

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra mechaniky

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Plzeň, 2012

Richard Vlas



# DIPLOMOVÁ PRÁCE

Richard Vlas

Problémy stability a existence  
periodického řešení vibrací  
nesymetrických rotorů

# Prohlášení

Předkládám k posouzení tuto diplomovou práci. Prohlašuji, že jsem ji zpracoval samostatně a využil jen uvedených pramenů a literatury.

V Plzni, 31. května 2012

Richard Vlas

# Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval mému vedoucímu Prof. Dr. Ing. Janu Dupalovi za mnohé rady a konzultace a především více než rok trpělivosti, díky kterým tato práce vznikla. Další poděkování patří mé rodině za dlouholetou podporu během mého studia, s jejíž pomocí mi bylo umožněno, dostat se až na toto místo.

Richard Vlas

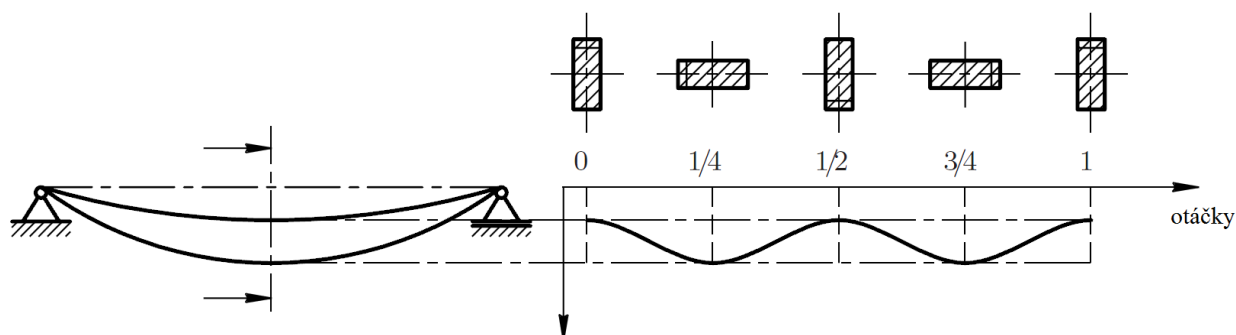
## Obsah

1	Úvod .....	6
2	Geometrické parametry charakterizující rotačně nesymetrické průřezy .....	7
2.1	Geometrické charakteristiky nesymetrických průřezů.....	7
2.2	Teorie krutu pro nesymetrické průřezy [2] .....	12
2.3	Řešení Poissonovy parciální diferenciální rovnice [3] .....	19
2.3.1	Odvození pro funkci dvou proměnných .....	19
2.3.2	Vlastní metoda konečných prvků - diskretizace trojúhelníkovými prvky .....	22
2.3.3	Testovací příklady - určení momentu tuhosti v kroucení $I_k$ .....	28
2.3.4	Obdelníkový průřez .....	31
2.4	Určení deplanační funkce .....	32
2.5	Testovací příklad – určení deplanační funkce $d(x, y)$ a momentu tuhosti v kroucení $I_k$ .....	38
3	Modelování rotorů uvažovaných jako 1D kontinuum.....	39
3.1	Diskretizace rotorových systémů .....	39
3.2	Volba aproximačních funkcí – typ elementu .....	39
3.3	Odvození matic rotorových prvků .....	44
3.4	Model rotoru .....	55
4	Stabilita nesymetrických rotujících kontinuí [7].....	59
4.1	Floquetova teorie .....	59
4.2	Testovací příklad .....	65
5	Závěr.....	68
	Literatura.....	69

## 1 Úvod

Cílem předkládané diplomové práce je modelování rotorových soustav s rotačně nesymetrickými průřezy a zjištění konstrukčních a provozních parametrů, při kterých se mohou vyskytnout tzv. parametrické rezonance, které mohou vést k nestabilitě celé soustavy. V 2. kapitole je proveden výpočet parametrů popisujících průřez rotačně nesymetrických rotorů. 3. kapitola se zabývá odvozením rotorového elementu (rotačně nesymetrického průřezu) metodou konečných prvků. V poslední kapitole je vysvětlena metoda, pomocí níž je možné určit hledaná pásma nestabilit.

Příkladem rotačně nesymetrických rotorů mohou být například dvoupólové generátory, popř. z odvětví leteckého průmyslu rotory helikoptéry. Takovéto systémy jsou charakterizovány matematickými modely s časově periodicky proměnnými maticemi hmotnosti a tuhosti (v případě netlumené soustavy). Důvod si můžeme vysvětlit na jednoduchém příkladu rotoru podle obr.1.1. Průřez diskutovaného rotoru je symetrický pouze podél dvou os, a proto tuhost, a tím i průhyb rotoru, jsou závislé na úhlu natočení rotoru kolem osy rotace. Dále je patrné, že při otočení o úhel  $2\pi$  se dostane průřez dvakrát do stejné polohy, čímž je objasněna periodičnost matic soustavy. Nesymetrie průřezu způsobuje rezonanční stavy při frekvencích, při kterých by se rotor kruhového průřezu do rezonance nedostal. Jedná se o tzv. parametrické rezonance, které rozšiřují pásmo nestability. Tato pásma tedy není možné opomenout při návrhu rotoru, neboť by mohli vést k havárii konstrukce.



Obrázek 1.1 Model rotoru s rotačně nesymetrickým průřezem

Při uvažování torzně kmitajících rotorových soustav s průřezem rotačně nesymetrickým dochází k tzv. deplanaci průřezu. Setrvačný účinek od deplanace budeme zkoumat a hodnotit, zda je třeba zahrnout jeho vliv na dynamické chování rotoru či nikoli.

Abychom byli schopni sestavit matematický model rotoru o rotačně nesymetrickém průřezu, je nezbytné znát všechny potřebné parametry, co se geometrického popisu průřezu týče. Největší úskalí spočívá v určení modulu odporu v kroucení, což je parametr nezbytný pro řešení součástí namáhaných na krut. Sestavení algoritmu pro řešení této veličiny bude jedním z výsledků této práce spolu s určením deplanace průřezu a geometrických charakteristik průřezu.

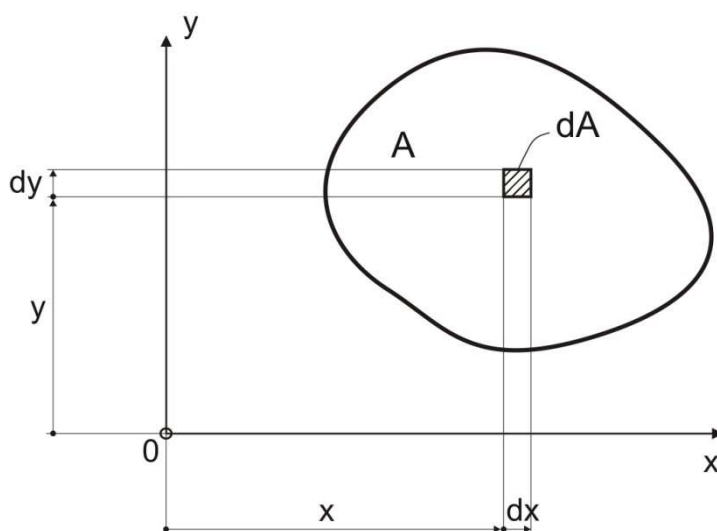
Proto se budeme zabývat v následující kapitole nejprve geometrickými charakteristikami těchto rotorů.

## 2 Geometrické parametry charakterizující rotačně nesymetrické průřezy

V této kapitole se budeme zabývat určením geometrických charakteristik průřezu, deplanační funkce a modulu odporu v kroucení, jejichž význam bude definován v následujících kapitolách. Výstupem bude algoritmus výpočtu těchto veličin pro obecnou oblast definující průřez rotoru.

### 2.1 Geometrické charakteristiky nesymetrických průřezů

Pro řešení úloh napětí a deformace poddajných těles je nutná znalost veličin charakterizujících příčný průřez tělesa. Uvažujme obecně nesymetrický průřez tělesa v souřadnicovém systému  $xy$  podle obr.2.1, pro který vyjádříme všechny veličiny, které jej plně charakterizují. Mezi tyto veličiny řadíme podle [1]



Obrázek 2.1 Průřez tělesa

#### Plocha průřezu

$$A = \int_A dA \quad [m^2] \quad (1.2)$$

#### Lineární (statické) momenty průřezu

$$U_x = \int_A y dA \quad [m^2]$$

$$U_y = \int_A x dA \quad [m^2] \quad (1.3)$$

#### Kvadratické momenty průřezu

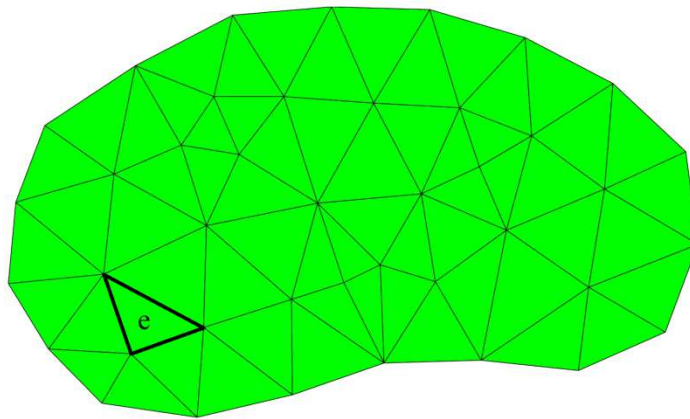
$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (1.4)$$

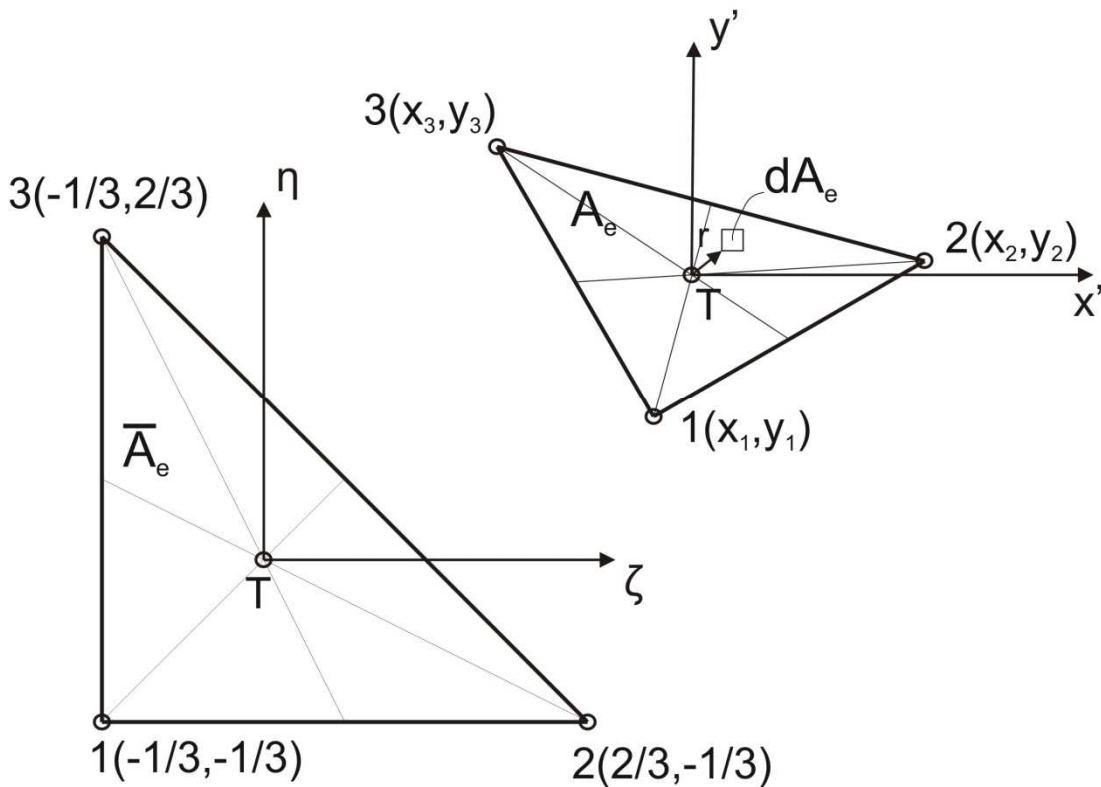
$$I_p = \iint_{dx dy} (x^2 + y^2) dx dy = \int_A r^2 dA$$

Pro určení výše uvedených charakteristik průřezu libovolného tvaru je možné postupovat tak, že průřez rozdělíme na konečný počet takových obrazců, pro které známe analytické vyjádření potřebných veličin. V následujícím bude provedeno rozdělení průřezu na trojúhelníkové obrazce, určení geometrických parametrů těchto oblastí a následně pomocí Steinerovy věty určení těchto parametrů pro celý průřez.

obr.2.2 znázorňuje průřez obecného tvaru rozdělený na konečný počet trojúhelníkových podoblastí se zvýrazněným elementem  $e$ , na kterém provedeme odvození hledaných veličin. Nejprve zavedeme v těžišti plochy elementu  $e$  souřadný systém  $x'y'$  a následně převedeme tento element do referenčního souřadného systému, viz obr.2.3, což povede k zjednodušení integrace přes plochu tohoto obrazce, jak bude ukázáno dále.



Obrázek 2.2 Diskretizace průřezu



Obrázek 2.3 Zobrazení elementu v referenčním systému



Pro transformaci souřadnic  $x'$  a  $y'$  mezi souřadnými systémy  $x'y'$  a  $\zeta\eta$  použijeme lineární polynomy ve tvaru

$$\begin{aligned} x'(\zeta, \eta) &= a_1 + a_2\zeta + a_3\eta \\ y'(\zeta, \eta) &= b_1 + b_2\zeta + b_3\eta \end{aligned} \quad (1.5)$$

Z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} x_1 &= x'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = a_1 - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3}a_3 \\ x_2 &= x'\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = a_1 + \frac{2}{3}a_2 - \frac{1}{3}a_3 \\ x_3 &= x'\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = a_1 - \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 \end{aligned} \quad (1.6)$$

určíme konstanty  $a_1, a_2, a_3$

$$\begin{aligned} a_3 &= x_3 - x_1 \\ a_2 &= x_2 - x_1 \\ a_1 &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Analogickým postupem získáme koeficienty  $b_1, b_2, b_3$

$$\begin{aligned} b_3 &= y_3 - y_1 \\ b_2 &= y_2 - y_1 \\ b_1 &= \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Polární moment průřezu  $I_p$  definovaný vztahem (1.4) přepíšeme pomocí transformačních vztahů na tvar

$$I_p = \iint_{\bar{A}} [(a_1 + a_2\zeta + a_3\eta)^2 + (b_1 + b_2\zeta + b_3\eta)^2] |J_e| d\zeta d\eta \quad (1.9)$$

kde  $|J_e|$  značí determinant Jacobiovy matice tvaru

$$J_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Zapíšeme-li souřadnice  $x'$  a  $y'$  do sloupcového vektoru, pak platí

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = J_e \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{x}_1 \quad (1.11)$$

a vztah (1.9) můžeme vyjádřit následujícím způsobem

$$I_p = \iint_{\bar{A}} \mathbf{x}^T \mathbf{x} |J_e| d\zeta d\eta = \iint_{\bar{A}} (\mathbf{x}_1^T + \boldsymbol{\zeta}^T J_e^T) (J_e \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{x}_1) |J_e| d\zeta d\eta = \quad (1.12)$$

$$= |J_e| \left[ \iint_{\tilde{A}} \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 d\zeta d\eta + \iint_{\tilde{A}} \boldsymbol{\zeta}^T d\zeta d\eta J_e^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^T J_e \iint_{\tilde{A}} \boldsymbol{\zeta} d\zeta d\eta + \iint_{\tilde{A}} \boldsymbol{\zeta}^T J_e^T J_e \boldsymbol{\zeta} d\zeta d\eta \right]$$

Integrací jednotlivých členů získáme vztahy

$$\iint_{\tilde{A}} \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 d\zeta d\eta = (a_1^2 + b_1^2) \iint_{\tilde{A}} d\zeta d\eta = \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2) \quad (1.13)$$

Druhý a třetí člen ve vztahu (1.12) vyjadřuje statické momenty k souřadnicovým osám a jsou rovny nule, neboť počátek souřadného systému je v těžišti uvažovaného trojúhelníku, a tedy

$$\iint_{\tilde{A}} \boldsymbol{\zeta}^T d\zeta d\eta = \iint_{\tilde{A}} [\zeta \quad \eta] d\zeta d\eta = [0 \quad 0], \quad \iint_{\tilde{A}} \boldsymbol{\zeta} d\zeta d\eta = \iint_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} d\zeta d\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Integrand posledního integrálu upravme roznásobením na tvar

$$\boldsymbol{\zeta}^T J_e^T J_e \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} a_2^2 + b_2^2 & 2(a_2 a_3 + b_2 b_3) & a_3^3 + b_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta^2 \\ \zeta \eta \\ \eta^2 \end{bmatrix} = \mathbf{d}_e^T \begin{bmatrix} \zeta^2 \\ \zeta \eta \\ \eta^2 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

a poslední integrál lze psát ve tvaru

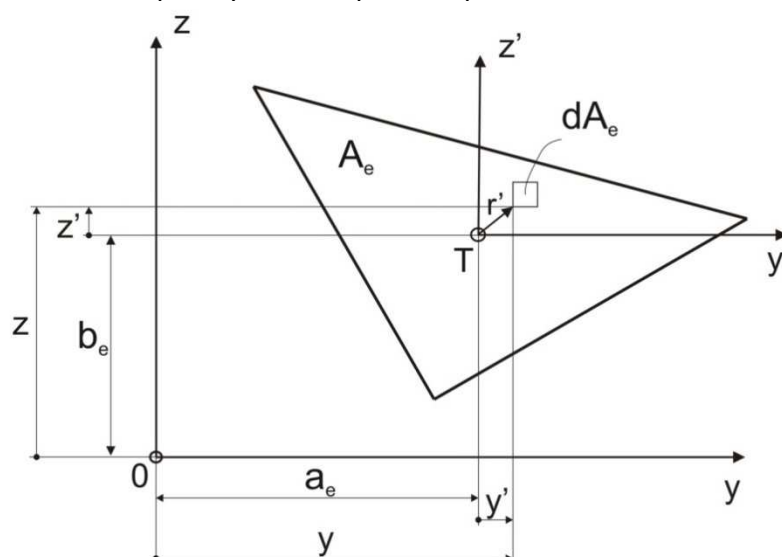
$$\iint_{\tilde{A}} \boldsymbol{\zeta}^T J_e^T J_e \boldsymbol{\zeta} d\zeta d\eta = \mathbf{d}_e^T \iint_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} \zeta^2 \\ \zeta \eta \\ \eta^2 \end{bmatrix} d\zeta d\eta = \mathbf{d}_e^T \begin{bmatrix} \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{36} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

S použitím předchozích vztahů je možné pro polární moment průřezu psát  $I_p$

$$I_p = \iint_{\tilde{A}} \mathbf{x}^T \mathbf{x} |J_e| d\zeta d\eta = |J_e| \left[ \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2) + \mathbf{d}_e^T \begin{bmatrix} \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{36} \end{bmatrix} \right] \quad (1.17)$$

**Geometrické charakteristiky průřezu k posunutým osám**

Předpokládejme, že známe geometrické charakteristiky průřezu k osám  $y' z'$  procházejících těžištěm plochy trojúhelníku  $T$  a chceme určit tyto charakteristiky k osám  $y z$ , jejichž počátek prochází těžištěm plochy daného průřezu podle obr. 2.4.



Obrázek 2.4 Určení charakteristik průřezu k posunutým osám

Pro polární moment průřezu  $I_p'$  k osám  $y' z'$  dostáváme vztah

$$\begin{aligned}
 I_p' &= \int_{A_e} r'^2 dA = \int_{A_e} (y'^2 + z'^2) dA_e = \int_{A_e} ((y - a_e)^2 + (z - b_e)^2) dA_e \\
 &= \int_{A_e} (y^2 - 2ya_e + a_e^2 + z^2 - 2zb_e + b_e^2) dA_e \\
 &= \int_{A_e} (y^2 + z^2) dA_e - 2a_e \int_{A_e} y dA_e - 2b_e \int_{A_e} z dA_e + (a_e^2 + b_e^2) A_e \\
 &= I_p - 2a_e U_z - 2b_e U_y + (a_e^2 + b_e^2) A_e
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Potom pro polární moment průřezu  $I_p$  k posunutým osám  $yz$  dostáváme vztah

$$I_p = I_p' + 2a_e U_z + 2b_e U_y - (a_e^2 + b_e^2) A_e \tag{1.19}$$

Výrazy  $U_y$  a  $U_z$  představují statické momenty průřezu definované již dříve, pro které platí

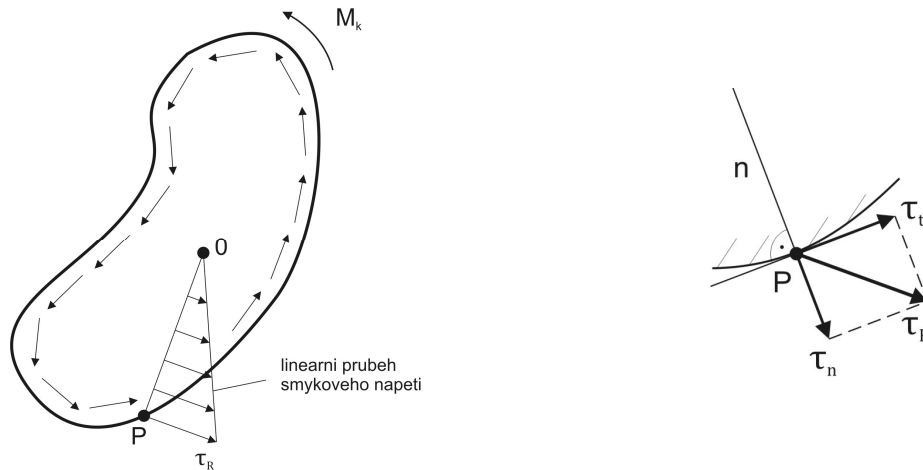
$$\begin{aligned}
 U_z &= \int_{A_e} y dA_e = a_e A_e \\
 U_y &= \int_{A_e} z dA_e = b_e A_e
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Vztah (1.19) můžeme pak přepsat na tvar

$$I_p = I_p' + (a_e^2 + b_e^2) A_e \tag{1.21}$$

Mezi další parametry nezbytné pro určení namáhání v krutu obecných průřezů patří tzv. modul odporu v kroucení  $I_k$ , jehož význam budeme definovat v následující kapitole.

## 2.2 Teorie krutu pro nesymetrické průřezy [2]



Obrázek 2.5 Průběh napětí v nesymetrickém průřezu

Předpoklad lineárně se zvětšujícího napětí mezi středem otáčení  $O$  a krajními vlákny, jak je to u rotačně symetrických průřezů, není možné použít u nesymetrických průřezů. Neboť pak by smyková napětí nepůsobila tangenciálně na vnějším okraji průřezu. Jak je patrné z obr. 2.5, působila by zde totiž i složka napětí  $\tau_n$  kolmo na okraj. To není ovšem podle zákona o sdružených napětích možné, neboť povrch není zatížen smykovým napětím kolmo na průřez. Napětí v průřezu bude mít tedy komplikovanější průběh, který nebude lineárního průběhu, a tím bude docházet k tzv. deplanaci. Průmětem průřezu do roviny  $yz$  se jeví natočení průřezu jako natočení tuhého tělesa. Průmětem průřezu do roviny kolmé na osu otáčení  $x$  je patrné, že dochází k posunutí bodů průřezu mimo rovinu kolmou na osu  $x$  s tím, že tvar průřezu je zachován.

