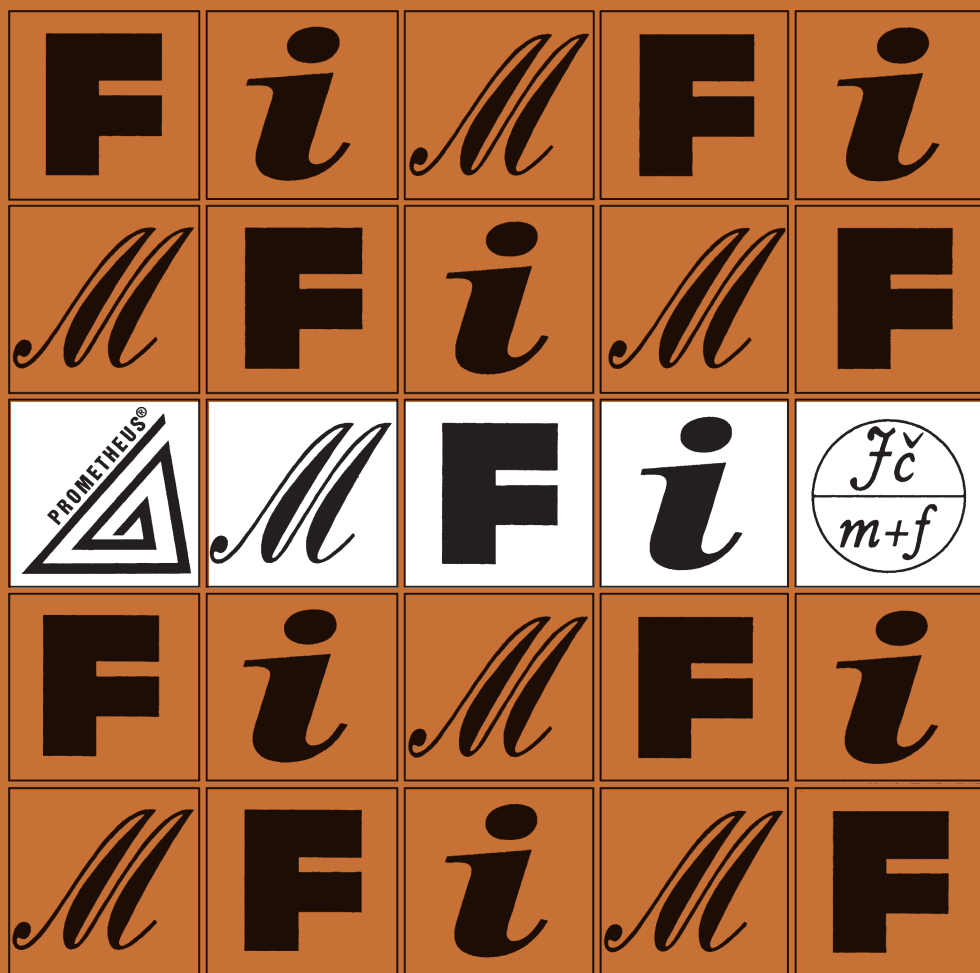


# MATEMATIKA 1 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



# MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách  
Ročník XXVIII (2019), číslo 1

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

## Redakce:

Oldřich Lepil – vedoucí redaktor a redaktor pro fyziku

Jaroslav Švrček – redaktor pro matematiku

Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Lukáš Richterek – redaktor WWW stránek

## Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Štěpán Hubálovský, Růžena Kolářová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Emanuel Svoboda, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Bohumil Vybíral

## Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

## Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

## OBSAH

### MATEMATIKA

<i>T. Hrdlička, J. Švrček: O spirální podobnosti</i>	1
<i>L. Honzík, J. Hora: Dvě netradiční užití Hornerova schématu</i>	11
<i>V. Moravcová, J. Robová, K. Pazourek: Procházky (nejen) po krychli</i>	18
<i>D. Vojtovičová: Mezipředmětové vztahy v matematice</i>	30
Zajímavé matematické úlohy	39

### FYZIKA

<i>R. Holubová: Využití mezipředmětových vztahů k motivaci žáků</i>	45
<i>L. Dvořák, Z. Kamarádová: Udělejte si sami: jednoduché aplikace polovodičů (nejen) pro ZŠ</i>	55

### INFORMATIKA

<i>P. Töpfer: Aritmetický průměr posloupnosti (Úlohy z MO kategorie P, 37. část)</i>	67
<i>F. Frank, J. Frank: Podpora informatického myšlení s využitím Lego robotů</i>	74

## O spirální podobnosti

TOMÁŠ HRDLIČKA – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem článku, který je určen především středoškolským učitelům matematiky, kteří pracují s nadanými žáky, je prezentace *spirální podobnosti* – speciálního zobrazení v rovině složeného z otočení a stejnoolehlosti. V článku jsou uvedeny některé její základní vlastnosti a dále aplikace při efektivním řešení některých určovacích a důkazových planimetrických úloh. Jeho významnou součástí je soubor řešených i neřešených úloh, které s danou tematikou úzce souvisejí. K pochopení uvedené problematiky nejsou potřebné znalosti přesahující rámec učiva středoškolské matematiky.

### Definice (spirální podobnost)

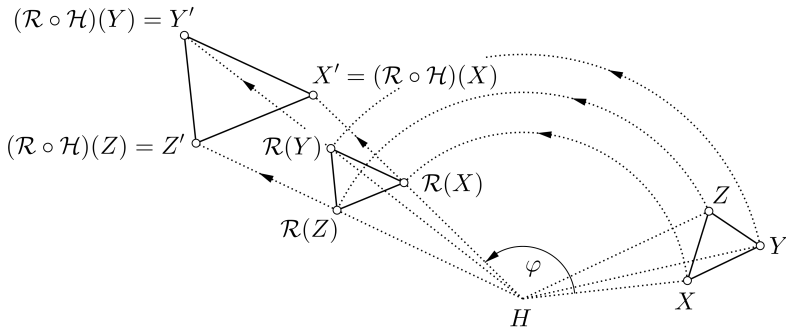
Nechť  $\mathcal{R}(H, \varphi)$  je otočení v rovině se středem  $H$  a orientovaným úhlem  $\varphi$  a  $\mathcal{H}(H, k)$  nechť je stejnoolehlost v téže rovině se středem  $H$  a koeficientem  $k \neq 0$ . Složené zobrazení  $\mathcal{R}(H, \varphi) \circ \mathcal{H}(H, k)$  nazýváme *spirální podobnost* a značíme jej  $\mathcal{S}(H, k, \varphi)$ . Bod  $H$  nazveme *středem spirální podobnosti*. Řekneme, že útvary  $U, U'$  jsou *spirálně podobné*, existuje-li spirální podobnost  $\mathcal{S}$ , která zobrazí útvar  $U$  na  $U'$ , tj.  $\mathcal{S}: U \rightarrow U'$  (obr. 1).

Spirální podobnost je tedy reprezentována uspořádanou trojicí  $(H, k, \varphi)$  a opačně – zadáním této trojice je spirální podobnost jednoznačně určena.

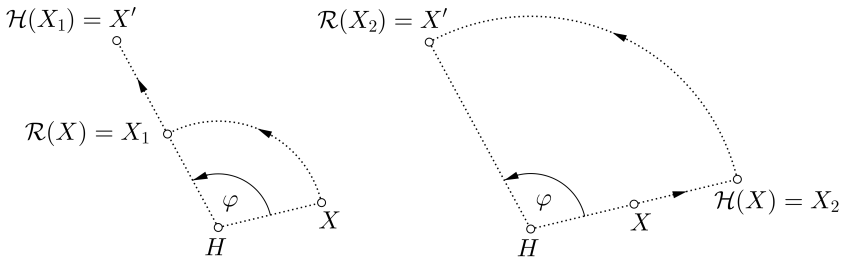
*Poznámka 1.* Protože složení stejnoolehlosti a otočení (v rovině) s tímž středem je komutativní, tj. platí

$$\mathcal{H}(H, k) \circ \mathcal{R}(H, \varphi) = \mathcal{R}(H, \varphi) \circ \mathcal{H}(H, k),$$

lze spirální podobnost zavést analogicky s opačným pořadím obou skládaných zobrazení, viz obr. 2.



Obr. 1



Obr. 2

*Poznámka 2.* Každé dva přímo podobné<sup>1)</sup> útvary v rovině jsou zobrazeny jeden na druhý pomocí spirální podobnosti nebo posunutí. Uvedené tvrzení je možno najít např. v [1].

### Vlastnosti spirální podobnosti

Spirální podobnost  $\mathcal{S}(H, k, \varphi)$  je přímá podobnost a má tedy všechny vlastnosti podobných zobrazení. Jejím (jediným) samodružným bodem je střed  $H$ . Speciálními případy spirální podobnosti jsou tak

- stejnoolehlost  $\mathcal{H}(H, k)$ , jestliže  $\varphi = n \cdot 360^\circ$ , kde  $n$  je celé číslo;
- otočení  $\mathcal{R}(H, \varphi)$ , jestliže  $k = 1$ .

Následující tvrzení jsou často užívaná při řešení konkrétních úloh.

<sup>1)</sup> *Přímá podobnost* rovinných útvarů je definována analogicky jako přímá shodnost, tj. zachovává orientaci značení vrcholů libovolného trojúhelníku, viz např. [3].

**Věta 1** (o jednoznačném určení spirální podobnosti)

Nechť  $A, B, C, D$  jsou po dvou různé body v rovině, které nejsou vrcholy rovnoběžníku. Pak existuje právě jedna spirální podobnost  $\mathcal{S}$  taková, že  $\mathcal{S}: A \rightarrow C, B \rightarrow D$  a  $\overline{AB} \rightarrow \overline{CD}$ <sup>2)</sup>.

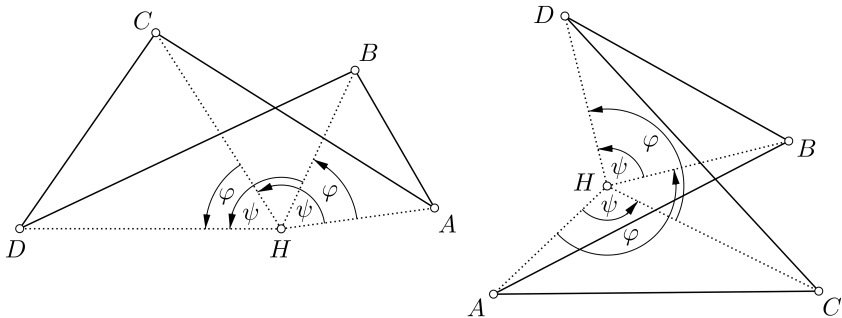
Důkaz tohoto tvrzení je možno najít např. v [4].

*Poznámka 3.* Tvrzení věty 1 lze rozšířit na všechny polohy bodů  $A, B, C, D$  v rovině s výjimkou případu, kdy  $ABDC$  je rovnoběžník (v takovém případě je uvažované zobrazení posunutím, které není speciálním případem spirální podobnosti).

Následující dvě věty zde uvádíme bez důkazů. Zájemci z řad čtenářů mohou důkazy obou vět najít např. v [2].

**Věta 2** (duplicita spirální podobnosti)

Nechť  $A, B, C, D$  jsou po dvou různé body v rovině a  $H$  bod této roviny takový, že spirální podobnost  $\mathcal{S}$  se středem  $H$  zobrazuje úsečku  $AB$  na  $CD$ . Pak existuje spirální podobnost  $\mathcal{S}'$  s tímž středem  $H$  zobrazující úsečku  $AC$  na  $BD$  (obr. 3).



Obr. 3

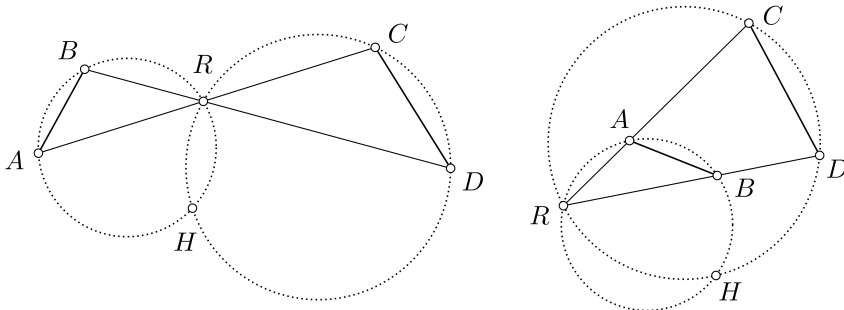
Z praktického hlediska popisuje výše uvedená věta skutečnost, že ke každé spirální podobnosti zobrazující  $\triangle HAB$  na  $\triangle HCD$  existuje rovněž (jiná) spirální podobnost zobrazující  $\triangle HAC$  na  $\triangle HBD$ . Na obr. 3 jsou uvedeny dva z možných případů polohy bodů  $A, B, C, D$  v rovině.

Následující věta poskytuje návod, jakým způsobem lze pro dva podobné útvary v rovině určit střed  $H$  spirální podobnosti, jež převádí jeden útvar na druhý.

<sup>2)</sup>Dále často využíváme zápis zobrazení útvarů „po bodech“.

**Věta 3** (konstrukce středu spirální podobnosti)

Nechť  $ABCD$  je čtyřúhelník, v němž  $AC \cap BD = \{R\}$ . Střed spirální podobnosti zobrazující  $\overline{AB}$  na  $\overline{CD}$  je průsečík  $H$  ( $H \neq R$ ) kružnic opsaných trojúhelníkům  $ABR$  a  $CDR$ . Mají-li tyto kružnice právě jeden společný bod (dotýkají-li se), pak  $H = R$  (obr. 4).



Obr. 4

K předchozí větě jsou na obr. 4 opět uvedeny dva případy čtyřúhelníků  $ABCD$ . Výše uvedené poznatky jsou postačující pro řešení úloh uvedených v tomto článku a můžeme tak přejít k reálným aplikacím spirální podobnosti.

**Aplikace spirální podobnosti při řešení konkrétních úloh**

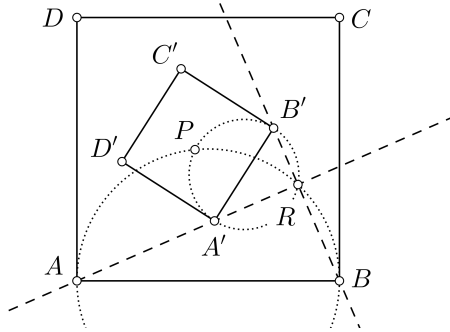
Dále prezentujeme praktické užití spirální podobnosti. Uvádíme čtyři řešené úlohy na které navazuje série úloh neřešených. K řešení užíváme vlastnosti uvedené výše a běžně známé geometrické vztahy.

**Úloha 1**

Je dán trojúhelník  $ABC$  a bod  $P$  ležící na oblouku kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$  mezi vrcholy  $B$  a  $C$ , na kterém neleží vrchol  $A$ . Paty kolmic z bodu  $P$  na strany trojúhelníku  $BC$  a  $AC$  označme po řadě  $X$  a  $Y$ . Je-li  $M$  střed úsečky  $AB$  a  $N$  střed úsečky  $XY$  (obr. 5), pak platí  $|\sphericalangle MNP| = 90^\circ$ . Dokažte.

*Řešení.* Nejprve najdeme vhodnou spirální podobnost. Ze zadání plyne, že platí  $|\sphericalangle PXB| = |\sphericalangle PYA|$ . Navíc body  $A$  a  $B$  leží na oblouku kružnice nad úsečkou  $CP$ , tudíž  $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|$ , proto jsou trojúhelníky  $BPX$  a  $APY$  podobné. Pak existuje právě jedna spirální podobnost  $\mathcal{S}$  taková, že





Obr. 6

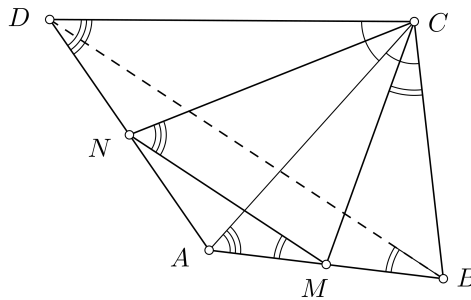
*Řešení.* Jelikož  $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDA|$  a  $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle ACD|$ , jsou trojúhelníky  $ABC$  a  $DAC$  podobné, tj. spirálně podobné v  $S$  (viz pozn. 2) se středem  $C$ . Ze zachování dělicího poměru ( $M = S_{AB}$ ,  $N = S_{DA}$ ) plyne též  $S(M) = N$ , a tedy  $S: \overline{BM} \rightarrow \overline{AN}$ . Užitím duplicity spirální podobnosti (věta 2)  $S': \overline{BA} \rightarrow \overline{MN}$ , kde středem této spirální podobnosti  $S'$  je opět bod  $C$ . Podle věty *sus* tak dostáváme  $\triangle NMC \sim \triangle ABC$ .

Zřejmě dále platí (obr. 7)

$$|\sphericalangle AMN| + |\sphericalangle NMC| + |\sphericalangle CMB| = 180^\circ$$

a navíc z trojúhelníku  $MBC$  plyne

$$|\sphericalangle BCM| + |\sphericalangle MBC| + |\sphericalangle CMB| = 180^\circ.$$



Obr. 7

Z podobnosti trojúhelníků  $NMC$  a  $ABC$  plyne  $|\sphericalangle NMC| = |\sphericalangle MBC|$ , tudíž rozdílem předchozích dvou rovností obdržíme  $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle AMN|$ .



Konečně, je-li úsečka  $MN$  střední příčkou trojúhelníku  $ABD$ , platí

$$|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle DBA|,$$

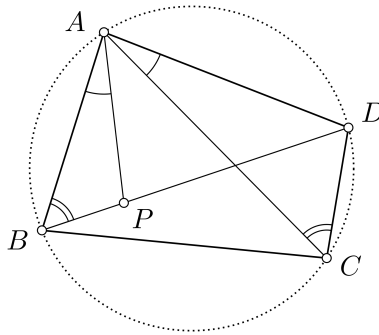
a proto  $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle DBA|$ , což jsme chtěli dokázat.

**Úloha 4** (Ptolemaiova věta)

Dokažte tvrzení: Nechť  $ABCD$  je tětivový čtyřúhelník. Označíme-li délky jeho stran  $AB, BC, CD, DA$  po řadě  $a, b, c, d$  a délky úhlopříček  $AC, BD$  po řadě  $e, f$ , pak platí

$$ac + bd = ef.$$

*Řešení.* Nejprve určíme vhodnou podobnost dvou trojúhelníků. Podle předpokladu je čtyřúhelník  $ABCD$  tětivový, tedy body  $B, C$  leží na stejném kružnicovém oblouku  $AD$  (obr. 8), proto  $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$ . Označme  $P$  bod úhlopříčky  $BD$ , pro který platí  $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BAP|$ .



Obr. 8

Z věty *uu* o podobnosti trojúhelníků tak plyne  $S: \triangle ABP \rightarrow \triangle ACD$ . Využitím duplicity spirální podobnosti (věta 2) ihned dostáváme také podobnost trojúhelníků  $ABC$  a  $APD$ , tj.  $S': \triangle ABP \rightarrow \triangle ACD$ . Z obou výše uvedených podobností pak dostáváme

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|CD|}, \quad \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|PD|}{|BC|},$$

tj.  $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BP|$ ,  $|AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |PD|$ .

Sečtením obou posledních rovností získáme po úpravě

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot (|BP| + |PD|) = |AC| \cdot |BD|,$$

což (při zavedeném značení) znamená  $ac + bd = ef$ . Tím je důkaz ukončen.

Dále čtenářům nabízíme čtyři neřešené úlohy k procvičení uvedené problematiky. Ke každé z nich připojujeme návod k jejich řešení.

### Úloha 5

Jsou dány dvě rovnoběžky a bod  $O$ , který leží na ose pásu jimi omezeného. Vedeme-li v téže rovině bodem  $O$  přímkou  $p$  různoběžnou s danými rovnoběžkami, protne je postupně v bodech  $X$  a  $Y$ . Nechť  $Z$  je vrchol rovnostranného trojúhelníku  $XYZ$ . Otočíme-li přímkou  $p$  v rotaci se středem  $O$  o plný úhel, opíše vrchol  $Z$  uvažovaného trojúhelníku jistou množinu bodů. Určete tuto množinu.

[NÁVOD. Pro konkrétní polohu trojúhelníku  $XYZ$  lze určit spirální podobnost zobrazující vrcholy  $X$  nebo  $Y$  na vrchol  $Z$ . Pomocí vlastností podobných zobrazení lze určit hledanou množinu bodů.]

### Úloha 6 (Simsonova přímka)

Nechť  $ABC$  je daný trojúhelník a  $P$  je libovolný bod na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ . Nechť  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  jsou paty kolmic z bodu  $P$  po řadě na strany  $AB$ ,  $BC$  a  $AC$ . Dokažte, že  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  leží na jedné přímce, tzv. Simsonově přímce.

[NÁVOD. Pro případ, kdy  $P$  je identický s jedním z vrcholů trojúhelníku  $ABC$ , je vlastnost zřejmá. V opačném případě lze bez újmy na obecnosti uvažovat polohu bodu  $P$  na oblouku kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$  mezi body  $A$  a  $B$ , na kterém neleží vrchol  $C$ . Z vlastností těživých čtyřúhelníků je možno dokázat podobnost trojúhelníků  $PAZ$  a  $PBY$  a následně využitím duplicity spirální podobnosti (věta 2) určit zobrazení přímky  $AB$  na  $ZY$ . Dokažte, že bod  $X$  náleží přímce  $ZY$ .]

### Úloha 7 (USA TST 2000)

Nechť  $ABCD$  je těživý čtyřúhelník, bod  $P$  je průsečík jeho úhlopříček a  $E$ ,  $F$  jsou po řadě paty kolmic z bodu  $P$  na strany  $AB$ ,  $CD$ . Nechť bod  $K$  je střed strany  $BC$  a  $L$  střed  $AD$ . Dokažte, že  $EF \perp KL$ .

[NÁVOD. Jelikož  $ABCD$  je těživý čtyřúhelník, jsou trojúhelníky  $ABP$  a  $CDP$  podobné. Zobražíme-li bod  $P$  v osově souměrnosti s osou  $CD$ ,

pak lze pomocí spirální podobnosti dokázat podobnost trojúhelníků  $ABP$  a  $LKF$ . Analogicky lze dokázat podobnost trojúhelníků  $CDP$  a  $KLE$ . Kolmost  $KL$  a  $EF$  plyne ze shodnosti trojúhelníků  $LKF$  a  $LKE$ .]

### Úloha 8

Nechť  $ABC$  je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu  $C$ , dále nechtě  $M$  je střed strany  $AB$  a  $D$  je takový bod strany  $BC$ , že platí

$$|CD| = |CM|.$$

Označme  $P$  ( $P \neq B$ ) průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům  $BCM$  a  $BDA$ . Dokažte, že  $P$  leží na ose úhlu  $ABC$ .

