ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

VÝRAZY S ODMOCNINAMI

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Diana Vondrovicová

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň 2018

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 30. června 2018

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za cenné odborné rady, trpělivost a čas, který mi věnoval při psaní této bakalářské práci. Dále bych ráda poděkovala své rodině a přátelům za veškerou podporu nejen ve studiu, ale i v každodenním životě.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta pedagogická
Akademický rok: **2016/2017**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Diana VONDROVICOVÁ**
Osobní číslo:	**P15B0021P**
Studijní program:	**B1001 Přírodovědná studia**
Studijní obor:	**Matematická studia**
Název tématu:	**Výrazy s odmocninami**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy**

Zásady pro vypracování:

1. Odmocniny. Surdické výrazy, úpravy.
2. Jmenovatelé obsahující druhé odmocniny. Metoda neurčitých koeficientů.
3. Symetrické polynomy a odmocniny z jedné. Galoisova teorie - úvod.

Rozsah grafických prací:

Rozsah kvalifikační práce: **30 - 50**

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

Berele, A., Catoiu S.: Rationalizing Denominators, Mathematics Magazine, Vol. 88, No. 2 (April 2015), p. 121136.
Dlab, V., Bečvář, J.: Od aritmetiky k abstraktní algebře. SERIFA, Praha, 2016, 1. vydání.
Bicanová, A., Kepka, T., Nováková, E. Sbírka úloh, příkladů a cvičení z algebry. Praha: SPN, 1984. Skriptum MFF UK Praha.
Procházka, L. a kol. Algebra. Praha: Academia, 1990.
Pšenička, J. Surdické výrazy. Rozhledy matematicko-fyzikální. 56 (197778), č. 4, 158161.
Další knižní prameny, časopisy a zdroje na Internetu.

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.**
Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Datum zadání bakalářské práce: **9. června 2017**
Termín odevzdání bakalářské práce: **30. června 2018**

v z.

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D.
děkan

L.S.

Doc. PaedDr. Jarmila Honzíková, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 19. června 2017

Obsah

Seznam zkratek

$=$	rovná se
$\neq$	nerovná se
$>; \geq.$	větší; větší nebo rovno
$<; \leq.$	menší; menší nebo rovno
$(\quad), [\quad], \{\quad\}$	kulatá, hranatá, složená závorka
pro $\forall \boldsymbol{a}$	pro všechna $\boldsymbol{a}$
$\exists$	existuje
$\wedge$	a zároveň
$\vee$	nebo
$\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}$	ekvivalence ($\boldsymbol{a}$ právě tehdy když $\boldsymbol{b}$)
$\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{b}$	implikace (jestliže $\boldsymbol{a}$, potom $\boldsymbol{b}$)
$\in$	náleží
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_{\boldsymbol{0}}$	množina přirozených čísel včetně nuly
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel¨
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}_{\boldsymbol{0}}^{+}$	množina kladných reálných čísel včetně nuly
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$	$\boldsymbol{n}$-tá odmocnina z $\boldsymbol{a}$
$\prod$	součin

Úvod

Téma bakalářské práce „Výrazy s odmocninami“ jsem si zvolila za cílem nabýt nové vědomosti. Dle mého názoru jsou v dnešní době odmocniny probírány jen povrchně a nevěnuje se jim dostatečná pozornost.

Tento dílčí úsek matematiky je studentům nastíněn v průběhu druhého stupně základních škol, kdy se žáci seznámí s novým číselným oborem – racionálními čísly. Zjišťují, že je druhá odmocnina opačnou operací k druhé mocnině, a že tak nelze odmocňovat záporná čísla. Druhé odmocniny, jejichž základem nejsou kvadráty celých čísel, určují pomocí tabulek a kalkulaček. V geometrii pak nově získané znalosti užijí při řešení úloh na Pythagorovu větu.

Studenti středních škol již při výpočtech aplikují základní pravidla při početních operacích. Řeší rovnice s neznámou, obsahující racionální mocniny a usměrňováním hledají ekvivalentní zlomky s celočíselným jmenovatelem. Po obeznámení se s komplexními čísly se už ani „nezaleknou“ záporného základu. Hravě by si měli poradit i s grafem funkce druhé odmocniny a určit její vlastnosti.

Žádné další informace nám sděleny nebyly. A tak se tedy ptám, určitě nám naši učitelé nic nezatajili a tato oblast matematiky je skutečně tak „strohá“? Nebo existují vzorce a různé úskoky pro zjednodušení složitějších výrazů a s odmocninami si lze různě pohrát? Cílem bakalářské práce je najít odpovědi na zmíněné otázky a proniknout s jejich znalostí podobně jako Alenka do říše divů, do světa matematiky.

Kapitola 1

Odmocniny, surdické výrazy, úpravy

1.1 Oddvojmocňování

Opačnou operací k umocňování je **odmocňování**, jímž ze známé mocniny a mocnitele hledáme základ. Zapisujeme: $b^n = a \wedge b \geq 0 \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$ [12, s. 45].

Definice 1.1.1.

Druhá odmocnina z nezáporného reálného čísla a je nezáporné reálné číslo b, pro které platí: $b \cdot b = b^2 = a$. Zapisujeme $b = \sqrt{a}$, čteme „odmocněním čísla a získáme číslo b".

Číslo a se nazývá **základ odmocniny (odmocněnec)** a symbol $\sqrt{}$ **odmocnítko** [9].

Pojem **odmocnítko** vznikl ze zkratky latinského slova radix (kořen) $r = \sqrt{}$ [5, s. 12].

V dnešní době spočteme druhé odmocniny hravě, stačí zadat základ odmocniny do kalkulačky a máme výsledek. Stejně jako dnes, tak i v minulosti děti v měšťanských školách odmocniny z čísel $4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$ znaly nazpaměť, avšak pro výpočet odmocnin z jiných odmocněnců se musely naučit tzv. **oddvojmocňování**. Pro ukázku tehdejšího výkladu této metody je v následujících odstavcích uveden výtah z Početnice pro měšťanské školy dívčí z roku 1886.

Je-li nám dopočítati se druhé odmocniny z čísla 1296, počínáme si takto: $\sqrt{12|96} = .\ .$

a) *Poněvadž odmocněnec má dvakrát tolik míst aneb dvakrát tolik míst bez jednoho, kolik odmocnina, rozdělíme jej na třídy o dvou místech, a to od pravé k levé (poněvadž jednotky odmocniny obsaženy jsou v jednotkách a desítkách a desítky odmocniny ve stech a tisících odmocněnce); v příkladě* $\sqrt{12|96}$ *dopočítáme se dvoumístné odmocniny.*

b) *V první třídě* (12) *jest první část druhé odmocniny; i vyhledáváme tuto určivše největší číslo, jehož mocnina v této třídě jest obsažena; zde jsou to 3, kteréž napíšeme jako první část odmocniny* $\left(\sqrt{12|96} = 3\right)$. *Druhou mocninu tohoto čísla (*$3^2 = 9$) *odečteme od první části i doděláme se zbytku* 3,

$$\left(\begin{array}{c}\sqrt{12|96} = \mathbf{3} \\ 9 \\ \overline{\mathbf{3}}\end{array}\right)$$

k němuž připíšeme následující třídu ($3\mathbf{96}$*).*

c) *Ve zbytku první třídy a v první polovici druhé třídy (tedy ve* 39*), (od kteréhož oddělíme část zbývající* $39|6$*), obsažen jest dvojnásobný součin první a druhé části odmocniny. Jelikož jest nám znám pouze dvojnásobný součin první části* odmocniny (3×2)*, vypočteme druhou část, rozdělivše číslo* 39 *tímto dvojnásobným součinem první části, tedy* 6 $(39|6 : 6)$, 6 *ve* 39 *jest* 6*krát i jest tedy* $\mathbf{6}$ *druhou částí odmocniny, již připíšeme k první části odmocniny* 3,

$$\left(\begin{array}{c}\sqrt{12|96} = \mathbf{3} \\ 9 \\ \hline \quad\quad 39|6 : 6\end{array}\right).$$

Nyní od celého zbytku (396) *odečteme 1) dvojnásobný součin první a druhé části* $(3 \times 6 \times 2 = 36)$ *od* 39 *a 2) druhou mocninu části druhé* $(6^2 = 36)$ *od* 96.

Druhá odmocnina čísla 1296 *jest tedy* 36.

Při rychlém počítání připisujeme také k děliteli druhou část odmocniny, načež takto změněný dělitel druhou částí odmocniny znásobíme a součin ten od zbytku odečteme; v příkladě tom takto:

$$\left(\begin{array}{c}\sqrt{12|96} = 36 \\ 9 \\ \hline \quad\quad 39|6 \div 66 \\ \hline ..\end{array}\right)$$

[5, s. 13]

Ze zadání z Početnice si nyní vypočítejme další příklady.

Příklad 1.1.1. Vypočtěte $\sqrt{625}$.

Řešení:

1) Odmocněnec je trojciferný, rozdělíme jej tedy na dvě třídy $(6|25)$.

2) V první třídě (6) zvolíme největší číslo, jehož mocnina je menší nebo rovna číslu 6. Umocníme-li si čísla 2 a 3 ($2^2 = 4$, $3^2 = 9$) zjistíme, že druhá mocnina čísla 3 není v první třídě obsazena, proto volíme číslo 2, jehož mocnina v ní obsazena je. (2) je tedy první číslicí odmocniny.

3) Od (6) odečteme druhou mocninu první číslice odmocniny (2): $6 - 4 = 2$. K rozdílu připíšeme druhou třídu ($2\mathbf{25}$).

4) Dělenec (225) rozdělíme opět na dvě části ($22|5$). Oddělené číslo 5 připíšeme do výsledku.

5) Nyní již známe výsledek: $\sqrt{625} = 25$.

1.2 Odmocniny s n-tým exponentem

Definice 1.2.1.

Třetí odmocnina z nezáporného reálného čísla a je nezáporné reálné číslo b, pro které platí: $b^3 = a$. Zapisujeme $b = \sqrt[3]{a}$, čteme „odmocněním čísla a získáme číslo b" [10].

V definici 1.1.1. jsou dány dvě podmínky:

1) druhá odmocnina je definována pouze z nezáporného odmocněnce a,

2) druhá odmocnina je vždy nezáporná [9].

Pokud $b \in \mathbb{R} \wedge a \in \mathbb{R}: a < 0 \Rightarrow b^2 \neq a$, neboť druhá mocnina je vždy kladná. Pro reálné záporné a tedy odmocnina neexistuje. Zároveň platí tvrzení, že pro $\forall a \in \mathbb{R}: a \geq \exists b \in \mathbb{R}: b > 0 \vee b < 0: b^2 = a$, neboli pro nezáporné a existují rovnou dvě b. (například rovnost $b^2 = 9$, splňuje $b = \pm 3$). S dvojznačností nastává problém při zadávání odmocniny do početních strojů, neboť vždy vyžadujeme jednoznačný výsledek. Z tohoto důvodu je ve všech zařízeních nastavena podmínka, že odmocnina musí být nezáporná. Počítače či kalkulačky nám proto vždy při výpočtu jakékoliv odmocniny „vrátí“ (řečeno jazykem informatiky) vždy kladné číslo [15, s. 135]

Zatím jsme řešili pouze druhé a třetí odmocniny, existuje však nekonečně mnoho odmocnin, kdy $n \in \mathbb{N}$ může být, jak sudé, tak liché. Všechny tyto odmocniny shrneme v následující definici.

Definice 1.2.2.

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ definujeme ***n*-tou odmocninu** z nezáporného reálného čísla a jako nezáporné reálné číslo b, pro které platí: $b^n = a$. Zapisujeme $b = \sqrt[n]{a}$ [10].

To, co platí o druhých odmocninách, platí obecně o všech odmocninách se sudým exponentem n. Pro odmocniny s lichým n platí: $\forall n \in \mathbb{N} \wedge n$ je liché $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists!\, b \in \mathbb{R}: b^n = a \wedge [(a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)]$. Neboli pro odmocniny s lichým n jsou jednoznačně určeny vždy. Obecně platí: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

$a \geq 0$, n sudé	$\sqrt[n]{a} \geq 0$ (úmluva)
$a \geq 0, n$ liché	$\sqrt[n]{a} \geq 0$ (fakticky)
$a \leq 0, n$ sudé	$\sqrt[n]{a}$ neexistuje
$a \leq 0, n$ liché	$\sqrt[n]{a} \leq 0$ (fakticky)

[15, s. 136]

1.3 Pravidla pro počítání s odmocninami

Nyní si stanovíme základní pravidla pro počítání s odmocninami, která jsou uváděná v učebnicích.

I. Nechť $n \in \mathbb{N}\ \forall a, b \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}_0^+$. Potom platí:

$$a\sqrt[n]{x} \pm b\sqrt[n]{x} = (a \pm b)\sqrt[n]{x}.$$

Pro další početní úkony, kde $\forall m, p \in \mathbb{Z}\ \forall n, q \in \mathbb{N}\ \forall a \in \mathbb{R}_0^+$, zavádíme **lomený exponent**:

$$a^{mn} = (a^m)^n,$$

$$mn = p,$$

$$n = q,$$

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^n,$$

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

II. Nechť $\forall m, p \in \mathbb{Z}\ \forall n, q \in \mathbb{N}\ \forall a \in \mathbb{R}$. Potom platí:

1) $\sqrt[nq]{a^{np}} = a^{\frac{np}{nq}} = \sqrt[q]{a^p}$,

2) $\sqrt[q/m]{a^{p/m}} = a^{\frac{p/m}{q/m}} = a^{\frac{mp}{mq}} = \sqrt[q]{a^p}$,

3) $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$.

