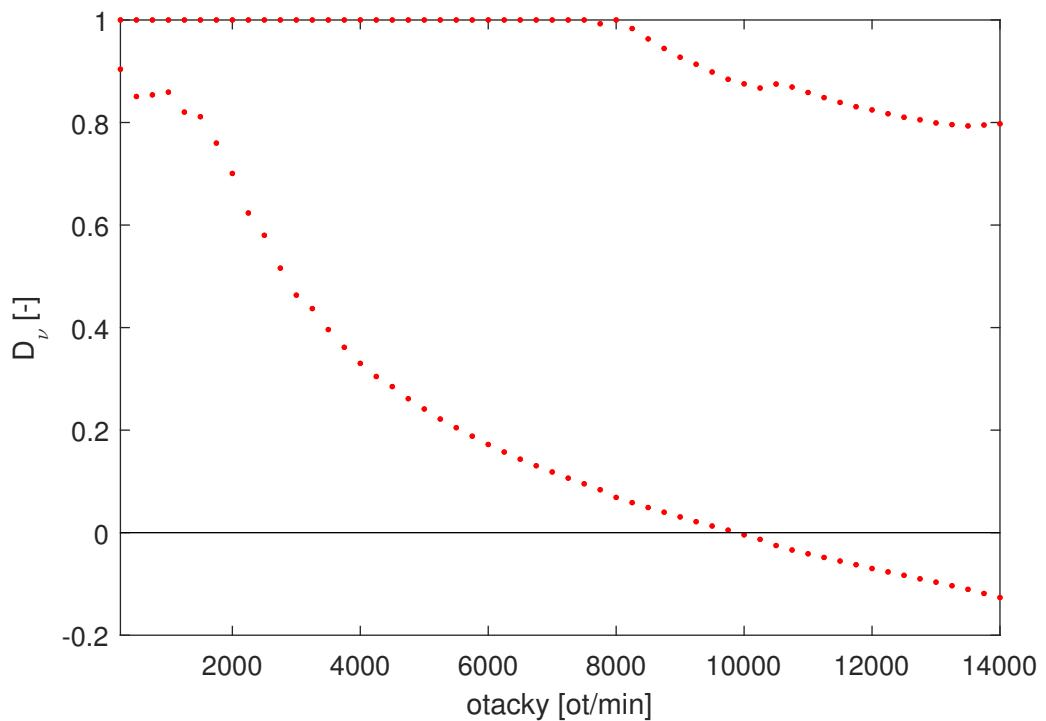
Na základě těchto známých koeficientů v rovnovážných polohách (RP) můžeme sestavit Campbellův (obr. 6.5) a stabilitní (obr. 6.6) diagram. Z výsledků stabilitního diagramu je patrné, že po překročení úhlové rychlosti přibližně 10000 ot/min se rotorový systém stává nestabilním. Pro podrobnější analýzu chování rotoru byl proveden rozbeh dokoñale vyváženého rotoru z 250 ot/min na 14000 ot/min. Počáteční podmínka simulace byla zvolena jako dříve vypočítaná rovnovážná poloha rotoru pro 250 ot/min a nulová počáteční rychlosť. Pro numerickou simulaci rozbehu byl použit MATLAB řešič `ode113`.

Trajektorie čepu rozbíhajícího se rotoru je vykreslena na obr. 6.7. Pro srovnání byly do grafu přidány výsledky výpočtu rovnovážných poloh čepu dříve vykreslených na obr. 6.2. Z výsledků je zřejmé, že do určitého času čep rotoru téměř přesně sleduje rovnovážné polohy. Poté se u něj rozvine nestabilita charakterizovaná vířením oleje. Závislost jednotlivých výchylek ve směru y a z na otáčkách je vykreslena na obr. 6.8. Pro srovnání jsou na obr. 6.9 vykresleny jednotlivé výchylky získané z programu AVL. Porovnáním výsledků zjistíme, že při řešení programem CALROT dojde k rozvoji nestability s nepatrně vyššími otáčkami ale s téměř totožnou amplitudou.

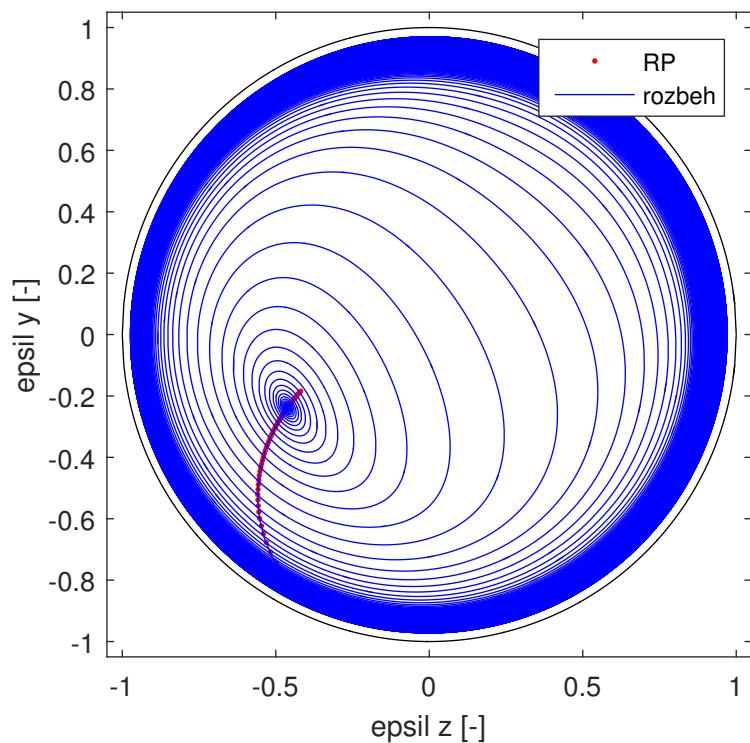
Příčinu vzniku nestability systému je možné určit z kaskádového diagramu [1] získaného z Fourierovy analýzy časového průběhu jednotlivých výchylek rotoru. Na diagramech na obr. 6.10 a obr. 6.11 se pro zkoumaný rozsah otáček objevuje dominantní frekvence v okolí 0,45X první harmonické složky, o které je známo, že přísluší [1] nestabilitě víření oleje. Diagramy jsou doplněny o náběžné přímky odpovídající první a 0,5X harmonické složce. Velikosti amplitud v kaskádových diagramech jsou vůči příslušným amplitudám z obr. 6.8 zkresleny kvůli normalizovanému Hannovu oknu, které bylo použito k zabránění chybě únikem [1].



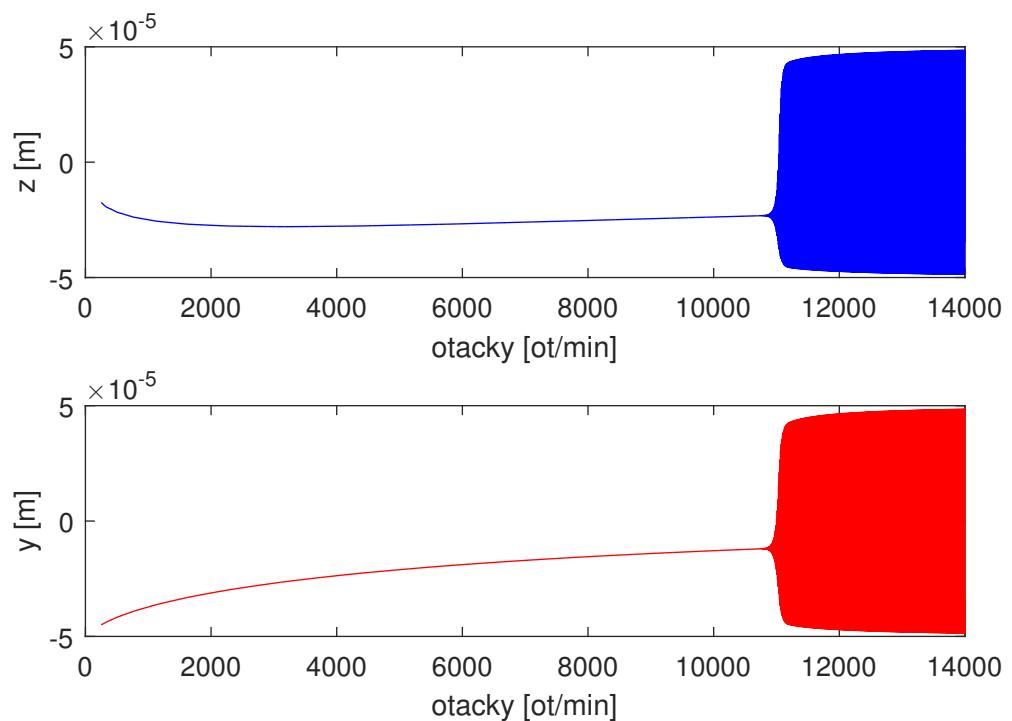
Obr. 6.5: Campbellův diagram Lavalova rotoru



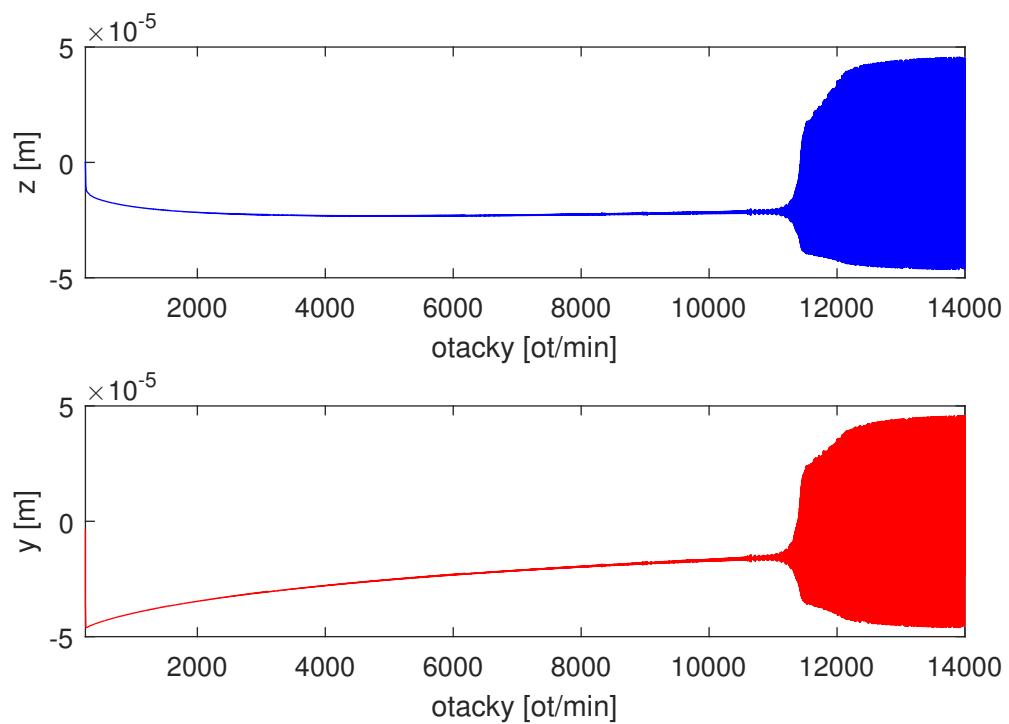
Obr. 6.6: Stabilitní diagram Lavalova rotoru



