

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra kybernetiky

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

PLZEŇ, 2018

Bc. Petr Batěk

**ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE**  
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Petr BATĚK**  
Osobní číslo: **A15N0104P**  
Studijní program: **N3918 Aplikované vědy a informatika**  
Studijní obor: **Kybernetika a řídicí technika**  
Název tématu: **NÁVRH ŘÍDICÍCH ALGORITMŮ MEMS GYROSKOPU**  
Zadávací katedra: **Katedra kybernetiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cílem práce je návrh a realizace řídicích algoritmů MEMS gyroskopu v prostředí MATLAB/Simulink. Klíčové parametry gyroskopu budou určeny na základě dostupné literatury, resp. budou definovány firmou Honeywell.

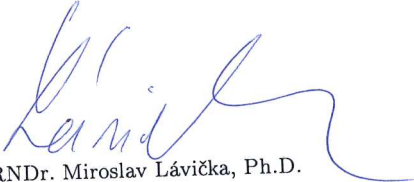
1. Proveďte teoretický rozbor problematiky řízení MEMS gyroskopu.
2. Vytvořte matematický model jednoosého MEMS gyroskopu.
3. Navrhněte vhodný algoritmus pro řízení budicího módu.
4. Navrhněte vhodný algoritmus pro řízení snímacího módu.
5. Realizujte a ověřte navržené algoritmy v prostředí MATLAB/Simulink.
6. Zhodnoťte vlastnosti zvoleného řešení a navrhněte úpravy a vylepšení.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**  
Rozsah kvalifikační práce: **40-50 stránek A4**  
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**  
Seznam odborné literatury:

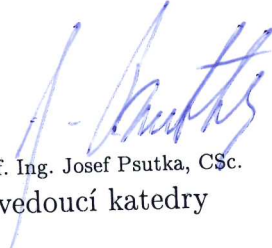
**Acar, C., & Shkel, A. (2008). MEMS vibratory gyroscopes.**  
**Kempe, V. (2011). Inertial MEMS Principles and Practice.**

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Ladislav Král, Ph.D.**  
Nové technologie pro informační společnost

Datum zadání diplomové práce: **3. října 2016**  
Termín odevzdání diplomové práce: **21. května 2017**

  
Doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.  
děkan



  
Prof. Ing. Josef Psutka, CSc.  
vedoucí katedry

V Plzni dne 3. října 2016

## PROHLÁŠENÍ

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 15. 5. 2018



vlastnoruční podpis

## PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych chtěl nejdříve poděkovat vedoucímu diplomové práce, panu Ing. Ladislavu Královi, Ph.D., který mě v průběhu práce provázel a jehož cenné rady a připomínky značně ovlivnily její směr. Další poděkování patří týmu lidí z divize Advanced Technology firmy Honeywell Aerospace s.r.o., se kterými jsem měl čest v průběhu diplomové práce spolupracovat. Jejich nápady a zkušenosti byly důležitým přínosem pro tuto práci. V neposlední řadě patří poděkování také kolegům z Výzkumného týmu pro identifikaci systémů a rozhodování (IDM) z katedry kybernetiky na ZČU, jejichž podpory v průběhu této práce si velice vážím.

## Anotace

Diplomová práce se zabývá matematickým modelováním, návrhem řízení a zpracování signálu pro MEMS gyroskopy. Odvozený model zahrnuje matematický popis výrobních nedokonalostí, které znehodnocují kvalitu senzoru, a nejistoty v jeho nominálních parametrech. Využitím metod pro zpracování signálu a zpětnovazebního řízení jsou nedokonalosti kompenzovány, což vede k lepším vlastnostem senzoru. Neurčitost v nominálních parametrech je zohledněna návrhem robustního řízení. Navržené algoritmy jsou otestovány a ověřeny pomocí numerických simulací provedených v prostředí MATLAB/Simulink.

**Klíčová slova:** MEMS gyroskopy, rychlost rotace, matematické modelování, neurčitost modelu, zpětnovazební robustní řízení, rezonátor, amplitudová obálka, demodulace, řízení frekvence a amplitudy, fázový závěs, automatický regulátor amplitudy

## Abstract

The subject of the diploma thesis is mathematical modelling, control and signal processing design of MEMS gyroscopes. The derived model includes mathematical description of sensor manufacturing imperfections and parameter uncertainties which degrade quality of the sensor. The imperfections are compensated by signal processing algorithms and feedback control leading to better properties and performance of the sensor. Robust control technique is applied to challenge the uncertainty. Designed control algorithms are tested and verified through numerical simulations in MATLAB/Simulink.

**Keywords:** MEMS gyroscopes, rotational velocity, mathematical modelling, model uncertainty, robust feedback control, resonator, amplitude envelope, demodulation, frequency and amplitude control, phase locked loop, automatic gain controller

# Obsah

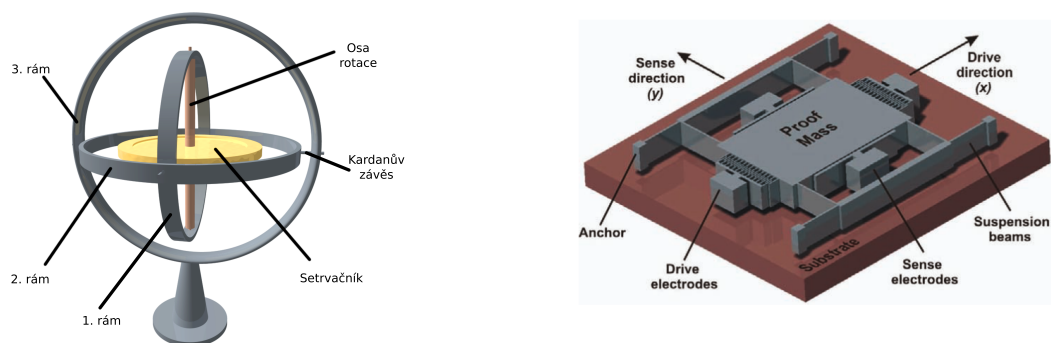
<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoretické základy měření orientace, úhlové rychlosti a využití gyroskopů</b>	<b>3</b>
2.1	Gyroskopický efekt	3
2.2	Coriolisova síla	3
2.3	Princip fungování MEMS gyroskopu	5
2.4	Úlohy řízení a zpracování signálu	6
2.4.1	Řízení spojené s budícím módem	6
2.4.2	Úlohy spojené se senzorickým módem	6
2.5	Shrnutí	7
<b>3</b>	<b>Matematický model MEMS gyroskopu</b>	<b>8</b>
3.1	Vlastnosti a parametry rezonátoru	8
3.2	Model ideálního MEMS gyroskopu	10
3.3	Model neideálního MEMS gyroskopu	11
3.4	Shrnutí	13
<b>4</b>	<b>Návrh řízení budícího módu</b>	<b>14</b>
4.1	Návrh struktury regulátoru	14
4.2	Návrh řízení frekvence a fáze	15
4.2.1	Fázový závěs (PLL)	16
4.2.2	Digitální PLL (DPLL)	17
4.2.3	Lineární PLL (LPLL)	18
4.2.4	Přechod do stavu fázového závěsu	18
4.3	Syntéza návrhu řízení amplitudy budícího módu	20
4.3.1	Definování uvažovaných neurčitostí	21
4.3.2	Specifikace požadavků na řízení	23
4.3.3	Návrh robustního regulátoru amplitudy	24
4.4	Spojení regulačních smyček PLL a AGC	33
4.5	Analýza navrženého řídicího systému budícího módu	34
4.6	Shrnutí	35

<b>5</b>	<b>Návrh řízení senzorického módu</b>	<b>38</b>
5.1	Teorie a možnosti provozování MEMS gyroskopu . . . . .	38
5.2	Specifikace úloh řízení . . . . .	42
5.3	Návrh struktury regulátoru . . . . .	43
5.4	Odvození vstupně výstupního modelu senzorického módu . . . . .	44
5.4.1	Odvození modelu užitečné složky signálu v analytickém tvaru . . . . .	45
5.4.2	Nalezení aproximativního přenosového modelu . . . . .	48
5.4.3	Odvození modelu kvadratické složky . . . . .	49
5.5	Senzorický mód pracující v otevřené smyčce . . . . .	53
5.5.1	Analýza chování senzorického módu v otevřené smyčce . . . . .	53
5.6	Senzorický mód pracující v uzavřené smyčce . . . . .	56
5.6.1	Modelování neurčitosti demodulovaných složek . . . . .	56
5.6.2	Syntéza regulátoru pro potlačení kvadratických chyb . . . . .	57
5.6.3	Syntéza regulátoru pro řízení užitečné části kmitů do nuly . . . . .	58
5.6.4	Analýza chování senzorického módu v uzavřené smyčce . . . . .	60
5.7	Shrnutí . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>74</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Gyroskop je senzor pro měření nebo udržování orientace a úhlové rychlosti v prostoru. První gyroskopy v historii byly mechanické, tvořené setrvačником zavěšeným ve třech rámech. Tyto rámy jsou se setrvačником a mezi s sebou spojeny kardanovy závěsy, což umožňuje libovolné natočení osy rotace setrvačniku. Anglicky se tato konstrukce nazývá gimbal. Model mechanického gyroskopu je zobrazen na obr. 1.1 vlevo.



Obrázek 1.1: Ilustrace mechanického (vlevo) a MEMS gyroskopu (vpravo).

Zdroje obrázků: mechanický gyroskop - [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org), MEMS gyroskop - [1]

Mechanické gyroskopy mají však své nevýhody, kvůli kterým byly a jsou vyvíjeny senzory založené na odlišném principu. Mezi nevýhody mechanických gyroskopů patří například nutnost udržování stálé rychlosti rotace setrvačniku související s větší energetickou náročností, velikost senzoru, malá mechanická odolnost a vyšší cena.

Jednou z rozvíjených alternativ jsou gyroskopy založené na technologii MEMS<sup>1</sup> (zkratka MEMS znamená Mikro-Elektro-Mechanické Systémy). Jako MEMS systémy se vyrábí mnoho různých senzorů a nemusí se tedy jednat pouze o gyroskopy. Mezi senzory dostupné v MEMS technologii patří také například akcelerometry nebo magnetometry. MEMS jsou obecně mikrorozměrná zařízení, která mohou být využita jako senzory fyzikálních veličin, čidla a nebo aktuátory [4]. Od ostatních elektronických

<sup>1</sup>Lze poznamenat, že dalšími perspektivními alternativami jsou gyroskopy využívající technologie vláknové optiky (fiberoptic gyroskopy) [2] a laserové (ring-laser) gyroskopy [3].



součástek se odlišují především tím, že ve svém čipu obsahují pohyblivé mechanické části. Mechanická část zařízení je většinou zabalena v jednom pouzdře s řídicí a vyhodnocovací elektronikou. MEMS gyroskopy jsou speciální třídou těchto systémů. Model mechanické části MEMS gyroskopu je zobrazen na obr. 1.1 vpravo. Hlavními výhodami MEMS senzorů jsou nízká energetická náročnost, výrobní cena a kompaktní rozměry, díky kterým je použití této technologie dominantní ve spotřební elektronice a také v automobilovém průmyslu. V poslední době pokračuje rozvoj MEMS senzorů za účelem umožnění jejich využití v oblastech vojenství, letectví a vesmírném výzkumu, kde jsou zvýšené nároky na přesnost a teplotní a mechanickou odolnost.

Současný rozvoj MEMS gyroskopů lze rozdělit do dvou směrů. Jedním směrem rozvoje je vylepšování mechanických struktur gyroskopu. V kapitole 2 jsou popsány základní principy a parazitní jevy spojené s využitím MEMS gyroskopů. Jedním z problémů je nestálost parametrů senzoru při změně prostředí použití (závislost tlumení na teplotě) nebo nedokonalost výrobních technologií. Za účelem potlačení vlivu parazitních jevů jsou vyvíjeny nové mechanické struktury MEMS gyroskopů. Tato problematika je předmětem mechaniky a materiálového inženýrství, a proto jí zde nebude věnována pozornost. Více o této problematice lze nalézt např. v [1], [5], [6]. Druhou možností, jak docílit lepších vlastností MEMS gyroskopů, a směrem vývoje je implementace zpětnovazebního řízení [7], [8], [9] a metod zpracování signálu [10], [11], o kterých pojednává tato diplomová práce.

Cílem diplomové práce je návrh řídicích algoritmů MEMS gyroskopu, které zajišťují jeho základní funkcionalitu nebo pozitivně ovlivňují jeho klíčové parametry. Narozdíl od většiny jiných publikací věnujících se návrhu řízení [9], [12] je v této práci kladen důraz na robustnost systému při změně jeho nominálních parametrů.

Zpětnovazební řízení, které je nezbytné pro základní operaci senzoru, a jeho návrh jsou popsány v kapitole 4. Kromě zajištění základní operace může být zpětnovazební řízení použito také k potlačení parazitních jevů, jež nebyly odstraněny vývojem mechanické struktury senzoru. Dalším potenciálem použití zpětnovazebního řízení je zvýšení šířky pásma senzoru, jeho linearitu a citlivosti. O možnostech použití a návrhu zpětnovazebního řízení za účelem vylepšení vlastností MEMS gyroskopů pojednává kapitola 5.

Na začátku této práce je vytvořen matematický model MEMS gyroskopu, který zahrnuje mechanické nedostatky znehodnocující měření rychlosti rotace. Model založený na dvou ortogonálních rezonátorech je odvozen a popsán v kapitole 3. Nutným úkolem pro zajištění funkčnosti MEMS gyroskopu je uvedení a udržování jednoho z rezonátorů v pravidelných kmitech. Tato úloha představuje první výzvu pro využití automatického řízení, jehož návrh je popsán v kapitole 4. Při otáčení jsou kmity přenášeny na druhý rezonátor a jejich signálovým zpracováním je možné určovat rychlost rotace. Algoritmus použitý pro zpracování kmitů druhého rezonátoru je vysvětlen v kapitole 5, kde je také následně rozšířen dvěma zpětnovazebními regulačními smyčkami, které zajišťují lepší vlastnosti senzoru.

Navržené algoritmy jsou průběžně simulačně ověřovány v prostředí Matlab/Simulink a dosažené výsledky jsou srovnány s odvozenými teoretickými předpoklady.

# Kapitola 2

## Teoretické základy měření orientace, úhlové rychlosti a využití gyroskopů

V této kapitole jsou popsány základní principy fungování mechanických a MEMS gyroskopů. Každý z těchto dvou typů gyroskopů využívá pro měření úhlové rychlosti jiného principu. Zvláštní pozornost je věnována právě MEMS gyroskopům a jsou zde nastíněny související úlohy zpětnovazebního řízení a zpracování signálu.

### 2.1 Gyroskopický efekt

Mechanické gyroskopy využívají pro měření orientace gyroskopického efektu, který vyjadřuje tendenci tělesa zachovat osu rotace díky svému momentu setrvačnosti. Mechanickým gyroskopem tedy může být jakékoliv těleso, které má po roztočení jednoznačně danou osu rotace a moment hybnosti. Na základě této myšlenky vznikly první mechanické gyroskopy tvořené setrvačnickem. Pro účel měření orientace je setrvačnick ułożen v tzv. Kardanových závěsech a má tři stupně volnosti. Měření orientace je možné získat porovnáním poloh závěsů s osou rotace setrvačnicku.

Je zřejmé, že setrvačnick musí být umístěn v kvalitních ložiscích a Kardanových závěsech, aby bylo možné jej udržovat v požadovaných otáčkách. Ložiska se v průběhu používání opotřebovávají, což je nežádoucí. Další nevýhodou mechanických gyroskopů jsou jejich větší rozměry.

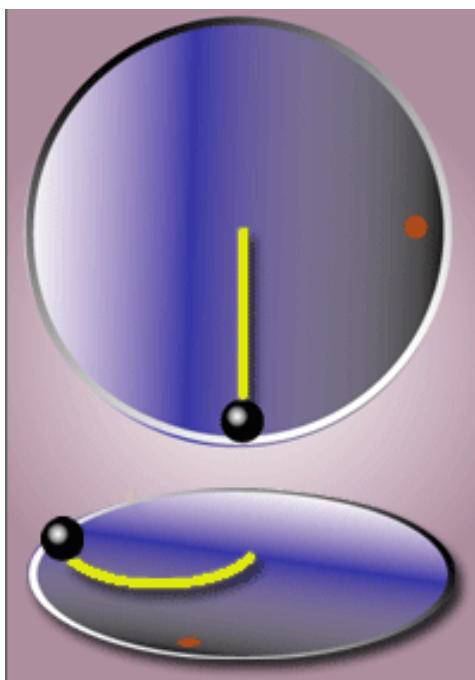
### 2.2 Coriolisova síla

MEMS gyroskopy jsou založeny na jiném principu než mechanické a sice na působení Coriolisovy síly. Coriolisova síla působí na tělesa pohybující se vůči rotující neinerciální vztažné soustavě. Protože tato síla nekoná práci, zařazuje se mezi zdánlivé síly [13]. Směr působení této síly je kolmý na osu rotace a vektor rychlosti tělesa. Coriolisovu sílu lze matematicky vyjádřit jako

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (2.1)$$

kde  $m$  je hmotnost uvažovaného tělesa,  $\vec{v}$  je jeho okamžitá rychlost a  $\vec{\omega}$  je vektor úhlové rychlosti rotující vztažné soustavy.

Působení Coriolisovy síly je pro názornost možné popsat na následujícím příkladu, jehož ilustrace je zobrazena na obr. 2.1. Rotující vztažná soustava je reprezentována rotujícím diskem s dokonale hladkým povrchem, který nezpůsobuje žádné tření. Na tento rotující disk je vpuštěna kulička, reprezentující pohybující se těleso, jež je uvedena do přímočarého pohybu. V této situaci je možné sledovat pohyb zkoumaného tělesa ze dvou různých míst. První místo se nachází vně rotujícího disku v inerciální vztažné soustavě. Při sledování pohybu tělesa z tohoto místa se bude těleso pohybovat po přímé čáře. Druhé pozorovací místo je umístěno přímo na disku, tedy v rotující neinerciální soustavě. Odtud se pohyb tělesa jeví jako zahnutý, protože se pozorovatel otáčí spolu s diskem, kdežto pohybující se těleso není rotujícím diskem nijak ovlivněno kvůli nulovému tření. Zahnutí trajektorie v neinerciální soustavě lze vysvětlit působením síly, která tlačí těleso do strany. Protože je však známo z vnější inerciální soustavy, že zde žádná další síla nepůsobí, je rotující vztažná soustava označena jako neinerciální a Coriolisova síla jako zdánlivá.

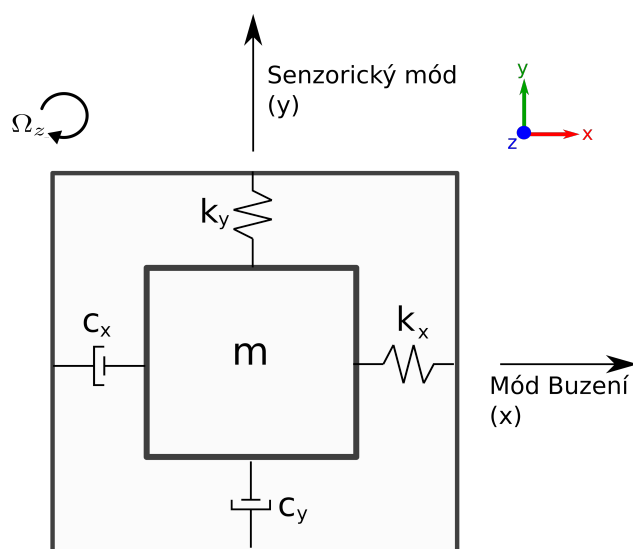


Obrázek 2.1: **Ilustrace působení Coriolisovy síly.** Na horním disku je žlutou čarou vyznačena trajektorie pohybující se kuličky při sledování rotujícího disku z vnější inerciální soustavy. Na spodním disku je zobrazena trajektorie, kterou by viděl pozorovatel posazený na rotující disk, tedy z neinerciální vztažné soustavy.

Zdroj obrázku: [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

## 2.3 Princip fungování MEMS gyroskopu

MEMS gyroskopy využívají principu působení Coriolisovy síly v neinerciální soustavě [1], [11]. Mechanickou část jednoosého vibračního gyroskopu tvoří dva na sebe kolmé rezonátory. Zjednodušené schéma rezonátorů je zobrazeno na obrázku 2.2. Dva rezonátory jsou propojené společnou hmotou (v anglické literatuře označovanou jako *proof-mass*).



Obrázek 2.2: Schéma mechanické části MEMS gyra.

Princip fungování vibračního MEMS gyroskopu je následující. První z rezonátorů, označovaný jako budicí mód (osa  $x$ ), je uveden a udržován v harmonických kmitěch o stálé frekvenci, fázi a amplitudě. V úvodním příkladu je pohyb hmoty rezonátorů reprezentován kuličkou. Jedná se tedy o přímočarý pohyb tělesa v inerciální vztažné soustavě (vně čipu gyroskopu). V okamžiku, kdy je gyroskop uveden do rotačního pohybu kolem osy  $z$  s rychlostí  $\Omega_z$ , vzniká uvnitř čipu neinerciální vztažná soustava. V důsledku působení Coriolisovy síly je společná hmota rezonátorů vychýlena ve směru druhého rezonátoru (osa  $y$ ), který je označován jako senzorický mód. Z velikosti kmitů senzorického módu je možné určovat rychlost otáčení gyroskopu.

Popsaný princip je základní myšlenkou využití MEMS gyroskopů v ideální situaci, kde je přenos kmitů mezi dvěma módy zapříčiněn pouze Coriolisovo silou. Reálné použití je však odlišné od ideální situace. Současné výrobní technologie nejsou natolik přesné,

---

Budicí rezonátor je také často označován jako primární a senzorický jako sekundární mód.

aby bylo možné zajistit ortogonalitu obou módů gyroskopu [1]. V důsledku výrobních neidealit dochází k přenosu kmitů i bez působení Coriolisovy síly. Při odhadování rychlosti otáčení je nezbytné oddělit užitečnou část kmitů (vzniklá působením Coriolisovy síly) od parazitní (způsobená nedokonalostmi senzoru). Některé výrobní nedokonalosti je dále možné kompenzovat zavedením vhodného zpětnovazebního řízení a metod pro zpracování signálů.

## 2.4 Úlohy řízení a zpracování signálu

Z popisu fungování MEMS gyroskopu popsaného v předešlé sekci je zřejmé, že se MEMS gyroskop neobejde bez implementace řídicích smyček. Zpětnovazební řízení zajišťuje základní funkci gyroskopu a dále je možné jej využít ke kompenzaci parazitních jevů a potlačení nežádoucích vnějších vlivů (teplotní změny, otřesy apod.). Úlohy řízení a zpracování signálu MEMS gyroskopů lze rozdělit na řízení spojené s budicím módem a úlohy spojené s módem senzorickým.

### 2.4.1 Řízení spojené s budicím módem

Primární rezonátor musí být trvale buzen, jinak by docházelo k útlumu kmitání vlivem tlumení. Základní úlohou v každém MEMS gyru je zajištění stálé frekvence, fáze a amplitudy kmitání budicího rezonátoru. Vhodnou frekvencí kmitání je rezonanční frekvence oscilátoru, protože k vybuzení na požadovanou amplitudu je zapotřebí minimální energie. Výhoda v účinnosti a efektivitě s sebou přináší první úlohu pro řízení, kterou je nalezení rezonanční frekvence budicího módu. Současné výrobní technologie nejsou natolik přesné, aby bylo možné zajistit stejnou rezonanční frekvenci pro všechny vyrobené senzory. Proto je zapotřebí navrhnout do řídicí smyčky vhodný mechanismus, který zajistí naladění oscilací na předem neznámou rezonanční frekvenci. Dalším úkolem řízení je splnění požadavku regulace amplitudy kmitů na konstantní hodnotu. Tato regulace je důležitá proto, že velikost amplitudy se promítne do Coriolisovy síly působící na senzorický mód a ta je základním signálem pro měření úhlové rychlosti senzoru.

Postup a výsledky návrhu řízení pro budicí mód jsou sepsány v kapitole 4.

### 2.4.2 Úlohy spojené se senzorickým módem

Řízení senzorického módu je komplikovanější a je možné vybírat z více typů v závislosti na způsobu fungování gyroskopu. Prvním typem je provozování senzorického módu v tzv. otevřené smyčce. V tomto případě není senzorický rezonátor nijak řízen a využity jsou jen metody zpracování signálu pro oddělení užitečné složky kmitů od parazitní. Je to jednoduchý způsob, který se používá především u levných a méně přesných senzorů [14].

Další variantou fungování je tzv. uzavřená smyčka. Zde jsou již řízeny i oscilace senzorického módu a realizace tohoto způsobu řízení vede ke zlepšení vlastností MEMS gyroskopu. Úloha řízení senzorického módu je více než v případě módu budicího. Následující seznam obsahuje jednotlivé cíle řízení a zpracování signálů pro senzorický mód.

- Prvním cílem zpracování signálu je oddělení užitečné části oscilací (té zapříčiněné Coriolisovo silou) od parazitní složky (vzniklé přenosem kmitů z budicího módu vlivem nedokonalostí a chyb). Dosažení tohoto cíle je možné zajistit vhodnou demodulační technikou.
- Druhým úkolem je potlačení parazitního přenosu kmitů. Parazitní signál může být i řádově větší než užitečný [15], a proto je vhodné jej kompenzovat.
- Další úlohou řízení může být řízení užitečné části kmitů do nuly. Zavedením tohoto řízení lze dosáhnout zvětšení šířky pásma senzoru. Velikost rotační rychlosti je poté úměrná řídicímu signálu regulátoru.
- Posledním zmíněným, ale neméně významným, úkolem je řízení rezonanční frekvence senzorického oscilátoru. Pomocí zpětnovazebního řízení je možné umístit tuto frekvenci s definovaným odstupem vůči rezonanční frekvenci budicího módu. Podle velikosti oddělení rezonančních frekvencí se rozlišují dva režimy provozování MEMS gyroskopů. A sice režim se shodnými rezonančními frekvencemi a režim s oddělenými frekvencemi.

Postup a výsledky návrhu řídicích algoritmů a metod pro zpracování signálů jsou detailně popsány v kapitole 5.

## 2.5 Shrnutí

V této kapitole byla nastíněna základní teorie a dva typy gyroskopů využívaných pro měření rychlosti rotace. Dále byl popsán obecný princip fungování MEMS gyroskopů a problémy s nimi spojené. Na konci kapitoly byly popsány úlohy zpracování signálu a řízení související s využitím MEMS gyroskopů. Návrh a implementace těchto algoritmů jsou zároveň hlavními cíli této práce. Podrobnější informace o jednotlivých úlohách řízení lze nalézt např. v [6].

# Kapitola 3

## Matematický model MEMS gyroskopu

K syntéze regulátoru je nezbytné znát matematický model řízeného systému. Proto je tato kapitola věnována jeho vytvoření a vysvětlení použitých úvah při jeho odvození. Protože je model MEMS gyroskopu postaven na modelu rezonátoru, je v sekci 3.1 detailně popsán a analyzován matematický popis kmitavého systému 2. řádu a jeho parametry. Další sekce 3.2 se věnuje popisu ideálního modelu MEMS gyroskopu, který nezahrnuje členy způsobující parazitní přenos kmitů. Tyto členy jsou následně do modelu doplněny v sekci 3.3, kde je dokončeno odvození výchozího modelu pro návrh řídicích algoritmů.

### 3.1 Vlastnosti a parametry rezonátoru

Pro popis rezonátorů MEMS gyroskopu se používá model kmitavého systému 2. řádu vyjádřený diferenciální rovnicí jako

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F, \quad (3.1)$$

kde  $m$  je hmotnost rezonátoru,  $b$  a  $k$  je tlumení resp. tuhost pružiny,  $F$  je budící externí síla a  $x$  je výchylka rezonátoru z rovnovážné polohy.

Pomocí Laplaceovy transformace lze z rovnice (3.1) získat přenosovou funkci

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}. \quad (3.2)$$

Dosazením přirozené frekvence  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  a činitele kvality rezonátoru  $Q = \frac{\sqrt{km}}{b}$  do rovnice (3.2) je možné získat alternativní tvar přenosové funkce

$$H(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + (\frac{\omega_0}{Q})s + \omega_0^2}. \quad (3.3)$$

Přenosovou funkci (3.2) je také možné vyjádřit pomocí přirozené frekvence  $\omega_0$  a konstanty relativního tlumení  $\xi = \frac{b}{b_c}$  jako

$$H(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}. \quad (3.4)$$

Klíčové parametry rezonátoru jsou:

- **Faktor relativního tlumení  $\xi$** , který reprezentuje poměr tlumení oscilátoru  $b$  vzhledem ke kritickému tlumení  $b_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0$ .
- **Přirozená frekvence oscilátoru  $\omega_0$**  je frekvence, při níž je maximalizováno amplitudové zesílení v situaci, kdy je tlumení systému  $b$  zanedbatelné (tedy  $b \approx 0$  a  $\xi \ll 1$ ). Naproti tomu je definována rezonanční frekvence  $\omega_r$  jako frekvence, při které dochází k maximalizaci amplitudového zesílení pro dané tlumení  $b > 0$ . Vztah mezi přirozenou a rezonanční frekvencí je vyjádřen rovnicí

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} . \quad (3.5)$$

Z rovnice (3.5) je zřejmé, že pro lehce tlumené systémy ( $b \approx 0$  a  $\xi \ll 1$ ) jsou přirozená a rezonanční frekvence  $\omega_0$ , resp.  $\omega_r$  velmi blízké. Protože rezonátory tvořící MEMS gyroskop patří do kategorie lehce tlumených systémů, bude v následujícím textu pojem přirozená a rezonanční frekvence považován za ekvivalentní a zaměňován. Pro lehce tlumené systémy navíc platí vztah o velikosti amplitudy kmitání při rezonanční a tedy i přirozené frekvenci kmitání [1]:

$$|x_0|_{res} = \frac{F_0}{2k\xi} = \frac{F_0}{b\omega_0} , \quad (3.6)$$

kde  $F_0$  je amplituda budící síly.

- **Činitel kvality rezonátoru  $Q$**  je dalším důležitým parametrem oscilátoru. Pro lehce tlumené systémy je tento parametr možné vyjádřit jako  $Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{m\omega_0}{b}$  [1]. Parametr  $Q$  je přímo úměrný amplitudovému zesílení na rezonanční frekvenci a platí

$$|x_0|_{res} = Q \frac{F_0}{k} . \quad (3.7)$$

- **Šířka pásma BW** je parametr uplatňující se především při návrhu řízení senzorického módu v kapitole 5. Tento parametr udává velikost rozdílu dvou frekvencí kmitání, při kterých je výkon kmitání poloviční než výkon při kmitání na rezonanční frekvenci. Pro slabě tlumené systémy je možné šířku pásma aproximovat jako [1]

$$BW \approx \frac{\omega_0}{Q} . \quad (3.8)$$

Z výrazu (3.8) je patrné, že pro větší šířku pásma je vhodné použít rezonátor s vyšší rezonanční frekvencí ale menším  $Q$  faktorem. Závislost šířky pásma na  $Q$  faktoru je promítnuta do návrhových parametrů senzorického rezonátoru. Parametr  $Q$  senzorického módu má řádově menší hodnotu oproti činiteli kvality  $Q$  budícího módu. V řídicí smyčce budícího módu je vhodná vysoká hodnota  $Q$ , protože zajišťuje menší energetickou náročnost a při řízení oscilací budícího módu není zapotřebí velká šířka pásma. Na senzorický rezonátor jsou kladeny požadavky opačné. Zde není potřeba energetická úspornost, ale důležitou roli hraje šířka pásma regulace.

Po analýze modelu rezonátoru je možné přistoupit k popisu mechanické části MEMS gyroskopu.



## 3.2 Model ideálního MEMS gyroskopu

V kapitole 2 bylo nastíněno, že se pro modelování MEMS vibračního gyroskopu používá modelu dvou rezonátorů. Tato část popisuje matematický model jejich vzájemné interakce.