[NÁVOD. Podle věty 3 existuje „vhodná“ spirální podobnost  $\mathcal{S}$ . Užitím duplicity (věta 2) pak  $\mathcal{S}' : \overline{AM} \rightarrow \overline{DC}$ . Jelikož body  $A$  a  $C$  leží na kružnici se středem  $M$ , jsou úsečky  $AM$  a  $DC$  shodné. Na závěr uplatníme vlastnosti výšek trojúhelníku.]

### Další poznatky o spirální podobnosti

Závěrem tohoto příspěvku uvádíme pro zájemce další zajímavá tvrzení, která úzce souvisejí s využitím spirální podobnosti při řešení řady dalších planimetrických úloh. Konkrétní příklady aplikací a zadání úloh souvisejících s tematikou je možno nalézt v [2] a [5].

Přímým důsledkem věty 3 je např. následující tvrzení.

#### Věta 4

Jsou-li v rovině úsečky  $AB$  a  $CD$  spirálně podobné vzhledem ke středu  $H$  a průsečík  $R$  přímk  $AC$  a  $BD$  je různý od bodu  $H$ , pak jsou čtyřúhelníky  $ABHR$  a  $CDHR$  tětíkové.

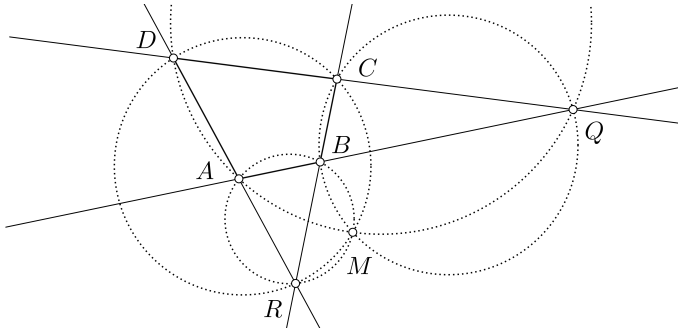
Se spirální podobností je úzce spjat mj. také tzv. *Miquelův bod čtyřúhelníku*<sup>3)</sup>, viz následující věta.

#### Věta 5 (Miquelův bod čtyřúhelníku)

Nechť  $ABCD$  je konvexní čtyřúhelník, v němž platí  $AB \cap DC = \{Q\}$ ,  $AD \cap BC = \{R\}$ . Kružnice opsané trojúhelníkům  $AQD$ ,  $BQC$ ,  $ARB$ ,  $DRC$  se protínají v jediném bodu  $M$ , tzv. Miquelově bodu čtyřúhelníku  $ABCD$  (obr. 9).

*Poznámka 4.* Uvažované kružnice ve větě 5 se nazývají *Miquelovy kružnice*.

<sup>3)</sup>Zavedení pojmu lze dohledat např. v [4].



Obr. 9

Vztah Miquelova bodu ke spirální podobnosti prezentuje následující tvrzení.

### Věta 6

Nechť  $M$  je Miquelův bod čtyřúhelníku  $ABCD$ . Pak  $M$  je střed spirálních podobností zobrazujících  $\overline{AB} \rightarrow \overline{DC}$ ,  $\overline{AD} \rightarrow \overline{BC}$ .

Věty 5 a 6 jsou přímými důsledky věty 2 o duplicitě spirální podobnosti a věty 3 o konstrukci středu spirální podobnosti.

### Literatura

- [1] *Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.*: Geometry revisited. New mathematical library, Mathematical Association of America, Washington, 1967.
- [2] *Hrdlička, T.*: Spirální podobnost v planimetrii. Bakalářská práce, PřF UP, Katedra algebry a geometrie, Olomouc, 2018.
- [3] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky (10. vydání). Prometheus, Praha, 2008.
- [4] *Zhao, Y.*: Cyclic Quadrilaterals – The Big Picture [online]. Winter Camp, c2009 [cit. 2018-10-23]. Dostupné na: [http://yufeizhao.com/olympiad/cyclic\\_quad.pdf](http://yufeizhao.com/olympiad/cyclic_quad.pdf)
- [5] *Zhao, Y.*: Three Lemmas in Geometry. [online]. Massachusetts Institute of Technology, Winter Camp, 2010 [cit. 2018-10-23]. Dostupné na: [http://yufeizhao.com/olympiad/three\\_geometry\\_lemmas.pdf](http://yufeizhao.com/olympiad/three_geometry_lemmas.pdf)

# Dvě netradiční užití Hornerova schématu

LUKÁŠ HONZÍK – JAROSLAV HORA

Pedagogická fakulta ZČU, Plzeň

Hornerovo schéma, nesoucí jméno britského matematika *Williamu George Hornera* žijícího na konci 18. a na začátku 19. století, je název algoritmu sloužícího mimo jiné k relativně efektivnímu určování funkčních hodnot polynomů. Ačkoliv se může zdát, že Horner byl tím, kdo tento postup objevil, není tomu tak. Již ve 13. století byla obdobná metoda pro práci s polynomy známá čínským matematikům. Horner ji o 500 let později pouze uvedl do evropské matematiky [1, 2].

## Zavedení Hornerova schématu

Před samotným představením Hornerova schématu a jeho aplikace uvedeme několik tvrzení, z nichž budeme vycházet. Přitom v dalším textu budeme předpokládat, že se nacházíme v oboru integrity  $(T[x], +, \cdot)$ , kde  $(T, +, \cdot)$  je některé z komutativních číselných těles.

Mějme dva polynomy  $f(x) \neq 0$  a  $g(x)$ , kde  $\text{st}[g(x)] \geq 1$ , pak je zřejmé, že existují dva polynomy  $Q(x)$  a  $R(x)$  takové, že platí

$$f(x) = Q(x) \cdot g(x) + R(x).$$

Přitom navíc vyžadujeme, aby platilo  $R(x) = 0$ , anebo  $\text{st}[R(x)] < \text{st}[g(x)]$ . Oba polynomy  $Q(x)$  a  $R(x)$  jsou pak určeny jednoznačně.

Pokud by polynom  $g(x)$  byl pouze lineární, přesněji normovaný do tvaru  $g(x) = x - \alpha$ , bude podle předchozího tvrzení platit

$$f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + R(x),$$

kde  $R(x) = 0$ , anebo  $\text{st}[R(x)] = 0$ . Z těchto podmínek plyne, že polynom  $R(x)$  je pouze konstanta a můžeme provést přeznačení  $R(x) = r$ .

Po dosazení tedy obdržíme rovnici

$$f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r,$$

ze které již bezprostředně plyne  $f(\alpha) = r$ . Tím se dostáváme k tzv. větě Bézoutově:

- 1) Jestliže pro polynom  $f(x)$  platí  $f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r$ , potom hodnota tohoto polynomu v bodě  $\alpha$  je  $f(\alpha) = r$ .
- 2) Bod  $\alpha$  je nulovým bodem polynomu  $f(x)$ , právě když polynom  $x - \alpha$  dělí polynom  $f(x)$ .

Je zřejmé, že ověření zmíněné dělitelnosti polynomu  $f(x)$  polynomem  $g(x) = x - \alpha$ , popřípadě určení funkční hodnoty polynomu  $f(x)$  v bodě  $\alpha$  nemusí být jednoduchou záležitostí. V prvním případě je nutné provést dělení polynomu polynomem, ve druhém dosadit hodnotu  $\alpha$ . Celý proces jde ale celkem dobře zjednodušit a zapsat jej právě pomocí Hornerova schématu.

Postačí, když v rovnici

$$f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r$$

položíme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

a

$$Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \\ & = (b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) \cdot (x - \alpha) = \\ & = b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (b_1 - \alpha b_2) x^2 + (b_0 - \alpha b_1) x^1 + (r - \alpha b_0). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů příslušných mocnin proměnné  $x$  dostáváme soustavu rovnic pro neznámé koeficienty polynomu  $Q(x)$  a pro neznámou konstantu  $r$ , když koeficienty polynomu  $f(x)$  považujeme za dané parametry.

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \Rightarrow b_{n-1} = a_n \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - \alpha b_{n-1} \Rightarrow b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - \alpha b_{n-2} \Rightarrow b_{n-3} = a_{n-2} + \alpha b_{n-2} \\ &\dots \\ a_2 &= b_1 - \alpha b_2 \Rightarrow b_1 = a_2 + \alpha b_2 \\ a_1 &= b_0 - \alpha b_1 \Rightarrow b_0 = a_1 + \alpha b_1 \\ a_0 &= r - \alpha b_0 \Rightarrow r = a_0 + \alpha b_0 \end{aligned}$$

Rovnice z pravého sloupce již jen zapišme přehledněji do tabulky, kterou v průběhu algoritmu budeme postupně zaplňovat.

	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
		$\alpha b_{n-1}$	$\alpha b_{n-2}$	$\dots$	$\alpha b_2$	$\alpha b_1$	$\alpha b_0$
$\alpha$	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$\dots$	$b_1$	$b_0$	$r$

Do prvního řádku Hornerova schématu zapišeme všechny koeficienty  $a_i$  (včetně těch, které jsou rovny nule) polynomu  $f(x)$ , do posledního řádku prvního sloupce hodnotu  $\alpha$ . Ve druhém sloupci sepíšeme do posledního řádku hodnotu koeficientu  $a_n$ , neboť pro ni platí rovnost  $a_n = b_{n-1}$ . Následuje násobení  $\alpha \cdot b_{n-1}$ , jehož výsledek je zapsán ve druhém řádku třetího sloupce. Sečtením tohoto součinu s koeficientem  $a_{n-1}$  obdržíme koeficient  $b_{n-2}$ . Obdobným způsobem postupně vyplníme další sloupce tabulky, čímž obdržíme všechny doposud neznámé koeficienty  $b_i$  polynomu  $Q(x)$  a hodnotu konstanty  $r$ .

Poznamenejme ještě, že hodnotu  $r$  můžeme interpretovat podle potřeby dvěma různými způsoby, a to podle Bézoutovy věty, jak nyní ještě jednou opakujeme.

Pokud vyjde  $r$  rovno nule, je to především informace o tom, že bod  $\alpha$  je nulovým bodem polynomu  $f(x)$ . Jinými slovy polynom  $f(x)$  je beze zbytku dělitelný lineárním polynomem  $x - \alpha$ . Naopak je-li  $r \neq 0$ , nemůže být polynom  $f(x)$  dělitelný polynomem  $x - \alpha$ , a tedy ani bod  $\alpha$  nemůže být nulovým bodem  $f(x)$ . Zároveň s tím je jasné, že ona nenulová hodnota  $r$  udává zbytek, který bychom při dělení  $f(x) : (x - \alpha)$  dostali. Spolu s touto informací jsme obdrželi také všechny koeficienty (neúplného) podílu  $Q(x)$ .

Podíváme-li se na věc jiným způsobem, můžeme hodnotu  $r$  brát nikoliv jako zbytek po dělení polynomů, nýbrž jako funkční hodnotu polynomu  $f(x)$  v bodě  $x = \alpha$ .

Bez ohledu na to, jakou interpretaci vybereme, popřípadě kterou potřebujeme, jde v obou případech o zjevné zjednodušení výpočtů. Pokud bychom prováděli dělení polynomu polynomem, bylo by zapotřebí postupovat obvyklým způsobem, kdy je vedoucí člen polynomu  $f(x)$  dělen vedoucím členem polynomu  $x - \alpha$  a následně je zpětným roznásobením do počítán rozdíl, který je v podstatě zbytkem po tomto částečném dělení. Opakováním těchto kroků až do chvíle, kdy je zbytek po dělení nižšího stupně než polynom  $x - \alpha$ , bychom se dostali k podílu  $Q(x)$  a zbytku po dělení  $r$ . V případě určení funkční hodnoty  $f(\alpha)$  bychom zase museli po-

čítat mocniny hodnoty  $\alpha$  do stupně  $n$ , tyto mocniny násobit příslušnými koeficienty a vzniklé součiny nakonec ještě sčítat.

### Praktické výpočty

Užití Hornerova schématu pro úplnost ukažme na několika jednoduchých ilustračních příkladech polynomů nad různými číselnými obory.

#### Příklad 1

Ukažte, že bod  $\alpha = -2$  je nulovým bodem polynomu

$$f(x) = 12x^5 + 26x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 4.$$

*Řešení.* Do prvního řádku Hornerova schématu vypíšeme koeficienty polynomu  $f(x)$ , do posledního řádku prvního sloupce zapíšeme hodnotu  $-2$  a provedeme popsáný algoritmus.

	12	26	6	5	0	-4
		-24	-4	-4	-2	4
-2	12	2	2	1	-2	<b>0</b>

Vzhledem k tomu, že vyšlo  $r = 0$ , můžeme v souladu s Bézoutovou větou prohlásit, že  $\alpha = -2$  je skutečně nulovým bodem zadaného polynomu.

#### Příklad 2

Určete funkční hodnotu polynomu

$$f(x) = x^5 - 4x^3 - 3x^2 + 6x - 24$$

v bodě  $\alpha = -4$ .

*Řešení.* Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu.

	1	0	-4	-3	6	-24
		-4	16	-48	204	-840
-4	1	-4	12	-51	210	<b>-864</b>

Funkční hodnota  $f(-4)$  je rovna  $-864$ .



### Příklad 3

Určete funkční hodnotu polynomu

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + (9 + 4i)x + (1 - 8i)$$

v bodě  $\alpha = i$ .

*Řešení.* Tentokrát je Hornerovo schéma výsledkem výpočtů nad tělesem komplexních čísel.

	1	-3	9 + 4i	1 - 8i
		i	-1 - 3i	-1 + 8i
i	1	-3 + i	8 + i	<b>0</b>

Hledaná funkční hodnota  $f(i)$  je rovna 0. Platí tedy, že bod  $\alpha = i$  je nulovým bodem daného polynomu  $f(x)$  neboli že  $x - i$  dělí polynom  $f(x)$ .

### Převod čísla z číselné soustavy o základu $z \neq 10$ do desítkové soustavy

Převod čísla z číselné soustavy se základem různým od 10 do desítkové soustavy je jedním z netradičních, ale ve výsledku vcelku logických využití Hornerova schématu.

Na začátku jen připomeňme, že obvykle je převod realizován postupem, který může být žákům a studentům známý z hodin výpočetní techniky či matematiky a vystačí si při něm i bez Hornerova schématu. I přes svou názornost ale může být výpočetně náročný. Stačí si uvědomit, že každé číslo  $a$  v dané soustavě o základu  $z$  jde zapsat v podobě rozvinutého zápisu

$$a = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z^1 + a_0 \cdot z^0,$$

kde mocniny základu  $z$  představují jednotlivé řády (tedy v desítkové soustavě bychom mluvili o jednotkách, desítkách, stovkách atd.) a  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$  a  $a_0$  jsou číslice čísla  $a$ , tj. celá čísla od 0 do  $z - 1$  včetně. Mámeli tedy zadáno kupříkladu číslo 2563 v soustavě o základu 8, znamená to, že se jedná o celé číslo.

$$2563_8 = 2 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 1024 + 320 + 48 + 3 = 1395.$$

Tento postup však obsahuje, podobně jako určování funkční hodnoty polynomu postupným dosazováním za proměnnou, velké množství zbytečného umocňování.

Při užití Hornerova schématu se této nepříjemnosti dá poměrně elegantně vyhnout. K tomu je zapotřebí uvážit, že zmíněný rozvinutý zápis čísla  $a$  není nic jiného, než jistý polynom, kde se na místech koeficientů vyskytují jednotlivé číslice čísla  $a$ , zatímco proměnná  $z$  je jednoznačně dána základem příslušné číselné soustavy. Jinými slovy, při převodu čísla  $z$  nedesítkové číselné soustavy se budeme snažit o zjištění funkční hodnoty polynomu odpovídajícího rozvinutému zápisu čísla  $a$ , v němž za proměnnou dosadíme hodnotu základu soustavy  $z$  [3].

Užijeme-li tento postup na převod čísla  $2563_8$ , bude Hornerovo schéma vypadat následovně:

	2	5	6	3
		16	168	1392
8	2	21	174	<b>1395</b>

#### Příklad 4

Převedte číslo  $11045$  ze soustavy o základu  $7$  do soustavy desítkové.

*Řešení.* Do prvního řádku Hornerova schématu zapíšeme jednotlivé číslice daného čísla, do posledního řádku prvního sloupce napíšeme základ  $z = 7$  a provedeme známý algoritmus.

	1	1	0	4	5
		7	56	392	2772
7	1	8	56	396	<b>2777</b>

Číslo  $11045_7$  má v desítkové soustavě zápis  $2777$ .

#### Výpočet derivace polynomu v daném bodě

Oproti předchozímu problému převodu čísla  $z$  nedesítkové soustavy do soustavy desítkové je pro určování hodnoty derivace polynomu v bodě  $\alpha$  nejprve nutná jistá teoretická příprava. Vyjdeme z nám již dobře známé rovnice  $f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r$ . Obě strany této identity derivujeme, na levé straně dostaneme derivaci polynomu  $f'(x)$ , na pravé straně uplatníme pravidlo o derivaci součinu (zároveň mějme na paměti, že  $r$  je konstantní funkce, jejíž derivace je rovna nule). Zderivovaná identita bude vypadat takto:

$$f'(x) = Q'(x) \cdot (x - \alpha) + Q(x).$$

Nyní dosadíme-li do rovnice za proměnnou  $x$  hodnotu  $\alpha$ , bude mít součin  $Q'(x) \cdot (x - \alpha)$  hodnotu 0 a můžeme psát  $f'(\alpha) = Q(\alpha)$ . Ke zjištění hodnoty derivace polynomu  $f(x)$  v bodě  $\alpha$  tedy stačí určit funkční hodnotu neúplného podílu  $Q(x)$  v bodě  $\alpha$ . Jinak řečeno, v praktickém užití je nutné aplikovat na zadaný polynom  $f(x)$  dvakrát za sebou Hornerovo schéma a hodnota  $r$ , která vzejde z jeho druhého použití, je hledanou hodnotou  $f'(\alpha)$  [4, 5].

### Příklad 5

Určete hodnotu derivace polynomu

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

v bodě  $\alpha = 3$ .

*Řešení.* Jak bylo řečeno, pro zjištění hodnoty  $f'(3)$  stačí dvakrát po sobě aplikovat na polynom  $f(x)$  algoritmus Hornerova schématu. Zmíněné dvojí aplikování Hornerova schématu můžeme bez problému zapsat do jedné tabulky.

	1	-5	3	1
		3	-6	-9
3	1	-2	-3	-8
		3	3	
3	1	1	0	

Pro lepší orientaci v tabulce upřesněme, že ve třetím řádku jsme při první aplikaci obdrželi koeficienty polynomu

$$Q(x) = x^2 - 2x - 3,$$

na který jsme uplatnili druhou aplikaci. Výsledek, který nás zajímá, se však nachází na poslední pozici v posledním řádku, a sice  $f'(3) = 0$ .

Na závěr provedme ještě ověření právě zjištěného výsledku tradičním způsobem, tedy určením derivace podle známých pravidel pro derivování polynomů a následným dosazením.

Derivace polynomu  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$  je  $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$  a v bodě  $\alpha = 3$  má hodnotu  $f'(3) = 27 - 30 + 3 = 0$ .

## Literatura

- [1] *O'Connor, J. J., Robertson, E. F.*: Horner Biography. MacTutor History of Mathematics archive [online]. University of St Andrews, St. Andrews, 2018 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Horner.html>
- [2] *Wikipedie*: Otevřená encyklopedie: William George Horner [online]. c2018 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/William\\_George\\_Horner](https://en.wikipedia.org/wiki/William_George_Horner)
- [3] *Hanák, D.*: Hornerovo schéma. Itnetwork.cz: Ajfácká sociální síť a materiálová základna pro C#, Java, PHP, HTML, CSS, JavaScript a další [online]. Praha, c2018 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: <https://www.itnetwork.cz/algoritmy/matematicke/algoritmus-matematicke-hornerovo-schema>
- [4] Horner's Method. Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. Alexander Bogomolny, c1996–2017 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Calculus/HornerMethod.shtml#>
- [5] Horner's Rule for a Polynomial and Its Derivative. Computational Physics with C++ [online]. University of Utah, Salt Lake City, Utah, 2003, 2007-08-17 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: <http://www.physics.utah.edu/~detar/lessons/c++/array/node4.html>

# Procházky (nejen) po krychli

VLASTA MORAVCOVÁ – JARMILA ROBOVÁ – KAREL PAZOUREK

MFF UK, Praha – MFF UK, Praha – Gymnázium, Třebon

Prostorová představivost je důležitou součástí matematického vzdělávání na základních a středních školách. To dokládá i *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, kde dovednost orientovat se v prostoru patří k očekávaným výstupům vzdělávání v matematice již na prvním stupni [1, s. 32] a řešení úloh na prostorovou představivost se předpokládá i na druhém stupni základní školy. Ani střední školy nezapomínají na rozvíjení této dovednosti, například *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* uvádí, že vzdělávání v matematice vede žáka k rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti [2, s. 22].

Na základě potřeby soustavněji rozvíjet prostorovou představivost, která vyplynula ze zkušeností z výuky matematiky na Gymnáziu v Třeboni i z výuky budoucích učitelů matematiky na MFF UK, jsme se rozhodli v rámci v projektu OP VVV – SC2/SC5 *Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností* zaměřit na rozvíjení této dovednosti, a to formou, která je přístupná žákům základní i střední školy a není náročná na čas.

## Prostorová představivost

Prostorová představivost patří k základním schopnostem člověka a je ovlivňována nejen jeho vrozenými vlohami, ale také prostředím, výchovou i zkušenostmi. Tato představivost souvisí se schopností jedince vytvářet si představy o prostorových objektech a vztazích mezi nimi, přičemž se nemusí vždy jednat o objekty, se kterými se již setkal či které reálně existují. Pojem prostorové představivosti z hlediska výuky matematiky souvisí s geometrickou představivostí. Například Šarounová [7] chápe prostorovou představivost jako soubor schopností, souvisejících s představami jedince o prostoru, tvarech a vzájemných vztazích mezi předměty i jednotlivými částmi těla. Prostorovou představivost s geometrickým obsahem pak nazývá geometrickou představivostí. Obdobně Molnár, Perný a Stopenová [3] nazírají na prostorovou představivost potřebnou ve stereometrii jako na geometrickou prostorovou představivost. Tímto pojmem označují soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru. Podrobný přehled různých vymezení pojmů souvisejících s prostorovou představivostí uvádí Molnár [4].

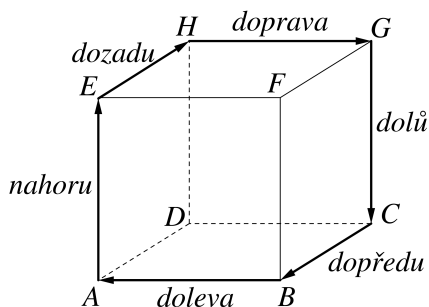
Prostorová představivost zahrnuje komplex schopností, které mají u různých jedinců odlišnou úroveň. Někteří autoři hovoří o složkách prostorové představivosti. Juščáková (2002, cit. v [3]) identifikovala tyto její složky: pasivní prostorovou orientaci související s určením polohy, vizuální paměť spočívající ve schopnosti manipulovat s obrazy objektů v paměti, aktivní prostorovou orientaci související se zpracováním představ o pohybu objektů, mentální manipulaci (percepční předvídání, schopnost tvořit novou představu objektu po jeho transformaci), manuální manipulaci a technickou tvořivost v prostorové představivosti, tj. schopnost aplikovat ji za určitých podmínek.