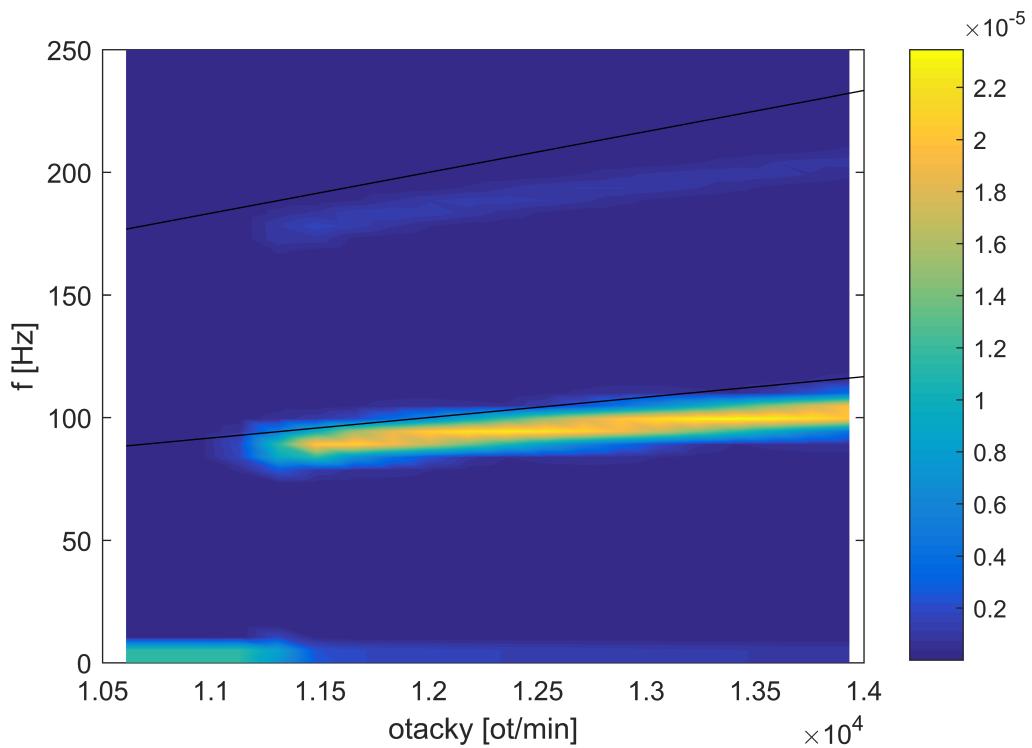
Obr. 6.7: Srovnání rozběhu Lavalova rotoru a rovnovážných poloh



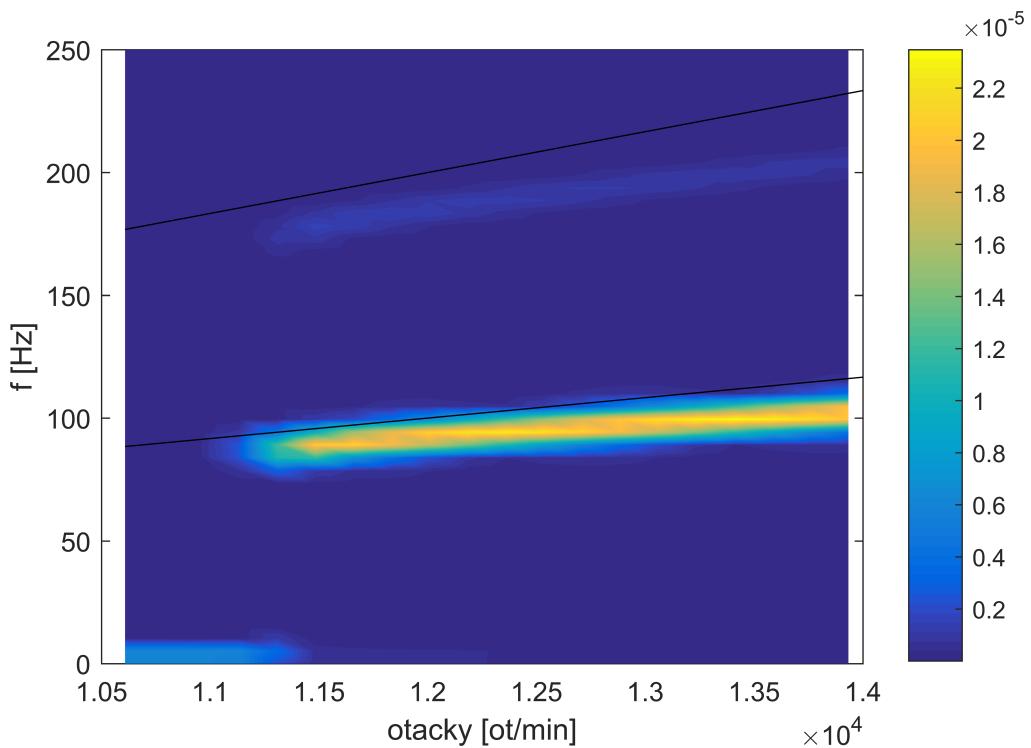
Obr. 6.8: Jednotlivé složky výchylek rotoru při rozběhu – CALROT



Obr. 6.9: Jednotlivé složky výchylek rotoru při rozběhu – AVL



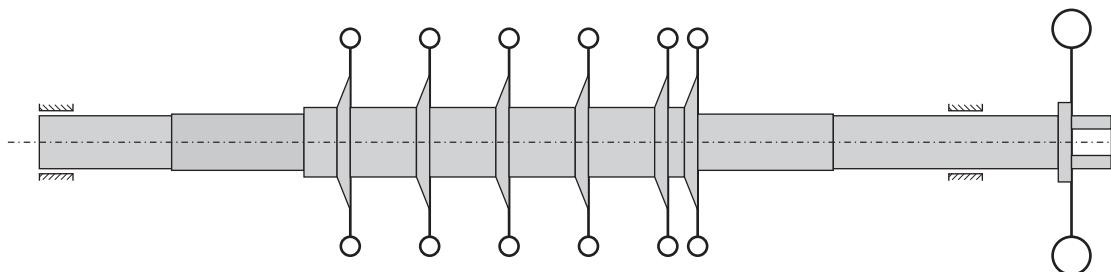
Obr. 6.10: Kaskádový diagram – vodorovná výchylka z (CALROT)



Obr. 6.11: Kaskádový diagram – svislá výchylka y (CALROT)

6.2 Čerpadlo

V této podkapitole je ukázáno použití vlastních výpočtových programů na složitější rotorové soustavě. Pro výpočty byl vybrán rotor šestistupňového čerpadla (obr. 6.12) podepřený dvěma identickými kluznými ložisky. Rotor na obr. 6.12 se skládá z podajného hřídele (šedé oblasti), šesti oběžných kol a setrvačníku na převislé konci (bílé kruhy). Oběžná kola a setrvačník budeme modelovat jako tuhé kotouče. Použitá radiální ložiska jsou kruhového průřezu se dvěma axiálními drážkami. Parametry ložisek jsou uvedeny v tab. 6.2. Mazivo uvažujeme jako dokonale nestlačitelné a teplotně nezávislé.



Obr. 6.12: Geometrie čerpadla

průměr čepu	D	101,6 mm
délka ložiska	L	63,5 mm
radiální vůle	c	88,9 μm
dynamická viskozita	η	19,4 mPa · s
axiální drážka 1		170 – 190 deg
axiální drážka 2		350 – 370 deg
tlak v drážce 1	p_{VST}	$1 \cdot 10^5$ Pa
tlak v drážce 2	p_{VST}	$1 \cdot 10^5$ Pa
tlak na levé straně ložiska	p_L	0 Pa
tlak na pravé straně ložiska	p_P	0 Pa
počet uzlů v axiálním směru		20
počet uzlů v obvodovém směru		90

Tab. 6.2: Parametry ložisek čerpadla

Tuhé kotouče jsou charakterizovány hmotností m , momentem setrvačnosti k ose otáčení J_p , k příčné ose momentem J a deviačním momentem D . Souhrnné parametry všech tuhých kotoučů jsou uvedeny v tab. 6.3. K diskretizaci spojitého kontinua využijeme metodu konečných prvků. Při diskretizaci musíme zohlednit místa uložení rotoru na ložiskách a připojení tuhých kotoučů. Střed hmotnosti každého kotouče je vzhledem k uzlu, ke kterému je připojen, vzdálen o parametr a z tab. 6.3. Hřídel byl rozdělen na 25 prvků každý o délce l , vnějším průměru D a vnitřním průměru d . V tab. 6.4 jsou uvedeny rozměry a materiálové vlastnosti jednotlivých elementů hřídele o hustotě ρ , Youngově modulu pružnosti E a Poissonově čísle ν .

uzel	m [kg]	a [mm]	J_p [kg · m^2]	J [kg · m^2]	D [kg · m^2]
7	22,68	0	0,23408	0,11704	0
9	22,68	0	0,23408	0,11704	0
11	22,68	0	0,23408	0,11704	0
13	22,68	0	0,23408	0,11704	0
15	22,68	0	0,23408	0,11704	0
17	22,68	0	0,23408	0,11704	0
25	113,40	0	0,73150	0,36575	0

