

Použití Schwarz-Christoffelovy transformace ve výpočtech elektrických strojů

Jan Laksar

Katedra elektromechaniky a výkonové elektroniky
Fakulta elektrotechnická
Západočeská univerzita v Plzni
laksar@kev.zcu.cz

The Usage of Schwarz-Christoffel Transformation in Electrical Machines Calculations

Abstract – One of the methods additional to finite element analysis is presented in this paper. The Schwarz-Christoffel (SC) transformation was used to the Carters factor derivation. Today, the numerical SC transformation is used to describe the air gap magnetic field and evaluate the back EMF waveform and the torque of the machine.

Keywords – Back Electromotive Force; Carters Factor; Magnetic Flux Density; Schwarz-Christoffel Transformtion; Torque

I. ÚVOD

Použití Schwarz-Christoffelovy transformace je dnes jednou z několika metod používaných pro popis magnetického pole v elektrických strojích (jako další lze zmínit např. metodu ekvivalentního obvodu nebo tzv. „frozen permeability method“). Autor vidí možnost nasazení těchto metod zejména jako pomůcku při návrhu elektrického stroje. Samotná SC transformace byla však nasazena před mnoha desítkami let a její výstupy se v teorii elektrických strojů používají dodnes.

II. POPIS SCHWARZ-CHRISTOFFELOVY TRANSFORMACE

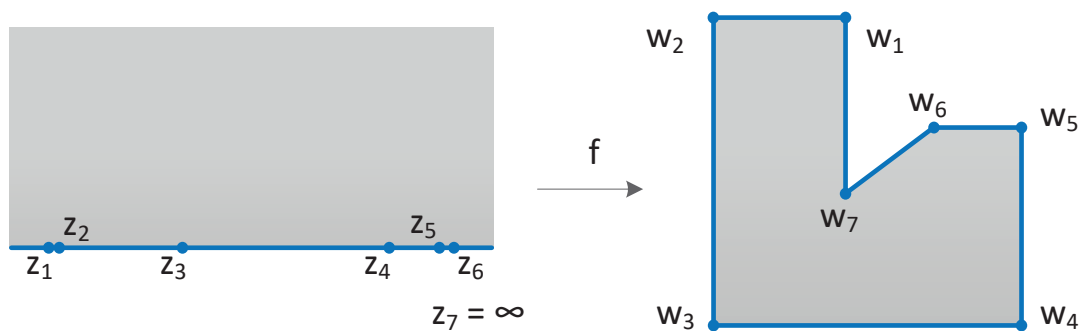
Schwarz-Christoffelova (SC) transformace je druh konformního zobrazení, které je důležitou oblastí komplexní analýzy. Základní SC transformaci lze popsat jako konformní zobrazení horní poloroviny komplexní roviny na vnitřek libovolného mnohoúhelníku. Podrobnější informace o matematickém pozadí SC transformace a konformního zobrazení obecně jsou k nalezení v [1]. Příklad principu SC transformace je uveden na Obrázku I.

Nejsložitějším úkolem SC transformace je nalezení pozice původních bodů, jejich obrazy se mají transformovat do vrcholů mnohoúhelníku v nové komplexní rovině. Úloha má pouze tři stupně volnosti, tedy pouze tři body mohou být volně zvoleny (z nichž jeden se může nacházet v nekonečnu), a tedy analyticky lze vyřešit pouze geometrii o třech bodech. Zbývajících $n - 3$ bodů musí být nalezeno pomocí řešení soustavy nelineárních rovnic.

III. POUŽITÍ SC TRANSFORMACE V ELEKTROTECHNICE

Konformní zobrazení obecně mají mnoho aplikací v teorii řešení elektrostatického pole a hydrodynamiky [1], ale lze je použít obecně pro řešení nebo popis jakýchkoliv

fyzikálních polí. Ve své podstatě je konformní zobrazení založeno na hledání transformační funkce, která zobrazí složitou geometrii ve fyzikální rovině do jednodušší



Obrázek I. Principiální schéma SC transformace [2]

geometrie v nové (tzv. kanonické) rovině. Tato transformační rovnice zároveň nahrazuje matematický popis rozložení fyzikálního pole ve fyzikální rovině. Z toho důvodu je patrné, že v elektrotechnické praxi bude vhodnější použití transformace inverzní k té zobrazené na obrázku I. Geometrie v kanonické rovině nemusí tvořit celou komplexní polorovinu, ale může to být obecně mnohoúhelník, ve kterém je možné vyřešit rozložení pole analyticky.