K dispozici jsou různé druhy úloh, které přispívají k rozvoji prostorové představivosti, např. [3]. Na základě této inspirace jsme se rozhodli se-

stavit vlastní sadu úloh<sup>1)</sup> s postupně narůstající obtížností a vyzkoušet ji ve výuce. Připravené úlohy by měly přispět k rozvíjení prostorové představivosti, zejména jejích dvou výše uvedených složek, a sice prostorové orientace a mentální manipulace s prostorovými objekty. Úlohy byly zamýšleny jako mentální rozcvičky na úvod hodin matematiky věnovaných stereometrii. Vzhledem k plánované formě jsme je navrhli tak, aby nezažaly více než 10 minut (s výjimkou první hodiny, v níž je třeba zavést terminologii a vysvětlit princip řešení úloh).

## Procházky po krychli

V úlohách pracujeme s krychlí  $ABCDEFGH$ , jejíž vrcholy jsou popsány obvyklým způsobem. Stěny označíme jako přední ( $ABFE$ ), zadní ( $DCGH$ ), levá ( $ADHE$ ), pravá ( $BCGF$ ), dolní ( $ABCD$ ) a horní ( $EFGH$ ). Používáme šest směrů pohybu po orientovaných hranách krychle (obr. 1) – doleva (posun o vektor  $\vec{BA}$ ), doprava (posun o vektor  $\vec{HG}$ ), nahoru (posun o vektor  $\vec{AE}$ ), dolů (posun o vektor  $\vec{GC}$ ), dopředu (posun o vektor  $\vec{CB}$ ) a dozadu (posun o vektor  $\vec{EH}$ ). V obtížnějších úlohách přidáváme pohyb po stěnových úhlopříčkách (napříč stěnou) a po tělesových úhlopříčkách (napříč krychlí). Připravené úlohy jsme rozdělili do pěti typů A až E, které se liší způsobem zadání i obtížností, která je postupně gradována. Obtížnost úloh se vždy stupňuje také v rámci série úloh jednoho typu.



Obr. 1 Popis krychle a směry pohybu

<sup>1)</sup>V tomto článku uvádíme jen několik ukázek, kompletní sada úloh je dostupná v příloze, viz: „Procházky po krychli“

## Úlohy typu A

Úlohy A1 až A17 z první série zadáváme následovně. Žákům sdělíme, ve kterém vrcholu krychle se na začátku procházky nacházíme. Poté diktujeme nebo zapisujeme na tabuli posloupnost směrů pohybu a žáci si představují trasu, po níž se pohybujeme. Výsledkem je koncový bod, do kterého dorazíme, ale můžeme se ptát i na posloupnost všech vrcholů, kterými jsme prošli. V prvních šesti úlohách se pohybujeme pouze po hranách krychle.

### Zadání úlohy A1

Začínáme ve vrcholu  $A$ . Pohybujeme se: dozadu – vpravo – nahoru. Jaký je koncový bod?

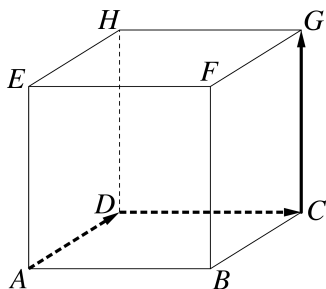
*Řešení.* Koncový bod je  $G$  (posloupnost všech navštívených bodů je  $A, D, C, G$ ), obr. 2.

Počínaje úlohou A7 přidáváme do zadání pohyb po stěnových úhlopříčkách, od úlohy A12 po tělesových úhlopříčkách. Pro porovnání obtížnosti se podíváme ještě na poslední úlohu typu A.

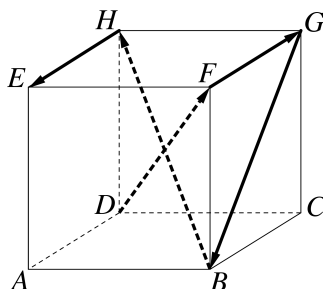
### Zadání úlohy A17

Začínáme ve vrcholu  $D$ . Pohybujeme se: napříč krychlí – dozadu – napříč pravou stěnou – napříč krychlí – dopředu. Jaký je koncový bod?

*Řešení.* Koncový bod je  $E$  (posloupnost všech navštívených bodů je  $D, F, G, B, H, E$ ), obr. 3.



Obr. 2 Řešení úlohy A1



Obr. 3 Řešení úlohy A17

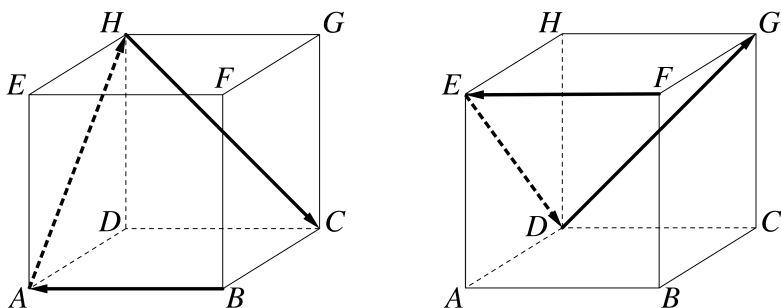
## Úlohy typu B

V úlohách B1 až B8 není zpočátku známý počáteční bod trasy, pouze zadáme posloupnost směrů pohybu. Úkolem žáků je určit počáteční i koncový bod. V prvních pěti úlohách se pohybujeme pouze po hranách krychle, ve zbývajících třech i po úhlopříčkách. Řešení těchto úloh již není vždy jednoznačné – záleží pak na učiteli, zda chce po žácích najít jedno, anebo všechna řešení.

### Zadání úlohy B7

Pohybujeme se: doleva – napříč levou stěnou – napříč zadní stěnou. Jaký je počáteční a koncový bod?

*Řešení.* Úloha má dvě řešení – buď je počátečním bodem  $B$  a koncovým  $C$ , nebo je počátečním bodem  $F$  a koncovým  $G$ , obr. 4.



Obr. 4 Obě řešení úlohy B7

## Úlohy typu C, D a E

V dalších typech úloh pracujeme navíc se vzdálenostmi. V šesti úlohách typu C, které jsou analogií úloh typu A, uvažujeme krychli o hraně délky dvě jednotky. V každém kroku se vždy posuneme o jednotku délky v daném směru pohybu. To nám umožní dostat se i do středu hrany, stěny nebo krychle. V těchto úlohách se nepohybujeme po úhlopříčkách.

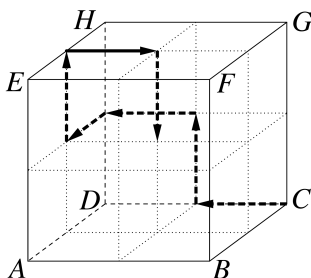
### Zadání úlohy C3

Začínáme ve vrcholu  $C$ . Pohybujeme se: doleva – nahoru – doleva – dopředu – nahoru – doprava – dolů. Jaký je koncový bod?

*Řešení.* Koncový bod je střed krychle (posloupnost všech navštívených



bodů je  $C, S_{CD}, S_{CH}, S_{DH}, S_{DE}, S_{EH}, S_{EG}, S_{AG}$ ),<sup>2)</sup> obr. 5.



Obr. 5 Řešení úlohy C3

Úlohy typu D a E se od typu C liší jen ve zvolené délce hrany krychle. Ve čtyřech úlohách typu D pracujeme s krychlí o hraně délky 4 jednotky, ve třech úlohách typu E uvažujeme hranu dlouhou 10 jednotek. V každém kroku se pak posouváme v daném směru pohybu vždy o daný počet jednotek.

### Zařazení úloh do výuky

Typy A, B a D<sup>3)</sup> výše uvedených úloh byly v říjnu až prosinci roku 2017 zařazeny do výuky třetího ročníku čtyřletého Gymnázia v Třeboni, sekundy a sexty šestiletého Gymnázia Na Pražačce v Praze a druhého ročníku bakalářského studia učitelství matematiky na MFF UK v Praze.

V každé skupině pracoval vyučující s úlohami trochu jinak. Vždy však byl žákům a studentům nejprve představen model krychle, vysvětleny směry pohybu a při zavedení úloh nového typu byla vzorově vyřešena první úloha.

V sekundě šestiletého gymnázia (odpovídá 9. ročníku ZŠ) žáci v rámci jedné vyučovací hodiny řešili úlohy typu A a B. Zpočátku měli k dispozici obrázky s vyznačenými směry pohybu, který byl nakreslen na tabuli, a několik drátěných modelů krychle. Jelikož žáci s úlohami typu A neměli potíže, byl nejprve zakryt obrázek, posléze i schovány modely krychlí.

<sup>2)</sup> Symbolem  $S_{XY}$  značíme střed úsečky  $XY$ . Můžeme však body označovat slovy jako střed hrany  $XY$ , střed přední/zadní/... stěny apod.

<sup>3)</sup> Původní verze sady úloh, která byla testována ve výuce, obsahovala pouze tři typy úloh označené A, B, C, přičemž typ C odpovídal současnému typu D – tedy jednalo se o úlohy s krychlí o hraně délky 4 jednotky.

S úlohami typu B již většina žáků měla potíže, proto jim byly opět vráceny drátěné modely.

V předmaturitním a maturitním ročníku gymnázií bylo s úlohami pracováno obdobným způsobem. V období, kdy žáci probírali stereometrii, bylo úlohám věnováno cca 5 až 10 minut ze začátku několika vyučovacích hodin. Postupně byly vyzkoušeny úlohy všech tří typů. S úlohami typu A neměli žáci větší potíže, u úloh typu B se již objevovaly chyby, nejtěžší byly úlohy typu D, v nichž chybovala více než polovina žáků.

Žáci třetího ročníku měli zpočátku k dispozici obrázek i drátěný model krychle, u úloh typu A byl postupně schován nejprve obrázek, poté model. K řešení úloh typu B a D jim byl ponechán model. Zadání úloh typu D měli napsané na tabuli, mohli tak úlohy řešit vlastním tempem.

Žáci maturitního ročníku měli rovněž zpočátku k dispozici obrázek i drátěný model, po prvních dvou úlohách jim byl schován obrázek (a nesměli použít ani vlastní), na další hodině již neměli k dispozici ani model krychle, pouze nový typ úloh byl vždy vysvětlen s obrázkem nebo s modelem. Ukázalo se, že v okamžiku, kdy nemají k dispozici ani obrázek ani model krychle, mají tendenci používat vlastní pomůcku (gumu ve tvaru kvádrů, pozorování hran stolu či reproduktoru, manipulace rukama apod.) a stále většina z nich řešila úlohy typu A a B bez obtíží, chyby se objevovaly jen výjimečně. Byli tedy vyzváni, aby dali ruce za záda a zavřeli oči. Teprve v tuto chvíli pro ně řešení úloh začalo být komplikovanější, na druhou stranu je tato aktivita velmi bavila. Ve třídě byli také dva slabší žáci, kteří si s úlohami od A7 dále bez modelu krychle neporadili. Nejprve tedy zkusili řešit úlohy za stejných podmínek jako ostatní, ale při kontrole výsledku dostali vždy na chvíli do ruky model, aby se ke správnému řešení dobrali také vlastními silami. Úlohy typu D byly vyzkoušeny též s postupným omezováním pomůcek, ale ukázalo se, že bez modelu nebo obrázku je bez chyby vyřešit skutečně jen málokdo. Podobně jako u žáků třetího ročníku se osvědčilo zadání úloh typu D psát na tabuli, ne jen diktovat. K zápisu byly úspěšně využity také zkratky vycházející z anglických pojmenování směrů – viz dále.

Se studenty druhého ročníku učitelství bylo pracováno podobným způsobem jako s žáky vyšších ročníků gymnázií. Po dobu dvou měsíců řešili úlohy všech tří typů, vždy cca 10 minut v úvodu výuky *Základů prostorové geometrie*. Na úvod každého semináře byla studentům předvedena jedna úloha s využitím promítnutého obrázku krychle s vyznačenými směry, poté byl obrázek skryt. Po celou dobu byly na katedře k dispozici také dva pa-

pírové modely krychle, jeden z nich o hraně dlouhé 4 cm měl na stěnách nakreslenou čtvercovou síť s čtverečky o straně délky 1 cm. První problémy se objevily u úlohy A3<sup>4)</sup> a dále u úloh, v nichž byl zapojen také pohyb po úhlopříčkách. Stejně jako pro gymnazisty, úlohy typu B byly obtížnější než A a nejtěžší byly úlohy typu D, k jejichž řešení si někteří posluchači vypůjčili model krychle, popřípadě používali vlastní pomůcky připomínající tvar krychle.

Ve všech skupinách se potvrdilo, že úlohy jsou řazeny se stupňující se obtížností, a to jak s ohledem na jednotlivé typy A, B, D, tak s ohledem na řazení úloh v rámci jednoho typu. Úlohy A1 až A6 nečinily v žádném ročníku vážnější problémy, první komplikace nastaly u zapojení pohybu po úhlopříčkách. Mladší žáci navrhovali, že by jim pomohla změna formulace – namísto *napříč stěnou/krychlí* by uvítali slova *po úhlopříčce stěny/krychle*. Při řešení úloh typu B se již žáci sekundy, ale i někteří starší žáci včetně studentů VŠ neobešli bez modelu. Úlohy typu D byly pro většinu žáků i studentů bez obrázku nebo modelu téměř neřešitelné.

Při testování bylo vyzkoušeno několik možností, jak zvýšit obtížnost úloh. Nejsnadnější pro žáky bylo řešení s možností pozorování obrázku s vyznačenými směry pohybu. Výbornou pomůckou byl také model krychle, přičemž drátěný model se osvědčil jako názornější pro řešení úloh typu D (umožňuje modelovat pohyb uvnitř krychle). Na základě pozorování práce žáků nelze jednoznačně říci, zda pro ně byl užitečnější obrázek nebo model, obě pomůcky fungovaly jako dostatečná podpora pro nalezení řešení. Pokud chtěl vyučující úlohy zkomplikovat, schoval obrázek i model krychle a zakázal použití vlastní pomůcky. V tuto chvíli měli žáci i studenti tendenci vyhledávat očima předmět tvarově příbuzný krychli a pozorovat jej, někteří začali modelovat procházku po krychli pomocí rukou. Dalším stupněm obtížnosti tedy je zákaz použití rukou (např. lze žáky požádat, aby dali ruce za záda) a nejvyšším omezením je požadavek řešit úlohy se zavřenými očima. Teprve v tuto chvíli lze říci, že žáci museli pracovat skutečně čistě mentálně a jen jediní byli schopni takto vyřešit úlohy typu B a D.

## Další inspirace

Představené úlohy lze propojovat s dalšími předměty či oblastmi matematiky. Rovněž nás inspirují k různým obměnám, ztíženým variantám a problémovým otázkám pro nadanější žáky.

---

<sup>4)</sup>Možná proto, že se jedná o první úlohu s více kroky.

## ***Zapojení cizího jazyka***

Při písemném zadání výše uvedených úloh se nabízí zavedení zkratk pro jednotlivé směry pohybu. Jelikož některé pokyny v češtině začínají stejným písmenem (*dopředu*, *dozadu* apod.), navrhuje se zapojení cizího jazyka. Většinou současných žáků nečiní potíže použít angličtinu.

Pro šest základních pohybů ve směrech orientovaných hran krychle můžeme zavést například zkratky L (*left* – doleva), R (*right* – doprava), U (*up* – nahoru), D (*down* – dolů), F (*forward* – dopředu), B (*back* – dozadu).<sup>5)</sup> Podobně lze využít vhodná slovíčka z němčiny a jistě bychom našli i další vhodné jazyky.

## ***Užití vektorové algebry***

Bystřejší žáci možná sami postřehnou, že si mnohá zadání procházek po hranách krychle mohou značně zjednodušit. Pokud máme v libovolném pořadí vykonat v rámci jedné úlohy například třikrát pohyb vlevo a dvakrát vpravo, je to totéž, jako jít jednou vlevo. Pět pokynů tak můžeme nahradit pouze jedním. Nejedná se vlastně o nic jiného než skládání opačných vektorů. Největšího zjednodušení docílíme užitím tohoto principu u úloh typu C, D a E.

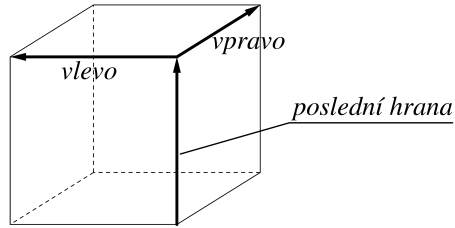
## ***Relativní směr pohybu***

Procházku po krychli si můžeme představit také z pohledu pozorovatele, který se po dané krychli pohybuje. V okamžiku, kdy dojde po hraně do určitého vrcholu, vždy může dále pokračovat buď vlevo, nebo vpravo (za předpokladu, že se nesmí vracet zpět), viz obr. 6. Tento typ úloh lze žákům demonstrovat na modelu krychle, který budeme postupně natáčet vždy do takové polohy, v níž bude hrana, kterou právě procházíme, umístěna přibližně ve směru pohledu žáků. V připravené sadě úloh jsou tímto způsobem zpracovány úlohy F1 až F4.<sup>6)</sup>

---

<sup>5)</sup>Například úlohu A1 lze pak zadat pomocí následujícího kódu (po sdělení počátečního bodu): B–R–U; úlohu D1 můžeme zadat (po sdělení počátečního bodu) kódem 2R–3U–2R–1B–1U.

<sup>6)</sup>Za inspiraci děkujeme doc. RNDr. Antonínu Jančaříkovi, Ph.D., z Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

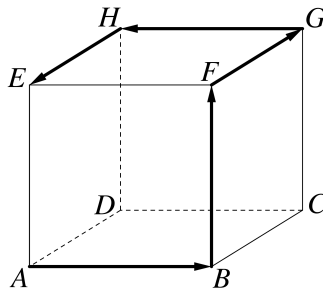


Obr. 6 Relativní směr pohybu

### Zadání úlohy F1

Jdeme z  $A$  do  $B$ , z vrcholu  $B$  poté pokračujeme: vlevo – vpravo – vlevo – vlevo. Jaký je koncový bod?

Řešení. Koncový bod je  $E$  (posloupnost všech navštívených bodů je  $A, B, F, G, H, E$ ), obr. 7.



Obr. 7 Řešení úlohy F1

### Procházky po tetraedru

Výše popsaný relativní směr pohybu lze aplikovat na každý mnohostěn, v jehož vrcholech se setkávají vždy tři hrany.<sup>7)</sup> V úlohách G1 až G4 pracujeme tímto způsobem s pravidelným čtyřstěnem. V principu však nezáleží na tom, zda je čtyřstěn pravidelný, je možné, že někteří žáci si lépe představí jiný, například pravouhlý čtyřstěn.<sup>8)</sup>

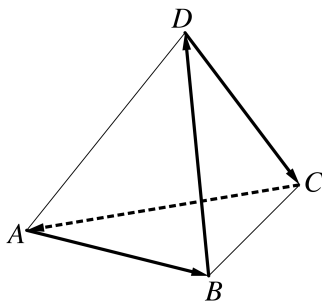
<sup>7)</sup>Pro mnohostěny, v jejichž vrcholech se setkávají vždy čtyři hrany, lze analogicky zavést termíny *vlevo*, *rovně*, *vpravo*.

<sup>8)</sup>Pravouhlým čtyřstěnem rozumíme například těleso  $ABDE$  získané z krychle  $ABCDEFGH$ , tedy trojboký jehlan, jehož jedna boční hrana je kolmá k rovině podstavu.

### Zadání úlohy G1

Jdeme z  $A$  do  $B$ , z vrcholu  $B$  poté pokračujeme: vlevo – vpravo – vlevo. Jaký je koncový bod?

**Řešení.** Koncový bod je  $A$  (posloupnost všech navštívených bodů je  $A, B, D, C, A$ ), obr. 8.



Obr. 8 Řešení úlohy G1

### Námět na problémové otázky

Máme-li ve třídě šikovné žáky, můžeme úlohy doplnit problémovými otázkami. Například pro úlohy typu A: „Vycházíme z bodu  $A$  a můžeme zadat tři směry pohybu. Ve kterých bodech může procházka skončit, pokud se pohybujeme a) pouze po hranách krychle, b) po hranách i úhlopříčkách krychle?“ Budeme-li uvažovat pouze pohyb po hranách tělesa, můžeme tuto otázku položit i u procházek typů C, D a E. Problém lze modifikovat také pro úlohy typů F a G: „Jdeme z  $A$  do  $B$ , z vrcholu  $B$  poté pokračujeme třemi kroky. Do kterých vrcholů se můžeme dostat?“

### Závěr

Autoři příspěvku vyzkoušeli ve výuce úlohy zde představené jako typ A, B a D (úlohy typu D s hranou o délce 4 byly původně označeny jako typ C). První dva typy jsou převzaté z práce [3] a již dříve byly experimentálně ověřeny s žáky ve věku 9–14 let [5]. Obdobně jako Perný [6] jsme v mnoha případech pozorovali tzv. *kinestetický jev*, tj. tendenci zapojit při řešení úloh pohyb těla, popřípadě alespoň očí. U některých jedinců byl patrný také *jazykový jev*, tj. potíže s rozdílným chápáním terminologie pohybu po tělesech. V úlohách typu B žáci i studenti zpravidla objevili pouze jedno z více možných řešení.

S třetím typem vyzkoušených úloh, v nichž uvažujeme hranu krychle delší než jednotkovou, jsme se zatím nikde nesetkali. Tyto úlohy se ukázaly jako nejkomplicovanější, neboť je v nich třeba uvažovat i vnitřní body krychle. Proto jsme původní sadu úloh, v nichž žákům byla rovnou předložena hrana o délce 4, doplnili ještě úlohami s hranou délky 2, aby gradace obtížnosti byla pozvolnější.

Ve všech zapojených skupinách se projevila pozitivní motivace. Zařazením vždy několika „procházek“ na začátek hodiny se žáci i studenti aktivizovali a rychleji než obvykle „přepnuli do pracovního módu“. Časově jsou úlohy nenáročné a lze je používat průběžně a opakovaně za účelem systematického procvičování prostorové představivosti. Široká škála zadání s postupně rostoucí obtížností umožňuje volit úroveň úloh adekvátní schopnostem a věku žáků, slabší jedinci mají možnost prožít pocit úspěchu a šikovnějším můžeme úlohy zajímavě zkomplikovat. Vyzkoušením úloh s věkově rozdílnými skupinami se ukázalo, že úlohy mohou být vhodné a smysluplné nejen pro žáky základní a střední školy, ale i pro studenty vysoké školy.

**Poděkování.** Článek vznikl za podpory projektů OPVVV – SC2/SC5 *Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotnosti*.