Soustavu budicího a sensorického rezonátoru je možné zapsat diferenciální rovnicí v maticové formě jako

$$\begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_d & 0 \\ 0 & b_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_d & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_d + 2m_C\Omega_z\dot{y} \\ F_s - 2m_C\Omega_z\dot{x} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

kde  $F_d = F_{d,A}\sin(\omega t)$  je budicí síla s amplitudou  $F_{d,A}$  a úhlovou frekvencí  $\omega$  a  $F_s$  reprezentuje řídicí signál sensorického módu. Odtud dále jsou zavedena indexová označení parametrů dvou rezonátorů. Indexem  $d$  budou označeny parametry příslušející budicímu rezonátoru a index  $s$  bude označovat parametry sensorického módu. Oproti rovnici (3.1) přibyl k budicí síle  $F_d$  člen  $2m_C\Omega_z\dot{y}$ . Tento člen vyjadřuje působení Coriolisovy síly vzniklé rotací gyra a kmitů sensorického módu na budicí rezonátor. Protože platí, že

$$y \ll x, \quad (3.10)$$

je možné tento člen zanedbat a modelovat celkovou vstupní sílu budicího rezonátoru jen jako  $F_d$ . Naopak Coriolisova síla  $-2m_C\Omega_z\dot{x}$  působící na sensorický mód je v modelu důležitá, protože zajišťuje užitečný přenos kmitů z budicího rezonátoru. Index  $C$  u parametru  $m_C$  označuje část hmoty rezonátorů přispívající ke Coriolisově síle. Dalším zjednodušením při návrhu regulátoru bude zavedení předpokladu:  $m_C = m_s$ .

Ideální model budicího rezonátoru je možné vyjádřit diferenciální rovnicí

$$m_d\ddot{x} + b_d\dot{x} + k_dx = F_{d,A}\sin(\omega t). \quad (3.11)$$

Vyřešením rovnice (3.11) je možné získat výraz pro ustálenou odezvu kmitů buzeného rezonátoru

$$x = x_0\sin(\omega t + \phi_d), \quad (3.12)$$

kde  $x_0 = |H(j\omega)|F_{d,A}$  je amplituda kmitů rezonátoru,  $|H(j\omega)|$  je amplitudové zesílení a  $\phi_d$  je fázové zpoždění kmitů rezonátoru na budicí frekvenci  $\omega$ .

Dosazením derivace výchylky  $x$  za vektor rychlosti  $\vec{v}$  do rovnice (2.1) lze vyjádřit Coriolisovu sílu působící na sensorický oscilátor

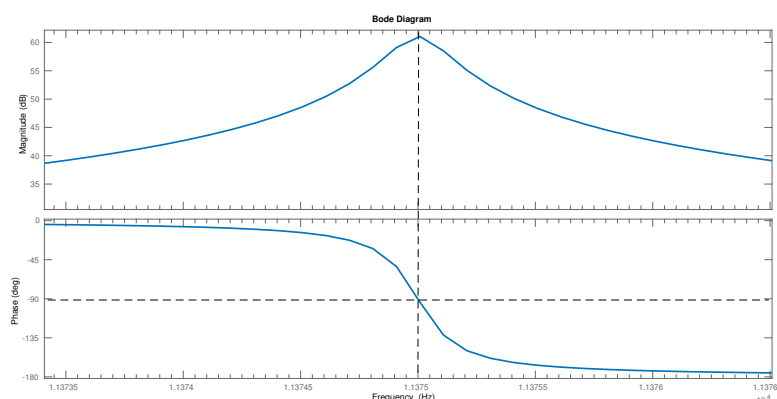
$$F_C = -2m_C\Omega_z\dot{x} = -2m_C\Omega_zx_0\omega\cos(\omega t + \phi_d), \quad (3.13)$$

kde  $\Omega_z$  je rotační rychlost gyroskopu. Z rovnice (3.13) je patrné, že amplituda Coriolisovy síly přímo závisí na velikosti amplitudy kmitů budicího módu. Návrh řízení amplitudy kmitů je popsán v kapitole 4.

Dosazením Coriolisovy síly (3.13) do modelu sensorického módu ze vztahu (3.9) byla získána diferenciální rovnice popisující ideální neřízený sensorický oscilátor

$$m_s\ddot{y} + b_s\dot{y} + k_sy = -2m_C\Omega_zx_0\omega\cos(\omega t + \phi_d). \quad (3.14)$$

Z rovnice (3.14) je patrné, že fáze kmitů sensorického rezonátoru je ovlivněna fázovým zpožděním  $\phi_d$  budicího rezonátoru. Na obrázku 3.1 je vykreslena amplitudová a fázová frekvenční charakteristika kmitavého členu 2. řádu. V grafu je také znázorněno, proč je výhodné budit budicí rezonátor na jeho rezonanční frekvenci. Kromě maximalizování amplitudového zesílení je zmíněný způsob buzení výhodný také v tom, že do kmitání rezonátoru zavádí známý fázový posun, a to  $-90^\circ$ . Znalost fázového zpoždění kmitů a tím pádem i působení Coriolisovy síly lze využít pro rozlišení užitečné a chybové části kmitání sensorického módu.



Obrázek 3.1: Bodeho frekvenční charakteristika kmitavého členu 2. řádu.

Popsané ideální chování gyroskopu a přenos kmitů nelze zaručit kvůli výrobním nepřesnostem, a proto je vhodné do modelu zahrnout i křížové vazby mezi rezonátory, které způsobují nechtěný přenos kmitů z jednoho rezonátoru na druhý.

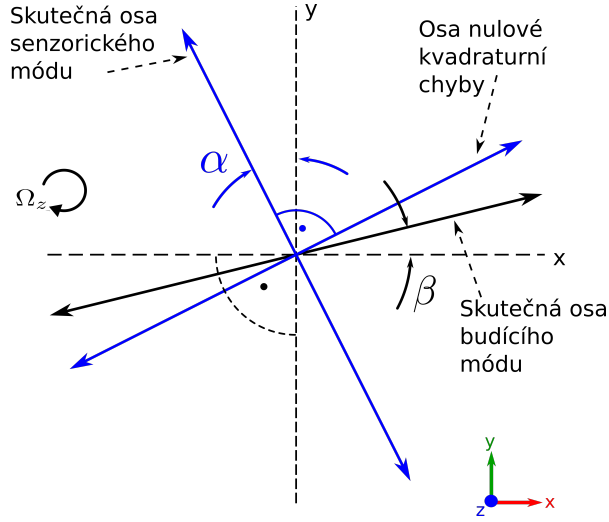
### 3.3 Model neideálního MEMS gyroskopu

Model odvozený v odstavci 3.2 nevystihuje dostatečně přesně chování reálného gyroskopu. V této sekci je model doplněn o křížové vazby rezonátorů vznikající v důsledku jejich neortogonality. Problém je znázorněn na obrázku 3.2. Křížové vazby způsobují přenos kmitů z budicího rezonátoru na sensorický i při nulové rychlosti rotace. Tento přenos kmitů je nežádoucí, a proto se označuje jako parazitní. Bez jeho kompenzování by docházelo k určení nenulového měření při nulové rychlosti rotace. Anglicky bývá tento jev nazýván jako *zero-rate* výstup.

Neortogonalita oscilátorů a parazitní přenášení kmitů mezi nimi bývá modelováno pomocí meziosých pružin  $k_{ds}$ ,  $k_{sd}$  a tlumení  $b_{ds}$ ,  $b_{sd}$  a model lze zapsat jako

$$\begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_d & b_{ds} \\ b_{sd} & b_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_d & k_{ds} \\ k_{sd} & k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_d \\ F_s - 2m_C \Omega_z \dot{x} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Členy  $b_{ds}$  a  $k_{ds}$  způsobující přenos kmitů ze sensorického rezonátoru na budicí, je možné



Obrázek 3.2: **Neortogonalita módů MEMS gyroskopu.** Vlivem výrobních chyb je osa budicího módu pootočena o úhel  $\beta$  vůči původně plánované ose  $x$ . Totéž se stane se senzorigovou osou, která je ale odchýlena o jiný úhel  $\alpha$  od  $y$ . Tím je vytvořena neortogonalita, která způsobuje, že kmitů z budicího módu jsou přenášeny na senzorigový i při nulové rychlosti rotace. Na obrázku je zobrazena tzv. osa nulové kvadratické chyby. Ta vyjadřuje požadované natočení skutečné osy budicího módu pro dosažení nulového parazitního přenosu kmitů.

zanedbat při předpokladu (3.10) a model MEMS gyroskopu přejde na tvar

$$\begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_d & 0 \\ b_{sd} & b_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_d & 0 \\ k_{sd} & k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_d \\ F_s - 2m_C \Omega_z \dot{x} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Podle modelu (3.16) dochází k parazitnímu přenosu kmitů vlivem členů  $b_{sd}$  a  $k_{sd}$ . Křížová vazba  $b_{sd}$  je však přenášena na nosném signálu, kterým je rychlost kmitů budicího rezonátoru  $\dot{x}$ . Rychlost kmitů  $\dot{x}$  je však zároveň nosným signálem užitečné - Coriolisovy síly. Důsledkem shodného nosného signálu pro užitečnou a parazitní část působící síly je to, že tyto dvě složky nelze od sebe jednoduše oddělit. Proto bývá snahou potlačit křížovou vazbu spojenou s  $b_{sd}$  mechanickým designem a provedením vakuového zapouzdření gyroskopu [1]. Z toho důvodu nebude parametr  $b_{sd}$  v modelu dále uvažován. Pro potlačení pružinové vazby  $k_{sd}$  již lze použít demodulační a řídicí techniky a detaily návrhu těchto systémů jsou vysvětleny v kapitole 5.

Výsledný matematický model MEMS gyroskopu, který bude využit při návrhu řídicích algoritmů v kapitolách 4 až 5 má tvar

$$\begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_d & 0 \\ 0 & b_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_d & 0 \\ k_{sd} & k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_d \\ F_s - 2m_C \Omega_z \dot{x} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

## 3.4 Shrnutí

V této sekci byl popsán model mechanické části MEMS vibračních gyroskopů, který bude použit pro návrh řídicích algoritmů v následujících kapitolách 4 a 5. V modelu je zahrnuto modelování neortogonality rezonátorů, ale nejsou v něm modelovány změny parametrů v závislosti na teplotě a stochastické poruchy. Namísto zdokonalování modelu jsou možné změny parametrů zohledněny při návrhu regulátorů. V následujících kapitolách je navrženo robustní řízení splňující návrhové požadavky i pro systémy, jejichž parametry jsou odlišné od nominálních.

# Kapitola 4

## Návrh řízení budicího módu

Řízení oscilací budicího módu MEMS gyroskopu je nezbytné pro správnou funkci senzoru. Tato kapitola se zabývá návrhem systému pro řízení frekvence a amplitudy kmitů. Na začátku kapitoly je v sekci 4.1 popsána zvolená struktura řídicího systému, na kterou navazuje popis návrhu řízení frekvence a amplitudy v sekcích 4.2 resp. 4.3. V závěru kapitoly v sekci 4.4 jsou navržené řídicí smyčky spojeny a simulačně otestovány.

### 4.1 Návrh struktury regulátoru

Jak již bylo nastíněno v kapitole 2, velikost Coriolisovy síly působící na senzorický mód přímo závisí na oscilacích módu budicího. Základním předpokladem přesného měření je, aby Coriolisova síla byla proporcionální k rychlosti rotace. Proto je důležité odstranit ostatní neurčitosti ve vztahu (2.1) pro Coriolisovu sílu. Hmotnost rezonátoru se nemění, a tak jedinou veličinou, kterou je nezbytné řídit je rychlost kmitů  $\vec{v} = \dot{x}$ . Rychlost kmitů závisí na amplitudě výchylky kmitů  $x_0$  a jejich frekvenci  $\omega$ . Tato úvaha vede k definování dvou cílů řízení budicího módu

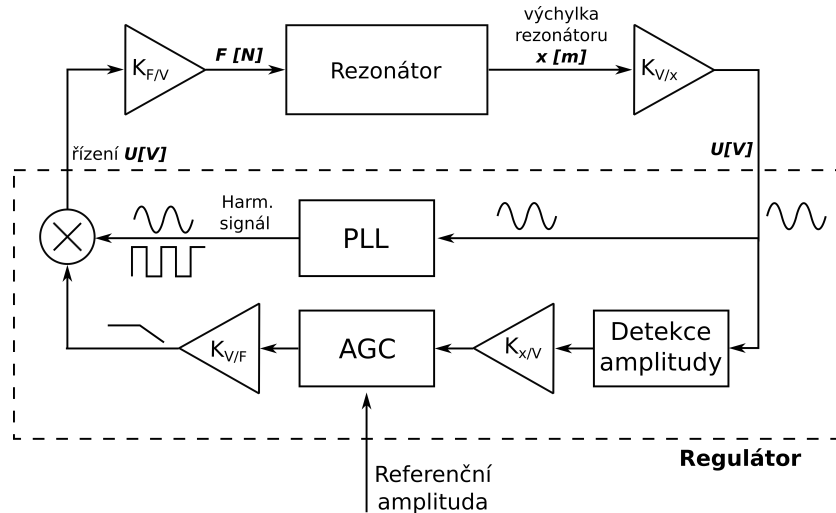
1. Udržování stálé frekvence a fáze kmitání.
2. Řízení velikosti amplitudy kmitů na konstantní hodnotu.

První úkol komplikuje skutečnost, že požadovaná frekvence kmitání, která je shodná s rezonanční frekvencí budicího oscilátoru, není předem známa. Vhodný systém zajišťující nalezení rezonanční frekvence a následné řízení kmitů na tuto frekvenci je fázový závěs. Použití fázového závěsu a návrh regulační smyčky pro řízení frekvence a fáze je obsahem sekce 4.2.

Ke splnění druhého cíle je použito návrhové metody z teorie lineárního řízení. Z důvodu očekávané nejistoty v parametrech budicího rezonátoru je cílem navrhnout robustní regulátor amplitudy kmitů. Analýza problému a návrh robustního regulátoru je dále popsán v sekci 4.3.

Dva různé požadavky na regulaci vedou k návrhu dvou zpětnovazebních regulačních smyček. Zjednodušené schéma celého systému je zobrazeno na obr. 4.1. Jsou zde vidět

dvě regulační smyčky spojené budícím rezonátorem. Bloky PLL a AGC reprezentují navržené regulátory. Zkratka PLL značí fázový závěs a je odvozena z anglického výrazu pro tento systém, tj. *Phase-Locked Loop*. AGC označuje regulátor amplitudy a je zkratkou pro anglický výraz *Automatic Gain Controller*. Mezi další bloky ve schématu 4.1 patří detektor amplitudy, jehož úkolem je detekce amplitudy kmitů, tedy vstupního signálu pro AGC. Pro přiblížení reálného senzoru byly do schématu přidány zesilovací členy  $K_{F/V}$  a  $K_{V/x}$ . Tyto bloky reprezentují části reálného senzoru, které převádějí řídicí elektrický signál na budící sílu a výchylku rezonátoru zpět na elektrický signál. Tyto členy jsou tvořeny tzv. hřebeny kondenzátorů a jsou detailně popsány např. v [5]. Platí, že jsou to rovněž dynamické systémy, ale při návrhu řízení bývá dynamika zanedbávána a počítáno je jen s jejich zesílením [16]. Členy  $K_{x/V}$  a  $K_{V/F}$  jsou interní v regulátoru AGC a jejich úkolem je převod elektrických veličin zpět na fyzikální referenční a řídicí veličiny. Do schématu a výchozího modelu byly tyto členy přidány, protože je možné jimi vykrátit zesílení  $K_{F/V}$  a  $K_{V/x}$  pro zjednodušení návrhu regulátoru. Předpoklady a detaily tohoto kroku jsou vysvětleny v sekci 4.3.



Obrázek 4.1: Schéma řídicí smyčky budícího rezonátoru.

## 4.2 Návrh řízení frekvence a fáze

Cílem řízení frekvence a fáze je nalezení a udržování kmitů budícího módu na jeho rezonanční frekvenci. Výhodou buzení oscilátoru na této frekvenci je maximalizování kmitů a minimalizace vynaložené energie. Další výhodou je znalost fázového zpoždění signálu po průchodu systémem. Harmonický signál o frekvenci shodné s rezonanční frekvencí kmitavého systému 2. řádu je po průchodu tímto členem zpožděn o  $90^\circ$  vůči signálu na vstupu (viz. [1], strana 36). Znalost této informace je užitečná jak pro návrh řízení frekvence oscilací, tak i pro demodulaci Coriolisovy síly z kmitů sensorického módu.

Rezonanční frekvence budícího oscilátoru je ale předem neznámá a odlišná pro každý jednotlivý senzor. Proto je vhodné tuto skutečnost zohlednit při návrhu řízení a použít systém schopný adaptace. Z popsaných důvodů byl pro řízení frekvence kmitání zvolen systém PLL známý především z oblasti telekomunikací.

Návrh kompletního fázového závěsu je komplikovaným problémem, jehož řešení je nad rámec této diplomové práce. Z toho důvodu je zde nastíněna pouze jeho základní funkčnost a stavba. Konkrétní návrhové metody PLL lze nalézt například v monografii [17].

### 4.2.1 Fázový závěs (PLL)

Fázový závěs je řídicí obvod, jehož úkolem je generovat výstupní signál, který má fázi a tedy i frekvenci v určitém vztahu vůči signálu vstupnímu. Požadavek na PLL systém využitý v MEMS gyroskopu je naladění a udržování frekvence kmitů rezonátoru na jeho rezonanční frekvenci. Jak je známo z teorie lineárních systémů, při buzení kmitavého systému 2. řádu signálem na jeho rezonanční frekvenci dochází k 90° fázovému zpoždění výstupního signálu. Tato znalost je klíčová motivace a způsob, jak využít PLL systém pro řízení frekvence kmitů oscilátoru na jeho rezonanční frekvenci.

Základní schéma PLL obvodu je zobrazeno na obrázku 4.2. PLL se skládá ze třech základních komponent:

- **Napětím řízený oscilátor** (*Voltage Controlled Oscillator (VCO)*), nebo číselně řízený oscilátor (*Numerically Controlled Oscillator (NCO)*), který je použit namísto VCO u speciálního druhu PLL tzv. *All digital PLL (ADPLL)* [18].

Vstupem do této komponenty je napěťový signál a výstupem generovaný harmonický signál. Funkcí VCO je generování harmonického signálu s fází a frekvencí v závislosti na vstupním napětí.

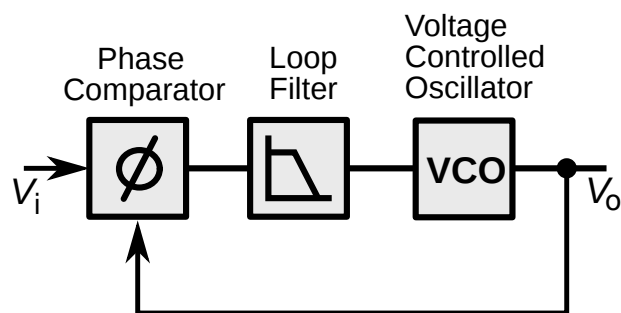
- **Fázový detektor** (*Phase Comparator/Detector (PD)*)

Fázový detektor má dva vstupní signály. Prvním je referenční signál, který udává frekvenční a fázový požadavek na generovaný výstup. Na druhý vstup PD je zaveden výstup VCO. Funkcí PD je porovnání fází obou signálů. V závislosti na jejich rozdílu je generováno řídicí napětí na vstup VCO. Způsob, jakým je toto napětí generováno, se liší použitým druhem PLL.

- **Filtr** (*Loop Filter*)

Mezi PD a VCO se vkládá filtr typu dolní propust. Jeho účelem je odfiltrování šumu ze vstupního napětí VCO, který může být zapříčiněn fázovým detektorem.

PLL řídicích obvodů existuje více druhů. To je zohledněno i ve schématu na obr. 4.1, kde je naznačeno, že signál generovaný PLL obvodem může být hladká harmonická funkce, nebo čtvercový signál. Detailní rozdělení, odlišnosti v jejich fungování a návrhu, a dokonce i informace o historickém vývoji různých druhů PLL lze nalézt například v [17].



Obrázek 4.2: Schéma fázového závěsu PLL.

Zdroj obrázku: [https://en.wikipedia.org/wiki/Phase-locked\\_loop](https://en.wikipedia.org/wiki/Phase-locked_loop)

Pro řízení kmitání budícího rezonátoru byly vybrány, vymodelovány a simulačně odzkoušeny dva typy PLL.

K prvním testům bylo zvoleno digitální PLL (DPLL), které je blíže popsáno v sekci 4.2.2. Nevýhodou tohoto PLL je, že pro zajištění  $90^\circ$  předstihu výstupního signálu je nutné zařadit za VCO digitální fázovou děličku frekvence. Zapojení děličky způsobí, že se z hladkého výstupního signálu VCO stane obdélníkový signál. Jak je známo z teorie signálů, obdélníkový signál v sobě zahrnuje harmonické složky vyšších frekvencí, které by mohly neblaze působit na kmitání rezonátoru.

Pro generování hladkého sinového budícího signálu bylo následně navrženo a otestováno lineární PLL (LPLL). Výhodou použití tohoto typu je, že pro generování výstupního signálu s fázovým přestihem  $90^\circ$  není potřeba použít fázovou frekvenční děličku. Díky tomu zůstane na výstupu PLL čistá sinusoida bez přítomnosti vyšších harmonických složek. Popisem modelu LPLL se zabývá sekce 4.2.3.

## 4.2.2 Digitální PLL (DPLL)

Hned na začátku je dobré zmínit, že označení digitální PLL je u tohoto typu poněkud zavádějící. Jádro DPLL je tvořeno filtrem a VCO, což jsou stále analogové komponenty. Přívlástek digitální získal tento typ PLL kvůli používání digitálního fázového detektoru, který je tvořen dvěma klopnými obvody typu D. Oproti tomu existují tzv. *All-digital PLL*, které jsou vyrobeny výhradně z číslicových součástek [17].

Na obrázku 4.3a je model vytvořený pro simulace v prostředí Simulink. Barevné rámečky oddělují jednotlivé obvodové části. V modrém rámečku je ohraničen zmíněný digitální fázový detektor. Na prvním vstupu PD je referenční signál a na druhý je připojena zpětná vazba z výstupu PLL. Výstupem jsou dva signály Q, každý náležející jednomu klopnému obvodu. Princip fungování je takový, že pokud přijde náběžná hrana referenčního signálu před hranou ze zpětné vazby, je na výstupu prvního klopného obvodu generována 1 a na výstupu druhého je 0 až do doby příchodu opožděné náběžné hrany ze zpětné vazby. V opačném případě, tj. příchodu hrany ve zpětné vazbě před příchodem hrany referenčního signálu je situace na výstupu opačná. Tyto signály řídí tzv. nápojovou pumpu (anglicky *charge pump*), která je charakteristickým členem při použití digitálního PD.



Nábojová pumpa zkonvertuje informaci o fázovém rozdílu z digitální podoby  $Q_1$  a  $Q_2$  na napětí, které je možné přivést přes filtr do VCO. Při návrhu filtru bylo postupováno podle návrhových metod pro PLL [17].

Blok VCO upraví frekvenci a fázi generovaného signálu v závislosti na přivedeném napětí. Pokud by výstupní signál VCO byl přiveden přímo na výstup PLL a tedy i na druhý vstup PD pomocí zpětné vazby, bylo by dosaženo generování výstupního signálu v podobě hladké sinusoidy s frekvencí a fází stejnou, jako by měl referenční signál. To ale není vhodné, protože vstupním signálem PLL je poloha rezonátoru (jí odpovídající napětí) a výstupem je signál, který je použit k buzení rezonátoru. Pro uvedení frekvence oscilací do rezonance je ale nutný fázový předstih  $90^\circ$  budícího signálu vzhledem k signálu výchylky. Ke splnění tohoto požadavku je potřeba do PLL zavést generování fázového předstihu výstupního signálu. Proto je do PLL zavedena fázová dělička frekvence, která je ohraničena červeným rámečkem na obrázku 4.3a.

Fázová dělička frekvence je druhým blokem DPLL, který je realizován digitálními klopnými obvody typu D. Funkcí děličky je rozdělit vstupní signál na 4 signály. Každý z výstupních signálů má čtvrtinovou frekvenci vzhledem ke vstupnímu signálu a fázi posunutou o 0 až 3 násobek  $90^\circ$ . Zapojením signálu s  $0^\circ$  fázovým zpožděním na výstup PLL a signálu s  $90^\circ$  fázovým zpožděním do zpětné vazby lze docílit splnění požadavku na generování budícího signálu, který má  $90^\circ$  předstih oproti poloze rezonátoru. Nevýhodou použití děličky je to, že jejím výstupem je digitální obdélníkový signál zahrnující vyšší harmonické frekvence.

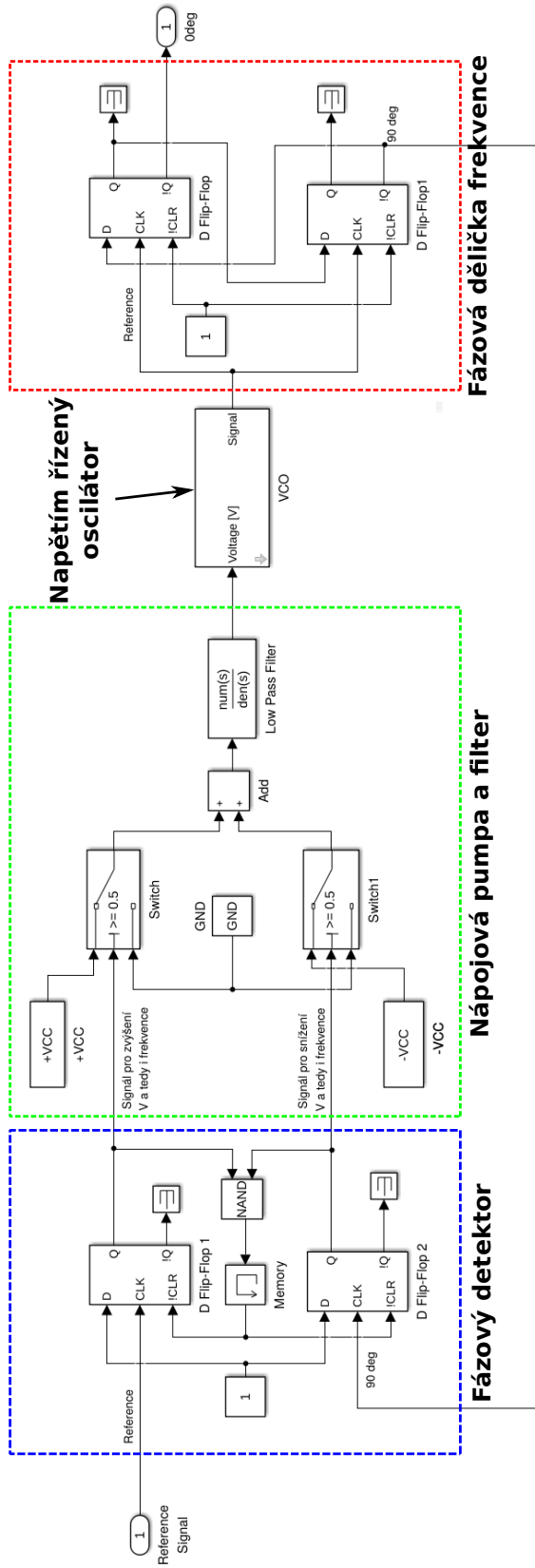
### 4.2.3 Lineární PLL (LPLL)

Model lineárního PLL na obrázku 4.3b vypadá jednodušeji než model DPLL. Princip fungování VCO je totožný a hlavní odlišností od DPLL je použití analogového fázového detektoru, který je realizován násobičkou analogových signálů. Na první vstup tohoto detektoru je přiveden referenční sinový signál. Ke druhému vstupu je ve zpětné vazbě připojen výstup PLL, který je před dosažením násobičky převeden na obdélníkový pomocí velkého zesílení a následné saturace. Výsledek násobení signálů je nutné kompenzovat ziskem  $G$ , který je rovněž přítomný v modelu. Pro jeho výpočet a stejně tak i pro návrh filtru existují propracované metody, zohledňující konkrétní použití PLL řídicího systému [17].

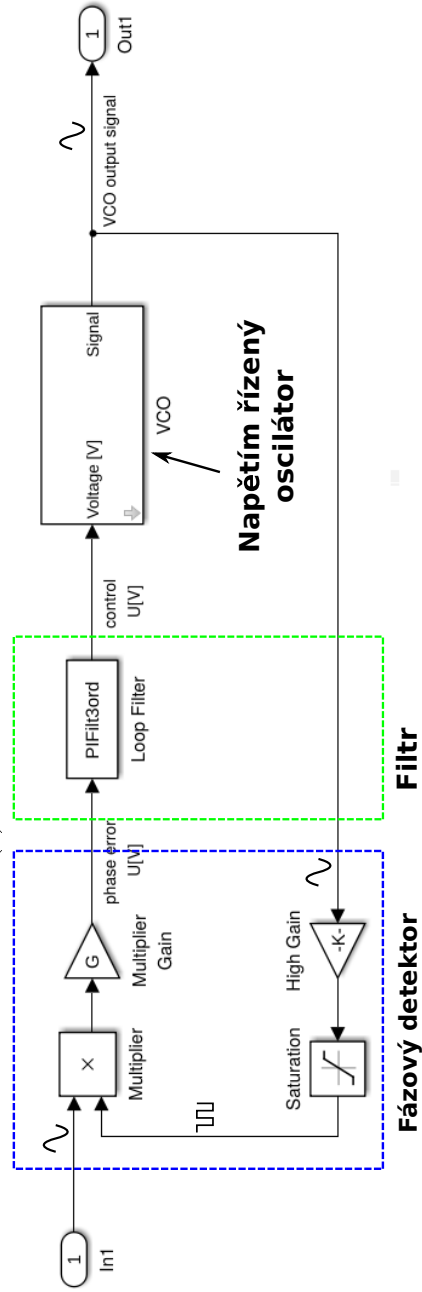
Výhodnou vlastností LPLL je, že generuje výstupní signál v  $90^\circ$  fázovém předstihu oproti vstupnímu signálu. To je pro udržování kmitání oscilátoru na rezonanční frekvenci žádaná vlastnost.

### 4.2.4 Přejít do stavu fázového závěsu

Až do této chvíle byla při popisu fungování PLL uvažována situace, kdy byl na referenční vstup PLL připojen signál o konstantní frekvenci. Fungování PLL v této situaci je nyní zřejmé. Při zapojení PLL do řídicí smyčky tak, jak je zobrazeno na schématu 4.1 však dojde k odlišné situaci. Frekvence a fáze vstupního referenčního signálu PLL se bude měnit až do chvíle, než se PLL „naladí“ na rezonanční frekvenci systému a dojde



(a) Model fázového závěsu DPLL.



(b) Model fázového závěsu LPLL.

Obrázek 4.3: Porovnání simulačních modelů fázového závěsu.

k tzv. fázovému závěsu (*phase-lock*). Díky tomu, že PLL je navrženo tak, že generuje výstupní signál s přesně daným fázovým předstihem  $90^\circ$ , dojde k ustálení a závěsu vždy na rezonanční frekvenci řízeného oscilátoru. To je ideální vlastnost pro potřebu řízení frekvence kmitání budicího módu MEMS gyroskopů. Rezonanční frekvence nemusí být dopředu známa přesně. Pro návrh vhodného PLL je potřeba znát interval frekvencí, ve kterém je rezonanční frekvence předpokládána. To je výhodné právě v situaci, kdy všechny sensory jsou navrženy pro jednu nominální rezonanční frekvenci, ale vlivem výrobních nepřesností se bude skutečnost lehce odlišovat.

Mezi zapnutím řídicího systému a stavem fázového závěsu probíhá složitý nelineární děj, kdy PLL „hledá“ rezonanční frekvenci systému. V tomto přechodovém ději dochází k iterativnímu navyšování a snižování frekvence a posunu fáze VCO až do doby ustálení na rezonanční frekvenci.

Proto, aby tento přechodový děj odezněl co nejrychleji a PLL stabilně zůstávalo ve stavu fázového závěsu (obecně se může stát, že PLL „vypadne“ ze stavu závěsu a musí jej poté znovu „hledat.“) je potřeba PLL správně navrhnout. Popis celého návrhu je však nad rámec této práce. Při vytváření modelů systému PLL bylo postupováno podle návrhových metod popsanych v [17].