V průřezu kolmém na osu  $x$  v libovolném místě působí smyková napětí

$$\tau_{xy} \neq 0 \text{ a } \tau_{xz} \neq 0 \quad (2.2)$$

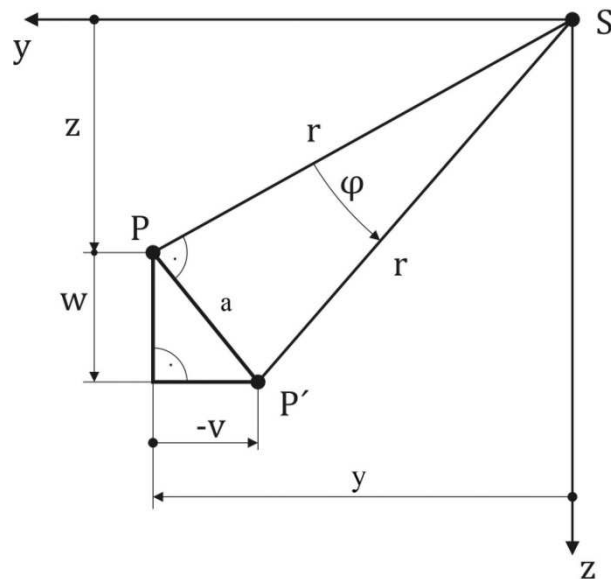
Ostatní normálová napětí se zde nevyskytují, tzn.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (2.3)$$

a tečné napětí taktéž

$$\tau_{yz} = 0 \quad (2.4)$$

Dále můžeme předpokládat, že úhel natočení průřezu  $\varphi$  je tak malý, že lze posunutí libovolného bodu  $P$  průřezu linearizovat.



Obrázek 2.6 Posunutí bodu P při natočení průřezu o úhel  $\varphi$

Podle obr. 2.6 a z podobnosti trojúhelníků můžeme určit posunutí bodu  $P \rightarrow P'$  při natočení průřezu o úhel  $\varphi$

$$\frac{w}{a} = \frac{y}{r}, \quad \frac{-v}{a} = \frac{z}{r} \quad (2.5)$$

Znaménkem mínus je zohledněno záporné posunutí ve směru osy  $y$ . Tětiva a oblouk mezi  $P$  a  $P'$  jsou přibližně stejně dlouhé, a proto platí

$$a = \varphi \cdot r \rightarrow \varphi = \frac{a}{r} \quad (2.6)$$

Pak můžeme psát pro posunutí libovolného bodu  $P$

$$v = -\frac{a}{r}z = -\varphi \cdot z = -\vartheta xz \quad (2.7)$$

$$w = \frac{a}{r}y = \varphi \cdot y = \vartheta xy$$

a posunutí  $u(y, z)$  ve směru osy  $x$  volíme ve tvaru součinu dvou funkcí

$$u(x, y, z) = \vartheta(x)d(y, z) \quad (2.8)$$

Vektor posunutí libovolného bodu  $P$  má tvar

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \vartheta d(y, z) \\ -\vartheta xz \\ \vartheta xy \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Při zanedbání objemových silových účinků mají diferenciální podmínky rovnováhy následující tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 & \rightarrow \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 & \rightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 & \rightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \\ \tau_{xy} \text{ není tedy závislé na } x & \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 & \rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \tau_{xz} \text{ není tedy závislé na } x & \end{aligned} \quad (2.10)$$

Geometrické vztahy mají následující tvar

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\vartheta z + \vartheta \frac{\partial d}{\partial y} = \vartheta \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \vartheta \frac{\partial d}{\partial z} + \vartheta y = \vartheta \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Podle Hookeova zákona dostaneme pro smyková napětí

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} = G\vartheta \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right) \\ \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz} = G\vartheta \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Derivujeme-li tyto vztahy parciálně podle y, popř. z, dostaneme

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = G\vartheta \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} \quad a \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G\vartheta \frac{\partial^2 d}{\partial z^2} \quad (2.13)$$

po dosazení do vztahu (2.10)

$$\frac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial z^2} = \Delta \psi(y, z) = 0 \quad (2.14)$$

kde  $\Delta$  je Laplaceův operátor

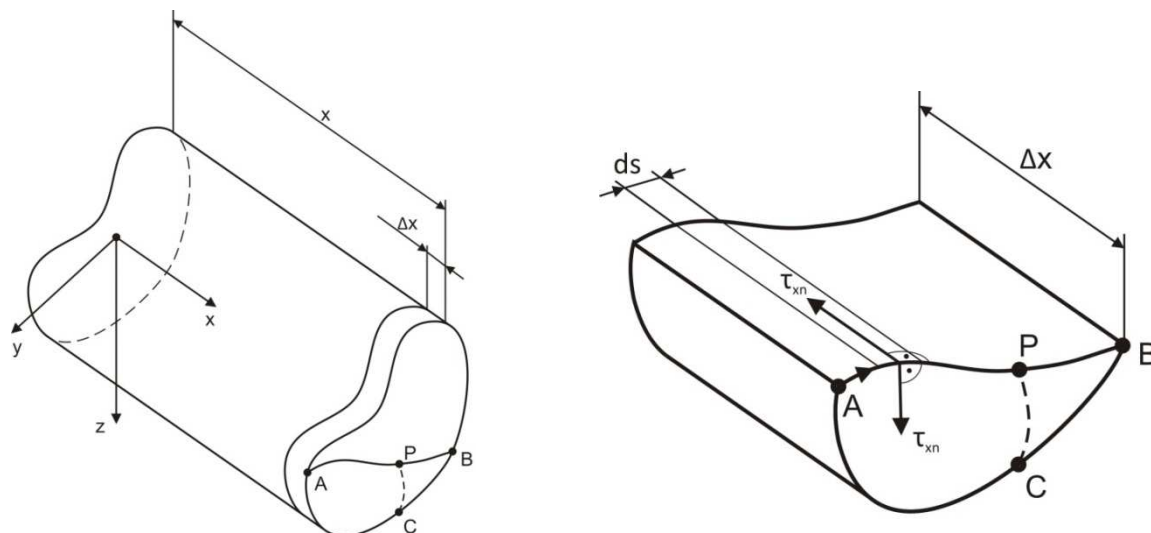
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.15)$$

Posunutí  $u(x, y, z)$ , která jsou způsobena deplanací průřezu, tak musí splňovat tzv. Laplaceovu diferenciální rovnici.

Provedeme-li parciální derivace opačně, tzn. podle z, popř. y, a následně tyto členy odečteme, dostaneme tak vztah pro obě složky smykového napětí

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = G\vartheta \left( \frac{\partial^2 d}{\partial y \partial z} - 1 \right) \quad a \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G\vartheta \left( \frac{\partial^2 d}{\partial z \partial y} + 1 \right) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2G \cdot \vartheta \quad (2.17)$$


 Obrázek 2.7 analýza krutu elementu tělesa délky  $\Delta x$ 

Abychom určili smyková napětí vyvozená torzí pro daný bod  $P(x, y, z)$ , vytkněme ze součásti elementu délky  $\Delta x$  podle obr. 2.7. Z daného elementu odřízneme kolmo pomocí plochy dané křivkou AB prismatickou část. Křivka AB prochází bodem P, pro který chceme určit smyková napětí. A, B, a C jsou libovolné body ležící na hraně průřezu. Smyková napětí  $\tau_{xn}$  mají směr kolmý na hranu AB.  $\tau_{xn} = \tau_{xn}(s)$  (indexem  $x$  budeme značit normálu plochy a  $n$  kolmost na hranu danou křivkou AB) je závislé pouze na souřadnici  $s$  (délka oblouku), která má počátek v bodě A. Protože v  $x$ -ovém směru nepůsobí žádná normálová napětí a vnější povrch je nezatížený, můžeme pro rovnováhu sil ve směru  $x$  psát

$$\sum F_x = 0 = \int_A^B \tau_{xn}(s) ds \cdot \Delta x = 0 \quad (2.18)$$

Délka  $\Delta x$  je podél křivky AB konstantní a může tak být vytknuta z integrálu a vykrácena, čímž dostaneme již zmíněný křivkový integrál. Tento integrál od A do B je možné přepsat na dvě části, a sice od A do P a od P do B.

$$\begin{aligned} \int_A^B \tau_{xn}(s) ds &= \int_A^P \tau_{xn}(s) ds + \int_P^B \tau_{xn}(s) ds = 0 \rightarrow \int_A^P \tau_{xn}(s) ds = - \int_P^B \tau_{xn}(s) ds \\ &= \int_B^P \tau_{xn}(s) ds \end{aligned} \quad (2.19)$$

Stejně tak můžeme spojit bod P s jiným lib. krajním bodem C pomocí křivky APC. Provedeme-li tak řez kolmý na osu x, daný křivkou APC, dostaneme tak pro rovnováhu sil ve směru osy x

$$\int_A^P \tau_{xn}(s) ds + \int_P^C \tau_{xn}(s) ds = 0 \rightarrow \int_A^P \tau_{xn}(s) ds = \int_C^P \tau_{xn}(s) ds \quad (2.20)$$

Celkově tak můžeme psát

$$\int_A^P \tau_{xn}(s) ds = \int_B^P \tau_{xn}(s) ds = \int_C^P \tau_{xn}(s) ds = \phi(y, z) \quad (2.21)$$

Křivkové integrály popisující smykové napětí mezi body AP, BP a CP (od libovolných bodů k bodu P) jsou si všechny rovny. Křivkový integrál je tedy závislý pouze na poloze bodu P, pro který zjišťujeme napětí, ale ne na cestě od krajního bodu k bodu P.

Označíme-li tento křivkový integrál jako tzv. silovou funkci  $\phi(y, z)$  a provedeme-li její derivaci podél s, pak můžeme určit smykové napětí jako

$$\tau_{xn} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (2.22)$$

Zvolíme-li předchozí křivky, pomocí nichž jsme vyříznuli daný element rovnoběžně s osou y, popř. z, pak můžeme předchozí vztah přepsat na

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.23)$$

Derivujeme-li tyto vztahy znovu, ale vždy podle druhé proměnné, získáme tak smíšené derivace

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \quad (2.24)$$

Podle (2.10) je

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (2.25)$$

neboli po dosazení

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \quad (2.26)$$

Záměnnost pořadí derivování je předpoklad pro deplanační funkci. Lze dokázat, že záměnnost pořadí derivování je splněna pro spojitě diferencovatelné funkce.  $\phi(y, z)$  musí být tedy funkce tohoto typu.

Podobně jako u konzervativních systémů, u kterých můžeme z potenciální funkce  $U = U(x, y, z)$  přes parciální derivace určit síly, lze z  $\phi(y, z)$  pomocí parciálních derivací určit smykové napětí.

Následnými parciálními derivacemi podle stejných proměnných získáme



$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (2.27)$$

Dosažením do rovnice  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2G \cdot \vartheta$  obdržíme vztah pro obě smyková napětí

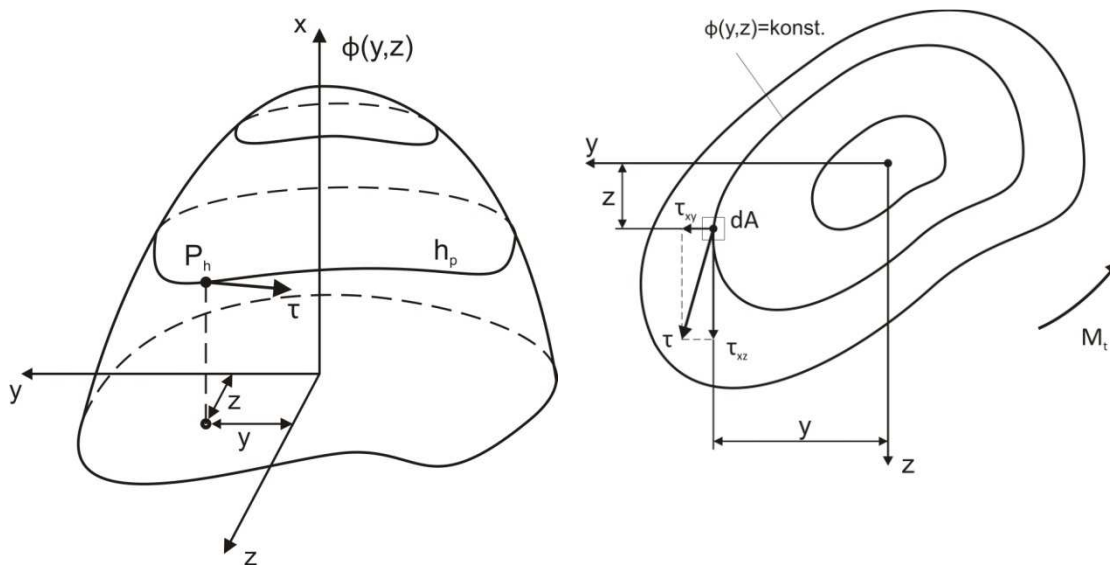
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta \phi(y, z) = -2G \cdot \vartheta \quad (2.28)$$

Křivkový integrál smykového napětí od krajního bodu A k jinému krajnímu bodu B je podle předchozího vztahu roven nule. Posuneme-li bod P rovněž k okraji, je také křivkový integrál od A do P roven nule a silová funkce je tak na okraji nulová

$$\phi_{okr}(y, z) = 0 \quad (2.29)$$

Jedná se o tzv. Dirichletovu podmínku, která je v tomto případě definovaná na celé hranici  $\Gamma$ . Průběh smykových napětí má tak tangenciální průběh podél hrany průřezu, a tím je složka napětí ve směru kolmém na hranu nulová.

Řešení daného problému znamená také určení silové funkce  $\phi(y, z)$  uvnitř průřezu. Silovou funkci lze geometricky znázornit jako plochu  $\phi(y, z)$ . Na obr. 2.8 vlevo jsou znázorněny vrstevnice a vpravo pohled do roviny yz.



Obrázek 2.8 Výsledné smykové napětí působící v bodě  $P_h$

Výsledný kroutící moment působící v průřezu rotoru určíme z Obrázek 2.8

$$M = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = \int_A \left( G \vartheta y \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right) - G \vartheta z \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right) \right) dA \quad (2.30)$$

$$M = G\vartheta \int_A \underbrace{\left( \frac{\partial d}{\partial z} y + y^2 - \frac{\partial d}{\partial y} z + z^2 \right)}_{I_k} dA$$

$I_k$  ... Moment tuhosti v kroucení

$$I_k = \int_A \left( \frac{\partial d}{\partial z} y + y^2 - \frac{\partial d}{\partial y} z + z^2 \right) dA = I_p + \int_A \left( \frac{\partial d}{\partial z} y - \frac{\partial d}{\partial y} z \right) dA \quad (2.31)$$

$I_p$  ... polární moment průřezu.

Pozn.: Pouze pro osově symetrické průřezy platí  $I_k = I_o$

$$M = G\vartheta I_k \quad (2.32)$$

A pro torzní tuhost můžeme psát  $GI_k$

$$GI_k = \frac{M}{\vartheta} \quad (2.33)$$

Pro výsledný kroučící moment můžeme také podle vztahu (2.23) psát pro (2.30)

$$M = \int_A \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} y - \frac{\partial \phi}{\partial z} z \right) dA = 2 \int_A \phi(y, z) dA \quad (2.34)$$

Moment tuhosti v kroucení  $I_k$  je konstantní veličina a nemůže tedy záviset na  $\vartheta$ , proto jej vyloučíme následujícím způsobem. Funkci  $\phi(y, z)$  zapíšeme jako součin dvou funkcí tvaru

$$\phi(y, z) = \bar{\phi}(y, z)\vartheta \quad (2.35)$$

Dosazením do (2.28)

$$\vartheta \left( \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} \right) = -2G \cdot \vartheta \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = -2G \quad (2.36)$$

A řešíme tak Poissonovu diferenciální rovnici pro neznámou silovou funkci  $\bar{\phi}$ . Po vyřešení a dosazení do (2.34)

$$M = 2 \vartheta \int_A \bar{\phi}(y, z) dA \quad (2.37)$$

A následně do (2.34)

$$GI_k = \frac{2 \vartheta \int_A \bar{\phi}(y, z) dA}{\vartheta} = 2 \int_A \bar{\phi}(y, z) dA \quad (2.38)$$

dokážeme tak vyloučit  $\vartheta$  ze vztahu pro určení momentu tuhosti v kroucení  $I_k$

$$I_k = \frac{2}{G} \int_A \bar{\phi}(y, z) dA \quad (2.39)$$

## 2.3 Řešení Poissonovy parciální diferenciální rovnice [3]

Pomocí parciálních diferenciálních rovnic (PDR) lze popsat mnoho různých fyzikálních procesů. Pro jejich řešení lze použít mnohé z numerických metod. V následující části odvodíme formulaci metody konečných prvků pro Poissonovu parciální diferenciální rovnici.

### 2.3.1 Odvození pro funkci dvou proměnných

Poissonova rovnice má tvar:

$$\nabla^2 u(x, y) = g \quad (2.40)$$

Poissonova rovnice v kartézském souřadném systému bude mít v  $n$ -rozměrném prostoru se souřadnicemi  $x_1, x_2, x_3$  až  $x_n$  tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.41)$$

V klasické Euklidovské rovině popsané souřadnicemi  $x, y$  pak bude mít rovnice (2.41) tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (2.42)$$

kde  $u(x, y)$  je hledaná funkce a  $g(x, y)$  je daná funkce proměnných  $x, y$ . Uzavřená oblast  $\Omega$  má hranici  $\Gamma$ , na které jsou dány okrajové podmínky. Pro dvou-dimenzionální (rovinnou) oblast  $\Omega$  jsou okrajové podmínky:

- *Dirichletova podmínka*, neboli hlavní okrajová podmínka

$$u = \bar{u} \quad (2.43)$$

kde  $\bar{u}$  je známá hodnota proměnné  $u(x, y)$  na části hranice  $\Gamma_u$ .

- *Neumannova podmínka*, neboli přirozená okrajová podmínka

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q} \quad (2.44)$$

kde  $\bar{q}$  je známá hodnota proměnné  $q(x, y)$  na části hranice  $\Gamma_q$ .

Pozn.:  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  je derivace podle vnější normály, pro kterou platí

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \quad (2.45)$$

V případě představy rovnice vedení tepla si můžeme představit  $u$  jako teplotu,  $\bar{u}$  jako předepsanou teplotu na hranici  $\Gamma_u$  oblasti  $\Omega$  a  $\bar{q}$  jako předepsaný tepelný tok hranicí  $\Gamma_q$  do nebo ven z oblasti  $\Omega$ .  $\Gamma_u, \Gamma_q$  jsou hranice pro hlavní a přirozené okrajové podmínky a  $\mathbf{n}$  je

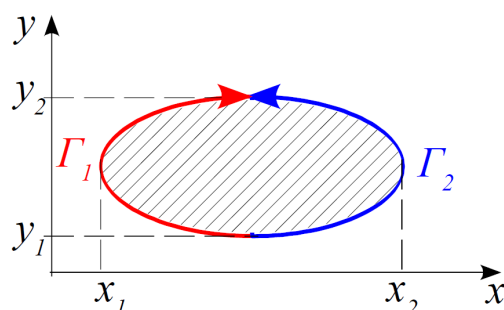
jednotkový vektor ve směru vnější normály. Pro dobře zadaný problém hraničních hodnot platí, že na celé hranici je zadaná nějaká okrajová podmínka, tzn.:

$$\Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_q = 0 \quad (2.46)$$

kde symbol  $\cup$  znamená sjednocení,  $\cap$  průnik a  $\Gamma$  je celá hranice oblasti  $\Omega$ . Integrace vážených reziduálů diferenciální rovnice a okrajových podmínek má tvar:

$$I = \int_{\Omega} w R d\Omega = \int_{\Omega} w \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - g(x, y) \right) d\Omega \quad (2.47)$$

Za účelem získání slabé formulace této rovnice je použito integrace po částech, jak ukazuje následující dvou-dimenzionální (plošná) oblast  $\Omega$  s hranicí  $\Gamma$ .



Obrázek 2.9 Symbolické grafické znázornění 2D oblasti  $\Omega$  a její hranic  $\Gamma_1, \Gamma_2$

Z předchozí rovnice (2.47) budeme nejdříve uvažovat první člen a  $\int_{\Omega} w \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) d\Omega$  pomocí Fubiniovy věty získáme

$$\int_{\Omega} w \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) d\Omega = \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) dy \quad (2.48)$$

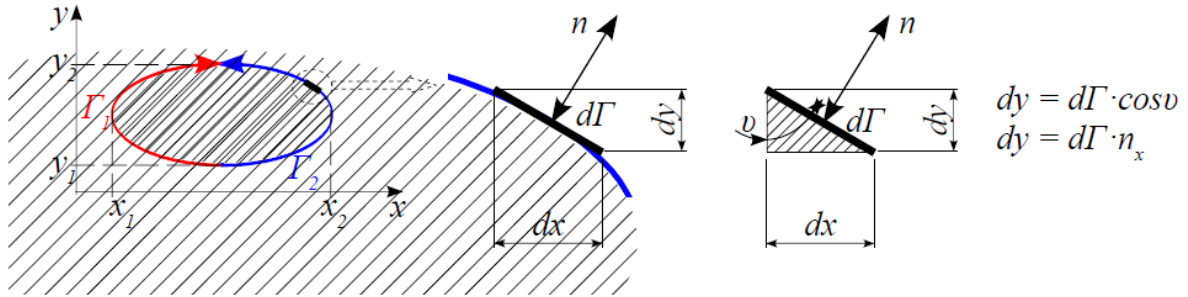
kde  $x_1, x_2, y_1$  a  $y_2$  jsou minimální a maximální hodnoty ve směrech  $x$  a  $y$ .

Pozn.: Fubiniova věta je matematická věta, která umožňuje za určitých požadavků vypočítat vícerozměrný integrál pomocí více po sobě jdoucích integrací. Získané integrály pak označujeme jako vícenásobné, tzn. dvojnásobné, trojnásobné atd. Protože podle pravidel o derivaci součinu platí

$$\frac{d}{dx} \left( w \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.49)$$

lze integrál (3.9) upravit na tvar

$$\int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) dy = - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \left[ w \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x_1}^{x_2} dy \quad (2.50)$$


 Obrázek 2.10 Vyznačení elementu  $d\Gamma$  oblasti  $\Omega$ ; geometrie detailu v souřadnicích  $x, y$ 

Jako element oblasti můžeme napsat  $d\Omega = dx dy$  a při použití vztahu pro normálový vektor  $dy = d\Gamma n_x$  přejde rovnice (2.50) na tvar

$$\int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) dy = - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma_2} w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} n_x d\Gamma - \int_{\Gamma_1} w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} n_x d\Gamma \quad (2.51)$$

nebo kombinací obou křivkových integrálů dostaneme přehlednější zápis

$$\int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \oint_{\Gamma} w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} n_x d\Gamma \quad (2.52)$$

přičemž kladný směr křivky  $\Gamma$  je proti směru hodinových ručiček. Podobně upravíme i druhý člen rovnice (2.47)  $\int_{\Omega} w \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\Omega$  a můžeme tedy psát

$$\int_{\Omega} w \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega + \oint_{\Gamma} w \left( \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \quad (2.53)$$

kde po uplatnění vztahu

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \quad (2.54)$$

dostaneme Greenovu formuli, která snižuje řád PDR

$$\int_{\Omega} w \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega + \oint_{\Gamma} w \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.55)$$

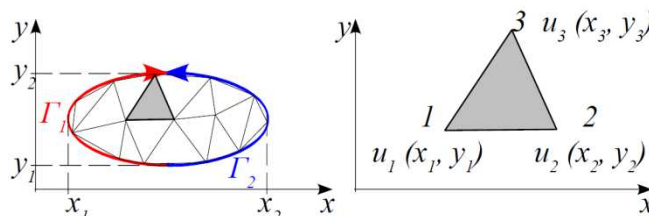
Tedy původní integrál (2.47) lze přepsat na tvar

$$I = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} w g(x, y) d\Omega + \oint_{\Gamma} w \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.56)$$

Při řešení pomocí metody konečných prvků bude mít první objemový integrál tvar matice a další dva (druhý objemový a křivkový) budou mít tvar vektoru.