III. Nechť $\forall m \in \mathbb{Z}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall a \in \mathbb{R}$. Potom platí:

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (pamatuj: je-li $m < 0 \Rightarrow a > 0$),

2) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$,

3) $k \in \mathbb{N}_0, n \in 2k+1$:

$$\sqrt[n]{(-a)} = -\sqrt[n]{a},$$

$$\sqrt[n]{(-a)^n} = -\sqrt[n]{a^n} = -a,$$

4) $k \in \mathbb{N}_0, n \in 2k$:

$\sqrt[n]{(-a)}$ není definována,

$$\sqrt[n]{(-a)^n} = a.$$

IV. Nechť $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+$. Potom platí:

1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$,

2) $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot a \cdot b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$,

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, pro $b \neq 0$,

[12, s. 48-50], [9].

1.4 Surdické výrazy

Definice 1.4.1.

Surdickým výrazem se myslí každé číslo ve tvaru $a \pm \sqrt{b}$, kde a, b jsou nezáporná racionální čísla a kde b není druhou mocninou žádného racionálního čísla, např. $5 - \sqrt{3}$; $8 + \sqrt{2}$ [4].

Z definice vyplývá, že se surdický výraz skládá z racionální a iracionální části. Dále výrazy, které se liší pouze znaménkem iracionální části nazveme jako **surdické výrazy sdružené**, např. $2+\sqrt{5}$ a $2-\sqrt{5}$ [11, s. 159].

Při řešení polynomických rovnic se můžeme setkat s odmocninou ze surdických výrazů. S odmocninou z dvojčlenu se nedá dále pracovat, proto si odvodíme vzorec pro vyjádření dané odmocniny v jiném tvaru.

Vyjdeme tedy z předpokladu, že odmocnina ze surdického čísla bude také surdické číslo:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = x \pm \sqrt{y}.$$

Námi zadanou rovnici nejprve upravíme umocněním obou jejích stran:

$$a \pm b = x^2 \pm 2x\sqrt{y} + y.$$

Po úpravě musíme vyřešit rovnice o dvou neznámých.

$$1.\, a = x^2 + y$$

$$2.\, \sqrt{b} = x\sqrt{y}$$

Z druhé rovnice si vyjádříme x a následně užijeme dosazovací metodu, díky které získáme kvadratickou rovnici:

$$2.\, \sqrt{b} = x\sqrt{y} \Rightarrow x = \sqrt{b(4y)^{-1}}$$

$$1. \qquad a = \left(\sqrt{b(4y)^{-1}}\right)^2 + y$$

$$a = b(4y)^{-1} + y$$

$$4ay = b + 4y^2$$

$$0 = 4ay - b - 4y^2$$

$$0 = 4y^2 - 4ay + b.$$

Nyní již stačí vyřešit kvadratickou rovnici s neznámou y, kterou pak dosadíme do první rovnice a získáme tak i x.

$$y = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 16b}}{8} = \frac{a \pm \sqrt{16a^2 - 16b}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{b}{2\left(a \pm \sqrt{16a^2 - 16b}\right)}}$$

Pro libovolná kladná reálná čísla a, b taková, že $a \geq \sqrt{b}$ platí:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Pomocí tohoto vzorce lze mnohdy odmocniny převést na jednodušší tvar [4].

Tohoto jednoduššího tvaru lze dosáhnout i jiným způsobem, při kterém využijeme znalosti řešení základních operací surdických výrazů:

$$\left(a + \sqrt{b}\right) + \left(a - \sqrt{b}\right) = 2a,$$

$$\left(a + \sqrt{b}\right) - \left(a - \sqrt{b}\right) = 2\sqrt{b},$$

$$\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b,$$

$$\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} = \frac{\left(a + \sqrt{b}\right)^2}{a^2 - b} = \frac{a^2 + b}{a^2 - b} + \frac{2a\sqrt{b}}{a^2 - b}.$$

Věta 1.4.1.

Součet nebo rozdíl druhých odmocnin dvou sdružených sudických výrazů lze vyjádřit jedinou druhou odmocninou [11, s. 159].

Důkaz věty 1.4.1.

Nechť jsou dány výrazy: $a + \sqrt{b}$, $a - \sqrt{b}$, kde $a > \sqrt{b} \geq 0$.

Součet nebo rozdíl jejich druhých odmocnin je:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}};$$

umocníme jej dvěma a máme:

$$a + \sqrt{b} \pm 2\sqrt{a^2 - b} + a - \sqrt{b} = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2\left(a \pm \sqrt{a^2 - b}\right) \; Q.E.D.$$

Tato výhoda je při výpočtech vhodná pouze tehdy, je-li $a^2 - b^2 = m^2$ [11, s. 159-169].

Podle věty 1.4.1. platí:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)},$$

resp.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)}.$$

Sečtením a odečtením těchto rovnic dostáváme:

$$2\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{2\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)} + \sqrt{2\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)},$$

$$2\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)} - \sqrt{2\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)},$$

čili pokud píšeme rovnice současně:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

[11, s. 160]. Výraz, k němuž jsme se dostali dvěma různými způsoby se na první pohled nezdá jednodušší. Podívejme se proto na následující příklady, v nichž bude jednoduchost onoho výrazu zřetelnější.

Příklad 1.4.1. Vypočtěte

$$\sqrt{32 - 2\sqrt{252}}.$$

Řešení:

$$\sqrt{32 - 2\sqrt{252}} = \sqrt{\frac{32+\sqrt{1024-1008}}{2}} - \sqrt{\frac{32-\sqrt{1024-1008}}{2}} = 3\sqrt{2} - \sqrt{14}$$

Příklad 1.4.2. Vypočtěte

$$\sqrt{16 + 3\sqrt{28}}.$$

Řešení:

$$\sqrt{16+3\sqrt{28}}=\sqrt{\frac{16+\sqrt{256-252}}{2}}+\sqrt{\frac{16-\sqrt{256-252}}{2}}=3+\sqrt{7}$$

Dosud jsme hledali způsob, jak si usnadnit výpočet surdického výrazu, v přechozích námi vypočtených příkladech nám z původních složitých výrazů vždy vyšlo jednodušší číslo. Položme si tedy otázku, lze vyjádřit i přirozené číslo n pomocí surdických výrazů?

Pokud číslo n budeme chtít formulovat základní operací surdických výrazů:

$$n=\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}},$$

jakékoliv takto vyjádřené n musí být sudé, neboť po umocnění toho tvaru získáme:

$$n^2=2a\pm2\sqrt{a^2-b}.$$

Následně za n položme substituci $n=2m$, kde $m\geq0\wedge m\in\mathbb{Z}$:

$$4m^2=2a\pm2\sqrt{a^2-b}.$$

Danou rovnici teď snadno upravíme:

$$2m^2=a\pm\sqrt{a^2-b}$$

$$2m^2-a=\pm\sqrt{a^2-b}$$

$$4m^4-4m^2a+a^2=a^2-b$$

$$4m^4-4m^2a=-b$$

$$b=-4m^4+4m^2a$$

$$b=4m^2(a-m^2).$$

Z rovnice je patrné, že $b\geq0$, zaveďme nový parametr c: nechť $a=m^2+c$, kde $c\geq0\wedge c\in\mathbb{Z}\Rightarrow b=4m^2c$, proto:

$$n^2=4m^2=2(m^2+c)\pm2\sqrt{(m^2+c)^2}.$$

Znaménko mezi výrazy $2(m^2+c)$ a $2\sqrt{(m^2+c)^2}$ bude záviset na parametru c:

pro $c\leq m^2$: $\sqrt{(m^2+c)^2}=m^2-c$, platí:

$$n^2 = 4m^2 = 2(m^2 + c) + 2(m^2 - c)$$

$$n = \sqrt{m^2 + c + 2m\sqrt{c}} + \sqrt{m^2 + c - 2m\sqrt{c}},$$

pro $c \geq m^2$: $\sqrt{(m^2 + c)^2} = c - m^2$, platí rovnost:

$$n^2 = 4m^2 = 2(m^2 + c) - 2(c - m^2)$$

$$n = \sqrt{m^2 + c + 2m\sqrt{c}} - \sqrt{m^2 + c - 2m\sqrt{c}}.$$

Věta 1.4.2.

Vyjádření přirozených čísel *n* ve tvaru:

$$n = \sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}},$$

existuje jen pro sudá čísla n. Je-li $n = 2m$, pak platí:

$$n = \sqrt{m^2 + c + 2m\sqrt{c}} + \sqrt{m^2 + c - 2m\sqrt{c}} = \left(m + \sqrt{c}\right) + \left(m - \sqrt{c}\right),$$

kde $c \in \{0,1,2, \dots, m^2 - 1\}$. Pro $c \in \{0,1,2^2, \dots, (m^2 - 1)\}$ je m rovností redukováno do tvarů:

$$n = m + m = (m + 1) + (m - 1) = \cdots = (m + k) + (m - k) = \cdots = (2m - 1) + 1.$$

Pro $c = m^2$ získáme $n = 2m \pm 0$. Přirozená čísla, která nelze vystihnout v takto zjednodušené podobě nazveme **ryzí** [2, s. 2-3].

Příklad 1.4.3. Vyjádřete pomocí surdických výrazů číslo 8.

Řešení:

Dle věty 2.4.2. je pro $n = 8$, $m = 4$. Číslo 8 lze vyjádřit celkem $8 = m^2 - m$ ryzích surdických součtů.

$$\sqrt{17 + 8\sqrt{1}} + \sqrt{17 - 8\sqrt{1}} = 8$$

$$\sqrt{18 + 8\sqrt{2}} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = 8$$

$$\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}=8$$

$$\sqrt{20+8\sqrt{4}}+\sqrt{20-8\sqrt{4}}=8$$

$$\sqrt{21+8\sqrt{5}}+\sqrt{21-8\sqrt{5}}=8$$

$$\sqrt{22+8\sqrt{6}}+\sqrt{22-8\sqrt{6}}=8$$

$$\sqrt{23+8\sqrt{7}}+\sqrt{23-8\sqrt{7}}=8$$

$$\sqrt{24+8\sqrt{8}}+\sqrt{24-8\sqrt{8}}=8$$

$$\sqrt{24+8\sqrt{9}}+\sqrt{24-8\sqrt{9}}=8$$

$$\sqrt{25+8\sqrt{10}}+\sqrt{25-8\sqrt{10}}=8$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Číslo 8 můžeme definovat operací surdických výrazů nekonečně mnoha způsoby, neboť za c lze zvolit jakékoliv číslo. Kdybychom zvolili $c = 16$, číslo 8 by se mohlo získat jak součtem výrazů, tak i jejich rozdílem:

$$\sqrt{32+8\sqrt{16}}+\sqrt{32-8\sqrt{16}}=8,$$

$$\sqrt{32+8\sqrt{16}}-\sqrt{32-8\sqrt{16}}=8.$$

Pokud by c bylo větší než 16, budeme muset počítat jejich rozdíl a nikoliv součet, jak je popsáno v předcházejícím textu. Ne každý si na tuto podmínku při výpočtu vzpomene, proto je zcela na místě udělat si kontrolu, buď zadáním výpočtu do kalkulátoru, nebo u zdatnějších počtářů alespoň přibližným odhadem.

Pro ukázku si pojďme spočítat vzorec s $c = 17$:

$$\sqrt{33+8\sqrt{17}}+\sqrt{33-8\sqrt{17}}=8{,}246211251,$$

po dosazení do kalkulačky nám vyjde číslo $n = 8$, avšak až po zaokrouhlení výsledku na jednotky.

Pokud naopak surdické výrazy odečteme, získáme $n = 8$ bez jakýchkoliv úprav:

$$\sqrt{33 + 8\sqrt{17}} - \sqrt{33 - 8\sqrt{17}} = 8.$$

S rostoucím c by však už nešlo jen o „pouhé“ desetiny, neboť se zvyšujícím se c by se rozdíl mezi výsledky z chybně užitého vzorce a ze správného samozřejmě nabýval vyšší hodnoty.

Například zadáme-li $c = 247$:

$$\sqrt{263 + 8\sqrt{247}} + \sqrt{263 - 8\sqrt{247}} = 31{,}43246729.$$

Jak můžete vidět, tentokrát se již výsledek od původně očekávaného rapidně zvýšil.

Věta 1.4.3.

Diofantická rovnice $\sqrt{x+b} + \sqrt{x-b} = y$ má celočíselné kořeny $x,\ y$ právě tehdy, když $b \in \mathbb{N} \wedge b = 2r$. Dále mějme $g(r)$, počet všech rozkladů čísla r na součin dvou dělitelů, potom má tato rovnice celkem $g(r)$ řešení. Dále nechť rozkladu čísla r, kdy $r = ms \wedge m \geq s$ odpovídá řešení rovnice: $x = m^2 + s^2$ a $y = 2s$ [2, s. 7].

Důkaz věty 1.4.3.

Dle věty 1.4.3. je b sudé, toto tvrzení již bylo dokázáno dříve, když jsme za n dosadili substituci $2m$ a následně jsme upravili rovnici $4m^2 = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}$. Úpravou jsme pak mohli formulovat neznámou b: $b = 4m^2(a - m^2)$. Z vyjádření je tak sudost čísla b již na první pohled evidentní. Díky sudosti čísla b jej můžeme bez jakýchkoliv obav zapsat ve tvaru $b = 2r$, kde $r \in \mathbb{N}$.