### 4.3 Syntéza návrhu řízení amplitudy budicího módu

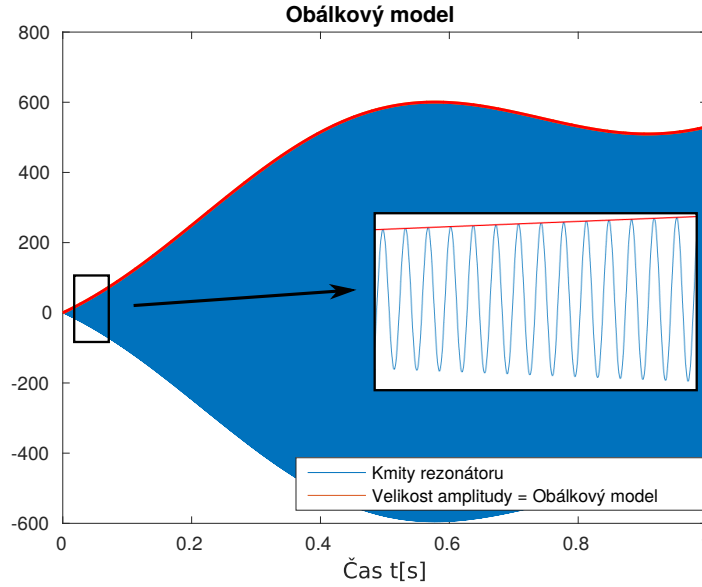
Druhým požadavkem při řízení kmitů budicího módu je regulace amplitudy kmitů na požadovanou konstantní hodnotu. K tomu účelu byl navržen automatický regulátor amplitudy (Automatic Gain Controller). Model rezonátoru z rovnice (3.11) modeluje odezvu systému na modulovaný vstupní signál, kdežto z hlediska řízení amplitudy je zapotřebí znát model pro tzv. obálku modulovaného signálu. Obálkový model vznikne oddělením pomalé dynamiky rezonátoru od dynamiky rychlé a díky tomu se problém syntézy regulátoru přesouvá z pásma vyšších frekvencí (desítky tisíc  $Hz$ ) do oblasti s nízkými frekvencemi (desítky  $Hz$ ). Obrázek 4.4 ilustruje princip obálkového modelu.

Z přenosové funkce rezonátoru (3.3) je možné modální transformací získat následující obálkový model [19]

$$G_{d,0}^A(s) = \frac{1}{2m_{d,0}s + b_{d,0}}. \quad (4.1)$$

Indexové značení  $d,0$  znamená, že se jedná o nominální přenosovou funkci budicího módu. Index  $A$  pak značí, že model popisuje obálkový model amplitudy kmitů. Přenosová funkce popisuje přenos rychlosti rotace senzoru  $\Omega(t)$  na amplitudu kmitů rezonátoru  $y_A(t)$  resp. přenos Laplaceových transformací těchto signálů. Porovnání výstupu modelu s kmity rezonátoru je zobrazeno na obrázku 4.4.

Přenosová funkce (4.1) modeluje pouze ideální systém s nominálními parametry. Výrobu senzoru s nominálními parametry však není možné zajistit a hodnoty parametrů se navíc mohou měnit v závislosti na podmínkách prostředí (teplota, tlak atd.). Pro zohlednění těchto faktů je cílem návrhu robustní řízení.



Obrázek 4.4: Obálkový model.

Parametr	Hodnota[Jednotky]
Hmotnost $m_{d,0}$	$8,1347 \cdot 10^{-9} [kg]$
Tuhost pružiny $k_{d,0}$	$41,5534 [N \cdot m^{-1}]$
Tlumení $b_{d,0}$	$1,2370 \cdot 10^{-8} [N \cdot s \cdot m^{-1}]$
Vlastní frekvence $\omega_{d,0}$	$11375 [Hz]$
$Q_{d,0}$ - faktor	$47000 [-]$

Tabulka 4.1: Nominální parametry rezonátoru.

Podstatou robustního řízení je návrh jediného regulátoru, který je schopný zajistit stabilitu a specifikovanou kvalitu řízení pro množinu systémů. Tato množina je specifikována nominální přenosovou funkcí  $G_{d,0}^A(s)$  a její neurčitostí  $W_{d,2}\Delta$ , které jsou definovány v následující sekci.

### 4.3.1 Definování uvažovaných neurčitostí

Před návrhem robustního řízení byla stanovena množina systémů  $\mathcal{G}_d^A(s)$  za účelem stabilizace pomocí jediného regulátoru. Tuto množinu lze specifikovat pomocí nominálního modelu  $G_{d,0}^A(s)$  a aditivní neurčitosti  $W_{d,2}^A\Delta$  jako

$$\mathcal{G}_d^A(s) = \{G_d^A(s) : G_d^A(s) = G_{d,0}^A(s) + W_{d,2}^A(s)\Delta, \forall \Delta \in \mathbb{C} : \|\Delta\|_\infty \leq 1\}, \quad (4.2)$$

kde  $W_{d,2}^A$  je váhová funkce aditivní neurčitosti.

Váhovou funkci aditivní neurčitosti  $W_{d,2}^A$  je možné převést na váhovou funkci multiplikativní neurčitosti  $W_{d,2}^M$  pomocí vztahu

$$W_{d,2}^M = \frac{W_{d,2}^A}{G_{d,0}^A} \quad (4.3)$$

a poté lze množinu uvažovaných systémů vyjádřit jako

$$\mathcal{G}_d^A(s) = \{G_d^A(s) : G_d^A(s) = G_{d,0}^A(s) (1 + W_{d,2}^M(s)\Delta) , \forall \Delta \in \mathbb{C} : \|\Delta\|_\infty \leq 1\} . \quad (4.4)$$

Aditivní forma neurčitosti byla uplatněna pro nalezení odpovídající váhové funkce  $W_{d,2}^A$ , která byla následně převedena na multiplikativní váhovou funkci  $W_{d,2}^M$ , která byla využita pro kontrolu splnění kritéria robustní kvality řízení

$$|W_{d,1}(j\omega)S_{d,0}(j\omega)| + |W_{d,2}^M(j\omega)T_{d,0}(j\omega)| < 1, \forall \omega \in \mathbb{R} : \omega \geq 0 \quad (4.5)$$

neboli [20]

$$\| |W_{d,1}(j\omega)S_{d,0}(j\omega)| + |W_{d,2}^M(j\omega)T_{d,0}(j\omega)| \|_\infty < 1 , \quad (4.6)$$

kde  $T_{d,0}$  je nominální komplementární citlivostní funkce uzavřené řídicí smyčky a člen  $|W_{d,2}^M T_{d,0}|$  v kritériu (4.5) vyjadřuje požadavek na robustní řízení a tedy stabilizaci všech systémů z množiny  $\mathcal{G}_d^A(s)$ . Člen  $|W_{d,1} S_{d,0}|$  pak zastává požadavek na kvalitu řízení.  $S_0(j\omega)$  je citlivostní funkce uzavřené nominální regulační smyčky a  $W_{d,1}(j\omega)$  je váhová funkce citlivosti. Pomocí váhové citlivostní funkce  $W_{d,1}$  je možné specifikovat požadavky na potlačení poruch působících na řízený systém. Spojení obou členů do kritéria (4.5) pak popisuje podmínku robustní kvality řízení, která vyjadřuje požadavek na stabilizaci všech systémů z množiny  $\mathcal{G}_d^A(s)$ , pro které navíc musí navržený regulátor zajistit stanovenou kvalitu potlačení poruch.

Před samotným návrhem regulátoru je nutné stanovit možné perturbace nominálního systému  $G_{d,0}^A$  a určit váhové funkce  $W_{d,1}$  a  $W_{d,2}$ .

Velikost neurčitosti systému byla stanovena na 20% od nominálních hodnot  $\omega_{d,0}$ ,  $m_{d,0}$  a  $b_{d,0}$ . Perturbace byla zvolena pouze pro tyto tři parametry, protože ostatní parametry  $Q_d$  a  $k_d$  jsou na nich závislé. V tabulce 4.2 jsou specifikovány přípustné intervaly neurčitosti parametrů.

Frekvenční charakteristiky realizací perturbovaných systémů  $G_{d,p}^A$  jsou porovnány s nominálním přenosem  $G_{d,0}^A$  na obrázku 4.5a. Z grafu frekvenčních charakteristik je

Parametr	Spodní mez	Horní mez	Jednotky
Hmotnost $m_d$	$6.5078 \cdot 10^{-9}$	$9.7617 \cdot 10^{-9}$	[kg]
Tlumení $b_d$	$9.8962 \cdot 10^{-9}$	$1.4844 \cdot 10^{-8}$	[N · s · m <sup>-1</sup> ]
Vlastní frekvence $\omega_d$	9100	13650	[Hz]

Tabulka 4.2: Intervaly neurčitosti parametrů.

patrné, že k největší změně vlastností přenosu dojde při současné perturbaci parametrů  $\omega_d$  a  $b_d$ . Proto byla váhová funkce neurčitosti zkonstruována porovnáním perturbovaného přenosu, který vznikl změnou těchto dvou parametrů, s nominálním přenosem.

Váhová funkce neurčitosti musí pokrýt všechny uvažované perturbace a musí pro ni platit

$$|G_{d,0}^A(j\omega) - G_{d,p}^A(j\omega)| \leq |W_{d,2}^A(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} : \omega \geq 0, \forall p. \quad (4.7)$$

Pro všechny realizace perturbovaných systémů  $G_{d,p}^A$  zobrazené na obr. 4.5a byla numericky vypočtena velikost odlišnosti od nominálního systému  $G_{d,0}^A$  jako

$$|W_{d,2,p}^A(j\omega)| = |G_{d,0}^A(j\omega) - G_{d,p}^A(j\omega)| \quad (4.8)$$

a byla následně zakreslena do grafu na obrázku 4.6. V grafu je rovněž vidět amplitudová charakteristika váhové funkce aditivní neurčitosti  $W_{d,2}^A$ , která byla složena z elementárních přenosových funkcí. Jejím účelem je aproximace numericky vypočtených neurčitostí  $|W_{d,2,p}^A|$  při splnění podmínky

$$|W_{d,2,p}^A(j\omega)| \leq |W_{d,2}^A(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} : \omega \geq 0, \forall p, \quad (4.9)$$

která byla odvozena ze vztahů (4.7) a (4.8).

Pro váhovou funkci neurčitosti byla zvolena struktura aperiodického systému 1. řádu a následně nalezeny hodnoty parametrů tak, aby platila podmínka (4.9). Nalezený přenos aproximativní váhové funkce neurčitosti  $W_{d,2}^A$  je

$$W_{d,2}^A(s) = \frac{356, 26}{s + 0, 56} \quad (4.10)$$

a využitím vztahu (4.3) byla získána váhová funkce multiplikativní neurčitosti

$$W_{d,2}^M(s) = \frac{W_{d,2}^A(s)}{G_{d,0}^A(s)} = \frac{0, 4143s + 0, 315}{s + 0, 56}. \quad (4.11)$$

Neurčitost nominálního přenosu  $G_{d,0}^A$  v Nyquistově komplexní rovině je ilustrována na obr. 4.5b.

Po definování neurčitosti nominálního přenosu byly stanoveny požadavky regulace.

### 4.3.2 Specifikace požadavků na řízení

Před návrhem regulátoru byly stanoveny tyto požadavky na výsledný systém:

1. Nulová regulační odchylka v ustáleném stavu.
2. Minimální šířka pásma (Bandwidth) uzavřené regulační smyčky (CL) nominálního přenosu:  $BW = 100Hz$ .
3. Omezení na citlivostní funkci CL: žádná porucha na jakékoliv frekvenci nesmí být zesílena více než o 10%:  $M_s = 1, 1$ .

4. CL musí být stabilní pro všechny perturbace z intervalů uvedených v tabulce 4.2.

Pro sledování skokového referenčního signálu  $r(t) = c \cdot 1(t)$ , kde  $c$  je konstanta a  $1(t)$  značí jednotkový skok, platí věta o konečné hodnotě

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{c}{s} S(s) \right) = \lim_{s \rightarrow 0} cS(s), \quad (4.12)$$

kde  $e(t)$  je regulační odchylka.

Podle věty o konečné hodnotě (4.12) lze 1. požadavek vyjádřit jako

$$S(0) = \frac{1}{1 + C_d(0)G_d^A(0)} = 0, \quad (4.13)$$

odkud je patrné, že nulovou regulační odchylku v ustáleném stavu při sledování skokového referenčního signálu je možné dosáhnout, pokud přenos otevřené regulační smyčky  $C_d G_d^A$  má pól umístěný v nule. Protože přenos  $G_{d,0}^A$  toto nesplňuje, lze splnění požadavku zajistit přidáním integrátoru do navrhovaného regulátoru  $C_d$ .

Zbylé požadavky jsou následně dosaženy vytvarováním frekvenční charakteristiky. Požadavek číslo 3 lze vyjádřit pomocí váhové citlivostní funkce  $W_{d,1}(j\omega) = \frac{1}{M_s} = \frac{1}{1,1} = 0,9091$  a je spolu s požadavkem č. 4 zastoupen v kritériu (4.5).

### 4.3.3 Návrh robustního regulátoru amplitudy

Výchozím bodem při návrhu regulátoru byla frekvenční charakteristika obávkového modelu, která je zobrazena na obr. 4.7. Amplitudová charakteristika klesá se sklonem  $-20dB/dek$  na frekvencích  $\omega > 1Hz$ .

Robustní regulátor byl navržen v těchto krocích:

1. Pro zajištění nulové regulační odchylky v ustáleném stavu byl do regulátoru přidán čistý integrátor  $C_d = \frac{1}{s}$ , který zvětšil sklon amplitudové charakteristiky na vyšších frekvencích na  $-40dB/dek$ , což je zobrazeno na obr. 4.8. Je zde patrná malá bezpečnost ve fázi.
2. Za účelem dosažení požadované šířky pásma regulace, bylo potřeba zvýšit frekvenci  $w_c$ , na které amplitudová charakteristika kříží hodnotu  $0 dB$ . Dále bylo nutné ztlumit prudký pokles amplitudové charakteristiky v okolí frekvence  $\omega_c$ , který představoval nízkou robustnost. To bylo zajištěno přidáním proporcionální složky do regulátoru  $C_d = 1 + \frac{1}{s}$ .
3. Volbou časové konstanty  $T_I$  integrační složky bylo možné zmírnit sklon amplitudové charakteristiky od požadované frekvence  $\omega_I [rad/s] = \frac{1}{T_I}$ . Vzhledem k tomu, že obávkový model  $G_{d,0}^A$  obsahuje jeden stabilní reálný pól  $p_{d,1} = -0,7603$ , byla tato konstanta zvolena za účelem jeho vykrácení

$$T_I = \frac{1}{\omega_I} = -\frac{1}{p_{d,1}} = \frac{1}{0,7603}. \quad (4.14)$$

Frekvenční charakteristika regulátoru  $C_d = 1 + \frac{1}{0,7603s}$  je zobrazena na obr. 4.9.

Otevřená regulační smyčka  $C_d \cdot G_{d,0}^A$  získala charakter prostého integrátoru, což je vidět na 4.10, kde je rovněž zobrazena přechodová frekvence  $\omega_c = 2\pi \cdot 137[\text{rad/s}]$ .

4. Volbou zesílení regulátoru  $K$  by nyní bylo možné ovlivnit přechodovou frekvenci  $w_c$ . Návrhový požadavek na uzavřenou smyčku je však  $BW > 100 \text{ Hz}$ , a tak nebylo potřeba zesílení měnit a bylo ponecháno na hodnotě  $K = 1$ .

Výsledný tvar navrženého regulátoru struktury PI je

$$C_d(s) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\omega_I}s} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{0,7603}s} = \frac{s + 0,7603}{s}. \quad (4.15)$$

Na obrázku 4.10 je zobrazena frekvenční charakteristika navržené otevřené smyčky  $L_0 = C_d \cdot G_{d,0}^A$ , kde  $C_d$  je hledaný regulátor. Je zde vidět nekonečná bezpečnost v zesílení a bezpečnost ve fázi v hodnotě  $90^\circ$ . Uzavřením zpětné vazby byl získán regulovaný systém, jehož frekvenční charakteristika je zobrazena na obr. 4.11 a je zde vidět splnění druhého návrhového požadavku na šířku pásma.

O splnění požadavku na robustní kvalitu řízení (4.5) se lze přesvědčit z grafu na obr. 4.12 a na obr. 4.13 je ilustrace splnění požadavku na kvalitu řízení

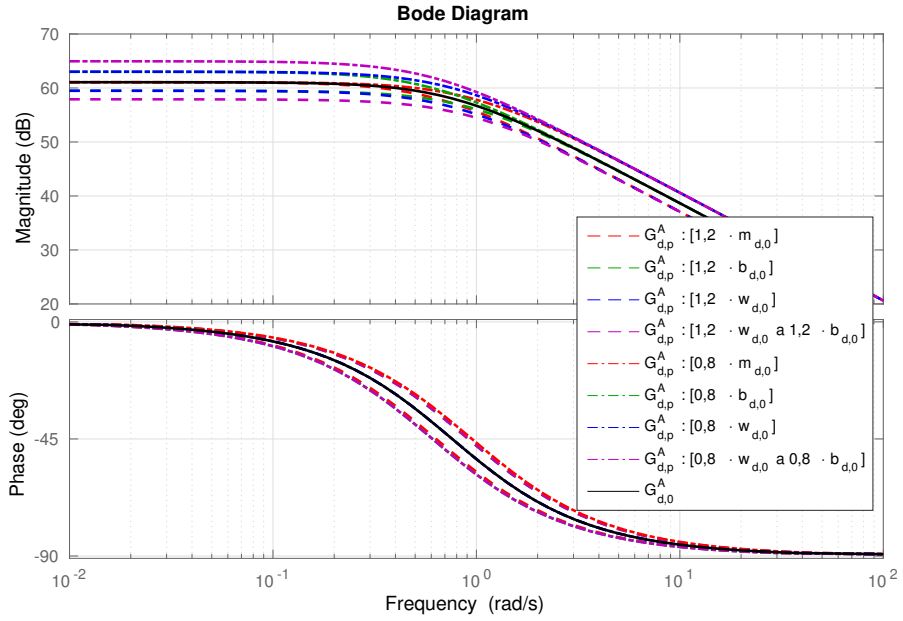
$$\|W_1 S_d\|_\infty < 1 \quad (4.16)$$

pro všechny systémy z množiny  $\mathcal{G}_d^A$ . Poslední ilustrace splnění požadavku na robustní kvalitu řízení je zobrazena v Nyquistově komplexní rovině na obr. 4.14.

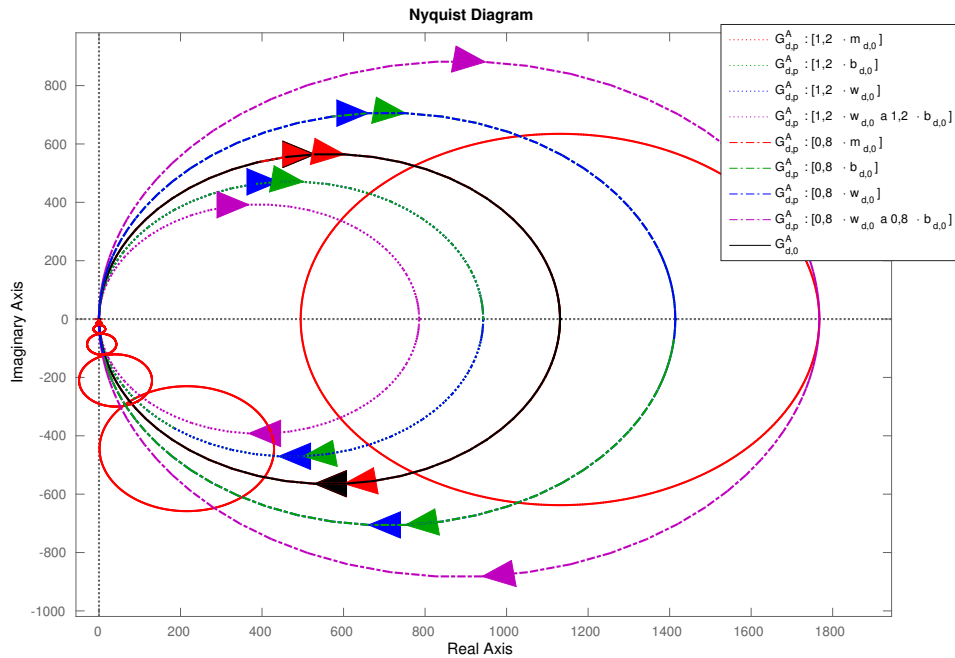
Z přechodové charakteristiky přenosové funkce  $T_0$  na obr. 4.15 je možné odečíst dobu ustálení  $T_{us} = 12 \text{ ms}$ . V odezvě systému na jednotkový skok nedochází k žádnému překmitu.

Po návrhu AGC je možné uzavřít druhou regulační smyčku oscilací budicího rezonátoru MEMS gyroskopu. Detaily zapojení a koordinování dvou řídicích smyček jsou popsány v následující sekci.



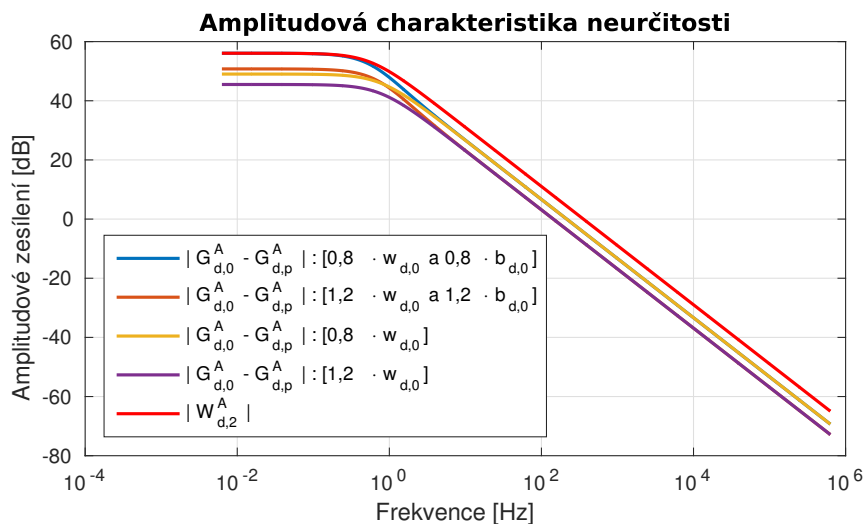


(a) **Porovnání perturbovaných přenosů s nominálním.** Na grafu je Bodeho frekvenční charakteristika zobrazující nominální přenos  $G_{d,0}^A$  (černá barva) a konkrétní realizace perturbovaných přenosů  $G_{d,p}^A$  (vykresleny barevně), přičemž perturbované parametry a jejich hodnota je uvedena v hranatých závorkách v legendě.

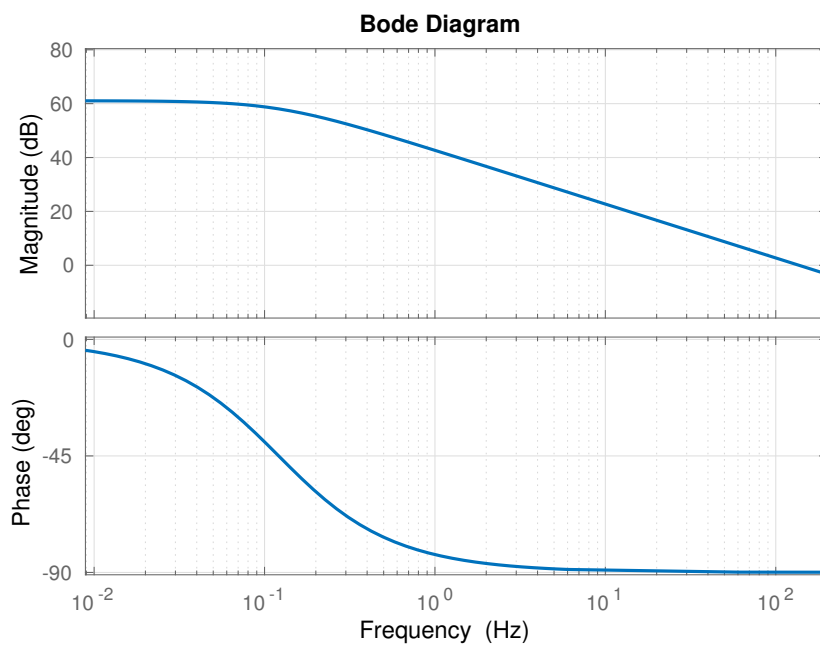


(b) **Perturbované přenosy a  $W_{d,2}^A$ .** Porovnání frekvenčních charakteristik nominálního (černě)  $G_{d,0}^A$  a perturbovaných  $G_{d,p}^A$  (barevně) přenosů v Nyquistově komplexní rovině. V grafu je rovněž zakreslena neurčitost  $W_{d,2}^A(j\omega)\Delta$  pro vzorky frekvencí  $\omega$  (červené kružnice).

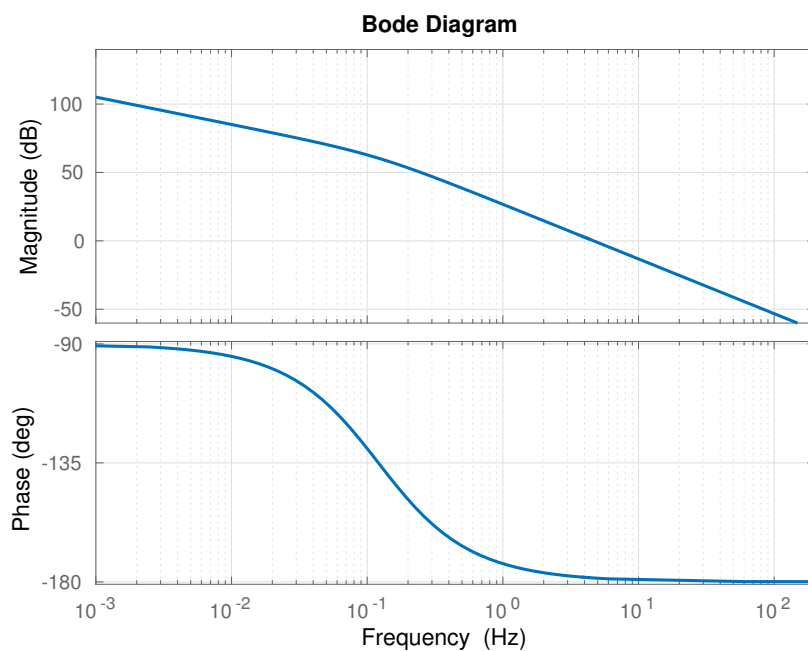
Obrázek 4.5: Frekvenční charakteristika nominálního a perturbovaných přenosů.



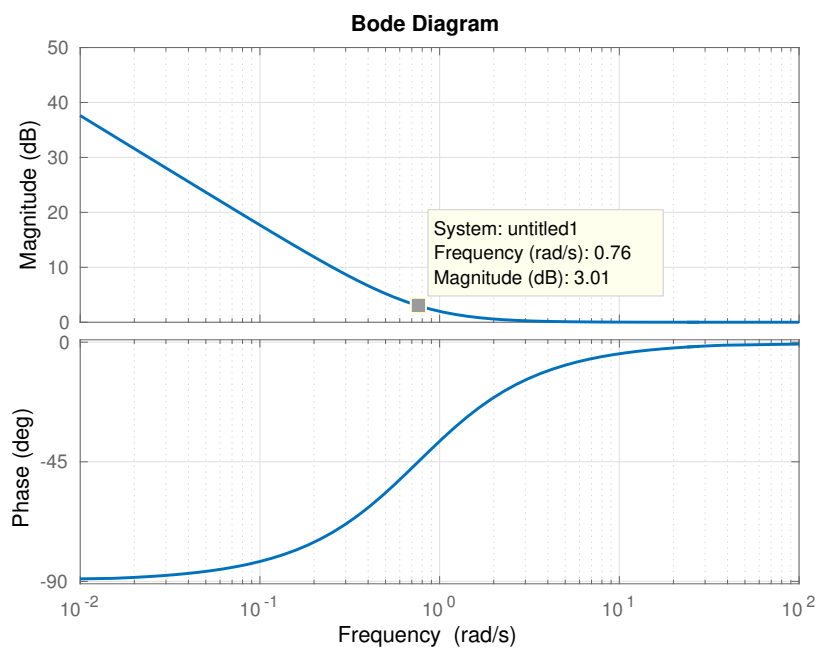
Obrázek 4.6: **Aproximace amplitudové charakteristiky přenosu neurčitosti.** Graf zobrazuje numericky vypočtené velikosti odlišností realizací perturbovaných systémů  $G_{d,p}^A$  od nominálního modelu  $G_{d,0}^A$ . Velikosti odlišností jsou zobrazeny v *dB*. Modely s perturbací parametrů  $m_d$  a  $b_d$  nebyly pro stanovení váhové funkce neurčitosti  $W_{d,2}^A$  použity, protože velikost způsobených změn je menší, než velikost změn perturbovaných systémů vykreslených na grafu. O této skutečnosti se lze přesvědčit prohlédnutím grafu na obrázku 4.5a. Amplitudová charakteristika  $W_{d,2}^A$  neodpovídá úplně přesně charakteristice numericky spočtených rozdílů. Důležité je, aby velikost aproximativní funkce neurčitosti pokrývala skutečnou neurčitost a tedy byla splněna podmínka (4.9). Dále je vhodné vzít v úvahu skutečnost, že matematický model nevystihuje chování reálného systému na vyšších frekvencích přesně. Po zohlednění těchto úvah a možnosti jednodušší aproximace byla do funkce  $W_{d,2}^A$  zavedena větší neurčitost v oblasti vyšších frekvencí než výsledné numerické hodnoty.



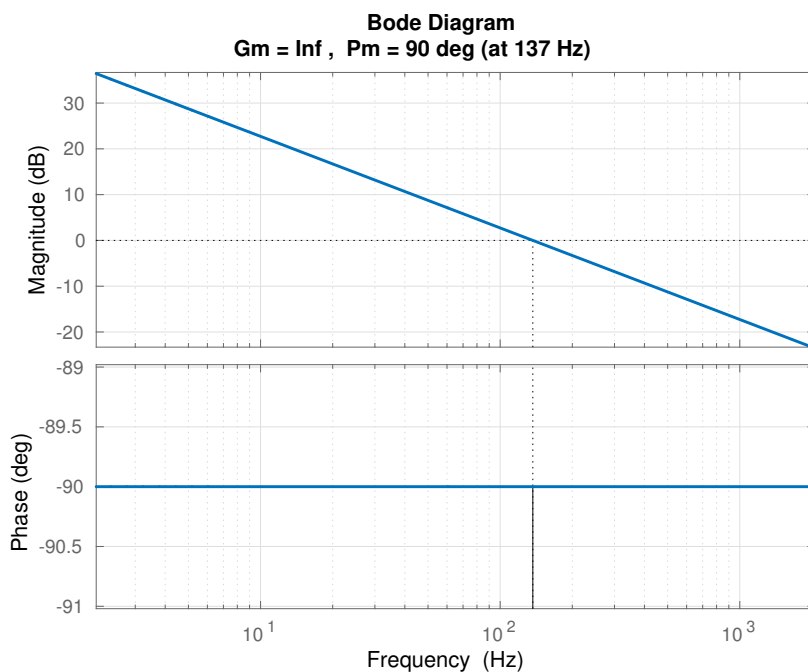
Obrázek 4.7: Výchozí model systému amplitudové obálky:  $G_{d,0}^A$ .



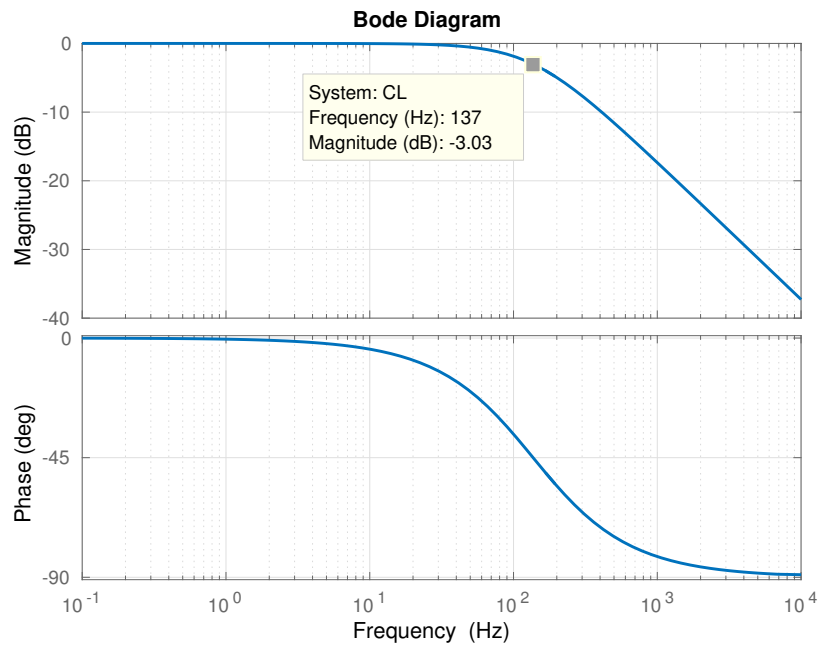
Obrázek 4.8: Přidání integrátoru do systému:  $\frac{1}{s}G_{d,0}^A$ .