A. Carterův činitel

Carterův činitel hraje důležitou roli při dimenzování budícího obvodu stroje nebo při výpočtu magnetizačního proudu elektrického stroje. Celkové magnetické napětí F_m , které musí být magnetickému obvodu dodáno, aby ve vzduchové mezeře o délce δ byla zvolená magnetická indukce B_δ , je určeno jako

$$F_m = \mu_0 B_\delta k_F k_C \delta, \quad (1)$$

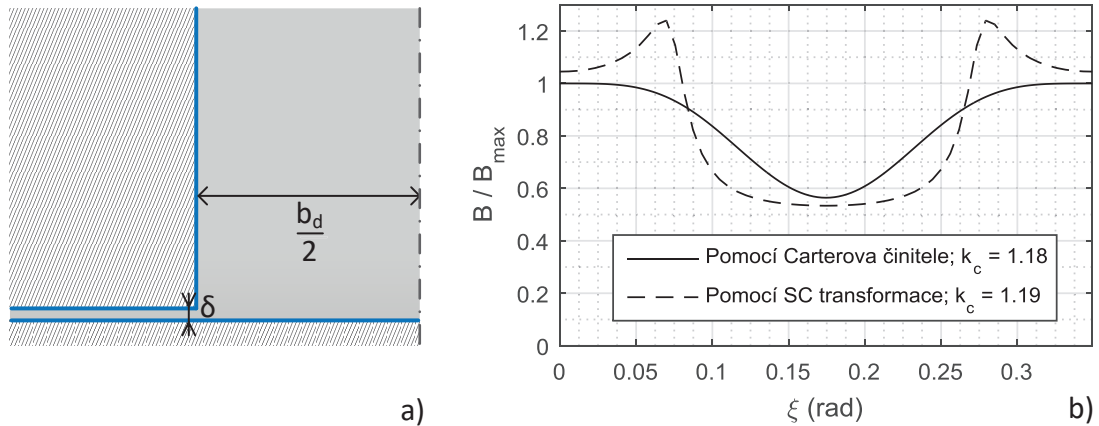
kde μ_0 je permeabilita vakua, činitel k_F je definovaný sycením stroje a k_C je Carterův činitel. Ten respektuje vliv otevření drážek na pokles indukce ve vzduchové mezeře pomocí prodloužení magnetické vzduchové mezery na délku $\delta' = k_C \delta$. Carterův činitel může pro otevřené drážky přesahovat hodnotu 1,6 a při drážkování rotoru i statoru tak výrazně ovlivnit celkové nároky na buzení stroje a další parametry, jako účinnost a ztráty.

Definice Carterova činitele se poprvé objevila na přelomu 18. a 19. století, kdy zveřejnil F. W. Carter několik publikací zaměřených na popis magnetického pole ve vzduchové mezeře pod otevřením drážky (např. [3]). Využil k tomu konformní zobrazení poloviny symetrické fiktivní obdélníkové drážky o nekonečné hloubce a drážkové rozteči s šířkou drážky $b_d \gg \delta$ v komplexní rovině (viz Obrázek II a)).

Výpočet je úspěšně aplikován na všechny druhy elektrických strojů a Carterův činitel je dodnes používán ve všech knihách zaměřených na návrh elektrických strojů a lze pomocí něj odvodit také průběh pulzace indukce pod otevřením drážky. Situace je však rozdílná v případě strojů s povrchově umístěnými permanentními magnety, kdy z pohledu vnějšího magnetického pole (např. pole statorového vinutí) má vzduchová mezera délku $\delta + h_m$, kde h_m je výška permanentního magnetu. Zároveň je permanentní magnet jako zdroj magnetického toku umístěn přímo pod drážkou, což vede k odlišnému chování rozložení magnetické indukce.

B. Průběh indukce pod otevřením drážky stroje s povrchovými magnety

Zahrnutí reálné geometrie drážky vede na nárůst počtu bodů řešeného polygonu a nemožnost vyřešit rozložení pole analyticky. Naštěstí byl v roce 1994 vytvořen SC Toolbox [2] pro MATLAB® a díky verzi 2.3 představené v roce 2005 je možné řešit rozložení pole složitých geometrií, jakou vzduchová mezera elektrických strojů je. Celý postup použití SC Toolboxu je popsán v [4]. Na Obrázku II b) je zobrazeno porovnání průběhu pulzace na základě Carterova činitele a pomocí numerické SC transformace.



Obrázek II. Fiktivní drážka použitá k výpočtu Carterova činitele (a) a porovnání pulzace magnetické indukce pod otevřením reálné drážky stroje s povrchovými magnety (b)

Použitím numerické SC transformace lze také vypočítat velikost Carterova činitele, který není příliš odlišný výsledku obdrženého klasickým výpočtem. Co se značně odlišuje je průběh pulzace, který ovlivňuje další parametry jako indukované napětí nebo moment stroje.