## Literatura

- [1] *MŠMT: Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha, 2017, [cit. 2018-10-30]. Dostupné z: [www.msmt.cz/file/43792\\_1\\_1](http://www.msmt.cz/file/43792_1_1)
- [2] *MŠMT: Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. Praha, 2007, [cit. 2018-10-30]. Dostupné z: [www.nuv.cz/file/159\\_1\\_1](http://www.nuv.cz/file/159_1_1)
- [3] *Molnár, J., Perný, J., Stopenová, A.: Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji* [online]. JČMF, 2006 [cit. 2017-09-24]. Dostupné z: <http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=100>
- [4] *Molnár, J.: Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. 2. rozšířené vydání*, Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2009.
- [5] *Perný, J.: Krychle, pohyb a prostorová představivost (1)*. Učitel matematiky, 12(2004a), 176–183.
- [6] *Perný, J.: Krychle, pohyb a prostorová představivost (2)*. Učitel matematiky, 12(2004b), 221–230.
- [7] *Šarounová, A.: Geometrická představivost*. Disertační práce, Univerzita Karlova, Praha, 1982.

# Mezipředmětové vztahy v matematice

DANA VOJTOVIČOVÁ

Gymnázium, Olomouc-Hejčín

Cílem tohoto příspěvku je poukázat na možnosti využití konkrétních výsledků projektu *Matematická gramotnost na střední škole* v podobě pracovních listů, které autorka za tímto účelem vytvořila.

Hlavními tématy pracovních listů jsou oblasti kvantita, prostor a tvar, změna a vztahy, neurčitost a finanční gramotnost, zároveň však svým zaměřením na reálný život a konkrétní situace daleko přesahují do ostatních předmětů a tím pomáhají učitelům implementovat mezipředmětové vztahy do hodin matematiky, což je jedna z oblastí, na niž se v současné době klade velký důraz. Pracovní listy se liší úrovní náročnosti a čtenář je může využívat v běžné výuce matematiky na různých typech středních škol, viz odkaz v závěru článku.

Matematická gramotnost je definována jako *schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana* [2]. Hlavní snahou bylo tedy propojit matematiku s běžným životem, najít příklady, které aplikují matematiku na reálné situace a skutečná data a využít mezipředmětové vztahy. Při tvorbě některých úloh autorka vycházela z dostupných zdrojů, jakými jsou např. [1, 4], [3, s. 84].

Chceme-li ve výuce matematiky rozvíjet matematickou gramotnost, nestačí pouze použít vhodné příklady a materiály. Je nutné také přemýšlet nad metodami, které se pro tento účel nejlépe hodí. Máme-li přimět žáky přemýšlet, samostatně pracovat a hledat nejjednodušší řešení, není frontální výuka příliš vhodná. Musíme také dát žákům čas potřebný k přemýšlení a klást návodné otázky, pokud žák neví, jak dál. Asi nejobtížnější je pro učitele zůstat v pozadí a nepodlehnout nutkání prozradit žákům řešení, pokud jsou schopni úlohu vyřešit sami. V tomto případě je důležité pracovat také s chybou žáka, uvést jeho chyby na pravou míru a využít je v procesu učení v jeho prospěch. Oblast metod výuky k matematické gramotnosti však již výrazně překračuje rozsah tohoto článku.



Jak se v praxi potvrdilo, při využití zmíněných materiálů je vhodné použít následující strukturu vyučovací hodiny:

1. Žáci nejdříve pracují samostatně na úloze zadané v pracovním listu.
2. Jakmile mají zpracovanou určitou část, pracují ve dvojicích a diskutují svá řešení. Rozhodnou, zda a která řešení jsou správná, přitom se učí vysvětlit, zdůvodnit a obhájit svůj postup.
3. Svá řešení následně prezentují před třídou.
4. Na závěr učitel spolu s žáky zhodnotí práci, případně opraví nebo vysvětlí nejasnosti. Ne vždy je však nutné vše zvládnout v jedné vyučovací hodině. Mnohdy je lepší nechat problém „uležet“ a vrátit se k němu v dalších hodinách.

V některých pracovních listech je na závěr uveden Projekt, viz např. *Absolutní a relativní změna – Změny klimatu*, který může být součástí vyučovací hodiny, ale může být také zadán jako samostatná nebo skupinová práce doma, případně v rámci školního výletu nebo projektového dne (podle charakteru úlohy).

Jako ukázkou možného konkrétního využití nyní uvádíme jeden pracovní list s názvem

### **Absolutní a relativní změna – Změny klimatu.**

Pracovní list z tohoto odkazu je uveden na stránkách 32 a 33.

## **Komentář k pracovnímu listu Absolutní a relativní změna – Změny klimatu**

Cílem hodiny bylo vybrat z textu slovní úlohy požadované informace, zopakovat práci s procenty a statistickými daty, uvědomit si rozdíly mezi absolutní a relativní změnou, naučit se zpracovat výsledky ve formě tabulek a diagramů a vyvodit z nich závěry.

### ***Podmínky a příprava***

Předem si musíme nachystat pracovní listy, v učebně s projektorem je možné promítnout postupně části pracovního listu na plátno a nemusí se pak tisknout. Všechny údaje ale musí být dobře vidět. Je dobré si připravit učebnice s tématem Statistika (modus, medián). V učebně s počítači lze využít internet, žáci mohou také využívat tablet nebo chytrý telefon,

## Absolutní a relativní změna

### Změny klimatu

Na hvězdárně v pražském Klementinu byla zahájena pravidelná meteorologická měření už v roce 1752.

Podle těchto záznamů můžeme pro každý měsíc určit počty tropických dnů, kdy je teplota vyšší nebo rovna  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ , a počty ledových dnů, kdy teplota nevystoupí nad  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ .



V letech 2008 až 2017 vzrostl průměrný počet tropických dnů na 20,5 dne za rok, což bylo o 15,5 dnů za rok více než ve srovnání s obdobím mezi lety 1775 až 1784. Ledových dnů naopak v desetiletí 2008 až 2017 ubylo, a to o 48 % ve srovnání s desetiletím 1775 až 1784, kdy bylo průměrně 34,9 ledových dnů za rok.

**Úloha 1:** Z výše uvedených údajů zjistěte:

- Která ze změn je větší, jestliže ji vyjádříme počtem dnů?
- Která ze změn je větší, jestliže ji vyjádříme v %?
- Jaká znaménka můžeme změnám přiřadit?
- Kolik bylo průměrně za rok tropických dnů v období let 1775 až 1784?
- Kolik bylo průměrně za rok ledových dnů v letech 2008 až 2017?

**Úloha 2:** V následující tabulce jsou údaje o počtu tropických, ledových a arktických dní v období let 1892 až 1901. Arktický den je takový den, kdy maximální teplota nevystoupí nad  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Zjistěte:

- průměrné počty tropických, ledových a arktických dní v tomto období
- modus a medián pro tropické, ledové i arktické dny
- absolutní změny (počty dnů) vzhledem k období 1775 až 1784
- relativní změny (%) vzhledem k období 1775 až 1784
- absolutní změny v období 2008 až 2017 vzhledem k období 1892 až 1901 (tabulka)
- relativní změny v období 2008 až 2017 vzhledem k období 1892 až 1901 (tabulka)

**Tabulka:**

Rok	Počet tropických dní	Počet ledových dní	Počet arktických dní
1892	18	49	0
1893	3	42	4
1894	4	29	1
1895	8	63	3
1896	2	34	0
1897	2	29	0
1898	6	14	0
1899	4	30	3
1900	9	16	2
1901	4	48	3

Zdroj dat: [www.in-pocasi.cz/archiv](http://www.in-pocasi.cz/archiv)

Výsledky zpracujte do přehledné tabulky. Sestrojte vhodný diagram pro průměrné počty tropických a ledových dní v daných obdobích.

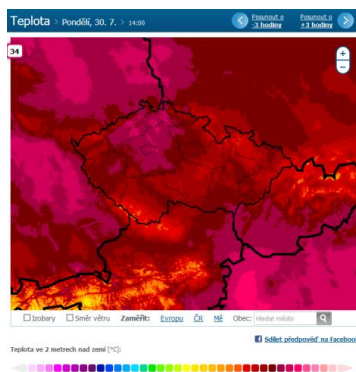
**Projekt:**

Najděte na internetu ([www.in-pocasi.cz/archiv](http://www.in-pocasi.cz/archiv)) údaje o průměrných počtech tropických a ledových dnů za rok v Česku v jiném desetiletém období v 18., 19., 20. nebo 21. století.

Zjištěné údaje zpracujte do tabulky a diagramu v Excelu a zjistěte:

- Absolutní změny
- Relativní změny
- Jaká znaménka můžeme změnám přiřadit?
- Kolik bylo průměrně za rok tropických dnů?
- Kolik bylo průměrně za rok ledových dnů?
- Jaký byl v těchto letech počet arktických dní?

Srovnejte tato období. Můžete z toho vyvodit nějaký závěr?



Obr.: Zdroj: [www.in-pocasi.cz/mode1](http://www.in-pocasi.cz/mode1)

aby mohli samostatně vyhledat informace, které potřebují k práci. V učebně s počítači žáci mohou pracovat v Excelu, jinak lze tabulky a grafy kreslit do sešitu. Pro slabší žáky tabulky připravíme předem.

### ***Průběh vyučovací hodiny (45 min)***

Po krátkém uvedení do problematiky a motivačním rozhovoru o klimatických změnách byli žáci seznámeni s cílem a organizací vyučovací hodiny a dále již pracovali samostatně a posléze ve dvojicích podle schématu uvedeného výše. Po dokončení každé úlohy žáci prezentovali své výsledky, zapsali je na tabuli a zkontrolovali své diagramy. Následovalo hodnocení kvality práce žáků učitelem a hodnocení žáků. Na závěr proběhla diskuse na téma Vývoj klimatu v ČR, kdy se žáci pokusili interpretovat své výsledky z hlediska teplotního vývoje v ČR a diskuse, zda mají jejich výsledky nějakou výpovědní hodnotu.

### ***Osobní zkušenosti***

Téma *Absolutní a relativní změna – Změny klimatu* bylo zařazeno do běžné výuky matematiky na gymnáziu v půlených hodinách, aby byl dostatečný prostor pro diskusi a klid na individuální práci. Menší počet žáků ve třídě je nutností, pokud navíc chceme poskytnout žákům individuální podporu. Toto téma je možné zařadit do výuky v podstatě kdykoli, neboť učivo vychází ze znalostí získaných na základní škole.

Nejvýhodnější metodou se jeví kombinace individuální práce a práce ve dvojicích. Příliš se neosvědčila práce ve skupině, a to ze dvou důvodů: žáci vzájemně nevidí dobře na své zápisy a práci často zastane jeden žák a ostatní se „vezou“.

Překvapením bylo, že starší žáci měli větší problémy s počítáním procent než mladší, většinou si neporadili s výpočtem relativní změny v počtu tropických dnů v úloze 1. Největším problémem bylo správně určit základ. Je vhodné do běžných hodin matematiky na střední škole čas od času výpočet procent zařadit (a to zvláště složitějších příkladů), protože se sice počítá s tím, že žáci toto učivo zvládli na základní škole, ale praxe potvrdila, že tomu tak není a že to spíše zapomněli.

S problémem procent v úloze 1 bylo potřeba žákům vhodnými otázkami pomoci. Za základ zde totiž vzali hodnotu 20,5 dní (průměrný počet tropických dní – TD v posledním desetiletí) místo 5 dní (průměrný počet TD v prvním desetiletí) a změna v procentech jim vyšla 75,6 %. Bylo třeba jim zdůraznit, že chceme zjistit, jak moc počet TD vzrostl oproti prvnímu desetiletí. Některým žákům pomohla otázka: „Jakou hodnotu bys dostal, kdyby se počet TD zvedl dokonce o 100 %?“ Ukázalo se, že by dostali

hodnotu 10, což ani zdaleka není 20,5. S touto nápovědou už byli většinou schopni správnou hodnotu vypočítat. Je dobré s tímto problémem pomáhat žákům individuálně, aby měli větší šanci na to přijít sami.

Naopak se sestavením sloupcového diagramu ani se statistickými pojmy nebyly žádné větší problémy. Pojmy jako modus a medián znali a stačilo jim jen osvěžit své znalosti pomocí učebnice nebo internetu. Při tvorbě diagramu bylo třeba některým žákům připomenout, aby se zamysleli nad tím, co chceme v grafu všechno vidět.

První dvě úlohy se dají v jedné vyučovací hodině pohodlně zvládnout i s hodnocením a diskusí. Závěrečná diskuse byla právě tím, co v žácích zanechalo pocit „zajímavé“ hodiny.

### **Doporučení**

Pro slabší žáky je nutné připravit dopředu tabulky, do kterých jen doplní výsledky (viz níže). Pokročilejší žáci jsou většinou schopni vytvořit je samostatně, ale slabší s tím ztratí příliš mnoho času. Na druhou stranu, máme-li možnost hodinu rozdělit na dvě a počítáme-li například i s tím, že žáci budou pracovat na počítači, je lepší, když i slabší žáci zkusí strukturu tabulky vymyslet a nakreslit sami. Pokud máme více času, můžeme do srovnání zařadit i arktické dny (AD), přičemž chybějící údaje pro první a poslední desetiletí mohou žáci vyhledat sami na internetu na adrese: [www.in-pocasi.cz/archiv](http://www.in-pocasi.cz/archiv)

Průměrný počet AD	
1775–1784	2,5
1892–1901	1,6
2008–2017	0

### **Tabulky pro žáky**

#### **Úloha 1**

Rok	počet TD	abs. změna	rel. změna	počet LD	abs. změna	rel. změna
1775-1784						
2008-2017						

## Úloha 2

Období	počet TD	abs. změna	rel. změna	počet LD	abs. změna	rel. změna	počet AD	abs. změna	rel. změna
1775-1784									
1892-1901									
1892-1901									
2008-2017									

## Řešení

### Úloha 1

Rok	počet TD	abs. změna	rel. změna	počet LD	abs. změna	rel. změna
1775-1784	5	+15,5	+310 %	34,9	-16,8	-48 %
2008-2017	20,5			18,1		

- a) V počtech dnů je větší pokles ledových dní – LD (16,8)  
 b) V procentech je větší nárůst tropických dní – TD (310 %)  
 c) nárůst +, pokles –  
 d)  $20,5 - 15,5 = 5$   
 e)  $48 \% \text{ z } 34,9 \text{ je } 16,8; 34,9 - 16,8 = 18,1$

## Úloha 2

a)–b)

Období 1892-1901	Průměrná hodnota	Modus	Medián
TD	6	4	4
LD	35,4	29	32
AD	1,6	0	1,5

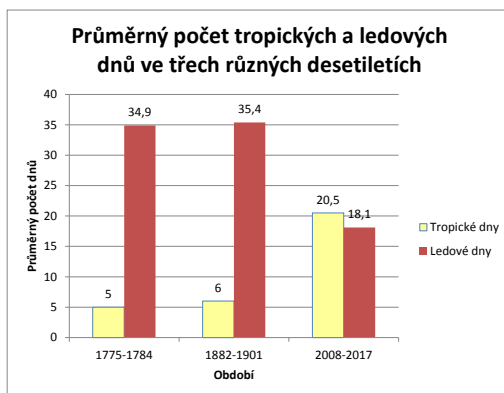
Výhodou mediánu je fakt, že není ovlivněn extrémními hodnotami. Například u počtu tropických dní v období 1892-1901 máme jednu extrémní

hodnotu (18), ostatní hodnoty jsou menší než 10. Aritmetický průměr (6) zde tedy není příliš vhodnou mírou polohy. Medián a modus nabývají hodnoty 4, což lépe vystihuje toto období. Žáci si mohou průměrné hodnoty, modus i medián zkusit zjistit pomocí Excelu.

c)–f)

Období	počet TD	abs. změna	rel. změna	počet LD	abs. změna	rel. změna	počet AD	abs. změna	rel. změna
1775-1784	5	+1	20 %	34,9	+0,5	+1,4 %	2,5	-0,9	-36 %
1892-1901	6			35,4			1,6		
1892-1901	6	+14,5	241,7 %	35,4	-17,3	-48,9 %	1,6	-1,6	-100 %
2008-2017	20,5			18,1			0		

### Sloupcový diagram



### Zpětná vazba

Z dotazníkového šetření vyplynulo, že žáci hodnotili hodinu jako zajímavou, ocenili, že si zopakovali procenta a projevíli zájem o další podobný způsob výuky, jejich vlastními slovy řečeno: „takovou hodinu bychom chtěli častěji“. Negativní reakce nebyla zaznamenána. Žáci byli hodně překvapeni, že data poskytnutá v úlohách jsou skutečná, že je autorka sama

vybrala ze záznamů archívu meteorologické stanice v pražském Klementinu a že si je mohou najít a zpracovat sami. K tomu je určen navazující projekt, který je nepovinný.

### ***Poznámka***

Sledovaná desetiletá období byla zvolena záměrně po zhruba stejné době 117, resp. 116 letech, aby vývoj v počtech tropických a ledových dní bylo možno lépe srovnávat. Zde se ukázalo, že po prvních zhruba 100 letech jsou změny malé, v dalším období je změna výrazná. Je třeba žákům vysvětlit, že více by nám o vývoji teplot na českém území řekly průměrné denní teploty, ne jen počty tropických a ledových dní, a to za celé období, ne jen za tato vybraná desetiletí. Je třeba také zdůraznit, že se jedná o data sbíraná sice po dlouhou dobu, ale pouze na jednom místě (lokálně). Během diskuse žáci mohou sami tyto skutečnosti odhalit, což rozvíjí tzv. kritické myšlení.

### ***Hodnocení***

Přestože se ve zkušebních hodinách vždy jednalo o odpolední vyučování, tyto hodiny byly živé a žáci pracovali velmi aktivně. Velice pomohla úvodní motivace, kdy si žáci uvědomili, že budou pracovat se skutečnými daty a zkoumat problém, který se jich osobně dotýká.

Na závěr uvádíme ještě jeden pracovní list s názvem *Kontokorent nebo kreditka*, tentokrát již bez rozboru a komentáře.

#### **Kontokorent nebo kreditka**

Zařazení úloh z matematické gramotnosti do běžných hodin matematiky je na jedné straně pro učitele velice náročné na přípravu a pak také každá taková hodina ukrojí z toho mála času, které na probrání povinných témat máme. Na druhou stranu se nám ale tato námaha bohatě vyplatí. Nejen že si žáci zopakují spoustu užitečných dovedností, ale hlavně se na matematiku začnou dívat trochu jinak a aplikováním matematiky na konkrétní situace ze života uvidí lépe její smysl. A třeba je pak matematika začne víc bavit.

Další pracovní listy lze najít na adrese:

<https://www.gytool.cz/predmetove-komise/mat/?s=aktivita>



## Literatura

- [1] *Hejný, M. et al.*: Creative Teaching in Mathematics, vyd. UK Praha, 2006.
- [2] <https://clanky.rvp.cz/clanek/k/z/12561/VYMEZENI-POJMU-MATEMATICKA-GRAMOTNOST.html/>
- [3] <http://www.csicr.cz/cz/DOKUMENTY/Publikace/Ulohy-pro-rozvoj-matematicke-gramotnosti>
- [4] <https://www.mathsisfun.com/>

# Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 251 a 252 můžete zaslat nejpozději do 20. 5. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: [mfi@upol.cz](mailto:mfi@upol.cz).

## Úloha 251

Je dán čtyřúhelník  $ABCD$ . Označme  $P$ ,  $Q$  po řadě paty výšek z vrcholů  $C$ ,  $D$  na stranu  $AB$ . Předpokládejme, že body  $P$ ,  $Q$  leží na úsečce  $AB$  a platí  $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$ . Dokažte, že  $|DA| + |AB| + |BC| > |AC| + |BD|$ .

*Josef Tkadlec*

## Úloha 252

Určete všechny dvojice  $(a, b)$  reálných čísel, pro něž mají rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0,$$

$$x^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

právě jeden společný kořen.

*Jaroslav Švrček*

Dále uvádíme řešení úloh 247 a 248, jejichž zadání jsme zveřejnili ve čtvrtém čísle loňského (27.) ročníku našeho časopisu.

### Úloha 247

Kolik tupouhlých trojúhelníků má všechny své vrcholy ve vrcholech daného pravidelného 26úhelníku. *Jacek Uryga*

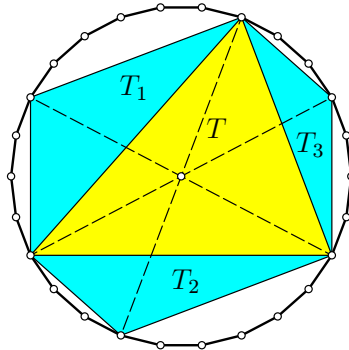
*Řešení.* Počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží ve vrcholech pravidelného 26úhelníku je

$$\binom{26}{3} = 2\,600.$$

Nyní určíme, kolik z nich je pravoúhlých. Vrcholy pravidelného 26úhelníku leží na kružnici jemu opsané. Podle Thaletovy věty je přepona takového trojúhelníku průměrem této kružnice. Ke každé z  $\frac{1}{2} \cdot 26 = 13$  možných přepon existuje  $26 - 2 = 24$  zbývajících vrcholů, které s krajními body dané přepony tvoří pravoúhlý trojúhelník, pravoúhlých trojúhelníků tak je  $24 \cdot 13 = 312$ . Zbývajících

$$2\,600 - 312 = 2\,288$$

trojúhelníků je tedy buď ostroúhlých, nebo tupouhlých.



Nyní uvažujme ostroúhlý trojúhelník  $T$ , jehož vrcholy leží ve vrcholech pravidelného 26úhelníku. Bod souměrně sdružený s jedním jeho vrcholem podle středu tohoto mnohoúhelníku bude se zbývajícimi dvěma vrcholy trojúhelníku  $T$  určovat tupouhlý trojúhelník. Každému ostroúhlému trojúhelníku tak odpovídají tři tupouhlé trojúhelníky ( $T_1$ ,  $T_2$  a  $T_3$  na obrázku). Naopak, každému tupouhlému trojúhelníku podobně odpovídá jeden ostroúhlý trojúhelník. Počet tupouhlých trojúhelníků je tak třikrát větší než počet ostroúhlých trojúhelníků a je proto roven

$$\frac{3}{4} \cdot 2\,288 = 1\,716.$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich a *Vojtěch David* z WG v Ostravě-Porubě, *Matěj Doležálek* z G v Humpolci, *Karel Chwistek* z MG v Opavě, *Dalibor Kramář* z G v Brně-Řeckovicích,

*Adam Křivka* z CMGaSOPŠ v Brně, *Tomáš Křížák* z GMK v Bílovci, *Karolína Kučerová* z G v Českém Krumlově, *Tomáš Sourada* z G v Žamberku a *Petr Zahradník* z GaSOŠDVŠ v Ústí nad Labem.