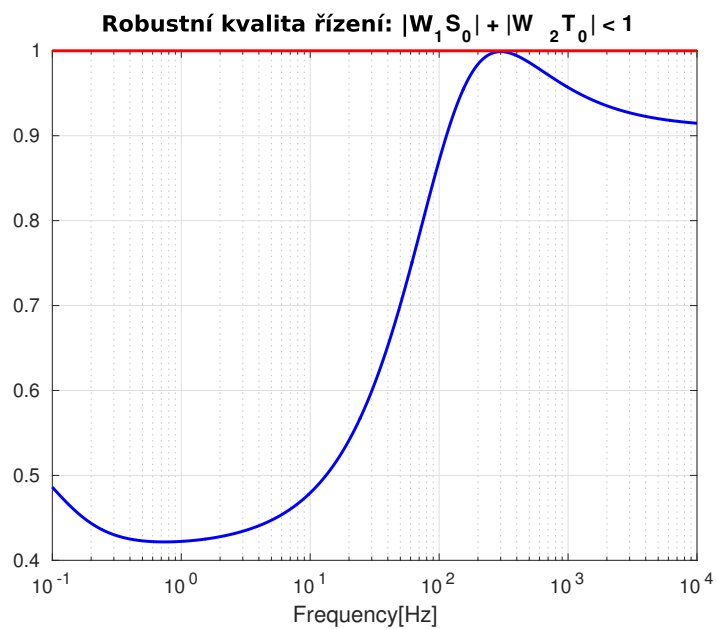
Obrázek 4.9: PI regulátor vytvořený v krocích 2 a 3:  $1 + \frac{1}{T_I s}$ .



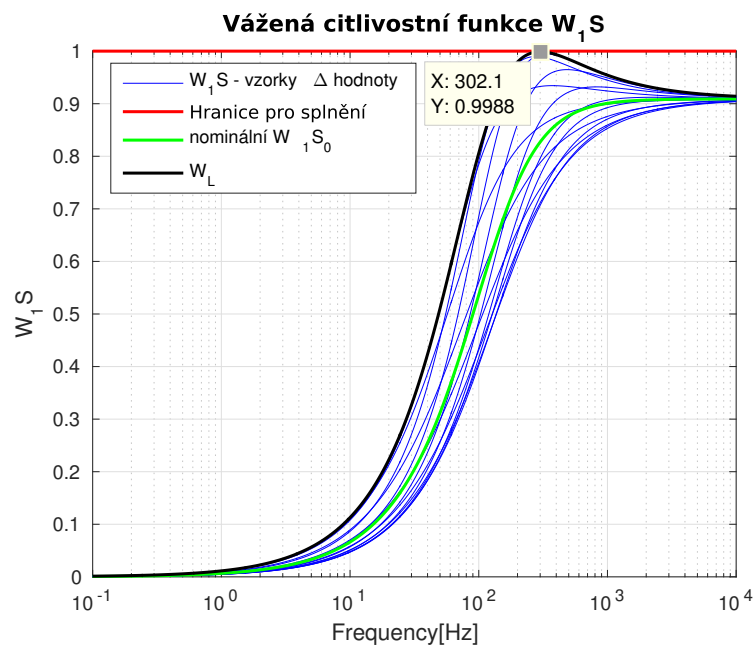
Obrázek 4.10: Navržená otevřená regulační smyčka:  $\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) G_{d,0}^A$ .



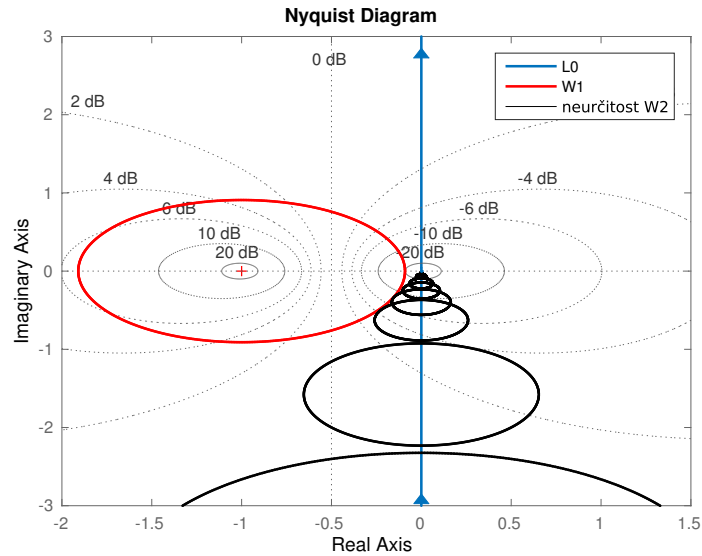
Obrázek 4.11: Bodeho charakteristika uzavřené smyčky.



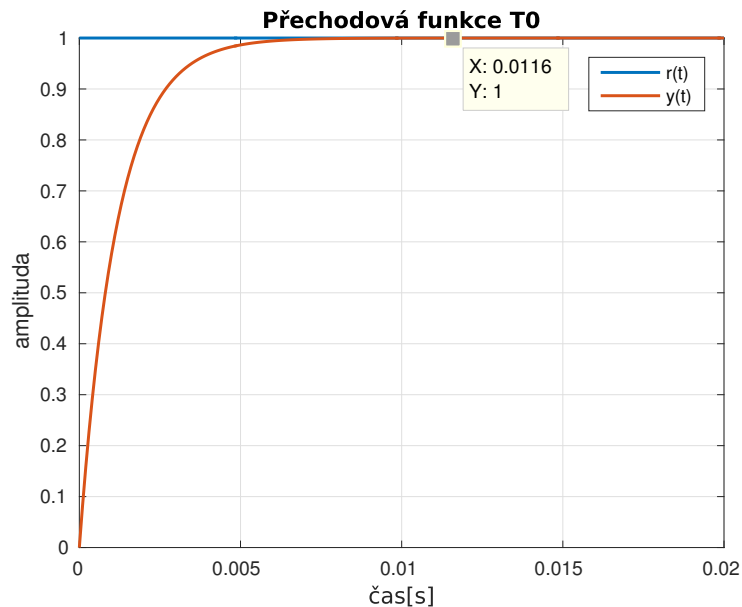
Obrázek 4.12: Kritérium robustní kvality řízení.



Obrázek 4.13: **Kritérium kvality řízení.** Ilustrace splnění požadavku na kvalitu řízení. V grafu je vykreslena funkce  $W_L = \frac{W_1 S_0}{1 - |W_2 T_0|}$ , která vyjadřuje maximální možné zesílení citlivostní funkce, ke kterému může dojít pro všechny přípustné  $\Delta$ . Vyjádření funkce  $W_L$  je odvozeno například v [20] a v [21].



Obrázek 4.14: **Nyquistova charakteristika.** Váhová funkce  $W_{d,1}$  (zobrazena červeně) ohraničuje okolí bodu  $(-1, j0)$ , ve kterém se nesmí vyskytnout frekvenční charakteristika systému z důvodu splnění požadavku na kvalitu řízení. Černé kružnice symbolizují velikost neurčitosti  $W_{d,2}^A$  pro vzorky frekvence  $\omega$ . Pro splnění požadavků na řízení se při tvarování frekvenční charakteristiky nesmějí černé kružnice protnout s červenou a musí být zachována další obecná pravidla Nyquistovy charakteristiky (jako např. počet a směr obklíčení bodu  $-1$ ).

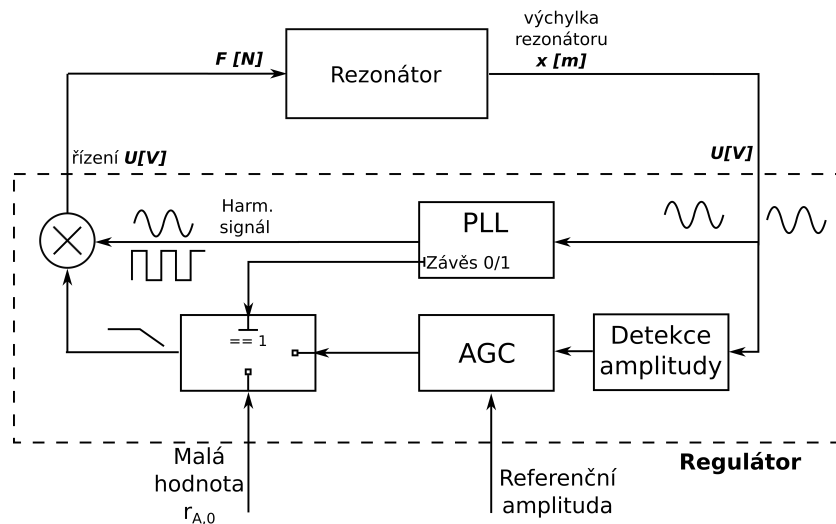


Obrázek 4.15: Přechodová charakteristika navržené řídicí smyčky amplitudy kmitů buďícího rezonátoru s nominálními parametry.

## 4.4 Spojení regulačních smyček PLL a AGC

Po návrhu systému PLL pro řízení frekvence oscilací a regulátoru AGC pro řízení amplitudy zbývá propojit obě regulační smyčky. Při spojování je možné vyjít ze schématu na obr. 4.1. Pro usnadnění návrhu byly odstraněny zesílení  $K_{x1/x2}$  reprezentující zesílení při konverzi fyzikálních veličin. V reálném MEMS gyroskopu je nutné převést výchylky rezonátoru na napětí, které je použito pro výpočet chyby regulace. K tomuto převodu dochází pomocí kondenzátorových hřebenů. Kondenzátor je sám o sobě dynamický systém, ale v návrzích regulátorů (např. v [16]) bývá jeho dynamika zanedbávána a v úvahu se při návrhu bere pouze zesílení tohoto členu  $K_{V/x}$ . K obdobné situaci dochází při převodu řídicího napětí na budící signál. Zesílení  $K_{F/V}$  opět reprezentuje funkci hřebenových kondenzátorů. Na vstupu regulátoru je nezbytné převést napěťové signály na referenční veličinu a na jeho výstupu provést konverzi opačnou. To je ve schématu 4.1 reprezentováno členy  $K_{V/F}$  a  $K_{x/V}$ .

Při návrhu regulátoru by také mělo být počítáno s amplitudou signálu generovaného PLL blokem. Dále bude předpokládáno, že tato amplituda je rovna jedné. Při předpokladu, že AGC regulátor pracuje se signály v jednotkách výchylky rezonátoru, musí platit:  $K_{F/V} = \frac{1}{K_{V/F}}$  a  $K_{V/x} = \frac{1}{K_{x/V}}$ . Za těchto předpokladů je návrh regulátoru usnadněn a schéma z obr. 4.1 se zjednoduší na schéma na obr. 4.16. Ve schématu přibyl přepínač, řízený systémem PLL. Jeho úlohou je řízení činnosti AGC. Při spuštění gyroskopu je nejprve nutné nechat systém PLL najít rezonanční frekvenci a přejít do stavu fázového závěsu. K tomu je nutné vybudit rezonátor do malých kmitů s amplitudou buzení  $r_{A,0} = 10^{-x}$ ,  $x \ll 0$ , jejichž frekvence se bude měnit až do dosažení závěsu, po kterém vydá PLL řídicí signál k připojení AGC a spuštění regulace ve druhé řídicí smyčce. K řízení amplitudy kmitů tedy dojde až po ustálení frekvence.

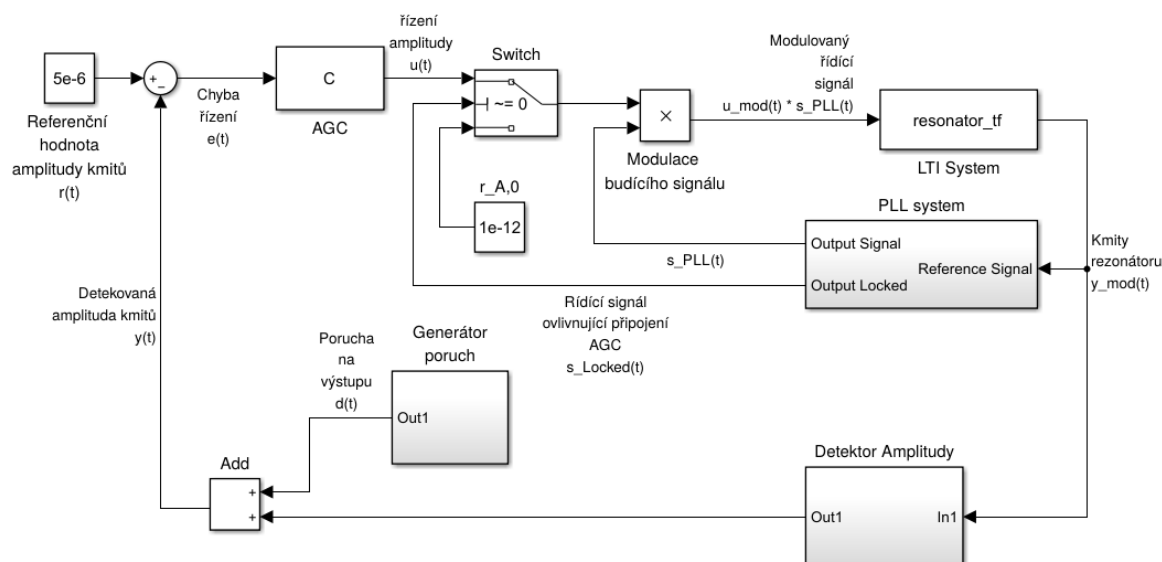


Obrázek 4.16: Zjednodušené schéma řídicí smyčky primárního rezonátoru.



## 4.5 Analýza navrženého řídicího systému budicího módu

Pro otestování spojení regulačních smyček byl vytvořen model v prostředí Simulink, který je zobrazen na obr. 4.17.



Obrázek 4.17: Simulační model řídicí smyčky primárního rezonátoru.

Na obr. 4.18a je zobrazen výstup simulace startu systému s nominálními parametry. V dolním grafu je vidět, že hledání rezonanční frekvence trvá zhruba  $15,6\text{ ms}$ . Předtím, než dojde k fázovému závěsu, je rezonátor buzen signálem s konstantní amplitudou  $r_{A,0}(t) = 10^{-12}$ . Krátce po čase  $15,6\text{ ms}$  došlo k zachycení PLL a byla zapnuta druhá regulační smyčka s AGC. Náběh na referenční amplitudu  $r(t) = 5 \cdot 10^{-6}\text{ m}$  poté trval  $17\text{ ms}$ . To je zhruba o  $5,5\text{ ms}$  více, než teoretická hodnota z přechodové charakteristiky obálkového modelu na obr. 4.15. Toto zpoždění je možné vysvětlit tím, že simulační model v této části obsahuje více modelovaných detailů než samotný obálkový model.

Dalším předmětem testování řízení oscilací buzeného módu byla robustnost řízení vůči průběžným změnám parametrů. Rezonátor byl rozkmitán do ustálených, pravidelných kmitů a následně začala být simulována změna jeho parametrů tlumení  $b_d$  a tuhosti pružiny  $k_d$ .

Změny parametrů pokrývaly intervaly neurčitosti definované v tabulce 4.2. Pro parametr  $b_d$  to byl interval  $b_d \in \langle 9, 8962 \cdot 10^{-9}; 1, 4844 \cdot 10^{-8} \rangle$ . Interval neurčitosti parametru  $k_d \in \langle 26, 5942; 59, 8369 \rangle$  byl vypočten z neurčitosti  $\omega_d$  podle vztahu:

$$k_d = m_{d,0} \cdot \omega_d^2 \quad . \quad (4.17)$$

Systém byl nejdříve podroben lineárním změnám parametrů a výsledek simulace je zobrazen na obr. 4.18b.

Z výsledků je patrné, že v průběhu změny parametrů vznikají poruchy na výstupu systému. Tyto poruchy jsou však o 2 řády menší, než je referenční hodnota pro amplitudu kmitů rezonátoru. Dále je možné si všimnout, že k největším chybám regulace dochází právě při změnách parametrů. To lze vysvětlit pomocí věty o konečné hodnotě pro rampové signály. Protože regulační smyčka obsahuje pouze jeden čistý integrátor, je schopna sledovat konstantní hodnotu a odregulovat změnu parametrů s nulovou ustálenou regulační odchylkou. Pro dosažení nulové odchylky v průběhu změn parametrů by bylo nezbytné přidat do regulační smyčky druhý integrátor.

V posledním testu byla regulační smyčka otestována na skokové změny parametrů  $k_d$  a  $b_d$ . Velikost skokových změn byla zvolena tak, aby pokrývala celý interval neurčitosti. Výsledky jsou zobrazeny na obr. 4.19a. Je zřejmé, že při skokových změnách parametrů dochází k větší chybě regulace, která v nejhorším případě odpovídá 80% referenční hodnoty. Této chyby si lze všimnout na grafu na obr. 4.19a v čase  $0,8\text{ s}$ <sup>1</sup>. Chyba je během  $10\text{ ms}$  odregulována, což je zobrazeno na grafu na obr. 4.19b.

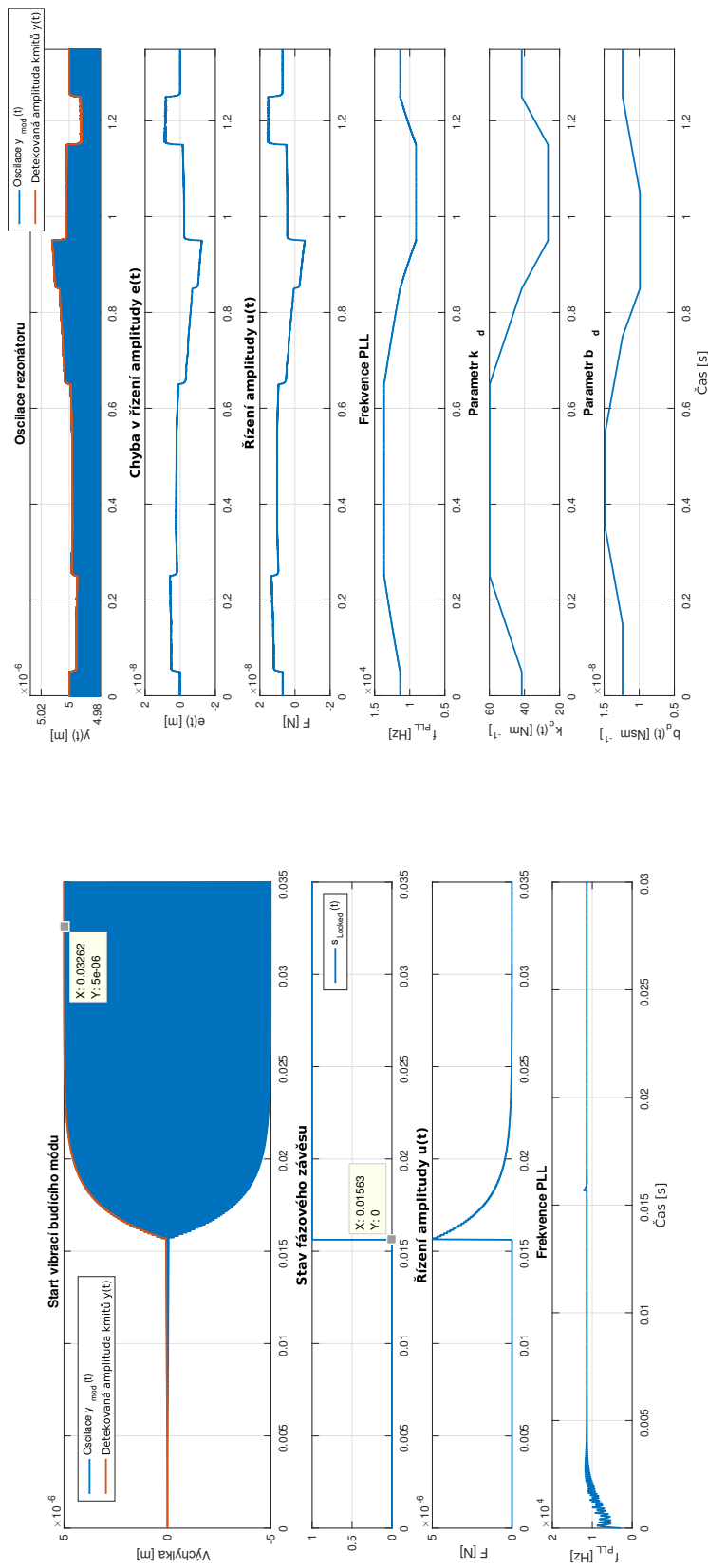
Dosažené výsledky potvrzují splnění návrhových požadavků na robustnost vůči změnám parametrů rezonátoru. Navržený regulátor stabilizuje perturbované systémy a zajišťuje nulovou regulační odchylku v ustáleném stavu.

## 4.6 Shrnutí

Při řízení oscilací budicího rezonátoru MEMS gyroskopu je nutné regulovat dvě veličiny. První z nich je frekvence a fáze a druhou je amplituda kmitů. Za účelem této regulace byla navržena struktura regulátoru skládající se ze dvou zpětnovazebních smyček. Jedna smyčka řídí frekvenci a fázi, druhá amplitudu kmitů. Pozornost byla věnována popisu fungování a teorii systému PLL pro řízení frekvence s fází. V rámci diplomové práce byl systém PLL navržen a vymodelován dle dostupné literatury [17]. Detailní popis návrhu je však nad rámec této práce, a proto byla sekce 4.2 věnována jen obecné teorii. Pro řízení amplitudy kmitů byl navržen robustní regulátor, jehož postup návrhu je detailně zdokumentován v sekci 4.3. Regulátor splňuje kritérium robustní kvality řízení pro množinu systémů  $\mathcal{G}_d^A(s)$ , jež byla specifikována za účelem pokrytí 20%-ní neurčitosti nominálních parametrů  $\omega_{d,0}$ ,  $m_{d,0}$  a  $b_{d,0}$ . V závěru kapitoly byl celý systém simulačně otestován a výsledky porovnány s teoretickými předpoklady odvozenými při návrhu. Simulace potvrdily funkčnost navrženého řízení budicího rezonátoru a jeho robustnost vůči změnám parametrů.

---

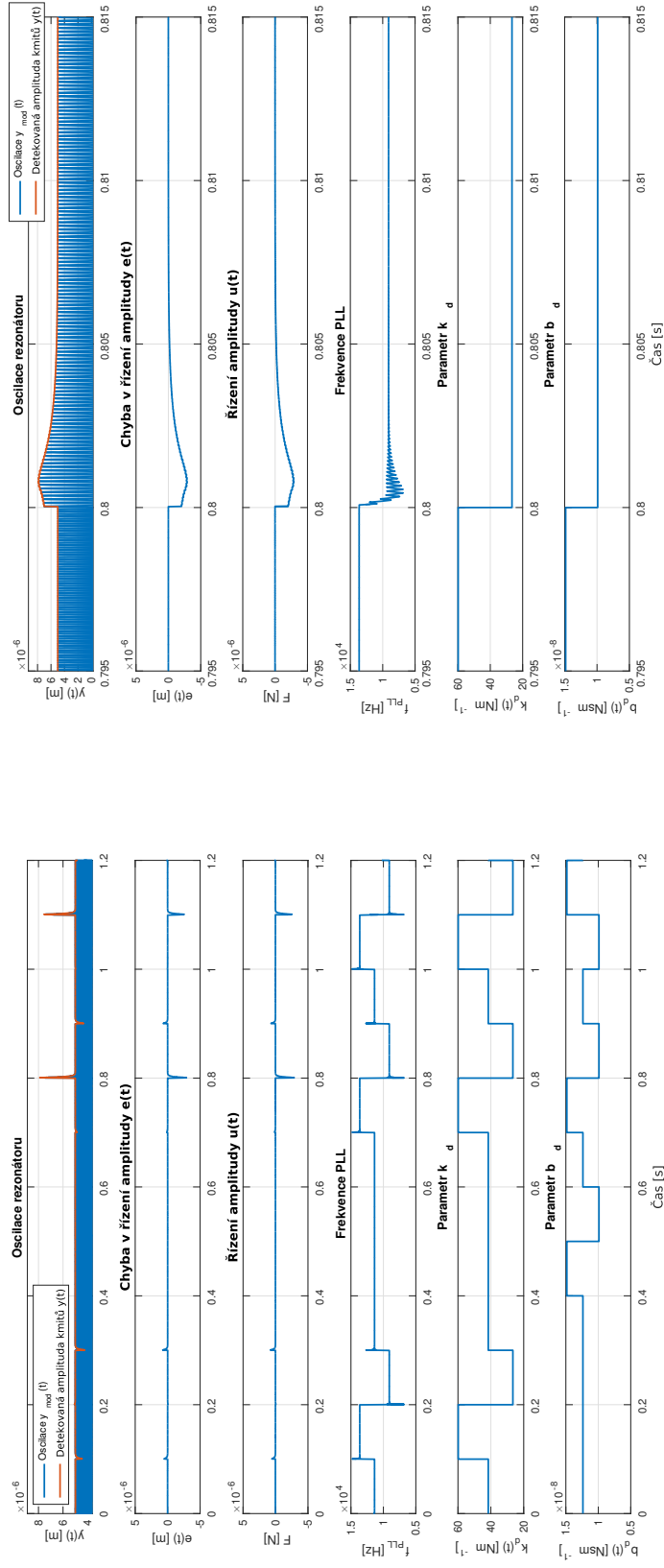
<sup>1</sup>Lze poznamenat, že skokové změny parametrů rezonátoru jsou v průběhu používání MEMS gyroskopu nepravděpodobné. Poslední test byl proveden za účelem otestování robustnosti v mezní, teoretické situaci. Ani 80%-ní chyba regulace není v této situaci v rozporu s návrhovým požadavkem na maximální zesílení harmonických poruch, které je 10%. Protože se jedná o skokovou změnu parametrů, jsou v ní obsaženy složky na všech frekvencích, které přispívají k celkové regulační chybě. Velikost odchylky byla navíc umocněna systémem PLL, který se po skokové změně musel adaptovat na novou rezonanční frekvenci.



(a) Odezva rezonátoru po zapnutí systému.

(b) Test systému na lineární změny parametrů.

Obrázek 4.18: **Test odezvy systému a jeho reakce na lineární změny parametrů.** Lze poznamenat, že simulované změny parametrů jsou rychlejší než změny očekávané při reálném provozu gyroskopu. Rychlé změny byly použity pro otestování robustnosti a limitů regulátoru.



(a) Skokové změny.

(b) Odregulování skokové změny parametrů.

Obrázek 4.19: Test systému na skokové změny parametrů.

# Kapitola 5

## Návrh řízení sensorického módu

Senzorický oscilátor MEMS gyroskopu slouží k převedení Coriolisovy síly vzniklé rotací senzoru na oscilace s odpovídající velikostí amplitudy. Existují dva základní způsoby fungování sensorického módu MEMS gyroskopu. Prvním z nich je jeho provozování v otevřené smyčce. V tomto případě není sensorický rezonátor nijak řízen a využity jsou jen metody zpracování signálu. Je to jednoduchý způsob, jehož nevýhodou je malá citlivost a šířka pásma a tedy i horší kvalita výsledného měření. Druhou variantou je řízení v uzavřené smyčce, které vede ke zlepšení vlastností senzoru. V této kapitole jsou popsány oba způsoby operace a navrženo robustní zpětnovazební řízení pro druhý z nich.

### 5.1 Teorie a možnosti provozování MEMS gyroskopu

Na obrázku 5.1 je zobrazena amplitudová charakteristika pro dva kmitavé členy 2. řádu s různou hodnotou parametru  $Q$ . Je zde vidět, že k největšímu zesílení kmitů dochází na rezonanční frekvenci. Mohlo by se zdát, že nejvhodnějším řešením je návrh sensorického rezonátoru se stejnou rezonanční frekvencí jako má budicí mód. To však není možné při výrobě zaručit a nutností pro tento způsob provozování gyroskopu je naladění rezonanční frekvence sensorického módu pomocí zpětnovazebního řízení. Provozování MEMS gyroskopu se shodnými rezonančními frekvencemi obou módu je označováno jako *Mode-Match*. Ačkoliv se tento způsob provozování gyra jeví jako atraktivní, jsou s ním spojeny nevýhody, jako je větší citlivost na šum a neurčitosti nominálních parametrů. Nevýhody provozování MEMS gyroskopů v *Mode-Match* režimu jsou natolik závažné, že je většina MEMS gyroskopů založena na principu operace s oddělenými rezonančními frekvencemi, který se označuje jako *Mode-Split* [1], [5], [9].

Obrázek 5.1a zobrazuje amplitudovou charakteristiku rezonátoru s  $Q$  faktorem 1000 a na obr. 5.1b je charakteristika rezonátoru s  $Q = 10000$ . Kromě většího zesílení signálů na rezonanční frekvenci se amplitudové charakteristiky systémů liší také šířkou rezonančního vrcholu. Rezonátor s větším  $Q$  faktorem má tento vrchol užší a strmější. Úzká šířka rezonančního vrcholu je nevýhodou při snímání amplitudy kmitů. Při malých odchylkách od nominální rezonanční frekvence dochází k velkým rozdílům v zesílení amplitudy, což může vést k nepřesnému vyhodnocení měření rotační rychlosti při provozování MEMS

gyroskopu v otevřené smyčce.

Další nevýhodou provozování gyroskopu v módu se shodnými rezonančními frekvencemi je citlivost na změny parametru tlumení sensorického rezonátoru  $b_s$ . Amplitudové charakteristiky tří systémů se stejnými rezonančními frekvencemi, ale jinými koeficienty tlumení  $b$  jsou zobrazeny na obr. 5.2. V okolí rezonanční frekvence dochází k velkým rozdílům v amplitudovém zesílení při změnách tlumení  $b$ . Naopak na frekvencích dále od rezonanční již změna tlumení nezpůsobuje velkou změnu zesílení. Kromě výhody provozování gyroskopu v režimu *Mode-Split* ilustruje tento příklad důvod, proč je vhodné zvolit nižší hodnotu parametru  $Q_s$ . Nižší činitel kvality rezonátoru vede k menším změnám v zesílení amplitudy v okolí rezonanční frekvence při odchylce tlumení  $b_s$  od nominální hodnoty.

Zmíněné příklady ukazují, proč je mód oddělených rezonančních frekvencí používán ve většině návrhů. Parametry sensorického rezonátoru  $\omega_s$  a  $Q_s$  jsou vybrány na základě jiných kritérií, než tomu bylo u budicího módu. Jsou voleny jako kompromis mezi citlivostí a šířkou pásma senzoru v otevřené smyčce a jeho robustností vůči odchylce skutečných parametrů od nominálních. U gyroskopů, jejichž sensorický mód operuje v otevřené smyčce se používá oddělení rezonančních frekvencí o velikosti stovek  $Hz$ , aby bylo zajištěno, že frekvence budících kmitů (tedy i rezonanční frekvence budicího rezonátoru) bude ležet v ploché části amplitudové charakteristiky sensorického módu [1]. Nevýhodou velkého oddělení je však snížená citlivost i na užitečný signál. Při využití zpětnovazebního řízení sensorického módu je možné velikost oddělení rezonančních frekvencí snížit. Stále je ale vhodné upřednostnit režim *Mode-Split* před *Mode-Match* proto, aby frekvence kmitů ležela v lineární části amplitudové charakteristiky sensorického rezonátoru. Na obr. 5.3 jsou vykresleny frekvenční charakteristiky budicího a sensorického rezonátoru, které byly použity v této práci. Referenční hodnota pro rezonanční frekvenci sensorického módu byla zvolena jako  $\omega_{s,0} = \omega_{d,0} + 8,3 Hz$ .