Tab. 6.3: Tuhé kotouče čerpadla

element	l [mm]	D [mm]	d [mm]	ρ [kg/m^3]	E [MPa]	ν [-]
1	127,00	101,60	0	7833	199948	0,397
2	127,00	101,60	0	7833	199948	0,397
3	127,00	107,95	0	7833	199948	0,397
4	127,0	107,95	0	7833	199948	0,397
5	63,50	133,35	0	7833	199948	0,397
6	25,40	196,85	0	7833	199948	0,397
7	127,00	133,35	0	7833	199948	0,397
8	25,40	196,85	0	7833	199948	0,397
9	127,00	133,35	0	7833	199948	0,397
10	25,40	196,85	0	7833	199948	0,397
11	127,00	133,35	0	7833	199948	0,397
12	25,40	196,85	0	7833	199948	0,397
13	127,00	133,35	0	7833	199948	0,397
14	25,40	196,85	0	7833	199948	0,397
15	31,75	133,35	0	7833	199948	0,397
16	25,40	196,85	0	7833	199948	0,397
17	6,35	133,35	0	7833	199948	0,397
18	127,00	107,95	0	7833	199948	0,397
19	127,00	107,95	0	7833	199948	0,397
20	127,00	101,60	0	7833	199948	0,397
21	127,00	101,60	0	7833	199948	0,397
22	88,90	101,60	0	7833	199948	0,397
23	88,90	101,60	0	7833	199948	0,397
24	25,40	152,40	0	7833	199948	0,397
25	76,20	101,60	50,8	7833	199948	0,397

Tab. 6.4: Hřídelové prvky čerpadla

Metodou konečných prvků sestavíme globální charakteristické matice rotorového systému bez ložisek. Vnitřní tlumení materiálu nebudeme uvažovat. Matematický model kmitajícího rotoru vyjádříme ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \omega_0 \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t). \quad (6.3)$$

Vazba mezi rotorem a kluznými ložisky je realizována hydrodynamickou silou ve vektoru pravé strany $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega_0, t)$. Vektor buzení současně obsahuje tíhovou sílu a jeho součástí může být i harmonické buzení od nevývažku. Struktura vektoru buzení v každém uzlu je zřejmá z rovnice (2.33). Soustavu rovnic (6.3) převedeme do stavového

prostoru (5.1). Rotorová soustava z obr. 6.12 je diskretizována 25 prvky, tzn. všechny parametry jsou soustředěny do 26 uzlů. Každý uzel má 4 stupně volnosti. Matematický model kmitající soustavy (6.3) je tvořen celkem 104 diferenciálními rovnicemi druhého řádu. Po převodu do stavového prostoru tak dostáváme soustavu rovnic čítajících 208 rovnic. Kvůli velkému počtu rovnic a hlavně silné nelinearitě systému způsobené přítomností vazeb kluznými ložisky je tento problém výpočetně velmi náročný. Proto využijeme modální redukce (kap. 5.2.3) a plný model nahradíme jednodušším modelem. Pro tento výpočet byla zvolena redukce systému na 12 stupňů volnosti.

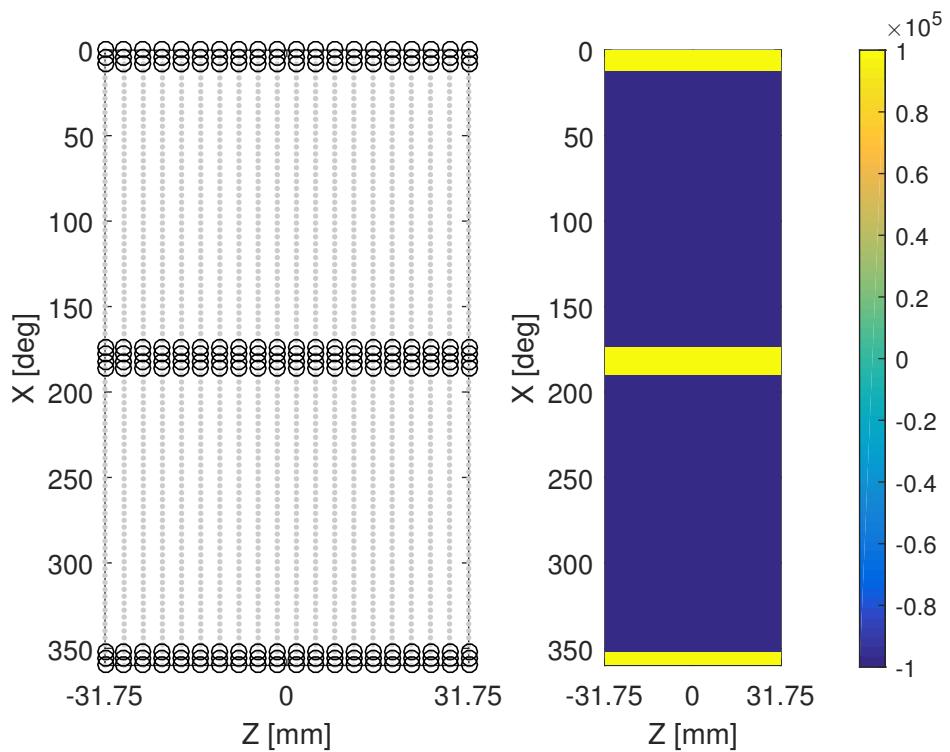
Polohu těžiště rotorové soustavy vypočteme ze známého vztahu pro rovnost statických momentů jednotlivých částí a celku. Jako počátek souřadnicového systému uvažujeme levý konec rotoru na obr. 6.12. Po rozepsání této rovnosti a vydelením hmotností m celého rotoru dostáváme vztah

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{25} x_T^{(i)} m_i^{(e)} + \sum_{j=1}^7 x_T^{(j)} m_j^{(k)}}{m}, \quad (6.4)$$

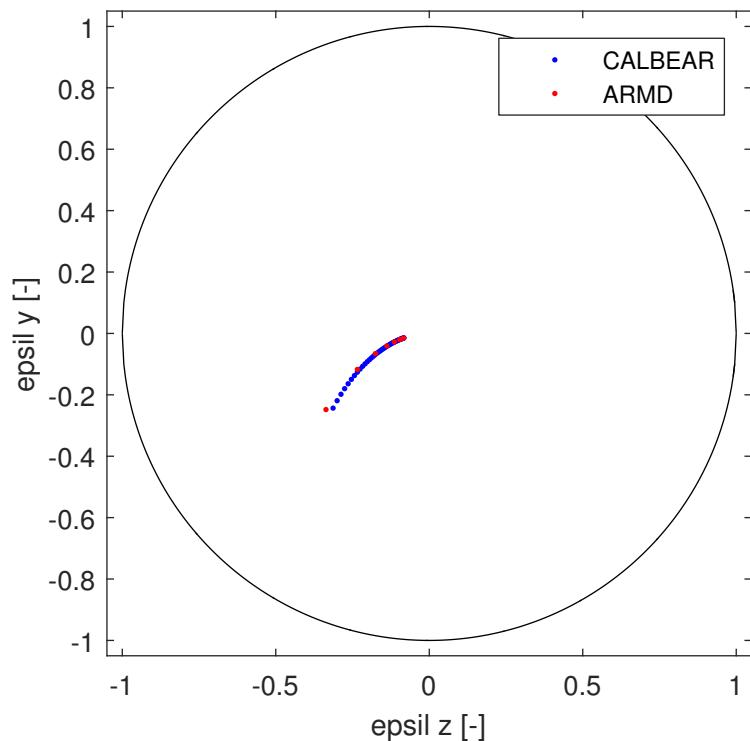
kde $m_i^{(e)}, m_j^{(k)}$ je hmotnost jednotlivých hřídelových prvků, resp. kotoučů se středem hmotnosti vzdáleným od levého konca rotoru o hodnotu $x_T^{(i)}$, resp. $x_T^{(j)}$. Nyní známe celkovou hmotnost rotoru a polohu jeho těžiště. Na základě těchto veličin a známé geometrie rotoru snadno určíme velikost statických reakcí F_L a F_P v místech ložiskových vazeb na levé, resp. pravé straně rotoru (analogie podepřeného nosníku zatíženého pouze těhou silou). Velikosti těchto reakcí jsou $F_L = 1307$ N a $F_P = 3006,8$ N.

Na obr. 6.13 je vykreslena vygenerovaná síť uzlů pokrývající ložiskovou mezeru. Do sítě jsou zaneseny axiální drážky spolu s předepsaným tlakem v uzlech, které se nachází v místech těchto drážek. Mimo drážky jsou zobrazeny záporné hodnoty tlaku, které mají pouze informační charakter pro lepší barevné rozlišení. Uzly na obr. 6.13, které jsou označeny záporným tlakem, jsou uzly, ve kterých řešíme neznámé tlakové rozložení.

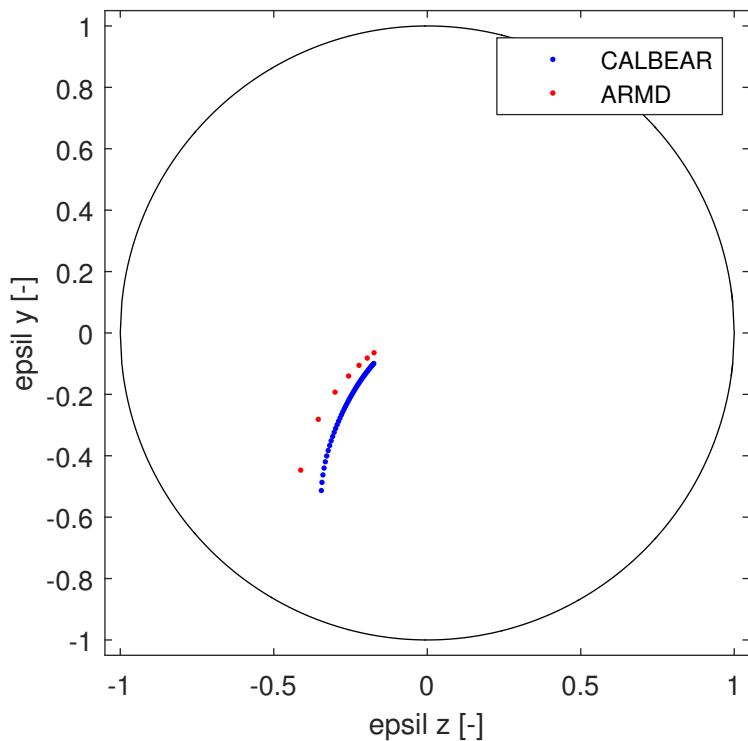
Z principu akce a reakce plyne, že na ložiska působí dříve vypočítané záporně vzaté reakce F_L (levé ložisko) a F_P (pravé ložisko). Pro tyto síly a ložisko s parametry z tab. 6.2 a geometrií na obr. 6.13 byly pro srovnání vypočítány rovnovážné polohy ve vlastním programu CALBEAR a komerčním programu ARMD. Pro výpočty byl uvažován rozsah otáček 1000 – 7000 ot/min. Na obr. 6.14 a obr. 6.15 je vykreslena trajektorie vyplavávání čepu pro levé a pravé ložisko. Pro tyto rovnovážné polohy odpovídající danému statickému zatížení a otáčkám rotoru je na obr. 6.16 až obr. 6.19 vykresleno srovnání závislostí koeficientů tuhosti a tlumení olejového filmu na otáčkách rotoru vypočítaných pomocí obou programů. Po srovnání jednotlivých výsledků můžeme říci, že shoda obou programů je na velmi dobré úrovni a vzniklé větší odchylky u koeficientů tuhosti a tlumení jsou převážně u mimodiagonálních prvků.