Pokud budeme definovat přirozené číslo n jako:

$$n = 2m = \sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}$$

Nejprve sledem jednoduchých úprav vyjádříme číslo b^2:

$$2m + \sqrt{a-b} = \sqrt{a+b}$$

$$4m^2 + 4m\sqrt{a-b} + a - b = a + b$$

$$4m^2 - 2b = -4m\sqrt{a-b}$$

$$16m^4 - 16m^2b + 4b^2 = 16m^2(a-b)$$

$$16m^4 - 16m^2b + 4b^2 = 16m^2a - 16m^2b$$

$$4b^2 = 16m^2a - 16m^4$$

$$b^2 = 4m^2a - 4m^4.$$

Nyní použijeme substituci $b = 2r$:

$$4r^2 = 4m^2a - 4m^4$$

$$r^2 = m^2a - m^4$$

$$r^2 = m^2(a - m^2),$$

obdržíme tak zajímavý zápis přirozeného čísla r:

$$r = m\sqrt{a - m^2}.$$

Pokud použijeme substituci $\sqrt{a - m^2} = s$, potom $r = ms$.

Pro a platí:

$$\frac{r}{m} = \sqrt{a - m^2}$$

$$\frac{r^2}{m^2} = a - m^2$$

$$a = \frac{r^2}{m^2} + m^2.$$

Po substituci $s^2 = \frac{r^2}{m^2}$ platí: $a = m^2 + s^2$.

Čímž, jsme dokázali, že rozkladu čísla r, kdy $r = ms \wedge m \geq s$ skutečně odpovídá řešení rovnice z věty 2.4.3., tj. $x = m^2 + s^2$ a $y = 2s$. *Q.E.D* [2, s. 5].

Příklad 1.4.4. Vyřešte rovnici $\sqrt{x + 388} + \sqrt{x - 388} = y$

Řešení:

Dle věty 1.4.3. bude mít rovnice celočíselné kořeny, neboť b je sudé přirozené číslo. Nejprve si z rovnice $b = 2r$ vyjádříme r, které poté rozložíme na součin dvou dělitelů (m, s).

Nalezením dvou dělitelů získáme první kořen x, jehož dosazením již snadno vypočteme kořen y:

$$b = 2r,$$

$$b = 388 = 2 \cdot 194,$$

$$r_1 = 1 \cdot 194 \Rightarrow a_1 = x_1 = 1 + 194^2 = 37637,$$

$$r_2 = 2 \cdot 97 \Rightarrow a_2 = x_2 = 2^2 + 97^2 = 9413,$$

$$y_1 = \sqrt{x_1 + 388} + \sqrt{x_1 - 388},$$

$$y_1 = \sqrt{37637 + 388} + \sqrt{37637 - 388},$$

$$y_1 = 388,$$

$$y_2 = \sqrt{x_2 + 388} + \sqrt{x_2 - 388},$$

$$y_2 = \sqrt{9413 + 388} + \sqrt{9413 - 388},$$

$$y_2 = 194.$$

Počet řešení je roven počtu nalezených rozkladů čísla r. Řešením jsou tedy dvě dvojice kořenů, kdy $x_1 = 37637$, $y_1 = 388$ a $x_2 = 9413$, $y_2 = 194$.

Ve větě 1.4.3. jsme zmínili $g(r)$, počet všech rozkladů čísla r na součin dvou dělitelů. Jak jej však zjistíme?

Nechť $r = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ je přirozené číslo dáno prvočíselným rozkladem, kde p_j jsou různá prvočísla a k_j jsou kladné exponenty těchto prvočísel pro $1 \leqq j \leqq t$. Neboť všechny dělitele s čísla r lze definovat rovností $s = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_t^{l_t}$, kde $0 \leq l_j \leq k_j$. Přesný počet všech dělitelů $d(r)$ vypočítáme z rovnice $d(r) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_t + 1)$. Se znalostí $d(r)$ již snadno určíme $g(r)$:

$g(r) = \frac{1}{2}(d(r) + 1)$, jestliže $r = e^2 \wedge e \in \mathbb{N}$

$g(r) = \frac{1}{2} d(r)$, pokud $r \neq e^2$ [2, s. 6].

Příklad 1.4.5. Určete r, $d(r)$, $g(r)$, když $b = 544$.

Řešení:

1) Nejprve určíme r:

$$b = 2r$$

$$544 = 2r$$

$$r = 272.$$

2) Číslo 272 nyní rozložíme na součin prvočísel:

$$272 = 2 \cdot 136 = 2 \cdot 2^2 \cdot 34 = 2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 17 = 2^4 \cdot 17.$$

3) Teď již snadno zjistíme počet dělitelů:

$$d(r) = (4 + 1)(1 + 1) = 10.$$

4) Počet všech rozkladů čísla 272 na součin dvou dělitelů vypočteme ze vzorce $\frac{1}{2}d(r)$, neboť $\sqrt{272} = 4\sqrt{17}$, tj. $e \notin \mathbb{N}$:

$$g(r) = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

Příklad 1.4.6. Určete r, $d(r)$, $g(r)$, když $b = 1152$.

Řešení:

Využijeme postup užitý při řešení přechozího příkladu.

1) Zjistíme r:

$$b = 2r$$

$$1152 = 2r$$

$$r = 576.$$

2) Číslo 576 vyjádříme součinem prvočísel:

$$576 = 24 \cdot 24 = 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 =\cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3 = 2^6 \cdot 3^2.$$

3) Určíme počet dělitelů:

$$d(r) = (6 + 1)(2 + 1) = 21.$$

4) Počet všech rozkladů čísla 576 na součin dvou dělitelů vypočteme tentokrát ze vzorce, $\frac{1}{2}(d(r)+1)$, neboť $\sqrt{576}=24$, tj. $e \in \mathbb{N}$:

$$g(r)=\frac{1}{2}(21+1)=11.$$

Počet všech rozkladů čísla 576 ve tvaru ms je tedy 11.

Věta 1.4.4.

Pro $\forall n, m \in \mathbb{N}$, kde $n = 2m$ $\exists!$ vyjádření s přirozenými čísly a, b, c ve tvaru:

$$n=\frac{1}{\sqrt{a+b\sqrt{c}}}+\sqrt{a+b\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a-b\sqrt{c}}}+\sqrt{a-b\sqrt{c}}.$$

Pro čísla a, b, c platí: $a=2m^2-1, b=2m, c=m^2-1$.

Zároveň existuje i právě jedna rovnost

$$n=-\frac{1}{\sqrt{a+b\sqrt{c}}}+\sqrt{a+b\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a-b\sqrt{c}}}-\sqrt{a-b\sqrt{c}},$$

kde pro čísla a, b, c platí: $a=2m^2+1, b=2m, c=m^2+1$ [2, s. 8].

Příklad 1.4.7. Ověřte první rovnost výrazů z věty 2.4.4. pro $n = 4$.

Řešení:

Ze vzorců pro první rovnost věty 2.4.4. vypočteme čísla a, b, c:

$$a=2m^2-1=2\cdot 4-1=7,$$

$$b=2m=2\cdot 2=4\,,$$

$$c=m^2-1=4-1=3.$$

1) Ověříme rovnost $n=\frac{1}{\sqrt{a+b\sqrt{c}}}+\sqrt{a+b\sqrt{c}}$:

$$4=\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

$$4-\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$$

$$16 - 8\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + 7 + 4\sqrt{3} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$$

$$16 - 8\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + 7 + 4\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$16 + 8\sqrt{3} = 8\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

$$2 + \sqrt{3} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

$$4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$7 + 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3}.$$

2) Ověříme i pravou stranu vyjádření, tedy rovnost $n = \frac{1}{\sqrt{a - b\sqrt{c}}} - \sqrt{a - b\sqrt{c}}$:

$$4 = \frac{1}{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$4 - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$4 - 8\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + 7 - 4\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$16 - 8\sqrt{3} = 8\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$2 - \sqrt{3} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$4 - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$7 - 4\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}.$$

V obou šetřeních jsme sledem jednoduchých úprav dokázali platnost první rovnosti, rovnost $n = -\frac{1}{\sqrt{a+b\sqrt{c}}} + \sqrt{a + b\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a-b\sqrt{c}}} - \sqrt{a - b\sqrt{c}}$ bychom ověřili obdobným způsobem.

Nyní už víme, že každé přirozené sudé číslo můžeme definovat matematickými operacemi druhých odmocnin ze surdických výrazů. Pro lichá čísla jsme však zatím žádnou definici vyjádření prostřednictvím surdických výrazů nezmínili. Na povrch se tak dere otázka, zda existuje nějaký způsob vyjádření těmito výrazy i u lichých čísel.

Pro $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 2$ definujme přirozené číslo a ve tvaru: $2a = n(n^2 - 3)$. Tato rovnost platí vždy, neboť při libovolné volbě n je $n(n^2 - 3)$ sudým číslem. Z definice vyplývá rovnost (1):

$$n = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$$

kterou lze ověřit dvěma způsoby. Buď jejím umocněním na třetí a dalšími matematickými úpravami, nebo z výše uvedené definice přirozeného čísla a.

Rovnici $2a = n(n^2 - 3)$ umocníme na druhou a od každé její strany odečteme číslo 4:

$$a^2 - 4 = n^2(n^2 - 3)^2 - 4$$

$$a^2 - 1 = \frac{1}{4} \cdot [n^2(n^2 - 3)^2 - 4].$$

Nyní upravíme pravou stranu rovnice:

$$\begin{aligned} a^2 - 1 &= \frac{1}{4} \cdot [n^2(n^4 - 6n^2 + 9) - 4] = \frac{1}{4} \cdot (n^6 - 6n^4 + 9n^2 - 4) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (n^6 - 6n^4 + 9n^2 - 4) = \frac{1}{4} \cdot (n^2 - 1)^2(n^2 - 4). \end{aligned}$$

Teď již snadno vyjádříme výraz $\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}}$:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} &= \sqrt[3]{\frac{n(n^2 - 3)}{2} + \sqrt{\frac{(n^2 - 1)^2(n^2 - 4)}{4}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \left[n^3 - 3n + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4}\right]} = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2 - 4}}{2}. \end{aligned}$$

Poslední rovnost lze snadno dokázat:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2 - 4}}{2}\right)^3 &= \frac{1}{8} \cdot \left(n + \sqrt{n^2 - 4}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(n^3 + 3n^2\sqrt{n^2 - 4} + 3n(n^2 - 4) + (n^2 - 4)\sqrt{n^2 - 4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[n^3 - 3n + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4}\right]. \end{aligned}$$

Podobně získáme i výraz $\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-1}}$:

$$\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-1}} = \sqrt[3]{\frac{n(n^2-3)}{2} - \sqrt{\frac{(n^2-1)^2(n^2-4)}{4}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\left[n^3-3n-(n^2-1)\sqrt{n^2-4}\right]} = \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n^2-4}}{2}.$$

Upravme rovnost $2a = n(n^2-3)$:

$$2a = n^3 - 3n$$

$$n^3 - 3n - 2a = 0.$$

Z úpravy je na první pohled zřejmé, že je n kořenem kubické rovnice. Pro nalezení dané rovnice existuje tzv. Tartagliův vzorec, který mnozí z nás znají jako Cardonův vzorec. Tento vzorec (1) jsme již v textu uvedli [3, s. 1-2].

Příklad 1.4.8. Vyjádřete přirozené číslo 14 vzorcem (1)

Řešení:

Abychom mohli vyjádřit číslo 14, nejprve musíme vypočítat neznámou a:

$$2a = 14^3 - 42$$

$$a = 1351.$$

Teď již stačí dosadit do vzorce:

$$14 = \sqrt[3]{1351+\sqrt{1825200}} + \sqrt[3]{1351-\sqrt{18252001}}$$

$$= \sqrt[3]{1351+780\sqrt{3}} + \sqrt[3]{1351-780\sqrt{3}}.$$

Příklad 1.4.9. Vyjádřete přirozené číslo 52 vzorcem (1)

Řešení:

$$2a = 52^3 - 156$$

$$a = 70226$$

Číslo a nyní dosadíme do vzorce:

$$52 = \sqrt[3]{70226 + \sqrt{4931691075}} + \sqrt[3]{70226 - \sqrt{4931691075}}$$

$$= \sqrt[3]{70226 + 40545\sqrt{3}} + \sqrt[3]{70226 - 40545\sqrt{3}}.$$

Věta 1.4.5.

Nechť pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí rovnost $n = \sqrt[3]{a + b\sqrt{c}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{c}}$, kde $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge a \neq 0$. Potom lichá čísla n, kdy $n = 2k - 1$ a pro $\forall k, t \in \mathbb{Z}$ platí $k \geq 1 \wedge \mathrm{t} \geq 0$, lze zapsat do tvaru:

$$n = \sqrt[3]{\left[k^3 - \frac{3}{2}k^2 + \frac{9}{2}k - 2 + (6k - 3)t\right] + \left(\frac{3}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + 1 + t\right)\sqrt{5 + 8t}}$$

$$+ \sqrt[3]{\left[k^3 - \frac{3}{2}k^2 + \frac{9}{2}k - 2 + (6k - 3)t\right] - \left(\frac{3}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + 1 + t\right)\sqrt{5 + 8t}}.$$

Pro sudá přirozená čísla $n = 2k$, kdy pro $\forall k, t \in \mathbb{Z}$ platí $k \geq 0 \wedge \mathrm{t} \geq 0$, je dána rovnost:

$$n = \sqrt[3]{(k^3 + 3kt) + (3k^2 + t)\sqrt{t}} + \sqrt[3]{(k^3 + 3kt) - (3k^2 + t)\sqrt{t}}.$$

Dle věty 1.4.5. lze tedy vyjádřit surdickými výrazy všechna přirozená čísla [3, s. 2-3]!

Příklad 1.4.10. Pomocí věty 1.4.5. vyjádřete přirozená čísla, kdy:

a) $n = 9$,

b) $n = 42$.