### 2.3.2 Vlastní metoda konečných prvků - diskretizace trojúhelníkovými prvky

Diskretizace oblasti  $\Omega$  lze provést použitím 2D konečných prvků. Jedním z nejpoužívanějších je prvek ve tvaru trojúhelníku se třemi uzly (v každém vrcholu jeden).



Obrázek 2.11 Diskretizace oblasti  $\Omega$  na elementy; umístění elementu v souřadnicích  $x, y$

Trojúhelník má tři uzly a hodnotu funkce  $u$  mezi nimi lze popsat nejjednodušeji lineární funkcí  $u = a_1 + a_2x + a_3y$ , což lze v maticovém tvaru zapsat

$$u(x, y) = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

kde hledáme koeficienty  $a_1, a_2, a_3$  (obecně  $a_i$ ). Pro uzlové body 1, 2 a 3 platí:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{X}\mathbf{a} \quad (2.58)$$

kde  $x_i, y_i$  jsou souřadnice  $i$ -tého uzlu a  $u_i$  je hodnota proměnné  $u$  v  $i$ -tém uzlu.

Řešíme-li koeficienty  $a_i$  pak lze podle Cramerova pravidla vypočítat

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

kde  $D$  je determinant matice  $\mathbf{X}$ , jehož polovina je pak plocha trojúhelníkového prvku  $A$ . Jedná se o kladnou hodnotu, jsou-li prvky číslovány proti směru hodinových ručiček. Pro výpočet pomocí metody konečných prvků musí být pořadí uzlů stejné pro každý prvek v celé oblasti. Dosazením rovnice (2.59) do (2.57) získáme pro výpočet proměnné  $u(x, y)$  v libovolném místě daného prvku vztah

$$u(x, y) = H_1(x, y)u_1 + H_2(x, y)u_2 + H_3(x, y)u_3 = [H_1(x, y) \quad H_2(x, y) \quad H_3(x, y)] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$u(x, y) = \mathbf{H}^T(x, y)\mathbf{u}$$

kde

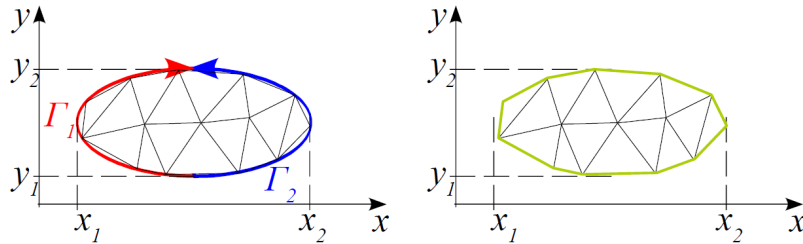
$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= \frac{1}{D} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ H_2(x, y) &= \frac{1}{D} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ H_3(x, y) &= \frac{1}{D} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned} \quad (2.61)$$

Funkce  $H_i(x, y)$  se obecně nazývají funkce tvaru a v uzlech pro ně platí

$$\sum_{i=1}^3 H_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^3 H_i = 1 \quad (2.62)$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta, které má hodnotu 1 pokud  $i = j$ , jinak má hodnotu 0.

Řešená oblast je rozdělena na určitý počet konečných prvků pomocí lineárního trojúhelníkového prvku. Jak je vidět na obrázku je skutečná hraniční křivka aproximovaná pomocí po částech linearizované hranice. Pro větší přiblížení může být buď zjemněna síť při zachování prvku, nebo může být použit jiný prvek, který není lineární, nýbrž polynom vyššího řádu, který se dokáže více přiblížit hraniční křivce.



Obrázek 2.12 Hranice  $\Gamma$  oblasti  $\Omega$  v modelu diskretizovaném na elementy

Vážená rezidua ve smyslu slabé formulace (2.57) zapíšeme ve tvaru sumy přes všechny elementy

$$I_j = - \sum_{e=1}^n \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial w_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega_e} w_j g(x, y) d\Omega + \oint_{\Gamma_{qe}} w_j \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma = 0 \quad (2.63)$$

pro  $j = 1, \dots, m$ , kde  $n$  je počet elementů a  $m = n \cdot \{\text{počet konstant v aproximační funkci } \tilde{u}(x)\}$ . Uvažujme element  $e$ . První část prvního integrálu lze psát ve tvaru

$$\int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial w_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\Omega \quad (2.64)$$

Dále uvažujme pro tento integrál aproximační funkci (2.60), a tomu odpovídající derivace  $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial H_1}{\partial x}(x, y)u_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x}(x, y)u_2 + \frac{\partial H_3}{\partial x}(x, y)u_3 \quad (2.65)$$

Podle Galerkinovy metody pak pro integrál (2.63) budeme mít následující váhové funkce a jejich derivace

$$w_j = \frac{\partial u}{\partial u_j} : \quad w_1 = \frac{\partial u}{\partial u_1} = H_1(x, y), \quad w_2 = \frac{\partial u}{\partial u_2} = H_2(x, y), \quad w_3 = \frac{\partial u}{\partial u_3} = H_3(x, y) \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial H_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial H_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x} = \frac{\partial H_3}{\partial x}$$

Postupným uplatněním váhových funkcí  $H_1, H_2, H_3$  v integrálu (2.63) obdržíme

$$\int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\Omega, \quad \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\Omega, \quad \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial w_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\Omega \quad (2.67)$$

po dosazení vztahů (2.65) a (2.66)

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial H_1}{\partial x} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial H_3}{\partial x} u_3 \right) d\Omega, \quad \int_{\Omega_e} \frac{\partial H_2}{\partial x} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial H_3}{\partial x} u_3 \right) d\Omega, \quad (2.68)$$

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial H_3}{\partial x} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial H_3}{\partial x} u_3 \right) d\Omega$$

a následných úpravách

$$\int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_3}{\partial x} u_3 \right) d\Omega, \quad (2.69)$$

$$\int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial H_2}{\partial x} \frac{\partial H_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x} \frac{\partial H_3}{\partial x} u_3 \right) d\Omega,$$

$$\int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial H_3}{\partial x} \frac{\partial H_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial H_3}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial H_3}{\partial x} \frac{\partial H_3}{\partial x} u_3 \right) d\Omega$$

po vytknutí vektoru  $[u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  z integrálu dostaneme

$$\int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} \\ \frac{\partial H_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_3}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Pro druhou část prvního integrálu provedeme analogické operace

$$\int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial w_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.71)$$

a získáme tak

$$\int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} \\ \frac{\partial H_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y} & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \frac{\partial H_3}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$



První integrál v (2.63) lze zapsat následovně

$$\int_{\Omega_e} \underbrace{\begin{pmatrix} \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} \\ \frac{\partial H_3}{\partial x} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_3}{\partial x} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial H_1}{\partial y} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} \\ \frac{\partial H_3}{\partial y} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial H_1}{\partial y} & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \frac{\partial H_3}{\partial y} \end{array} \right] \\ \mathbf{K}_e \end{pmatrix} d\Omega \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Po dosazení za  $H_1, H_2, H_3$  a provedení parciálních derivací a integrace získáme matici tuhosti prvku  $\mathbf{K}_e$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

kde jednotlivé prvky matice  $k_{i,j}$  mají tvar

$$k_{1,1} = \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) d\Omega = \frac{1}{D^2} [(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2] \int_{\Omega_e} d\Omega \quad (2.75)$$

$$k_{1,1} = \frac{1}{4A^2} [(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2] A = \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2] \quad (2.76)$$

kde  $D = 2A$

$$\begin{aligned} k_{2,2} &= \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2], & k_{3,3} &= \frac{1}{4A} [(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2] \\ k_{1,2} &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)], & k_{1,2} &= k_{2,1} \\ k_{1,3} &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)], & k_{1,3} &= k_{3,1} \\ k_{2,3} &= \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)], & k_{2,3} &= k_{3,2} \end{aligned} \quad (2.77)$$

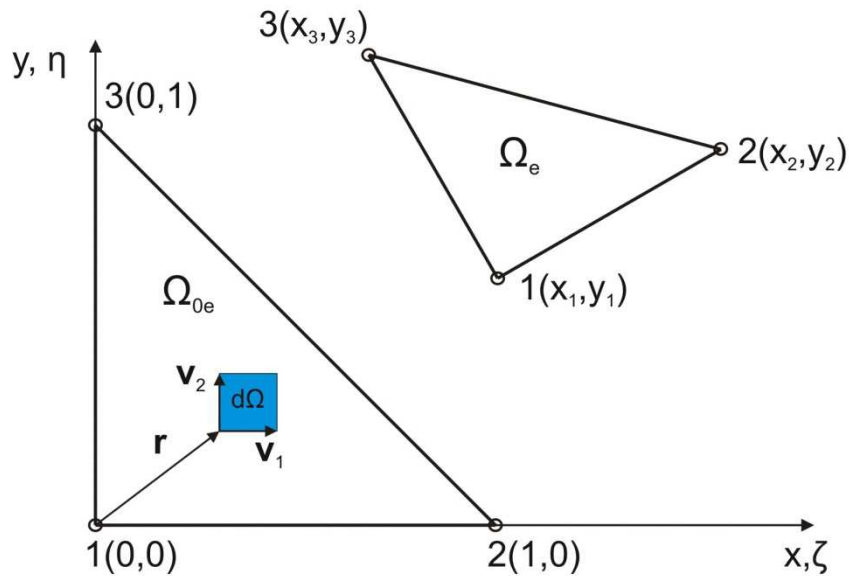
Pro lineární prvek jsou parciální derivace uvnitř integrálu konstanty (matice), čili výsledek integrálu je jen integrand (matice) vynásobená plochou prvku  $A$ .

Druhá část v integrálu (2.63) tedy  $\int_{\Omega_e} w_j g(x, y) d\Omega$  vede pro daný lineární trojúhelníkový prvek na tvar

$$\int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} H_1(x, y) \\ H_2(x, y) \\ H_3(x, y) \end{bmatrix} g(x, y) d\Omega \quad (2.78)$$

Analytická integrace této rovnice může být obtížná v závislosti na funkci  $g(x, y)$ , a proto je většinou použita nějaká metoda numerické integrace. Tím jsou vyřešeny první dvě části integrálu  $I$  (2.63).

**Převedení konečného prvku do referenčního souřadnicového systému  $\zeta\eta$**



Obrázek 2.13 zobrazení elementu v referenčním systému

Pro interpolaci souřadnic  $x$  a  $y$  použijeme stejné polynomy jako již dříve pro předpokládané řešení  $u$ .

$$x(\zeta, \eta) = a_1 + a_2\zeta + a_3\eta, \quad y(\zeta, \eta) = b_1 + b_2\zeta + b_3\eta \quad (2.79)$$

Z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} &1(x(0,0), y(0,0)) \\ &2(1,0) \\ &3(0,1) \end{aligned} \quad (2.80)$$

určíme konstanty  $a_1, a_2, a_3$

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \\ x_2 &= a_1 + a_2 \Rightarrow a_2 = x_2 - x_1 \\ x_3 &= a_1 + a_3 \Rightarrow a_3 = x_3 - x_1 \end{aligned} \quad (2.81)$$

Vyřešením těchto rovnic dostaneme

$$x(\zeta, \eta) = (1 - \zeta - \eta)x_1 + \zeta x_2 + \eta x_3 \quad (2.82)$$

kde označíme tvarové funkce

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \zeta - \eta \\ N_2 &= \zeta \\ N_3 &= \eta \end{aligned} \quad (2.83)$$

pak

$$x(\zeta, \eta) = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad (2.84)$$

Analogicky vyjádříme

$$y(\zeta, \eta) = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \quad (2.85)$$

Využití Jacobiánu pro přechod mezi proměnnými  $(x,y) \rightarrow (\zeta,\eta)$  provedeme zavedením vektoru  $\mathbf{r}$  a vyjádřením jeho přírůstků v jednotlivých směrech, můžeme vyjádřit diferenciální element plochy  $d\Omega$

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= [x, y]^T = [x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)]^T \\ \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} d\zeta, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} d\eta\end{aligned}\quad (2.86)$$

Pro diferenciální element plochy  $d\Omega$  můžeme psát

$$d\Omega = \|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} d\zeta \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} d\eta \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right\| d\zeta d\eta \quad (2.87)$$

kde

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right\| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \quad (2.88)$$

značí determinant Jacobiánu  $J$  a platí tedy

$$d\Omega = dx dy = J d\zeta d\eta \quad (2.89)$$

kde  $J = 2A$

Pro integrál (2.78) můžeme tak psát

$$\int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} H_1(x, y) \\ H_2(x, y) \\ H_3(x, y) \end{bmatrix} g(x, y) d\Omega = \int_{\Omega_{0e}} \begin{bmatrix} H_1(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) \\ H_2(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) \\ H_3(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) \end{bmatrix} g(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) J d\zeta d\eta \quad (2.90)$$

kde  $\Omega_{0e}$  značí plochu elementu v referenčním souřadném systému  $\zeta\eta$ . Pro náš konkrétní příklad platí

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{0e}} \begin{bmatrix} H_1(\zeta, \eta) \\ H_2(\zeta, \eta) \\ H_3(\zeta, \eta) \end{bmatrix} g(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) J d\zeta d\eta = -2G\vartheta J \int_{\Omega_{0e}} \begin{bmatrix} 1 - \zeta - \eta \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix} d\zeta d\eta \\ & = -2G\vartheta J \int_{\zeta=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\zeta} \begin{bmatrix} 1 - \zeta - \eta \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix} d\eta d\zeta = -2G\vartheta J \int_{\zeta=0}^1 \begin{bmatrix} \eta - \zeta\eta - \frac{1}{2}\eta^2 \\ \zeta\eta \\ \frac{1}{2}\eta^2 \end{bmatrix} \Big|_0^{1-\zeta} d\zeta \\ & = -2G\vartheta J \int_{\zeta=0}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 \\ \zeta - \zeta^2 \\ \frac{1}{2} - \zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 \end{bmatrix} d\zeta = -2G\vartheta J \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{1}{6}\zeta^3 \\ \frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{1}{3}\zeta^3 \\ \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{1}{6}\zeta^3 \end{bmatrix} \Big|_0^1 \\ & \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} H_1(x, y) \\ H_2(x, y) \\ H_3(x, y) \end{bmatrix} g(x, y) d\Omega = -\frac{G\vartheta J}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{2G\vartheta A}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.91)\end{aligned}$$

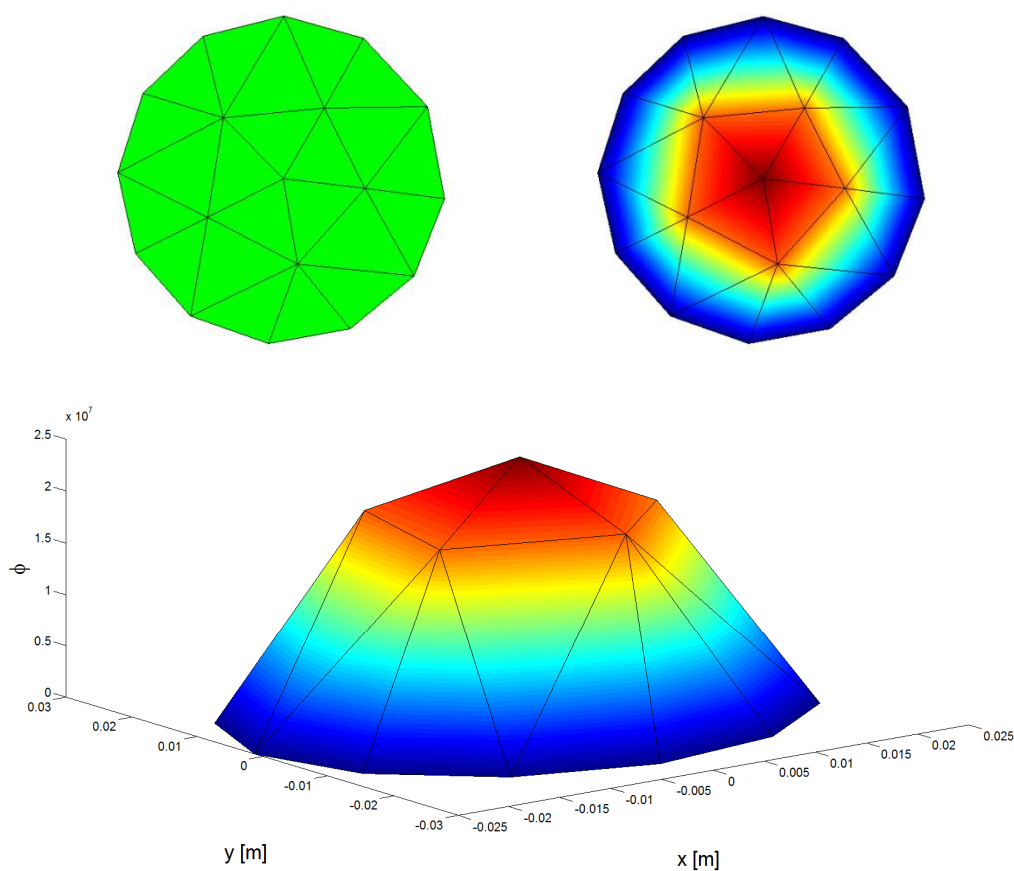
### 2.3.3 Testovací příklady - určení momentu tuhosti v kroucení $I_k$

#### Kruhový průřez

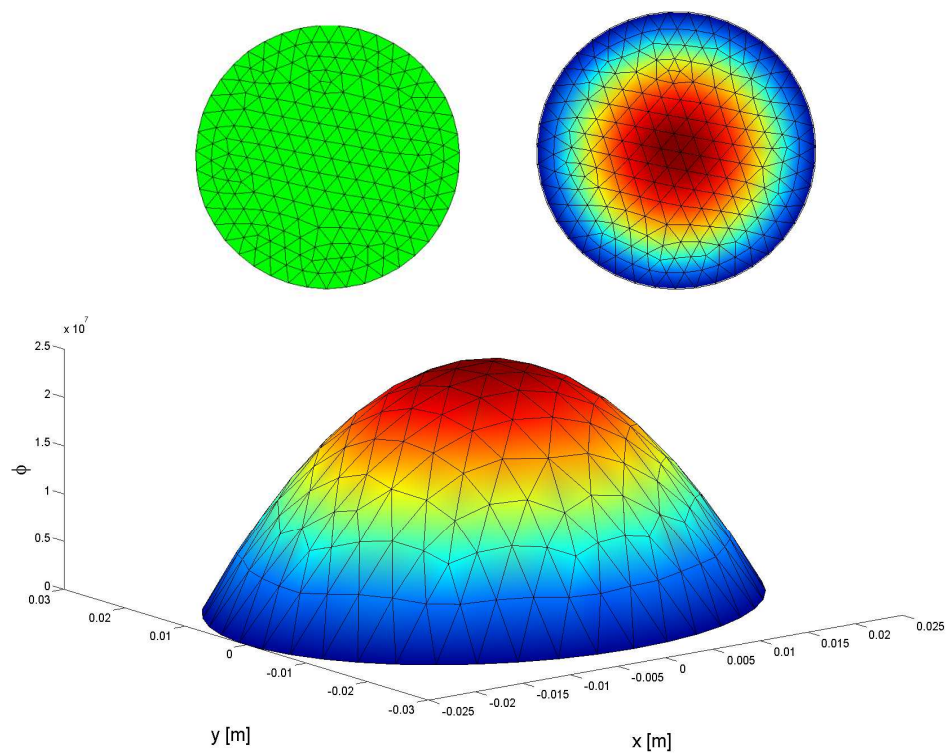
Uvažujme kruhový průřez o průměru  $d = 0,05 \text{ m}$ . Modul pružnosti materiálu ve smyku  $G = 80 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ . Výpočet momentu tuhosti v kroucení  $I_k$  je určen pro postupně zvětšující se počet elementů řešením Poissonovy parciální diferenciální rovnice a následně porovnán s analytickým výpočtem  $I_k$ , který je v případě kruhového průřezu roven polárnímu momentu průřezu  $I_p$

$$I_k = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2.92)$$

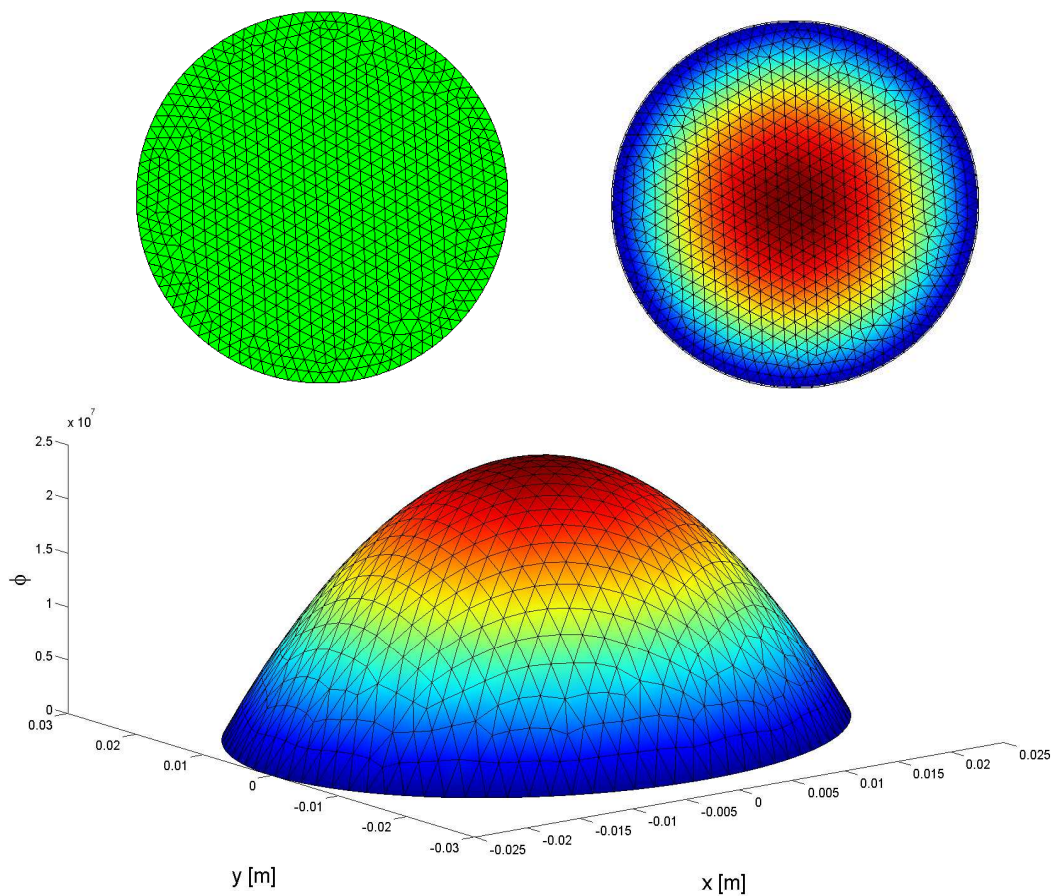
	Počet elementů	$I_k [\text{mm}^4]$	chyba [%]
Metoda konečných prvků	22	522798,21	14,8
	56	571018,86	6,94
	112	592390,76	3,46
	203	601399,77	1,99
	403	607310,19	1,02
	780	610496,23	0,5
	1546	612123,48	0,24
Analytické řešení		613592,31	