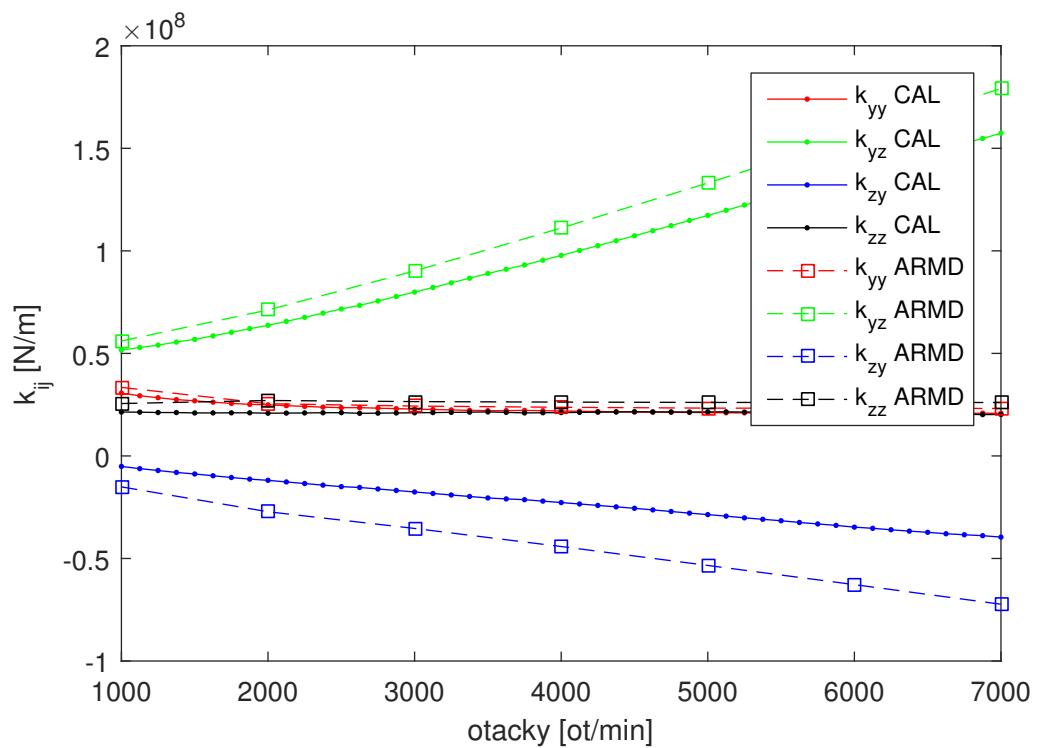
Obr. 6.13: Vykreslení poloh a tvaru drážek spolu s hodnotami vstupních tlaků



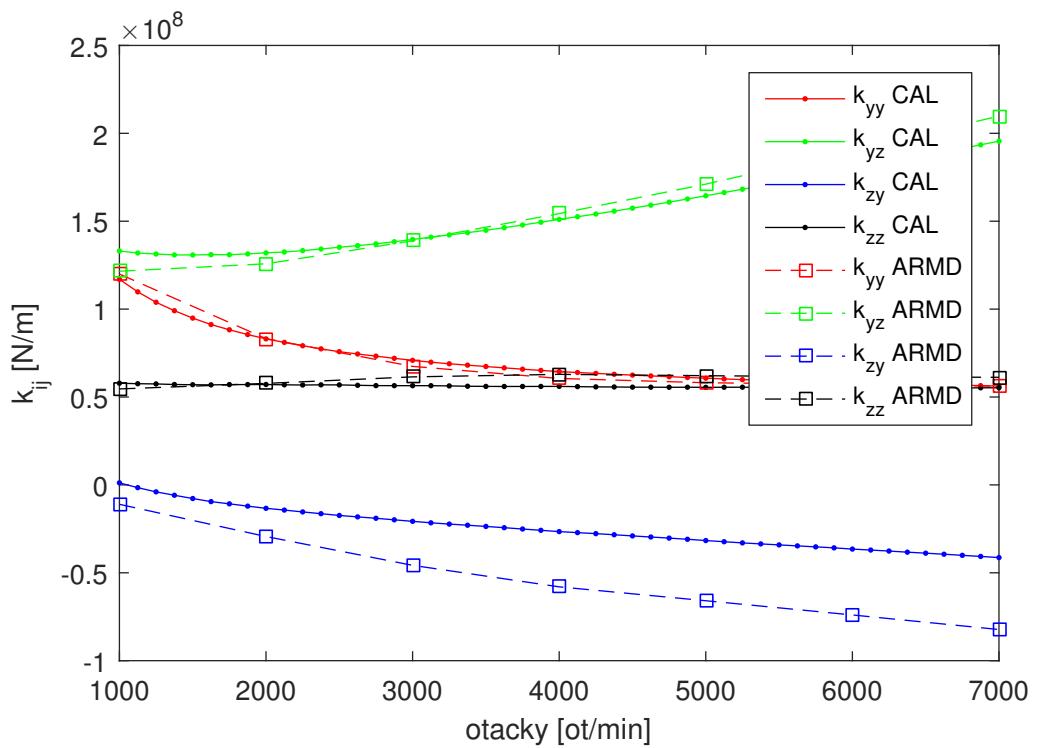
Obr. 6.14: Rovnovážné polohy čepu rotoru v levém ložisku



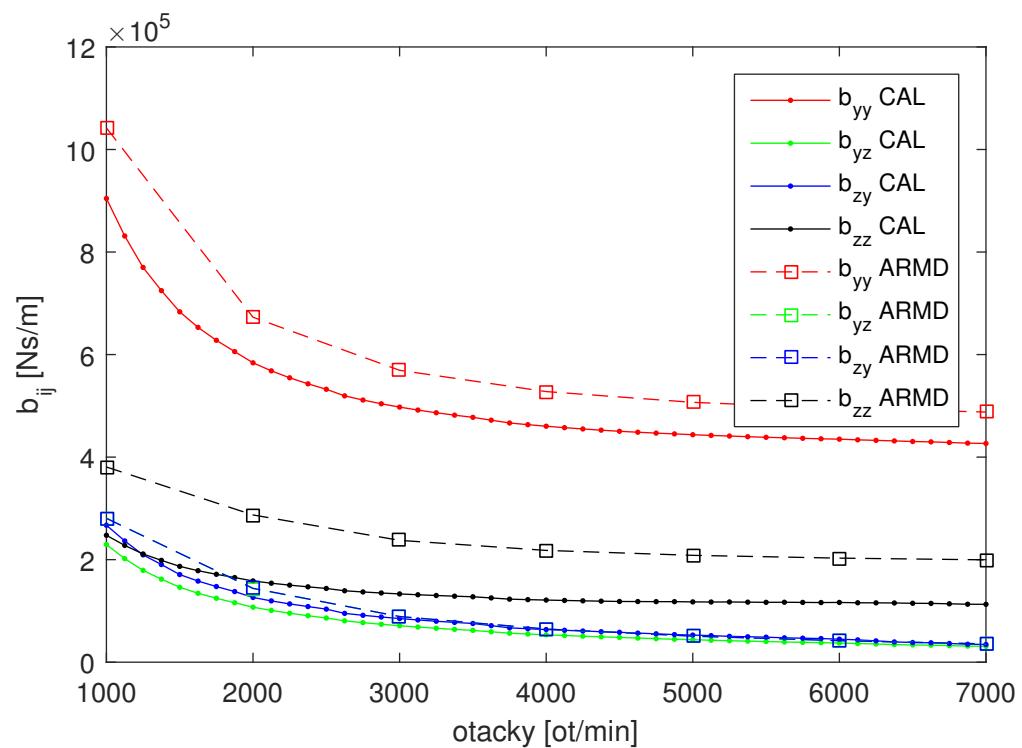
Obr. 6.15: Rovnovážné polohy čepu rotoru v pravém ložisku



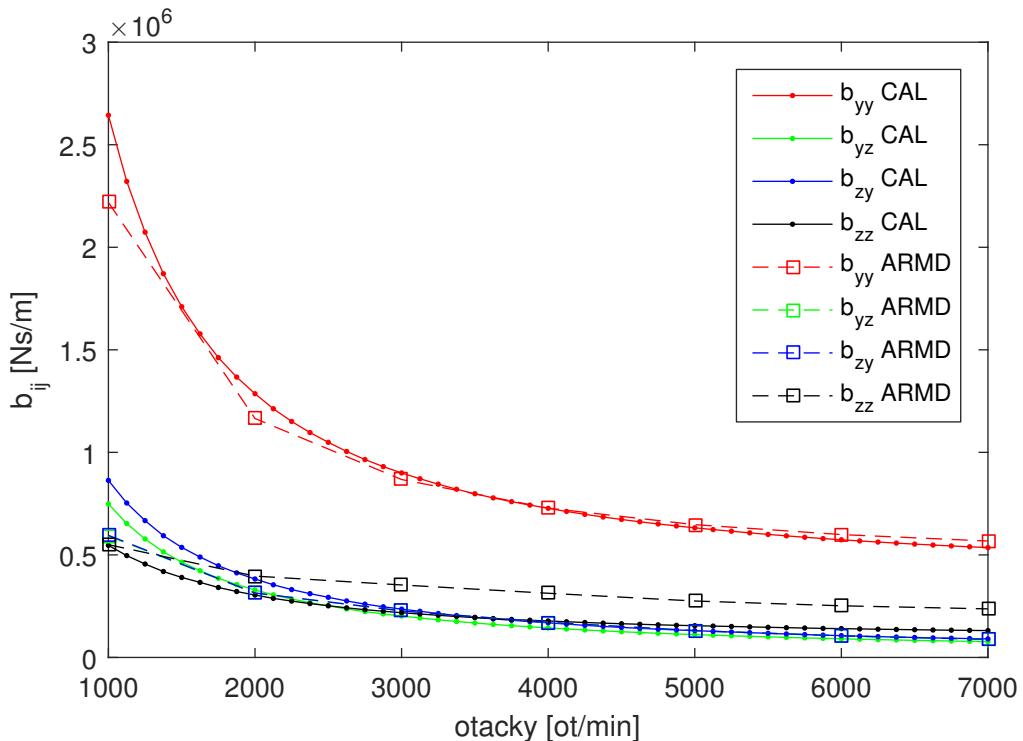
Obr. 6.16: Závislost koeficientů tuhosti na otáčkách – levé ložisko