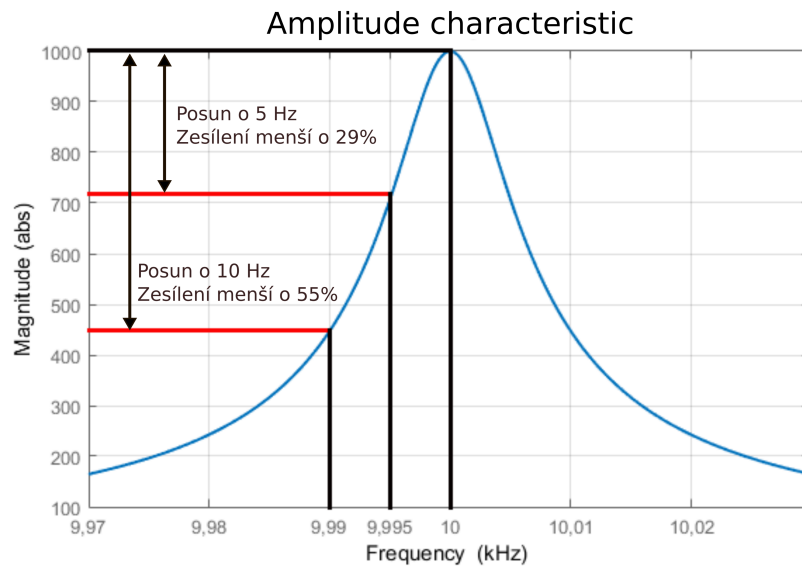
Další motivací pro návrh zpětnovazebního řízení sensorického rezonátoru je poměr velikosti užitečné složky kmitů vzhledem k parazitní. Užitečná část signálu bývá řádově menší než parazitní, vznikající v důsledku kvadratické křížové vazby  $k_{sd}$  z kmitů budicího módu. Velikost amplitudy Coriolisovy síly při rychlosti otáčení  $\Omega_R = 100 rad/s$ , amplitudě kmitů budicího módu  $A_p = 5 \cdot 10^{-6} m$  a frekvenci kmitání  $\omega_{d,0}$  je

$$|F_C| = 2m_C \Omega_R A_p \omega_{d,0} = 5,34 \cdot 10^{-9} [N]. \quad (5.1)$$

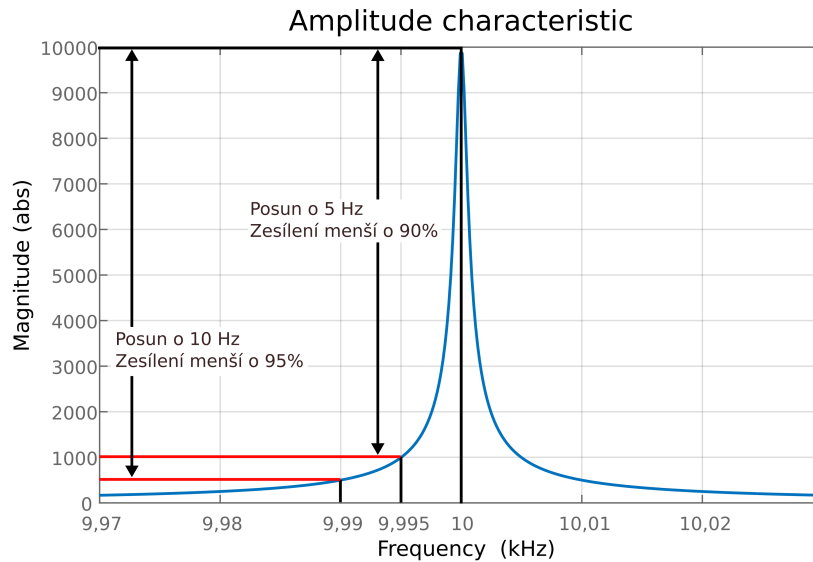
Amplituda působící kvadratické síly je dána vztahem

$$|F_Q| = k_{sd} A_p, \quad (5.2)$$

kde  $k_{sd}$  je koeficient pružinové kvadratické křížové vazby zavedený v rovnici (3.15). Maximální očekávaná hodnota tohoto parametru je  $k_{sd}^{max} = 0,1 k_{d,0}$  a běžně je při návrhu užíváno hodnoty  $k_{sd} = m_{s,0} \cdot (0,1 \omega_{s,0})^2$  [15]. Vyčíslením vztahu 5.2 byly získány hodnoty  $|F_Q| = 2,08 \cdot 10^{-5} [N]$  resp.  $1,91 \cdot 10^{-6} [N]$ . Po porovnání s amplitudou Coriolisovy síly  $|F_C| = 5,34 \cdot 10^{-9} [N]$  je zřejmé, že parazitní složka kmitů je řádově větší než užitečná část. Proto je nezbytné využít demodulačních technik pro oddělení těchto komponent a dalším vylepšením může být potlačení kmitů sensorického módu pomocí zpětnovazebního řízení.

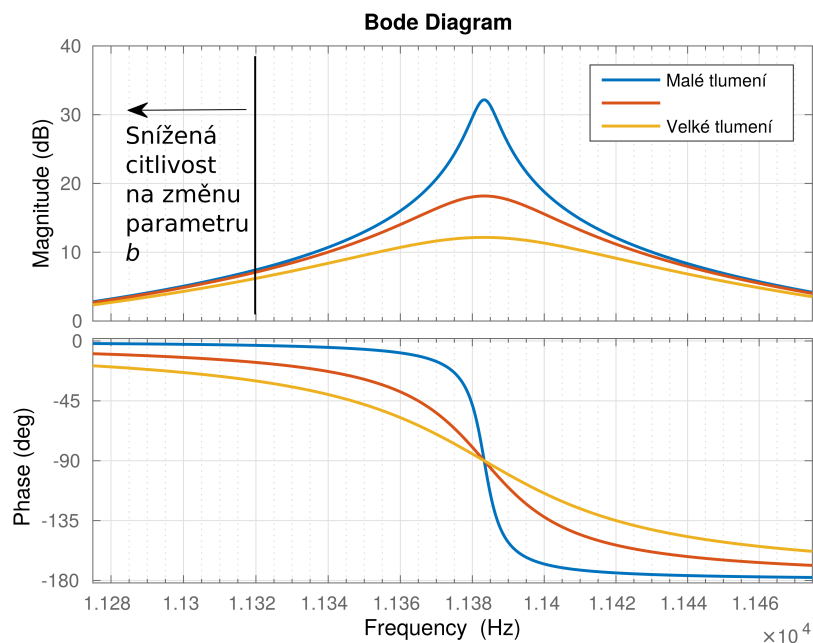


(a) **Rezonátor s  $Q = 1000$** . Signály na frekvenci  $\omega_s$  jsou zesilovány 1000-krát. V situaci, kdy by došlo k posunu frekvence kmitů o  $5\text{ Hz}$ , tak jejich zesílení bude 707, což je pokles o 29,3%. Při posunu o  $10\text{ Hz}$  budou kmitů menší o 55%. Podle vztahu (3.8) je šířka pásma tohoto rezonátoru  $BW = 10\text{ Hz}$ .

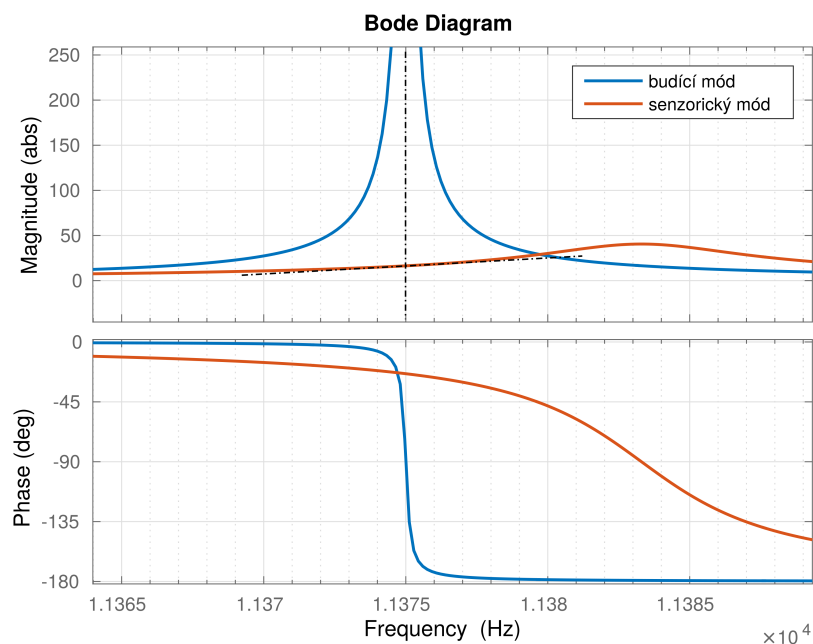


(b) **Rezonátor s  $Q = 10000$** . Signály na frekvenci  $\omega_s$  jsou zesilovány 10 000-krát. Při posunu frekvence kmitů o  $5\text{ Hz}$  dochází k poklesu amplitudy kmitů o 90% a při posunu o  $10\text{ Hz}$  dokonce o 95%. Šířka pásma je v tomto případě pouze  $BW = 1\text{ Hz}$ .

Obrázek 5.1: Porovnání amplitudových charakteristik přenosů s různými  $Q$ -faktory.



Obrázek 5.2: Změna tlumení  $b$ .



Obrázek 5.3: **Umístění rezonanční frekvence senzorického módu.** Frekvence  $\omega_{s,0}$  byla zvolena tak, aby byla co nejbližší  $\omega_{d,0}$  pro maximalizování zesílení kmitů senzorického módu a zároveň aby amplitudová charakteristika senzorického módu měla v okolí  $\omega_{d,0}$  lineární charakter.



## 5.2 Specifikace úloh řízení

Na základě předchozích úvah byly identifikovány následující úlohy spojené s řízením sensorického módu gyroskopu:

1. **Oddělení užitečné a parazitní složky kmitů:**

Základní úlohou při zpracování kmitů sensorického rezonátoru je oddělení užitečné složky, nazývané jako IN-phase komponenta, od parazitní, které se říká kvadrurní (Q) složka. Obě složky jsou navíc modulované na frekvenci kmitání budicího rezonátoru a pro extrakci informace o silách působících na rezonátor je potřeba oddělit pomalou část (obálku signálu) od nosných kmitů. Za tímto účelem se používá technika pro zpracování signálů zvaná demodulace.

2. **Potlačení chyb pomocí zpětnovazební regulace:**

Druhým úkolem je potlačení parazitního přenosu kmitů z budicího módu na sensorický. Řízení kvadrurní části kmitů do nuly kompenzuje fyzické nedokonalosti senzoru.

3. **Řízení užitečné části kmitů do nuly:**

Implementací řízení pro potlačení veškerých kmitů sensorického rezonátoru je možné dále vylepšit vlastnosti senzoru mezi něž patří například šířka pásma a linearita.

4. **Řízení rezonanční frekvence sensorického módu:**

Pro zlepšení citlivosti senzoru je vhodné umístit rezonanční frekvence obou módů do vzájemné blízkosti. Kvůli vyšší citlivosti je však nezbytné zajistit, aby se rezonanční frekvence od kalibrace gyroskopu neměnily. Proto je jedním úkolem řízení zafixování rezonanční frekvence oscilátoru. Návrh regulátoru pro splnění tohoto požadavku je však nad rámec této práce, a proto bude splnění tohoto požadavku zavedeno formou předpokladu.

Nominální hodnota rezonanční frekvence sensorického oscilátoru byla zvolena o  $8,3\text{ Hz}$  vyšší než  $\omega_{d,0}$  a to  $\omega_{s,0} = 11383,3\text{ Hz}$  [9]. Ve všech dalších postupech návrhu řízení sensorického módu je předpokládáno, že je  $\omega_{s,0}$  řízeno na tuto požadovanou hodnotu.

Ostatní nominální parametry sensorického rezonátoru jsou uvedeny v tabulce 5.1. Při porovnání parametrů s parametry budicího rezonátoru (tabulka 4.1 z kapitoly 4) je patrné, že největší změna nastává pro činitel kvality rezonátoru  $Q$  a parametr tlumení  $b$ . Parameter  $Q_s$  je volen řádově nižší než  $Q_d$  pro zmenšení citlivosti na změnu tlumení  $b_s$ .

Parametr	Hodnota[Jednotky]
Hmotnost $m_{s,0}$	$7,4732 \cdot 10^{-9} [kg]$
Tuhost pružiny $k_{s,0}$	$38,23 [N \cdot m^{-1}]$
Tlumení $b_{s,0}$	$3,4485 \cdot 10^{-7} [N \cdot s \cdot m^{-1}]$
Vlastní frekvence $\omega_{s,0}$	$11383,3 [Hz]$
$Q_{s,0}$ - faktor	$1550 [-]$

Tabulka 5.1: Nominální parametry sensorického rezonátoru.

### 5.3 Návrh struktury regulátoru

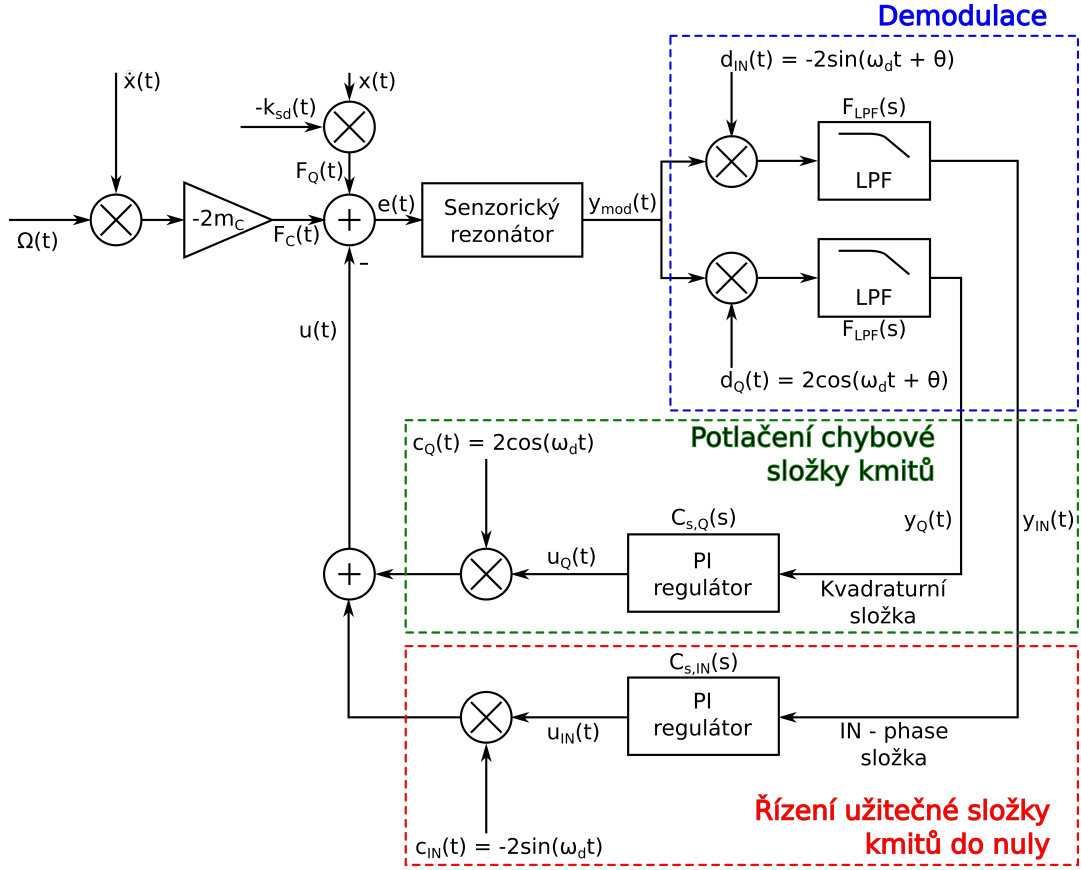
V předchozí sekci 5.2 byly popsány dílčí cíle řízení a zpracování signálu oscilací sensorického módu. Těmto dílčím cílům odpovídá i zvolená struktura regulátoru, jejíž schéma je zobrazeno na obr. 5.4. Ve schématu jsou vidět tři ohraničené funkční bloky korespondující s úlohami řízení a zpracování signálu 1) - 3) z předešlé sekce 5.2.

Modrý rámeček ohraničuje systém pro demodulaci užitečné a parazitní složky kmitů. Pro oddělení složek kmitů se využívá předem známého fázového posunu těchto složek. Parazitní působící síla  $F_Q(t)$ , jejímž nosným signálem je poloha budicího rezonátoru  $x$ , je fázově zpožděna o  $90^\circ$  vzhledem k užitečné síle  $F_C(t)$ , jejímž nosným signálem je rychlost kmitů budicího rezonátoru  $\dot{x}$ . Signály polohy a rychlosti budicího rezonátoru, a tedy i síly  $F_Q(t)$  a  $F_C(t)$ , jsou navzájem ortogonální. Kvůli této vlastnosti se parazitní složce říká také kvadrurní. Demodulační blok je v systému vždy přítomen, i když je MEMS gyroskop provozován v tzv. otevřené smyčce. V otevřené smyčce je možné rychlost rotace určovat ze signálu  $y_{IN}(t)$ .

Při využití zpětnovazebního řízení sensorického módu MEMS gyroskopu se uplatní regulační smyčky ohraničené v zeleném a červeném rámečku. Zpětná vazba ohraničená zeleně byla navržena za účelem potlačení parazitní složky kmitů. V červeném rámečku je poté zobrazena zpětná vazba pro řízení užitečné složky kmitů do nuly. Pokud jsou v MEMS gyroskopu využívány obě zpětnovazební smyčky je rychlost rotace určována z řídicího signálu  $u_{IN}(t)$ . Celkový řídicí signál  $u(t)$  působící proti Coriolisově a kvadrurní síle je součtem modulovaného řízení amplitudy užitečné a parazitní části kmitů

$$u(t) = -2u_{IN}(t)\sin(\omega_d t) - 2u_Q(t)\cos(\omega_d t). \quad (5.3)$$

Demodulace kmitů však není dokonalá a složky spolu s jejich řízením se navzájem ovlivňují. Exaktní modelování by vedlo na MIMO systém a nutnost odhadování křížových vazeb mezi složkami při odchylkách parametrů gyroskopu od jejich nominálních hodnot. Řízením obou složek kmitů do nuly jsou však vzájemné interakce potlačeny, a proto je možné přejít k jednoduššímu modelu systému. Komplexní MIMO systém byl rozložen na dvě paralelní SISO složky a jejich vzájemné interakce byly zanedbány.



Obrázek 5.4: Schéma řídicích smyček senzorického módu.

## 5.4 Odvození vstupně výstupního modelu senzorického módu

Pro další postup je vhodné nejdříve odvodit model pro analýzu a syntézu řízení. Takovým modelem je přenos z rychlosti rotace  $\Omega(t)$  na amplitudovou obálku užitečné složky kmitů  $y_{IN}(t)$  a přenos ze síly kvadraturní křížové vazby  $k_{sd}(t)$  na amplitudovou obálku parazitní části kmitů  $y_Q(t)$ .

K odvození hledaných přenosových funkcí bylo vycházeno z neideálního modelu gyroskopu (3.17), ze kterého je možné extrahovat část týkající se pouze senzorického rezonátoru

$$m_s \ddot{y} + b_s \dot{y} + k_s y = F_s - 2m_C \Omega_z \dot{x} - k_{sd} x \quad (5.4)$$

a byl využit postup navržený v [9]. Síla působící na senzorický rezonátor  $F_s$  má v této části roli řídicího signálu, proto je ve schématu 5.4 a dále v této kapitole přeznačena na  $-u(t)$ . Člen  $-2m_C \Omega_z \dot{x}$  odpovídá Coriolisově síle  $F_C(t)$  a  $F_Q(t) = -k_{sd} x$ .

### 5.4.1 Odvození modelu užitečné složky signálu v analytickém tvaru

V této části je odvozen model užitečné složky kmitů. Model odpovídá přenosu ze signálu rotační rychlosti  $\Omega(t)$  na amplitudovou obálku užitečné části kmitů  $y_{IN}(t)$ . Pro odvození tohoto modelu vyjdeme z rovnice (5.4), v níž položíme  $k_{sd} = 0$  a zavedeme následující předpoklady

- rychlost kmitů budicího rezonátoru

$$v_d(t) = \dot{x}(t) = A_v \sin(\omega_d t), \quad (5.5)$$

- harmonický průběh rotační rychlosti

$$\Omega(t) = \Omega_R \cos(\omega_R t), \quad (5.6)$$

- senzorický rezonátor není nijak řízen

$$F_s(t) = -u(t) = 0. \quad (5.7)$$

Dosazením rychlosti kmitů (5.5) a rotační rychlosti (5.6) do rovnice (2.1) získáme vyjádření Coriolisovy síly

$$F_C = -2m_C \Omega(t) \dot{x}(t) = -2m_C \Omega_R A_v \cos(\omega_R t) \sin(\omega_d t) \quad (5.8)$$

$$= -2m_C \Omega_R A_v \frac{1}{2} [\sin((\omega_d + \omega_R)t) + \sin((\omega_d - \omega_R)t)] \quad (5.9)$$

$$= -m_C \Omega_R A_v [\sin((\omega_d + \omega_R)t) + \sin((\omega_d - \omega_R)t)]. \quad (5.10)$$

V dalším odvození je využito znalosti o tom, že pro odezvu systému 2. řádu na harmonický vstupní signál ve tvaru  $\sin((\omega_d + \omega_R)t)$  platí

$$y(t) = \operatorname{Re}\{H(j(\omega_d + \omega_R))\} \sin((\omega_d + \omega_R)t) - \operatorname{Im}\{H(j(\omega_d + \omega_R))\} \cos((\omega_d + \omega_R)t), \quad (5.11)$$

kde  $H(j\omega)$  je frekvenční přenos kmitavého systému 2. řádu

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{m_s}}{(j\omega)^2 + \left(\frac{\omega_s}{Q_s}\right)j\omega + \omega_s^2}. \quad (5.12)$$

Reálná resp. imaginární část přenosu  $H(j(\omega_d + \omega_R))$  z (5.11) je

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{H(j(\omega_d + \omega_R))\} &= \frac{\omega_s^2 - (\omega_d + \omega_R)^2}{[\omega_s^2 - (\omega_d + \omega_R)^2]^2 + \left[\frac{1}{Q_s} \omega_s (\omega_d + \omega_R)\right]^2} \\ \operatorname{Im}\{H(j(\omega_d + \omega_R))\} &= \frac{-\frac{1}{Q_s} \omega_s (\omega_d + \omega_R)}{[\omega_s^2 - (\omega_d + \omega_R)^2]^2 + \left[\frac{1}{Q_s} \omega_s (\omega_d + \omega_R)\right]^2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Analogickým způsobem lze získat reálnou a imaginární složku přenosu  $H(j(\omega_d - \omega_R))$ . Pro další odvozování lze zavést následující substituce reálných a imaginárních složek

$$A_1(\omega_R) = \frac{\omega_s^2 - (\omega_d + \omega_R)^2}{[\omega_s^2 - (\omega_d + \omega_R)^2]^2 + \omega_s^2(\omega_d + \omega_R)^2/Q_s^2}, \quad (5.14)$$

$$B_1(\omega_R) = \frac{-\omega_s(\omega_d + \omega_R)/Q_s}{[\omega_s^2 - (\omega_d + \omega_R)^2]^2 + \omega_s^2(\omega_d + \omega_R)^2/Q_s^2}, \quad (5.15)$$

$$A_2(\omega_R) = \frac{\omega_s^2 - (\omega_d - \omega_R)^2}{[\omega_s^2 - (\omega_d - \omega_R)^2]^2 + \omega_s^2(\omega_d - \omega_R)^2/Q_s^2}, \quad (5.16)$$

$$B_2(\omega_R) = \frac{-\omega_s(\omega_d - \omega_R)/Q_s}{[\omega_s^2 - (\omega_d - \omega_R)^2]^2 + \omega_s^2(\omega_d - \omega_R)^2/Q_s^2}. \quad (5.17)$$

Odezvu systému (5.12) na vstupní signál (5.10) lze nyní vyjádřit jako

$$y_{out}(t) = \frac{F_{cm}}{2m_s} [A_1 \sin((\omega_d + \omega_R)t) + B_1 \cos((\omega_d + \omega_R)t) + A_2 \sin((\omega_d - \omega_R)t) + B_2 \cos((\omega_d - \omega_R)t)], \quad (5.18)$$

kde  $F_{cm} = -2m_C \Omega_R A_v$ .

Výraz (5.18) obsahuje užitečnou komponentu modulovanou na kmitech rezonátoru. Pro návrh řízení nebo zjištění rychlosti rotace je nezbytné tuto odezvu nejdříve demodulovat. To je provedeno vynásobením výstupního signálu  $y_{out}(t)$  demodulačním signálem  $d_{IN}(t) = -2\sin(\omega_d t + \theta)$ , kde  $\theta$  je fázové zpoždění sensorického rezonátoru na frekvenci buzení  $\omega_d$ , a následným průchodem součinu signálů přes filtr typu dolní propust

$$F_{LPF}(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_c s + \omega_c^2}, \quad (5.19)$$

kde  $\omega_c = 2\pi \cdot 250 \text{ rad/s}$  je zlomová frekvence filtru a  $\xi_0 = 0,7$  je jeho relativní tlumení. Parametry byly zvoleny stejně jako v [9] vzhledem k tomu, že cílem návrhu zpětnovazebního řízení je rozšíření šířky pásma senzoru na  $100 \text{ Hz}$ <sup>1</sup>.

Vynásobením odezvy systému (5.18) s demodulačním signálem  $d_{IN}(t)$  a následným průchodem vzniklého signálu LPF filtrem byla získána amplitudová obálka užitečné části

<sup>1</sup>Význam a vliv volby návrhových parametrů na kvalitu řízení bude podrobněji diskutován v sekci 5.6.4.

kmitů

$$\begin{aligned}
y_{IN}(t) &= y_{out}(t) \cdot (-2)\sin(\omega_d t + \theta) = -\frac{F_{cm}}{2m_s} \cdot \left\{ \right. \\
&\quad A_1 \left[ \cos((\omega_R)t - \theta) - \cancel{\cos((2\omega_d + \omega_R)t + \theta)} \right] \\
&\quad + B_1 \left[ \cancel{\sin((2\omega_d + \omega_R)t + \theta)} - \sin((\omega_R)t - \theta) \right] \\
&\quad + A_2 \left[ \cos((-\omega_R)t - \theta) - \cancel{\cos((2\omega_d - \omega_R)t + \theta)} \right] \\
&\quad \left. + B_2 \left[ \cancel{\sin((2\omega_d - \omega_R)t + \theta)} - \sin((-\omega_R)t - \theta) \right] \right\} \\
&= -\frac{F_{cm}}{2m_s} \left\{ A_1 \cos(\omega_R t - \theta) - B_1 \sin(\omega_R t - \theta) + \right. \\
&\quad \left. A_2 \cos(\omega_R t + \theta) + B_2 \sin(\omega_R t + \theta) \right\}, \tag{5.20}
\end{aligned}$$

kde přeškrtnuté členy obsahující vysoké frekvence  $2\omega_d$  byly potlačeny pomocí filtru  $F_{LPF}$ . Poslední výraz z (5.20) je možné upravit pomocí goniometrických vzorců na

$$\begin{aligned}
y_{IN}(t) &= -\frac{F_{cm}}{2m_s} \left\{ A_1 [\sin(\omega_R t) \sin \theta + \cos(\omega_R t) \cos \theta] \right. \\
&\quad - B_1 [\sin(\omega_R t) \cos \theta - \cos(\omega_R t) \sin \theta] \\
&\quad + A_2 [-\sin(\omega_R t) \sin \theta + \cos(\omega_R t) \cos \theta] \\
&\quad \left. + B_2 [\sin(\omega_R t) \cos \theta + \cos(\omega_R t) \sin \theta] \right\}. \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Dále lze členy v (5.21) rozdělit podle toho, zda obsahují  $\sin(\omega_R t)$ , nebo  $\cos(\omega_R t)$

$$\begin{aligned}
y_{IN}(t) &= -\frac{F_{cm}}{2m_s} \left( [A_1 \sin \theta - B_1 \cos \theta - A_2 \sin \theta + B_2 \cos \theta] \sin(\omega_R t) \right. \\
&\quad \left. + [A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta + B_2 \sin \theta] \cos(\omega_R t) \right). \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Pro další odvození je vhodné zavedení substitucí

$$A(\omega_R) = \frac{m_C A_v}{m_s} (A_1 \sin \theta - B_1 \cos \theta - A_2 \sin \theta + B_2 \cos \theta), \tag{5.23}$$

$$B(\omega_R) = \frac{m_C A_v}{m_s} (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta + B_2 \sin \theta). \tag{5.24}$$

Dosazením vztahů (5.23) a (5.24) do (5.22) lze získat vztah pro odezvu obálky užitečné složky kmitů senzorického rezonátoru na vstupní signál rotační rychlosti  $\Omega(t) = \Omega_R \cos(\omega_R t)$  ve tvaru

$$y_{IN}^F(t) = \Omega_R \cdot (A \sin(\omega_R t) + B \cos(\omega_R t)). \tag{5.25}$$

Vyjádřením  $\Omega_R = \Omega(t) \cdot \frac{1}{\cos(\omega_R t)}$  a následnou Fourierovou transformací rovnice (5.25) byl získán následující přenos

$$G^{num}(j\omega_R) = \frac{Y_{IN}(j\omega_R)}{\Omega(j\omega_R)} = A(\omega_R) \frac{\omega_R}{j\omega_R} + B(\omega_R) = -A(\omega_R)j + B(\omega_R). \quad (5.26)$$

V kroku (5.20) byly vykráceny vysokofrekvenční složky za předpokladu využití  $F_{LPPF}(s)$ . Tento filtr však ještě není zahrnut v (5.26). Proto je nyní nutné přidat  $F_{LPPF}(s)$  do přenosu (5.26) pro získání přenosu popisujícího přenos signálu rychlosti rotace  $\Omega(t)$  na obálku užitečné složky kmitů  $y_{IN}(t)$

$$G_{IN}^{num}(j\omega_R) = \frac{Y_{IN}(j\omega_R)}{\Omega(j\omega_R)} \cdot F_{LPPF}(j\omega_R) = \left( -A(\omega_R)j + B(\omega_R) \right) \cdot F_{LPPF}(j\omega_R). \quad (5.27)$$

Přenosová funkce ve formě (5.27) není užitečná pro návrh řízení, jelikož koeficienty A a B jsou nelineární funkcí parametru  $\omega_R$ , který se vyskytuje ve vztazích (5.14)-(5.17) a (5.23)-(5.24). Nicméně vztah (5.26) lze využít ke konstrukci frekvenční charakteristiky a na základě její aproximace základními přenosovými členy získat vhodný model pro návrh řízení. Na obr. 5.5a je zobrazena frekvenční charakteristika přenosu  $G^{num}(s)$  a  $G_{IN}^{num}(s)$  vzniklá numerickým vyčíslením vztahu (5.26) resp. (5.27).

## 5.4.2 Nalezení aproximativního přenosového modelu

Aproximací základními přenosovými členy byl získán přenos  $G_{IN}^{apr}(s)$ , který je uveden v rovnici (5.29). Pro získání aproximace byl navržen následující postup:

1. Nejdříve byla vykreslena Bodeho frekvenční charakteristika modelu užitečné složky získaná numerickým vyčíslením modelu z rovnice (5.26) pro sadu frekvencí  $\omega_R \in \langle 10^{-1}, 10^3 \rangle$  Hz. Tato charakteristika je zobrazena na obr. 5.5a.
2. Pro aproximaci tohoto přenosu byla zvolena struktura modelu jako přenos 2. řádu a derivační korekční člunek s neznámým zesílením  $K = K_{f2r} K_{num}$

$$G_{IN}^{apr}(s) = K \cdot \frac{1}{s^2 + 2\omega_{x1}\xi_{x1} + \omega_{x1}^2} \cdot \frac{\frac{1}{2\pi d_{x1}} + 1}{\frac{1}{2\pi d_{x2}} + 1} \cdot F_{LPPF}(s). \quad (5.28)$$

3. Pro nalezení parametrů přenosu byl vytvořen nástroj k jejich ladění a současně vykreslování frekvenční charakteristiky hledaného přenosu zobrazený na obr. 5.6. Nalezením vhodných hodnot parametrů  $\omega_{x1} = 9,09$  [Hz],  $\xi_{x1} = 0,41$ ,  $d_{x1} = 20,93$  [Hz],  $d_{x2} = 4,94 \cdot 10^4$  [Hz] a  $K_{num} = 2,86 \cdot 10^{-4}$  byl získán požadovaný tvar frekvenční charakteristiky aproximace přenosu (5.26) resp. (5.27).
4. Vztah (5.27) popisuje přenos systému z rychlosti rotace  $\Omega(t)$  na amplitudovou obálku užitečné složky kmitů  $y_{IN}(t)$  sensorického rezonátoru. V další části této kapitoly je popsán návrh řízení, jehož cílem je potlačení kmitů sensorického módu.

Protože regulátor nemůže kompenzovat rychlost otáčení senzoru  $\Omega(t)$ , ale kompenzuje působící Coriolisovu sílu  $F_C(t)$ , je pro jeho návrh nezbytné znát přenos z obálky působící Coriolisovy síly na obálku užitečné složky kmitů. Tento model je možné odvodit ze stávajícího modelu s pouhým zohledněním zesílení Coriolisovy síly, které je  $K_{r2f} = \frac{1}{K_{f2r}} = 2m_C A_v = 5.3412 \cdot 10^{-9}$ . Po zohlednění tohoto zesílení ve vztahu (5.27) a jeho aproximaci (5.29) bylo získáno jejich porovnání na obr. 5.5b. Zde je vidět, že navržený model (5.29) aproximuje dostatečně přesně model numerický (5.27) a je zde také patrný posun amplitudové charakteristiky o 165,5 dB oproti grafu na obr. 5.5a, který odpovídá zesílení Coriolisovy síly  $20 \cdot \log_{10}(2m_C A_v) = 20 \cdot \log_{10}(5.3412 \cdot 10^{-9}) = -165,5 \text{ dB}$ .