Neúplné řešení zaslala *Lucie Kundratová* z GaJŠ ve Zlíně,

## Úloha 248

Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , je-li (při obvyklém označení délek jeho stran a velikostí vnitřních úhlů) dáno:  $\alpha$ ,  $a + b$ ,  $a + c$ . *Jaroslav Švrček*

*Řešení podle J. Mészárose a K. Gajdoše.* Nejprve sestrojíme trojúhelník  $AB'C'$ , kde  $|AB'| = a + b$ ,  $|AC'| = a + c$  a  $|\sphericalangle B'AC'| = \alpha$ . Označme  $N$  střed kružnice vně připsané straně  $BC$  trojúhelníku  $ABC$ ,  $U_a$  je dotykový bod této kružnice se stranou  $BC$  a  $U_b, U_c$  po řadě dotykové body této kružnice s prodlouženími stran  $AC, AB$ . Bod  $N$  je průsečíkem osy vnitřního úhlu při vrcholu  $A$  a os vnějších úhlů při vrcholech  $B$  a  $C$  v trojúhelníku  $ABC$ , viz např. obr. 1. Dále platí  $a = |BC| = |BC'| = |CB'|$  a podle věty *sus* o shodnosti trojúhelníků tak máme

$$\triangle B'CN \simeq \triangle BCN \simeq \triangle BC'N. \quad (1)$$

Paty výšek z vrcholu  $N$  ke stranám  $BC, B'C$  a  $BC'$  (body  $U_a, U_b$  a  $U_c$ ) dělí tyto strany vždy na dva shodné úseky, tj. platí  $|B'U_b| = |BU_a| = |BU_c|$  a také  $|CU_b| = |CU_a| = |C'U_c|$ . Odtud plyne

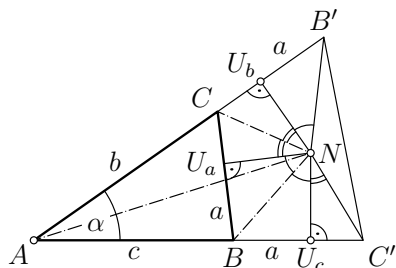
$$\varepsilon = |\sphericalangle B'NU_b| = |\sphericalangle U_aNB| = |\sphericalangle U_cNB|$$

a také

$$\varphi = |\sphericalangle CNU_b| = |\sphericalangle CNU_a| = |\sphericalangle U_cNC'|.$$

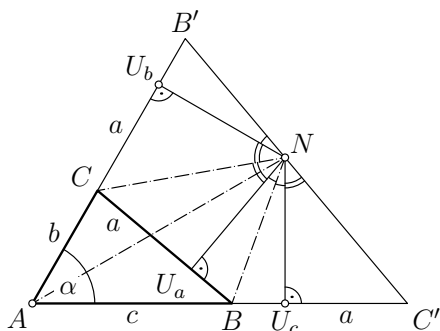
Vzhledem k tomu, že čtyřúhelník  $AU_cNU_b$  je tětiový, platí  $2(\varepsilon + \varphi) = 180^\circ - \alpha$ , a tedy  $\varepsilon + \varphi = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ .

Je-li  $\alpha < 60^\circ$ , je  $N$  vnitřním bodem trojúhelníku  $AB'C'$  a jeho stranu  $B'C'$  vidíme z bodu  $N$  pod úhlem  $360^\circ - 3(\varepsilon + \varphi) = 90^\circ + \frac{3}{2}\alpha$  (obr. 1).



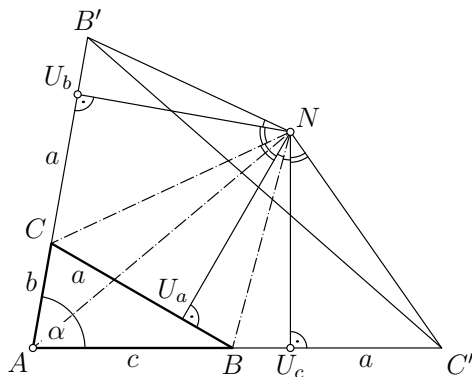
Obr. 1

Je-li  $\alpha = 60^\circ$ , je bod  $N$  vnitřním bodem strany  $B'C'$  (obr. 2).



Obr. 2

Je-li  $\alpha > 60^\circ$ , je  $N$  vnějším bodem trojúhelníku  $AB'C'$  a jeho stranu  $B'C'$  vidíme z tohoto bodu pod úhlem  $3(\varepsilon + \varphi) = 270^\circ - \frac{3}{2}\alpha$  (obr. 3).



Obr. 3

Odtud již plyne konstrukce trojúhelníku  $ABC$ : Sestrojíme střed  $N$  kružnice vně připsané straně  $BC$  hledaného trojúhelníku  $ABC$  jako průsečík kružnicového oblouku (popř. přímo strany  $B'C'$ , je-li  $\alpha = 60^\circ$ ), z jehož každého bodu vidíme úsečku  $B'C'$  pod výše uvedeným úhlem (rozlišíme případy, kdy  $\alpha < 60^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$  a  $\alpha > 60^\circ$ ). K sestavení bodů  $B$  a  $C$  po řadě uvnitř stran  $AC'$  a  $AB'$  využijeme např. shodnosti trojúhelníků (1), z nichž plyne  $|NB| = |NB'|$  a  $|NC| = |NC'|$ .

Úloha má vždy právě 1 řešení.

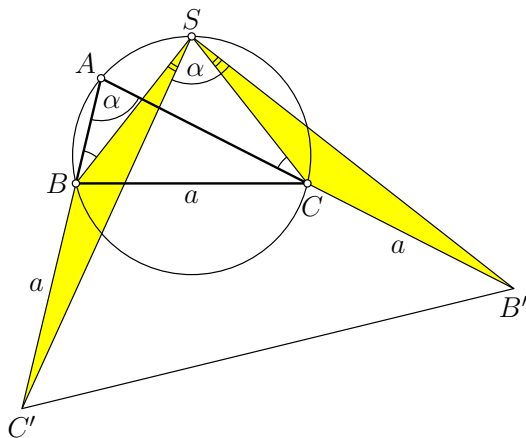
*Jiné řešení (podle R. Olšáka).* Na polopřímkách  $AB$  a  $AC$  sestrojíme po řadě body  $C'$  a  $B'$  tak, že platí  $|AC'| = a + c$  a  $|AB'| = a + b$ . Uvažujme střed  $S$  oblouku  $BAC$  kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$ . Podle věty o obvodovém úhlu jsou úhly  $ABS$  a  $ACS$  shodné, tedy jsou shodné i úhly  $C'BS$  a  $B'CS$ . Z rovností  $|SB| = |SC|$  a  $|BC'| = |BC| = |B'C'| (= a)$  plyne, že trojúhelníky  $BC'S$  a  $C'B'S$  jsou shodné podle věty *sus*, tedy

$$|SC'| = |SB'|.$$

Navíc ze shodnosti úhlů  $BSC'$  a  $CSB'$  plyne, že

$$|\sphericalangle C'SB'| = |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha.$$

Tedy bod  $S$  je také středem oblouku  $C'AB'$  kružnice opsané trojúhelníku  $AB'C'$ .



Obr. 4

Dále z rovnosti  $|BC| = |B'C|$  a z podobnosti trojúhelníků  $BSC$  a  $C'SB'$  plyne

$$\frac{|B'C|}{|C'B'|} = \frac{|BC|}{|C'B'|} = \frac{|SB|}{|SC'|} = \frac{|SC|}{|SC'|},$$

tedy

$$\frac{|B'C|}{|SC|} = \frac{|B'C'|}{|SC'|}.$$

Body  $C'$  a  $C$  tak mají stejný poměr vzdáleností od bodů  $B'$  a  $S$ , leží proto na téže Apolloniově kružnici vzhledem k bodům  $B'$  a  $S$  (v případě  $\alpha = 60^\circ$  se jedná o přímku). Takovou kružnici již umíme sestrojít, jejím průměrem ( $\alpha \neq 60^\circ$ ) je průsečík os vnitřního a vnějšího úhlu u vrcholu  $C'$  trojúhelníku  $B'C'S$  s přímkou  $B'S$ .

Odtud již plyne konstrukce. Sestrojíme trojúhelník  $AB'C'$  a střed  $S$  oblouku  $C'AB'$  kružnice jemu opsané. Dále sestrojíme příslušnou Apolloniovu kružnici a její průsečík s úsečkou  $AB'$  je hledaný bod  $C$ .

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Radek Olšák* z Mensa G v Praze 6.

Po uzávěrce minulého čísla ještě redakce obdržela správná řešení úloh 245 a 246 od *Martina Raszyka* z ETH Zürich.

*Pavel Calábek*

## Využití mezipředmětových vztahů k motivaci žáků

RENATA HOLUBOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Děti narozené po roce 1994 jsou zařazeny do tzv. generace Z. Zájem o studium technických oborů u žáků generace Z je velmi malý. Moderní technologie jsou pro ně prostředkem, jak vstoupit do svého virtuálního světa a komunikovat s přáteli. Škola řeší problém, jak překlenout propast mezi tím, co by měli žáci zvládnout podle jednotlivých studijních programů, a tím, jak učí naši učitelé a jaké metody používají. Otázkou je, jak žáky motivovat a jak změnit postupy výuky v dnešní škole. Jednou z cest, která se ve školní praxi ukázala jako úspěšná, je využití mezipředmětových vztahů v rámci projektů, které ukazují vzájemný vztah techniky, přírodovědných předmětů a každodenního života. Námět na aplikaci vybraných témat učiva fyziky v praktickém životě uvádíme v tomto příspěvku.

### **Téma aerodynamika (profil křídla letadla, vztlak, fyzika letu, letadla)**

Letadlo je létající dopravní prostředek. Podle normy ČSN 310001 je letadlo: *Zařízení způsobilé létat v atmosféře nezávisle na zemském povrchu, nést na palubě osoby nebo jiný náklad, je schopné bezpečného vzletu a přistání a je alespoň částečně říditelné.*

#### **Rozdělení letadel**

*Podle způsobu vzniku vztlaku:*

- lehčí než vzduch (*aerostaty*)
  - bezmotorové (balón), motorové (vzducholoď);

- těžší než vzduch (*aerodynamy*)
  - bezmotorové – s nepohyblivými nosnými plochami (rogalo, padák, kluzák), s rotujícími nosnými plochami (rotorový kluzák),
  - motorové – bez nosných ploch (raketa), s nepohyblivými nosnými plochami (letoun), s rotujícími nosnými plochami (vrtulník), s kombinovanými nosnými plochami (konvertoplán), s mávajícími nosnými plochami (ornitoptéra), s prstencovými nosnými plochami (koleoptéra).

*Podle účelu:* civilní, vojenské, speciální (spojovací letadlo, sanitní letadlo, výsadkové letadlo)



Obr. 1 Konvertoplán a koleoptéra

## *Historie*

První létající stroje využívaly jako pohon pouze sílu lidských svalů. *Leonardo da Vinci* nakreslil první plány létajících strojů. *Vít Fučík* (zvaný Kudlička) v letech 1760–1795 sestrojil letadlo s mávavými křídly (byly nadlehčovány měchy naplněnými bahenním plynem) a později s pevným křídlem (předchůdce rogala).

První letoun schopný řízeného letu vynalezli a zkonstruovali bratři *Orville* a *Wilbur Wrightové* 17. prosince 1903 v Severní Karolině. Letoun *Wright Flyer* byl postaven ze dřeva a látky, konstrukce byla vyztužena dráty, byl vybaven dvěma tlačnými vrtulemi a poháněn motorem o výkonu 9 kW. První vzlet letadla v Československu je datován v dubnu 1910.

Největší rozmach letecké dopravy nastal až po první světové válce, kdy v Evropě začaly vznikat letecké společnosti. Nejstarší je KLM (1920), ČSA (1923), letadla výrobců Airbus a Boeing (střední a dálkové lety), ATR a Fokker (krátké a střední lety).



## ***Letecká doprava***

Výhody: rychlost a spolehlivost, frekvence spojů, dobře předvídatelné časy přeprav (přiletí a odlety), nízké náklady na balení u přepravy na delší vzdálenosti, minimální vlivy počasí.

Nevýhody: náklady na přepravu, omezenost zásilek, při přepravě na krátké vzdálenosti je výhoda rychlosti relativní, znehodnocení přepravních časů pomalými navazujícími operacemi, které mohou dosáhnout i 90 % podílu (celní odbavení, překládka).

## ***Odmrazování letadel (fázové přeměny, infračervené záření)***

I sebemenší námraza může ovlivnit profil křídla, a tím i letové vlastnosti letadel. S námrazou na letadlech se v našich podmínkách setkáváme nejčastěji v zimních měsících (říjen až duben, kdy venkovní teploty klesají k nule). Námraza vzniká přibližně od  $+3\text{ }^{\circ}\text{C}$  níže. Vznik závisí kromě teploty i na vlhkosti či hustotě vzduchu a při letu i na rychlosti letu. Námrazu může způsobit podchlazené palivo i v letních měsících!

Podle rychlosti vzniku námrazy rozeznáváme:

- slabá (do 0,6 mm za 1 minutu)
- mírná (od 0,7 mm do 1 mm za 1 minutu)
- silná (od 1,1 mm do 2 mm za 1 minutu)
- velmi silná (od 2,1 mm za 1 minutu)

Intenzitu námrazy lze vyjádřit pomocí vztahu

$$I = 10^{-2}\delta v,$$

kde  $\delta$  vyjadřuje „vodní obsah“ oblaku v  $\text{g}/\text{m}^3$ ,  $v$  je rychlost letounu v  $\text{km}/\text{h}$ ,  $I$  je intenzita v  $\text{mm}/\text{min}$ .

Dělení námrazy podle charakteru: jíní; jinovatka; bílý zrnitý led (při letu v oblacích s kapkami do 10 mikrometrů, většinou samovolně opadá); průhledný led (přechlazená vodní pára při mrhnutí v zimě, vede ke zvyšování hmotnosti a změně těžiště. Nejnebezpečnější je matný led, který vzniká z vodních kapek a krystalků ledu hlavně na náběžných hranách letounu.

Vznik námrazy na letadlech je dán tepelnými poměry ve vrstvě vzduchu přiléhající k obtékanému povrchu a v samotném tělese. Rychlým prouděním vzduchu kolem tělesa se plášť zahřívá u náběžné hrany, převládá adiabatické oteplování vzduchu. Za náběžnou hranou se uplatňuje především

vliv tření vzduchu o obtékaný povrch. Zvýšení teploty  $\Delta t$  v přiléhající mezní vrstvě vzduchu se dá vyjádřit vztahem

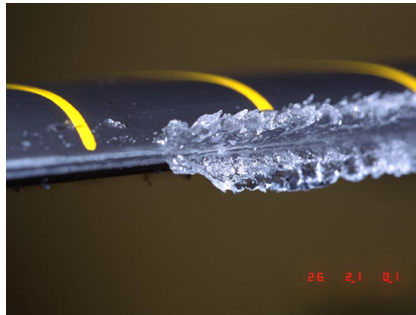
$$\Delta t = 3,87 \cdot 10^{-5} v^2 k \gamma,$$

kde  $v$  je rychlost letu v km/h,  $k$  je součinitel vystihující tvar tělesa (u náběžných hran  $k = 1$ ),  $\gamma$  je vertikální nasyceně adiabatický gradient teploty [2].

Při obtékání vzduchu kolem letounu se mění teplota aerodynamických ploch také vlivem tření (kinetický ohřev) a vlivem stlačování proudu vzduchu před letounem (dynamický ohřev). Při kinetickém ohřevu platí pro zvýšení teploty  $\Delta t$  ploch vztah

$$\Delta t = \frac{v^2}{2000}.$$

Např. při rychlosti 100 km/h je změna teploty  $0,4^\circ\text{C}$ , při rychlosti 800 km/h je to již  $24,6^\circ\text{C}$ .



Obr. 2 Námraza

Pro odmrazování se používají dvě kapaliny. První kapalina (tzv. *de-icing*) má za úkol rozpuštění ledu a odstranění případného nánosu sněhu, ředí se horkou vodou o teplotě kolem  $75^\circ\text{C}$ . Poměr složení směsi závisí na okolní teplotě. Nevýhodou je její krátká účinnost (10–15 min). Druhá kapalina (tzv. *anti-icing*) má účinnost až 45 minut. Má protinámrazové účinky, vytvoří na povrchu křídla film, který nedovolí dalšímu tvoření námrazy. Odmrazování letounu zabere 5–7 min, spotřeba kapaliny je 200 l (extrém 700 l).

Kromě dalších možností odmrazování (elektrická ochrana – energeticky náročná, na malých plochách, pneumatická ochrana – pro odstranění již

vzniklé námrazy, na náběžných hranách se umisťují pryžové pásy) se jako zajímavé z hlediska fyziky jeví využití infračerveného záření. Pomocí infračerveného zářiče se ohřívá plášť letadla. Vlnová délka záření, a tím i jeho energie, závisí na teplotě zdroje. Čím vyšší je teplota, tím kratší je vlnová délka záření. Záření je pohlceno ledem, aniž by došlo ke zvýšení teploty pláště letadla nebo paliva. Primární zdroj je zahříván na teplotu vyšší než  $1\,000\text{ }^{\circ}\text{C}$ , účinnost využití energie je 75 %. Vlnová délka záření je potom kontrolována sekundárním zářičem. Výhodou je, že nedochází k ohřevu okolního vzduchu, navíc rozmístění zářičů umožňuje kopírovat tvar letadla. Nevýhodou je to, že po odmrazení není letadlo chráněno před další námrazou. Je proto třeba tuto metodu kombinovat s použitím vhodné kapaliny (v mnohem menším množství) pro zajištění ochrany letounu.



Obr. 3 Odmrazování

Při námraze není nebezpečná ani tak samotná hmotnost ledu, ale změna aerodynamických vlastností letadla. Vrstva ledu o tloušťce 0,1 mm na křídlech letadla sníží vztlak až o 30 % a odpor se zvýší až o 40 %. Další nebezpečí představují vibrace, změna těžiště, pokles rychlosti.

*Úkol:* Odhadněte, jaká je hmotnost námrazy o tloušťce 1 mm, která pokryla letadlo? (hustota ledu  $916,7\text{ kg/m}^3$ )

### **Infračervené záření, záření absolutně černého tělesa**

Základní učivo: elektromagnetické spektrum, infračervené záření, termografie jako měřicí metoda, která umožňuje graficky zobrazit teplotu zkoumaného objektu. Infračervené záření je emitováno všemi tělesy, jejichž teplota je vyšší než 0 K. Vztahy, které termografie využívá, jsou součástí středoškolského vzdělávacího programu:

*Planckův zákon* – závislost spektrální intenzity vyzařování  $H_\lambda$  povrchu černého tělesa o termodynamické teplotě  $T$  na této teplotě a vlnové délce  $\lambda$ :

$$H_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} \frac{2\pi hc^2}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1},$$

kde je  $k$  Boltzmannova konstanta,  $h$  Planckova konstanta,  $c$  rychlost světla a  $\lambda$  vlnová délka záření.

*Wienův posunovací zákon* – maximum spektrální intenzity vyzařování se s rostoucí teplotou  $T$  posouvá ke kratším vlnovým délkám. Vlnová délka  $\lambda_{\max}$  záření s maximální intenzitou

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

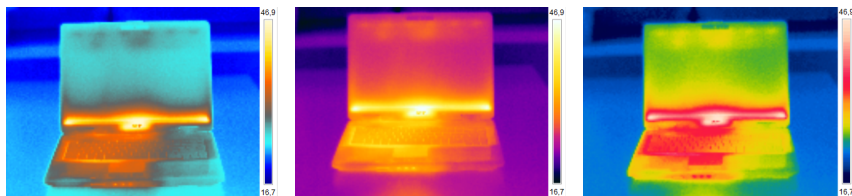
kde  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ .

*Stefanův–Boltzmannův zákon* – intenzita vyzařování černého tělesa je úměrná čtvrté mocnině termodynamické teploty. V reálné situaci nepočítáme s absolutně černým tělesem, ale s tělesem reálným, kde je potřeba počítat s emisivitou  $\varepsilon$  materiálu tělesa. To je poměr intenzity vyzařování povrchu tělesa k intenzitě vyzařování absolutně černého tělesa, jehož emisivita  $\varepsilon_0 = 1$ . Vztah zapisujeme ve tvaru

$$M_e = \varepsilon \sigma T^4,$$

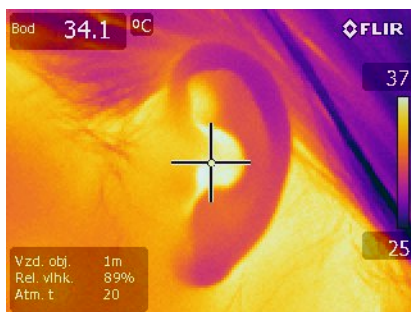
kde  $\sigma$  je Stefanova–Boltzmannova konstanta ( $\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ).

Termogram – je výstupem termovizní kamery v infračervené oblasti vlnových délek. Protože je infračervené záření pro oko neviditelné, jsou obrázky z kamery převáděny do viditelné oblasti pomocí různých barevných palet. Každé barvě je potom přiřazena určitá teplota. Nejčastěji používané palety jsou polární, železo, duha.

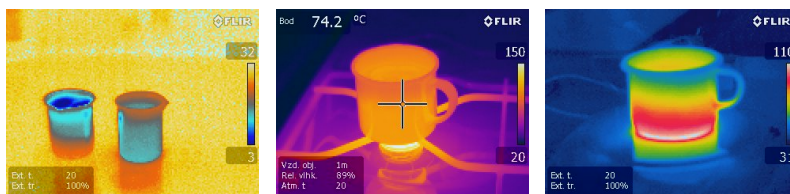


Obr. 4 Barevné palety

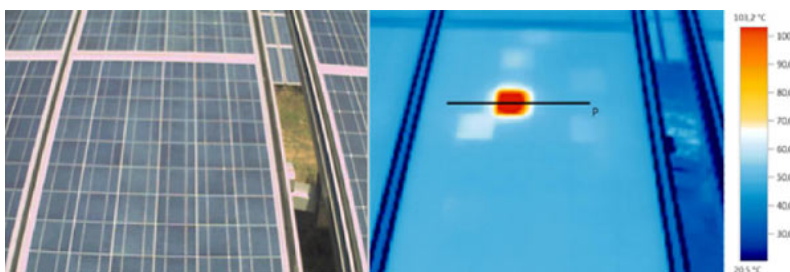
Pomocí termogramu je možné diskutovat řadu jevů z různých oblastí fyziky: transport tepla, tepelná vodivost – kulinářská fyzika (porovnání průběhu ohřevu vody na různých typech vařičů, tání ledu ve vodě o různé hustotě – environmentální fyzika a tání ledovců), závady v solárních panelech – porovnání reálného snímku a termogramu (environmentální fyzika – extrémně zahříváné plošky v solárním panelu mohou vést až k jeho požáru), prokrvení ušního boltce – lékařství, kriminalistika.



Obr. 5 Termogram ušního boltce



Obr. 6 Tání ledu, ohřev vody na plynovém vařiči a indukční varné desce



Obr. 7 Klasická fotografie a termogram solárních panelů

## Vyzařování mobilních telefonů – SAR

Všechna mobilní zařízení emitují ne-ionizující elektromagnetické záření v oblasti rádiových vln (bluetooth, wifi, mobilní telefony) a velmi nízkých frekvencí (emitované hardwarem telefonu). V České republice vysílají mobilní operátoři na frekvencích 800 MHz, 1 800 MHz a 2 600 MHz ve vysokorychlostní síti LTE (*Long Term Evolution*). Protože telefony držíme v blízkosti našeho těla, dochází k absorpci elektromagnetického záření. Zdravotní rizika souvisí zejména s tepelným působením pohlceného záření.