Obr. 6.17: Závislost koeficientů tuhosti na otáčkách – pravé ložisko



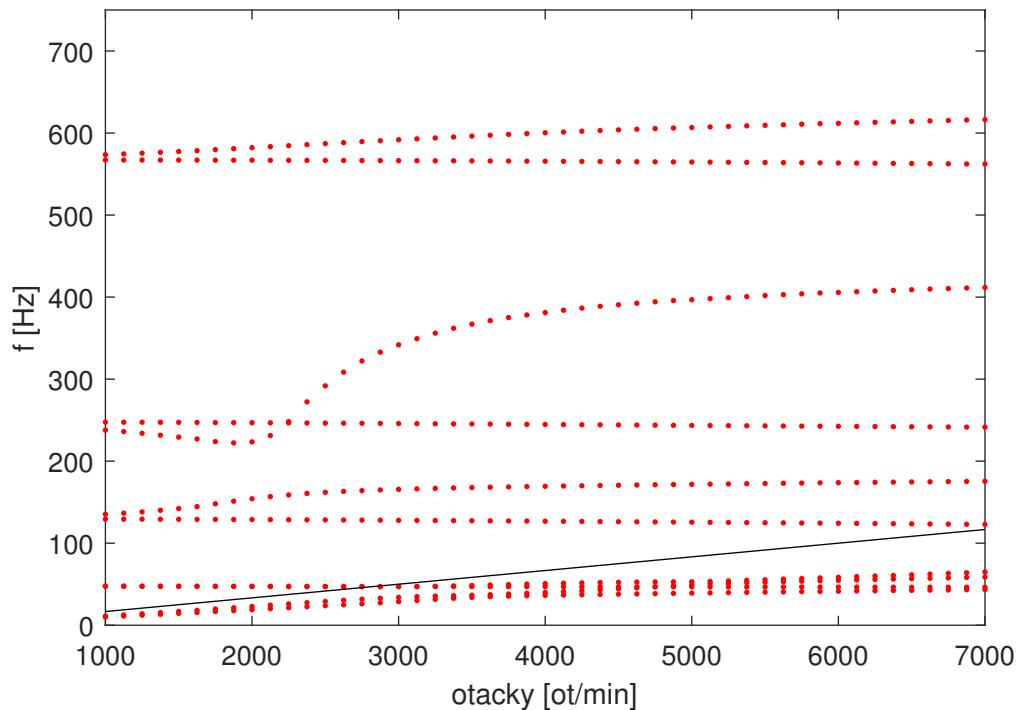
Obr. 6.18: Závislost koeficientů tlumení na otáčkách – levé ložisko



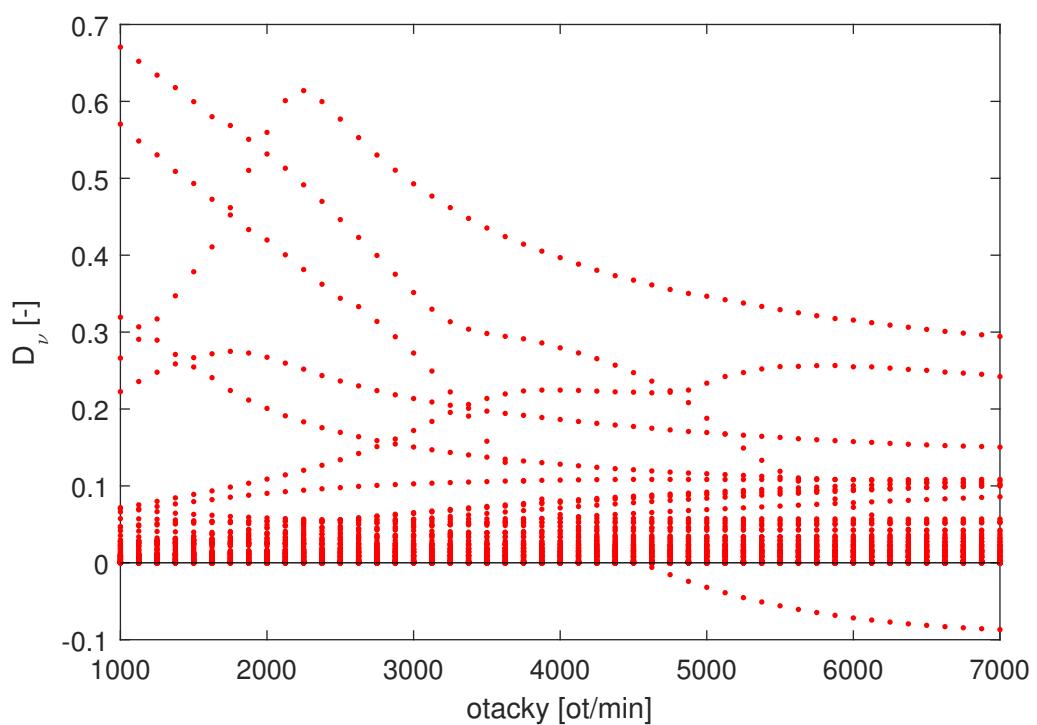
Obr. 6.19: Závislost koeficientů tlumení na otáčkách – pravé ložisko

K sestavení Campbellova a stabilitního diagramu využijeme koeficienty tuhosti a tlumení z obr. 6.16 až obr. 6.19. Na obr. 6.20 je vykreslen Campbellův diagram (shora omezen hranicí 750 Hz) spolu s náběžnou přímkou. V Campbellově diagramu je také patrné štěpení vlastních frekvencí v oblasti 125 Hz a 575 Hz jako důsledek gyroskopických účinků. Stabilitní diagram je znázorněn na obr. 6.21. Rotorový systém se stává nestabilním po překročení přibližně 4600 ot/min, což je mnohem dříve, než je první vlastní frekvence při 7000 ot/min charakterizovaná protiběžnou synchronní precesí [2].

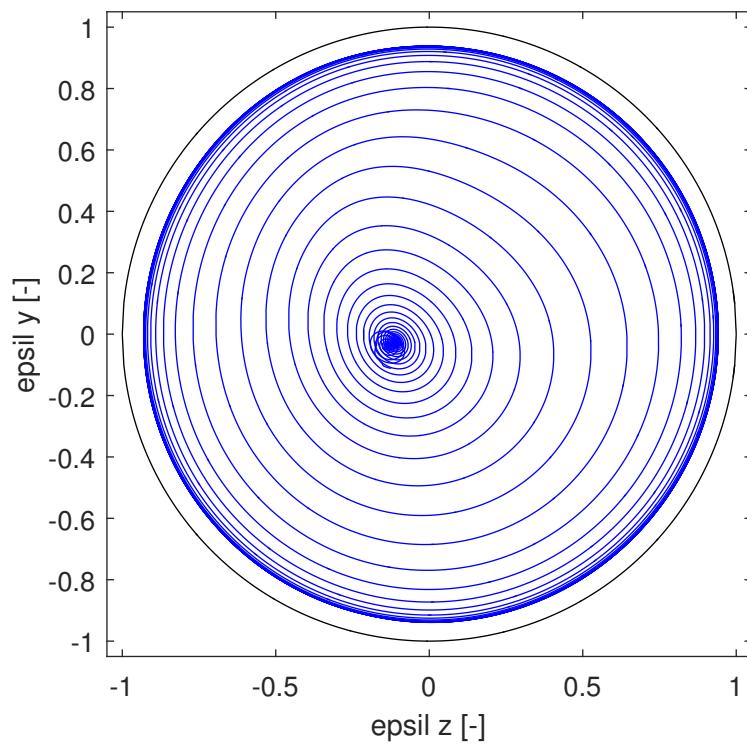
Pro ověření rozvoje nestability provedeme simulaci rozběhu rotoru z 4000 ot/min na 5200 ot/min. Z počátečních podmínek při výpočtu rozběhu v programu CALROT uvažujeme pouze statickou výchylku nepohybujícího se hrídele uloženého na ložiskách charakterizovaných maticemi tuhosti pro 4000 ot/min a zatíženého pouze tíhovou silou (2.33). Takto zvolená počáteční výchylka by měla přibližně odpovídat průhybu rotoru při počáteční úhlové rychlosti a částečně tím eliminujeme přechodové kmitání rotorové soustavy. K řešení byl použit řešič `ode15s`. Na obr. 6.22 a obr. 6.23 jsou znázorněny trajektorie čepu v levém a pravém ložisku. Složky výchylek pro jednotlivá ložiska jsou na obr. 6.24 a obr. 6.26. Výchylky čepu rotoru v levém a pravém ložisku získané z programu AVL jsou pro srovnání uvedeny na obr. 6.25 a obr. 6.27. Z výsledků je patrné, že přibližně při 4900 ot/min dojde k rozvoji nestability. Dalším důkazem tohoto jevu jsou i kaskádové diagramy na obr. 6.28 až obr. 6.31 získané z Fourierovy analýzy jednotlivých složek časového signálu. Kaskádové diagramy obsahují náběžné přímky odpovídající první a 0,5X harmonické složce. Na základě uvedených výsledků můžeme potvrdit, že vzniklá nestabilita rotorového systému je způsobena vířením oleje.