Řešení:

a) 9 je číslo liché, proto platí: $9 = 2k - 1 \Rightarrow k = 5$.

$$9 = \sqrt[3]{108 + 27t + (31 + t)\sqrt{5 + 8t}} + \sqrt[3]{108 + 27t - (31 + t)\sqrt{5 + 8t}}$$

b) 42 je číslo sudé, proto platí: $42 = 2k \Rightarrow k = 21$.

$$42 = \sqrt[3]{(9261 + 63t) + (882 + t)\sqrt{t}} + \sqrt[3]{(9261 + 63t) - (882 + t)\sqrt{t}}$$

Důkaz věty 1.4.5. je uveden v Rozhledech matematicko-fyzikálních (Dlab, Fišerová, 2017, s. 5-6).

Kapitola 2

Jmenovatelé obsahující druhé odmocniny, metoda neurčitých koeficientů

2.1 Usměrňování zlomků

Na školách je v matematice usměrňování zlomků běžným tématem. Pokud máme zadaný zlomek, který má ve jmenovateli druhou odmocninu, chceme najít ekvivalentní zlomek, jehož jmenovatelem bude celé číslo. Nejčastěji se setkáváme s dvěma nejjednoduššími případy. Buď je jmenovatel jednočlenný, kdy po roznásobení zlomků vyjde ve jmenovateli bez jakýchkoliv dalších úprav celé číslo, například

$$\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Nebo je ve jmenovateli součet či rozdíl dvou odmocnin nebo odmocniny a celého čísla. V těchto příkladech využijeme znalosti vzorce $(a-b)(a+b) = a^2 + b^2$, například

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{7-2} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}.$$

Zlomky usměrňujeme, abychom si usnadnili řešení příkladů. V druhé kapitole jsme viděli, jak relativně obtížný býval výpočet odmocniny v období, kdy nebyly k dispozici žádné kalkulátory. Zlomky typu $(\sqrt{7}-\sqrt{2})/5$ by měly jít spočítat jednodušeji než zlomky typu $1/(\sqrt{7}+\sqrt{2})$. I když se nejedná o příliš velký problém, úprava zlomků do akceptovanější podoby je velmi užitečná nejen pro usnadnění kontroly odpovědí studentů s jedním řešícím postupem, ale i pro běžné výpočty. Usměrňování zlomků je významné i pro teorii matematiky, například pro pochopení struktury tělesa lineárních funkcí

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \left\{\frac{x+y\cdot\alpha}{s+t\cdot\alpha} : x,y,s,t \in \mathbb{Q}, (s,t) \neq (0,0)\right\},$$

kde je α kořenem nerozložitelného polynomu $x^2 + bx + c$ s $b, c \in Q$. Shoduje se s oborem integrity lineárních polynomů $\mathbb{Q}[\alpha] = \{x + y\cdot\alpha : x, y \in \mathbb{Q}\}$ (součin dvou takových polynomů bude opět lineární, protože $\alpha^2 = -c - b\alpha$).

První dva uvedené typy zlomků usměrníme vždy. Položme si však otázku, dokážeme usměrnit i zlomky, které mají ve jmenovateli tři či více druhých odmocnin, nebo zlomky s jmenovateli obsahující čísla s různými racionálními mocninami? U těchto zlomků již není na první pohled zřejmé, zda je dokážeme usměrnit. V následujícím textu si pro usměrňování postupně představíme několik algoritmů a v závěru textu bakalářské práce i důkazy toho, že zlomky mohou být usměrněny vždy. Během této cesty za odpovědí si vysvětlíme pár zajímavých myšlenek z oblasti lineární algebry, teorie symetrických funkcí, teorie rozšíření těles a teorie algebraických čísel. Nejprve se podíváme na případ, kdy se ve jmenovateli zlomku vyskytuje rozdíl dvou *n* – tých odmocnin [1, s. 121-122].

2.2 Dvoučlenní jmenovatelé s *n* – týmy odmocninami

Pokud je ve zlomku dvojčlenný jmenovatel $a - b$, můžeme jej usměrnit využitím vzorce pro rozdíl dvou $n -$ tých mocnin, za předpokladu, že a i b jsou $n -$ té odmocniny.

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}) = a^n - b^n, \qquad (2)$$

Pokud užijeme substituci $(-b) = b$ vzorec (2) můžeme napsat ve tvaru:

$$(a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots \pm b^{n-1}) = a^n \pm b^n$$

[1, s. 122].

Příklad 2.2.1. Usměrněte zlomek

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{3}}.$$

Řešení:

Dle vzorce (2) je najdeme výraz:

$$\left(\sqrt[3]{25}\right)^2 + \sqrt[3]{25}\sqrt[3]{3} + \left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = 5\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{9}.$$

Zlomek usměrníme, jestliže roznásobíme čitatel i jmenovatel nalezeným výrazem:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{3}} \cdot \frac{5\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{9}}{5\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{9}} = \frac{5\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{9}}{25 - 3} = \frac{5\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{9}}{22}.$$

Příklad 2.2.2. Usměrněte zlomek

$$\frac{1}{\sqrt[5]{9}-\sqrt[5]{5}}.$$

Řešení:

K usměrnění užijeme výraz:

$$\left(\sqrt[5]{9}\right)^4+\left(\sqrt[5]{9}\right)^3\sqrt[5]{5}+\left(\sqrt[5]{9}\right)^2\left(\sqrt[5]{5}\right)^2+\sqrt[5]{9}\left(\sqrt[5]{5}\right)^3+\left(\sqrt[5]{5}\right)^4,$$

který lze také napsat ve tvaru:

$$3\sqrt[5]{27}+3\sqrt[5]{3}\sqrt[5]{5}+3\sqrt[5]{\frac{1}{3}}\sqrt[5]{25}+\sqrt[5]{9}\sqrt[5]{125}+\sqrt[5]{625}.$$

Nyní zlomek usměrníme:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{9}-\sqrt[5]{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{9}-\sqrt[5]{5}}\cdot\frac{3\sqrt[5]{27}+3\sqrt[5]{3}\sqrt[5]{5}+3\sqrt[5]{\frac{1}{3}}\sqrt[5]{25}+\sqrt[5]{9}\sqrt[5]{125}+\sqrt[5]{625}}{3\sqrt[5]{27}+3\sqrt[5]{3}\sqrt[5]{5}+3\sqrt[5]{\frac{1}{3}}\sqrt[5]{25}+\sqrt[5]{9}\sqrt[5]{125}+\sqrt[5]{625}}$$

$$=\frac{3\sqrt[5]{27}+3\sqrt[5]{3}\sqrt[5]{5}+3\sqrt[5]{\frac{1}{3}}\sqrt[5]{25}+\sqrt[5]{9}\sqrt[5]{125}+\sqrt[5]{625}}{4}.$$

Jak získáme ekvivalentní zlomek, jestliže bude ve jmenovali součet či rozdíl čísel s různými racionálními mocninami, např. $\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}$?

Řešení nalezneme třemi postupy. Jednou z možností je převedení na společnou mocninu:

$\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}=5^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{3}{6}}-2^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{125}-\sqrt[6]{4},$

Pak už jen opět roznásobíme čitatel s jmenovatelem výrazem:

$$\left(\sqrt[6]{125}\right)^5+\left(\sqrt[6]{125}\right)^4\sqrt[6]{4}+\left(\sqrt[6]{125}\right)^3\left(\sqrt[6]{4}\right)^2+\left(\sqrt[6]{125}\right)^2\left(\sqrt[6]{4}\right)^3+\sqrt[6]{125}\left(\sqrt[6]{4}\right)^4+\sqrt[6]{25}.$$

Druhou metodou je individuální rozdělení odmocnin. Pro odstranění druhé odmocniny bychom roznásobili zlomek výrazem $(\sqrt{5}+\sqrt[3]{2})$, který by upravil jmenovatel na číslo $\left(5-\sqrt[3]{4}\right)$. Potom bychom mohli odstranit třetí odmocninu roznásobením čitatele a jmenovatele výrazem $\left(25+5\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}\right)$. Kdybychom chtěli užít třetí způsob řešení, zbavili bychom se nejprve $\sqrt[3]{2}$ roznásobením výrazem $\left(5-\sqrt{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$. Obdrželi bychom tak jmenovatel $\left(5\sqrt{5}+2\right)$ Pak by jej stačilo roznásobit číslem $\left(5\sqrt{5}-2\right)$. Pro procvičení si v následujícím příkladu projdeme všechny metody řešení [1, s. 122].

Příklad 2.2.3. Usměrněte zlomek

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}}.$$

Řešení:

1) Čísla ve jmenovateli převedeme na společnou racionální mocninu:

$$\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}=5^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{6}}+3^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{5^2}-\sqrt[6]{3^3}.$$

Takto upravený jmenovatel usměrníme výrazem:

$$\left(\sqrt[6]{25}\right)^5+\left(\sqrt[6]{25}\right)^4\sqrt[6]{27}+\left(\sqrt[6]{25}\right)^3\left(\sqrt[6]{27}\right)^2+\left(\sqrt[6]{25}\right)^2\left(\sqrt[6]{27}\right)^3+\sqrt[6]{25}\left(\sqrt[6]{27}\right)^4$$
$$+\left(\sqrt[6]{27}\right)^5=5\sqrt[6]{625}+5\sqrt[6]{25}\sqrt[6]{27}+15+3\sqrt[6]{27}\sqrt[6]{625}+9\sqrt[6]{25}.$$

2) Nejprve se zbavíme druhé odmocniny:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5^2}-3}.$$

Třetí odmocninu z 25 odstraníme z jmenovatele výrazem $\left(\sqrt[3]{25}\right)^2+\sqrt[3]{25}\cdot 3+9$:

$$\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5^2}-3}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5^2}-3}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{25}\right)^2+\sqrt[3]{25}\cdot 3+9}{\left(\sqrt[3]{25}\right)^2+\sqrt[3]{25}\cdot 3+9}$$
$$=\frac{5\sqrt[3]{25}+15+9\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}\sqrt[3]{625}-3\sqrt{3}\sqrt[3]{25}-9\sqrt{3}}{25+15\sqrt[3]{5}+9\sqrt[3]{25}-3\sqrt[3]{625}-9\sqrt[3]{25}-27}$$
$$=\frac{-15+9\sqrt{3}-9\sqrt[3]{5}-5\sqrt[3]{25}+5\sqrt{3}\sqrt[3]{5}+3\sqrt{3}\sqrt[3]{25}}{2}.$$

3) Nejdříve odstraníme třetí odmocniny:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}\sqrt{3}+3}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}\sqrt{3}+3}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}\sqrt{3}+3}{5+3\sqrt{3}}.$$

Druhá odmocnina zmizí ze jmenovatele, pokud jej roznásobíme číslem $5-3\sqrt{3}$:

$$\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}\sqrt{3}+3}{5+3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}\sqrt{3}+3}{5+3\sqrt{3}}\cdot\frac{5-3\sqrt{3}}{5-3\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5\sqrt[3]{25}-5\sqrt[3]{5}\sqrt{3}-15-3\sqrt{3}\sqrt[3]{25}+9\sqrt[3]{5}-9\sqrt{3}}{25-27}$$
$$=\frac{-15+9\sqrt{3}-9\sqrt[3]{5}-5\sqrt[3]{25}+5\sqrt{3}\sqrt[3]{5}+3\sqrt{3}\sqrt[3]{25}}{2}.$$

2.3 Vícečlenní jmenovatelé s druhými odmocninami

Libovolné zlomky s dvojčlenným jmenovatelem již umíme bez problémů usměrnit. Jak ale postupovat, pokud bude mít jmenovatel tři a více členů? Metodu pro usměrnění těchto zlomků si ukážeme v příkladu 2.3.1., kdy bude jmenovatel součtem tří druhých odmocnin.

Příklad 2.3.1. Usměrněte zlomek

$$\frac{1}{2\sqrt{5}+\sqrt{7}-3\sqrt{2}}.$$

Řešení:

Při řešení využijeme znalosti vzorce $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, tříčlenný jmenovatel tedy rozdělíme na dvě části: $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$ a $3\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{5}+\sqrt{7}-3\sqrt{2}}=\frac{1}{\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)-3\sqrt{2}}\cdot\frac{\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)+3\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)+3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{\left[4\left(\sqrt{5}\right)^2+4\sqrt{5}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2\right]-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{20+4\sqrt{35}+7-18}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{9+4\sqrt{35}}$$

Ve jmenovateli jsme tedy zredukovali tři druhé odmocniny na jednu. Tento jmenovatel usměrníme číslem $9-4\sqrt{35}$.

$$\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{9+4\sqrt{35}}=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{9+4\sqrt{35}}\cdot\frac{9-4\sqrt{35}}{9-4\sqrt{35}}$$
$$=\frac{18\sqrt{5}+9\sqrt{7}+27\sqrt{2}-8\sqrt{175}-4\sqrt{245}-12\sqrt{70}}{9^2-\left(4\sqrt{35}\right)^2}$$
$$=\frac{18\sqrt{5}+9\sqrt{7}+27\sqrt{2}-40\sqrt{7}-28\sqrt{5}-12\sqrt{70}}{81-560}$$
$$=\frac{27\sqrt{2}-10\sqrt{5}-31\sqrt{7}-12\sqrt{70}}{-479}=\frac{-27\sqrt{2}+10\sqrt{5}+31\sqrt{7}+12\sqrt{70}}{479}$$

Příklad 2.3.2. Usměrněte zlomek

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}.$$

Řešení:

Tříčlenný jmenovatel opět rozdělíme na dvě části: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ a $\sqrt{6}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{6}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\left[\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right]-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2+2\sqrt{6}+3-6}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{-1+2\sqrt{6}}$$

Upravený jmenovatel nyní rozšíříme číslem$\left(-1-2\sqrt{6}\right)$:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{-1+2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{-1+2\sqrt{6}}\cdot\frac{-1-2\sqrt{6}}{-1-2\sqrt{6}}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-2\sqrt{12}-2\sqrt{18}+12}{(-1)^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}$$
$$=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}+12}{1-24}=\frac{-7\sqrt{2}-5\sqrt{3}+\sqrt{6}+12}{-23}$$
$$=\frac{7\sqrt{2}+5\sqrt{3}-\sqrt{6}-12}{23}.$$

Usměrnění zlomků se zdařilo, ale bylo to náročnější. V dnešní počítačové době bychom se rádi poohlédli po nějaké počítačové kontrole. V programu Maple existuje povel radnormal, který se dá využít k usměrnění zlomku obsahujícího odmocniny, starším výrazem tzv. radikály. Povel radnormal tedy naznačuje, že zlomek obsahující radikály může být uveden do „normálního“ tvaru.