C. Spřažený tok a indukované napětí

Aplikací pulzací vlivem drážkování na základní vlnu magnetické indukce (odvozenou z průběhu magnetického napětí vinutí nebo z rozložení indukce vlivem permanentních magnetů, popř. kombinací obojího) lze zjistit rozložení indukce ve vzduchové mezeře pro jakoukoliv polohu rotoru stroje a následně určit celkový spřažený tok a indukované napětí jako

$$\psi = \frac{N_c}{a} \cdot \frac{2p}{c} \sum_{i=1}^{n_{cp^c}} l \frac{D_1 - \delta}{2} \int_{\theta_{oi}}^{\theta_{oi} + \frac{\beta\pi}{p}} B_\delta(\theta_m) d\theta_m, \quad (2)$$

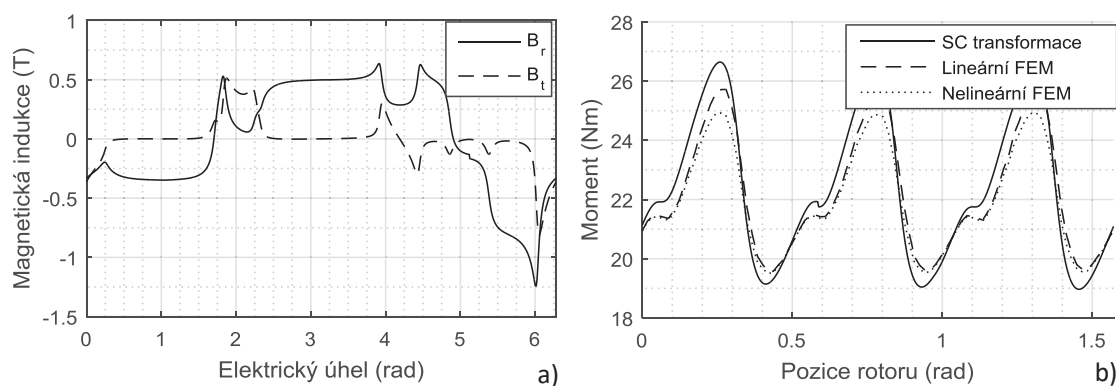
$$u_i(t) = - \frac{d\psi(t)}{dt}. \quad (3)$$

D. Elektromagnetický moment

Velkou výhodou použití SC transformace je 2D řešení pole, díky kterému lze kromě radiální složky pole (používané v předchozích odstavcích) vyčíslit také tečnou složku. Kombinaci obou složek lze následně využít k určení různých momentů stroje v závislosti na uvažovaných aktivních částech jako

$$M = \frac{l}{\mu_0} \left(\frac{D_1 - \delta}{2} \right)^2 \int_0^{2\pi} (B_r \cdot B_t) d\theta_m, \quad (4)$$

Průběh obou složek indukce zatíženého synchronního stroje s permanentními magnety a výsledný moment jsou zobrazeny na obrázku III.



Obrázek III. Výsledná radiální a tečná složka indukce (a) a průběh momentu (b)

IV. ZÁVĚR

Článek slouží jako přehled použití matematického aparátu konformních zobrazení, konkrétně Schwarz-Christoffelovy transformace, v teorii a návrhu elektrických strojů. Analytické použití této metody má velmi úzké možnosti uplatnění, přesto bylo před více než 100 lety použito a dodnes je používáno ve formě Carterova činitele k určení ekvivalentní vzduchové mezery vlivem pulzace magnetické indukce. Dnes je převážně využívána numerická CS transformace, s jejíž pomocí lze určit nejen radiální složku indukce a indukované napětí, ale také tečnou složku, která je potřebná pro výpočet okamžitého momentu stroje. Metodu je po úpravě vhodné použít zejména při návrhu stroje ke kontrole nspř. Pulzace momentu a obsahu vyšších harmonických.

PODĚKOVÁNÍ

Tento článek vznikl za podpory interního projektu na podporu studentských vědeckých konferencí SVK-2018-005 a projektu SGS-2018-009: Výzkum a vývoj perspektivních technologií v elektrických pohonech a strojích III.

LITERATURA

- [1] HAMÁČEK, Martin. *Konformní zobrazení a zobecněná Schwarzova Christoffelova transformace*. Plzeň, 2015. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta aplikovaných věd. Katedra matematiky
- [2] DRISCOLL, Tobin. *Schwarz-Christoffel Toolbox User's Guide: Version 2.3*. Newark, DE: Dep. Math. Sci., Univ. Delaware, 2005
- [3] CARTER, F.W. *Note on air-gap and interpolar induction*. *Electrical Engineers, Journal of the Institution of*, 1900, vol. 29, no. 146, s. 925-933. doi: 10.1049/jiee-1.1900.0095
- [4] ABBASZADEH, Karim, REZAEI ALAM, Farhad. *On-Load Field Component Separation in Surface-Mounted Permanent-Magnet Motors Using an Improved Conformal Mapping Method*. *IEEE Transactions on Magnetics*, Feb. 2016, vol. 52, no. 2, s. 1-12. doi: 10.1109/TMAG.2015.2493150