Množství záření, které je hmotou absorbováno, se vyjadřuje pomocí čísla SAR (z anglického *Specific Absorption Rate*). Číslo vyjadřuje výkon elektromagnetického záření, které absorbuje hmota s definovanými vlastnostmi (vztahuje se k jednotce hmotnosti). Pohlcené záření se v látce přeměňuje na teplo.

Pokud jde o mobilní telefony (smartphony), pak se SAR hodnotí především kvůli průniku záření do lidské mozkové tkáně. Při porovnávání mobilních telefonů podle SAR je třeba dát pozor na to, že v různých částech světa je uváděná hodnota SAR vztahována k různým hmotnostním jednotkám.

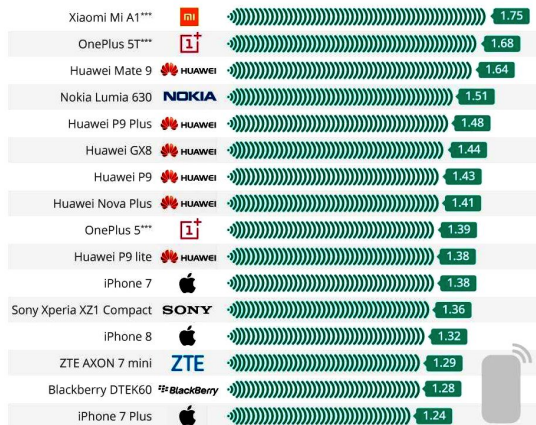
Existují hodnoty SAR, které nesmí žádný mobilní telefon překročit. V Evropě je limitní hodnotou 2,0 W/kg v deseti gramech tkáně pro hlavu a trup (končetiny 4 W/kg). V USA a v Austrálii jsou hodnoty SAR vztahovány na 1 gram tkáně. Hodnoty SAR se vztahují k frekvenční oblasti 10 MHz až 10 GHz, do které spadají i frekvence systému GSM. V jiných pásmech mohou být povolené limity jiné.

Vzorec pro výpočet hodnoty SAR lze psát jako

$$\text{SAR} = \frac{\sigma E^2}{\rho},$$

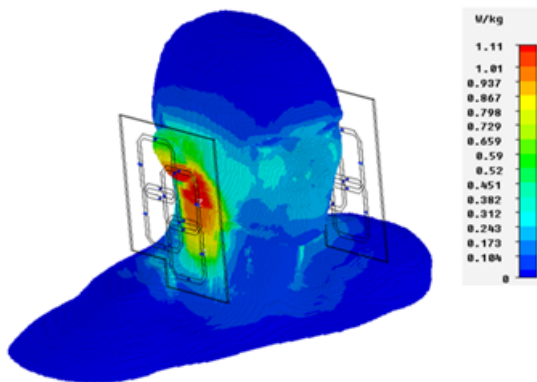
kde  $\sigma$  ( $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ) je elektrická měrná vodivost tkáně,  $E$  ( $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ ) je intenzita elektrického pole,  $\rho$  ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) je objemová hustota tkáně. Hodnota SAR tak představuje výkon absorbovaný na 1 kg tkáně, jednotka  $\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Hraniční hodnoty pro SAR lze odvodit jednoduchou úvahou. Lidské tělo lze modelovat jako 100 wattový zdroj tepla, povrch těla je asi  $1 \text{ m}^2$ , z podmínky rovnováhy absorbovaného a vyzařovaného výkonu dostáváme hledanou hodnotu. Pro SAR byla dohodou stanovena desetina této úrovně pro pracovníky s elektromagnetickým zářením, pro běžného uživatele je norma přísnější.



Obr. 8 Záření smartphonů ve wattech na kilogram (\*\*\*) (Forbes Statistika)

Měření SAR je realizováno pomocí modelů – lidská hlava je představována koulí, která je vyplněna tekutinou s elektrickými vlastnostmi jako má lidská tkáň. Ke kouli se v daném místě přikládá zkoumané zařízení, speciálními sondami je snímána intenzita elektromagnetického pole.



Obr. 9 Měření SAR

Ve školní laboratoři lze lidskou hlavu simulovat nafukovacím balónkem o dané velikosti, který naplníme kapalinou požadovaných vlastností – voda o teplotě 37 °C, rozpuštěné soli, které zaručí vlastnosti podobné lidské

tkáni. Místo speciální sondy lze použít termokameru a pomocí termogramu zkoumat změny teploty v místě kontaktu mobilního zařízení s povrchem modelu.

## Závěr

Uvedený příspěvek zahrnuje poznatky z různých oborů fyziky, využívá mezipředmětové vztahy (historie, chemie, environmentální problematika), ukazuje na aplikaci fyziky v každodenním životě.

I když např. téma využití termokamery ve výuce fyziky bylo zpracováno mnoha autory (viz příspěvky na Veletrhu nápadů učitelů fyziky či semináři ve Vlachovicích), považujeme za vhodné upozorňovat na možné využití moderní techniky ve výuce fyziky. Také vzhledem k tomu, že termokamery se stávají dostupnějšími a lze je pořídit jako součást mobilních telefonů (CAT S60), bude možné jejich širší využití ve výuce přírodovědných předmětů.

## Literatura

- [1] *Frňková, Z.*: Využití termokamery ve výuce fyziky. Bakalářská práce, Univerzita Palackého, Olomouc, 2013. <https://theses.cz/id/gfd4th>
- [2] *Pechala, F., Bednář, J.*: Příručka dynamické meteorologie. Academia, Praha, 1991.
- [3] <http://www.aeroweb.cz/clanek.asp?ID=2215&kategorie=3>
- [4] <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/130-zaklady-fyziky-letu>
- [5] Internetové zdroje:  
[http://fyzweb.cz/materialy/vlachovice/2013/materialy/tesar/c-tesar-termokamera\\_ve\\_fyzice.pdf](http://fyzweb.cz/materialy/vlachovice/2013/materialy/tesar/c-tesar-termokamera_ve_fyzice.pdf)  
<https://www.forbes.com/sites/niallmccarthy/2018/03/01/which-smartphones-emit-the-most-radiation-infographic/#61dec5b81b04>  
[https://mobil.idnes.cz/prehled-zareni-sar-0n3-/mob\\_tech.aspx?c=A151009\\_155202\\_mob\\_tech\\_oma](https://mobil.idnes.cz/prehled-zareni-sar-0n3-/mob_tech.aspx?c=A151009_155202_mob_tech_oma)  
<https://www.davidwolfe.com/cell-phones-highest-lowest-radiation/>  
<https://www.mobilmania.cz/clanky/mobilni-zahady-tajemny-udaj-sar/sc-3-a-1116722/default.aspx>  
<https://www.mobilmania.cz/clanky/sar-jak-nam-mobily-zari-do-hlavysc-3-a-1120169/default.aspx>



Zdroje vyobrazení

Obr. 1: <https://21století.cz/2006/05/19/letadlo-nebo-helikoptera/>  
<http://lelectviletadla.blog.cz/1308/deleni-letadel>

Obr. 2: <http://www.aeroweb.cz/clanek.asp?ID=2215&kategorie=3>

Obr. 3: <http://www.aeroweb.cz/clanek.asp?ID=2215&kategorie=3>

Obr. 7: <http://www.elektroprumysl.cz/merici-technika/fotovoltaicke-moduly-a-instalace-fotovoltaickych-elektroren-pod-kontrolou-termokamer>

Obr. 9: <https://www.mobilmania.cz/clanky/sar-jak-nam-mobily-zari-do-hlavy/sc-3-a-1120169/default.aspx>

# Udělejte si sami: jednoduché aplikace polovodičů (nejen) pro ZŠ

LEOŠ DVORÁK – ZDEŇKA KAMARÁDOVÁ

MFF UK, Praha – ZŠ a MŠ Ústavní, Praha

Polovodiče jsou důležitým prvkem moderních technologií a jako takové mají ve výuce fyziky na školách jednoznačné své místo. Svědčí o tom i řada článků v MFI v uplynulých více než dvaceti letech [1–13]. Na druhou stranu, většina těchto článků byla publikována již před zhruba dvěma desítkami let; v dalším období se zde s nimi setkáváme spíše ojediněle.

Že je tato problematika stále aktuální, dokládá nedávný článek [1]. Vytipoval a prezentoval řadu obvodů, zejména s tranzistory (ale i s integrovanými obvody), a uvedl množství odkazů převážně na internetové zdroje. Díky širší záběru však již neměl prostor věnovat se podrobněji tomu, jak dané obvody konstruovat, a neuvedl také konkrétní zkušenosti, jak si je učitelé vyrábějí a jak je používají ve výuce.

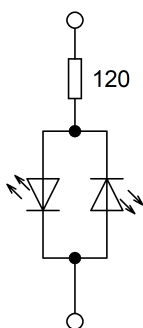
Náš příspěvek je k článku [1] v jistém smyslu komplementární. Soustředíme se na velmi jednoduché obvody se svítivými diodami a jedním

tranzistorem a ukážeme, jak je lze realizovat tak, aby byly pro žáky co nejnázornější. (Leccos může zájemce najít v publikaci [14], zde však přidáme některé další detaily či úpravy obvodů.) Popíšeme také zkušenosti s tím, když si dané obvody učitelé sami vyrábějí, a okomentujeme konkrétní možnosti jejich využití ve výuce fyziky.

Dále popsané obvody si v různých variantách vyrobilo od roku 2008 již více než sto padesát učitelů fyziky na seminářích projektu Heuréka [15]. Krátký průzkum v roce 2015, v němž odpovědělo třicet učitelů, ukázal, že devadesát procent z nich použilo tyto vyrobené pomůcky ve výuce, 37 % si vyrábělo další exempláře a 43 % nechalo tyto konstrukce vyrábět své žáky (blíže viz [16]). Tyto a podobné konstrukce se dnes šíří i prostřednictvím regionálních center Elixíru do škol [17]. Zkušenost ale ukazuje, že stále ještě zbývá hodně učitelů fyziky, kteří se s nimi nesetkali. Pokud tento článek ukáže některým dalším zájemcům, jak jednoduché může být začít si s polovodičovými prvky „hrát“ a názorně ukazovat jejich chování ve výuce, pak splní svůj účel.

## Dvě LED a rezistor

Používat svítivou diodu (tedy LED, slangově „ledku“) místo běžné malé žárovky bude zřejmě čím dál běžnější i v pokusech uvádějících žáky do elektrických obvodů. Drobným problémem může být skutečnost, že LED vede proud jen jedním směrem. Pro řadu pokusů je tedy vhodné použít velmi jednoduché zapojení se dvěma LED zapojenými antiparalelně (tedy „vedle sebe, ale obráceně“), jak to ukazuje obr. 1.



Obr. 1 Jednoduchá pomůcka se dvěma antiparalelně zapojenými LED (pro napájení z baterie 4,5 V nebo méně)

Fotografie ukazuje i jednoduchý způsob, jak danou konstrukci prakticky realizovat: do destičky z měkkého dřeva zatlouci malé mosazné hřebíčky (dají se sehnat ve větších železářstvích) a k nim součástky připájet. Zkušenost ukázala, že po několika pokusech zvládli pájení na hřebíčky účastníci i účastnice seminářů, kteří říkali, že snad páječku nikdy neudrželi v ruce.

Svítivé diody mohou být o průměru 5 nebo 10 mm, při demonstracích jsou samozřejmě lépe vidět větší LED. Dají se běžně sehnat v prodejnách elektronických součástek v cenách kus za několik korun. (Nabídka typů se ovšem dost mění, proto neuvádíme konkrétní označení. Je vhodné volit typy s vyšší svítivostí.) Rezistory stačí miniaturní, na nejmenší výkonové zatížení. Do dalších obvodů připojujeme pomůcku pomocí vodičů a krokosvorek (případně vodiči s krokosvorkami, viz [14]).

### Pro zájemce: trocha úvah o vhodné hodnotě odporu

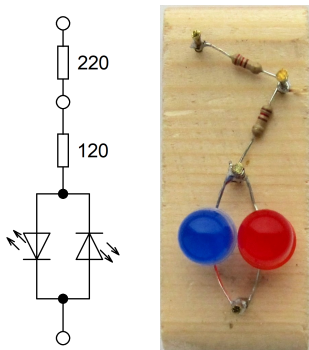
Podstatné je, že do série k LED je zapojen rezistor omezující proud. Pokud žáci už znají Ohmův zákon, lze daný obvod využít k diskusi, jak velký má mít tento rezistor odpor. Na svítivé diodě je napětí cca 2 V až 3 V (na červené o něco méně než 2 V, na zelené přes 2 V, na modré kolem 3 V). Připojíme-li náš obvod k ploché baterii o napětí 4,5 V, musí tedy na rezistoru být (teče-li proud červenou LED) asi 2,5 V. Někdy se v hantýrce říká, že rezistor „srazí“ napětí ze 4,5 V o 2,5 V, tedy na 2 V. Hodnotu proudu, který má protékat malými LED, udávají výrobci většinou 20 mA. Odtud  $R = U/I = 2,5 \text{ V}/0,02 \text{ A} = 125 \Omega$ . Hodnota 120  $\Omega$  uvedená ve schématu znamená, že červenou LED poteče z „čerstvé“ ploché baterie trochu více než 20 mA (což vydrží), naopak modrou LED poteče méně, cca 12 mA, ale i při tomto proudu svítí dostatečně.

V naší jednoduché konstrukci si tedy pro omezení proudu vystačíme s jediným rezistorem a nemusíme používat například složitější zapojení s tranzistorem, Zenerovou diodou a dalšími rezistory uvedené např. v [5]. Ovšem pozor! Pokud budeme chtít naši pomůcku připojit k baterii 9 V, musí být odpor rezistoru vyšší! Laskavý čtenář si jistě sám spočte, že vyhoví rezistor o odporu 330  $\Omega$ . Nebo, chcete-li ledku více šetřit, 390  $\Omega$ . Můžete také k zapojení na obr. 1 přidat do série rezistor o odporu 220  $\Omega$  a budete mít zapojení pro obě napájecí napětí (obr. 2).

Zkušenější čtenáři si teď nepochybně říkají, proč zde „rozpítváváme“ tak jednoduché a samozřejmé věci. Ovšem jde nám o to, že takto krok za krokem můžeme problematiku připojování LED k baterii diskutovat i se žáky. Minimálně proto, aby nepřipojovali LED k baterii rovnou, bez sériového rezistoru! Jistě, některé LED to vydrží, alespoň chvíli, ale ně-

které se přehřejí a přestanou svítit. A u některých, dle naší zkušenosti zejména u miniaturních typů o průměru 3 mm, může s poměrně hlasitým prasknutím odletět kus jejich plastové čepičky. Takže pozor i na oči!

Pro podrobnější rozbor mluví ještě jeden důvod: Abychom my ani naši žáci nebyli „otroky hodnot“, které vidíme někde ve schématu. Jistě, stačilo by autoritativně konstatovat „pro baterii 4,5 V použijte odpor 120  $\Omega$ , pro 9 V baterii 330  $\Omega$ “. Ale fyzika není o bezmyšlenkovitém přebírání hodnot uvedených ve schématu. A navíc, co když naše baterie bude mít 6 V nebo 12 V? Na jaké úrovni a s jakými žáky hodnotu odporu blíže diskutovat samozřejmě závisí na řadě konkrétních okolností, ale minimálně my sami bychom měli mít v dané problematice jasno.



Obr. 2 Pomůcka z obr. 1 doplněná o další rezistor pro napájení napětím 9 V

K uvedenému odvozování hodnoty odporu je možná vhodné zdůraznit ještě jednu věc: Ohmův zákon zde používáme pro napětí a proud na rezistoru, nikoli pro LED! Pro svítivou diodu Ohmův zákon neplatí, ta je prvkem výrazně nelineárním. (Opět trochu slangově můžeme říci, že LED se „snaží držet“ na sobě téměř konstantní napětí v poměrně širokém rozmezí hodnot proudu.)

### K čemu lze pomůcku využít

První pomůcku tedy máme hotovou. K čemu a jak ji využijeme? Možností je řada, například:

- Indikátor polarity napětí a rozlišení stejnosměrného a střídavého napětí.
- Demonstrace, že střídavé napětí opravdu střídá polaritu.

- Indikátor proudu (včetně směru proudu a rozlišení stejnosměrného a střídavého proudu, podle jasu LED můžeme alespoň kvalitativně usuzovat i na velikost proudu).
- Demontrace nabíjení a vybíjení kondenzátorů.
- Demontrace napětí indukovaného v cívice.

Samozřejmě, naše pomůcka má řadu omezení. Nemůže indikovat napětí nižší než asi 1,7 V, proud zvládá jen do zmíněných 20 mA, při demonstraci nabíjení a vybíjení kondenzátoru je potřeba mít kondenzátor o kapacitě minimálně mikrofardů či desítek  $\mu\text{F}$  (jinak je bliknutí diody téměř nepostřehnutelné) apod. Přesto jde o pomůcku užitečnou.

Jedna z výše zmíněných možností možná není na první pohled srozumitelná. Jak pomocí naší dvojice LED demonstrovat, že střídavé napětí opravdu střídá polaritu? Když pomůcku připojíme ke střídavému napětí dejme tomu 4 až 5 V o frekvenci 50 Hz (získanému transformací ze sítě), svítí obě LED. Když pomůckou, připojenou pomocí delších vodičů, rychle pohybujeme sem a tam, vidíme díky setrvačnosti oka střídavé proužky jedné a druhé barvy (obr. 3).



Obr. 3 Demontrace, že ve střídavém napětí se polarita opravdu střídá

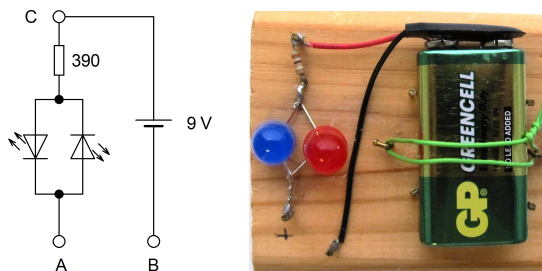
V tomto pokusu lze s případnými zájemci jít i trochu „do hloubky“, do větších podrobností. Například je-li střídavé napětí jen 3 V nebo o něco nižší, vidíme mezi proužky barev mezeru, při napětí dejme tomu 5 V a vyšším (zde se hodí pomůcka z obr. 2, abychom nepřetížili diody) mezera prakticky zmizí. Proč tomu tak je, může být drobnou problémovou úlohou.

### Jednoduchá zkoušečka

Doplňme-li naše zapojení baterií, získáme velice jednoduchou, ale užitečnou zkoušečku. Ve verzi s plochou baterií si ji učitelé vyráběli již na dílně [18]; verzi s malou 9 V baterií ukazuje obr. 4.

Mezi svorkami A a C funguje zkoušečka stejně jako výše uvedená zapojení, takže může sloužit třeba jako zkoušečka polarity baterií o napětí 3 V až 9 V. Mezi svorkami A a B ji můžeme využít na:

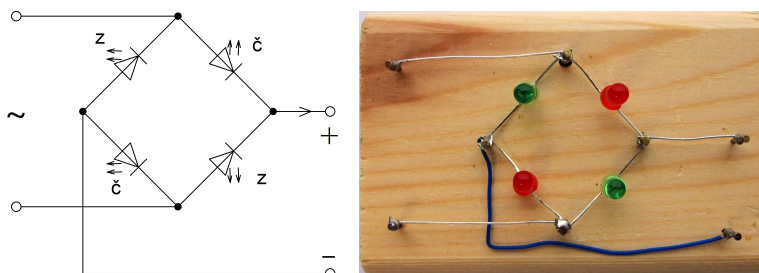
- zkoušení vodivého spojení (až do odporu desítek kiloohmů),
- zkoušení LED,
- zjišťování polarity diod a přechodů tranzistorů.



Obr. 4 Jednoduchá zkoušečka

### Graetzův usměrňovač s LED

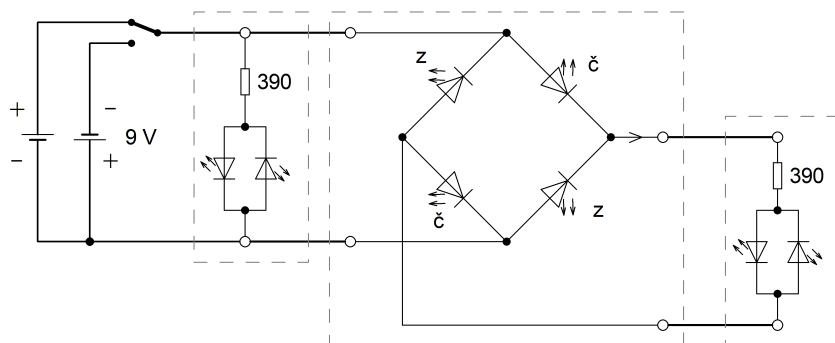
Inspirací k následující pomůcce byl před lety příspěvek viděný na konferenci Veletrh nápadů učitelů fyziky. Ve sborníku [19] je však popsán bohužel až příliš stručně, zde proto jednoduchou konstrukci této pomůcky a její využití okomentujeme podrobněji. Jedná se o Graetzův usměrňovač, v němž jsou na místě diod použity červené a zelené (nebo červené a modré) LED (obr. 5).



Obr. 5 Graetzův usměrňovač s LED

Když připojíme vstup usměrňovače ke střídavému napětí (vhodné je 5 V až 7 V), občas někoho překvapí, že LED nesvítí. To je ovšem samozřejmé. Není-li k výstupu usměrňovače připojena žádná zátěž, diodami neprochází proud. Stačí k výstupu připojit třeba rezistor (např. 390  $\Omega$ ) nebo naši pomůcku z obr. 2 a diody obou barev svítí.

Pro demonstraci činnosti usměrňovače ovšem potřebujeme ukázat, kudy proud teče při jedné a druhé polaritě vstupního střídavého napětí. Pro tento účel se osvědčilo složit z výše uvedených pomůcek obvod na obr. 6. Ke Graetzovu usměrňovači jsou k němu na vstup a výstup připojeny pomůcky se dvěma paralelními LED a na vstup přepínačem připojujeme baterie s opačnou polaritou. Názorně je vidět, že polarita napětí na vstupu se střídá, zatímco na výstupu svítí stále LED jedné barvy, tj. napětí je tam opravdu usměrněné.



Obr. 6 Propojení pomůcek pro demonstraci činnosti Graetzova usměrňovače

#### *Technické poznámky:*

Je třeba použít baterie o napětí 9 V. Napětí 4,5 V je příliš malé, protože proud prochází třemi LED v sérii a zejména na zelených (či modrých) LED toto napětí nestačí k jejich „otevření“. Na vstupu bychom mohli ušetřit jednu baterii, pokud bychom polaritu měnili dvojitým přepínačem – zapojení se dvěma bateriemi a jednoduchým přepínačem je ale pro žáky názornější. (Navíc, nemáme-li přepínač, stačí se prostě koncem přívodního vodiče střídavě dotýkat kontaktu jedné a druhé baterie.) Přepínačem lze „cvakat“ i v dosti rychlém rytmu (několikrát za sekundu) a navodit tak dojem skutečného střídavého napětí. Ve skutečnosti o střídavé napětí jde, ovšem nikoli s harmonickým ale s obdélníkovým průběhem.