$a := \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 6^{\frac{1}{2}}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

radnormal (a)

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{2}}$$

radnormal (a,‘rationalized‘)

$$\frac{5}{23}\sqrt{3} - \frac{1}{23}\sqrt{3}\sqrt{2} - \frac{12}{23} + \frac{7}{23}\sqrt{2}$$

Vidíme, že počítač po zadání parametru *rationalized* vydá stejný výsledek, k jakému jsme dospěli „ručně“.

Obdobně při zadání

$a := \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}} - 10^{\frac{1}{2}}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{10}}$$

radnormal (a)

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2}\sqrt{5}}$$

radnormal (a,‘rationalized‘)

$$\frac{3}{31}\sqrt{2}\sqrt{5} + \frac{7}{31}\sqrt{5} + \frac{13}{31}\sqrt{2} + \frac{20}{31}$$

Pro kontrolu si pojďme tento příklad přepočítat „ručně“.

Příklad 2.3.3. Usměrněte zlomek

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{10}}.$$

Řešení:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{10}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{10}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\left[\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2\right]-\left(\sqrt{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{2+2\sqrt{10}+5-10}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{-3+2\sqrt{10}}$$

Výsledný zlomek opět musíme znovu usměrnit, rozšíříme jej číslem$\left(-3-2\sqrt{10}\right)$:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{-3+2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{-3+2\sqrt{10}}\cdot\frac{-3-2\sqrt{10}}{-3-2\sqrt{10}}$$

$$=\frac{-3\sqrt{2}-3\sqrt{5}-3\sqrt{10}-2\sqrt{2}\sqrt{10}-2\sqrt{5}\sqrt{10}-2\sqrt{10}\sqrt{10}}{(-3)^2-\left(2\sqrt{10}\right)^2}$$

$$=\frac{-3\sqrt{2}-3\sqrt{5}-3\sqrt{10}-4\sqrt{5}-10\sqrt{2}-20}{9-40}$$

$$=\frac{-13\sqrt{2}-7\sqrt{5}-3\sqrt{10}-20}{-31}=\frac{13\sqrt{2}+7\sqrt{5}+3\sqrt{10}+20}{31}.$$

Tento způsob řešení můžeme užít pouze v případě, kdy ve jmenovateli bude součet maximálně pěti odmocnin. Pokud umocníme součet dvou odmocnin, zbude nám jedna odmocnina, pokud umocníme součet tří, zůstanou tři. Ale pokud umocníme součet čtyř nebo více odmocnin, získáme odmocnin více [1, s. 123]!

Existuje finta, díky níž lze využít naši metodu pro jakýkoliv počet odmocnin. Postupné redukování počtu odmocnin musíme nahradit zmenšením prvočíselného dělitele. Dále nechť $\{p_1, \dots, p_k\}$ je množina prvočísel, která dělí minimálně jednu odmocninu. Jmenovatel definujme výrazem $A+B$, kde B je součtem všech čísel ve tvaru $\sqrt{p_k a}$ a A je rovno součtu ostatních čísel případně nulou. Nejčastější a zároveň nejlepší volbou pro B je substituce $B=C\sqrt{p_k}$, potom dostáváme jmenovatel ve tvaru $A+C\sqrt{p_k}$. Zlomek s uvedeným jmenovatel pak můžeme snadno usměrnit, stačí jen roznásobit čitatel a jmenovatel číslem $A-C\sqrt{p_k}$. Užíváme tedy opět vzorce $(a-b)(a+b)=a^2+b^2$, proto nás výraz $A^2-C^2p_k$ ve jmenovateli nemůže nikterak zaskočit. I když do výrazu ve tvaru $A^2-C^2p_k$ můžeme zahrnout více odmocnin, lze jej užít pouze pro množinu prvočísel $\{p_1, \dots, p_{k-1}\}$. Opakováním tohoto postupu nanejvýš $k-1-$ krát se postupně zbavíme všech odmocnin ve jmenovateli [1, s. 123].

Příklad 2.3.4.

Pokud usměrňujeme jmenovatel $2\sqrt{10}-3\sqrt{6}+\sqrt{15}$, volíme prvočísla: $p_1=2, p_2=3, p_3=5$. Jmenovatel upravíme do tvaru $A+C\sqrt{p_k}$ podle posledního prvočísla 5.

$2\sqrt{10}-3\sqrt{6}+\sqrt{15}=\left(-3\sqrt{6}\right)+\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{5}=A_1+C_1\sqrt{5}.$

Takto upravený jmenovatel roznásobíme výrazem $A_1-C_1\sqrt{5}$:

$$\left(-3\sqrt{6}\right)^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 5=54-\left(8+4\sqrt{6}+3\right)5=-1-20\sqrt{6}.$$

Nově získané číslo upravíme do tvaru $A+C\sqrt{p_k}$ podle posledního prvočísla 3:

$$-1-20\sqrt{6}=(-1)+\left(-20\sqrt{2}\right)\sqrt{3}=A_2+C_2\sqrt{3}.$$

Nyní číslo ve tvaru $A_2+C_2\sqrt{3}$ roznásobíme výrazem $A_2-C_2\sqrt{3}$:

$$(-1)^2-\left(-20\sqrt{2}\right)^2 3=1-2400=-2399.$$

Získáváme upravený zlomek po umocnění:

$$\frac{1}{2\sqrt{10}-3\sqrt{6}+\sqrt{15}}=\frac{\left(A_1-C_1\sqrt{5}\right)\left(A_2-C_2\sqrt{3}\right)}{-2399}.$$

Provedeme-li popsané výpočty numericky, vyjde:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{10}-3\sqrt{6}+\sqrt{15}}&=\frac{\left[\left(-3\sqrt{6}\right)-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{5}\right]\left[(-1)-\left(-20\sqrt{2}\right)\sqrt{3}\right]}{-2399}\\&=\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{10}+\sqrt{15}-360-80\sqrt{15}-60\sqrt{10}}{-2399}\\&=\frac{3\sqrt{6}-58\sqrt{10}-79\sqrt{15}-360}{-2399}.\end{aligned}$$

Příklad 2.3.5. Usměrněte zlomek

$$\frac{1}{3\sqrt{22}+\sqrt{33}+7\sqrt{6}}.$$

Řešení:

Pro usměrnění jmenovatele zvolíme prvočísla: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 11$.

Nejprve upravíme jmenovatel do tvaru $A + C\sqrt{p_k}$, podle prvočísla $p_3 = 11$:

$$3\sqrt{22} + \sqrt{33} + 7\sqrt{6} = \left(7\sqrt{6}\right) + \left(3\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\sqrt{11} = A_1 + C_1\sqrt{11}.$$

Upravený jmenovatel roznásobíme výrazem $A_1 - C_1\sqrt{11}$:

$$\left[\left(7\sqrt{6}\right) + \left(3\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\sqrt{11}\right]\left[\left(7\sqrt{6}\right) - \left(3\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\sqrt{11}\right] = \left(7\sqrt{6}\right)^2 - \left[\left(3\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\sqrt{11}\right]^2$$
$$= 294 - \left(18 + 6\sqrt{6} + 3\right)11 = 294 - \left(231 + 66\sqrt{6}\right) = 63 - 66\sqrt{6}.$$

Nově získaný jmenovatel opět upravíme do tvaru $A + C\sqrt{p_k}$, nyní podle prvočísla $p_2 = 3$:

$$63 - 66\sqrt{6} = (63) + \left(-66\sqrt{2}\right)\sqrt{3} = A_2 + C_2\sqrt{3}.$$

Získané číslo v základním tvaru $A + C\sqrt{p_k}$ roznásobíme číslem $A_2 - C_2\sqrt{3}$:

$$\left[(63) + \left(-66\sqrt{2}\right)\sqrt{3}\right]\left[(63) - \left(-66\sqrt{2}\right)\sqrt{3}\right] = (63)^2 - \left(-66\sqrt{2}\right)^2 3 = 3969 - 26136$$
$$= -22167.$$

Číslo (-22167) je tak jmenovatelem usměrněného zlomku.

Nyní dopočteme numericky i čitatel nového tvaru zlomku:

$$\frac{1}{3\sqrt{22} + \sqrt{33} + 7\sqrt{6}} = \frac{\left(A_1 - C_1\sqrt{11}\right)\left(A_2 - C_2\sqrt{3}\right)}{-22167}$$
$$= \frac{\left[\left(7\sqrt{6}\right) - \left(3\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\sqrt{11}\right]\left[(63) - \left(-66\sqrt{2}\right)\sqrt{3}\right]}{-22167}$$
$$= \frac{441\sqrt{6} - 189\sqrt{22} - 63\sqrt{33} + 2772 - 396\sqrt{33} - 198\sqrt{22}}{-22167}$$
$$= \frac{441\sqrt{6} - 387\sqrt{22} - 459\sqrt{33} + 2772}{-22167}.$$

2.4 Více o druhých odmocninách ve jmenovateli

V této další části druhé kapitoly zavedeme vzorec pro umocnění zlomků, jejichž jmenovatelem je lineární kombinace druhých odmocnin racionálních čísel. Zjednodušeně řečeno umocníme jmenovatele typu: $\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} \pm \cdots \pm \sqrt{a_n}$, pro celá čísla

$a_1, a_2, \dots, a_n$ s volbou znaménka $\pm$. V následující výpočtu rozebereme příklad 3.3.2. [1, s. 123-124].

Příklad 2.4.1.

Začneme s rozšířením výrazu $(-1 + 2\sqrt{6})$:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right) = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = \left(2+2\sqrt{6}+3\right) - 6 = -1 + 2\sqrt{6},$$

dále rozšíříme výraz $(-1 - 2\sqrt{6})$:

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}\right) = \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = \left(2-2\sqrt{6}+3\right) - 6 = -1 - 2\sqrt{6}.$$

Nyní mezi sebou roznásobíme oba výrazy v rozšířeném tvaru pro získání racionálního čísla:

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\\ &= \left(-1+2\sqrt{6}\right)\left(-1-2\sqrt{6}\right) = 1 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 24\\ &= -23\end{aligned} \tag{3}$$

Příkladem je usměrnění zlomku $1/\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}{-23}.$$

Pokud závorky v čitateli roznásobíme, bude se zlomek shodovat s usměrněným zlomkem, ke kterému jsme došli v příkladu 2.3.1..

V obecném případě dostáváme ve jmenovateli součet či rozdíl *n* odmocnin. Zvažme polynom *f* s *n* proměnnými, jehož dělitelé jsou určeny volbou znaménka pro $x_2, \dots, x_n$:

$$f = \prod(x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n).$$

Oddělením volby znaménka pro poslední proměnnou x_n odvodíme:

$$\boldsymbol{f} = \prod(x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{n-1} + x_n) \times \prod(x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{n-1} - x_n),$$

$$\boldsymbol{f} = \prod(x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{n-1} + x_n)(x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{n-1} - x_n),$$

$$\boldsymbol{f} = \prod((x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{n-1})^2 - {x_n}^2)..$$

Například rozkladu (3) z příkladu 2.4.1. odpovídá polynom:

$$f = \prod \left(\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 \right).$$

Obecně pozorujeme, že stupně proměnné x_n v každém jednočlenu v polynomu f jsou sudé, to samé platí pro $x_2, \dots, x_{n-1}$. Vyplývá nám tato rovnost: $f(x_{1,} \dots, x_n) = g(x_1^2, \dots, x_n^2)$, pro polynom g s n neurčitými proměnnými a s celočíselnými koeficienty. Jestliže dosadíme za proměnné x_i $\sqrt{a_i}$, pro $i = 1,2, \dots, n$ a a_i je celé číslo, usuzujeme, že i výraz $f(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) = g(a_1, \dots, a_n)$ je celým číslem [1, s. 124].

Nechť jsou α, β dva polynomy s racionálními koeficienty proměnných tvořenými odmocninami z racionálních čísel. Pokud je součin $\alpha \cdot \beta$ roven racionálnímu číslu r, nazveme polynomy racionálně sdruženými. Zlomek $1/\alpha$ pak usměrníme do tvaru β/r. V další větě shrneme naše poznatky pro zlomky tvaru $1/(\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} \pm \cdots \pm \sqrt{a_n})$ [1, s. 124].

Věta 2.4.1.

Nechť $a_1, a_2, \dots, a_n$jsou kladná celá čísla. Potom je součin $\prod\left(\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} \pm \cdots \pm \sqrt{a_n}\right)$ za libovolné volby znaménka $\pm$ roven celému číslu. Libovolně racionálně sdružený polynom ke každému činiteli shora uvedeného součinu je vždy součinem zbývajících činitelů [1, s. 125].