Obrázek 2.14 Diskretizace kruhového průřezu 22 elementy, silová funkce  $\Phi$



Obrázek 2.15 Diskretizace kruhového průřezu 403 elementy, silová funkce  $\Phi$



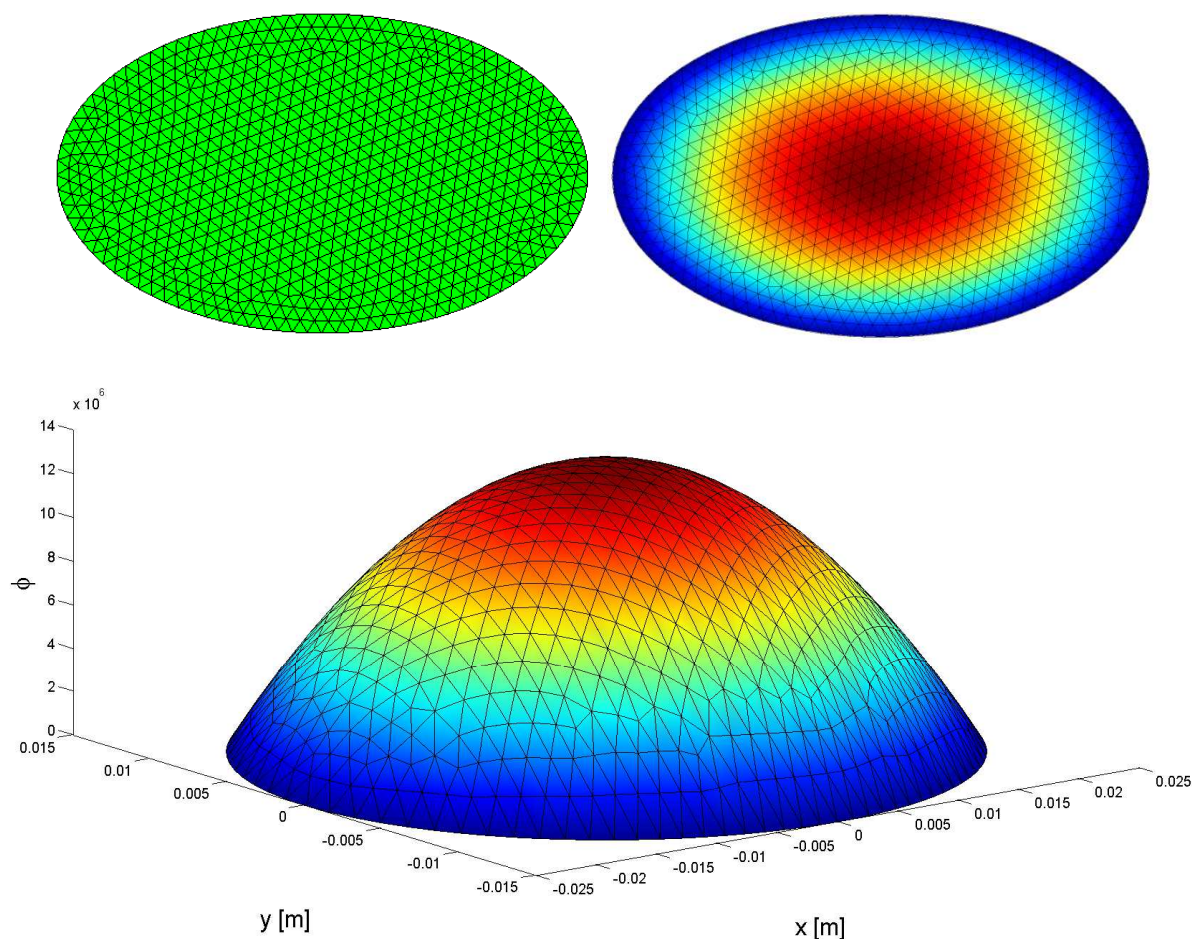
Obrázek 2.16 Diskretizace kruhového průřezu 1546 elementy, silová funkce  $\Phi$

**Eliptický průřez**

Uvažujme eliptický průřez o poloosách  $a = 0,025 \text{ m}$ ,  $b = 0,015 \text{ m}$ . Modul pružnosti materiálu ve smyku  $G = 80 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ . Výpočet momentu tuhosti v kroucení  $I_k$  je určen pro postupně zvětšující se počet elementů řešením Poissonovy parciální diferenciální rovnice a následně porovnán s analytickým výpočtem  $I_k$

$$I_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (2.93)$$

	Počet elementů	$I_k [mm^4]$	chyba [%]
Metoda konečných prvků	204	190775,49	2,12
	780	193825,51	0,56
	1528	194359,58	0,28
Analytické řešení		194905,79	



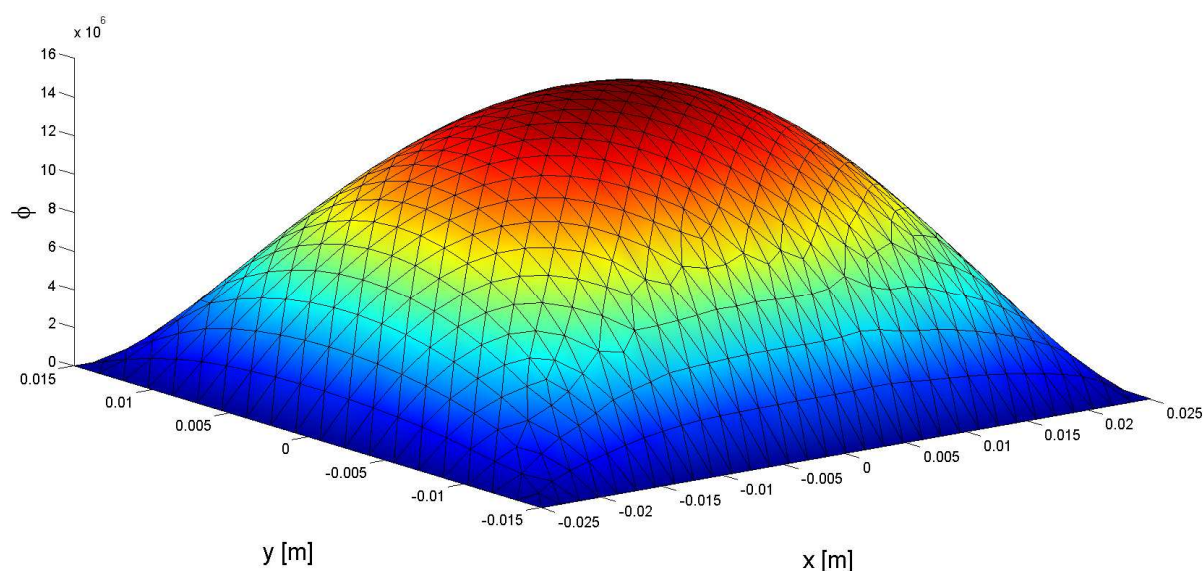
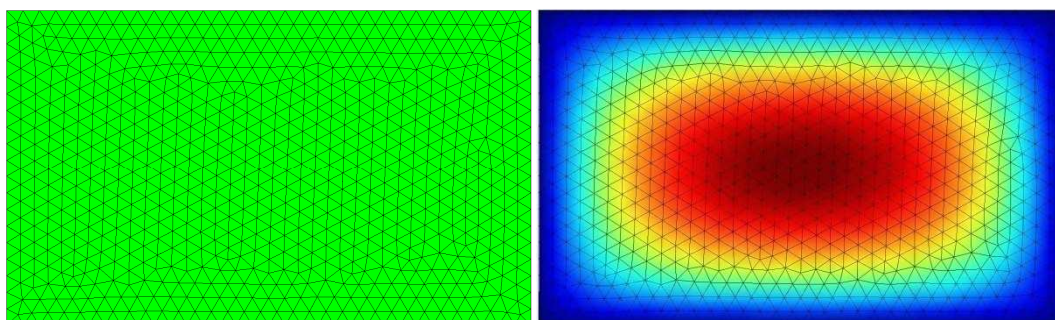
Obrázek 2.17 Diskretizace eliptického průřezu 1528 elementy, silová funkce  $\Phi$

### 2.3.4 Obdelníkový průřez

Uvažujme eliptický průřez o poloosách  $a = 0,025 \text{ m}$ ,  $b = 0,015 \text{ m}$ . Modul pružnosti materiálu ve smyku  $G = 80 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ . Výpočet momentu tuhosti v kroucení  $I_k$  je určen pro postupně se zvětšující počet elementů řešením Poissonovy parciální diferenciální rovnice a následně porovnan s přibližným výpočtem  $I_k$  [4]

$$I_k \approx \frac{1}{3} ab^3 \left( 1 - \frac{192 b}{\pi^5 a} \tanh\left(\frac{\pi a}{2b}\right) \right) \quad (2.94)$$

	Počet elementů	$I_k \text{ [mm}^4\text{]}$	chyba [%]
Metoda konečných prvků	182	274120,70	2,93
	746	279911,81	0,88
	1468	280760,29	0,58
Analytické řešení		282392,54	



Obrázek 2.18 Diskretizace eliptického průřezu 1468 elementy, silová funkce  $\Phi$

## 2.4 Určení deplanační funkce

Deplanační funkce bude určena numericky metodou konečných prvků. Odvození provedeme deformační variantou podle [5]. V deformační variantě vyjádříme smykové deformace pomocí deplanační funkce  $d(x, y)$  a relativního úhlu zkroucení  $\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \varphi'$

$$\gamma_{xy} = \varphi' \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right), \quad \gamma_{xz} = \varphi' \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right) \quad (2.95)$$

Potenciální energie prutu  $E_{PM}$  (potenciální energii vnějších sil můžeme vyjádřit jako záporně vzatou práci momentu  $M_x$ )

$$E_{PM} = -W_M = -M_x \varphi = -M_x l \varphi' \quad (2.96)$$

Potenciální energie napjatosti prutu  $E_{pv}$  je dána vztahem

$$E_{pv} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA \cdot l \quad (2.97)$$

kde pro vektory poměrných deformací a napětí platí obecně

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}]^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}]^T \end{aligned} \quad (2.98)$$

V případě prostého krutu se vektory zredukuje na tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= [\gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}]^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\tau_{xz} \quad \tau_{xy}]^T \end{aligned} \quad (2.99)$$

Pro vektor napětí lze psát  $\boldsymbol{\sigma} = G \boldsymbol{\varepsilon}$  a po dosazení do (2.97) lze vnitřní potenciální energii vyjádřit

$$E_{pv} = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA \cdot l = \frac{Gl}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} dA \quad (2.100)$$

přičemž pro skalární součin platí

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \gamma_{xz}^2 + \gamma_{xy}^2 \quad (2.101)$$

Po dosazení (2.95) a (2.101) do (2.100)

$$E_{pv} = \frac{Gl}{2} \int_A (\gamma_{xz}^2 + \gamma_{xy}^2) dA = \frac{Gl\varphi'^2}{2} \int_A \left[ \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right)^2 + \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right)^2 \right] dA \quad (2.102)$$

A nakonec získáme vztah pro celkovou potenciální energii  $E_p$



$$E_p(\vartheta, d) = E_{pv} + E_{PM} = \frac{Gl\vartheta^2}{2} \int_A \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right)^2 + \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right)^2 \right]}_{I_k} dA - M_x l \vartheta \quad (2.103)$$

kde  $I_k$  značí moment tuhosti v kroucení. Nalezení minima celková potenciální energie  $E_p(\vartheta, d)$  vyplývá z požadavku nulovosti variace této veličiny, tj.

$$\begin{aligned} \delta E_p &= 0 \\ \Downarrow \\ \frac{\partial E_p}{\partial \vartheta} \delta \vartheta &= 0 \Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial \vartheta} = 0 \\ \frac{\partial E_p}{\partial d} \delta d &= 0 \Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial d} = 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

neboť  $\delta \vartheta$  a  $\delta d$  jsou nezávislé nenulové variance, přičemž pro variaci  $\delta E_p$  platí

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \frac{\partial E_p}{\partial \vartheta} \delta \vartheta + \frac{\partial E_p}{\partial d} \delta d \\ \frac{\delta E_p}{l} &= G\vartheta I_k \delta \vartheta - M_x \delta \vartheta + \frac{G\vartheta^2}{2} \int_A \left[ 2 \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right) \frac{\partial}{\partial y} (\delta d) + 2 \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right) \frac{\partial}{\partial z} (\delta d) \right] dA \\ \frac{\delta E_p}{l} &= (G\vartheta I_k - M_x) \delta \vartheta + \frac{G\vartheta^2}{2} \int_A \left[ 2 \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right) \frac{\partial}{\partial y} (\delta d) + 2 \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right) \frac{\partial}{\partial z} (\delta d) \right] dA \end{aligned} \quad (2.105)$$

kde  $\frac{\partial}{\partial d} \left( \frac{\partial d}{\partial y} \right) \delta d = \frac{\partial}{\partial y} (\delta d)$  vzniklo prohozením derivace podle  $y$  a variace.

Z rovnic (2.104) vyplývají vzhledem k nezávislosti  $\vartheta$  a  $d$  dvě rovnice

$$\begin{aligned} G\vartheta I_k - M_x &= 0 \\ \int_A \left[ \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right) \frac{\partial}{\partial y} (\delta d) + \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right) \frac{\partial}{\partial z} (\delta d) \right] dA &= 0 \end{aligned} \quad (2.106)$$

Druhá z těchto rovnic nám umožňuje získat hledanou deplanační funkci  $d(x, y)$ . Po jejím vyřešení budeme dále schopni určit z první rovnice hodnotu momentu tuhosti v kroucení  $I_k$ . Pro další řešení MKP je nutné oblast rozdělit na konečný počet podoblastí, čímž budeme schopni získat přibližné řešení úlohy.

Diskretizaci oblasti  $A$  lze provést použitím jedním z nejjednodušších 2D konečných prvků ve tvaru trojúhelníku se třemi uzly (v každém vrcholu jeden).

Trojúhelník má tři uzly a hodnotu funkce  $d(y, z)$  mezi nimi lze popsat nejjednodušeji lineární funkcí  $d(y, z) = a_1 + a_2 y + a_3 z$ , což lze v maticovém tvaru zapsat

$$d(y, z) = [1 \quad y \quad z] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow d(y, z) = \boldsymbol{\psi}(y, z) \mathbf{a} \quad (2.107)$$

kde hledáme neznámé koeficienty  $a_1, a_2, a_3$  (obecně  $a_i$ ). Pro uzlové body 1, 2 a 3 platí

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{S}\mathbf{a} \quad (2.108)$$

kde  $y_i, z_i$  jsou souřadnice  $i$ -tého uzlu a  $u_i$  je hodnota proměnné  $u$  v  $i$ -tém uzlu. Vyjádříme-li koeficienty  $a_i$ , pak lze psát

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{r} \quad (2.109)$$

A pro funkci  $d(y, z)$  pak platí následující aproximace

$$d(y, z) = \frac{\boldsymbol{\psi}(y, z)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{r}}{N(y, z)} \quad (2.110)$$

kde pro tzv. vektor tvarových funkcí platí

$$\mathbf{N}(y, z) = \boldsymbol{\psi}(y, z)\mathbf{S}^{-1}$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 & y_3z_1 - y_1z_3 & y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_2 - z_3 & z_3 - z_1 & z_1 - z_2 \\ y_3 - y_2 & y_1 - y_3 & y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

neboli

$$\mathbf{N}(y, z) = [N_1(y, z) \quad N_2(y, z) \quad N_3(y, z)] \quad (2.111)$$

kde

$$\begin{aligned} N_1(y, z) &= \frac{1}{D} [(y_2z_3 - y_3z_2) + (z_2 - z_3)y + (y_3 - y_2)z] \\ N_2(y, z) &= \frac{1}{D} [(y_3z_1 - y_1z_3) + (z_3 - z_1)y + (y_1 - y_3)z] \\ N_3(y, z) &= \frac{1}{D} [(y_1z_2 - y_2z_1) + (z_1 - z_2)y + (y_2 - y_1)z] \end{aligned}$$

Nyní můžeme psát pro variaci  $\delta d$  z (2.104) po dosazení aproximace (2.110)

$$\delta d = \mathbf{N}(y, z)\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}^T\mathbf{N}^T(y, z) \quad (2.112)$$

Dále vyjádříme výraz  $\frac{\partial}{\partial y}(\delta d)$  a  $\frac{\partial}{\partial z}(\delta d)$  dosazením aproximace (2.111)

$$\frac{\partial}{\partial y}(\delta d) = \delta\mathbf{r}^T\mathbf{N}_y^T, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\delta d) = \delta\mathbf{r}^T\mathbf{N}_z^T \quad (2.113)$$

kde

$$\mathbf{N}_y = \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial y}, \quad \mathbf{N}_z = \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}$$

Po dosazení předchozích vztahů do rovnice (2.106) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_A [\delta\mathbf{r}^T\mathbf{N}_y^T(\mathbf{N}_y\mathbf{r} - z) + \delta\mathbf{r}^T\mathbf{N}_z^T(\mathbf{N}_z\mathbf{r} + y)] dA &= 0 \\ \delta\mathbf{r}^T \int_A [\mathbf{N}_y^T\mathbf{N}_y + \mathbf{N}_z^T\mathbf{N}_z] dA \cdot \mathbf{r} &= \delta\mathbf{r}^T \int_A [\mathbf{N}_y^T z - \mathbf{N}_z^T y] dA \end{aligned} \quad (2.114)$$

$$\int_A [N_y^T N_y + N_z^T N_z] dA \cdot \mathbf{r} = \int_A [N_y^T z - N_z^T y] dA$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{f}$$

kde  $\mathbf{K}$  je matice tuhosti elementu ve tvaru

$$\mathbf{K} = \int_A \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{bmatrix} \right) dA \quad (2.115)$$

Po dosazení za  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  a provedení parciálních derivací a integrace získáme matici tuhosti prvku  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

kde jednotlivé prvky matice  $k_{i,j}$  mají tvar

$$k_{1,1} = \int_A \left( \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial z} \frac{\partial N_1}{\partial z} \right) dA = \frac{1}{D^2} [(z_2 - z_3)^2 + (y_3 - y_2)^2] \int_A dA$$

$$k_{1,1} = \frac{1}{4A} [(z_2 - z_3)^2 + (y_3 - y_2)^2], \quad \text{kde } D = 2A$$

$$k_{2,2} = \frac{1}{4A} [(z_3 - z_1)^2 + (y_1 - y_3)^2], \quad k_{3,3} = \frac{1}{4A} [(z_1 - z_2)^2 + (y_2 - y_1)^2] \quad (2.117)$$

$$k_{1,2} = \frac{1}{4A} [(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_3)], \quad k_{1,2} = k_{2,1}$$

$$k_{1,3} = \frac{1}{4A} [(z_2 - z_3)(z_1 - z_2) + (y_3 - y_2)(y_2 - y_1)], \quad k_{1,3} = k_{3,1}$$

$$k_{2,3} = \frac{1}{4A} [(z_3 - z_1)(z_1 - z_2) + (y_1 - y_3)(y_2 - y_1)], \quad k_{2,3} = k_{3,2}$$

$\mathbf{f}$  je vektor pravé strany (vektor zatížení)

$$\mathbf{f} = \int_A [N_y^T z - N_z^T y] dA \quad (2.118)$$

$$\mathbf{f} = \int_A \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{bmatrix} y \right) dA = \int_A \left( \frac{1}{D} \begin{bmatrix} z_2 - z_3 \\ z_3 - z_1 \\ z_1 - z_2 \end{bmatrix} z - \frac{1}{D} \begin{bmatrix} y_3 - y_2 \\ y_1 - y_3 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} y \right) dA$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} z_2 - z_3 \\ z_3 - z_1 \\ z_1 - z_2 \end{bmatrix} \int_A z dA - \frac{1}{D} \begin{bmatrix} y_3 - y_2 \\ y_1 - y_3 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \int_A y dA$$

Po převedení konečného elementu do referenčního souřadnicového systému  $\zeta\eta$  můžeme psát pro souřadnice  $y$  a  $z$  podle (2.79)

$$\begin{aligned} y(\zeta, \eta) &= (1 - \zeta - \eta)y_1 + \zeta y_2 + \eta y_3 = y_1 + \zeta(y_2 - y_1) + \eta(y_3 - y_1) \\ z(\zeta, \eta) &= (1 - \zeta - \eta)z_1 + \zeta z_2 + \eta z_3 = z_1 + \zeta(z_2 - z_1) + \eta(z_3 - z_1) \end{aligned} \quad (2.119)$$

Po dosazení (2.119) do 1. integrálu (2.118)

$$\begin{aligned} \int_A z dA &= J \int_{\zeta=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\zeta} z_1 + \zeta(z_2 - z_1) + \eta(z_3 - z_1) d\eta d\zeta = \\ &= J \int_{\zeta=0}^1 \left[ z_1 \eta + \zeta \eta(z_2 - z_1) + \frac{\eta^2}{2}(z_3 - z_1) \right]_0^{1-\zeta} d\zeta = \\ &= J \int_{\zeta=0}^1 \left[ z_1(1 - \zeta) + (1 - \zeta)\zeta(z_2 - z_1) + \frac{(1 - \zeta)^2}{2}(z_3 - z_1) \right] d\zeta = \\ &= J \int_{\zeta=0}^1 \left[ \frac{z_1}{2} + \frac{z_3}{2} + \zeta(z_2 - z_1 - z_3) + \zeta^2 \left( \frac{z_1}{2} - z_2 + \frac{z_3}{2} \right) \right] d\zeta = \\ &= J \left[ \frac{1}{2}(z_1 + z_3)\zeta + \frac{\zeta^2}{2}(z_2 - z_1 - z_3) + \frac{\zeta^3}{3} \left( \frac{z_1}{2} - z_2 + \frac{z_3}{2} \right) \right]_0^1 = \\ \int_A z dA &= J \left( \frac{z_1 + z_2 + z_3}{6} \right) = 2A \left( \frac{z_1 + z_2 + z_3}{6} \right) \end{aligned} \quad (2.120)$$

Analogickým způsobem platí pro 2. integrál v (2.118)

$$\int_A y dA = 2A \left( \frac{y_1 + y_2 + y_3}{6} \right) \quad (2.121)$$

Po dosazení do  $\mathbf{f}$  s tím, že platí  $D = 2A$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} z_2 - z_3 \\ z_3 - z_1 \\ z_1 - z_2 \end{bmatrix} \left( \frac{z_1 + z_2 + z_3}{6} \right) - \begin{bmatrix} y_3 - y_2 \\ y_1 - y_3 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \left( \frac{y_1 + y_2 + y_3}{6} \right) \quad (2.122)$$