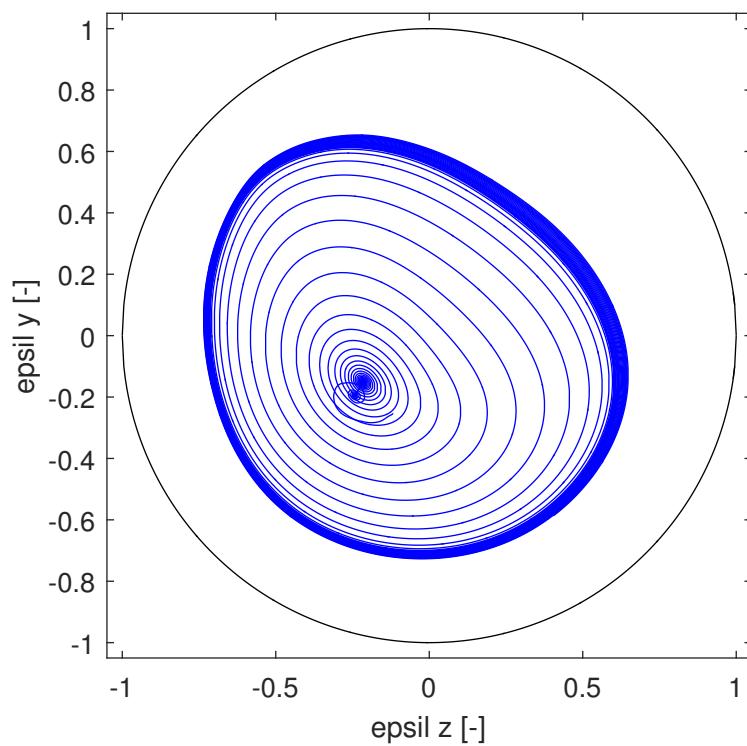
Obr. 6.20: Campbellův diagram čerpadla



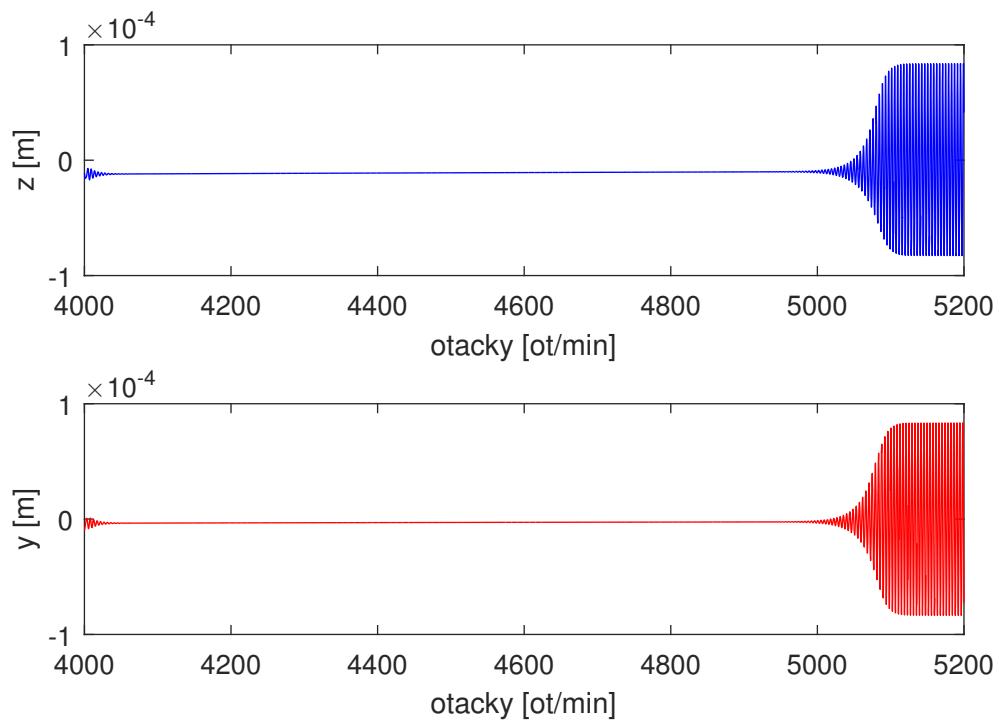
Obr. 6.21: Stabilitní diagram čerpadla



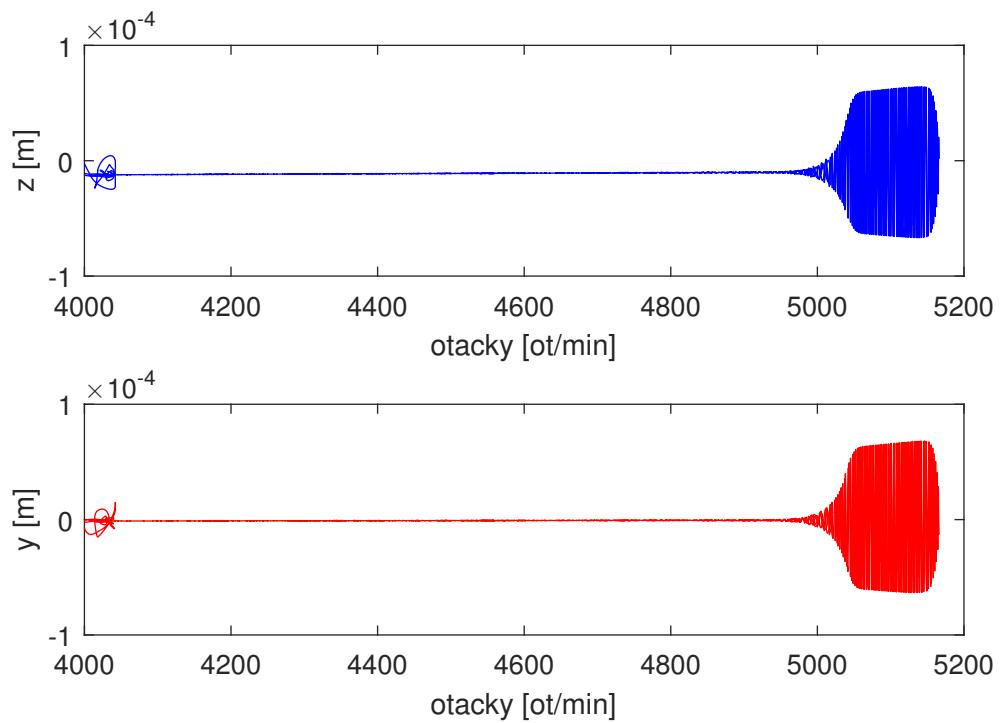
Obr. 6.22: Trajektorie čepu rotoru v levém ložisku při rozběhu – CALROT



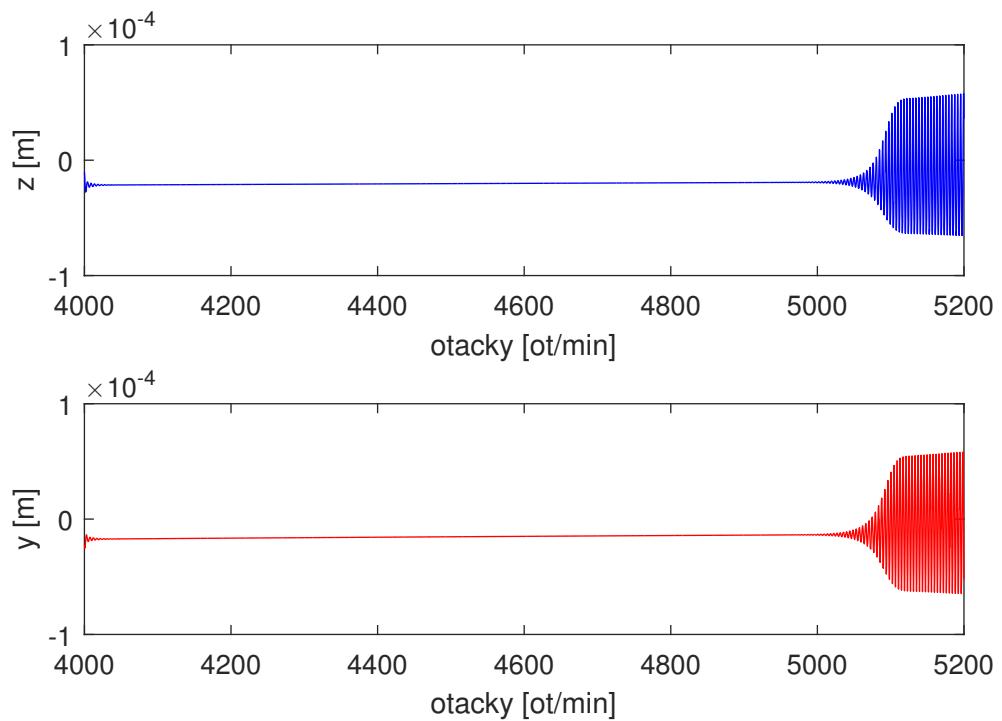
Obr. 6.23: Trajektorie čepu rotoru v pravém ložisku při rozběhu – CALROT



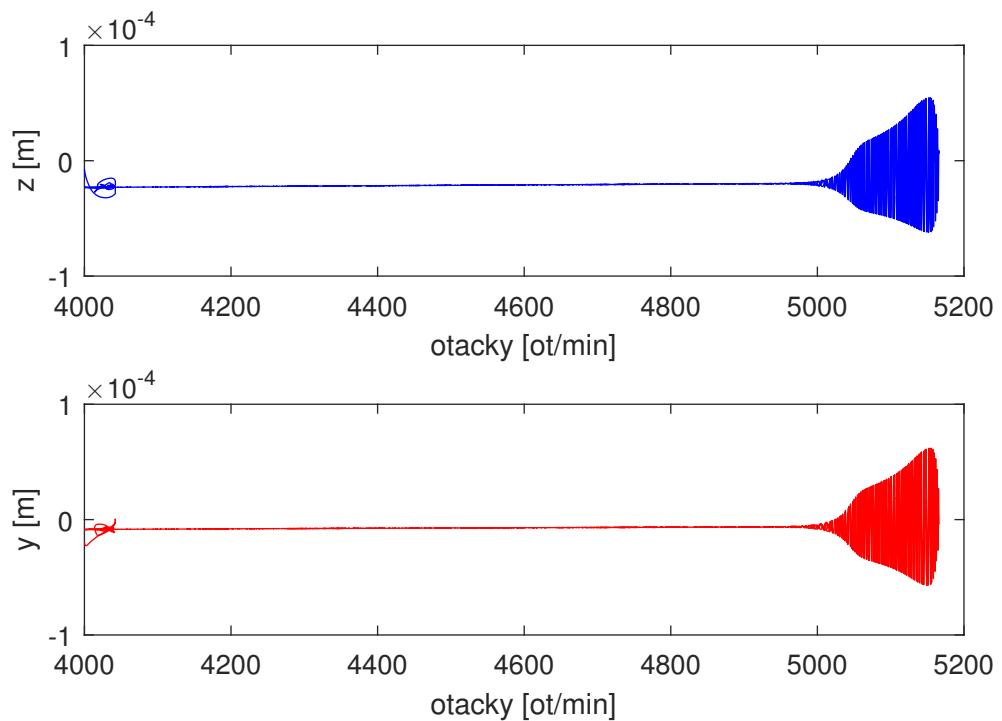
Obr. 6.24: Jednotlivé složky výchylek v levém ložisku při rozběhu – CALROT