2.5 Polynom v jmenovatelích a metoda neurčitých koeficientů

Geometrické řady a racionálně sdružené výrazy

Napišme si rozvoj daný vzorcem pro $n$tý částečný součet geometrických řad:

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = 1 - x^n.$$

V uvedeném rozvoji užijme substituci $x = \sqrt[n]{r}$, kdy r je racionální číslo:

$$\left(1 - \sqrt[n]{r}\right)\left(1 + \sqrt[n]{r} + \left(\sqrt[n]{r}\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt[n]{r}\right)^{n-1}\right) = 1 - \left(\sqrt[n]{r}\right)^n = 1 - r.$$

Součinem je opět racionální výraz. Usměrněním zlomku $\frac{1}{1-\sqrt[n]{r}}$ bychom získali

$$\frac{1 + \sqrt[n]{r} + \cdots + (\sqrt[n]{r})^{n-1}}{1 - r}$$

a naopak usměrněním zlomku $\frac{1}{1+\sqrt[n]{r}+\cdots+(\sqrt[n]{r})^{n-1}}$ bychom obdrželi

$$\frac{1-\sqrt[n]{r}}{1-r}.$$

Jak můžeme vidět, v obou zlomcích jsou polynomy v jmenovatelích racionální kombinací proměnných $\sqrt[n]{r}$. Dané zlomky budeme podrobněji studovat i ve třetí kapitole.

Protože $\left(\sqrt[n]{r}\right)^n = r$ je racionální číslo, tak se všechny mocniny $\left(\sqrt[n]{r}\right)^n$ s exponentem větším nebo rovným n redukují na mocniny s nižším exponentem. Nejobecněji tak můžeme definovat polynom f ve tvaru $f\left(\sqrt[n]{r}\right) = a_0 + a_1\sqrt[n]{r} + a_2\left(\sqrt[n]{r}\right)^2 + \cdots + a_{n-1}\left(\sqrt[n]{r}\right)^{n-1}$, kde $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}, r$ jsou celá čísla. Můžeme předpokládat, že čísla $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}$ jsou celá. Ukažme si tento postup na následujícím příkladu [1, s. 125].

Příklad 2.5.1. Usměrněte zlomek

$$\frac{1}{1+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}.$$

Řešení:

Usměrněme zlomek $1/f$, kdy $f = 1 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$. Polynom g budeme hledat ve stejném tvaru: $g = a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}$.

Součinem polynomů f, g získáme racionální výraz:

$$\begin{aligned} fg &= \left(1+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)\left(a+b\sqrt[3]{3}+c\sqrt[3]{9}\right) \\ &= a + 2a\sqrt[3]{3} + a\sqrt[3]{9} + b\sqrt[3]{3} + 2b\sqrt[3]{9} + 3b + c\sqrt[3]{9} + 6c + 3c\sqrt[3]{3} \\ &= a + 3b + 6c + (2a + b + 3c)\sqrt[3]{3} + (a + 2b + c)\sqrt[3]{9}. \end{aligned}$$

Abychom se zbavili odmocnin, musí platit dvě rovnosti:

$$2a + b + 3c = 0,$$

$$a + 2b + c = 0.$$

Jde o homogenní soustavu dvou lineárních rovnic se třemi neznámými a, b, c. Tato soustava má nekonečně mnoho řešení. Zvolme parametr $t \in \mathbb{Q}$ a pišme:$c = t$. Pak již dopočítáme $a = -\frac{5t}{3}, b = \frac{t}{3}$. Nalezli jsme tedy nekonečně mnoho činitelů, racionálně sdružených s výrazem $1+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$. Jejich součin s tímto výrazem bude vždy jisté racionální číslo, ze shora uvedeného roznásobení součinu $f \cdot g$ dokonce víme, že je platí rovnost:

$$a+3b+6c=-\frac{5t}{3}+3\cdot\frac{t}{3}+6t=-\frac{5t}{3}+7t=\frac{16}{3}t.$$

V čitateli zadaného zlomku ale bylo číslo 1 a to získáme volbou $t=\frac{3}{16}$.

Zlomek $1/f$ teď již snadno usměrníme:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{1+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}=\frac{g}{fg}=\frac{3\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}-5}{16}.$$

Příklad 2.5.2. Usměrněte zlomek

$$\frac{1}{3+2\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{25}}.$$

Řešení:

Umocňujeme zlomek $1/f$, kdy $f=3+2\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{25}$. Polynom g budeme hledat ve tvaru: $g\ =\ a+b\sqrt[4]{5}+c\sqrt[4]{25}+d\sqrt[4]{125}$.

Součinem polynomů f,g získáme racionální výraz:

$$\begin{aligned}fg=&\left(3+2\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{25}\right)\left(a+b\sqrt[4]{5}+c\sqrt[4]{25}+d\sqrt[4]{125}\right)\\&=3a+3b\sqrt[4]{5}+3c\sqrt[4]{25}+3d\sqrt[4]{125}+2b\sqrt[4]{25}+2a\sqrt[4]{5}+2b\sqrt[4]{25}+2c\sqrt[4]{125}\\&+2.5d-a\sqrt[4]{25}-b\sqrt[4]{125}-5c-5d\sqrt[4]{5}\\&=(3a-5c+10d)+(2a+3b-5d)\sqrt[4]{5}+(-a+2b+3c)\sqrt[4]{25}\\&+(b+2c+3d)\sqrt[4]{125}.\end{aligned}$$

Nyní vyřešme tři rovnice o třech neznámých:

$$2a+3b-5d=0,$$

$$-a+2b+3c=0,$$

$$-b+2c+3d=0.$$

K vyřešení rovnic si stačí upravit matici:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 20 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Je patrné, že daná soustava má nekonečně mnoho řešení, k jejich vyjádření budeme potřebovat jeden parametr. Volme: $d = 5t$, kde $t \in \mathbb{Q}$. Dále tak získáváme:

$$c = -4t, b = 7t, a = 2t.$$

Nalezli jsme nekonečně mnoho racionálně sdružených výrazů g se jmenovatelem $3 + 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{25}$. Najděme mezi nimi opět ten, pro který platí $f \cdot g = 1$. Při roznásobování výrazu $f \cdot g$ jsme také zjistili, že racionální část tohoto výrazu je $3a - 5c + 10d$, resp. po dosazení za $c = -4t, b = 7t, a = 2t$ získáme:

$$6t + 20t + 50t = 76t.$$

V čitateli zadaného zlomku získáme 1, pokud $t = \frac{1}{76}$.

Zlomek $\frac{1}{f}$ teď již snadno usměrníme:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{3 + 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{25}} = \frac{g}{fg} = \frac{2 + 7\sqrt[4]{5} - 4\sqrt[4]{25} + 5\sqrt{125}}{76}.$$

Obecně pro polynom f:

$$f = a_0 + a_1\sqrt[n]{r} + a_2(\sqrt[n]{r})^2 + \cdots + a_{n-1}\left(\sqrt[n]{r}\right)^{n-1},$$

vždy existuje polynom g ve stejném tvaru:

$$g = b_0 + b_1\sqrt[n]{r} + b_2(\sqrt[n]{r})^2 + \cdots + b_{n-1}\left(\sqrt[n]{r}\right)^{n-1}.$$

Součinem těchto polynomů pak získáme racionální výraz:

$$\begin{aligned} fg = {} & a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\sqrt[n]{r} + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\left(\sqrt[n]{r}\right)^2 + \cdots \\ & + (a_0b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1)r + (a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2)r\sqrt[n]{r} + \cdots \\ & + a_{n-1}b_{n-1}r\left(\sqrt[n]{r}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

To vede k nulovým koeficientům mocnin $\sqrt[n]{r}$, které nejsou dělitelné exponentem n. Řešení $n - 1$ lineárních rovnic o n neznámých b_0, b_1, …, b_{n-1} je vždy netriviální a lze jej upravit na celočíselný výraz [1, s. 126],

Danou metodu lze použít i při výpočtech lineárních kombinací racionálních koeficientů libovolných racionálních mocnin. Například pokud bude ve jmenovateli výraz $f = \sqrt{7} - 2\sqrt[5]{3}$, budeme hledat racionálně sdružený polynom g ve tvaru: $g = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{4} b_{ij}(\sqrt{7})^i(\sqrt{3})^j$.

Homogenní soustava lineárních rovnic určená podmínkou racionálního součinu dvou polynomů f, g zahrnuje $2 \times 5 - 1 = 9$ rovnic o 10 neznámých [1, s. 126].

2.6 Vzorec pro umocnění zlomků s odmocninami ve jmenovateli

V předchozí textu jsme zjistili, že ke každému polynomu $f(\sqrt[n]{r})$ ve jmenovateli dokážeme najít racionálně sdružený polynom $g(\sqrt[n]{r})$. Teď odvodíme vzorec, v němž bude g funkcí f. Podívejme se na dva racionálně sdružené polynomy, se kterými jsme pracovali: $1 - \sqrt[n]{r}$ a $1 + \sqrt[n]{r} + \cdots + \left(\sqrt[n]{r}\right)^{n-1}$. Kořeny polynomu $x^n - 1$ jsou n-té odmocniny z jedné. Jsou dány ε_k:

$$\varepsilon_k = e^{2k\pi/n} = cos\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n},$$

pro $k = 0, 1, \dots, n - 1$ [1, s. 127].

$\varepsilon = \varepsilon_1$ nazveme primitivním n-tým kořenem a $\varepsilon_k = \varepsilon^k$, pro $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Pro polynom $x^n - 1$ tedy platí: $x^n - 1 = (x - 1)(x - \varepsilon) \dots (x - \varepsilon^{n-1})$. Obě strany rovnice vydělíme (-1): $-1 = (-1)(-\varepsilon) \dots (-\varepsilon^{n-1})$. Kořeny této rovnice jsou stejné jako u rovnice: $1 - x^n = (1 - x)(1 - \varepsilon x) \dots (1 - \varepsilon^{n-1}x)$ [1, s. 127].

Pokud $x = \sqrt[n]{r}$, kdy je r racionální, a $f(x) = 1 - x$, bude řešením racionální výraz:

$$f\left(\sqrt[n]{r}\right)f\varepsilon\left(\sqrt[n]{r}\right) \dots f\left(\varepsilon^{n-1}\sqrt[n]{r}\right) = 1 - \left(\sqrt[n]{r}\right)^n = 1 - r.$$

Racionálně sdružený polynom k polynomu $f\left(\sqrt[n]{r}\right) = 1 - \sqrt[n]{r}$ je potom součinem zbývajících činitelů:

$$f\left(\sqrt[n]{r}\right)f\left(\varepsilon^2\sqrt[n]{r}\right) \dots f\left(\varepsilon^{n-1}\sqrt[n]{r}\right) = \prod_{j=1}^{n-1} f\left(\varepsilon^j\sqrt[n]{r}\right)$$

[1, s. 127]. V následující větě vyjádříme vzorec pro racionálně sdružený polynom k libovolného polynomu ve jmenovateli.

Věta 2.6.1.

Mějme polynom $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ s racionálními koeficienty a primitivní n-tou odmocnina z jedné. Pak je polynom P v proměnné x skutečně polynomem definovaným na množině racionálních čísel v proměnné x^n:

$$P(x) \coloneqq \prod_{j=0}^{n-1} f(\varepsilon^j x).$$

Zejména existuje vzorec pro racionalizaci zlomku $1/f(\sqrt[n]{r})$:

$$\frac{1}{f(\sqrt[n]{r})} = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} f(\varepsilon^j \sqrt[n]{r})}{P(\sqrt[n]{r})}$$

[1, s. 127]. Důkaz věty je příliš složitý, proto jej nebudeme uvádět.

Příklad 2.6.1.

Vezměme polynom $f(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1} = (1 - x^n)/(1 - x)$. V průběhu úprav tohoto polynomu využijeme předchozí větu a po zjednodušení získáme racionální číslo.

$$f(\sqrt[n]{r}) f\varepsilon(\sqrt[n]{r}) \dots f(\varepsilon^{n-1}\sqrt[n]{r}) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1 - (\varepsilon^j \sqrt[n]{r})^n}{1 - \varepsilon^j \sqrt[n]{r}} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1 - r}{1 - \varepsilon^j \sqrt[n]{r}} = \frac{(1 - r)^n}{\prod_{j=0}^{n-1}(1 - \varepsilon^j \sqrt[n]{r})}$$
$$= \frac{(1 - r)^n}{1 - r} = (1 - r)^{n-1}$$

[1, s. 127].

Kapitola 3

Symetrické polynomy a odmocniny z jedné, Galoisova teorie – úvod

3.1 Symetrické polynomy

Příklad 3.1.1.

Usměrněme zlomek

$$\frac{1}{3-5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}.$$

Máme tedy polynom $f(x)=3-5x+x^2, n=3$. ε je primitivní kubickou odmocninou z jedné.