$\mathbf{r}$  ... vektor neznámých deplanační funkce  $d(y, z)$

**Výpočet momentu tuhosti v kroucení  $I_k$**

Vyjděme ze vztahu (2.103), ve kterém jsme definovali moment tuhosti v kroucení  $I_k$

$$I_k = \int_A \left[ \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right)^2 + \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right)^2 \right] dA \quad (2.123)$$

$$I_k = \int_A \left[ \left( \frac{\partial d}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial d}{\partial z} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial d}{\partial y} z - \frac{\partial d}{\partial z} y \right) + y^2 + z^2 \right] dA$$

po dosazení aproximačních funkcí (2.110) do  $I_k$ , kde např. pro první člen platí

$$\left( \frac{\partial d}{\partial y} \right)^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{N}_y^T \mathbf{N}_y \mathbf{r} \quad (2.124)$$

dostaneme pro moment tuhosti v kroucení  $I_k$

$$I_k = \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} - 2 \mathbf{r}^T \mathbf{f} + \underbrace{\int_A (y^2 + z^2) dA}_{I_p} \quad (2.125)$$

ve kterém figuruje již dříve zavedená veličina – polární moment průřezu  $I_p$  a konečný tvar pro výpočet  $I_k$  je následující

$$I_k = -\mathbf{r}^T \mathbf{f} + I_p \quad (2.126)$$

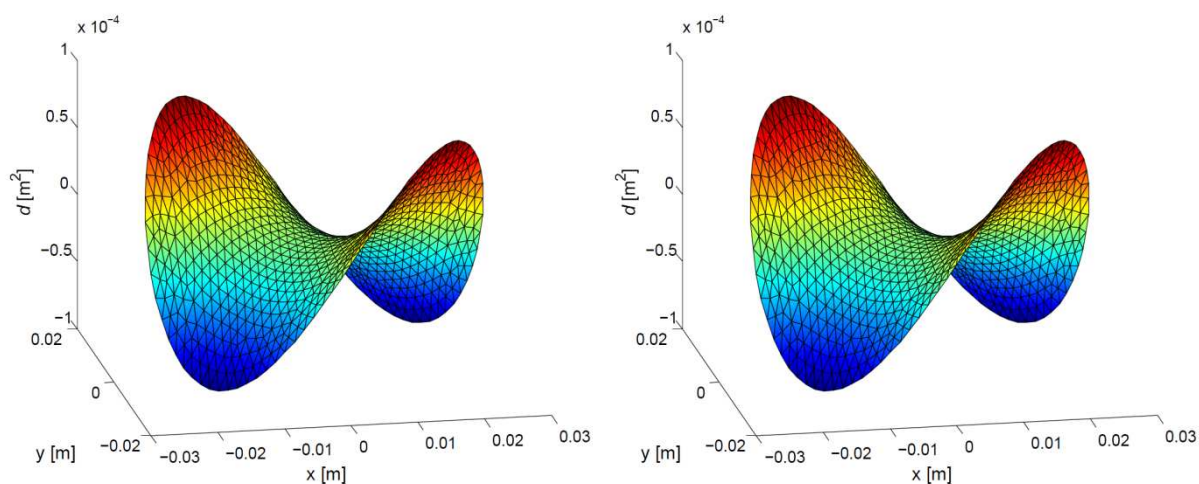
## 2.5 Testovací příklad – určení deplanační funkce $d(x, y)$ a momentu tuhosti v kroucení $I_k$

### Eliptický průřez

Porovnání numerického výpočtu s analytickým provedeme na příkladu eliptického průřezu z kapitoly 2.3.3. Nejprve je určena deplanační funkce  $d(x, y)$  deformační metodou uvedenou v přechodí kapitole a určena relativní chyba ve smyslu průměrné hodnoty podílu mezi analytickým a numerickým řešením. Dále bude vypočten moment tuhosti v kroucení  $I_k$  pro postupně se zvětšující počet elementů a bude tak sloužit ke kontrole výpočtu  $I_k$  pomocí Poissonovy parciální diferenciální rovnice, jehož výpočet byl proveden taktéž v kapitole 2.3.3. Analytický vztah pro určení deplanační funkce  $d(x, y)$  pro eliptický průřez je dán

$$d(x, y) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} xy \quad (2.127)$$

Chyba deplanační funkce $d(x, y)$	
Počet elementů	chyba [%]
204	0,41
780	0,36
1528	0,46



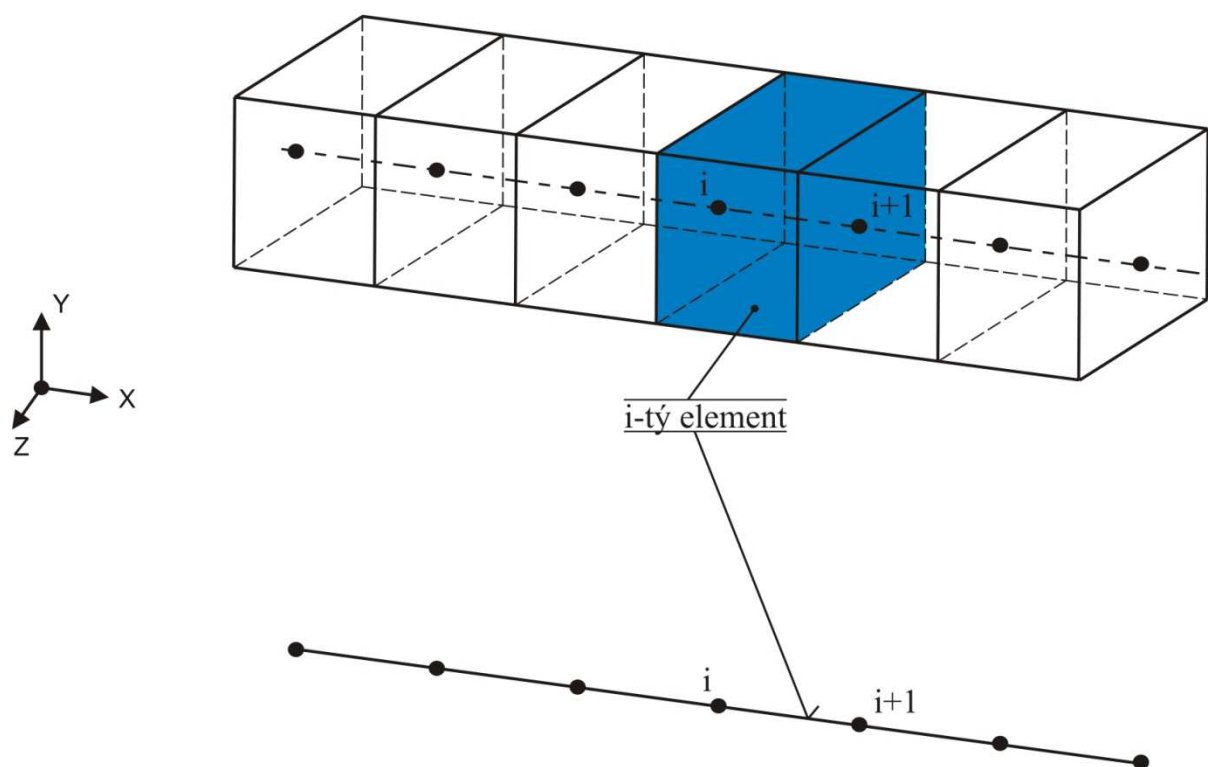
Obrázek 2.19 Deplanační funkce  $d(x, y)$  - (a) analyticky, (b) MKP

Počet elementů	MKP – Vážená rezidua		MKP – Variační princip	
	$I_k [mm^4]$	chyba [%]	$I_k [mm^4]$	chyba [%]
204	190775,49	2,12	182041,50	0,93
780	193825,51	0,56	195012,62	0,05
1528	194359,58	0,28	195348,68	0,23
Analytické řešení	194905,79	–	194905,79	–

### 3 Modelování rotorů uvažovaných jako 1D kontinuum

#### 3.1 Diskretizace rotorových systémů

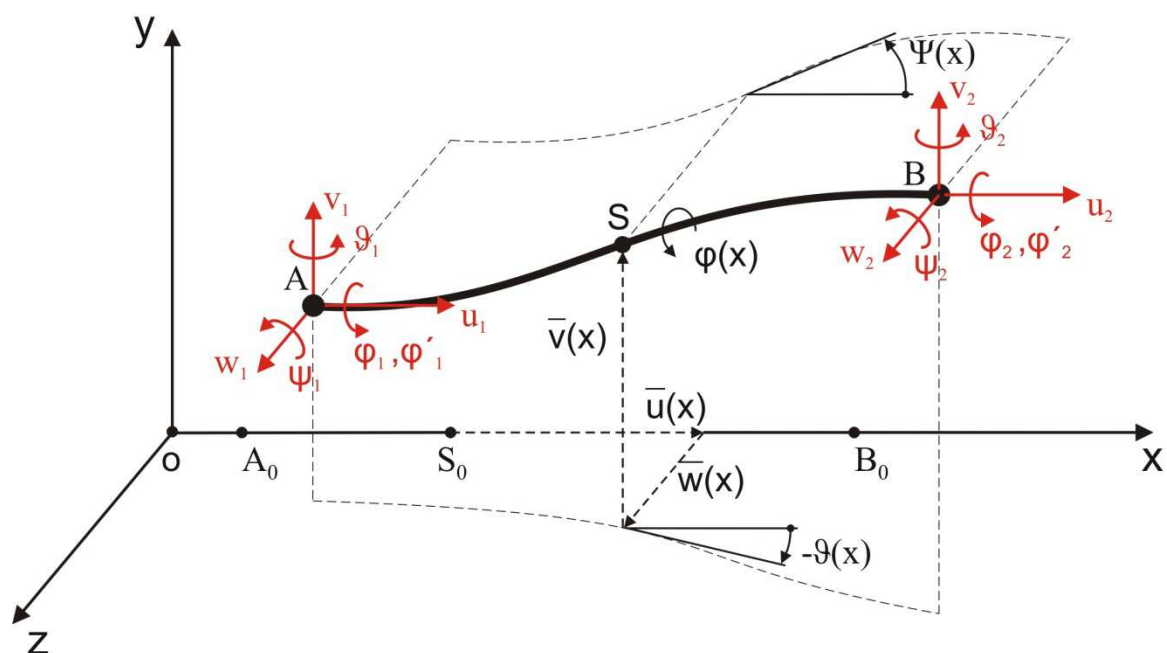
Úlohou diskretizace je rozdělení rotoru na konečný počet podoblastí tzv. konečných elementů. V následujícím bude každý konečný element uvažován jako část rotoru délky  $l^{(e)}$  reprezentovaný osou rotace rotoru tedy 1D - elementy obr. 3.1. Každý element je charakterizován uzly, ve kterých jsou zjišťovány neznámé veličiny posuvů a natočení a uvnitř každého elementu jsou pro popis těchto veličin použity aproximační funkce.



Obrázek 3.1 Diskretizace rotoru

#### 3.2 Volba aproximačních funkcí – typ elementu

Na obr.3.2 je znázorněn  $i$ -tý rotorový element v deformované poloze v lokálním souřadnicovém systému  $xyz$ . Rotorový prvek (uvažujeme prizmatický a homogenní) má dva krajní uzly po 7 stupních volnosti se třemi zobecněnými posuvy  $u, v, w$  a třemi natočeními  $\varphi, \vartheta, \psi$  kolem jednotlivých os. Navíc kvůli deplanaci průřezu definujeme v každém uzlu elementu zkrut  $\varphi'$ . Volba počtu stupňů volnosti (počet neznámých veličin v daném uzlu) souvisí s použitím aproximační funkce nad elementem. Deformace elementu je popsána prostřednictvím aproximační funkce ve tvaru polynomu s neznámými koeficienty. Ty jsou pak určeny z okrajových podmínek a daná veličina (posunutí, natočení,...) je nakonec vyjádřena pomocí vektoru násadových funkcí a vektoru neznámých hodnot v obou uzlech elementu.



Obrázek 3.2 Průhybová čára hřídelového prvku

**Ohyb**

Průhyby můžeme aproximovat kubickými polynomy (pruhem značíme posunutí bodů ležících na střednici). Průhyb v rovině  $xy$

$$\bar{v}(x, t) = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2 + c_3(t)x^3 = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}(x) \mathbf{c}_1(t) \quad (3.1)$$

Natočení okolo osy  $z$  za předpokladu malých výchylek můžeme vyjádřit jako derivaci průhybu  $\bar{v}(x, t)$  ve tvaru

$$\psi(x, t) = \frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial x} = c_1(t) + 2c_2(t)x + 3c_3(t)x^2 = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \begin{bmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}'(x) \mathbf{c}_1(t) \quad (3.2)$$

kde  $c_0(t), c_1(t), c_2(t), c_3(t)$  jsou neznámé koeficienty. Tyto koeficienty určíme pomocí okrajových podmínek

$$\begin{aligned} v_1 &= v(0, t) = c_0(t) \\ v_2 &= v(l, t) = c_0(t) + c_1(t)l + c_2(t)l^2 + c_3(t)l^3 \\ \psi_1 &= \psi(0, t) = c_1(t) \\ \psi_2 &= \psi(l, t) = c_1(t) + 2c_2(t)l + 3c_3(t)l^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Potom můžeme (3.3) zapsat maticově



$$\mathbf{q}_1(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \psi_1(t) \\ v_2(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}(0, t) \\ \psi(0, t) \\ \bar{v}(l, t) \\ \psi(l, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}_1 \mathbf{c}_1(t) \quad (3.4)$$

Vektor časových funkcí vyjádříme pomocí zobecněných souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1(t) \quad (3.5)$$

kde

$$\mathbf{S}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix}$$

Dosažením (3.5) do (3.1) dostaneme závislost průhybu  $\bar{v}(x, t)$  v rovině  $xy$  v obecném místě  $x$  na zobecněných posunutích krajních bodů

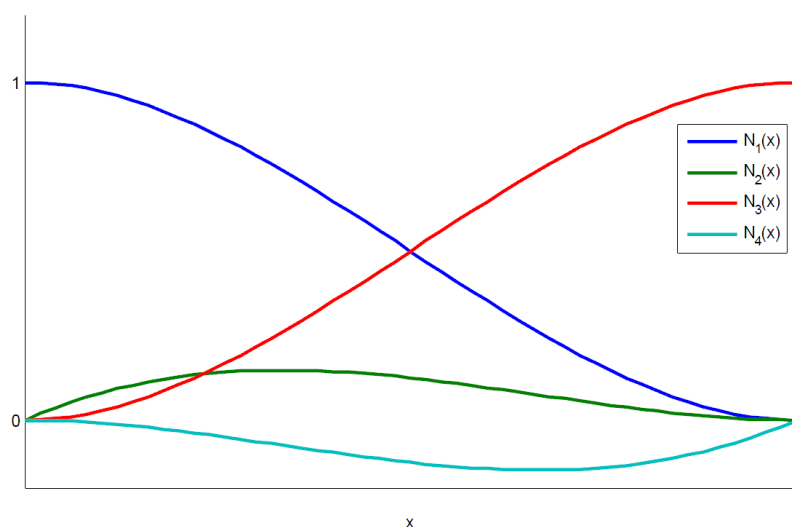
$$\bar{v}(x, t) = \underbrace{\boldsymbol{\phi}(x) \mathbf{S}_1^{-1}}_{\mathbf{N}} \mathbf{q}_1(t) \quad (3.6)$$

a natočení

$$\psi(x, t) = \boldsymbol{\phi}'(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1(t) \quad (3.7)$$

kde  $\mathbf{N}$  je tzv. vektor násadových funkcí. Tyto funkce lze interpretovat jednotkovým posuvem, resp. derivací posuvu v jednom z uzlů, zatímco v druhém uzlu je jejich hodnota nulová viz obr. 3.3

$$\mathbf{N} = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)]$$



Obrázek 3.3 Násadové funkce  $N_1(x)$   $N_2(x)$   $N_3(x)$   $N_4(x)$

Průhyb v rovině  $xz$

$$w(x, t) = c_4(t) + c_5(t)x + c_6(t)x^2 + c_7(t)x^3 = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} c_4(t) \\ c_5(t) \\ c_6(t) \\ c_7(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}(x)\mathbf{c}_2(t) \quad (3.8)$$

Natočení okolo osy  $y$

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) &= -\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = -c_5(t) - 2c_6(t)x - 3c_7(t)x^2 = -[0 \quad 1 \quad x \quad 3x^2] \begin{bmatrix} c_4(t) \\ c_5(t) \\ c_6(t) \\ c_7(t) \end{bmatrix} = \\ &= -\boldsymbol{\phi}'(x)\mathbf{c}_2(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Podobně si vyjádříme průhyby a natočení krajních bodů v rovině  $xz$ . Potom dostaneme v maticovém zápisu

$$\mathbf{q}_2(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \vartheta_1(t) \\ w_2(t) \\ \vartheta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(0, t) \\ \vartheta(0, t) \\ w(l, t) \\ \vartheta(l, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4(t) \\ c_5(t) \\ c_6(t) \\ c_7(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}_2\mathbf{c}_2(t) \quad (3.10)$$

Vektor časových funkcí můžeme vyjádřit pomocí zobecněných souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{c}_2(t) = \mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2(t) = \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{P}\mathbf{q}_2(t) \quad (3.11)$$

kde

$$\mathbf{S}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Dosazením (3.11) do (3.8) resp. do (3.9) dostaneme závislost průhybu v rovině  $xz$  v obecném místě  $x$  na zobecněných posunutích krajních bodů

$$w(x, t) = \boldsymbol{\phi}(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{P}\mathbf{q}_2(t) \quad (3.13)$$

resp. natočení okolo osy  $y$

$$\vartheta(x, t) = -\boldsymbol{\phi}'(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{P}\mathbf{q}_2(t) \quad (3.14)$$

### Tah

Posunutí krajních bodů ležících na střednici ve směru  $x$  můžeme aproximovat pomocí lineárního polynomu ve tvaru

$$\bar{u}(x, t) = c_8(t) + c_9(t)x = [1 \quad x] \begin{bmatrix} c_8(t) \\ c_9(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\psi}(x)\mathbf{c}_3(t) \quad (3.15)$$

kde  $c_8(t), c_9(t)$  jsou neznámé koeficienty. Tyto koeficienty určíme pomocí okrajových podmínek

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \bar{u}(0, t) = c_8(t), \\ u_2(t) &= \bar{u}(l, t) = c_8(t) + c_9(t)l \end{aligned} \quad (3.16)$$

a maticově

$$\mathbf{q}_3(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}(0, t) \\ \bar{u}(l, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_8(t) \\ c_9(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}_3 \mathbf{c}_3(t) \quad (3.17)$$

Inverzí vztahů (3.17) získáme vyjádření vektorů funkcí času v závislosti na vektorech zobecněných souřadnic

$$\mathbf{c}_3(t) = \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3(t) \quad (3.18)$$

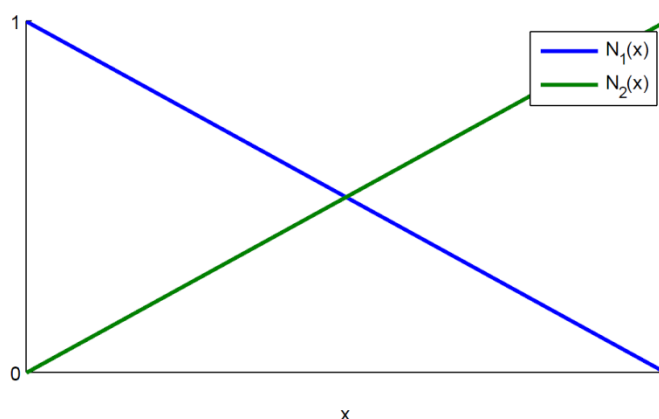
Pomocí posledního vztahu můžeme přepsat (3.17) do tvaru

$$\bar{u}(x, t) = \underbrace{\boldsymbol{\psi}(x) \mathbf{S}_3^{-1}}_{\mathbf{N}} \mathbf{q}_3(t) = \mathbf{N}(x) \mathbf{q}_3(t) \quad (3.19)$$

kde  $\mathbf{N}$  je opět tzv. vektor násadových funkcí.

$$\mathbf{N} = [N_1(x) \quad N_2(x)]$$

jejich průběh je patrný z následujícího obr.3.4



Obrázek 3.4 Násadové funkce  $N_1(x)$   $N_2(x)$

### Krut

Abychom byli schopni popsat nelineární průběh kroucení průřezu podél osy  $x$  zvolme pro popis natočení průřezu vlivem krutu kubický polynom, jako tomu bylo u ohybu, ve tvaru

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= c_{10}(t) + c_{11}(t)x + c_{12}(t)x^2 + c_{13}(t)x^3 = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} c_{10}(t) \\ c_{11}(t) \\ c_{12}(t) \\ c_{13}(t) \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\phi}(x) \mathbf{c}_4(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Derivace úhlu natočení  $\varphi(x, t)$  je zkrut, který bude mít podle (3.22) tvar

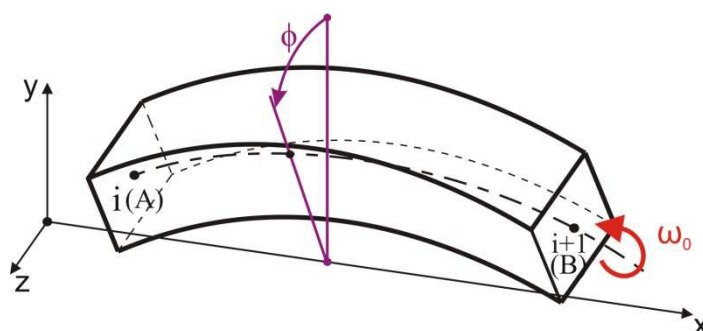
$$\begin{aligned} \varphi'(x, t) &= \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = c_{11}(t) + 2c_{12}(t)x + 3c_{13}(t)x^2 = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \begin{bmatrix} c_{10}(t) \\ c_{11}(t) \\ c_{12}(t) \\ c_{13}(t) \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\phi}'(x) \mathbf{c}_4(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pomocí okrajových podmínek určíme závislost úhlu natočení  $\varphi(x, t)$  a jeho derivace v obecném místě  $x$  na zobecněných natočení krajních bodů, jako tomu bylo u ohybu

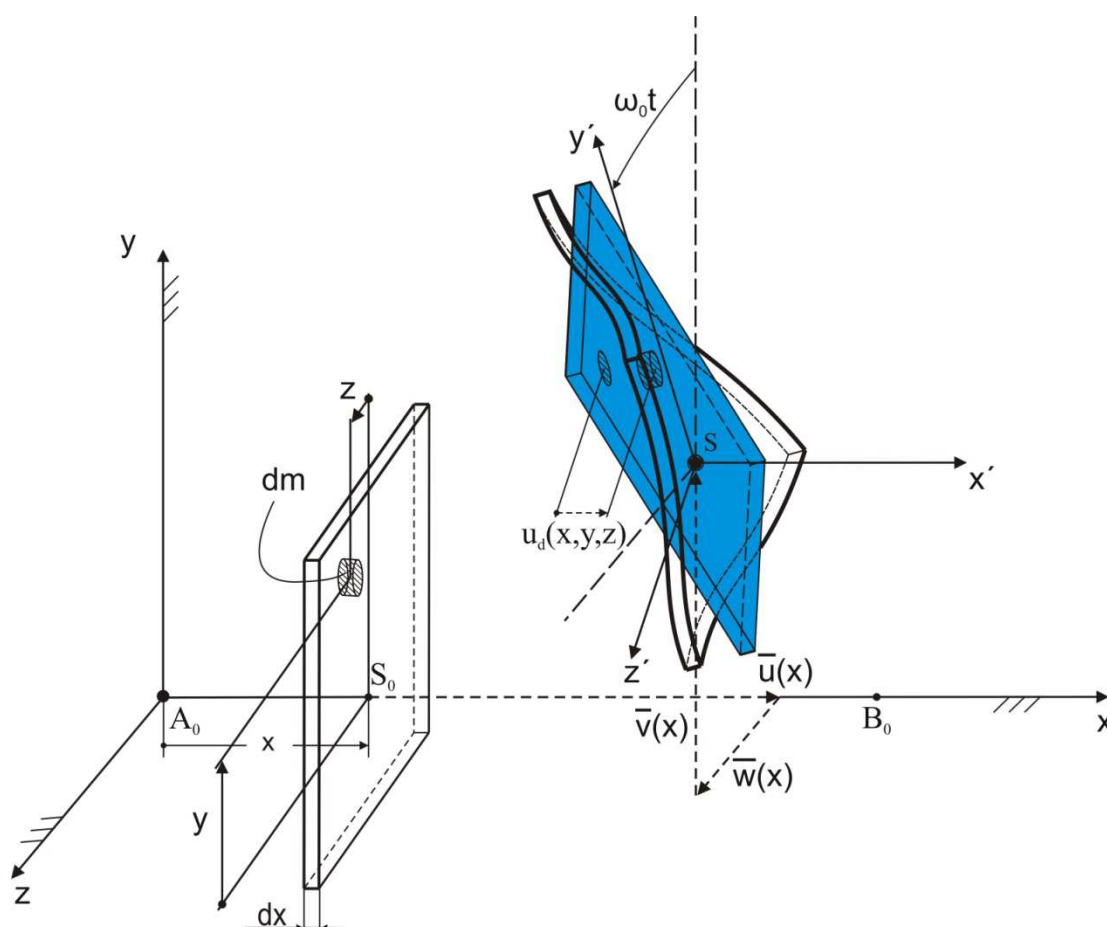
$$\varphi(x, t) = \boldsymbol{\phi}(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_4(t), \quad \varphi'(x, t) = \boldsymbol{\phi}'(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_4(t) \quad (3.22)$$

### 3.3 Odvození matic rotorových prvků

Mějme rotorový prvek s nesymetrickým průřezem, délkou  $l$ , počátečním uzlem  $A$  a koncovým uzlem  $B$ . Deformace libovolného bodu jsou popsány podélnou výchylkou  $u(x,y,z)$  (směr  $x$ ) a příčnými výchylkami  $v(x)$  (směr  $y$ ),  $w(x)$  (směr  $z$ ) zavedenými ve stacionárním lokálním souřadném systému  $xyz$ . Na obr.3.5 je zobrazen  $i$ -tý rotorový prvek, který rotuje konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_0$  kolem své osy rotace. Tato osa zároveň rotuje v obecném případě úhlovou rychlostí  $\phi$ . Vytkneme-li z rotorového prvku element délky  $dx$ , který budeme uvažovat jako poddajný, pak lze deformaci popsat jako posuv tuhého elementu daný výchylkami  $\bar{u}(x)$ ,  $\bar{v}(x)$ ,  $\bar{w}(x)$  těžiště  $S$ . Dále dojde k natočení elementu kolem referenčního bodu  $S$  o úhly  $\psi(x)$ ,  $\vartheta(x)$  a  $\varphi(x)$  viz obr.3.6.