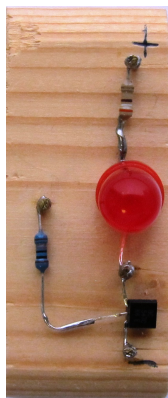
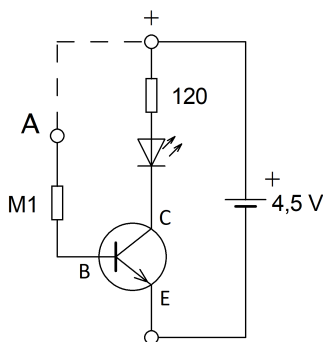
## Začínáme s tranzistorem, aneb „nikdo nejsme nekonečně odporný“

Zapojení s jedním tranzistorem zesilujícím proud je samozřejmě popsáno v řadě pramenů (je i v článku [1]). Obr. 7 ukazuje konstrukci na prkénku s hřebíčky. Připojíme-li baterii, LED nesvítí. Spojíme-li svorky A a + (ve schématu vyznačeno čárkovanou čarou), LED se rozsvítí. Tranzistor tedy funguje jako spínač.

Se žáky pak můžeme diskutovat, jak velký, či spíše jak malý je proud do báze B (tj. v našem případě do svorky A), kterým řídíme proud kolektorem C (tedy proud svítivou diodou, ten je asi 20 mA). Z Ohmova zákona můžeme spočítat, že proud rezistorem 100 k $\Omega$  je asi 40  $\mu$ A, tedy zhruba 500krát menší, než proud kolektorem. Přesvědčivější než teoretická úvaha (zejména pro žáky ZŠ) bude spojit svorky A a + nikoli přímo vodičem, ale přes pomůcku z obr. 1. Malý proud 40  $\mu$ A svítivou diodu v dané pomůcce prakticky nerozsvítí. (Jen ve tmě nebo při velkém zastínění je vidět slabý svit.) I bez měřicích přístrojů je tedy vidět, že velmi malým proudem řídíme větší proud.

### Technické poznámky:

V uvedeném zapojení jsme používali tranzistor BC547C. Písmeno C na konci typového označení znamená, že má velké proudové zesílení, právě zhruba 500 (podle údajů výrobce v rozmezí 420 až 800). Jde o součástku v doslova korunové hodnotě; současná cena dohledaná na webu jednoho z prodejců součástek je 1,50 Kč. Uspořádání vývodů tohoto tranzistoru najdete v [14] nebo samozřejmě v materiálech výrobců.



Obr. 7 Obvod demonstrující, že tranzistor zesiluje proud

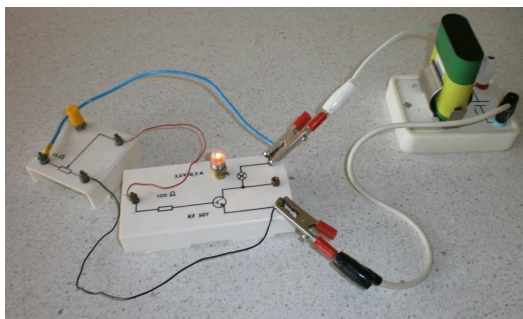


Vodivě spojit svorky A a + můžeme též vlastními prsty resp. přes vlastní tělo. (Na jednu svorku přiložíme prst, kablíkem připojeným k druhé svorce se dotkneme třeba nosu. . . ) I v tomto případě LED v kolektoru svítí, byť většinou ne naplno. Dokládá to, že námi prochází slabý elektrický proud, aneb (slovy prvního z autorů), že „nikdo nejsme nekonečně odporový“. Podobně můžeme zkoumat vodivost dalších materiálů.

Pokud by někdo měl hodně suché ruce a svit LED byl velmi slabý, můžeme proud zesílit druhým tranzistorem. Toto „vylepšené zapojení“ se navíc ukázalo užitečné i při pokusech z elektrostatiky. Zaslouží si podrobnější popis, který by ovšem tento článek již příliš protáhl; budeme mu proto věnovat samostatný příspěvek.

### Zkušenosti s využitím těchto zapojení na ZŠ<sup>1)</sup>

Na naší škole mají žáci výhodu zachování dílenské výuky, proto se mohou s polovodičovými součástkami seznámit více, než umožňuje pouze dotace hodin fyziky. Prvotně se seznamují s vlastnostmi diod a tranzistorů v 6. ročnících, kdy pracují s elektronickými stavebnicemi Otty Jandy (žákovská souprava z 80. let, viz stručná informace v [20]) nebo s jednotlivými díly žákovské soupravy pro vyučování elektřině na ZŠ z 60. let a sledují pouze efekty – žárovka při zapojení s diodou svítí/nesvítí, LED dioda v propustném/závěrném směru svítí/nesvítí. Zkoušejí i základní využití tranzistoru jako zesilovače či v zapojení jako stmívač.



Obr. 8 Zapojení využívající stavebnice O. Jandy

Blíže se s funkcemi základních polovodičových součástek – diod a tranzistorů – seznamují chlapci v hodinách pracovních činností v 8. ročníku.

<sup>1)</sup>Jde o konkrétní zkušenosti spoluautorky článku z výuky na ZŠ; text této části je proto psán v první osobě.

V rámci hodin pracovních činností se hoši učí i základům pájení. Motivovaná náměty ze seminářů Heuréky, rozhodla jsem se rozšířit základní výbavu stavebnic o další moduly, které si žáci sami vyrábí. Zpočátku opravovali poškozené moduly s LED diodami ze stavebnic, později vyráběli nové, aby byl dostatek pomůcek na experimenty (obr. 9). Na Heuréce a dalších seminářích mne zaujalo protisměrné zapojení LED diod pro jeho názornost. Tyto moduly nadchly dle očekávání i samotné žáky.



Obr. 9 Pomůcky vyrobené žáky 8. ročníku

Zatím nejnáročnější zapojení, které děti vyráběly samy, byl Graetzův můstek (obr. 10). Výroba modulů s LED diodami je pro žáky velmi atraktivní a rádi s nimi pracují i ve výuce fyziky. Barevné rozlišení pomocí LED diod napomáhá žákům k lepšímu pochopení směru procházejícího proudu.



Obr. 10 Graetzův můstek vyrobený žáky

Na základě předchozích zkušeností není již pro chlapce v 9. ročníku učivo o polovodičích takovou neznámou. Pokusy jsou jim bližší, někdy si i vzpomenu, že je již dělali. Snažím se proto do výuky zařadit i praktickou práci týmů složených z dívek a chlapců. Ti ochotněji dívkám v případě potřeby pomohou se zapojováním a rádi se pochlubí, že dané součástky sami předchozí rok vyráběli či opravovali.

Vzájemná konzultace s kolegy a samotná aktivní účast v projektu OP VVV mi přinesla mnoho dalších nápadů pro využití polovodičů ve výuce, jako je pomůcka pro určování elektrostatického náboje, náměty na větší využití práce s fotodiodami a fotorezistory. Ráda bych s žáky zkusila vytvořit i moduly s tranzistory, protože obvody s nimi ze stavebnic jsou pro ně rovněž atraktivní – spínač hladiny, stmívač apod. Jako zajímavou laboratorní práci považuji nápad vytvoření stupnice u termistoru.

Mám zkušenost, že pochopení vnitřní struktury a činnosti polovodičových součástek složitějších než je dioda, je pro většinu žáků obtížné. Proto se domnívám, že zejména na základní škole bychom měli děti zejména zaujmout efekty polovodičových součástek. A to i za cenu, že si podrobnější informace z časových důvodů v případě zájmu vyhledají sami, či se dozvědí v kroužcích nebo na vyšším stupni školy. Již samotné podněcení zájmu o toto učivo neobvyklými funkcemi polovodičových součástek má dle mého názoru významnou úlohu pro další bádání a touhu po poznání žáků. Možnost vytvořit si nějakou konstrukci nebo pomůcku je příjemným bonusem. Po zvládnutí základů pájení se děti rády pouštějí do složitějších zapojení. Například na festivalu „Řemesla živě“, který pořádá Novoměstská radnice, si někteří moji žáci vyrobili za pomoci středoškoláků blikáč, což už je poměrně náročné zapojení.

## Poděkování

Vznik tohoto příspěvku byl podpořen projektem OPVVV CZ.02.3.68/0.0/0.0/16\_011/0000664 „Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností“.

## Literatura

- [1] *Adámek, P., Varnuška, P.*: Jednoduché elektronické obvody s možným univerzálním použitím, MFI, roč. 27 (2018), č. 3, s. 206–2016.
- [2] *Adámek, P., Tesař, J.*: Školní generátor TTL a synchronizační obvod, MFI, roč. 23 (2014), č. 3, s. 130–139.

- [3] *Baránek, M.*: Optické diody v pokusech z fyziky, MFI, roč. 18 (2008/2009), č. 10, s. 597–611.
- [4] *Kusala, J.*: Pár pokusů z elektřiny, MFI, roč. 17 (2007/2008), č. 9, s. 537–540.
- [5] *Hubeňák, J.*: Superjasné LED, MFI, roč. 16 (2006–2007), č. 8, s. 473–478.
- [6] *Füzerová, J., Kollár, P.*: Výklad činnosti tyristora pre študentov gymnázií, MFI, roč. 11 (2001/2002), č. 2, s. 101–104.
- [7] *Lepíl, O.*: Operační zesilovač v učivu o magnetismu, MFI, roč. 8 (1998/1999), č. 3, s. 147–154.
- [8] *Lepíl, O.*: EMA a tyristor, MFI, roč. 7 (1997/1998), č. 10, s. 598–605.
- [9] *Hrdý, J.*: Spínací obvody s výkonovými tranzistory, MFI, roč. 7 (1997/1998), č. 9, s. 546–556.
- [10] *Mušková, M.*: Čierne skrinky s diodami, MFI, roč. 7 (1997/1998), č. 8, s. 486–492.
- [11] *Dufková, M.*: EMA – demonstrační stavebnice pro pokusy z elektřiny, magnetismu a elektroniky, MFI, roč. 7 (1997/1998), č. 4, s. 215–217.
- [12] *Svoboda, M.*: Fotorezistor a fotodioda v obvodech s tranzistorem, MFI, roč. 6 (1996/1997), č. 4, s. 193–196.
- [13] *Svoboda, M.*: Přejchod PN a polovodičová dioda, MFI, roč. 5 (1995/1996), č. 8, s. 417.
- [14] *Dvořák, L.*: Polovodiče a jejich aplikace. P3K, Praha, 2012. Dostupné online: <http://kdf.mff.cuni.cz/projekty/oppa/polovodice.pdf>
- [15] Projekt Heuréka. Online: <http://kdf.mff.cuni.cz/heureka>
- [16] *Dvořák, L.*: How to Increase Teachers' Self-Confidence: An Example Concerning Semiconductors. In: Proceedings of the conference GIREP-EPEC 2015. University of Wrocław, 2016, s. 292–297.
- [17] <https://www.elixirdoskol.cz/regionalni-centra/>
- [18] *Dvořák, L.*: Nebojte se pájet a postavte si jednoduchou zkušičku. In: Dílny Heuréky 2003–2004. Prometheus, Praha, 2005, s. 79–88. Dostupné online: [http://kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureky\\_2003-2004.pdf](http://kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureky_2003-2004.pdf)
- [19] *Čapková, G.*: Grätzův usměrňovač. In: Sborník z konference Veletrh nápadů učitelů fyziky VI, Univerzita Palackého, Olomouc, 2001, s. 87–88. Dostupné online: [http://vnuf.cz/sbornik/rocniky/Veletrh\\_6\\_\(Olomouc\\_2001\).pdf](http://vnuf.cz/sbornik/rocniky/Veletrh_6_(Olomouc_2001).pdf)
- [20] *Elektrořáj*: Elektrotechnická stavebnice Z3/III. Dostupné online: <http://www.elektroraj.cz/2018/03/22/elektrotechnicka-stavebnice-z3-iii/>

# INFORMATIKA

## Aritmetický průměr posloupnosti (Úlohy z MO kategorie P, 37. část)

PAVEL TÖPFER

MFF UK, Praha

V našem dlouhodobém seriálu o zajímavých úlohách z Matematické olympiády kategorie P (programování) jsme se již vícekrát věnovali různým úlohám o číselných posloupnostech. Tentokrát téma posloupností obohatíme o jednu úlohu z krajského kola 63. ročníku MO (školní rok 2013/14), která velmi názorně ukazuje, jak užitečné při řešení úloh může být použití různých jednoduchých programátorských postupů, jako jsou vhodný předvýpočet, prefixové součty posloupnosti nebo třeba šikovné seřazení dat. Začneme jako obvykle přesným zadáním úlohy.

\* \* \* \* \*

Dostanete číslo  $k$  a posloupnost  $n$  čísel. Napište program, který v zadané posloupnosti čísel určí nejdelší souvislou podposloupnost, jejíž aritmetický průměr je přesně roven hodnotě  $k$ .

*Popis vstupu:*

Na prvním řádku vstupu jsou dvě čísla  $n$ ,  $k$ . Na druhém řádku je  $n$  kladných celých čísel: prvky posloupnosti. Můžete předpokládat, že vstupní posloupnost čísel vždy obsahuje alespoň jednu souvislou podposloupnost s průměrem prvků přesně rovným  $k$ . Můžete také předpokládat, že se součet všech prvků posloupnosti vejde do běžné celočíselné proměnné.

*Popis výstupu:*

Program vypíše dvě celá čísla – pozici začátku a pozici konce nejdelší souvislé podposloupnosti s aritmetickým průměrem  $k$ . Pozice čísel v po-

sloupcosti číslujeme od 1 do  $n$ . Pokud existuje více různých vhodných podposloupností téže maximální délky, program vypíše jednu libovolnou z nich.

*Hodnocení:*

Plných 10 bodů získáte za řešení, které zvládne efektivně vyřešit libovolný vstup délky  $n < 200\,000$ .

Až 6 bodů dostanete za řešení, které efektivně vyřeší každý vstup délky  $n < 5\,000$ .

Za jakékoliv funkční řešení bez ohledu na jeho efektivitu můžete získat až 4 body.

*Příklady:*

*vstup*            7 4  
                  1 1 3 8 1 5 2

*výstup*            4 7

Existují tři podposloupnosti s průměrem rovným přesně 4, a to (1, 3, 8), (3, 8, 1) a (8, 1, 5, 2). Třetí z nich je nejdelší, takže vypíšeme pozici jejího začátku a konce.

*vstup*            4 5  
                  2 3 5 1

*výstup*            3 3

\* \* \* \* \*

Ukážeme si několik způsobů řešení, které se budou lišit svou časovou složitostí. Nejsnadnějším řešením, které napadne asi každého, je vyzkoušet postupně každý souvislý úsek posloupnosti a spočítat jeho aritmetický průměr. Ze všech úseků s průměrem rovným přesně  $k$  si průběžně pamatujeme pozici toho dosud nejdelšího. V programu použijeme dva cykly určující začátek a konec úseku, ve třetím vnořeném cyklu budeme počítat součet prvků v aktuálním úseku. Spočítaný součet prvků v úseku vždy vydělíme jejich počtem a výsledek porovnáme s hodnotou  $k$ . Časová složitost tohoto řešení je  $O(n^3)$ , neboť uvažujeme  $O(n^2)$  různých úseků a každý z nich procházíme v čase  $O(n)$ .

```

program Prumer1;
var n, k: integer;
    a: array[1..200000] of integer;
    zac, kon, soucet: integer;      {zkoumaný úsek}
    zacv, konv: integer;           {výsledný úsek}
    i: integer;

begin
  read(n, k);
  for i:=1 to n do read(a[i]);
  zacv:=1; konv:=0;
  for zac:= 1 to n do
    for kon:=zac to n do
      begin
        soucet:=0;
        for i:=zac to kon do
          soucet:=soucet + a[i];
        if (soucet = (kon-zac+1)*k) and (konv-zacv < kon-zac) then
          begin zacv:=zac; konv:=kon end
        end;
      writeln(zacv, konv)
    end.

```

Program není moc zajímavý, ale všimněte si, že jsme v něm použili jeden šikovný technický trik. Chtěli jsme se vyhnout operaci dělení, která se provádí v pomalejší reálné aritmetice a navíc může být nepřesná. Označíme-li součet prvků ve zkoumaném úseku *soucet* a jejich počet *p*, pak místo testování, zda  $soucet/p = k$  v programu raději testujeme, zda  $soucet = p * k$ . Výsledek je matematicky ekvivalentní, výpočet se ale provede v celočíselné aritmetice, tedy rychleji a zaručeně přesně. Podobný obrat můžete využívat i v jiných vašich programech.

Za výše uvedené řešení s asymptotickou časovou složitostí  $O(n^3)$  mohli soutěžící získat nejvýše 4 body z celkových 10 možných. Zkusíme proto výpočet programu zrychlit. Často pomůže zamyslet se, zda se některé operace neprovádějí při výpočtu zbytečně vícekrát. V právě popsaném řešení spočívá neefektivita výpočtu zejména v tom, že součet prvků v každém zkoumaném úseku počítáme zvlášť, takže opakovaně sčítáme stejná čísla. Namísto toho můžeme součet prvků ve zkoumaném úseku počítat průběžně při každém zvýšení proměnné *kon*. Zvýšením proměnné *kon* o 1 se předchozí zkoumaný úsek prodlouží o jeden prvek posloupnosti, takže součet nového úseku získáme přičtením tohoto prvku  $a[kon]$  k součtu předchozího úseku. Dostáváme tak řešení, které opět projde všech  $O(n^2)$  souvislých úseků zadané posloupnosti, ale každý z nich zpracuje v konstantním čase.

Časová složitost řešení se tak sníží na  $O(n^2)$ , což v soutěži stačilo na zisk až 6 bodů.

```
program Prumer2;
var n, k: integer;
    a: array[1..200000] of integer;
    zac, kon, soucet: integer;      {zkoumaný úsek}
    zacv, konv: integer;           {výsledný úsek}
    i: integer;

begin
read(n, k);
for i:=1 to n do read(a[i]);
zacv:=1; konv:=0;
for zac:= 1 to n do
  begin
soucet:=0;
for kon:=zac to n do
  begin
soucet:=soucet + a[kon];
if (soucet = (kon-zac+1)*k) and (konv-zacv < kon-zac) then
  begin zacv:=zac; konv:=kon end
end
end;
writeln(zacv, konv)
end.
```

Řešením s kvadratickou asymptotickou časovou složitostí naše úsilí ještě nekončí. Pro další zrychlení výpočtu ale budeme potřebovat přetransformovat náš problém do trochu jednodušší podoby. Je totiž obtížné ve zkoumaných úsecích posloupnosti sledovat a porovnávat zároveň dva parametry, na nichž závisí aritmetický průměr – totiž délku úseku a součet jeho prvků. Hodilo by se nám sledovat jenom jeden parametr.

Má-li mít výsledný úsek původní posloupnosti aritmetický průměr  $k$ , nabízí se možnost upravit posloupnost tak, že snížíme hodnotu všech jejích prvků právě o  $k$ . Stejný úsek v takto upravené posloupnosti pak bude mít aritmetický průměr 0. Platí to samozřejmě i naopak: úsek s průměrem 0 v upravené posloupnosti má v původní posloupnosti aritmetický průměr  $k$ . Je tomu tak proto, že když od každého prvku posloupnosti odečteme  $k$ , snížíme tím aritmetický průměr libovolného úseku přesně o  $k$ .

Nyní provedeme v naší úvaze druhý krok. Jakýkoliv úsek posloupnosti má aritmetický průměr rovný 0 právě tehdy, když má součet 0. Při hledání úseků s nulovým součtem přitom už nemusíme hledět na jejich délku. Náš původní problém jsme tedy převedli na jinou, jednodušší úlohu: v upra-



vené posloupnosti nalézt nejdelší souvislý úsek se součtem 0. Pozice tohoto úseku pak přímo určuje pozici nejdelšího souvislého úseku s aritmetickým průměrem  $k$  v původní posloupnosti. Zadanou posloupnost čísel si tedy nejprve upravíme tak, že od každého prvku odečteme  $k$ . To je jednoduchý *předvýpočet* s lineární časovou složitostí  $O(n)$ . Od této chvíle budeme slovem „posloupnost“ označovat tuto novou posloupnost, ve které hledáme úseky se součtem 0.

Kdybychom posloupnost jednoduše procházeli a počítali v ní součty všech možných souvislých úseků, dostali bychom se opět k řešení s časovou složitostí  $O(n^3)$  nebo s trochou šikovnosti  $O(n^2)$ . Úseky ale můžeme počítat i jiným způsobem, využijeme tzv. *prefixové součty*. To je další z technických obrátů, který se při práci s číselnými posloupnostmi často využívá. Vytvoříme si pomocné pole  $P[0..n]$  a naplníme ho takovými hodnotami, aby hodnota  $P[i]$  byla rovna součtu prvních  $i$  prvků naší posloupnosti. Prvkům takového pole  $P$  říkáme prefixové součty dané posloupnosti. Hodnoty pole  $P$  snadno spočítáme jedním průchodem v čase  $O(n)$ . Položíme  $P[0]=0$ , neboť úsek nulové délky má i nulový součet. Každé další  $P[i]$  určíme jako součet již známé hodnoty  $P[i-1]$  a  $i$ -tého prvku posloupnosti. Když potom potřebujeme zjistit součet všech čísel v souvislém úseku posloupnosti od pozice *zac* do pozice *kon* (včetně prvků z obou těchto krajních pozic), spočítáme ho v konstantním čase jako rozdíl  $P[kon] - P[zac - 1]$ .

Vraťme se nyní k naší úloze. Už víme, že pomocí dalšího předvýpočtu s lineární časovou složitostí získáme pole  $P$  prefixových součtů naší posloupnosti. V posloupnosti hledáme souvislé úseky s nulovým součtem, tzn. úseky, pro které platí  $P[kon] - P[zac - 1] = 0$  neboli  $P[kon] = P[zac - 1]$ . Jinými slovy řečeno, zajímají nás dvojice stejných hodnot v poli  $P$ . Chceme určit v poli  $P$  takovou dvojici stejných čísel, aby tato čísla byla od sebe co nejvíce vzdálena. Tím bude určen nejdelší úsek posloupnosti s nulovým součtem.

Nejjednodušší cestou řešení je využít obyčejné třídění. To je v programování opět jedna z často užívaných metod – při práci s daty se mnohdy vyplatí seřadit si je jinak. Místo pole s hodnotami prefixových součtů  $P[0], P[1], P[2], \dots, P[n]$  vytvoříme pole uspořádaných dvojic  $(P[0], 0), (P[1], 1), (P[2], 2), \dots, (P[n], n)$ . S každým prefixovým součtem si tedy uložíme navíc informaci, o kolikátý prefixový součet se jedná. Toto pole nyní vzeštně uspořádáme primárně podle první souřadnice, tedy podle odpovídajícího prefixového součtu, a sekundárně podle indexu, který mu odpovídá. V takto uspořádaném poli budou všechny indexy, kterým odpovídá

stejná hodnota prefixového součtu, tvořit vždy souvislý rostoucí úsek. Nejvzdálenější dvojici indexů, kterým odpovídá stejný prefixový součet, pak dokážeme snadno určit při jednom průchodu polem, tzn. s lineárním časovou složitostí  $O(n)$ .