$f(\sqrt[3]{2})f(\varepsilon\sqrt[3]{2})f(\varepsilon^2\sqrt[3]{2})=(3-5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(3-5\varepsilon\sqrt[3]{2}+\varepsilon^2\sqrt[3]{4})(3-5\varepsilon\sqrt[3]{2}+\varepsilon^4\sqrt[3]{4})=$
$27-125\varepsilon^3\cdot 2+\varepsilon^6\cdot 4-3^2\cdot 5(1+\varepsilon+\varepsilon^2)\sqrt[3]{2}+3^2(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)\sqrt[3]{4}+3\cdot 5^2(1+\varepsilon^2+$
$\varepsilon^4)\sqrt[3]{4}+(3)(-5)(1)(\varepsilon^5+\varepsilon^4+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon+\varepsilon^2)\sqrt[3]{8}+3(\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6)\sqrt[3]{16}+$
$25(\varepsilon^5+\varepsilon^4+\varepsilon^3)\sqrt[3]{16}-5(\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6)\sqrt[3]{32}.$

Všechny závorky s třemi ε budou rovny nule, neboť platí: $\varepsilon^3=1$ a $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$. Výsledek se tak zmenší na racionální číslo $27-250+4+90=-129$. Racionálně sdruženým polynomem k polynomu $3-5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ je potom

$$(3-5\varepsilon\sqrt[3]{2}+\varepsilon^2\sqrt[3]{4})(3-5\varepsilon^2\sqrt[3]{2}+\varepsilon^4\sqrt[3]{4})$$

$$=9-15(\omega+\omega^2)\sqrt[3]{2}+[3(\omega^2+\omega^4)+25]\sqrt[3]{4}-5(\omega^4+\omega^5)\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{16}$$

$$=9-15(-1)\sqrt[3]{2}+[3(-1)+25]\sqrt[3]{4}-5(-1)2+2\sqrt[3]{2}=19+17\sqrt[3]{2}+22\sqrt[3]{4}.$$

Usměrněním původního zlomku jsme získali:

$$\frac{1}{3-5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}=\frac{19+17\sqrt[3]{2}+22\sqrt[3]{4}}{-129}.$$

Abychom metodu řešení lépe pochopili nahradíme čísla 1, ε, ε^2, $\sqrt[2]{2}$ proměnnými y_1, y_2, y_3, x, které následně dosadíme do rovnice:

$f(y_1x)f(y_2x)f(y_3x) = (3 - 5y_1x + (y_1x)^2)(3 - 5y_2x + (y_2x)^2)(3 - 5y_3x + (y_1x)^2) = 27 - 125y_1y_2y_3x^3 + y_1^2y_2^2y_3^2x^6 - 3^2 \cdot 5(y_1 + y_2 + y_3)x + 3^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)x^2 + 3 \cdot 5^2(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)x^2 + (3)(-5)(1)(y_1^2y_2 + y_1y_2^2 + y_1^2y_3 + y_1y_3^2 + y_2^2y_3 + y_2y_3^2)x^3 + 3(y_1^2y_2^2 + y_1^2y_3^2 + y_2^2y_3^2)x^4 + 25(y_1^2y_2y_3 + y_1y_2^2y_3 + y_1y_2y_3^2)x^4 - 5(y_1^2y_2^2y_3 + y_1y_2^2y_3^2 + y_1^2y_2y_3^2)x^5.$

Polynom $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je symetrický, pokud se nezmění s jakoukoliv permutací jeho neurčitých $x_1, x_2, \dots, x_n$. To znamená: $f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_n\right) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pro libovolnou volbu $\sigma(1, \dots, n)$. V posledním výpočtu jsou koeficienty mocnin proměnné x homogenními symetrickými polynomy $y_1, y_2, \dots, y_n$ stejného stupně jako u proměnných x. Pokud se více zaměříme na kořeny, tyto koeficienty budou rovny nule v momentě, kdy jejich celkový stupeň proměnné y nebude násobkem tří, jinak budou racionálními čísly [1, s. 128-129]

3.2 François Viète

Francouzský matematik François Viète (1540-1603), často též zmiňován jako otec algebry, se narodil v západní Francii, ve Fontenay–le–Comte, kde později studoval u františkánů. V mládí šel ve šlépějích svého otce, vystudoval na univerzitě v Poitiers, kde získal právnický diplom. Stal se právníkem mnoha vysoce postavených klientů, např. Marie Stuartovny. Od roku 1564 působil jako advokát ve službách šlechtického rodu Soubise. Staral se zde však nejen o právnické záležitosti Antoinetty d´Aubeterre, ale i o výuku její dcery Kateřiny. Ta se stala v patnácti letech jednou z nejvzdělanějších žen v matematice a astronomii. Byla to právě ona, která v něm vzbudila zájem o tento obor.

Později působil ve státních službách jako advokát a soudce u pařížského vrchního soudu, také se stal soukromým poradcem krále Jindřicha III. a členem královy osobní rady. Roku 1584 se sáhl do ústraní, neboť byl od soudu vyhoštěn jeho politickými nepřáteli. Vlivem této události se Viète mohl věnoval více své oblíbené matematice. Přestože nikdy nebyl zaměstnán jako odborný vědec či profesionální matematik, pracoval na tématech astronomie a matematiky. Matematika byla jeho vášní. V rozmezí pěti let, které strávil v Beauvoir-sur-Mer se plně věnoval matematickým studiím a uskutečnil jeho nejvýznamnější poznatky v tomto oboru.

V roce 1587 se vrátil zpět do parlamentu, o dva roky později se přidal k uprchlému králi Jindřichu III a proslavil se dekódováním španělských dopisů. Kód obsahoval téměř 600 znaků.

Viète byl známý svými matematickými schopnostmi a příležitostně o matematice přednášel. V roce 1594 se Viète vrátil do Paříže s Jindřichem IV. Až do své smrti byl jedním z jeho hlavních poradců. Roku 1571 formuloval ve své první knize *Canon mathematicus* publikovat řadu vzorců z oblasti rovinné a sférické trigonometrie a trigonometrické tabulky funkcí sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans, kosekans uvedené po stupních na deset platných číslic. Objevil vzorec, který převáděl násobení kosinů na sčítání (podobně jako u logaritmů) a tím velmi zjednodušil počítání s goniometrickými výrazy. Původně byla kniha zamýšlena jako matematický úvod k astronomickému pojednání. Prosazoval používání pozičního číselného zápisu o základu 10. Roku 1591 vydal *základní knihu o algebře In artem analyticam isagoge, v překladu Úvod do analytického umění*. Definoval moderní pojem rovnice a vytvořil symbolickou algebru. Učinil mnoho vylepšení v řešení rovnic [7, 13].

3.3 Viètovy a Newtonovy vzorce

Françoise Viète koncem 16. století studoval obecné rovnice n-tého stupně o n kořenech $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

jejichž normovaný tvar dostáváme dělením koeficientem a_0:

$$x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0} = 0.$$

Lze najít rozklad rovnice n-tého stupně v součin následujících činitelů:

$$(x - y_1)(x - y_2) \dots (x - y_n) = 0.$$

Pokud tuto rovnost roznásobíme a proměnné x se stejným koeficientem seskupíme, získáme:

$$x^n - (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)x^{n-1} + (y_1y_2 + \cdots + y_{n-1}y_n)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n y_1y_2 \dots y_n = 0.$$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících členů získáme tzv. Viètovy vzorce. Jde o vztahy mezi kořeny a koeficienty dané rovnice:

$$\begin{cases} e_1 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ e_2 = \displaystyle\sum_{1 \le i < j \le n} y_i y_j = \dfrac{a_2}{a_0} \\ \qquad \cdots \\ e_n = y_1 y_2 \dots y_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases}$$

Polynomy $e_1, e_2, \dots, e_n$ jsou tzv. **elementární symetrické polynomy** s proměnnými $y_1, y_2, \dots, y_n$. Elementární symetrický polynom e_i je součtem všech rozdílných součinů proměnných i. Dle Viètových vzorců při užití rovnice pro dělení kruhu $x^n - 1 = 0$, jejímiž kořeny jsou $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$, platí:

$$e_j(1, \omega, \dots, \omega^{n-1}) = \begin{cases} 0 & , pokud\ 1 \le j < n, \\ (-1)^{n-1} & , pokud\ j = n. \end{cases}$$

Symetrické polynomy se staly ke konci 17. století předmětem zájmu anglického matematika Isaaca Newtona (1642-1727), který analyzoval symetrické polynomy pro $k \ge 0$ ve tvaru:

$$p_k = y_1^k + y_2^k + \cdots + y_n^k.$$

Ukázal, že $p_0 = n$, $p_1 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = e_1$, $p_2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2 - 2(y_1 y_2 + \cdots + y_{n-1} y_n) = e_1^2 - 2e_2$, čímž vyjádřil polynomy p_k pro malé celočíselné hodnoty k. Dále stanovil rekurzivní vzorce, dnes známy jako Newtonovy vzorce:

$$p_k = \begin{cases} e_1 p_{k-1} - e_2 p_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-2} e_{k-1} p_1 + (-1)^{k-1} k e_k, & \text{pokud } k < n \\ p_k = e_1 p_{k-1} - e_2 p_{k-2} + \cdots + (-1)^{n-1} e_n p_{k-n}, & \text{pokud } k \ge n \end{cases}$$

[1, s. 129-130].

Příklad 3.3.1. Vypočtěte polynom p_4 z kubické rovnice $3x^3 - 12x^2 + 2x + 3 = 0$

Řešení:

Rovnici můžeme převést do normovaného tvaru:

$$x^3 - 4x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0.$$

Kubická rovnice má tři kořeny y_1, y_2, y_3, proto ji musíme vyjádřit celkem tři elementární symetrické polynomy:

$$e_1 = y_1 + y_2 + y_3 = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{-12}{3} = 4,$$

$$e_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{a_2}{a_0} = \frac{2}{3},$$

$$e_3 = y_1y_2y_3 = -\frac{a_3}{a_0} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Nyní pro určení polynomů užijeme Newtonovy vzorce:

$$p_0 = n = 3,$$

$$p_1 = e_1 = 4,$$

$$p_2 = e_1p_1 - 2e_2 = 4 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{2}{3} = 16 - \frac{4}{3} = \frac{44}{3},$$

$$p_3 = e_1p_2 - e_2p_1 + e_3p_0 = 4 \cdot \frac{44}{3} - \frac{2}{3} \cdot 4 - 1 \cdot 3 = \frac{176}{3} - \frac{8}{3} - 3 = 53,$$

$$p_4 = e_1p_3 - e_2p_2 + e_3p_1 = 4 \cdot 53 - \frac{2}{3} \cdot \frac{44}{3} - 1 \cdot 4 = 212 - \frac{88}{9} - 4 = \frac{1784}{9}.$$

3.4 Évariste Galois

Évariste Galois (1811-1832) byl francouzský matematik, který se narodil v Bourg–la–Reine. Jeho otec byl ředitelem obecné školy. Vyučovala jej jeho vzdělaná matka. Ve svých dvanácti letech začal studovat na lyceu Ludvíka Velikého. Studoval humanitní a přírodní vědy. V patnácti letech se nadchl pro matematiku. Během několika dní dokázal nastudovat učebnici *Základy geometrie* od Adriena Legendra. Dále studoval díla dalších významných matematiků, například Josepha Lagrangea, Augustina Cauchyho, aj. Přesto dvakrát neuspěl při složení zkoušek na École Polytechnique. Přihlásil se tedy ke studiu na École preparatorie (později změněna na École normale). Tento seminář připravoval studenty na budoucí učitele. Díky podpoře svého vyučujícího začal publikovat první výsledky svých prací. Z jeho článků můžeme zmínit *Rozbor pojednání o algebraickém řešení rovnic*, *O řešení numerických rovnic* a *K teorii čísel*. Pro svůj radikální postoj byl v roce 1931 z École normale vyloučen, a dokonce dvakrát uvězněn. Za svůj krátký život nebyl doceněn. Teprve 14 let po jeho smrti byly publikovány jeho práce Josephem Liouvillem a uznání dosáhly až v 70. letech minulého století. Hlavním pojmem jeho teorie byly grupy. Pro přílišnou složitost se jeho teorie běžně nevyučuje. Význam Galoisových prací je ohromný. Mají nezměrný vliv nejen na rozvoj algebry, ale i celé matematiky [6, 8, 14].

3.5 Co známe z matematické analýzy aneb transcendentní rozšíření těles

V integrálním počtu jsme probírali hledání primitivních funkcí k racionálním lomeným funkcím (v nějaké proměnné, nejčastěji v x). Jak k takovým funkcím dospějeme? Mějme těleso racionálních čísel $\mathbb{Q}$ a nějaký prvek x, který není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty. Takový prvek se nazývá **transcendentní**. Jak vypadá nejmenší těleso, které obsahuje jak těleso všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$, tak i prvek x?

Konstruované těleso $\mathbb{Q}(x)$ bude muset být uzavřené na operace sčítání i násobení. To znamená, že se v něm budou nacházet i součiny $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, atd. Tyto součiny budou moci být násobeny prvky z tělesa $\mathbb{Q}$ a sčítány mezi sebou. To však znamená, že v $\mathbb{Q}(x)$ budou polynomy tvaru $a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, kde $a_i \in \mathbb{Q}$ pro $i = 0,1,\dots,n$. Tím ale vše nekončí, neboť v budovaném tělese ještě musejí být obsaženy inverzní prvky vzhledem k operaci násobení ke každému nenulovému prvku, z čehož vyplývá, že v $\mathbb{Q}(x)$ budou obsaženy i prvky tvaru $\frac{1}{f(x)}$, kdy bude pro polynom $f(x)$ platit:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \wedge f(x) \neq 0.$$

Nakonec musíme připustit podíly polynomů $\frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x)$ i $q(x)$ jsou polynomy s racionálními koeficienty a $q(x) \neq 0$.

Vybudovali jsme těleso racionálních lomených funkcí $\mathbb{Q}(x)$ s racionálními koeficienty. Na tom, že používám písmeno x, ve skutečnosti vůbec nezáleží. Klidně bychom mohli pro přidávaný transcendentní prvek užít i písmeno y, z, či π.

Tak tedy vypadá tzv. transcendentní rozšíření tělesa $\mathbb{Q}$. Místo $\mathbb{Q}$ jsme mohli volit jakékoli komutativní těleso T. V dalším oddíle se seznámíme s tím, jak podstatně odlišná je situace, pokud „přidáváme“ (odborně řečeno adjungujeme) nějaký algebraický prvek, tedy prvek, který je kořenem nějaké algebraické rovnice. To nás musí hodně zajímat, protože tento příklad zjevně zahrnuje odmocniny (např. prvky $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{5}$ jsou po řadě kořeny algebraických rovnic $x^2 - 2 = 0$, $x^3 - 3 = 0$ a $x^5 - 5 = 0$).