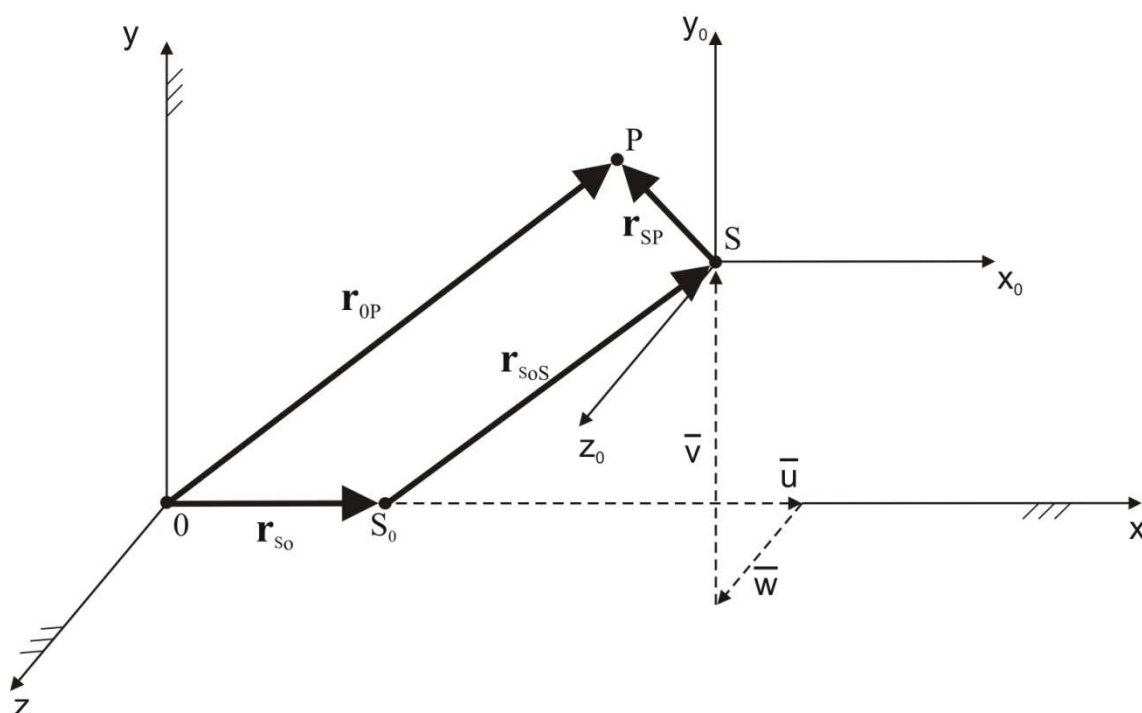


Obrázek 3.5 Rotace průhybové čáry



Obrázek 3.6 Deformace elementu délky  $dx$

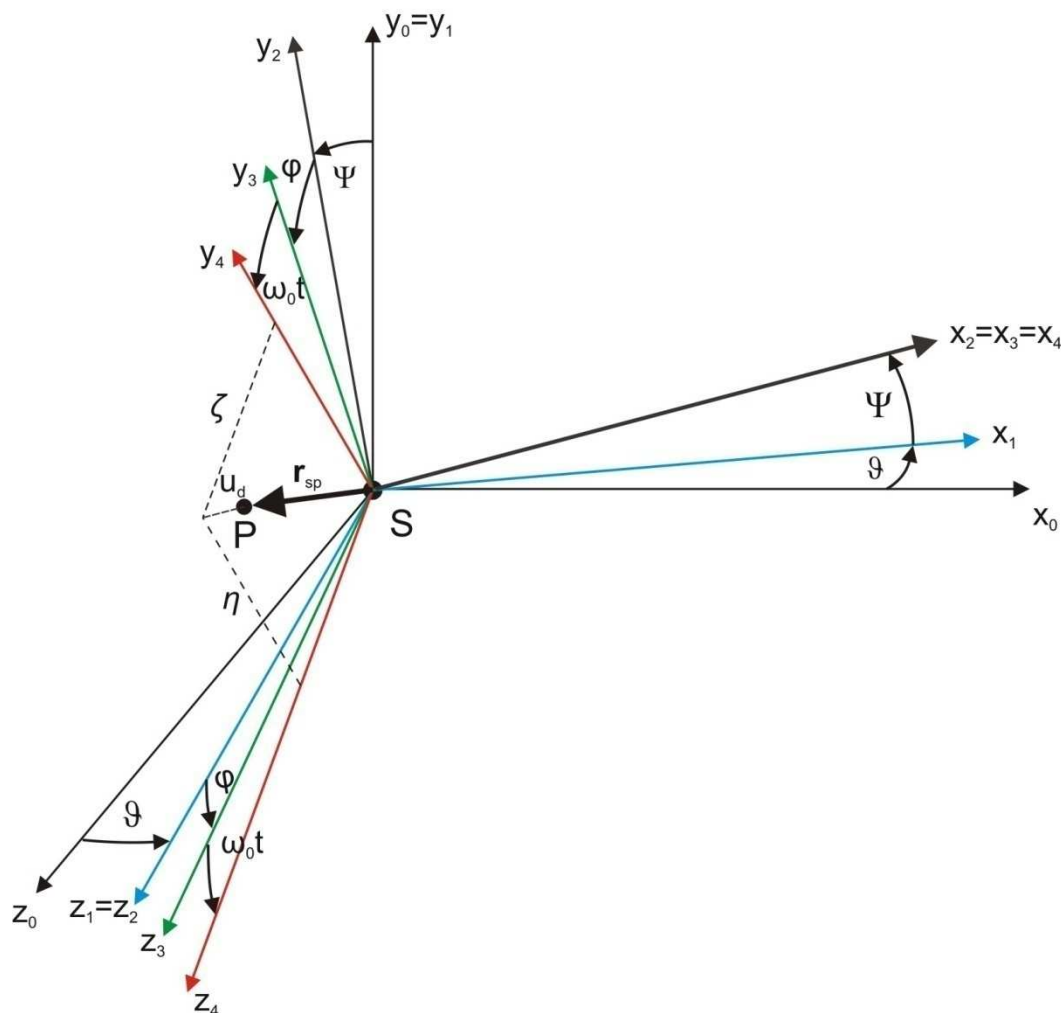
Zabývejme se nyní vyjádřením kinetické energie prvku  $E_k^{(e)}$ . Jelikož bychom rádi zohlednili, a dále také posoudili vliv deplanace průřezu, není možné určit kinetickou energii za pomoci rozkladu (ve středisku hmotnosti) prostorového pohybu na pohyb (prostorový) unášivý a druhotný sférický pohyb kolem těžiště vytknutého tuhého elementu  $S$ . Jediný možný postup spočívá ve vyjádření kinetické energie pro diferenciálně malý bod tělesa  $P$  a následnou integrací přes celou uvažovanou oblast tělesa. Tento bod zaujímá v prostoru určitou polohu danou polohovým rádius vektorem  $\mathbf{r}_{0P}$ . Abychom byli schopni vyjádřit tento polohový vektor, uvažujme nejprve souřadný systém  $xyz$  podle předchozího obrázku, ve kterém jej vyjádříme. Pro souvislost s předchozím obrázkem budeme nyní opět předpokládat, že daný bod  $P$  se nachází v oblasti o tloušťce  $dx$  jako dříve. Rádius vektor  $\mathbf{r}_{0P}$  získáme jako součet vektoru  $\mathbf{r}_{S_0}$  udávajícího polohu těžiště dané oblasti, vektoru  $\mathbf{r}_{S_0S}$  popisujícího posun těžiště  $S$  vlivem deformace a nakonec vektoru  $\mathbf{r}_{SP}$ , tj. polohy bodu  $P$  vůči těžišti. Následující obrázek ukazuje vyjádření vektoru  $\mathbf{r}_{0P}$  pomocí součtu jednotlivých vektorů.



Obrázek 3.7 Rádius vektoru libovolného bodu průřezu  $\mathbf{r}_{0P}$

První dva vektory je možné bezprostředně vyjádřit v souřadném systému  $xyz$ . Vektor  $\mathbf{r}_{SP}$  vyjadřuje ve skutečnosti deformaci libovolného bodu  $P$  rotoru vůči těžišti  $S$ . Pro vyjádření tohoto vektoru v souřadném systému uvažujme postupně všechny deformace vytknutého elementu podle obr.3.6, které mohou vzniknout, a zároveň zavedme několik dalších souřadných systémů v následujícím pořadí - nejprve dojde k natočení průřezu kolem osy  $y_0$  o úhel precese  $\vartheta$ , přičemž zavedeme nový souřadný systém  $x_1y_1z_1$  pootočený o tento úhel. Dále budeme uvažovat natočení o úhel nutace  $\psi$ , a sice kolem osy  $z_1$ , přičemž zavedeme nový souřadný systém  $x_2y_2z_2$ . Následně dojde k pootočení o úhel  $\varphi$  kolem osy  $x_2$  vyjadřující zkroucení průřezu (zavedení souřadného systému  $x_3y_3z_3$ ). Rotaci konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_0$  takto deformovaného průřezu můžeme nyní zavést jako rotaci posledního souřadného systému  $x_4y_4z_4$  o úhel  $\omega_0 t$  kolem osy rotace  $x_3$ . Smysl zavádění výše uvedených souřadných systémů spočívá v tom, že nyní je možné zavést rádius vektor  $\mathbf{r}_{SP}$ , vyjádřený

v posledním souřadném systému označený symbolem  $\mathbf{r}_{SP,4} = [u_d \ \eta \ \zeta]^T$ , jehož první souřadnice udává deformaci vlivem deplanace průřezu a nakonec tento vektor vyjádřit v souřadném systému  $x_0y_0z_0$ , tedy námi hledaný vektor  $\mathbf{r}_{SP,0}$ . Výše popsané deformace a zavádění nových souřadných systémů ukazuje následující obrázek.



Obrázek 3.8 Souřadné systémy vztahené k jednotlivým deformacím rotoru

Nyní zavedeme transformační matice, pomocí nichž vyjádříme vektor  $\mathbf{r}_{SP}$  v souřadném systému  $x_0y_0z_0$ , tj. vektor  $\mathbf{r}_{SP,0}$ . Pro přechod ze systému  $x_4y_4z_4$  do  $x_3y_3z_3$  zavedeme transformační maticí  $\mathbf{A}_{34}$  ve tvaru

$$\mathbf{A}_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\omega & -s_\omega \\ 0 & s_\omega & c_\omega \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Ve kterém jsme zavedli pro jednoduchost označení  $c_\omega = \cos(\omega_0 t)$ ,  $s_\omega = \sin(\omega_0 t)$

Zbylé tři matice transformace pro vyjádření libovolného vektoru v souřadném systému  $x_0y_0z_0$  mají následující tvar

$$\mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi \\ 0 & s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{01} = \begin{bmatrix} c_\vartheta & 0 & s_\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\vartheta & 0 & c_\psi \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Vektor  $\mathbf{r}_{SP,0}$  jsme tedy schopni zapsat pomocí vztahů (3.23) a (3.24) a zavedení celkové matice transformace  $\mathbf{A}_{04}$  jako

$$\mathbf{r}_{SP,0} = \mathbf{A}_{01}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{34}\mathbf{r}_{SP,4} = \mathbf{A}_{04}\mathbf{r}_{SP,4} \quad (3.25)$$

a konečně jsme schopni definovat vektor  $\mathbf{r}_{0P}$  jako součet následujících vektorů

$$\mathbf{r}_{0P} = \begin{bmatrix} x_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_{04} \begin{bmatrix} u_d \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \mathbf{r}_{S_0} + \mathbf{r}_{S_0S} + \mathbf{A}_{04}\mathbf{r}_{SP,4} \quad (3.26)$$

Derivujme tento vztah podle času

$$\dot{\mathbf{r}}_{0P} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{w}} \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{A}}_{04} \begin{bmatrix} u_d \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} + \mathbf{A}_{04} \begin{bmatrix} \dot{u}_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{r}}_{S_0S} + \dot{\mathbf{A}}_{04}\mathbf{r}_{SP,4} + \mathbf{A}_{04}\dot{\mathbf{r}}_{SP,4} \quad (3.27)$$

Kvadráty složek rychlostí získáme skalárním součinem vektoru  $\mathbf{r}_{0P}$  se sebou samým, tedy

$$\dot{\mathbf{r}}_{0P}^T \dot{\mathbf{r}}_{0P} = (\dot{\mathbf{r}}_{S_0S} + \dot{\mathbf{A}}_{04}\mathbf{r}_{SP,4} + \mathbf{A}_{04}\dot{\mathbf{r}}_{SP,4})^T (\dot{\mathbf{r}}_{S_0S} + \dot{\mathbf{A}}_{04}\mathbf{r}_{SP,4} + \mathbf{A}_{04}\dot{\mathbf{r}}_{SP,4}) \quad (3.28)$$

Jelikož uvažujeme oblast malých deformací, je možné transformační matici  $\mathbf{A}_{04}$  linearizovat a zanedbat řádově malé veličiny. Tím přejde vztah (3.28) v konečném důsledku do tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{0P}^T \dot{\mathbf{r}}_{0P} = & \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \dot{\varphi}^2(\eta^2 + \zeta^2) + 2\omega_0\psi\dot{\varphi}(\eta^2 + \zeta^2) + \dot{u}_d^2 + \underbrace{(c_\omega\eta - s_\omega\zeta)^2}_{y} \psi^2 \\ & + \underbrace{(s_\omega\eta + c_\omega\zeta)^2}_{z} \dot{\varphi}^2 - 2yz\psi\dot{\varphi} - 2y\dot{u}_d\psi + 2z\dot{u}_d\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Celková kinetická energie elementu rotoru je vyjádřena pomocí vztahu (3.28) a platí pro ni následující vztah

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_V \dot{\mathbf{r}}_{0P}^T \dot{\mathbf{r}}_{0P} \rho dV \quad (3.30)$$

Pro další operace s tímto vztahem bude vhodné vyjádřit vztah (3.29) v maticovém tvaru. Nejprve vyjádříme členy bez goniometrických funkcí v maticovém tvaru (tj. členy, které se nebudou transformovat transformační maticí později definovanou pro další členy). Zavedením

$$E_{k1}^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_V (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \dot{\varphi}^2(\eta^2 + \zeta^2)) \rho dV \quad (3.31)$$

$$E_{k1}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_l [A(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_p\dot{\varphi}^2] \rho dl$$

Dosažením aproximačních funkcí do vztahu (3.31) definovaných v podkapitole 3.1.1 a zavedením vektoru zobecněných rychlostí  $\dot{\mathbf{q}}^{(e)} = [\dot{q}_1^T \ \dot{q}_2^T \ \dot{q}_3^T \ \dot{q}_4^T]^T$  je možné vyjádřit kinetickou energii  $E_{k1}^{(e)}$  následovně

$$E_{k1}^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \tilde{\mathbf{M}}_0^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \begin{bmatrix} \rho A \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{00}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho A P \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{00}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho A \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{00}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho I_p \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{00}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} \quad (3.32)$$

Kinetická energie vyjadřující gyroskopické účinky je dána vztahem

$$E_{k2}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_l (2\omega_0 \psi \dot{\vartheta} I_p) \rho dl = \mathbf{q}^{(e)T} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\omega_0 \rho I_p \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} \quad (3.33)$$

$$E_{k2}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)T} \tilde{\mathbf{C}}^{(e)T} \dot{\mathbf{q}}^{(e)}$$

Nyní vyjádříme příspěvek do kinetické energie od členů, které jsou násobeny goniometrickými funkcemi a jedná se tak o nestacionární členy, které vnášejí do systému časovou proměnnost matic systému (z hlediska otáčení rotoru kolem osy rotace)

$$E_{k3}^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_V (\dot{u}_d^2 + y^2 \dot{\psi}^2 + z^2 \dot{\vartheta}^2 - 2yz \dot{\psi} \dot{\vartheta} - 2y \dot{u}_d \dot{\psi} + 2z \dot{u}_d \dot{\vartheta}) \rho dV \quad (3.34)$$

Kinetickou energii danou předchozím vztahem můžeme vyjádřit v maticovém tvaru, jako kvadratickou formu rychlostí ve tvaru

$$E_{k3}^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_V \left( [\dot{\psi} \ \dot{\vartheta} \ \dot{u}_d] \begin{bmatrix} y^2 & -yz & -y \\ -yz & z^2 & z \\ -y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{u}_d \end{bmatrix} \right) \rho dV \quad (3.35)$$

Matici kvadratické formy ve výrazu (3.37) můžeme zapsat jako diadický součin dvou vektorů

$$\begin{bmatrix} y^2 & -yz & -y \\ -yz & z^2 & z \\ -y & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y & z & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$



Dosažením do (3.35) lze kinetickou energii  $E_{k3}^{(e)}$  zapsat jako skalární součin vektorů  $\mathbf{R}$  ve tvaru

$$E_{k3}^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_V \left( [\dot{\psi} \quad \dot{\vartheta} \quad \dot{u}_d] \begin{bmatrix} -y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} [-y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{u}_d \end{bmatrix} \right) \rho dV \quad (3.37)$$

$$E_{k3}^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_V (\dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T \dot{\mathbf{u}}_1) \rho dV = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{R}^T \mathbf{R}) \rho dV$$

Zabývejme se nyní vektorem  $\mathbf{R}$ , který se pokusíme vyjádřit jako součin vektoru parametrů, transformační matice a matice zobecněných rychlostí, což provedeme postupně následujícím způsobem. Nejprve dosadíme za  $y$  a  $z$  ze vztahu (3.29)

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}^T \dot{\mathbf{u}}_1 = [-y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{u}_d \end{bmatrix} = [\zeta s - \eta c \quad \eta s + \zeta c \quad 1] \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{u}_d \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$[\zeta s - \eta c \quad \eta s + \zeta c \quad 1] \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{u}_d \end{bmatrix} = [-\eta \quad \zeta \quad 1] \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{u}_d \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Roznásobením jednotlivých členů a zavedením aproximačních členů podle předchozí kapitoly získáme výraz, který dále upravíme

$$\begin{aligned} [-\eta \quad \zeta \quad 1] \begin{bmatrix} c\dot{\psi} - s\dot{\vartheta} \\ s\dot{\psi} + c\dot{\vartheta} \\ \dot{u}_d \end{bmatrix} &= [-\eta \quad \zeta \quad 1] \begin{bmatrix} c\boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1}\dot{\mathbf{q}}_1 + s\boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_2 \\ s\boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1}\dot{\mathbf{q}}_1 - c\boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_2 \\ d(y,z)\boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1}\dot{\mathbf{q}}_4 \end{bmatrix} = \\ &= [-\eta \quad \zeta \quad 1] \begin{bmatrix} c\boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1} & s\boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} \\ s\boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1} & -c\boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & d(y,z)\boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \end{bmatrix} = \\ &= [-\eta \quad \zeta \quad d(\eta, \zeta)] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\phi}'\mathbf{S}_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\mathbf{I} & s\mathbf{P} & \mathbf{0} \\ -s\mathbf{P} & c\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Při násobení  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$  integrujme vnitřní součin vektorů obsahující souřadnice průřezu  $\eta$ ,  $\zeta$  a deplanační funkci  $d(\eta, \zeta)$

$$\int_A \begin{bmatrix} -\eta \\ \zeta \\ d \end{bmatrix} [-\eta \quad \zeta \quad d] dA = \int_A \begin{bmatrix} \eta^2 & -\eta\zeta & -\eta d \\ -\eta\zeta & \zeta^2 & \zeta d \\ -\eta d & \zeta d & d^2 \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} I_\zeta & -D_{\eta\zeta} & -D_{\eta d} \\ -D_{\eta\zeta} & I_\eta & D_{\zeta d} \\ -D_{\eta d} & D_{\zeta d} & I_d \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

kde byly zavedeny veličiny charakterizující průřez rotoru, ve kterých jsou označeny kvadratický moment k ose  $z_4$  výrazem  $I_\zeta$ , kvadratický moment k ose  $y_4$  výrazem  $I_\eta$ , kvadratický deplanační moment  $I_d$  a deviační deplanační momenty  $D_{\eta d}$  a  $D_{\zeta d}$  jako

$$\begin{aligned} I_\zeta &= \int_A \eta^2 dA, I_\eta = \int_A \zeta^2 dA, I_d = \int_A d^2 dA, D_{\eta\zeta} = \int_A \eta\zeta dA, D_{\eta d} = \int_A \eta d dA, \\ D_{\zeta d} &= \int_A \zeta d dA \end{aligned} \quad (3.42)$$

Kinetickou energii danou vztahem (3.35) tak můžeme přepsat (obecně po integraci přes objem) do tvaru

$$\begin{aligned}
 E_{k3}^{(e)} &= \\
 &= \frac{1}{2} [\dot{q}_1^T \quad \dot{q}_2^T \quad \dot{q}_4^T] \begin{bmatrix} cI & -sP & \mathbf{0} \\ sP & cI & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\zeta S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} & D_{\eta\zeta} S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} P & -D_{\eta d} S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} \\ D_{\eta\zeta} P S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} & I_\eta P S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} P & -D_{\zeta d} P S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} \\ -D_{\eta d} S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} & -D_{\zeta d} S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} P & I_d S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cI & sP & \mathbf{0} \\ -sP & cI & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

V následujícím bude vhodné vyjádřit vztah (3.43) pro vektor zobecněných rychlostí

$\dot{\mathbf{q}}^{(e)} = [\dot{q}_1^T \quad \dot{q}_2^T \quad \dot{q}_3^T \quad \dot{q}_4^T]^T$  jako

$$\dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \begin{bmatrix} cI & -sP & \mathbf{0} \\ sP & cI & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{6 \times 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\zeta S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} & D_{\eta\zeta} S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} P & \mathbf{0} & -D_{\eta d} S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} \\ D_{\eta\zeta} P S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} & I_\eta P S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} P & \mathbf{0} & -D_{\zeta d} P S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -D_{\eta d} S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} & -D_{\zeta d} S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} P & \mathbf{0} & I_d S_1^{-T} I_{11}^{33} S_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cI & sP & \mathbf{0} \\ -sP & cI & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{6 \times 6} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} \quad (3.44)$$

ve kterém vystupují výše zmíněné transformační matice

$$\tilde{\mathbf{T}}(t) = \begin{bmatrix} cI & sP & \mathbf{0} \\ -sP & cI & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Vztah pro kinetickou energii tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$E_{k3}^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \tilde{\mathbf{T}}^T(t) \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}(t) \dot{\mathbf{q}}^{(e)} \quad (3.46)$$

Celková kinetická energie elementu rotoru je tvořena součtem členů (3.32), (3.33) a (3.46) a platí pro ni následující vztah

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_V \dot{\mathbf{r}}_P^T \dot{\mathbf{r}}_P \rho dV = E_{k1}^{(e)} + E_{k2}^{(e)} + E_{k3}^{(e)} \quad (3.47)$$

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}}^{(e)T} (\tilde{\mathbf{M}}_0^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}}) \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{q}^{(e)T} \tilde{\mathbf{C}}^{(e)T} \dot{\mathbf{q}}^{(e)}]$$

kde  $\tilde{\mathbf{M}}_0^{(e)} \in \mathbf{R}^{14,14}$  je matice, která nepodléhá transformaci a matice  $\tilde{\mathbf{C}}^T \in \mathbf{R}^{14,14}$  a  $\tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \in \mathbf{R}^{14,14}$  podléhající transformaci.