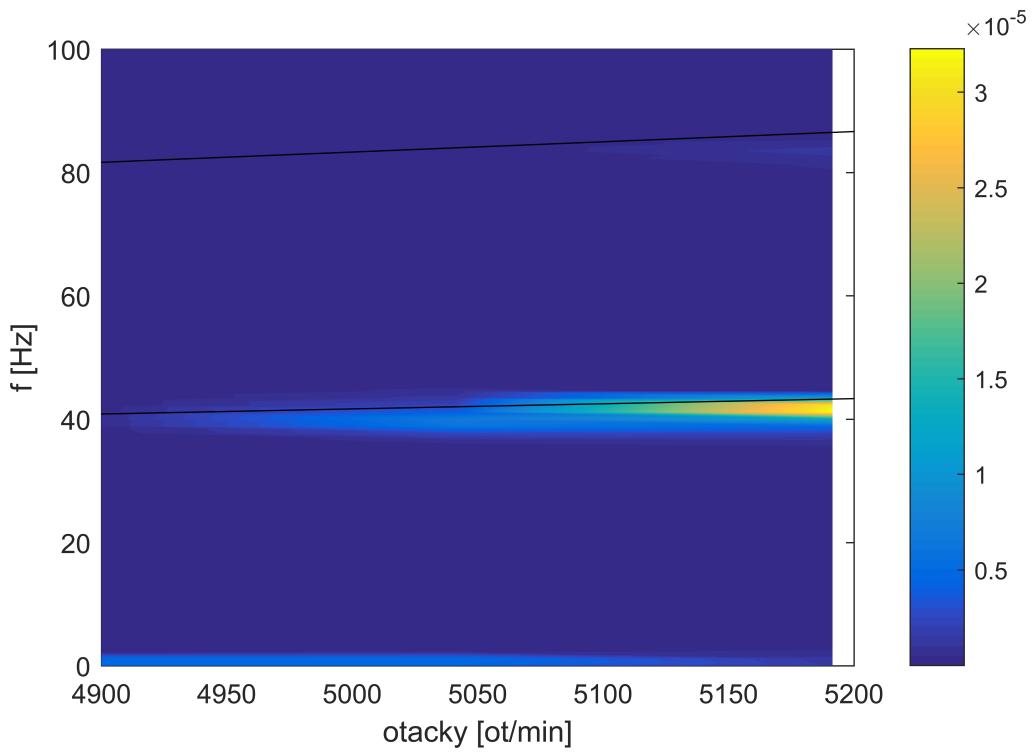
Obr. 6.25: Jednotlivé složky výchylek v levém ložisku při rozběhu – AVL



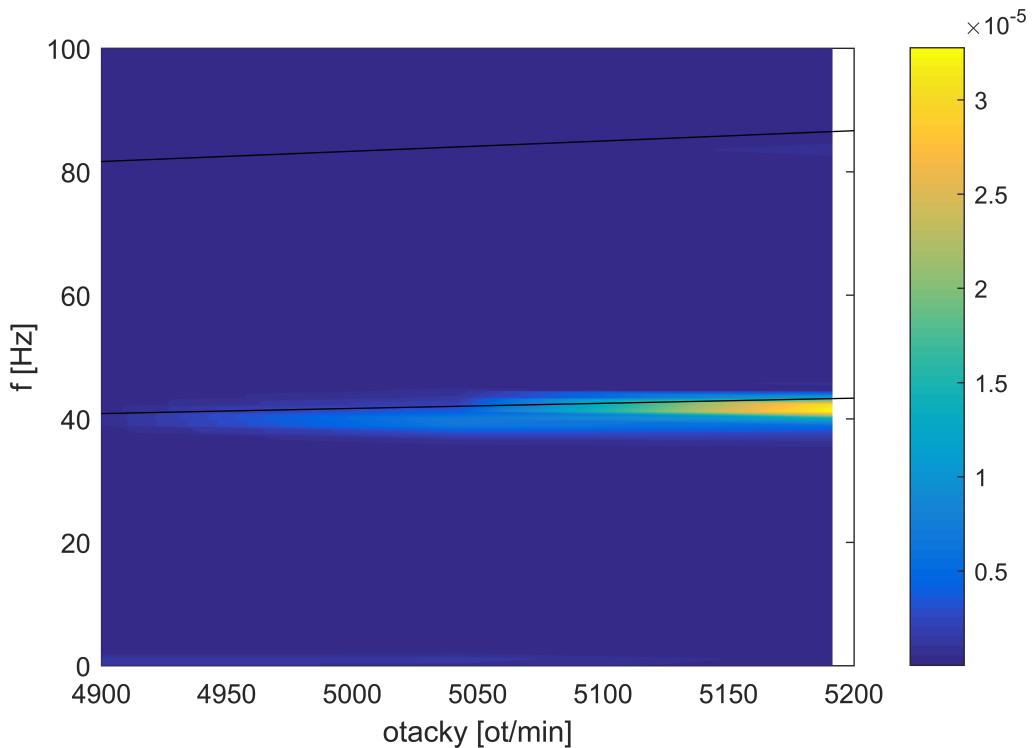
Obr. 6.26: Jednotlivé složky výchylek v pravém ložisku při rozběhu – CALROT



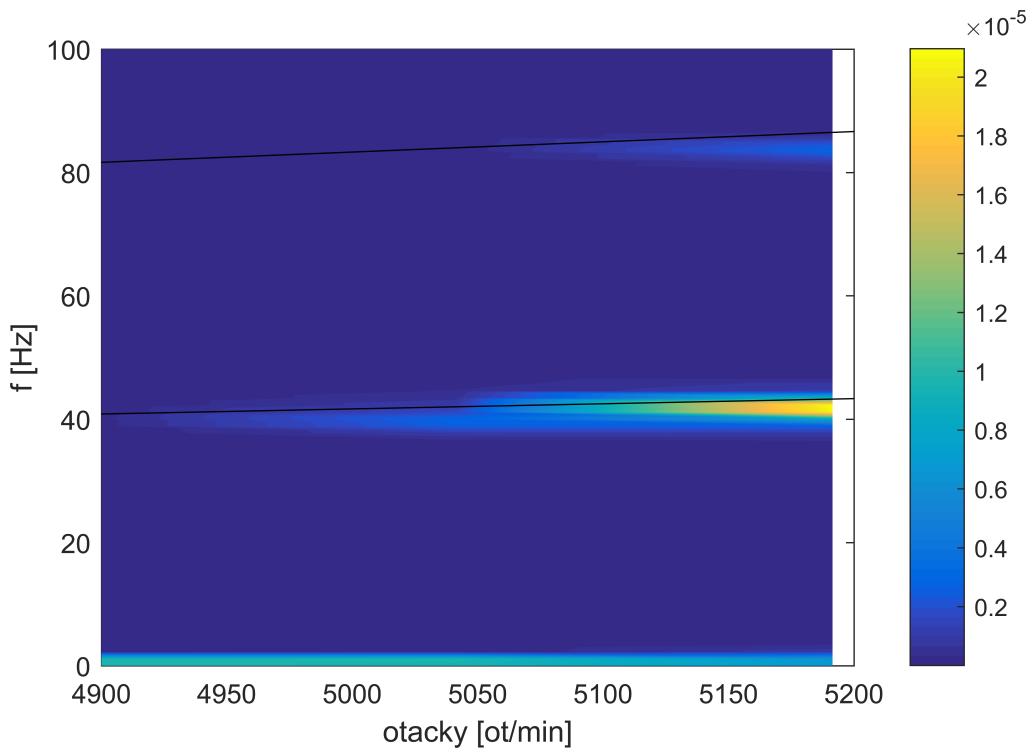
Obr. 6.27: Jednotlivé složky výchylek v pravém ložisku při rozběhu – AVL



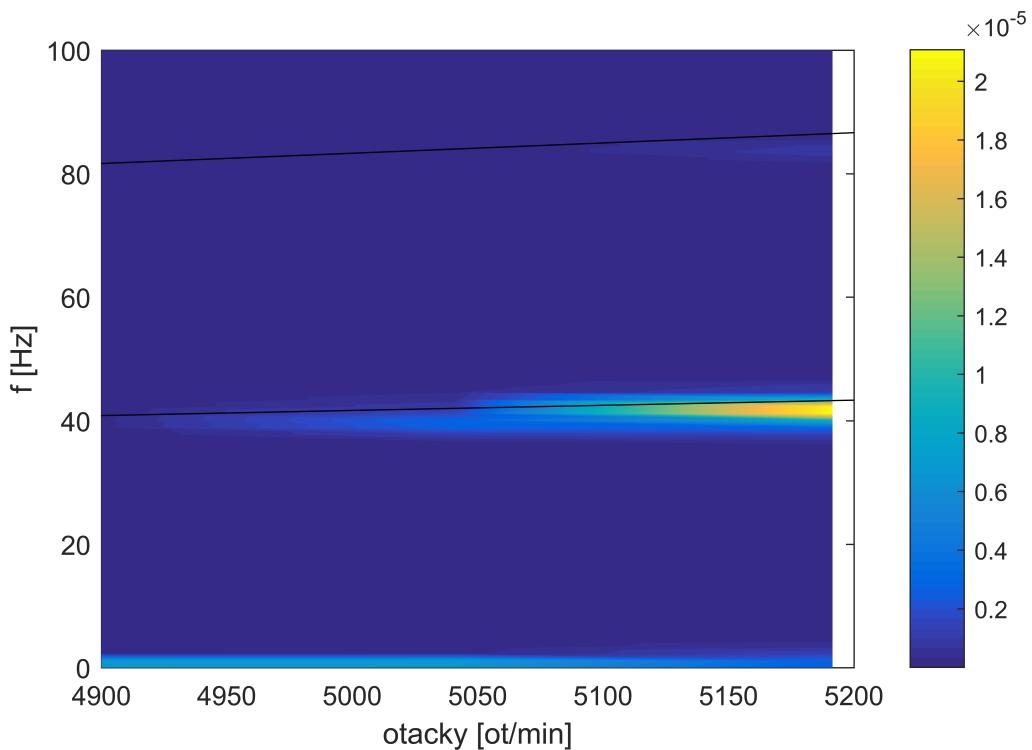
Obr. 6.28: Kaskádový diagram – vodorovná výchylka z v levém ložisku (CALROT)



Obr. 6.29: Kaskádový diagram – svislá výchylka y v levém ložisku (CALROT)



Obr. 6.30: Kaskádový diagram – vodorovná výchylka z v pravém ložisku (CALROT)



Obr. 6.31: Kaskádový diagram – svislá výchylka y v pravém ložisku (CALROT)

7 Závěr

V úvodu diplomové práce bylo v kapitole 1 stanoveno několik cílů. V této závěrečné části jsou jednotlivé body postupně shrnutý.