Výsledná aproximující přenosová funkce z obálky vstupní síly rezonátoru na obálku užitečné složky kmitů byla získána ve tvaru

$$G_{IN}^{apr}(s) = \frac{3,1183 \cdot 10^{14}(s + 131,5)}{(s + 3,104 \cdot 10^5)(s^2 + 46,84s + 3263)(s^2 + 2199s + 2,467 \cdot 10^6)}. \quad (5.29)$$

K ověření správnosti analytického odvození (5.27) a aproximované přenosové funkce (5.29) bylo provedeno srovnání s frekvenční charakteristikou skutečného modelu reprezentovaném modelem v prostředí Matlab/Simulink<sup>2</sup>. Výsledky testu jsou zobrazeny žlutě na obr. 5.5b pro sadu testovaných frekvencí. Z výsledků je zřejmé, že aproximovaná přenosová funkce odpovídá nelineárnímu simulačnímu modelu.

### 5.4.3 Odvození modelu kvadrurní komponenty

Model kvadrurní komponenty popisuje přenos amplitudové obálky působící kvadrurní síly na amplitudovou obálku parazitní části kmitů. Pro odvození jeho přenosové funkce lze využít postupu z 5.4.1. Tentokrát byla rotační rychlost  $\Omega(t)$  položena rovna 0 a člen  $k_{sd}$  byl zvolen v harmonickém tvaru

$$k_{sd}(t) = F_{qm} \cos(\omega_q t). \quad (5.30)$$

Dosazením  $k_{sd}(t)$  a výchylky budícího módu  $x = A_p \cos(\omega_d t)$  do (5.4) byla získána výchozí diferenciální rovnice

$$m_s \ddot{y} + b_s \dot{y} + k_s y = -F_{qm} A_p \cos(\omega_q t) \cos(\omega_d t). \quad (5.31)$$

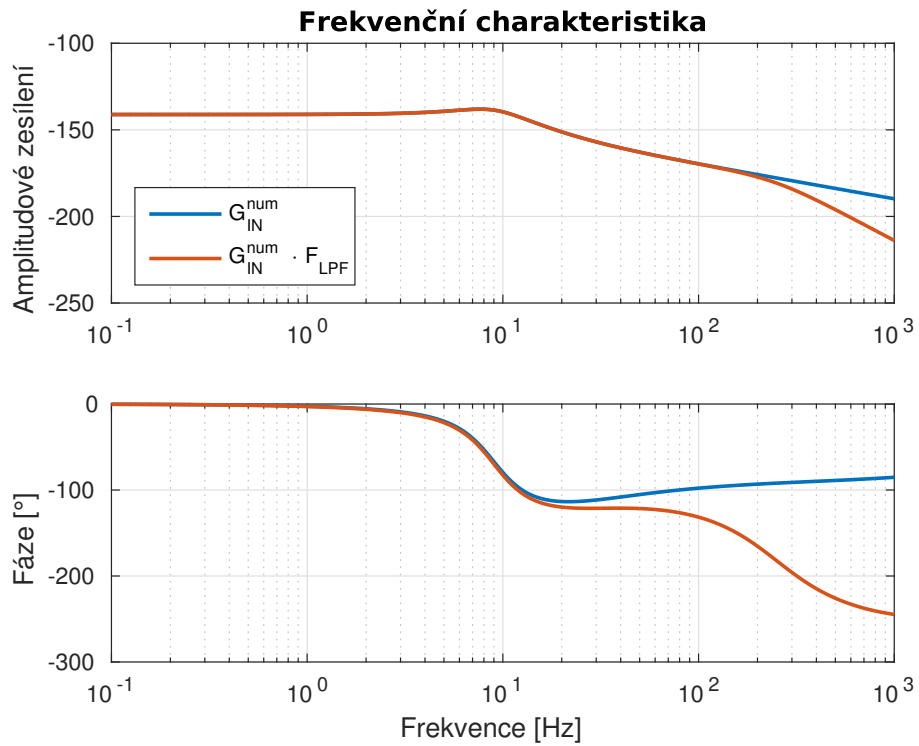
Obdobným postupem jako při odvozování užitečné komponenty, ale s použitím demodulačního signálu ve tvaru  $d_Q(t) = 2\cos(\omega_d t + \theta)$ , byl získán stejný přenos pro kvadrurní složku jako (5.29) a sice

$$G_Q^{apr}(s) = \frac{3,1183 \cdot 10^{14}(s + 131,5)}{(s + 3,104 \cdot 10^5)(s^2 + 46,84s + 3263)(s^2 + 2199s + 2,467 \cdot 10^6)}. \quad (5.32)$$

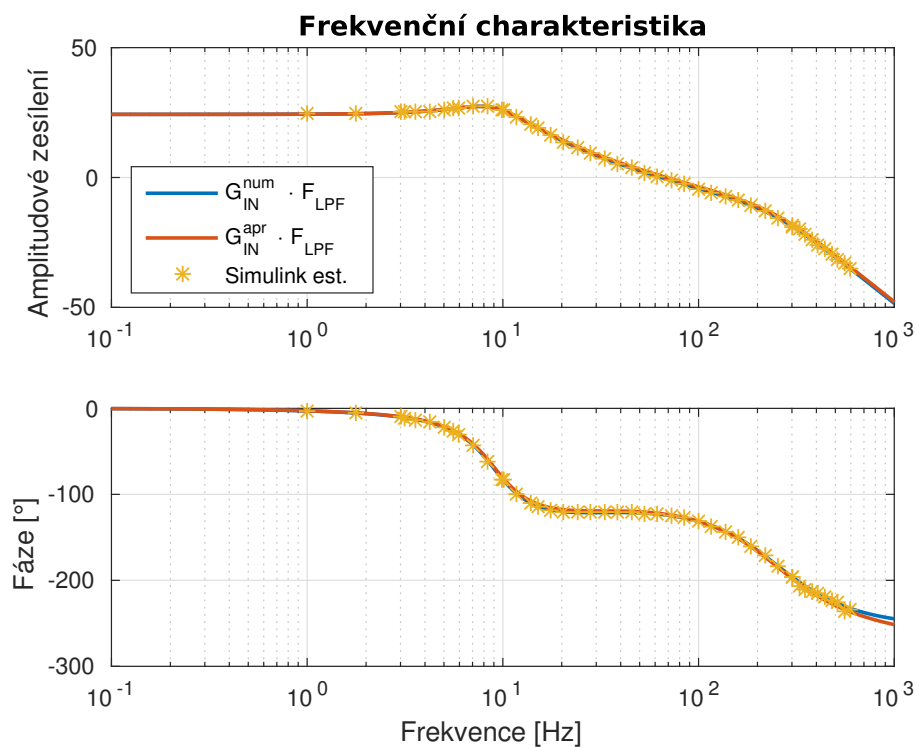
Na obr. 5.7 je opět porovnán model vzniklý aproximací s numericky vyčíslenou frekvenční charakteristikou kvadrurní složky sensorického módu a odhadem frekvenční charakteristiky z programu Simulink. I při této aproximaci bylo zohledněno zesílení působící kvadrurní síly  $20 \cdot \log_{10}(A_p) = 20 \cdot \log_{10}(5 \cdot 10^{-6}) = -106,0 \text{ dB}$ .

<sup>2</sup>bylo využito nástroje Frequency Response Estimation z programového balíčku Control Design



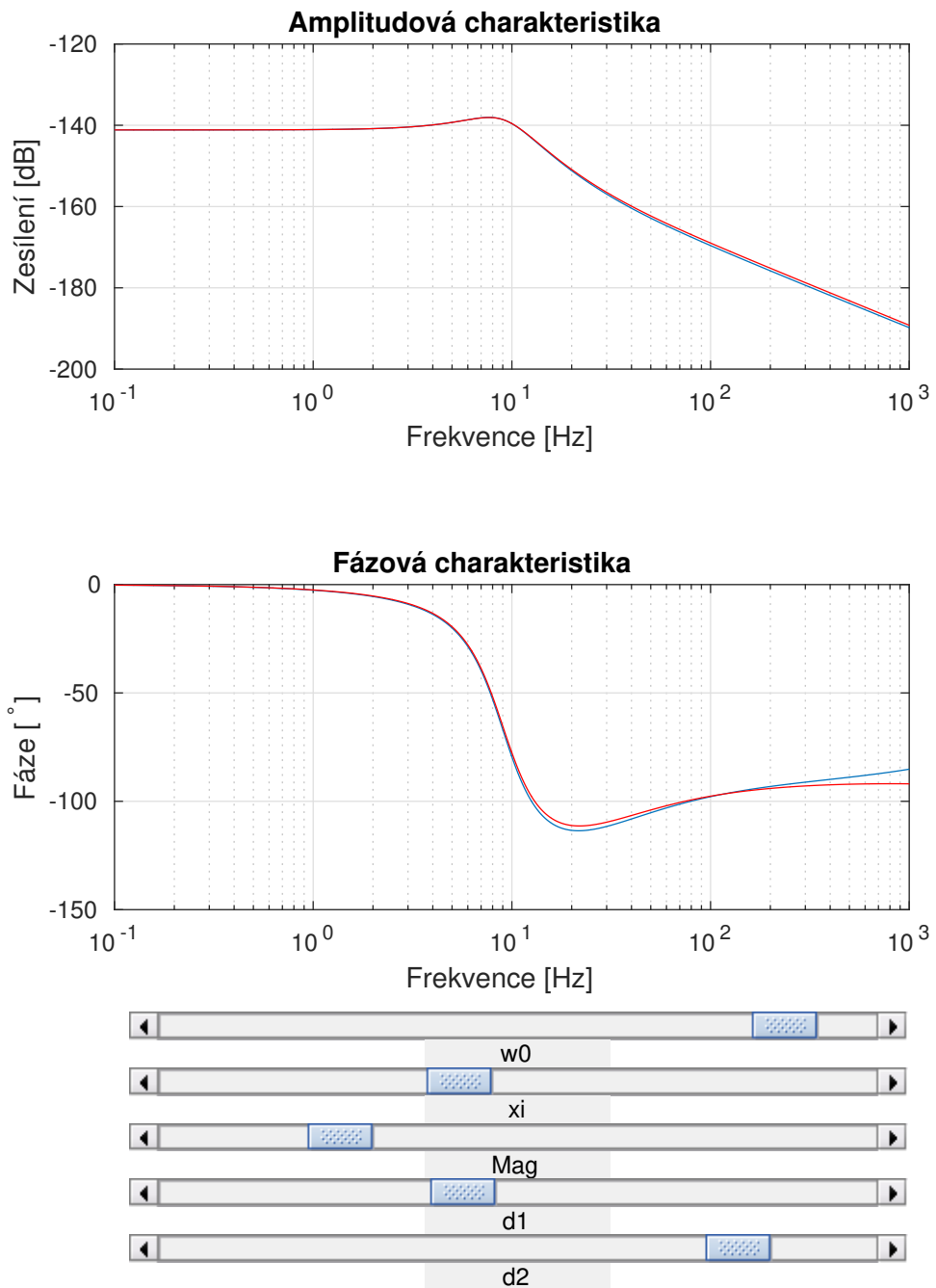


(a) Numericky vyčíslená.

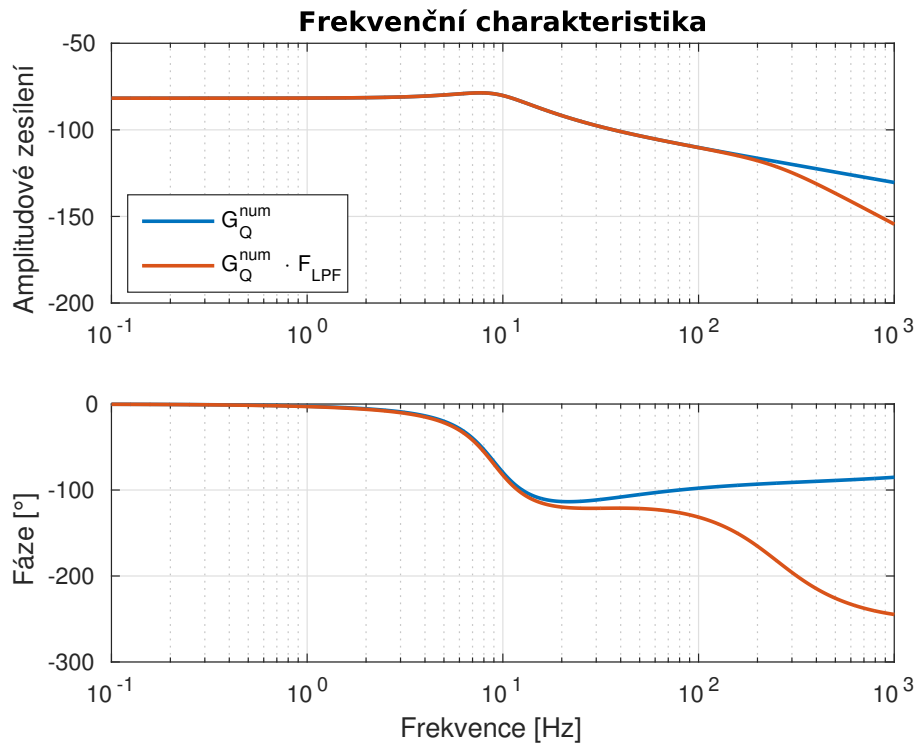


(b) Aproximovaná s LPF.

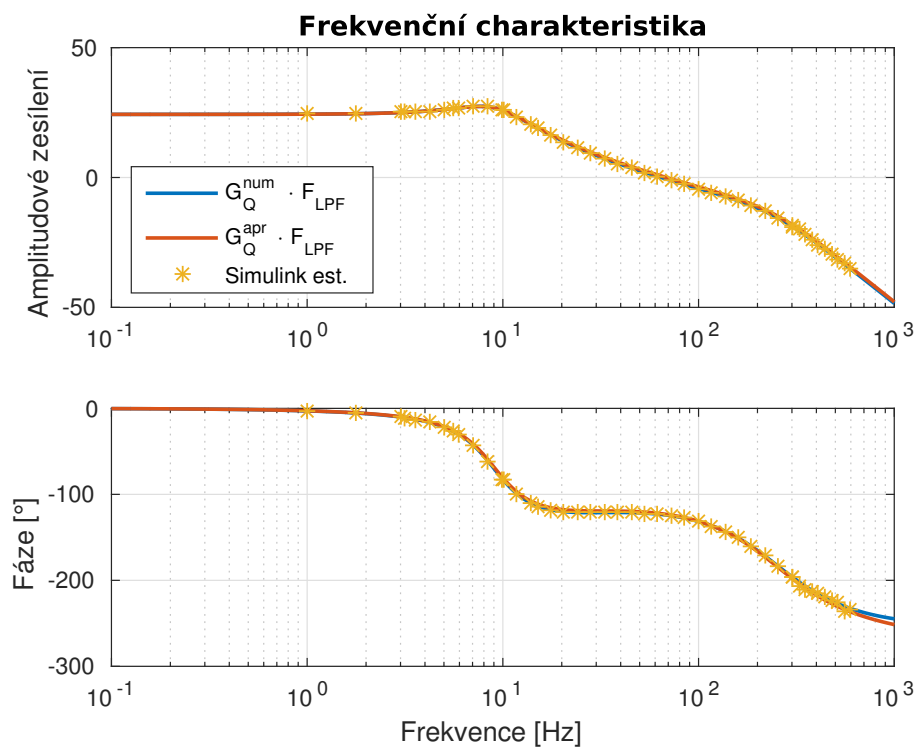
Obrázek 5.5: Frekvenční charakteristika amplitudové obálky užitečné složky.



Obrázek 5.6: Nástroj pro nalezení parametrů přenosu  $G_{IN}^{apr}(s)$ .



(a) Numericky vyčíslená.

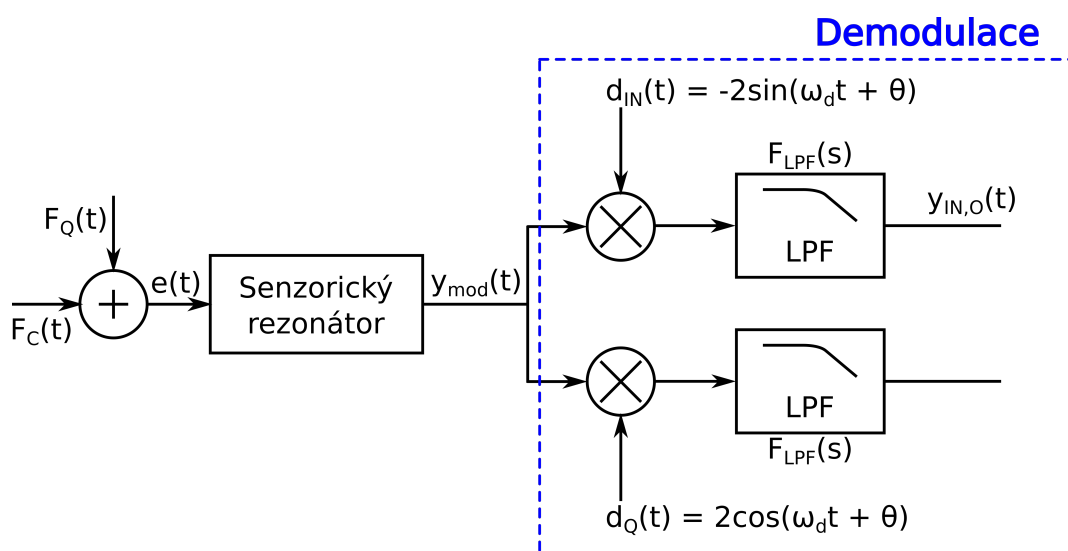


(b) Aproximovaná s LPF.

Obrázek 5.7: Frekvenční charakteristika amplitudové obálky parazitní složky.

## 5.5 Sensorický mód pracující v otevřené smyčce

Nejjednodušší způsob provozování MEMS gyroskopu je v otevřené smyčce. V tomto případě není sensorický rezonátor nijak řízen a využita je jen technika pro demodulaci jeho kmitů. Signál amplitudové modulace je v případě sensorického rezonátoru působící Coriolisova nebo kvadrurní síla a nosné kmity jsou vytvořeny kmitáním budicího rezonátoru. Souvisejícím úkolem je oddělení dvou složek modulovaného signálu. Těmito složkami jsou užitečná a parazitní komponenta. Za účelem demodulace byl navržen blok zobrazený na obr. 5.8. Je složen z násobičky signálů a filtru typu dolní propust. Výběr požadované složky je možné zajistit změnou fáze demodulačního signálu  $d_{IN}(t)$  resp.  $d_Q(t)$ , se kterým je signál kmitů rezonátoru vynásoben. Následným odfiltrováním vyšších frekvenčních složek ze součinu signálů je získána demodulovaná obálka požadované části kmitů. Rychlost otáčení je následně určována přímo ze signálu užitečné složky kmitů  $y_{IN,O}(t)$ .



Obrázek 5.8: Schéma sensorického módu v otevřené smyčce.

Nevýhodami provozování gyroskopu v otevřené smyčce jsou malá šířka pásma (řádově  $10\text{ Hz}$ ), kterou je možné vidět na amplitudové charakteristice na obr. 5.5, a pronikání kvadrurní složky kmitů do užitečného signálu, což je patrné na výsledcích testu na obr. 5.9b v následující sekci 5.5.1.

### 5.5.1 Analýza chování sensorického módu v otevřené smyčce

Navržený demodulační systém byl podroben otestování, při kterém byla ukázána jeho funkčnost a zároveň nedostatky. V průběhu testování demodulace kmitů byl sledován přenos ze signálu rotační rychlosti  $\Omega(t)$  a kvadrurní křížové vazby  $k_{sd}(t)$  na demodulované složky kmitů  $y_{IN}(t)$  resp.  $y_Q(t)$ .

Pro první test byly zvoleny následující signály:

- konstantní úhlová rychlost  $\Omega(t) = 1 \frac{rad}{s}$ .
- konstantní koeficient kvadrurní křížové vazby  $k_{sd}(t) = \frac{1}{2A_p} \cdot 10^{-8} = 10^{-3} \frac{N}{m}$ .

Koeficient  $k_{sd}$  byl nejdříve zvolen tak, aby kvadrurní síla způsobovala řádově stejné vychýlení rezonátoru jako Coriolisova síla.

Výsledek testu je zobrazen na obr. 5.9a. Je zde vidět přechodová charakteristika rezonátoru a demodulačního systému. Určení rychlosti rotace  $\hat{\Omega}(t)$  bylo získáno z užitečné složky  $y_{IN,O}(t)$  jako

$$\hat{\Omega}(t) = \frac{1}{2m_s A_v} \frac{1}{|H_s|} y_{IN}(t) \quad (5.33)$$

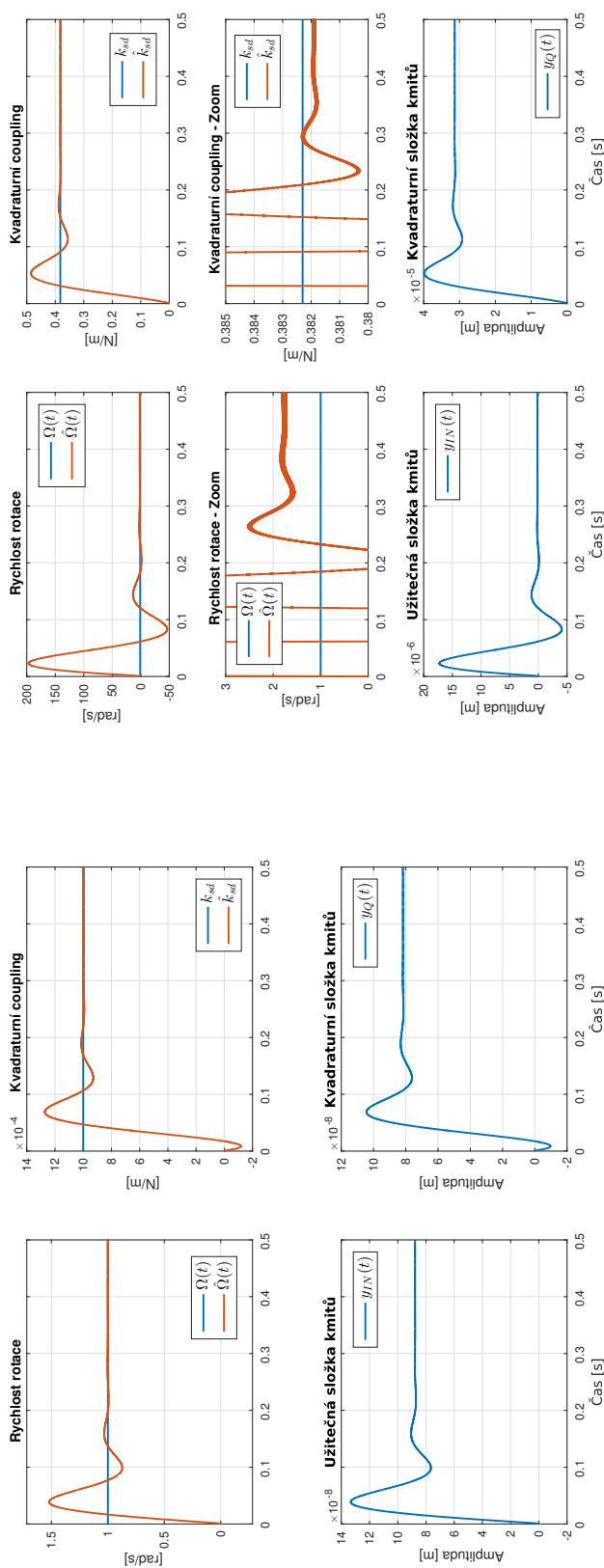
a koeficient kvadrurní křížové vazby  $\hat{k}_{sd}(t)$  určen z parazitní složky  $y_Q(t)$  jako

$$\hat{k}_{sd}(t) = \frac{1}{A_p} \frac{1}{|H_s|} y_Q(t), \quad (5.34)$$

kde  $|H_s|$  je zesílení sensorického rezonátoru na nosné frekvenci  $\omega_{d,0}$ .

Důležitým zjištěním je, že demodulace není ideální a část parazitní složky kmitů proniká do užitečné komponenty. Pronikání parazitního signálu do užitečné složky nejen zhoršuje, ale dokonce znemožňuje určení rychlosti rotace v případě větší hodnoty kvadrurní křížové vazby  $k_{sd} = m_{s,0} \cdot (0,1\omega_{s,0})^2 = 0,3823 \frac{N}{m}$ , která je běžně používána [15]. Výsledek stejného testu s pouhou změnou parametru  $k_{sd}$  je zobrazen na obr. 5.9b. Parazitní složka, která je nyní o tři řády větší než v prvním případě, proniká do užitečné komponenty a naprosto znehodnocuje užitečný signál.

K vzájemnému pronikání složek při demodulaci dochází především kvůli křížovým vazbám v MIMO systému, jak již bylo uvedeno v kapitole 3. Protože byl tento systém rozdělen do dvou SISO složek, byly křížové vazby při návrhu demodulačního bloku zanedbány. Jednou z možností pro potlačení průniku parazitní složky do užitečné je využití regulátoru parazitní části kmitů, tj. složky  $y_Q(t)$ . Návrh regulátoru je obsahem následující části.



(a) Testování demodulace kmitů  $k_{sd} = 10^{-3} \frac{N}{m}$ .

(b) Testování demodulace kmitů,  $k_{sd} = 0,3823 \frac{N}{m}$ .

**Obrázek 5.9: Testování demodulace kmitů:** (a, b) V grafu je zakreslena přechodová charakteristika rezonátoru s demodulačním zpracováním kmitů. Kmitový rezonátor byl pomocí demodulace rozdělen na užitečnou a kvadraturní složku, což je vidět ve spodních grafech. Horní grafy obsahují referenční vstupní signály  $\Omega(t)$  a  $k_{sd}$  a určené měření rotační rychlosti  $\hat{\Omega}(t)$  (vlevo) a určené koeficientu kvadraturní křížové vazby  $\hat{k}_{sd}$  (vpravo). (b) Na grafech v prostřední řadě je přiblížení osy  $y$  přechodové charakteristiky. Je zde patrný průnik signálu z kvadraturní složky do užitečné, který znehodnocuje určení měření  $\hat{\Omega}(t)$ .

## 5.6 Sensorický mód pracující v uzavřené smyčce

Syntézou řízení pro sensorický mód je možné vylepšit nedostatky provozování MEMS gyroskopu v otevřené smyčce. Uplatněním řízení je možné potlačit průnik parazitní části signálu do užitečné a zvětšit citlivost a šířku pásma senzoru. Na schématu na obr. 5.4 je vidět, že se při řízení sensorického módu uplatňují dvě zpětnovazební smyčky. Pro řízení a vylepšení vlastností MEMS gyroskopu je možné využít obě zpětné vazby současně, nebo pouze zpětnou vazbu pro potlačení parazitní složky. V této části je nejdříve navrženo řízení pro obě regulační smyčky a následně je provedena analýza, ukazující způsob fungování řízení a měření rychlosti otáčení pro obě varianty.

K návrhu řízení sensorického módu byl využit analogický postup jako při návrhu řízení budicího módu. Nejdříve byla stanovena neurčitost modelu v nominálních parametrech, na základě které byla určena množina systémů pro návrh řízení. Tvarováním frekvenční charakteristiky byl nalezen PI regulátor, který byl následně ověřen pomocí kritéria robustní kvality řízení (4.5).

### 5.6.1 Modelování neurčitosti demodulovaných složek

Při návrhu regulátorů složek sensorických kmitů byl kladen důraz na robustnost stejně jako při návrhu řízení amplitudy kmitů budicího módu popsaném v sekci 4.3. Pro určení váhové funkce neurčitosti byly uvažovány následující perturbace parametrů:

- 20%-ní změna kvality rezonátoru  $Q_s$ .
- současná 20%-ní změna rezonančních frekvencí  $\omega_d$  a  $\omega_s$ .
- zafixování  $\omega_{d,0}$  a perturbace  $\omega_s = \omega_{s,0} \pm 2 Hz$ .

Protože je přenosová funkce obou komponent signálu shodná, bylo pro ni zavedeno společné označení  $G_{s,0}^A = G_{IN}^{appr} = G_Q^{appr}$ . Dolní index  $s, 0$  označuje, že se jedná o nominální přenos sensorického módu a horní index  $A$  značí, že na výstupu je amplitudová obálka kmitů rezonátoru. Při modelování neurčitosti bylo postupováno následujícím způsobem:

1. Jako nominální model  $G_{s,0}^A$  byla zvolena aproximativní přenosová funkce (5.29). Frekvenční charakteristiky perturbovaných systémů  $G_{s,p}^A$  byly nalezeny numericky z výrazu (5.27) pro každou zvolenou perturbaci. Frekvenční charakteristika nominálního  $G_{s,0}^A$  a perturbovaných  $G_{s,p}^A$  přenosů je zobrazena na obr. 5.10. Největší neurčitost nastává kolem frekvence  $2 \cdot 10^4 [Hz]$ , kde je u numericky vyčíslených charakteristik patrný rezonanční vrchol. Protože tento vrchol nepřesahuje zesílení  $-50 [dB]$ , byl při hledání aproximativního nominálního modelu zanedbán. Rozdíl mezi numerickými perturbovanými a aproximativním nominálním modelem je zohledněn ve funkci neurčitosti.
2. Porovnáním perturbovaných systémů  $G_{s,p}^A$  s nominálním  $G_{s,0}^A$  byly numericky vypočteny velikosti aditivních neurčitostí

$$|W_{s,2,p}^A(j\omega)| = |G_{s,0}^A(j\omega) - G_{s,p}^A(j\omega)|, \quad (5.35)$$

kteře jsou zobrazeny na obr. 5.11 spolu s vytvořenou váhovou funkcí  $W_{s,2}^A$ . Váhová funkce byla sestavena z elementární přenosových členů za účelem pokrytí všech specifikovaných neurčitostí nominálního přenosu  $G_{s,0}^A$ . Pro pokrytí všech neurčitostí byla váhová funkce  $W_{s,2}^A$  vytvořena tak, aby splňovala kritérium

$$|G_{s,0}^A(j\omega) - G_{s,p}^A(j\omega)| \leq |W_{s,2}^A(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} : \omega \geq 0. \quad (5.36)$$

3. Váhová funkce  $W_{s,2}^A$  byla aproximována ve tvaru

$$W_{s,2}^A(s) = \frac{0,0039(s + 2,513 \cdot 10^4)(s + 282,7)^2(s + 125,7)(s + 25,13)}{(s + 106,8)^3(s^2 + 42,41s + 2221)} \quad (5.37)$$

a pro ověření splnění požadavků podle kritéria 4.5 převedena na multiplikativní neurčitost

$$W_{s,2}^M(s) = \frac{W_{s,2}^A(s)}{G_{s,0}^A(s)} = \frac{1,2628 \cdot 10^{-17}(s + 3,104 \cdot 10^5)(s + 2,513 \cdot 10^4)(s + 282,7)^2}{(s + 131,5)(s + 106,8)^3} \cdot \frac{(s + 125,7)(s + 25,13)(s^2 + 46,84s + 3263)(s^2 + 2199s + 2.467e06)}{(s^2 + 42,41s + 2221)}. \quad (5.38)$$

## 5.6.2 Syntéza regulátoru pro potlačení kvadrurních chyby

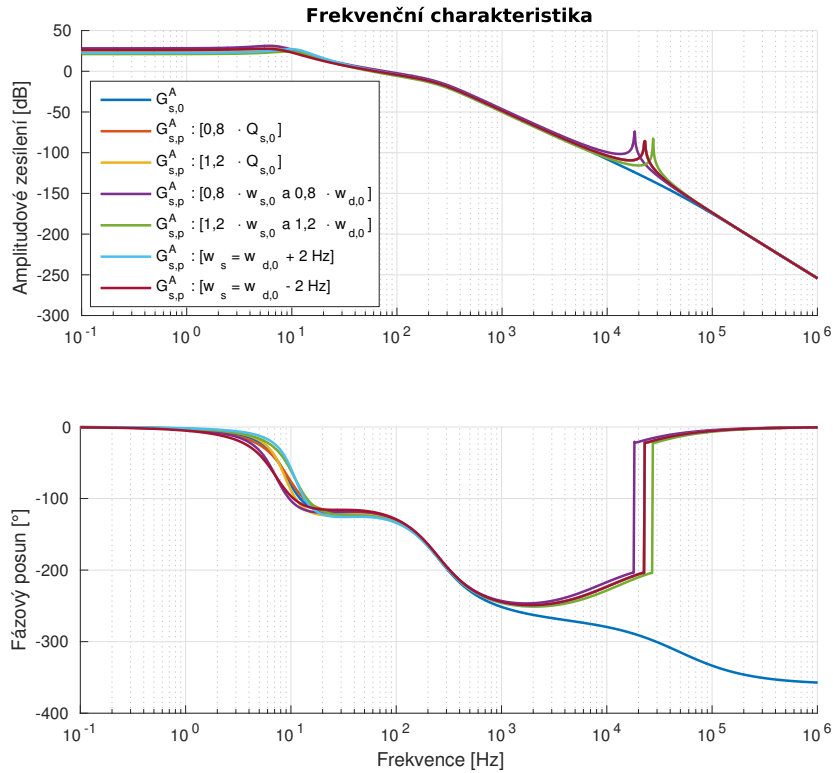
Cílem řízení je potlačení části kmitů senzorního rezonátoru, zapříčiněné přenosem kmitů z budicího módu (anglicky *Cross-coupling*) v důsledku neortogonalit módu a tedy nenulového parametru  $k_{sd}$ . Změny tohoto parametru jsou očekávány spíše pomalého charakteru v závislosti na změnách prostředí použití. To je promítnuto do návrhových požadavků:

- Nulová odchylka v ustáleném stavu.
- Šířka pásma regulační smyčky:  $BW \geq 1Hz$ .
- Zajištění stability všech systémů z množiny

$$\mathcal{G}_s^A(s) = \{G_s^A(s) : G_s^A(s) = G_{s,0}^A(s) (1 + W_{s,2}^M(s)\Delta), \quad \forall \Delta \in \mathbb{C} : \|\Delta\|_\infty \leq 1\} \quad (5.39)$$

s požadavkem na kvalitu řízení ve formě nezesilování poruch na jakékoliv frekvenci více než 2x:  $M_s = 2 \rightarrow W_{s,1}(j\omega) = 0,5, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} : \omega \geq 0$ .