$\tilde{\mathbf{T}}$  je transformační matice, pro kterou platí

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{6 \times 6} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{14,14}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} cI & sP \\ -sP & cI \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{8,8} \quad (3.48)$$

Při aplikaci Lagrangeových rovnic II. druhu bude potřeba vyjádřit derivaci transformační matice  $\tilde{\mathbf{T}}$ . Z tohoto důvodu zavedeme nejprve tzv. matici úhlové rychlosti rotace  $\tilde{\mathbf{M}}$  ve tvaru

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &= \begin{bmatrix} \Omega_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \omega_0 \begin{bmatrix} \hat{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \omega_0 \tilde{P} \in \mathbf{R}^{14,14}, \\ \Omega_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \omega_0 P \\ -\omega_0 P & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \omega_0 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ -P & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \omega_0 \hat{P} \in \mathbf{R}^{8,8}\end{aligned}\quad (3.49)$$

Nyní je možné zapsat derivaci transformační matice pomocí (3.49) jako

$$\begin{aligned}\dot{T}_1 &= \begin{bmatrix} -\omega_0 S I & \omega_0 c P \\ -\omega_0 c P & -\omega_0 S I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \omega_0 P \\ -\omega_0 P & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c I & S P \\ -S P & c I \end{bmatrix} = \Omega_0 T_1 \in \mathbf{R}^{8,8} \\ \dot{\tilde{T}} &= \tilde{\Omega} \tilde{T} = \begin{bmatrix} \Omega_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{6 \times 6} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{14,14}\end{aligned}\quad (3.50)$$

### Potenciální (deformační) energie rotorového prvku

Prvky tenzoru deformace při prostorové napjatosti jsou jak známo obecně vyjádřeny v kartézských souřadnicích  $xyz$  kinematickými vztahy

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (3.51)$$

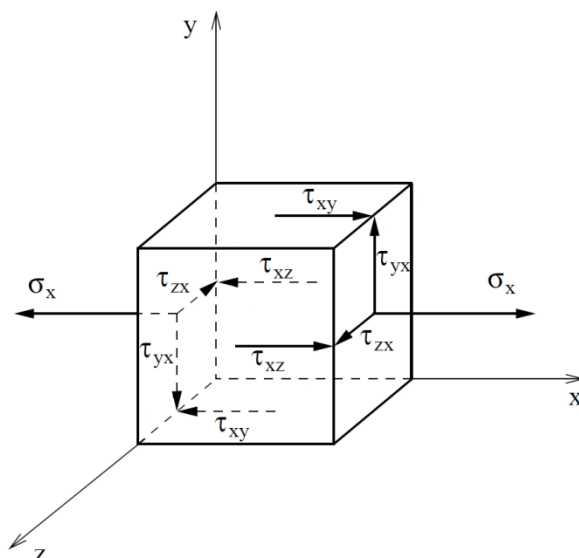
Vztah mezi tenzorem napětí a deformace vyjadřují fyzikální rovnice (Hookeův rozšířený zákon) ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}\quad (3.52)$$

kde  $\nu$  je Poissonovo číslo,  $E$  představuje modul pružnosti v tahu a  $G$  modul pružnosti ve smyku. Mezi těmito veličinami platí vztah

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\quad (3.53)$$

Napjatost v rotorovém prvku je vyjádřena nenulovými složkami napětí  $\sigma_x, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  podle obr. 3.9.



Obrázek 3.9 Napjatost v rotorovém prvku

a vztah (3.52) pak bude mít tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Z prvních tří rovnic lze určit známý vztah – Hookeův zákon pro napjatost vyjádřenou normálovým napětím v jednom směru

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

kde odečtením 2. a 3. rovnice získáme rovnost mezi poměrnými deformacemi v rovině  $yz$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \quad (3.56)$$

Zpětným dosazením (3.56) do 2. rovnice získáme vztah mezi deformací ve směru osy  $x$  a zbylými dvěma osami vyjádřený Poissonovým číslem

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \quad (3.57)$$

A nakonec z 1. rovnice plyne již známý Hookeův zákon

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (3.58)$$

Z posledních 3. rovnice vztahu (3.54) plyne

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= 0 \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (3.59)$$

Vektory napjatosti a deformace mají tedy výsledný tvar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad 0 \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}]^T\end{aligned}\quad (3.60)$$

Potenciální energii deformace rotorového prvku můžeme vyjádřit ve tvaru

$$E_{pd}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.61)$$

Po dosazení vztahů (3.60) do (3.61)

$$E_{pd}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{V^e} [E\varepsilon_x^2 + G\gamma_{xz}^2 + G\gamma_{xy}^2] dV \quad (3.62)$$

S uvážením vztahu pro posunutí libovolného bodu rotorového prvku ve směru osy rotace

$$u(x, y, z) = \bar{u}(x) - y\psi(x) + z\vartheta(x) + \varphi'(x)d(y, z) \quad (3.63)$$

Ize poměrnou deformaci  $\varepsilon_x$  psát ve tvaru

$$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x}(u(x, y, z)) = \bar{u}'(x) - y\psi'(x) + z\vartheta'(x) + \varphi''(x)d(y, z) \quad (3.64)$$

Pozn.: Derivace zkrutu podle  $x$  je  $\varphi''(x) = 0$ , pokud se jedná o volné kroucení, tj. platnost vztahu  $\varphi'(x) = \vartheta = konst.$ , což v následujícím uvažovat nebudeme.

Zkosity  $\gamma_{xy}$  a  $\gamma_{xz}$  lze vyjádřit (s uvážením deplanační funkce  $d(y, z)$ )

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\vartheta z + \vartheta \frac{\partial d}{\partial y} = \vartheta \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \vartheta \frac{\partial d}{\partial z} + \vartheta y = \vartheta \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right)\end{aligned}\quad (3.65)$$

Dosazením (3.64) a (3.65) do (3.62)

$$\begin{aligned}E_{pd}^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_{V^e} \left\{ E(\bar{u}'^2 - 2yz\psi'\vartheta' + y^2\psi'^2 + z^2\vartheta'^2 - 2y\psi'\varphi''d + 2z\vartheta'\varphi''d + \varphi''^2d^2) \right. \\ &\quad \left. + G\varphi'^2 \left[ \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right)^2 + \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right)^2 \right] \right\} dV\end{aligned}\quad (3.66)$$

$$E_{pd}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ E \iint_{A^e} (\bar{u}'^2 - 2yz\psi'\vartheta' + y^2\psi'^2 + z^2\vartheta'^2 - 2y\psi'\varphi''d + 2z\vartheta'\varphi''d + \varphi''^2 d^2) dA + G\varphi'^2 \iint_{A^e} \left[ \left( \frac{\partial d}{\partial z} + y \right)^2 + \left( \frac{\partial d}{\partial y} - z \right)^2 \right] dA \right\} dx$$

Po integraci přes plochu příčného průřezu získáme s uvážením vztahu (2.31) vyjadřující modul odporu v kroucení  $I_k$

$$E_{pd}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E(A\bar{u}'^2 + I_y\vartheta'^2 + I_z\psi'^2 - 2D_{yz}\psi'\vartheta' - 2D_{yd}\psi'\varphi'' + 2D_{zd}\vartheta'\varphi'' + \varphi''^2 I_d) + GI_k\varphi'^2 \right] dx \quad (3.67)$$

$$E_{pd}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E(A\mathbf{q}_3^T \mathbf{S}_3^{-T} \boldsymbol{\psi}'^T \boldsymbol{\psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3 + I_y \mathbf{q}_2^T \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\phi}'^T \boldsymbol{\phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 + I_z \mathbf{q}_1^T \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\phi}'^T \boldsymbol{\phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 + 2D_{yz} \mathbf{q}_1^T \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\phi}'^T \boldsymbol{\phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 - 2D_{yd} \mathbf{q}_1^T \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\phi}'^T \boldsymbol{\phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_4 - 2D_{zd} \mathbf{q}_2^T \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\phi}'^T \boldsymbol{\phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_4 + I_d \mathbf{q}_4^T \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\phi}'^T \boldsymbol{\phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_4) + GI_k \mathbf{q}_4^T \mathbf{S}_3^{-T} \boldsymbol{\psi}'^T \boldsymbol{\psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 \right] dx \quad (3.68)$$

Po integraci přes délku elementu  $l$  a zavedení integrálních matic definovaných v kap. 3.1.1

$$E_{pd}^{(e)} = \frac{1}{2} \left[ E(A\mathbf{q}_3^T \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3 + I_y \mathbf{q}_2^T \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 + I_z \mathbf{q}_1^T \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 + 2D_{yz} \mathbf{q}_1^T \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 - 2D_{yd} \mathbf{q}_1^T \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_4 - 2D_{zd} \mathbf{q}_2^T \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_4 + I_d \mathbf{q}_4^T \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_4) + GI_k \mathbf{q}_4^T \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 \right] \quad (3.69)$$

Matice tuhosti prvku  $\tilde{\mathbf{K}}^{(e)}$

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(e)} = \begin{bmatrix} EI_z \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & ED_{yz} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & -ED_{yd} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \\ ED_{yz} \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & EI_y \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & -ED_{zd} \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & EAS_3^{-T} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ -D_{yd} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & -D_{zd} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & GI_k \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} + I_d \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \end{bmatrix}$$

Tato matice se ovšem skládá ze součtu stacionární matice  $\tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)}$  a matice  $\tilde{\mathbf{K}}_2^{(e)}$  podléhající transformaci

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(e)} = \tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{K}}_2^{(e)} \tilde{\mathbf{T}} \quad (3.70)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & EAS_3^{-T} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & GI_k \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} + I_d \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_2^{(e)} = \begin{bmatrix} EI_{\zeta} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & ED_{yz} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & -ED_{\eta d} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \\ ED_{yz} \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33T} \mathbf{S}_1^{-1} & EI_{\eta} \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & -ED_{\zeta d} \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -D_{\eta d} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & -D_{\zeta d} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Pohybové rovnice rotorového prvku jsou vyjádřeny pomocí Lagrangeových rovnic II. druhu, které mají tvar pro rotor bez tlumení a vnějšího buzení

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \frac{\partial E_{pd}^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \mathbf{0} \quad (3.72)$$

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \left( \tilde{\mathbf{M}}_0^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}} \right) \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega_0 \mathbf{q}^{(e)T} \tilde{\mathbf{C}}^{(e)T} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} \quad (3.73)$$

Po aplikaci Lagrangeových rovnic:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_0^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \underbrace{\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{\Omega}}^T \tilde{\mathbf{M}}_1 \tilde{\mathbf{T}}}_{\tilde{\mathbf{T}}^T} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{M}}_1 \underbrace{\tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{T}}}_{\tilde{\mathbf{T}}} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} \\ + \omega_0 \underbrace{(\tilde{\mathbf{C}}^{(e)} - \tilde{\mathbf{C}}^{(e)T})}_{\tilde{\mathbf{G}}^{(e)}} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)} \mathbf{q}^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{K}}_2^{(e)} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\mathbf{M}}_0^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{T}} \right) \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \left[ \omega_0 \tilde{\mathbf{G}}^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T \left( \tilde{\mathbf{\Omega}}^T \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} + \tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)} \tilde{\mathbf{\Omega}} \right) \tilde{\mathbf{T}} \right] \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \\ + \left[ \tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)} + \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{K}}_2^{(e)} \tilde{\mathbf{T}} \right] \mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

kde  $\tilde{\mathbf{G}}^{(e)}$  značí antisymetrickou matici gyroskopických účinků

### 3.4 Model rotoru

Rotor je, jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, rozdělen na  $n$  prvků, z nichž každý je popsán maticemi  $\tilde{\mathbf{M}}_0^{(e)}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_1^{(e)}$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}^{(e)}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_1^{(e)}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_2^{(e)}$ . Tyto matice odpovídají pořadí ve vektoru zobecněných výchylek, tj. následujícímu pořadí

$$\mathbf{q}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} = [v_1 \quad \psi_1 \quad v_2 \quad \psi_2 \quad w_1 \quad \vartheta_1 \quad w_2 \quad \vartheta_2 \quad u_1 \quad u_2 \quad \varphi_1 \quad \varphi_1' \quad \varphi_2 \quad \varphi_2']^T \quad (3.75)$$

Pořadí souřadnic ve vektoru (3.75) není vhodné, protože parametry krajních bodů jsou promíchány. Výhodnější je seřadit prvky tohoto vektoru tak, abychom od sebe odlišili parametry obou krajních bodů, což provedeme pomocí tzv. permutační matice následujícím způsobem

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \psi_1 \\ v_2 \\ \psi_2 \\ w_1 \\ \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ \vartheta_1 \\ \psi_1 \\ \varphi_1' \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \vartheta_2 \\ \psi_2 \\ \varphi_2' \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

stručně zapsáno

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} = \mathbf{P}\mathbf{q}^{(e)} \quad (3.77)$$

Pro matice rotorového prvku, které nepodléhají transformaci a odpovídající řazení dané vztahem (3.77) platí následující vztahy

$$\mathbf{X}^{(e)} = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \mathbf{P} \quad (3.78)$$

Pro matice podléhající transformaci odpovídající novému řazení (3.77), lze psát

$$\mathbf{X}^{(e)} = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{X}}^{(e)} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{P} \quad (3.79)$$

Z praktického hlediska je ovšem vhodné vyjádřit vztah (3.79) tak, aby násobení transformačními maticemi následovalo až po permutaci matic systému dané vztahem (3.80), což můžeme provést vyjádřením matice  $\tilde{\mathbf{X}}^{(e)}$  pomocí permutační matice  $\mathbf{P}$  takto

$$\tilde{\mathbf{X}}^{(e)} = \mathbf{P}^{-T} \mathbf{X}^{(e)} \mathbf{P}^{-1} \quad (3.80)$$

dosazením do (3.79)

$$\mathbf{X}^{(e)} = \underbrace{\mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{P}^{-T}}_{\mathbf{T}^T} \mathbf{X}^{(e)} \underbrace{\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{P}}_{\mathbf{T}} \quad (3.81)$$

neboli

$$\mathbf{X}^{(e)} = \mathbf{T}^T \mathbf{X}^{(e)} \mathbf{T} \quad (3.82)$$

přičemž  $\mathbf{T}$  označuje matici transformace v řazení daném (3.79) tvaru

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{P} \quad (3.83)$$

Tato matice je následující struktury





$$\mathbf{T}^g = \begin{bmatrix}
 \begin{matrix} \mathbf{T}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_A \end{matrix} & & & \\
 & \begin{matrix} \mathbf{T}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_A \end{matrix} & & \\
 & & \begin{matrix} \mathbf{T}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_A \end{matrix} & \\
 & & & \dots \\
 & & & & \begin{matrix} \mathbf{T}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_A \end{matrix}
 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Matematický model rotorové soustavy můžeme po přemístění řádků a sloupců matic soustavy a transformační matice psát jako

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}_0 + \mathbf{T}^{gT} \mathbf{M}_1 \mathbf{T}^g) \ddot{\mathbf{q}} + [\omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{T}^{gT} (\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{T}^g] \dot{\mathbf{q}} + \\
 + [\mathbf{K}_1 + \mathbf{T}^{gT} \mathbf{K}_2 \mathbf{T}^g] \mathbf{q} = \mathbf{0}
 \end{aligned} \quad (3.89)$$

neboli

$$\mathbf{M}(t) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(t) \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}(t) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.90)$$

kde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}(t) &= \mathbf{M}_0 + \mathbf{T}^{gT} \mathbf{M}_1 \mathbf{T}^g \\
 \mathbf{B}(t) &= \omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{T}^{gT} (\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{T}^g \\
 \mathbf{K}(t) &= \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}^{gT} \mathbf{K}_2 \mathbf{T}^g
 \end{aligned} \quad (3.91)$$

## 4 Stabilita nesymetrických rotujících kontinuí [7]

Matematický model vytvořený v předchozí kapitole je charakterizován periodicky proměnnými maticemi  $\mathbf{M}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{K}(t)$ . U takového systému se projevují tzv. parametrické rezonance. Je-li soustava provozována při určitých úhlových rychlostech, při nichž nastávají parametrické rezonance, mohou tyto úhlové rychlosti zapříčinit nestabilitu soustavy. Určování těchto pásem nestability bude provedeno pomocí Floquetovy teorie, jejíž význam si ukážeme v následující podkapitole.

### 4.1 Floquetova teorie

Obecný matematický model s časově proměnnými maticemi má podle (3.90) tvar

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (4.1)$$

kde koeficientové matice jsou časově periodické s periodou  $T$ . Pro převedení do stavového prostoru, přidáme ke vztahu (4.1) identitu

$$\mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

a obě rovnice můžeme zapsat v kompaktním tvaru

$$\mathbf{N}(t)\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (4.3)$$

kde

$$\mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) & \mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Pokud je matice  $\mathbf{N}(t)$  regulární, lze ji invertovat a můžeme psát

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (4.6)$$

kde

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{N}^{-1}(t)\mathbf{P}(t), \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{N}^{-1}(t)\mathbf{F}(t) \quad (4.7)$$

Podle Floquetovy teorie o stabilitě rozhodneme z řešení homogenní části rovnice (4.6)

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4.8)$$

Předpokládejme, že

$$\mathbf{U}(t) = [\mathbf{u}_1(t) \quad \mathbf{u}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{2n}(t)] \quad (4.9)$$

je fundamentální matice řešení, jejíž sloupce  $\mathbf{u}_i(t)$  jsou nezávislá řešení (což je možné předpokládat u lineárních systémů), která splňuje soustavu diferenciálních rovnic (4.8)

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t) \quad (4.10)$$

potom

$$\dot{\mathbf{U}}(t+T) = \mathbf{A}(t+T)\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t+T) \quad (4.11)$$

a  $\mathbf{U}(t+T)$  je také fundamentální maticí (jestliže je  $\mathbf{U}(t)$  fundamentální maticí) ve tvaru

$$\mathbf{U}(t+T) = [\mathbf{u}_1(t+T) \quad \mathbf{u}_2(t+T) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{2n}(t+T)] \quad (4.12)$$

Předpokládejme, že každý vektor  $\mathbf{u}_1(t+T)$  můžeme zapsat jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{u}_1(t) \quad \mathbf{u}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{2n}(t)$ . Předchozí vztah je pak možné zapsat jako

$$\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{U}(t)\mathbf{Z} \quad (4.13)$$

Matice  $\mathbf{Z}$  je konstantní matice lineárních koeficientů, která je závislá na  $\mathbf{U}(0)$ . Jestliže zvolíme fundamentální matici  $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$ , kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice, znamená to, že matice  $\mathbf{U}(t)$  je v  $t = 0$  charakterizována nezávislými počátečními podmínkami.

Pak můžeme pro (4.13) v  $t = 0$  psát ve tvaru

$$\mathbf{U}(T) = \mathbf{U}(0)\mathbf{Z} = \mathbf{Z} \quad (4.14)$$

a tedy fundamentální matice v čase  $t = 0$  je rovna matici  $\mathbf{Z}$ . Matici  $\mathbf{Z}$  označujeme jako matici monodromie. Vlastní čísla této matice rozhodují o stabilitě daného systému. Jestliže všechna vlastní čísla leží v komplexní rovině v jednotkové kružnici (včetně hranice), pak se jedná o stabilní systém. Pokud však jedno z vlastních čísel leží mimo tuto hranici, pak je systém nestabilní.

**Důkaz:**

Převeďme matici  $\mathbf{Z}$  do Jordanova kanonického tvaru, která je v případě modelování rotorů rovna spektrální matici  $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{P} = \mathbf{J} = \mathbf{\Lambda} \quad (4.15)$$

kde  $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{p}_{2n}]$  je pravostranná modální matice vlastních vektorů matice  $\mathbf{Z}$  a  $\mathbf{J}$  je Jordanova matice. Tento tvar lze získat následujícím způsobem

Řešme pravostranný

$$(\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

a levostranný problém vlastních hodnot, který získáme transpozicí rovnice

$$(\mathbf{Z}^T - \lambda\mathbf{I})\mathbf{p}^* = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

neboli

$$\mathbf{p}^{*T}(\mathbf{Z} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

Výsledkem řešení problémů (4.16) a (4.17) jsou modální matice  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{P}^*$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{p}_{2n}], \quad \mathbf{P}^* = [\mathbf{p}_1^* \quad \mathbf{p}_2^*, \quad \dots, \quad \mathbf{p}_{2n}^*] \quad (4.19)$$

Primárním výsledkem řešením jak pravostranného, tak levostranného problému vlastních hodnot (1.16) a (1.17) jsou vlastní čísla  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ , které jsou uspořádány do spektrální matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{2n} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

jimž přísluší vlastní vektory uvedené v (4.16) a (4.17).

Ortogonalita vlastních vektorů a jejich normalizace

Zapišme problém vlastních hodnot (4.16), resp. (4.17) pro  $i$ -tý, resp.  $j$ -tý vlastní vektor

$$(\mathbf{Z} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{p}_i = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

$$(\mathbf{Z}^T - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{p}_j^* = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Pronásobením (4.21), resp. (4.22) vlastním vektorem  $\mathbf{p}_j^{*T}$ , resp.  $\mathbf{p}_i^T$  zleva dostaneme

$$\mathbf{p}_j^{*T} (\mathbf{Z} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{p}_i = 0 \quad (4.23)$$

$$\mathbf{p}_i^T (\mathbf{Z}^T - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{p}_j^* = 0 \quad (4.24)$$

Transponováním vztahu (4.24) a odečtením (4.23) od transponované rovnice (4.24) získáme vztah

$$(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{p}_j^{*T} \mathbf{p}_i = 0 \quad (4.25)$$

pomocí něhož bude vysvětlena ortogonalita vlastních vektorů. Dále se nejprve omezme na nenásobná vlastní čísla pro něž platí

$$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \quad (4.26)$$

pak pro zajištění nulovosti vztahu (4.25) musí platit

$$\mathbf{p}_j^{*T} \mathbf{p}_i = 0 \quad (4.27)$$

v případě rovnosti ve vztahu (4.26), tj.

$$i = j \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j \quad (4.28)$$

musí platit

$$\mathbf{p}_i^{*T} \mathbf{p}_i = \xi_i \neq 0 \quad (4.29)$$

Označme pro další výklad vlastní vektory  $\mathbf{p}^*$  a  $\mathbf{p}$  jako  $\tilde{\mathbf{p}}^*$  a  $\tilde{\mathbf{p}}$ , čímž chceme zdůraznit, že se jedná o nenormované vlastní vektory. Podmínky vyjádřené vztahy (4.27) a (4.29) lze potom vyjádřit v kompaktním tvaru pomocí nenormovaných modálních matic  $\tilde{\mathbf{P}}^*$  a  $\tilde{\mathbf{P}}$  takto

$$\tilde{\mathbf{P}}^{*T} \tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \xi_1 & & & \\ & \xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_{2n} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \quad (4.30)$$

kde diagonální matice obsahující nenulové členy  $\xi_i$  je označena symbolem  $\mathbf{S}$ .