Matematický model rotujících hřídelů

Způsoby modelování rotujících hřídelů jsou stručně naznačeny na začátku kapitoly 2. Nejpřesnější a současně i nejpoužívanější je metoda konečných prvků. Rotor je nahrazen poddajnými hřídelovými prvky a tuhými kotouči. Za tuhé kotouče se obvykle považují ozubená kola, setrvačníky apod. V kapitole jsou postupně odvozeny charakteristické matice (podkap. 2.1 a 2.2) jednotlivých prvků rotujícího systému. Odvození matic hmotnosti, tuhosti a gyroskopických účinků je provedeno pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu. Celkové charakteristické matice jsou poté složeny z jednotlivých matic (podkap. 2.3). Matice vnitřního tlumení je nejčastěji vyjádřena v proporcionálním tvaru. Vektor buzení (podkap. 2.4) se skládá z tíhových sil hřídelových prvků rozpočítaných do jednotlivých uzlů, tíhových sil tuhých kotoučů, odstředivých sil nevývažků a hydrodynamických sil reprezentujících vazby mezi rotorem a kluznými ložiskem v daných uzlech.

Matematický model kluzných ložisek

Tlakové rozložení v ložiskové mezeře je popsáno Reynoldsovo rovnicí. Odvození Reynoldsovy rovnice je založeno na rovnováze sil ve vyjmutém elementu maziva z olejové vrstvy. Podrobné odvození je detailně ukázáno ve vlastní bakalářské práci [7]. V podkapitole 3.1 jsou kromě uvedené Reynoldsovy rovnice a vysvětlení jejich členů shrnutý také základní předpoklady pro její odvození a zavedení souřadnicového systému, který v ložisku uvažujeme. Tlakové pole generuje v olejovém filmu sílu, kterou nazýváme hydrodynamickou. Její výpočet je uveden v podkapitole 3.2. Vlastnosti olejového filmu je možné charakterizovat pomocí matic tuhosti a tlumení. Tyto matice mají úzkou souvislost právě s hydrodynamickou silou. Jejich struktura je naznačena v podkapitole 3.3. Vazbu mezi rotorem a kluznými ložisky je možné popisovat pomocí hydrodynamické síly nebo maticemi dynamických vlastností.

Počítačová implementace modelování kluzných ložisek

Reynoldsova rovnice je parciální diferenciální rovnicí druhého řádu. Analytické řešení této rovnice je velmi obtížné a v literatuře je uváděno pouze pro idealizované případy válcových kluzných ložisek. U rotorových soustav se však velmi často vyskytují ložiska s odlišným průřezem ložiskové pánve (např. citronová ložiska) a ložisková pouzdra obsahující drážky pro přivádění oleje. Pokud bychom approximovali tyto ložiska idealizovanými případy, mohlo by docházet k velmi odlišným výsledkům. Z tohoto důvodu se využívá řešení numerickými metodami. V podkapitole 4.1 je uveden postup výpočtu pomocí metody konečných differencí. Implementace drážek do výpočtu je realizována pomocí okrajových podmínek. Typy běžně používaných drážek a postup výpočtu je rozepsán v podkapitole 4.1.1. Ze známého tlakového rozložení je možné následně vypočítat hydrodynamickou sílu (podkap. 4.2) a koeficienty dynamických vlastností (podkap. 4.3). Pro počítačové modelování kluzných ložisek byl v pracovním prostředí MATLAB zpracován vlastní výpočtový program CALBEAR. Jeho popis a struktura je v podkapitole 4.4.

Počítačová implementace základních úloh dynamiky rotorů

Matematický model rotorového systému s kluznými ložisky se kvůli antisymetrické matici gyroskopických účinků a silné nelinearitě ložiskové vazby převádí do stavového prostoru (podkap. 5.1). Na tomto matematickém modelu je v podkapitole 5.2 ukázána modální analýza. Z výsledků modální analýzy je možné následně rozhodnout o stabilitě rotorového systému (podkap. 5.2.2) nebo určit kritické úhlové rychlosti. Výpočet dynamické odezvy v čase je u modelů s velkým počtem stupňů volnosti a silné nelinearitě způsobené vazbou kluzným ložiskem výpočetně náročný problém. Ke zrychlení výpočtu se často využívá modální redukce popsána v podkapitole 5.2.2. Pro výpočet základních úloh dynamiky rotorů byl v pracovním prostředí MATLAB vytvořen výpočtový program CALROT, který k vlastním výpočtům využívá i vybrané moduly programu CALROT. V podkapitole 5.3 je program CALROT stručně shrnut a popsán pomocí vývojového diagramu.

Analýza výsledků a ověření správnosti výpočtových programů

Vytvořené vlastní výpočtové programy pro analýzu ložisek a kompletních rotorových systémů byly otestovány na dvou příkladech. Prvním příkladem je Lavalův rotor (podkap. 6.1) se dvěma stupni volnosti. Tento jednoduchý systém byl zvolen pro ověření správnosti sepsaných kódů. Pro zvolené ložisko byly vypočítány rovnovážné polohy čepu rotoru a koeficienty tuhosti a tlumení. Na základě těchto simulací byla provedena modální analýza. Z těchto výsledků byl zjištěn fakt, že rotorová soustava se stane nestabilní po překročení úhlové rychlosti o velikosti přibližně 10000 ot/min. Tyto předpoklady byly následně ověřeny rozbehem rotoru. Při rozbehu rotoru čep téměř přesně kopíruje výpočet statických rovnovážných poloh. Po překročení úhlové rychlosti odpovídající mezi stability se u něj rozvine nestabilita. Výpočet rozbehu rotoru v programu CALROT byl srovnán s výsledky z komerčního programu AVL. Srovnání

výsledky vykazují dobrou shodu. Typ nestability byl určen na základě kaskádových diagramů sestavených z výsledků Fourierovy analýzy. Dominantní kmitání se objevuje v oblasti $0,5X$ první harmonické složky, která odpovídá nestabilitě víření oleje. Na základě výsledků programů CALBEAR a CALROT a srovnání s komerčním programem AVL můžeme považovat počítačovou implementaci za správnou pro zvolenou úlohu.

Ověřené programy CALBEAR a CALROT byly následně použity pro analýzu složitější rotorové soustavy čerpadla. Výsledky analýzy jsou sepsány v podkapitole 6.2. Pro soustavu byla nejprve napočítána statická zatížení ložisek, ze kterých byly určeny rovnovážné polohy čepů rotoru a závislosti koeficientů tuhosti a tlumení. Ložiska byla současně napočítána specializovaným programem ARMD. Rozdíly po srovnání jednotlivých výsledků jsou zanedbatelné a nebo se pohybují v přijatelných tolerancích. Z výsledků modální analýzy byl stanoven rozsah zájmových otáček, ve kterém byla provedena simulace rozběhu rotoru. Výsledky rozběhu rotoru byly opět porovnány s téměř totožnými výsledky z programu AVL. Vybuzená nestabilita rotorové soustavy je způsobena vířením oleje v ložiskách. Provozování čerpadla v rozsahu těchto otáček není vhodné. Potvrzením tohoto faktu je dominantní kmitání rotoru v oblasti $0,5X$ první harmonické složky.

7.1 Rozšíření diplomové práce

Případným rozšířením a zpřesněním výpočtu tlakového rozložení v olejovém filmu je zavedení teplotní závislosti vlastností olejového filmu a popis drsnosti povrchu ložiskové pánve. Další možností rozšíření je pak zkoumání olejového filmu v místech, kde dojde ke kavitaci. Uvedenou metodiku modelování kluzných ložisek lze rozšířit i na ložiska s plovoucím kroužkem, kde tak vzniknou dva olejové filmy.

Současný matematický model v diplomové práci popisující pohyb rotorové soustavy je možné rozšířit o model kontaktu, ke kterému může dojít např. při dotyku čepu rotoru a ložiskové pánve. Vazba mezi kluzným ložiskem a rotorem by se dala zpřesnit zavedením tření, které uložením rotorů na kluzná ložiska minimalizujeme, ale přesto stále existuje. Pro ověření přesnosti sestaveného matematického modelu by bylo vhodné ověřit numerické simulace pohybu rotorové soustavy v čase experimentálním měřením na modelovém příkladě a citlivostní analýzou zjistit vliv výše uvedených parametrů na výsledek simulace.

Literatura

- [1] BILOŠOVÁ Alena a Jan Biloš, 2012. *Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů: část vibrační diagnostika*. Učební text. Ostrava: VŠB – Technická univerzita
- [2] BYRTUS, Miroslav, Michal Hajzman a Vladimír Zeman, 2010. *Dynamika rotujících soustav*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.
- [3] DUPAL, Jan, 2004. *Výpočtové metody mechaniky*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.
- [4] GASCH, Robert a Herbert Pfützner, 1980. *Dynamika rotorů*. Praha.
- [5] HLAVÁČ, Zdeněk, 1999. *Dynamická syntéza a optimalizace*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.
- [6] PŘIKRYL, Petr a Marek Brandner, 2000. *Numerické metody II*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.
- [7] RENDL, Jan, 2015. *Numerické řešení Reynoldsovy rovnice pro kluzná ložiska*. Bakalářská práce. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.
- [8] RENDLOVÁ, Zdeňka, 2010. *Dynamická analýza rotorové soustavy s uvažováním nelineárních charakteristik ložisek*. Diplomová práce. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.
- [9] SAN ANDRÉS, Luis, 2006. *Hydrodynamic Fluid Film Bearing and Their Effect on the Stability of Rotating Machinery*. USA: Texas A&M University.
- [10] SLAVÍK, Jaromír, Vladimír Stejskal a Vladimír Zeman, 1997. *Základy dynamiky strojů*. Praha: České vysoké učení technické.
- [11] SMOLÍK, Luboš, 2013. *Analýza dynamických vlastností turbodmychadel*. Diplomová práce. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.

Literatura

- [12] STACHOWIAK, Gwidon W. a Andrew W. BATCHELOR, 2014. *Engineering Tribology*. 4. vyd. St. Louis: Butterworth-Heinemann.
- [13] ZAPOMĚL, Jaroslav, 2007. *Počítačové modelování příčného kmitání rotorů uložených v hydrodynamických ložiskách a squeeze filmových tlumičích*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita.
- [14] <http://www.machinerylubrication.com/Read/754/oil-whirl-whip>