Obrázek 5.10: **Frekvenční charakteristika perturbací sensorického módu.** Perturbované přenosy jsou vždy značeny jako  $G_{s,p}^A$  následované informací o konkrétní provedené změně v hranaté závorce.

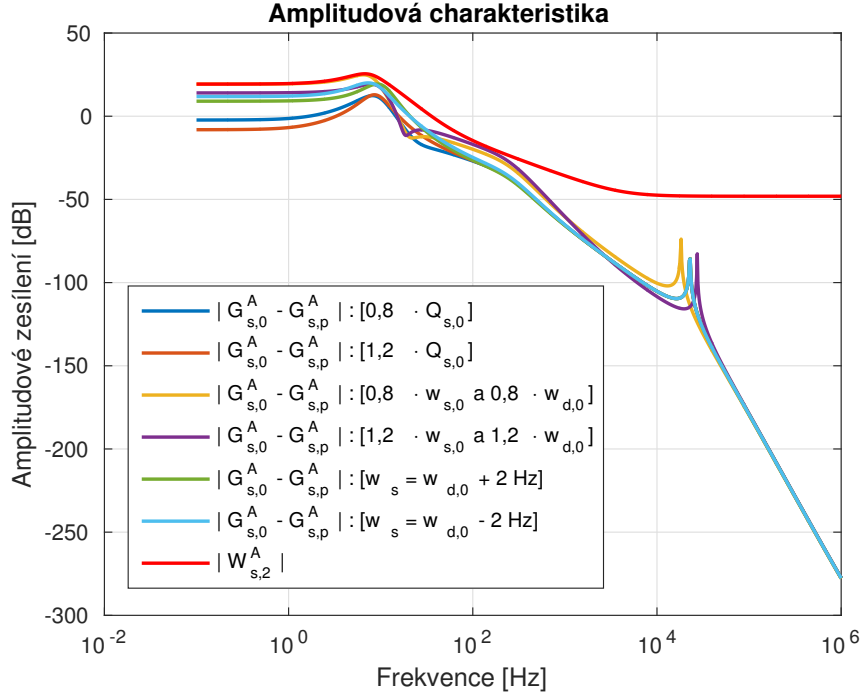
Nejříve byla zvolena struktura regulátoru PI a následným tvarováním frekvenční charakteristiky získán konkrétní přenos

$$C_{s,Q}(s) = \frac{0,0156(s + 46,95)}{s}. \quad (5.40)$$

Integrační část regulátoru zajišťuje splnění požadavku na nulovou odchylku v ustáleném stavu a splnění požadavku na šířku pásma je zobrazeno na obr. 5.13. Dosažení požadované úrovně robustnosti a kvality řízení je ilustrováno na grafu na obr. 5.14. Přechodová charakteristika navržené regulační smyčky je zobrazena na obr. 5.15.

### 5.6.3 Syntéza regulátoru pro řízení užitečné části kmitů do nuly

Po potlačení části kmitů vzniklé parazitní křížovou vazbou z kmitů budicího módu je možné určovat rychlost rotace z amplitudy kmitů sensorického rezonátoru. Vlastnosti senzoru je však možné ještě vylepšit řízením užitečné složky kmitů do nuly. Regulace kmitů do nuly vede ke snížení amplitudy až o několik řádů. To vede ke zvýšení linearity



Obrázek 5.11: **Numericky spočtené neurčitosti a váhová funkce  $W_{s,2}^A$ .** Graf zobrazuje velikosti rozdílů  $|G_{s,0}^A - G_{s,p}^A|$  pro konkrétní realizace perturbovaných parametrů uvedených v hranaté závorce. Červenou barvou je vykreslena amplitudová charakteristika váhové funkce  $W_{s,2}^A$ . Velikost zesílení je vynesena v jednotkách  $dB$ .

a šířky pásma senzoru [9]. Působící rychlost otáčení poté není úměrná velikosti amplitudy kmitů, ale řídicímu signálu.

Návrhové požadavky na regulovaný systém byly zvoleny následovně:

- Nulová odchylka v ustáleném stavu.
- Šířka pásma regulační smyčky:  $BW \geq 100 \text{ Hz}$ .
- Zajištění stability všech systémů z množiny

$$\mathcal{G}_s^A(s) = \{G_s^A(s) : G_s^A(s) = G_{s,0}^A(s) (1 + W_{s,2}^M(s)\Delta) , \forall \Delta \in \mathbb{C} : \|\Delta\|_\infty \leq 1\} \quad (5.41)$$

s požadavkem na kvalitu řízení ve formě nezesílování poruch na jakékoliv frekvenci více než  $2x$ :  $M_s = 2 \rightarrow W_{s,1}(j\omega) = 0,5, \forall \omega \in \mathbb{R} : \omega \geq 0$ .

Požadavky jsou stejné jako při řízení kvadrurní složky kmitů až na šířku pásma regulace. Požadavek byl stanoven na větší hodnotu, protože je předpokládáno, že měřená úhlová rychlost se bude měnit mnohem častěji a rychleji, než fyzické parametry senzoru.

Výchozím bodem při návrhu regulátoru byla frekvenční charakteristika obávkového modelu, která je zobrazena na obr. 5.5b. Robustní regulátor byl navržen v těchto krocích:

1. Pro zajištění nulové regulační odchylky v ustáleném stavu byl do regulátoru přidán čistý integrátor  $C_{s,IN} = \frac{1}{s}$ , který zvětšil sklon amplitudové charakteristiky v okolí požadované přechodové frekvence  $\omega_c = 100 Hz$  na  $-40 dB/dek$ .
2. Pro zajištění robustnosti bylo potřeba zmírnit tento sklon v okolí  $\omega_c$ . Toho bylo dosaženo přidáním proporcionální části do regulátoru a vhodným zvolením integrační časové konstanty  $T_I = 0,085$ .
3. Nakonec bylo zesílení PI regulátoru zvětšeno  $1,1131 \times$  pro dosažení přechodové frekvence  $\omega_c = 75,5 Hz$  pro otevřenou regulační smyčku.
4. Frekvenční charakteristika navržené otevřené regulační smyčky je vykreslena na obr. 5.12a, kde je porovnávána s výsledky získanými z odhadu frekvenční charakteristiky pomocí nástroje v Simulinku. Zde je vidět, že návrh na základě lineární aproximace systému odpovídá charakteristice nelineárního modelu.
5. Po namodulování řídicího signálu  $u_{IN}(t)$  na nosný signál  $c_{IN}(t)$  a uzavření zpětné vazby v nelineárním modelu vytvořeném v programu Simulink bylo získáno porovnání aproximované uzavřené řídicí smyčky a uzavřené smyčky nelineárního modelu. Výsledek porovnání je zobrazen na 5.12b. Tento test odhalil, že po zavedení modulace řídicího signálu a uzavření zpětné vazby, již lineární aproximace systému není dostačující a frekvenční charakteristiky modelů se liší. Nepřesnost aproximace je diskutována v sekci 5.6.4 spolu s možným řešením.

Výsledný tvar navrženého PI regulátoru je

$$C_{s,IN}(s) = 1 + \frac{1}{T_I s} = \frac{1,1131(s + 11,76)}{s} . \quad (5.42)$$

Z frekvenční charakteristiky navržené regulační uzavřené smyčky na obrázku 5.13 je vidět splnění požadavku na šířku pásma  $BW \geq 100 Hz$  a graf na obr. 5.14 zobrazuje splnění kritéria robustní kvality řízení. Odezva systému na jednotkový skok je zobrazena na obr. 5.15, kde je vidět, že při regulaci dochází ke zhruba 19% překmitu.

#### 5.6.4 Analýza chování sensorického módu v uzavřené smyčce

Funkčnost navržených regulátorů byla ověřena ve dvou krocích. Nejdříve byly provedeny testy a analýza systému se zapojením jen jedné zpětné vazby potlačující parazitní signál a poté byla v simulaci zapojena i druhá zpětná vazba pro řízení užitečné části kmitů do nuly. Výsledky testování a pozitivní vliv zpětnovazebního řízení na vlastnosti MEMS gyroskopu jsou shrnuty v první části této sekce. V následující části je proveden rozbor a analýza nedokonalé aproximace uzavřené řídicí smyčky nelineárního modelu, na kterou bylo upozorněno v sekci 5.6.3.

### Krok 1) Ověření navrženého regulátoru pro potlačení kvadraturní části kmitů

Zapojením první zpětné vazby navržené pro kompenzaci kvadraturní části kmitů (zelený rámeček na obr. 5.4) lze potlačit pronikání parazitních kmitů do užitečné části signálu. K ověření funkce této řídicí smyčky bylo provedeno několik testů.

První dva testy byly provedeny s konstantní rychlostí rotace  $\Omega(t) = 1 \frac{rad}{s}$  a konstantním koeficientem kvadraturní křížové vazby  $k_{sd}$  pro následující dvě hodnoty:

- $k_{sd} = m_{s,0} \cdot (0,1\omega_{s,0})^2 = 0,3823 \frac{N}{m}$ , výsledek zobrazen na obr. 5.16a.
- $k_{sd}^{max} = 0,1 k_{d,0} = 4,1553 \frac{N}{m}$ , výsledek zobrazen na obr. 5.16b.

Z výsledků je zřejmé, že navržený regulátor  $C_{s,Q}(s)$  je schopný potlačit kvadraturní křížovou vazbu pro obě hodnoty  $k_{sd}$  a díky tomu je možné určovat rychlost rotace z otevřené smyčky užitečné komponenty  $y_{IN}(t)$  jako

$$\hat{\Omega}(t) = \frac{1}{2m_s A_v |H_s|} y_{IN}(t) \quad (5.43)$$

a koeficient kvadraturní křížové vazby  $\hat{k}_{sd}(t)$  ze signálu řízení  $u_Q(t)$  jako

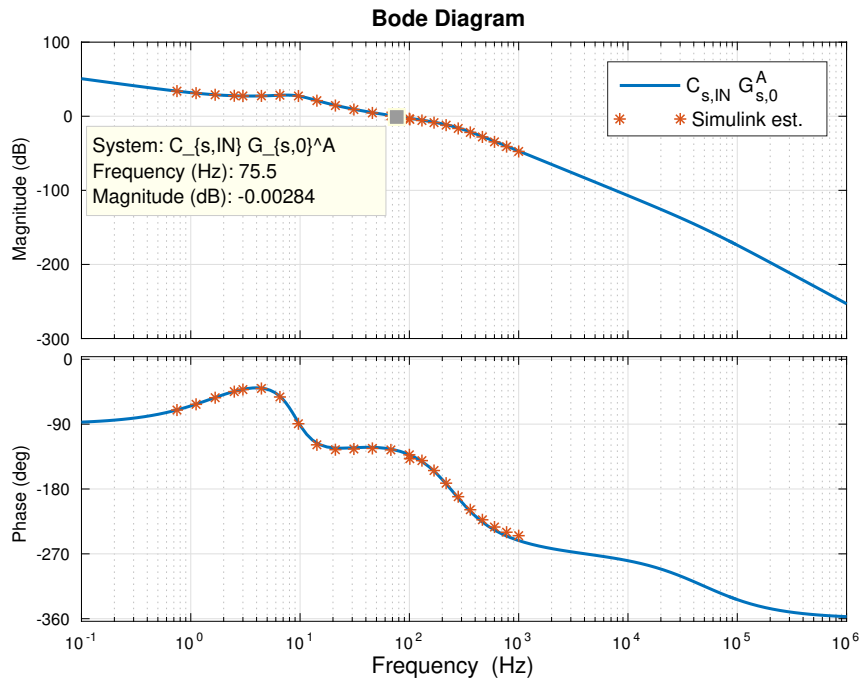
$$\hat{k}_{sd}(t) = \frac{2}{A_p} u_Q(t). \quad (5.44)$$

Po porovnání výsledků z obr. 5.16a s výsledky stejného testu, který byl proveden na systému s otevřenou smyčkou kvadraturní složky, z obr. 5.9b je zřejmý pozitivní vliv řízení kvadraturní složky kmitů na určování rychlosti rotace ze signálu  $y_{IN}(t)$ . Kvadraturní část kmitů byla potlačena a neproniká dále do užitečné složky.

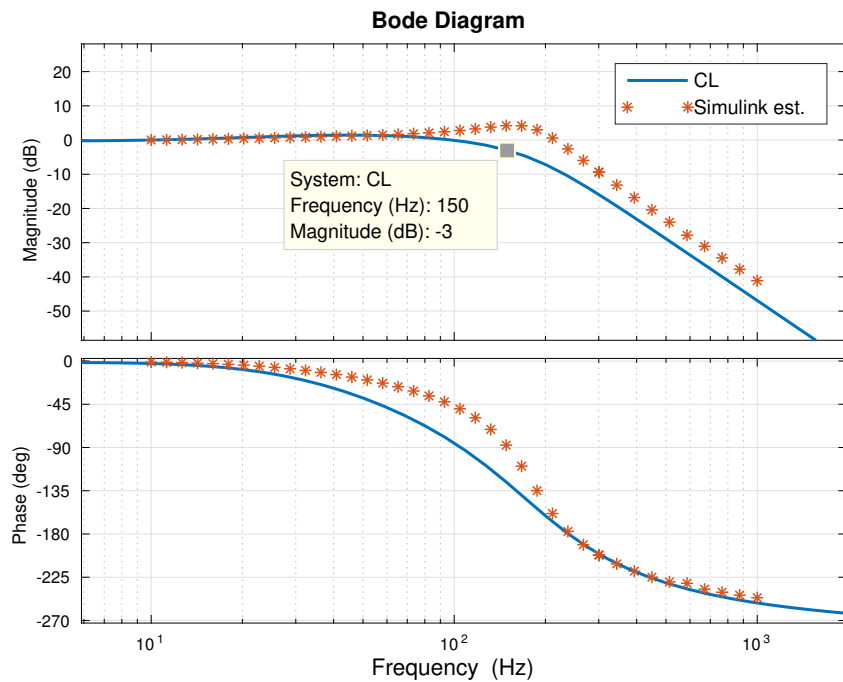
Následujícím předmětem testování bylo určení rychlosti rotace při harmonickém vstupním signálu  $\Omega(t)$ . Koeficient křížové vazby  $k_{sd} = 0,3823 \frac{N}{m}$  byl pro tento test ponechán konstantní a vstupní rychlost rotace byla zvolena o dvou různých frekvencích:

- $f_\Omega = 1Hz$ , výsledek na obr. 5.17a zobrazuje, že měření určené ze signálu  $y_{IN}(t)$  sleduje referenční signál.
- $f_\Omega = 20Hz$ , výsledek na obr. 5.17b, zobrazuje, že při určování rotační rychlosti o vyšší frekvenci dochází ke zdatelnému posunu fáze a nepřesnému určení amplitudy.

Z provedených testů je patrné, že při využití demodulační techniky a kompenzaci kvadraturní části kmitů je možné určovat rotační rychlost s malou frekvencí změn z užitečné složky kmitů  $y_{IN}(t)$  sensorického rezonátoru. Při vyšší frekvenci změn rotační rychlosti však tento systém selhává. Zhruba 50%-ní útlum v amplitudě určeného měření  $\hat{\Omega}(t)$  z experimentálních výsledků 5.17b odpovídá frekvenční charakteristice na obr. 5.5b systému užitečné komponenty v otevřené smyčce. Z frekvenční charakteristiky 5.5b je patrné, že šířka pásma tohoto senzoru je jen cca 10 Hz. Proto, aby bylo možné měřit rotační rychlost o vyšších frekvencích změn, je nezbytné rozšířit šířku pásma sensorického módu, čehož bylo dosaženo návrhem řízení užitečné složky kmitů do nuly.

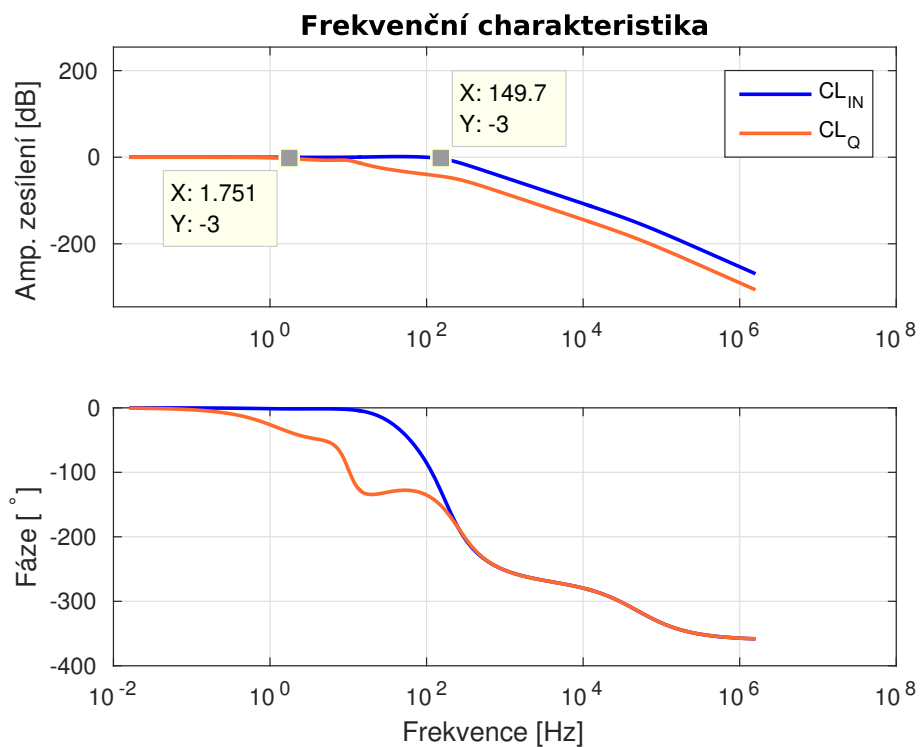


(a) Otevřená řídicí smyčka.

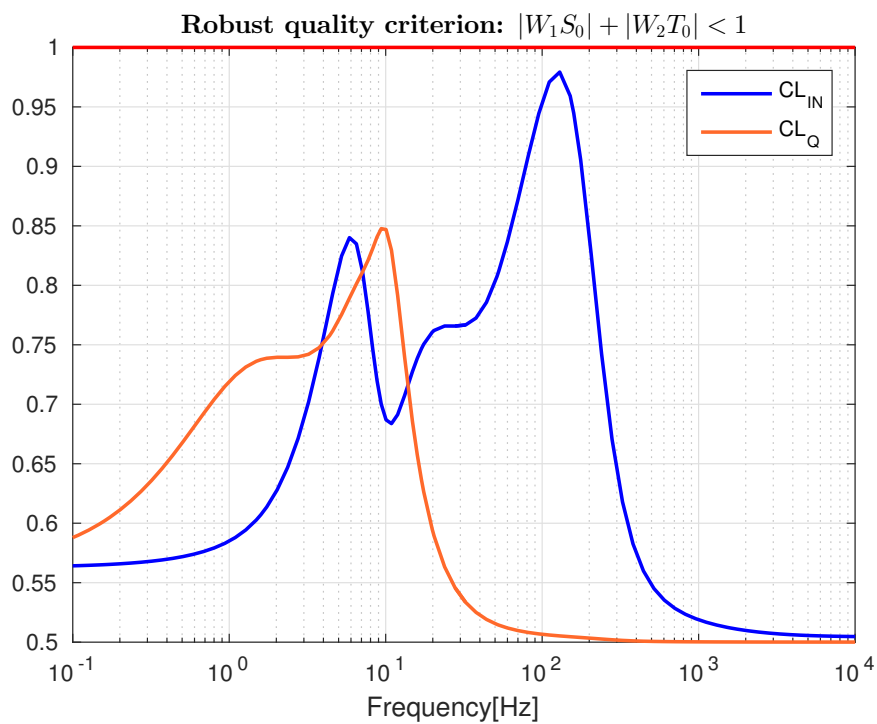


(b) Uzavřená řídicí smyčka.

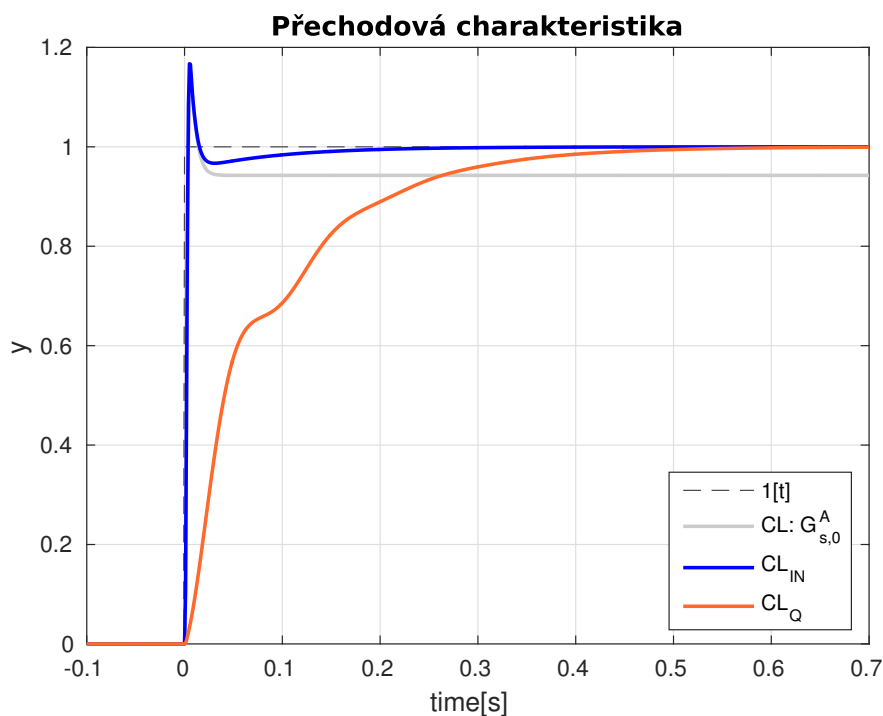
Obrázek 5.12: Frekvenční charakteristika řídicí smyčky užitečné komponenty kmitů.



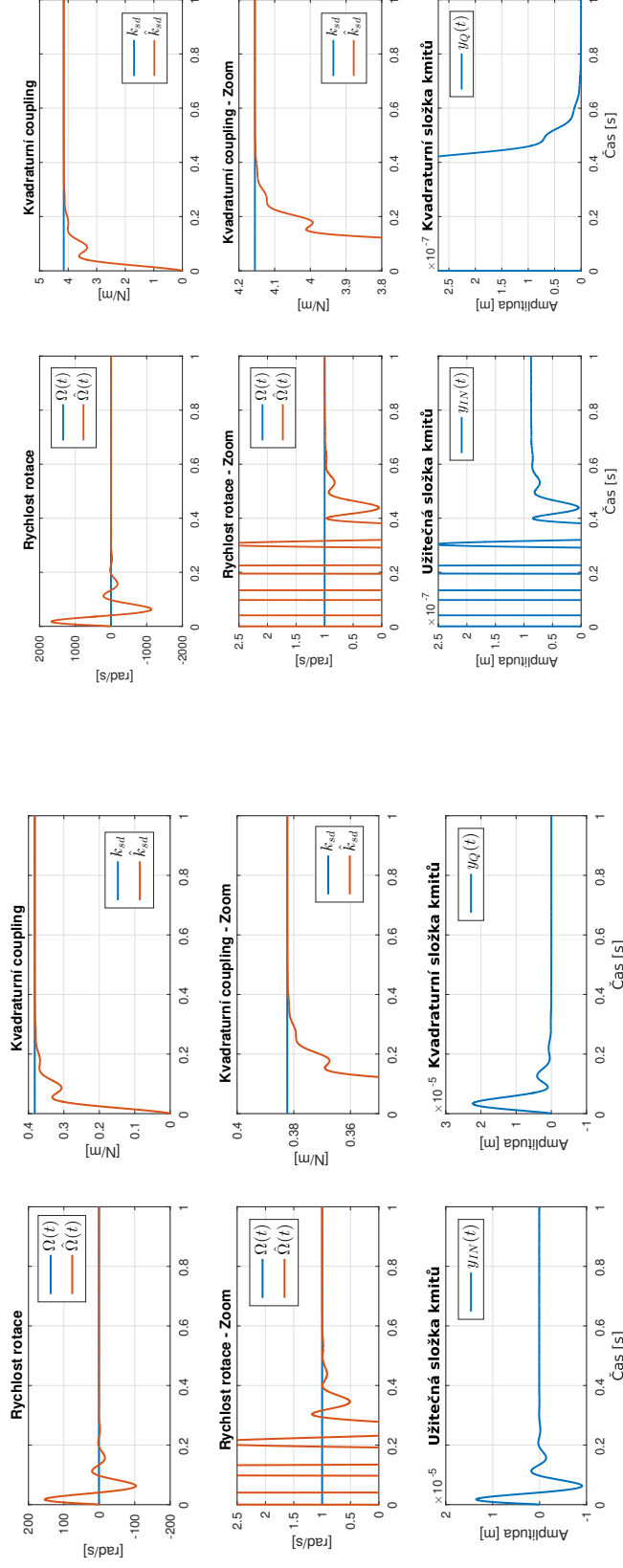
Obrázek 5.13: Frekvenční charakteristika uzavřené řídicí smyčky.



Obrázek 5.14: Kritérium robustní kvality řízení.



Obrázek 5.15: **Přechodová charakteristika.** V grafu je zakreslena přechodová charakteristika zpětnovazební smyčky bez regulátoru  $CL : G_{s,0}^A$  (šedá barva) a porovnána s odezvou zpětnovazební regulační smyčky  $CL_{IN} : C_{s,IN}G_{s,0}^A$  (modře) a  $CL_Q : C_{s,Q}G_{s,0}^A$  (oranžově). Systém  $CL_{IN}$  má rychlost odezvy zhruba stejnou jako nominální systém  $G_{s,0}^A$  se zpětnou vazbou bez regulátoru. Regulátor  $C_{s,IN}$  však zajišťuje nulovou regulační odchylku v ustáleném stavu. Uzavřená smyčka kvadratického signálu  $CL_Q$  má pomalejší rychlost odezvy, ale nulová regulační odchylka v ustáleném stavu je rovněž zajištěna.

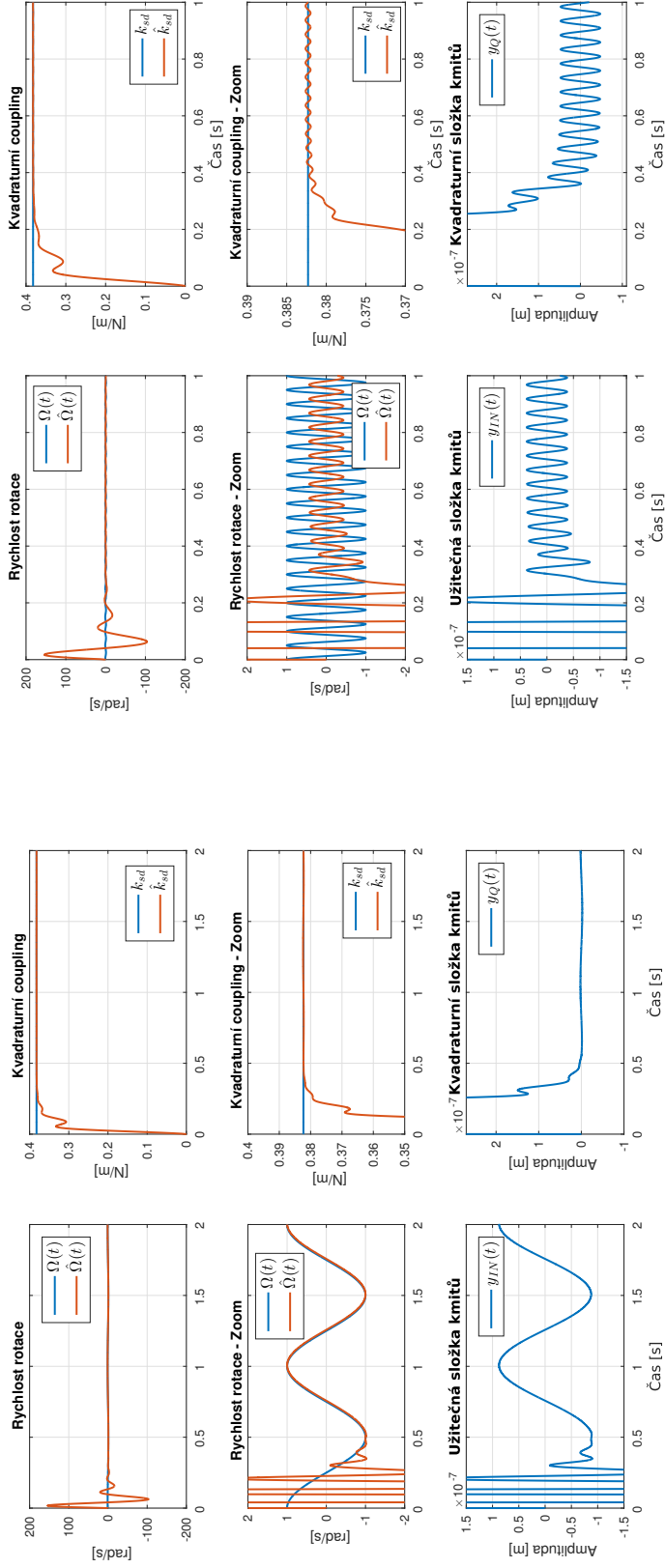


(a) Testování potlačení kvadraturní složky kmitů,  $k_{sd} = 0,3823 \frac{N}{m}$ .

(b) Testování potlačení kvadraturní složky kmitů,  $k_{sd} = 4,1553 \frac{N}{m}$ .

Obrázek 5.16: **Testování potlačení kvadraturní složky kmitů.** Na grafu v pravém dolním rohu je vidět řízení kvadraturní složky kmitů do nuly. Vlevo dole je zobrazeno ustálení užitečné složky kmitů. V levém sloupci je v prvních dvou řádcích zobrazeno určení měření rychlosti rotace  $\hat{\Omega}(t)$ .





(a) Testování potlačení kvadraturní složky kmitů,  $f_\Omega = 1 \text{ Hz}$ .

(b) Testování potlačení kvadraturní složky kmitů,  $f_\Omega = 20 \text{ Hz}$ .

**Obrázek 5.17: Testování potlačení kvadraturní složky kmitů.** V prvních dvou řadách grafů je v levém sloupci zobrazen vstupní signál rychlosti rotace  $\Omega(t)$  a určení měření  $\tilde{\Omega}(t)$ . Vpravo je síla způsobující parazitní přenos kmitů a určení parametru křížové vazby  $k_{s,d}$ . Ve spodní řadě grafů jsou zobrazeny amplitudy demodulovaných složek kmitů.