Celé řešení zadané úlohy se tedy skládá ze čtyř postupně prováděných fází:

- úprava zadané posloupnosti snížením všech prvků o  $k$ ,
- výpočet prefixových součtů  $P[i]$  takto upravené posloupnosti,
- seřazení pole dvojic  $(P[i], i)$  výše popsáním způsobem,
- nalezení výsledku průchodem seřazeného pole.

První, druhá a čtvrtá fáze výpočtu mají asymptotickou časovou složitost  $O(n)$ . Časově nejnáročnější je setřídění pole ve třetí fázi, které provedeme některým ze standardních třídících algoritmů v čase  $O(n \log n)$ . Výsledná časová složitost řešení úlohy je proto  $O(n \log n)$ . Za řešení s touto složitostí obdrželi soutěžící plný počet bodů.

```

program Prumer3;
var n, k: integer;
    a: array [0..200000] of
        record p: integer;           {prefixový součet}
              x: integer;           {index}
        end;
    zac, kon: integer;             {zkoumaný úsek}
    zacv, konv: integer;           {výsledný úsek}
    c, i: integer;

begin
{Načteme posloupnost, zároveň hned snižujeme hodnoty o "k"
 a počítáme prefixové součty posloupnosti:}
  read(n, k);
  a[0].p:=0; a[0].x:=0;           {úsek nulové délky}
  for i:=1 to n do
    begin
      read(c);                    {i-tý prvek posloupnosti}
      a[i].p:=a[i-1].p + c - k;   {i-tý prefixový součet}
      a[i].x:=i                   {jeho index je "i"}
    end;

{Seřazení pole "a" vzestupně,
 primárně podle "p" a sekundárně podle "x":}
  Sort(a);

{Určení výsledku:}
  zacv:=1; konv:=0;

```

```

zac:=0; kon:=0;
while kon < n do
  begin
    while (kon < n) and (a[kon+1].p = a[kon].p) do kon:=kon+1;
    if a[kon].x-a[zac].x > konv-zacv then
      begin zacv:=a[zac].x; konv:=a[kon].x end;
    zac:=kon+1; kon:=kon+1
  end;
writeln(zacv+1, konv)
end.

```

V programu jsme použili drobný technický trik na úsporu paměti. Všimněte si, že po spočítání prefixových součtů upravené vstupní posloupnosti už nikdy nebudeme potřebovat původní posloupnost čísel. Nemusíme si ji proto ani ukládat. Postupně načítané prvky posloupnosti ihned snižujeme o  $k$ , průběžně z nich rovnou počítáme prefixové součty a až tyto hodnoty prefixových součtů si ukládáme do pole. Navíc si do tohoto pole ukládáme hned dvojice typu  $(P[i], i)$ , které budeme následně třídit. V programu tak vystačíme jen s jediným polem velikosti  $n$ .

Ve výše uvedené programové ukázce jsme pro jednoduchost a pro zkrácení zápisu vynechali deklaraci třídící procedury *Sort*. Zde by se použil některý standardní třídící algoritmus s asymptotickou časovou složitostí  $O(n \log n)$ , například třídění haldou nebo třídění sléváním.

Na závěr poznamenejme, že nalézt v poli  $P$  dvojici stejných hodnot s maximální vzájemnou vzdáleností můžeme i jinými způsoby. Pokud znáte některé pokročilejší datové struktury, jako jsou třeba vyvažované binární vyhledávací stromy, můžete je zde výhodně využít. Pole prefixových součtů  $P$  budeme postupně procházet a do binárního vyhledávacího stromu si budeme ukládat všechny navzájem různé hodnoty dosažených prefixových součtů. Ke každé z nich si zároveň uložíme index jejího prvního výskytu. Když tedy v  $i$ -tém kroku zpracováváme hodnotu  $P[i]$ , zkusíme ji nejprve vyhledat ve stromě. Pokud tam ještě není, přidáme do stromu dvojici údajů  $(P[i], i)$ . Pokud tam už je, pak rozdíl u ní uloženého indexu a aktuálního indexu určuje délku dalšího nalezeného úseku s nulovým součtem. Průběžně si zaznamenáváme maximum z takto nalezených délek, jemu příslušné indexy budou výsledkem řešení úlohy.

Časová složitost této varianty řešení je rovněž  $O(n \log n)$ . Výpočet se provádí v  $n$  krocích a vyhledání resp. přidání každé hodnoty ve vyváženém binárním vyhledávacím stromu s  $n$  uzly má časovou složitost  $O(\log n)$ .

# Podpora infromatického myšlení s využitím Lego robotů

FILIP FRANK – JAN FRANK

Fakulta pedagogická ZČU v Plzni

Infromatické myšlení a digitální gramotnost jsou pojmy, které jsou v současné době velmi skloňované odbornou i laickou veřejností. Učitelé na základních a středních školách by měli tyto kompetence u žáků rozvíjet, a to nejen v rámci hodin informatiky, často ovšem chybí náměty, kterými by se mohli vyučující řídit či inspirovat. Článek je proto věnován metodice, která vznikla v rámci diplomové práce na Katedře výpočetní a didaktické techniky Fakulty pedagogické ZČU v Plzni a může být jistou inspirací pro základoškolské a středoškolské učitele (nejen) informatiky. Testování proběhlo v rámci dvou projektových dnů na Gymnáziu v Aši a díky vzniklé případové studii bylo možné metodiku zpětně analyzovat. Obecným záměrem při tvorbě uvedené metodiky byla podpora infromatického myšlení prostřednictvím řešení zadaného problému spjatého se stavbou a programováním vlastního Lego robota. Při zmíněném programování jsou využívány bloky kódu, můžeme tedy hovořit o objektově orientovaném programování, což je v souladu s podmínkami infromatického myšlení, jak je definují Wang [1] či Wingová [2].

## Konkrétní cíle a postupy vedoucí k jejich naplnění

Stanovené cíle představují dílčí kroky vedoucí ke schopnosti žáků pracovat s Lego roboty a plnit zadané úkoly. Je zřejmé, že se žáci nejprve musí seznámit s obecnými možnostmi stavebnice a s programovacím prostředím Lego robota, je třeba žákům ukázat, jakým způsobem mohou jednotlivé stavební bloky propojovat, odstraňovat nebo nastavovat. Žáci musí také pochopit základní konstrukce programování, jako například cykly, podmínky nebo přepínače. Konkrétní cíle tedy mohou být formulovány následovně:

1. Žák vysvětlí a používá základní konstrukce programování, jako například cykly, podmínky nebo přepínače.

2. Žák používá části stavebnice a propojuje jednotlivé díly tak, aby dosáhl svého cíle.
3. Žák používá programovací prostředí Lego robotů k vyřešení zadaného úkolu, ale i k dosažení vlastních cílů s nimi.
4. Žák naprogramuje Lego robota v programovacím prostředí způsobem, aby robot plnil požadovanou funkci.

### ***1. Základní konstrukce a prvky programovacího jazyka***

Základními konstrukcemi a prvky programování rozumíme cykly, podmínky, konstanty a proměnné. V době realizace testování na Gymnáziu v Aši nebyli žáci seznámeni s žádným způsobem programování a bylo nezbytné začít od úplných základů. Tento stav lze očekávat i na řadě dalších škol a je tedy možné využít popsaného přístupu.

Základní pojmy lze žákům objasnit výkladem, který prokládáme krátkou diskusí. Získané poznatky musí žáci okamžitě aplikovat při řešení jednoduchých teoretických problémů ve skupinách. Hlavním záměrem ovšem je rozvíjet informatické myšlení s využitím Lego robotů. Netrváme proto na striktním užívání vývojového diagramu a správném značení, postačující je popis běžným jazykem.

Jedním z jednoduchých úkolů pro žáky může být popis cesty do školy zvoleného zástupce skupiny pomocí základních „příkazů“ ve spojení s podmínkami. To znamená, že pokud žák přijde k silnici, nestačí napsat „Rozhlédnu se!“, je potřeba rozhlédnutí buď dříve definovat, abychom jej mohli používat jako funkci, nebo pokaždé vypisovat, co je rozhlédnutí a za jakých podmínek žák přejde. Skupiny po dokončení úkolu postupně před třídou prezentují svůj postup cesty do školy. Ostatní žáci reagují na případné chyby a pokouší se je opravit. Vyučující poukazuje na chyby, kterých si ne všimli ostatní žáci, případně odůvodňuje, proč se o chybu nejedená.

Mohlo by se zdát, že v tomto bodě metodiky nedochází k podpoře informatického myšlení, nicméně žáci jsou ve skupinách nuceni rozebrat problém cesty do školy na dílčí podproblémy a nahlížet na problém z několika stran. Nejenže musí očekávat příjezdějí auto při přecházení, ale už samotná volba cesty může být nezvyklým úhlem pohledu na věc. Žáci se navíc musí dopředu rozhodnout, která cesta bude pro jejich popis nejvhodnější. V neposlední řadě je rozvíjena schopnost komunikace nebo řešení problému v daném čase.

Pokud jsou žáci schopni vyřešit zadaný problém, můžeme považovat cíl „Žák vysvětlí a používá základní konstrukce programování, jako například cykly, podmínky nebo přepínače.“ za splněný.

## 2. Používání stavebnice Lego

Čtenář by mohl namítnout, že tento cíl je při záměru rozvíjet u žáků informatické myšlení nadbytečný, nicméně nelze předpokládat, že všichni žáci již dříve přišli do styku s používanou stavebnicí Lego, zvláště pak na základní škole, kde se setkávají žáci z různých kulturních a sociálních prostředí. Při seznamování žáků s obecnými možnostmi stavebnice Lego se zprvu zaměříme na jednotlivé díly a jejich možnosti využití, následně přejdeme k řídicí jednotce a rozdělení jednotlivých konektorů. Žáky je dobré upozornit, že na řídicí jednotce se nachází konektory určené pro motory a konektory určené pro senzory, které jsou sice na první pohled stejné, ale odlišné je označení – čísla a písmena.

Začínáme jednoduššími konstrukcemi, kdy žáci zpravidla pracují ve skupinách, což je mimo jiné dáno i finanční náročností pořízení stavebnic Lego, kdy cena základní sady se pohybuje kolem 8 000 Kč [3]. Lze tedy očekávat, že počet stavebnic bude nižší než je počet žáků ve třídě, a proto je lepší již předem počítat s faktem, že žáci budou pracovat ve dvojicích či trojicích. Vyšší počet však nedoporučujeme.

První zadávané konstrukce žákům by měly představovat jednoduché útvary, u kterých je ovšem nutné použít i jiné než jen základní komponenty stavebnice. Jako příklad lze uvést šestiúhelník, pro který jsou sice ve stavebnici připraveny zahnutné díly, nicméně při sestavování útvaru je nutné užít i další spojovací materiál, přechodové díly a žáci navíc musí vyřešit problém s propojením dílů ležících vedle sebe. Je důležité, aby konstrukci dokončily všechny, i pomalejší, skupiny než se přejde k náročnějším úkolům.

V další fázi požadujeme od žáků jednoduchou konstrukci splňující zadané vlastnosti. Kupříkladu je možné požadovat konstrukci automobilu se dvěma motory. Žákům může být zadán úkol sestavit tříkolku se dvěma zadními, nebo dvěma předními koly (volby předního či zadního pohonu je na žácích). Každé z poháněných kol bude mít vlastní motor, aby bylo možné naprogramovat zatáčení smykem (tzn. vozidlo je schopné se otočit na místě na základě opačného směru rotace poháněných kol). Místo třetího kola může vyučující žákům doporučit použití rejdrovací kuličky. V konstrukci musí být pochopitelně zakomponována řídicí jednotka, designové prvky jsou pak na vlastní kreativité žáků. Díky této aktivitě se žáci nejen detailněji seznámí s možnostmi stavebnice, ale zároveň musí vyřešit některé konstrukční problémy, jako například způsob pohybu a zatáčení vozidla či přejezd po nerovnostech.

Pro tento bod metodiky jsou zřejmě nejvýraznějšími částmi infor-  
matického myšlení schopnost abstrakce, komunikace s ostatními a náhled na  
řešený problém z několika stran, který je možné ilustrovat na zkoumání  
možností Lega při konstruování. Pokud jsou žáci schopni sestavit požado-  
vanou konstrukci automobilu, můžeme prohlásit cíl „Žák používá části sta-  
vebnice a propojuje jednotlivé díly tak, aby dosáhl svého cíle.“ za splněný.

### **3. Využití programovacího prostředí Lego**

Základní podmínkou pro řešení problémů s využitím Lego robotů je po-  
chopení programovacího prostředí stavebnice Lego. Pozitivem je, že toto  
prostředí je značně intuitivní a vytváření kódu probíhá prostřednictvím  
bloků s různými funkcemi (ovládání motoru, čidla, tlačítek, práce s pro-  
měnnými, ...). Při plnění úkolů vyžívají žáci dříve zkonstruovanou vlastní  
tříkolku. Vyučující nejprve demonstruje funkci základních stavebních ka-  
menů, jako například ovládání motorů a sekce s podmínkami a cykly, na  
svém autíčku, pak již žáci pracují v utvořených skupinách samostatně.  
Vyučující slouží jako mentor či poradce.

Náročnost zadávaných úkolů by se měla stupňovat – zprvu mají žáci  
za úkol naprogramovat vozidlo, aby jelo rovně po dobu zvoleného času,  
později lze zadání doplnit o zatočení a pokračování v cestě jiným směrem.  
Po zvládnutí těchto úkolů si žáci vymýšlí vlastní dráhu pohybu, kterou  
následně prezentují. Pochopitelně je možná celá řada modifikací uvedených  
úkolů, nicméně je nutné poznamenat, že jsme vždy limitováni senzory,  
které mají žáci k dispozici. Je tedy kupříkladu možné zadávat i složitější  
úkoly v podobě simulace popojíždění vozidla v koloně bez nabourání nebo  
aby v případě nabourání začalo troubit.

Je zřejmé, že i třetí bod metodiky podporuje rozvoj infor-  
matického myšlení. Při vytváření programu je potřeba nahlížet na zadaný problém  
z několika stran. Může se totiž stát, že má problém úplně jiné řešení, než  
jaké žáci zkouší, nebo jej lze vyřešit změnou konstrukce modelu místo  
programu. Zároveň musí žáci rozložit složitý problém na jednodušší.

Pokud žáci předvedou funkční model tříkolky, který se pohybuje zada-  
ným způsobem, můžeme považovat cíl „Žák používá programovací pro-  
středí Lego robotů k vyřešení zadaného úkolu, ale i k dosažení vlastních  
cílů s nimi.“ za splněný.

### **4. Programování složitějšího Lego robota**

Posledním cílem a úkolem pro žáky je naprogramovat Lego robota,  
který bude konstrukcí i funkcemi napodobovat reálnou funkci zadaného

přístroje. Žáci se tedy musí nejprve vypořádat s konstrukcí robota a následně s programovým vybavením takovým způsobem, aby robot splňoval co nejvěrněji chování určitého přístroje. Pokud žáci vymyslí vylepšení, které by bylo vhodné i u reálného přístroje, mohou jej zařadit, ale je nutné funkčnost tohoto vylepšení obhájit při závěrečné demonstraci robota. Zadáání mohou být různá – mixér (ať už tyčový nebo klasický), adaptabilní tempomat, posuvná vrata, křídlová vrata, dávkovač cereálií, alarm s kódem nebo robotický vysavač. Uvedená zadání slouží především pro ukázkou možností a inspiraci, každý vyučující si může vymyslet svá vlastní. Nyní podrobněji rozeberme nyní některá z nich.

V případě zadání mixéru by měl vyučující požadovat téměř reálné bezpečnostní prvky. Pokud se žáci rozhodnou pro tyčový mixér, jsou bezpečnostní prvky minimální. Mixér je buď zapnutý, nebo vypnutý, případně lze měnit rychlost otáček nebo jej rychle zastavit. U klasického mixéru může být škála požadovaných prvků pestřejší. Žáci mohou mít za úkol mixér postavit a naprogramovat tak, aby při otevřeném víku nešel spustit. Zároveň bychom opět měli mít možnost zvyšovat a snižovat rychlost. U obou verzí mixéru by měl vyučující trvat na konstrukci převodů s využitím ozubených koleček, prostřednictvím kterých se dosáhne vyšších otáček, protože ve stavebnici dodávané motory nemají dostatečnou rychlost. Žáci by ovšem měli řešení naleznout sami a učitel je pouze navádí pokládáním otázek, jako například „Nebylo by možné úpravou konstrukce zvýšit otáčky mixéru?“

V případě adaptabilního tempomatu by měl vyučující požadovat, aby sestavené vozidlo nejprve snižovalo rychlost, případně i zastavilo. V okamžiku, kdy vozidlo jedoucí před ním zrychlí, mělo by se opět samo rozjet a zrychlovat až k nastavené maximální rychlosti.

Úkoly s posuvnými a křídlovými vraty jsou poměrně podobné. Cílem je vymyslet, jakým způsobem se budou vrata otevírat a jak zařídit, aby vrata žádné projíždějící vozidlo neskřípla. Zároveň by se vrata po průjezdu měla sama zavřít.

Vzhledem k tomu, že poslední bod metodiky využívá všechna předchozí zjištění, je zřejmé, že bude průběžně podporovat všechny dříve uvedené podmínky informatického myšlení.

Cíl „Žák naprogramuje Lego robota v programovacím prostředí způsobem, aby robot plnil požadovanou funkci.“ je považován za splněný, pokud žáci předvedou funkčního Lego robota, který splňuje zadaná kritéria.



## Hardwarové a softwarové nároky

Kromě stavebnic samotných je nutné mít k dispozici počítač s dostatečnými systémovými požadavky pro běh programovacího prostředí. Pro počítač s MS Windows jsou tyto požadavky následující [4]: Windows Vista (32/64 bitů) s nejnovějšími aktualizacemi nebo novější verze systému Windows; dual core processor 2.0 GHz nebo vyšší; paměť RAM 2 GB nebo větší; 2 GB místa na disku; displej XGA (1024 × 768); 1 volný USB port. Volitelným materiálem při vytváření robotů mohou být různé krabice, papíry, nůžky nebo další stavebnice Lego.

## Analýza metodiky a závěr

Cílem uvedené metodiky bylo naučit žáky základní prvky programovacího jazyka ve spojení s Lego roboty, čímž dochází k podpoře infor-matického myšlení. Hlavní cíl byl rozdělen do několika dílčích cílů, které v případě naplnění zaručují, že je dosaženo i cíle hlavního.

Prvním z cílů bylo seznámení žáků se základními prvky a konstrukcemi programovacího jazyka, za něž byly označeny proměnná, konstanta, cyklus a podmínka. S ohledem na schopnost žáků pojmy definovat, uvést příklad a následně využívat prvky a konstrukce při programování Lego robotů, považujeme cíl za splněný.

Druhým cílem bylo seznámení žáků se stavebnicí Lego a vytváření konstrukce dle zadání. Tuto část považujeme za problematickou a je potřeba na ni klást větší důraz. Při testování měli žáci problém sestavit i jednoduchou konstrukci a neuměli používat jiné než rovné díly. Navrhovaným řešením je vytvoření sady příkladů konstrukcí, které by žáci měli sestavit. Zároveň je však možné, že kdyby žáci pracovali se stavebnicí pravidelně a po delší dobu, byla by situace lepší. I přes prvotní potíže se sestavením konstrukce však žáci byli schopni druhý den sestavit vlastního robota, a proto i tento dílčí cíl můžeme považovat za splněný.

Třetím dílčím cílem bylo naprogramování jednoduchého robota. Byl zvolen automobil, kterému byly zvyšovány nároky na jeho program. Oproti původnímu předpokladu zvládli žáci plnit programovací část bez větších obtíží. Opět jim však dělala problém konstrukce, která zabrala více času, než se čekalo. I přes komplikace s konstrukcí můžeme považovat cíl za splněný.

Posledním dílčím úkolem bylo řešení komplexního problému. Toto zadání spočívalo v úkolu zkonstruovat a následně naprogramovat model přístroje, který se standardně používá v běžném životě. Žáci s drobnými

obtížemi zvládli konstrukční část a bez jakýchkoli problémů pak robota naprogramovali. Proto i poslední cíl považujeme za splněný.

Díky splnění všech dílčích cílů považujeme i hlavní cíl za splněný a metodiku funkční, byť se vyskytly některé výhrady v hodnocení jejího průběhu. Nejzásadnější částí metodiky, kterou bude potřeba upravit je část zabývající se seznamováním se se stavebnicí Lego a základními konstrukcemi. Žáci potřebují na seznámení se stavebnicí a osvojení si konstrukčních dovedností více času, než se původně předpokládalo.

Díky faktu, že metodika splnila svůj účel, tedy naučila žáky základní programování Lego robotů, můžeme hovořit o podpoře informatického myšlení, jak jej vnímá Wang [1] a Wingová [2]. Žáci prokázali, že v průběhu práce si umí problém rozložit na základní prvky. Dále docházelo k podpoře informatického myšlení díky komplexnosti problému, který žáci museli řešit a v jehož průběhu si museli uvědomovat souvislosti mezi programovacím prostředím a problémy konstrukce. Zároveň museli předcházet problémům, které mohly přijít, jako třeba pád robotického vysavače ze schodů. Za zásadní přínos považujeme fakt, že v původních zadáních se museli žáci vypořádat i s nedostatkem dílů, kdy museli využívat některé díly nebo senzory i jiným způsobem, než je na první pohled zřejmé.

Data pro analýzu byla získána z případové studie, která zkoumala, zda je možné pomocí vytvořené metodiky vyučovat informatiku za účelem podpory informatické myšlení. Z analýzy metodiky nám vyplynulo, že až na problém v části zabývající se samotným konstruováním robotů, je metodika nastavena správně.

## Literatura

- [1] Wang, P.: From computing to computational thinking. CRCPress, Ohio, 2016.
- [2] Wing, J. M.: Computational Thinking: What and Why? Carnegie Mellon University. [Online] 17. 11. 2010 [Citace: 27. 11. 2017.] Dostupné z: <https://www.cs.cmu.edu/~CompThink/resources/TheLinkWing.pdf>
- [3] Robot world. [Online] [Citace: 13. 2. 2018] Dostupné z: [https://www.robotworld.cz/lego-mindstorms-ev3?gclid=CjwKCAiAatorUBREnEiwAfcP\\_YzWm135iFNW360TxmGRvzfev1sKmH6eQJQ1IIvPoOVHIVtXiD4TtwBoCMpEQAvD\\_BwE](https://www.robotworld.cz/lego-mindstorms-ev3?gclid=CjwKCAiAatorUBREnEiwAfcP_YzWm135iFNW360TxmGRvzfev1sKmH6eQJQ1IIvPoOVHIVtXiD4TtwBoCMpEQAvD_BwE)
- [4] Lego: Stažení softwaru. [Online] Lego. [Citace: 7. 3. 2018] Dostupné z: <https://www.lego.com/cs-cz/mindstorms/downloads/download-software>