V následujícím chceme docílit, aby vztah (4.30) byl roven jednotkové matici  $I$ . Z tohoto důvodu zapišme matici  $S$  jako součin dvou diagonálních matic

$$S = LL \quad (4.31)$$

kde  $L$  je tvaru

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{\xi_1} & & & \\ & \sqrt{\xi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\xi_{2n}} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Násobíme-li vztah (4.30) maticí  $L^{-1}$  zleva i zprava získáme, tak požadovanou rovnost

$$L^{-1}\tilde{P}^{*T}\tilde{P}L^{-1} = I \quad (4.33)$$

kde symbolem  $P$  budeme dále označovat normovanou pravostrannou modální matici tvaru

$$P = \tilde{P}L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}_1}{\sqrt{\xi_1}} & \frac{\tilde{p}_2}{\sqrt{\xi_2}} & \dots & \frac{\tilde{p}_{2n}}{\sqrt{\xi_{2n}}} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

a označíme-li  $P^{*T} = L^{-1}\tilde{P}^{*T}$  pak dostaneme transpozicí vztah pro normovanou levostrannou modální matici ve tvaru

$$P^* = \tilde{P}L^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}_1^*}{\sqrt{\xi_1}} & \frac{\tilde{p}_2^*}{\sqrt{\xi_2}} & \dots & \frac{\tilde{p}_{2n}^*}{\sqrt{\xi_{2n}}} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Pro normované modální matice nyní platí

$$P^{*T}P = I \quad (4.36)$$

Pokud (4.36) vynásobíme  $P^{-1}$  zprava, získáme tím výhodný vztah

$$P^{*T} = P^{-1} \quad (4.37)$$

díky kterému stačí řešit pouze jeden z obou problémů vlastních hodnot.

Vraťme se nyní ke vztahu (4.16), který můžeme zapsat v kompaktním tvaru jako

$$ZP - P\Lambda = 0 \quad (4.38)$$

Násobíme-li tento vztah  $P^{*T}$  zleva pak

$$P^{*T}ZP = P^{*T}P\Lambda \quad (4.39)$$

a při uvážení vztahů (4.36) a (4.37) lze psát

$$P^{-1}ZP = \Lambda \quad (4.40)$$

Vztah (4.40) je roven spektrální matici, který tak vyjadřuje převod do kanonického tvaru, v případě jednoduchých struktur jde o převod do spektrálního tvaru.

Vyjděme nyní ze vztahu (4.10) a nahradíme matici  $U(t)$  transformací pomocí modální matice  $P$  ve tvaru

$$U(t) = V(t)P^{-1} \quad (4.41)$$

Zapišme (4.41) pro čas  $t + T$

$$\mathbf{U}(t + T) = \mathbf{V}(t + T)\mathbf{P}^{-1} \quad (4.42)$$

Podle vztahu (4.13) můžeme psát s uvážením (4.41)

$$\mathbf{U}(t + T) = \mathbf{U}(t)\mathbf{Z} = \mathbf{V}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Z} \quad (4.43)$$

Ze vztahu (4.42) lze vyjádřit  $\mathbf{V}(t + T)$  jako

$$\mathbf{V}(t + T) = \mathbf{U}(t + T)\mathbf{P} \quad (4.44)$$

a po dosazení vztahu (4.43) dostaneme

$$\mathbf{V}(t + T) = \mathbf{V}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{P} \quad (4.45)$$

S uvážením převodu do kanonického tvaru (4.40) platí

$$\mathbf{V}(t + T) = \mathbf{V}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{P} = \mathbf{V}(t)\mathbf{\Lambda} \quad (4.46)$$

Pro  $i$ -tý sloupec matice  $\mathbf{V}(t + T)$  platí

$$\mathbf{v}_i(t + T) = \lambda_i \mathbf{v}_i(t) \quad (4.47)$$

Z tohoto vztahu je možné analyzovat stabilitu systému, neboť platí, že pokud modul vlastního čísla  $\lambda_i$  bude větší než jedna, pak amplituda bude narůstat, neboť vztah (4.47) vyjadřuje následující periodu. Tento vztah popisuje modální výchylky  $\mathbf{v}_i$ , které lze zpětně transformovat na skutečné výchylky vztahem (4.41). Z toho je patrné, že pokud alespoň jedno z vlastních čísel je v absolutní hodnotě větší než jedna, pak se jedná o nestabilní systém (dané vlastní číslo se dostane po zpětné transformaci do všech výchylek).

Uvažujme nyní případ s násobnými vlastními čísly. Pak platí oproti (4.26) následující relace

$$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \vee \lambda_i = \lambda_j \quad (4.48)$$

tj. je nutné připustit i případ rovnosti vlastních čísel pro rozdílné indexy. Pak je možné psát

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \mathbf{p}_j^{*T} \mathbf{p}_i = 0, \quad \lambda_i = \lambda_j \Rightarrow \mathbf{p}_j^{*T} \mathbf{p}_i \neq 0 \quad (4.49)$$

Označme obdobně jako výše vlastní vektory  $\mathbf{p}^*$  a  $\mathbf{p}$  symboly  $\tilde{\mathbf{p}}^*$  a  $\tilde{\mathbf{p}}$ , čímž zdůrazníme, že se jedná o nenormované vlastní vektory. Obdobně jako tomu bylo ve vztahu (4.30), lze v případě násobných vlastních čísel psát

$$\tilde{\mathbf{P}}^{*T} \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{Q} \quad (4.50)$$

kde  $\mathbf{Q}$  již není diagonální matice, ale obsahuje i mimodiagonální prvky  $\tilde{\mathbf{p}}_j^{*T} \tilde{\mathbf{p}}_i \neq 0$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_1^{*T} \tilde{\mathbf{p}}_1 & & \cdots & \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \tilde{\mathbf{p}}_j^{*T} \tilde{\mathbf{p}}_j & \\ & & \vdots & \\ & & & \tilde{\mathbf{p}}_{2n}^{*T} \tilde{\mathbf{p}}_{2n} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Matici  $\mathbf{Q}$  je možné rozložit pomocí Choleského rozkladu ve tvaru

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{R} \quad (4.52)$$

Násobíme-li vztah (4.51)  $\mathbf{L}^{-1}$  zleva a  $\mathbf{R}^{-1}$  zprava pak dostaneme

$$\mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{*T} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} \quad (4.53)$$

kde symbolem  $\mathbf{P}$  označíme normovanou pravostrannou modální matici tvaru

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{R}^{-1} \quad (4.54)$$

a označíme-li  $\mathbf{P}^{*T} = \mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{*T}$  pak dostaneme transpozicí vztah pro normovanou levostrannou modální matici ve tvaru

$$\mathbf{P}^* = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{L}^{-T} \quad (4.55)$$

Tím byla provedena normalizace, a zároveň ortogonalizace vztahu (4.50) a (4.53) lze přepsat jako

$$\mathbf{P}^{*T} \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (4.56)$$

Shrneme-li postup řešení stability systémů popsaných diferenciálními rovnicemi s periodickými koeficienty podle (4.10), lze psát jednotlivé kroky následovně:

1. Zjištění matice monodromie  $\mathbf{U}(T) = \mathbf{Z}$  numerickou integrací při zadané počáteční podmínce  $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$ , můžeme pro jednoduchost zapsat postupně pro jednotlivé sloupce matice  $\mathbf{U}(t)$  následovně

$$\dot{\mathbf{u}}_1(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}_1(t), \quad \mathbf{u}_1(0) = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n,1} \Rightarrow \mathbf{u}_1(T)$$

až do  $2n$

$$\dot{\mathbf{u}}_{2n}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}_{2n}(t), \quad \mathbf{u}_{2n}(0) = \mathbf{e}_{2n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n,1} \Rightarrow \mathbf{u}_{2n}(T)$$

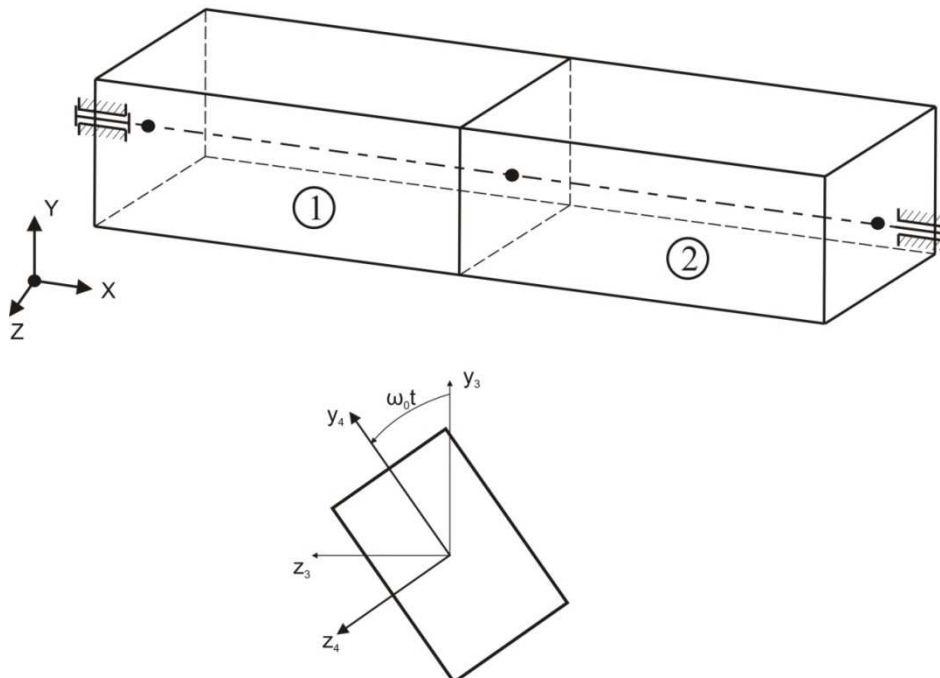
2. Určení vlastních čísel matice monodromie  $\mathbf{Z}$  z problému vlastních hodnot
 
$$(\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{0}$$
3. Analýza stability systému z absolutních hodnot vlastních čísel  $\lambda_i$  matice monodromie  $\mathbf{Z}$ , přičemž platí následující relace

$$\begin{aligned} \forall |\lambda_i| \leq 1 &\Rightarrow \textit{stabilita} \\ \exists |\lambda_i| > 1 &\Rightarrow \textit{nestabilita} \end{aligned}$$



## 4.2 Testovací příklad

Jako testovací příklad byl zvolen rotor obdelníkového průřezu, délky  $l = 2m$  diskretizovaný pouze dvěma prvky. Rotor je zleva uložen pomocí absolutně tuhého axiálně-radiálního ložiska a zprava pomocí radiálního ložiska. Takovýto rotor má 16 stupňů volnosti (ve smyslu počtu neznámých veličin v globálním vektoru  $\mathbf{q}$ ). Uvážování pouze dvou rotorových elementů bylo nutné z hlediska časové náročnosti výpočtu, neboť na tomto rotoru budeme určovat pásma nestabilit pro velký rozsah parametrů průřezu rotoru definovaný veličinou  $\kappa$  (abychom uvážili více stavů nesymetrie průřezu) a pro široké pásmo uvažovaných úhlových rychlostí  $\omega_0$  a sice v rozmezí  $\omega_0 \in (200,600)[rad.s^{-1}]$  s krokem  $\Delta\omega_0 = 5$ . Parametr  $\kappa$  určuje poměr mezi kvadratickými momenty průřezu, tj.  $\kappa = \frac{I_{\eta}}{I_z}$ , přičemž střední kvadratický moment průřezu je konstantní. Následující obrázek ukazuje uvažovaný testovací rotor obdelníkového průřezu



Obrázek 4.1 Testovací rotor

Abychom posoudili vliv deplanace průřezu na statické a dynamické chování rotoru, provedeme modální analýzu jak nerotujícího rotoru, tak rotujícího. Porovnávat budeme vlastní frekvence konečného rotorového prvku, u něhož uvažujeme vliv deplanace s modelem rotoru bez uvažování vlivu deplanace.

**Modální analýza nerotujícího hřídele**

V případě nerotujícího hřídele ( $\omega_0 = 0$ ) se pohybová rovnice

$$(\mathbf{M}_0 + \mathbf{T}^{gT} \mathbf{M}_1 \mathbf{T}^g) \ddot{\mathbf{q}} + [\omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{T}^{gT} (\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{T}^g] \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}_1 + \mathbf{T}^{gT} \mathbf{K}_2 \mathbf{T}^g] \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.57)$$

zjednoduší na tvar (transformační matice přejdou na jednotkové matice)

$$(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.58)$$

Provedením modální analýzy modelu s poměrem kvadratických průřezů  $\kappa = 0,1$  získáme vlastní frekvence, které jsou v následující tabulce porovnány s vlastními frekvencemi rotorového prvku bez uvažování deplanace. V tabulce jsou zaneseny pouze vlastní frekvence, které se liší v porovnání s rotorovým prvkem bez deplanace.

Číslo vlastní frekvence $i$	Vlastní frekvence (vliv deplanace) $\Omega_i$ [Hz]	Vlastní frekvence (bez vlivu deplanace) $\Omega_i$ [Hz]	Tvar kmitu odpovídající vlastní frekvenci $i$
7	221.6839	227.1736	Torzní tvar kmitu
12	444.8782	488.3611	Torzní tvar kmitu

**Modální analýza rotujícího hřídele**

Nyní provedeme modální analýzu pro případ rotujícího hřídele ( $\omega_0 \neq 0$ ) se stejnými průřezovými charakteristikami jako v předchozí části, ovšem pro pevně zvolený časový okamžik, a sice pro  $t = 0$  [s] a maximální uvažovanou úhlovou rychlost otáčení  $\omega_0 = 600$  [rad/s], což nám umožní porovnat modální hodnoty pouze pro jeden časový stav. Takto provedená modální analýza má pouze informativní charakter. Matematický model je dán maticovou pohybovou rovnicí ve tvaru

$$(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1) \ddot{\mathbf{q}} + [\omega_0 \mathbf{G} + (\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\Omega})] \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.59)$$

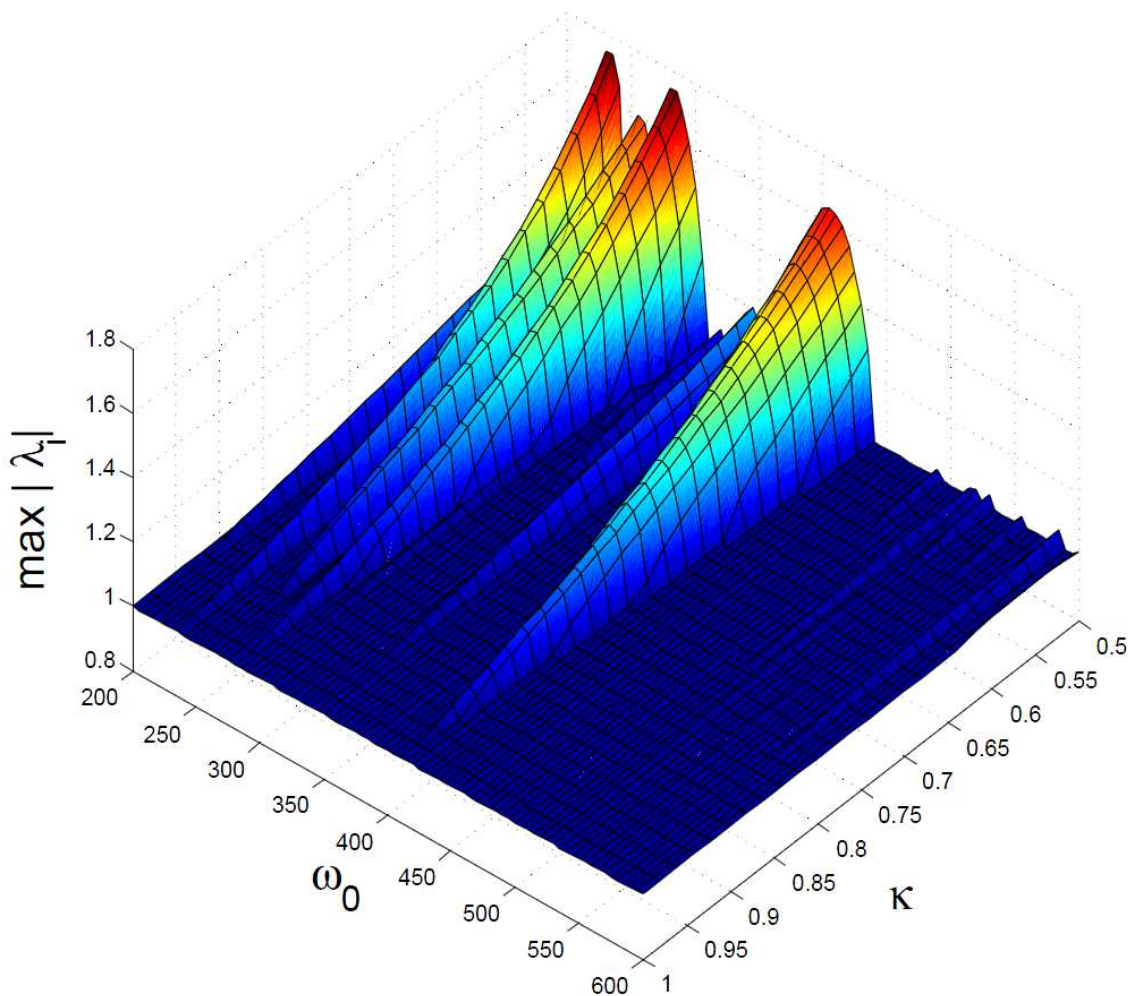
přičemž pro  $t = 0$  platí, že transformační matice je rovna jednotkové matici.

Číslo vl. frekvence $i$	Vlastní frekvence (vliv deplanace) $\Omega_i$ [Hz]	Vlastní frekvence (bez vlivu deplanace) $\Omega_i$ [Hz]	Tvar kmitu odpovídající vlastní frekvenci $i$
13	443.7393	441.7940	Torzní tvar kmitu
15	670.9230	664.1352	Torzní tvar kmitu
17	901.0013	885.7281	Torzní tvar kmitu

Z předchozího porovnání vlastních frekvencí je patrné, že vliv deplanace průřezu se projevuje pouze při torzních tvarech kmitání. Při vynuceném kmitání torzním buzením, ke kterému dochází např. v převodových ústrojích, by bylo vhodné zohlednit vliv deplanace průřezu na dynamickou odezvu.

Zabývejme se dále určování pásem nestability pro výše uvažovaný testovací rotor. Na obr. 4.2 je zobrazena plocha popisující míru nestability rotoru v závislosti na úhlové rychlosti  $\omega_0 \in \langle 200, 600 \rangle$  a

parametru  $\kappa$ , který uvažujeme v rozsahu  $\kappa \in \langle 0.5, 1 \rangle$ . Míra nestability je reprezentována maximální hodnotou vlastních čísel matice monodromie. Je-li její hodnota větší než jedna, jedná se o nestabilní systém. Z obrázku je dále patrné, že oblasti nestability se rozšiřují se zmenšujícím se  $\kappa$ , tj. se zmenšujícím se poměrem mezi stranami obdélníkového průřezu.



Obrázek 4.2 Zobrazení pásem nestabilit

## 5 Závěr

Tato práce se zabývala modelováním rotorů s rotačně nesymetrickými průřezy. V následujícím jsou stručně shrnuty jednotlivé výsledky zpracovaných kapitol předkládané diplomové práce.

V druhé kapitole byl zpracován algoritmus v prostředí Matlab pro výpočet geometrických charakteristik průřezu, s důrazem na výpočet těchto veličin pro obecný tvar průřezu rotoru.

Další důležitou veličinou při torzním namáhání rotorů je tzv. modul odporu v kroucení, který u kruhových rotorů je totožný s polárním momentem průřezu. Jeho výpočet byl proveden dvěma způsoby a navzájem zkontrolován se vztahy pro průřezy, jejichž analytické vyjádření je známé. Nejprve byl proveden výpočet této veličiny řešením parciální diferenciální rovnice metodou konečných prvků. Druhý způsob spočíval v definování energetického funkcionálu a vyřešení taktéž diskretizací na konečné prvky. Při této formulaci problému byla jakožto primární veličina určena deplanáční funkce, pomocí níž byl do rotorového prvku zaveden vliv deplanace průřezu. Ověření přesnosti této metody bylo provedeno srovnáním s deplanací elipsovitého průřezu, u kterého je možné tuto funkci vyjádřit analytickým vztahem. Tím byly zjištěny veličiny figurující v matematickém modelu nesymetrických rotorů.

Následující kapitola se zabývala odvozením matic rotorových elementů modelovaných metodou konečných prvků uvažovaných jako 1D kontinuum. Rozdíl oproti symetrickým rotorům spočíval v zavedení deplanace průřezu. Aby bylo možné uvažovat dva rozdílné případy při torzním namáhání rotorů, a sice volný krut a zamezení volného krutu, byl zaveden zkрут, jímž je možné tyto případy odlišit, jako nová neznámá ve smyslu počtu stupňů volnosti elementu.

Poslední kapitola se zabývala problematikou stability systémů popsaných diferenciálními rovnicemi s periodicky proměnnými koeficienty. Pro posouzení stability byla použita Floquetova teorie, jejíž podstata byla vysvětlena v poslední kapitole, a podle které o stabilitě systému rozhoduje modul maximálního vlastního čísla matice monodromie. Výhodou této metody je jednoduchost aplikace této teorie na model rotoru. Nevýhodou, která je ovšem vcelku zásadní, je časová náročnost výpočtu pásem nestability pro široký rozsah parametrů a úhlových rychlostí, a hlavně náročnost přesného určení hranic stability. Floquetova teorie byla aplikována na testovací příklad uvedený v poslední kapitole této práce. Byla určena pásma pro konstrukční a provozní parametry, při kterých by byl rotor nestabilní, tj. docházelo by k rezonancím. V případě stabilního systému je možné určit řešení vibrací nesymetrických rotorů numerickým výpočtem pro sestavený model z kapitoly 3. Tímto byly cíle diplomové práce splněny.

V současné době je rozvíjena na katedře mechaniky metoda, pomocí níž lze určit přesně hranice nestabilit. Tato práce by proto měla být chápána jako východisko pro přesnější analýzu stability rotujících systémů právě pomocí řešení integro-diferenciální rovnice popisující kmitání parametrických systémů.

## Literatura

- [1] **Höschl Cyril:** Pružnost a pevnost ve strojírenství, SNTL/ALFA, Praha, 1971
- [2] **Peter Hagedorn:** Technische Mechanik: Technische Mechanik 2. Festigkeitslehre, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 2006
- [3] **Young W. Kwon, Hyochoong Bang:** The Finite Element Method using Matlab, CRC Press LLC, Boca Raton - London – New York – Washington, D.C.
- [4] **Prof. K. Weinberg:** Torsion nichtkreisförmiger Vollquerschnitte - podklady k předmětu Technische Mechanik II / Elastostatik, Universität Siegen - Lehrstuhl für Festkörpermechanik, Německo, 2011
- [5] **Bittnar Zdeněk, Šejnoha Jiří:** Numerické metody mechaniky 2., ČVUT, Praha, 1992
- [6] **Dupal Jan:** Výpočtové metody mechaniky, Vydavatelství ZČU, Plzeň, 2004
- [7] **Dupal Jan:** Dynamická analýza a optimalizace těleso-nosíkových a rotorových soustav, Plzeň, 1999