## Krok 2) Ověření navrženého regulátoru pro řízení užitečné části kmitů do nuly

Kombinací kompenzace kvadraturní části a řízení užitečné komponenty kmitů do nuly lze zvýšit šířku pásma senzoru. Řízením kmitů rezonátoru do nuly se navíc zlepšuje linearita a citlivost senzoru. Rychlost rotace je poté určována z řídicího signálu užitečné složky  $u_{IN}(t)$  jako

$$\hat{\Omega}(t) = \frac{1}{m_s A_v} u_{IN}(t). \quad (5.45)$$

K otestování navrženého regulátoru  $C_{s,IN}(s)$  byly provedeny testy s následujícími vstupními signály rychlosti rotace:

- $\Omega(t) = \cos(2\pi \cdot 10t)$ , výsledek zobrazen na obr. 5.18.
- $\Omega(t) = \cos(2\pi \cdot 20t)$ , výsledek zobrazen na obr. 5.19a.
- $\Omega(t) = \cos(2\pi \cdot 100t)$ , výsledek zobrazen na obr. 5.19b.

První dva testy ukázaly, že určování rychlosti rotace o nízkých frekvencích změn z řídicího signálu  $u_{IN}(t)$  funguje. Po porovnání výsledků testu určení rychlosti rotace o frekvenci  $20 \text{ Hz}$  z obr. 5.19a s výsledky stejného testu na systému bez řízení užitečné složky kmitů z předešlé sekce 5.6.4 (obr. 5.17b) je zřejmý pozitivní vliv zavedeného zpětnovazebního řízení na rozšíření šířky pásma senzoru.

Splnění návrhového požadavku na šířku pásma  $BW \geq 100 \text{ Hz}$  bylo otestováno třetí simulací. Jako vstupní signál rotační rychlosti byl zvolen sinový signál s frekvencí  $100 \text{ Hz}$ . Výsledky zobrazené na obr. 5.19b ukazují, že na této frekvenci dochází k zesílení signálu  $\hat{\Omega}(t)$  přibližně o 36%. Toto zesílení odpovídá zisku  $2,79 \text{ dB}$  a tedy požadovaná šířka pásma byla návrhem zpětnovazebního řízení dosažena. Následně byly na simulačním modelu ověřeny požadavky na robustnost systému. Bylo ověřeno, že navržené řízení je schopné potlačit kmity sensorického rezonátoru i pro systémy s následujícími odchylkami parametrů od nominálních hodnot: (i) 20%-ní současná změna rezonančních frekvencí  $\omega_d$  a  $\omega_s$ , (ii) 20%-ní změna kvality rezonátoru  $Q_s$  a (iii) změna rezonanční frekvence  $\omega_s$  o  $\pm 2 \text{ Hz}$ .

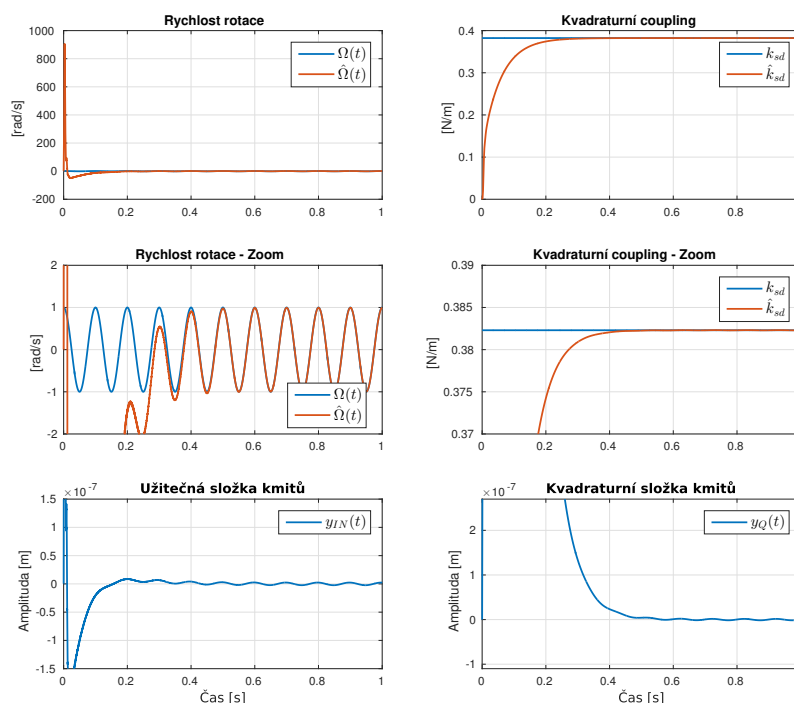
## Analýza nedokonalé aproximace nelineárního modelu

I přesto, že návrhové požadavky byly splněny, zbývá provést diskuzi nesrovnalosti mezi frekvenční charakteristikou aproximačního modelu a nelineárního modelu z prostředí Simulink. Tato neshoda je zobrazena na obr. 5.12b. Pravděpodobnou příčinou problému je zvolený filtr  $F_{LPF}(s)$  z bloku pro demodulaci. Při odvozování lineárního modelu byla frekvenční charakteristika filtru zanedbána a vysokofrekvenční složky signálu byly po vynásobení v demodulačním bloku odstraněny na základě tohoto předpokladu. Filtr použitý v Simulink modelu však není ideální a ovlivňuje frekvenční složky v okolí zlomové frekvence. To může způsobovat útlum obálky užitečné složky kmitů  $y_{IN}(t)$ . Regulátor  $C_{s,IN}(t)$  je navržen za účelem kompenzování působící Coriolisovy síly  $F_C(t)$ .

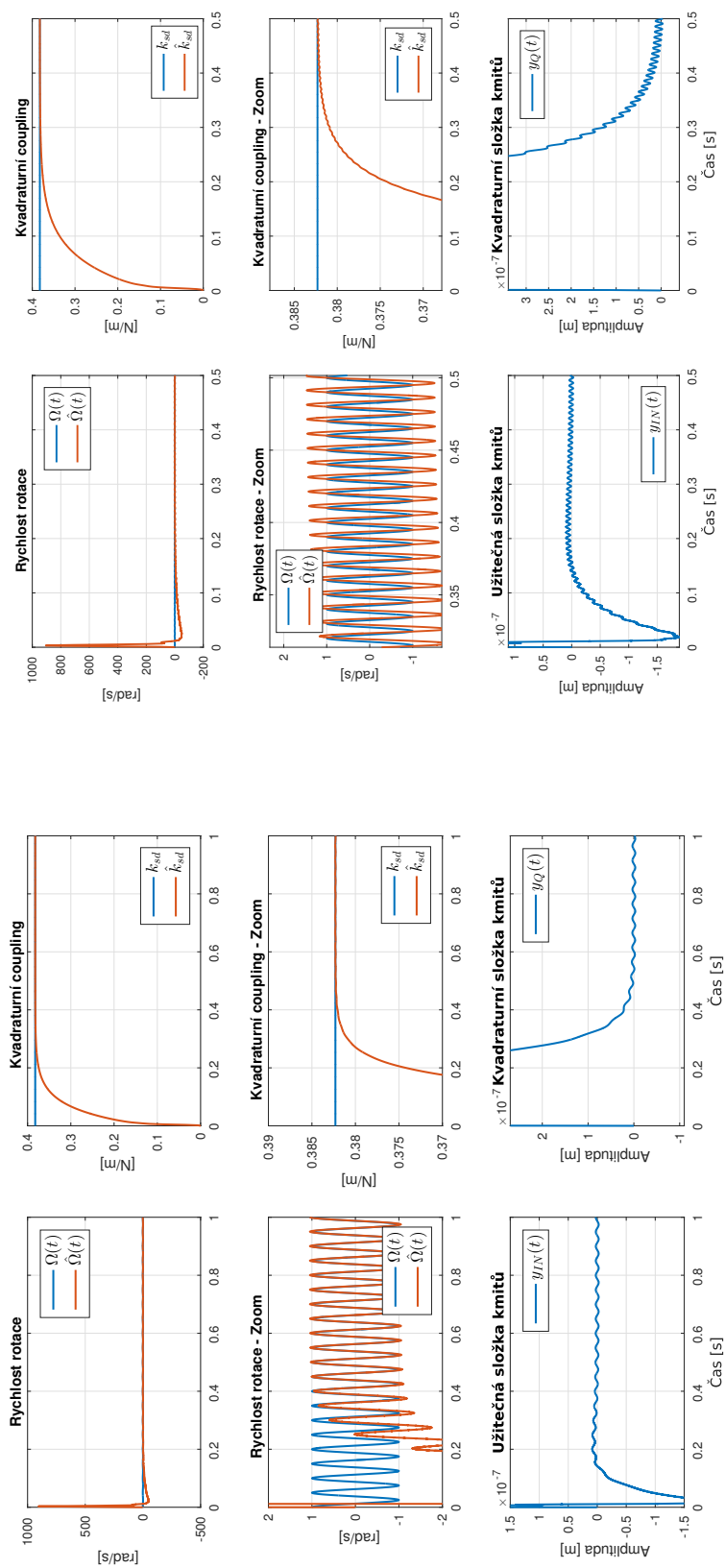
Z toho důvodu musí do uzavřené smyčky přidat zesílení, které bylo ubráno neideálním filtrem. Tato hypotéza vysvětluje možnou příčinu skutečnosti, proč je amplitudová charakteristika nelineárního modelu s neideálním filtrem znatelně odlišná od charakteristiky aproximativního lineárního modelu, jak je zobrazeno na obr. 5.12b.

Možným řešením je zvýšení zlomové frekvence filtru  $F_{LPF}(s)$ . Posunutím frekvence  $\omega_c$  je snížen vliv amplitudového útlumu filtru na užitečnou složku kmitů. Protichůdný požadavek na umístění frekvence  $\omega_c$  je v odstranění nosné frekvence užitečné složky. Čím vyšší zlomová frekvence je, tím více nežádoucích frekvenčních složek bude obsaženo v obálce užitečné složky kmitů  $y_{IN}(t)$ . Hodnota zlomové frekvence byla experimentálně zvolena jako  $\omega_c = 750 \text{ Hz}$ . Po změně tohoto parametru bylo znovu vykresleno porovnání aproximativního a nelineárního modelu, které je zobrazené na obr. 5.20 a následně byl zopakován poslední test, jehož výsledky jsou zobrazené na obr. 5.21. Z porovnání frekvenčních charakteristik i výsledku testů je zřejmé, že aproximativní model přesněji odpovídá komplexnímu nelineárnímu modelu v Simulinku.

Po změně zlomové frekvence filtru byla znovu provedena analýza návrhu regulátoru  $C_{s,IN}$  a bylo ověřeno, zda původně odvozená funkce neurčitosti pokrývá skutečnou neurčitost v novém systému a zda původní návrh regulační smyčky splňuje kritérium robustnosti. Z obr. 5.22 resp. 5.23 je možné se přesvědčit, že navržená funkce neurčitosti  $W_{s,2}^A$  pokrývá neurčitost nového systému a navržený regulátor  $C_{s,IN}(s)$  zajišťuje splnění kritéria pro robustní kvalitu řízení nové regulační smyčky užitečné komponenty kmitů.



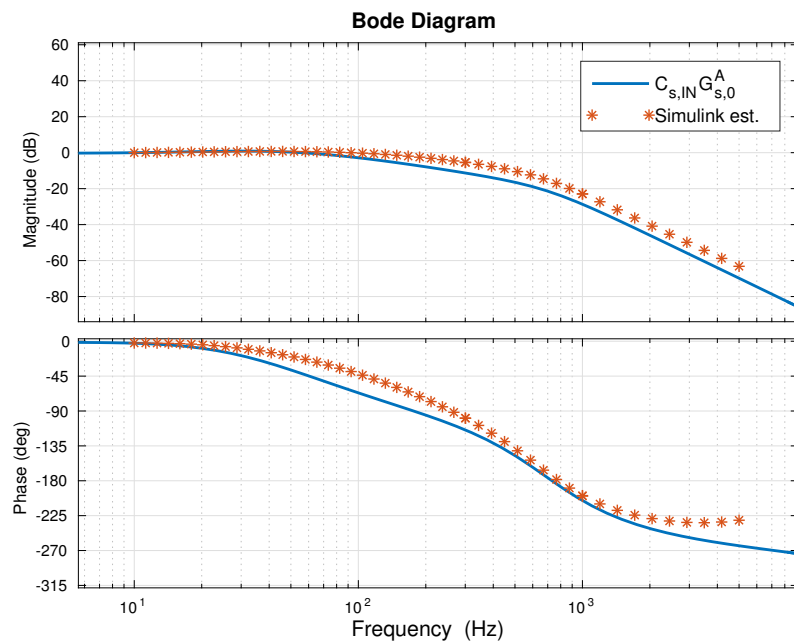
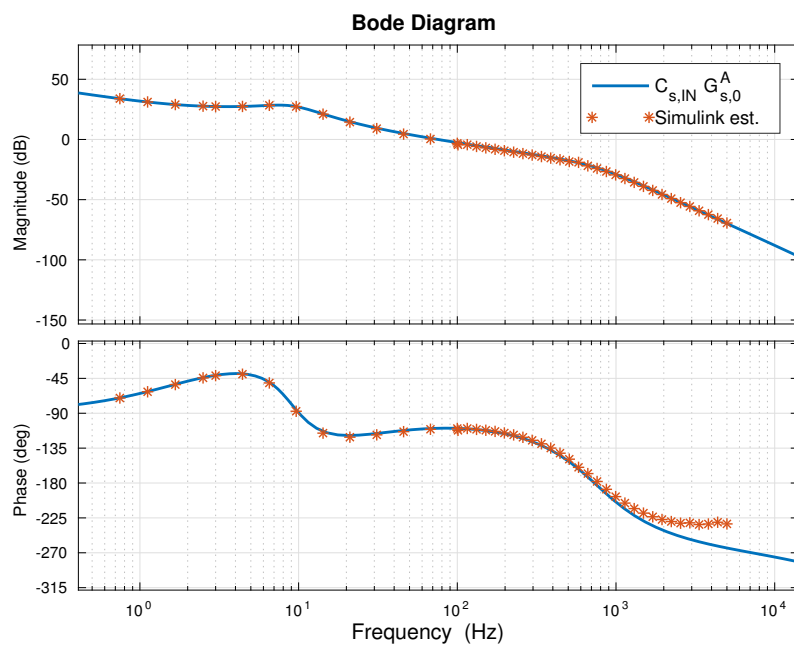
Obrázek 5.18: Testování řízení kmitů do nuly,  $f_\Omega = 10 \text{ Hz}$ .



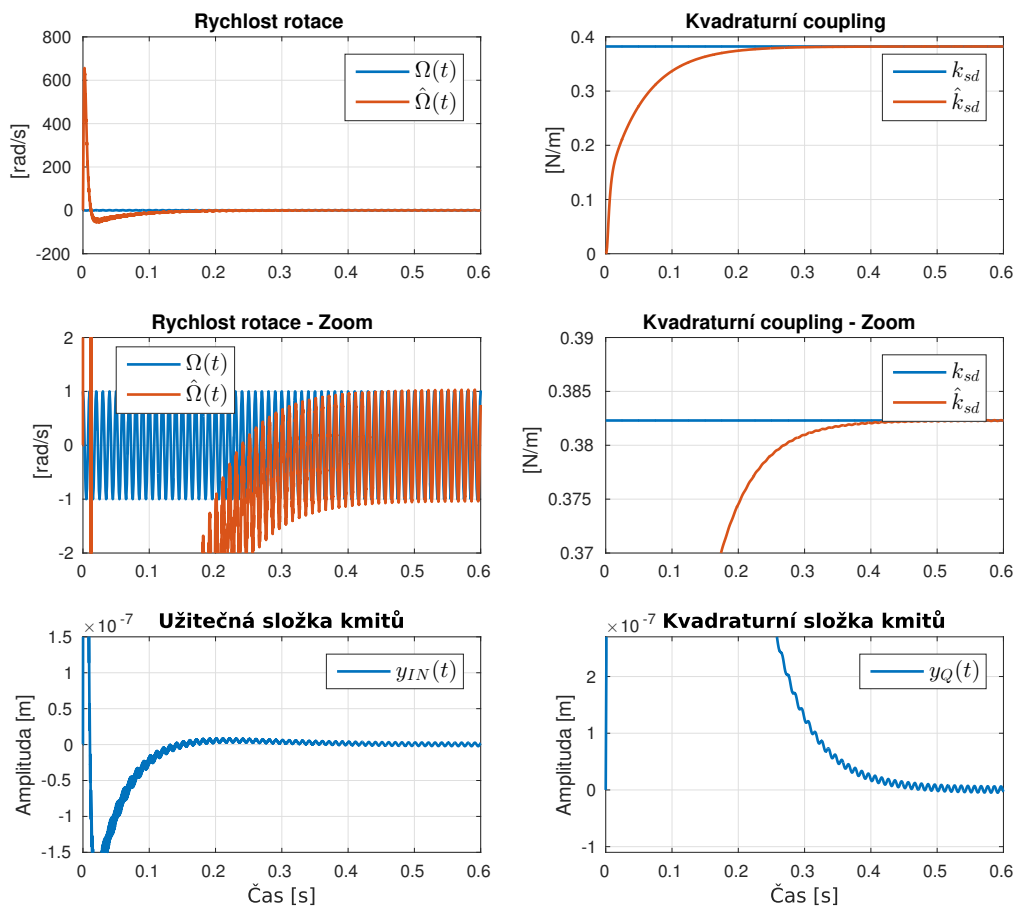
(a) Testování řízení kmitů do nuly,  $f_{\Omega} = 20\text{Hz}$ .

(b) Testování řízení kmitů do nuly,  $f_{\Omega} = 100\text{Hz}$ .

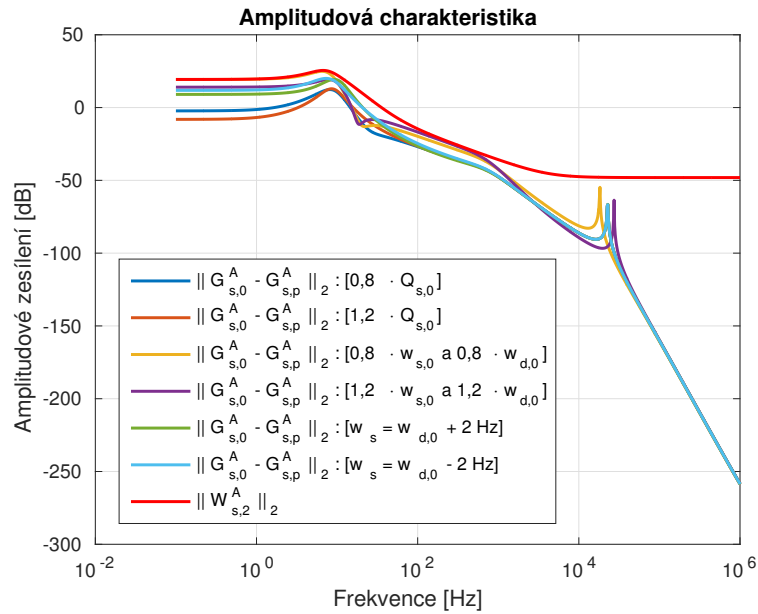
Obrázek 5.19: **Testování řízení kmitů do nuly.** V levém sloupci jsou grafy vztahující se k určení rychlosti rotace a signálu užitečné složky kmitů. V pravém je vykresleno určení parametru křížové vazby  $k_{sd}$  a potlačení kvadraticurní složky kmitů.



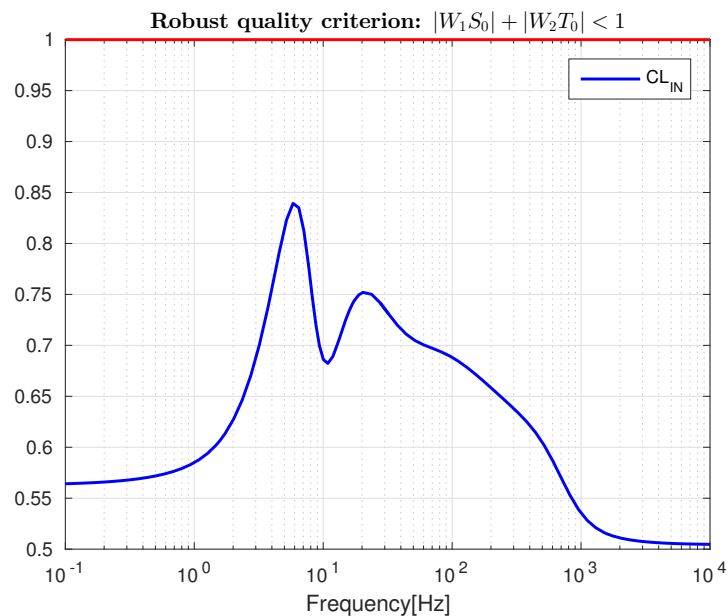
Obrázek 5.20: Frekvenční charakteristika řídicí smyčky užitečné komponenty kmitů.



Obrázek 5.21: Testování řízení kmitů do nuly,  $f_{\Omega} = 100\text{Hz}$ ,  $\omega_c = 750\text{Hz}$ . V levém sloupci jsou grafy vztahující se k určení rychlosti rotace a signálu užitečné složky kmitů. V pravém je vykresleno určení parametru křížové vazby  $k_{sd}$  a potlačení kvadrurní složky kmitů.



Obrázek 5.22: Numericky spočtené neurčitosti a váhová funkce  $W_{s,2}^A$  pro systém s  $\omega_c = 750 \text{ Hz}$ . Graf zobrazuje velikosti rozdílů  $|G_{s,0}^A - G_{s,p}^A|$  pro konkrétní realizace perturbovaných parametrů uvedené v hranaté závorce. Červenou barvou je vykreslena amplitudová charakteristika váhové funkce  $W_{s,2}^A$ .



Obrázek 5.23: Kritérium robustní kvality řízení pro systém se zlomovou frekvencí filtru  $F_{LPPF}(s)$ :  $\omega_c = 750 \text{ Hz}$ .

## 5.7 Shrnutí

V této kapitole byl popsán princip fungování sensorického módu MEMS gyroskopu. Bylo ukázáno, že sensorický rezonátor slouží k převedení Coriolisovy síly na kmity, ze kterých je možné následně určovat rychlost otáčení senzoru. V úvodu kapitoly byl popsán vliv volby návrhových parametrů sensorického rezonátoru na jeho výsledné vlastnosti. Bylo ukázáno, že kromě návrhu řízení je možné ovlivnit vlastnosti MEMS gyroskopu vhodnou volbou návrhových parametrů. Hlavní vliv na vlastnosti senzoru a úlohy řízení sensorického rezonátoru mají především parametry  $Q_s$  - činitel kvality a  $\omega_s$  - rezonanční frekvence. Jejich volba je kompromisem mezi citlivostí, šířkou pásma v otevřené smyčce a robustností senzoru.

Dále bylo ukázáno, že kmitání sensorického rezonátoru MEMS gyroskopu v sobě nese kromě užitečné informace také parazitní chybovou složku. Pro určení rychlosti otáčení z kmitů rezonátoru je nezbytné tyto části od sebe oddělit. Za tímto účelem byl navržen demodulační systém, který využívá známého fázového posunu mezi složkami. Poté byly analyzovány dva hlavní způsoby provozování sensorického rezonátoru MEMS gyroskopu: (i) provozování v otevřené smyčce a (ii) provozování v uzavřené řídicí smyčce. Oba způsoby operace byly podrobně popsány a byly porovnány jejich výhody a nevýhody. V návaznosti byly definovány úkoly a požadavky na řízení při operaci v uzavřené smyčce. Dále byla navržena struktura řídicího systému skládající se ze dvou zpětnovazebních smyček. Pro návrh regulátorů byla nalezena lineární aproximace vstupně-výstupního modelu jednotlivých složek kmitů. Správnost aproximace a shoda zjednodušeného modelu s původním nelineárním byla otestována v prostředí Matlab/Simulink. Odlišnost aproximativního modelu od nelineárního se ukázala až v samotném závěru návrhu při uzavření zpětné vazby a použití amplitudové modulace. I přesto, že se frekvenční charakteristika aproximativního modelu liší od frekvenční charakteristiky nelineárního modelu získané pomocí nástroje z prostředí Simulink, splnil navržený systém všechny návrhové požadavky. Neshoda modelů byla analyzována, diskutována a byla stanovena hypotéza o její pravděpodobné příčině.

Implementací zpětnovazebního řízení sensorického módu byly vylepšeny vlastnosti MEMS gyroskopu jako jsou šířka pásma a citlivost. Regulátor kompenzující parazitní složku kmitů zabraňuje znehodnocení užitečného signálu, což je nezbytné pro přesné měření. Dalšího zlepšení bylo dosaženo řízením užitečné části kmitů do nuly, které rozšiřuje šířku pásma senzoru z  $10\text{ Hz}$  v otevřené smyčce na  $149,7\text{ Hz}$  v uzavřené regulační smyčce. V závěru práce byly navržené regulační obvody otestovány na robustnost vůči následujícím odchylkám parametrů rezonátorů od jejich nominálních hodnot: (i) 20%-ní současná změna rezonančních frekvencí  $\omega_d$  a  $\omega_s$ , (ii) 20%-ní změna kvality rezonátoru  $Q_s$  a (iii) změna rezonanční frekvence  $\omega_s$  o  $\pm 2\text{ Hz}$ . Výsledky testů potvrdily splnění návrhových požadavků.



# Kapitola 6

## Závěr

V diplomové práci byly popsány principy používání MEMS gyroskopů jako senzorů rychlosti rotace. Bylo ukázáno, že vibrační MEMS gyroskopy lze modelovat jako dva ortogonální rezonátory, které jsou propojené křížovými vazbami. Vazby jsou užitečné (Coriolisova síla) a parazitní (kvadrurní křížová vazba). Oba typy vazeb byly zahrnuty do neideálního modelu. Následně byly popsány úlohy řízení a zpracování signálu související s MEMS gyroskopy. Úlohy je možné rozdělit do dvou základních skupin. A jsou to úlohy související s budicím módem a úlohy související s módem senzorickým. Pozornost byla zaměřena zejména na robustní návrh řízení vůči parametrické nejistotě.

Bylo ukázáno, že řízení budicího módu je nezbytné pro fungování senzoru. V návrhu řízení byla zohledněna neurčitost v parametrech senzoru. Konkrétně byl pro řízení frekvence kmitů vybrán systém fázového závěsu schopný adaptace frekvence kmitů na předem neznámou rezonanční frekvenci budicího rezonátoru. Pro návrh regulátoru amplitudy kmitů byl definován zjednodušený model amplitudové obálky kmitů. Navržený regulátor amplitudy byl získán technikou tvarování frekvenční charakteristiky s respektováním neurčitostí v systému. Splnění návrhových požadavků bylo ověřeno pomocí kritéria pro robustní kvalitu řízení. Následně byly oba regulátory simulačně otestovány na nelineárním modelu v programu Simulink. Byla ověřena správnost návrhu a dosažení robustnosti systému vůči 20%-ním změnám nominálních parametrů  $\omega_{d,0}$  a  $b_{d,0}$ .

Zpětnovazební řízení senzorického rezonátoru není nezbytné pro základní funkci gyroskopů, ale značně vylepšuje vlastnosti senzoru. Bylo ukázáno, že senzorický rezonátor je možné provozovat dvěma základními způsoby. Prvním z nich je operace senzoru v otevřené smyčce, ve kterém není uplatněno řízení. Využívá se pouze techniky pro demodulaci a oddělení užitečné složky kmitů od parazitní. Použitá demodulační technika byla popsána a byl nalezen aproximativní vstupně-výstupní model pro demodulované složky kmitů. Následně byly ukázány nevýhody otevřené regulační smyčky a byla navržena struktura regulačního systému pro jejich odstranění. Tato struktura byla složena ze dvou zpětnovazebních smyček a dvou PI regulátorů, které byly navrženy na základě aproximativního modelu. Při návrhu regulátorů byl opět kladen důraz na robustnost výsledného systému. Návrhem řízení bylo potlačeno pronikání parazitní složky kmitů do užitečné a byla rozšířena šířka pásma senzoru z původních  $10\text{ Hz}$  v otevřené smyčce senzorického rezonátoru na  $149,7\text{ Hz}$ . Správnost návrhu a dosažení požadované robustnosti

bylo ověřeno na simulačním modelu. Simulace potvrdila splnění návrhových požadavků na robustnost systému vůči perturbacím nominálních hodnot parametrů.

Návrh robustních lineárních regulátorů byl proveden exaktně s matematickými detaily a návrhové požadavky na řízení byly splněny. Kvůli omezenému rozsahu této práce však nemohla být stejná pozornost věnována ostatním částem jako je blok fázového závěsu nebo demodulace signálu. Tyto systémy byly navrženy na základě uvedené literatury a v této diplomové práci byly popsány pouze stručně. Určitě by si zasloužily bližší pojednání a exaktnost v další práci. Dalším pokračováním by mohl být návrh řízení rezonanční frekvence sensorického módu, což bylo v této práci zavedeno formou předpokladu. Před implementací navrženého řízení do reálného MEMS gyroskopu by bylo nezbytné vymodelovat a zohlednit aktuakční a sensorickou elektroniku tvořenou především kondenzátorovými hřebeny. Dalším krokem by byla diskretizace navržených řídicích systémů a jejich implementace do řídicí jednotky senzoru.

# Literatura

- [1] C. Acar and A. M. Shkel, *MEMS vibratory gyroscopes: structural approaches to improve robustness*. Springer, 2009.
- [2] H. Lefevre, *The Fiber-Optic Gyroscope, Second Edition*. Artech House applied photonics series, Artech House Publishers, 2014.
- [3] M. Bohn and N. M. univ Albuquerque, *The TI:Sapphire Ring Laser Gyroscope*. AD-a359 038, New Mexico univ Albuquerque, 1998.
- [4] N. Maluf and K. Williams, *Introduction to Microelectromechanical Systems Engineering*. Artech House microelectromechanical systems (MEMS) series, Artech House, 2004.
- [5] V. Kempe, *Inertial MEMS: Principles and Practice*. Cambridge University Press, 2014.
- [6] M. Egretzberger, *Mathematical Modeling and Control of Micro Electromechanical Gyroscopes*. Modellierung und Regelung komplexer dynamischer Systeme, Shaker, 2010.
- [7] M. Egretzberger, “Decoupled quadrature and force feedback control of capacitive mems gyroscopes,” *18th IFAC World Congress Milano*, pp. 13534–13539, 2011.
- [8] M. Egretzberger, “Model-based control concepts for vibratory mems gyroscopes,” *Mechatronics*, pp. 241–250, 2012.
- [9] C. He, Q. Zhao, Y. Liu, Z. Yang, and G. Yan, “Closed loop control design for the sense mode of micromachined vibratory gyroscopes,” *Science China Technological Sciences*, vol. 56, pp. 1112–1118, May 2013.
- [10] E. Colinet, J. Juillard, L. Nicu, and C. Bergaud, “Digital self-calibration method for mems sensors,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 54, pp. 1438–1443, Aug 2005.
- [11] V. Apostolyuk, *Coriolis Vibratory Gyroscopes - Theory and Design*. Springer, 2016.
- [12] M. Egretzberger, F. Mair, and A. Kugi, “Model-based control concepts for vibratory mems gyroscopes,” *Mechatronics*, vol. 22, no. 3, pp. 241–250, 2012.

- [13] “Coriolisova síla.” [https://cs.wikipedia.org/wiki/Coriolisova\\_s%C3%ADla](https://cs.wikipedia.org/wiki/Coriolisova_s%C3%ADla). Accessed: 2017-10-18.
- [14] D. Xia, C. Yu, and L. Kong, “The development of micromachined gyroscope structure and circuitry technology,” in *Sensors*, 2014.
- [15] J. Fei, *Advanced Control Design of MEMS Vibratory Gyroscopes*. Electrical engineering developments series, Nova Science Publishers, 2011.
- [16] M. Saukoski, “System and circuit design for a capacitive mems gyroscope,” 2008.
- [17] R. E. Best, *Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications*. McGraw-Hill, 2003.
- [18] “Phase-locked loop.” [https://en.wikipedia.org/wiki/Phase-locked\\_loop](https://en.wikipedia.org/wiki/Phase-locked_loop). Accessed: 2017-11-5.
- [19] M. Egretzberger and A. Kugi, “A dynamical envelope model for vibratory gyroscopes,” *Microsystem Technologies*, vol. 16, pp. 777–786, May 2010.
- [20] M. Schlegel and J. Königsmarková, *Učební text pro předmět Automatické řízení*. 2015.
- [21] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996.