3.6 Galoisova teorie

Galoisova teorie popisuje mimo jiné tzv. rozšíření těles. Jsou-li T_α, kdy $\alpha \in I$ podtělesa jistého tělesa U, pak $T = \bigcap_{\alpha \in I} T_\alpha$ je opět podtělesem tělesa T. (Průnik jisté množiny podtěles tělesa T je tedy opět podtělesem tělesa T). Je-li tedy T podtěleso tělesa U a $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ konečná množina prvků z U, pak symbolem $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ značíme průnik všech podtěles tělesa U obsahujících jak těleso T, tak i množinu $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ a nazýváme jej podtělesem tělesa U generovaným množinou $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ nad tělesem T.

Příklad 3.6.1.

Buď $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ těleso reálných čísel, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ těleso racionálních čísel a prvek $a = \sqrt{2}$. Posuďme, jak vypadá těleso $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, tzv. těleso racionálních čísel s adjungovanou odmocninou ze dvou.

Toto těleso je uzavřené na operaci sčítání a násobení prvků. Obsahuje tedy všechna racionální čísla a prvek $\sqrt{2}$, dále pak i prvky $5\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-4\sqrt{2}$, atd., obecně $b\sqrt{2}$, kde b je racionální číslo. Dále $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ obsahuje zřejmě i prvky tvaru $a + b\sqrt{2}$, kde $a, b \in \mathbb{Q}$. Je pozoruhodné, že tím jsou všechny prvky tělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ již vyčerpány.

Definice 3.6.1.

Prvek $\alpha \in U$ se nazývá algebraický prvek nad tělesem T, jestliže existuje nenulový polynom $f(x) \in T[x]$ takový, že $f(\alpha) = 0$. Polynom $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in T[x]$ nejmenšího možného stupně takový, že koeficient $a_n = 1$ (normovaný polynom) a $g(\alpha) = 0$, se nazývá minimálním polynomem prvku α.

Příklad 3.6.2.

Prvek $\alpha = \sqrt{2}$ je zřejmě algebraický nad tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$, neboť je kořenem polynomu $f(x) = x^2 - 2$. Tento polynom je zároveň minimálním polynomem prvku $\alpha = \sqrt{2}$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.

Příklad 3.6.3.

Prvek $\beta = \sqrt[3]{5}$ je algebraický nad tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$, neboť je kořenem polynomu $f(x) = x^3 - 5$. Tento polynom je zároveň minimálním polynomem prvku $\beta = \sqrt[3]{5}$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.

Těleso $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ je zřejmě tvořeno všemi prvky tvaru $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}$, kde $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Obecně platí tato věta:

Věta 3.6.1.

Nechť je těleso U nadtělesem tělesa T a prvek $\alpha \in U$ je algebraický nad T. Je-li $f(x) \in T[x]$ minimálním polynomem prvku α, kde $stf = n$, pak platí rovnost:

$$T(\alpha) = T[\alpha] = \{g(\alpha); g(x) \in T[x], stg(x) < n\}.$$

Celou věc si lze představit tak, že pokud $stf(x) = n$, pak prvky $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ generují vektorový prostor $T(\alpha)$ nad T. Říkáme, že stupeň $T(\alpha)$ nad T je n.

Zdůvodněme podrobněji, proč je těleso $T(\alpha)$, kde je α algebraickým prvkem nad T, tvořeno jen prvky patřícími do oboru integrity polynomů $T[\alpha]$, nikoli podíly těchto polynomů. Především si uvědomme, že polynom $f(x)$, který je minimálním polynomem prvku $\alpha \in U$, je ireducibilní (nerozložitelný). Předpokládejme naopak, že minimální polynom $f(x)$ prvku α lze zapsat jako součin:

$$f(x) = g(x)\, h(x),$$

kdy $st\, g < st\, f \wedge st\, h < st\, f$.

Pak platí rovnost: $0 = f(\alpha) = g(\alpha)\, h(\alpha)$.

Protože v tělese neexistují dělitelé nuly, je $g(\alpha) = 0$, $h(\alpha) = 0$. To je ale spor s definicí minimálního polynomu. $Q.E.D.$

Teď již máme dokázáno, že polynom $f(x)$ je ireducibilní. Nechť existuje prvek $\frac{h(\alpha)}{g(\alpha)}$ z tělesa $T(\alpha), h(x), g(x) \in T[x], g(x) \neq 0$, tj. nějaký prvek ve tvaru podílu. Polynomy $f(x)$ a $g(x)$ jsou nesoudělné. $f(x)$ nemůže dělit $g(x)$, neboť jinak by bylo $g(\alpha) = 0$. Ireducibilní polynom $f(x)$ nemá vlastní dělitele. Odtud tedy plyne, že $D\big(f(x), g(x)\big) = 1$. Existují tedy polynomy $u(x), v(x) \in T[x]$, pro které platí:

$$f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = 1.$$

Potom ale $g(\alpha) \cdot v(\alpha) = g(\alpha) \cdot v(\alpha) + 0 = g(\alpha) \cdot v(\alpha) + f(\alpha) \cdot u(\alpha) = 1$ a tedy:

$$\frac{h(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{h(\alpha) \cdot v(\alpha)}{g(\alpha) \cdot v(\alpha)} = \frac{h(\alpha) \cdot v(\alpha)}{1} = h(\alpha) \cdot v(\alpha)$$

a žádné zlomky v tělese $T(\alpha)$ nejsou, toho těleso splývá s oborem integrity $T[\alpha]$. Jinak řečeno, napíšeme-li formálně nějaký zlomek (a nám jde o zlomky s odmocninou ve jmenovateli), pak je možné jej zapsat ve tvaru polynomu (tj. usměrnit jej).

Pro provedení příslušných výpočtů je také dobré si uvědomit, že pokud je stupeň algebraického prvku α roven n (tj. stupeň jeho minimálního polynomu je n), pak se $T[\alpha]$ jeví být vektorovým prostorem nad T s bází $1, \alpha, \alpha^2, \dots., \alpha^{n-1}$. Tuto okolnost můžeme často užít ve výpočtech.

Dosti často se setkáváme s vícenásobnými (běžovitými) algebraickými rozšířeními. Je-li např. dán zlomek s jmenovatelem ve tvaru $\sqrt{5} + \sqrt{2}$, pak se k prvku $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ dobereme pomocí dvou algebraických rozšíření tělesa racionálních čísel $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$. Je totiž patrné, že v posledním algebraickém rozšíření již leží prvek $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{2}$. Nejprve bychom tedy vstoupili do algebraického nadtělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ s bází nad $\mathbb{Q}$ tvořenou prvky $1, \sqrt{2}$ a posléze do dalšího algebraického rozšíření $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ tělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ s bází $1, \sqrt{5}$. Báze $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ je tedy tvořena prvky $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ (tj. zapíšeme všechny součiny prvků vybíraných po jednom z množin $\{1, \sqrt{2}\}$ a $\{1, \sqrt{5}\}$. Obecný postup při vytváření bází algebraických rozšíření je nyní zřejmý.

Příklad 3.6.4.

Kdybychom nyní chtěli nalézt prvek racionálně sdružený s prvkem $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{2}$, hledali bychom jej ve tvaru:

$$\beta = a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{5} + d \cdot \sqrt{10},$$

kde $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

Vypočetli bychom:

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{10}\right)$$
$$= a\sqrt{5}+b\sqrt{10}+5c+5d\sqrt{2}+a\sqrt{2}+2b+c\sqrt{10}+2d\sqrt{5}$$
$$= 2b+5c+(a+5d)\sqrt{2}+(a+2d)\sqrt{5}+(b+c)\sqrt{10}.$$

Požadujeme, aby byl tento výraz racionálním číslem, což vede k soustavě tři homogenních rovnic o čtyřech neznámých a, b, c, d:

$$a+5d=0,$$

$$a+2d=0,$$

$$b+c=0\,.$$

Řešení prvních dvou rovnic je na první pohled jasné: $a=0, d=0$. Zvolíme-li za neznámou c parametr t, kdy $t\in\mathbb{Q}$, potom $b=-t$. Speciálně pro $t=1$ je hledaným prvkem $\beta=-\sqrt{2}+\sqrt{5}$ a $\alpha\beta=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=5-2=3$.

Nalezli jsme jeden z nekonečně mnoha prvků racionálně sdružených s prvkem $\alpha=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

Již je patrná rovnost:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{3}\left(-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\frac{1}{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}=-\sqrt{2}+\sqrt{5}.$$

Příklad 3.6.5. Usměrněte zlomek

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$$

Řešení:

Usměrněme zadaný zlomek více způsoby.

1) Čísla ve jmenovateli si můžeme převést na stejnou racionální mocninu a poté využít vzorec (2) uvedený v kapitole 2.2..

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{2^3}+\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{9}$$

Pro mocninu $\frac{1}{6}$ platí vzorec:

$$(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)=a^6-b^6.$$

Po dosazení do vzorce, kdy $a = \sqrt[6]{9}, b = \sqrt[6]{8}$ obdržíme racionálně sdružené číslo k jmenovateli:

$$9^{\frac{5}{6}} - 9^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{6}} + 9^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} - 9^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{6}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - 8^{\frac{5}{6}}$$
$$= 3^{\frac{5}{3}} - 3^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 3 \cdot 2 - 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2\sqrt{2} + 3^{\frac{1}{3}} \cdot 4 - 4\sqrt{2}$$
$$= 3\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} + 6 - \sqrt[3]{9} \cdot 2\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{3} - 4\sqrt{2}$$
$$= 6 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{9} - 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{2}\sqrt[3]{9}.$$

2) Nejdříve odstraníme $\sqrt{2}$ a poté $\sqrt[3]{3}$:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{9} - 2} = \frac{\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt[3]{9^2} + 2\sqrt[3]{9} + 4\right)}{\left(\sqrt[3]{9} - 2\right)\left(\sqrt[3]{9^2} + 2\sqrt[3]{9} + 4\right)}$$
$$= \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}\right)\left(3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9} + 4\right)$$
$$= 3\sqrt[3]{9} + 6 + 4\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{2}\sqrt[3]{9} - 4\sqrt{2}$$
$$= 6 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{9} - 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{2}\sqrt[3]{9}.$$

3) Nejprve se zbavíme $\sqrt[3]{3}$ a poté $\sqrt{2}$. Tato metoda výpočtu je analogická předchozímu, proto ji nebudeme provádět.

4) V získaném algebraickém řešení by měla být báze $\{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}, \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{9}\}$.

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)\left[a + b\sqrt{2} + c\sqrt[3]{3} + d\sqrt[3]{9} + e\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}\right) + f\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{9}\right)\right]$$
$$= a\sqrt{2} + 2b + c\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + d\sqrt{2}\sqrt[3]{9} + 2e\sqrt[3]{3} + 2f\sqrt[3]{9} + a\sqrt[3]{3} + b\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$$
$$+ c\sqrt[3]{9} + 3d + e\sqrt{2}\sqrt[3]{9} + 3f\sqrt{2}$$
$$= 2b + 3d + (a + 3f)\sqrt{2} + (a + 2e)\sqrt[3]{3} + (c + 2f)\sqrt[3]{9}$$
$$+ (b + c)\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + (d + e)\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$$

Dostáváme 5 rovnic o 6 neznámých:

$$a + 3f = 0,$$

$$a + 2e = 0,$$

$$c + 2f = 0,$$

$$b + c = 0,$$

$$d + e = 0.$$

Vyjádřením c a e: $c = -b, e = -d$ z posledních dvou rovnic zredukujeme počet rovnic, které musíme vyřešit. Neznámé a, b, c, d, e, f vyjádříme volbou parametru $t \in \mathbb{Q}$, kdy $t = f$: $a = -3t,\ b = 2t,\ c = -2t,\ d = -\frac{3}{2}t,\ e = \frac{3}{2}t$. Samozřejmě se lze zbavit zlomku roznásobením všech neznámých dvěma.

Dosazením a, b, c, d, e, f do rovnice tak získáváme nekonečně mnoho řešení:

$$
\begin{aligned}
2b + 3d + (a + 3f)\sqrt{2} + (a + 2e)\sqrt[3]{3} + (c + 2f)\sqrt[3]{9} + (b + c)\sqrt{2}\sqrt[3]{3}& \\
+ (d + e)\sqrt{2}\sqrt[3]{9}& \\
= 2 \cdot 4t - 3 \cdot 3t + (-6t + 3 \cdot 2t)\sqrt{2} + (-6t + 2 \cdot 3t)\sqrt[3]{3}& \\
+ (-4t + 2 \cdot 2t)\sqrt[3]{9} + (4t - 4t)\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + (-3t + 3t)\sqrt{2}\sqrt[3]{9} = -t.&
\end{aligned}
$$

Z rovnice nám vyšlo$(-t)$, proto dosadíme za parametr t číslo (-1) a dopočteme tak neznámé:

$$a = 6, b = -4, c = 4, d = 3, e = -3, f = -2.$$

Nyní jen stačí tato zjištěná čísla dosadit do hledaného racionálně sdruženého polynomu:

$$
\begin{aligned}
a + b\sqrt{2} + c\sqrt[3]{3} + d\sqrt[3]{9} + e\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}\right) + f\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{9}\right)& \\
= 6 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{9} - 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{2}\sqrt[3]{9}.&
\end{aligned}
$$

5) Ukažme si, jakým způsobem najít převrácený prvek k algebraickému prvku metodami užívanými v Galoisově teorii.

Pišme: $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \Rightarrow \alpha - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3}$. Umocněním rovnosti na třetí dostaneme:

$$\alpha^3 - 3\alpha^2\sqrt{2} + 6\alpha - 2\sqrt{2} = 3$$

$$\alpha^3 + 6\alpha - 3 = (3\alpha^2 + 2)\sqrt{2}$$

$$\frac{\alpha^3 + 6\alpha - 3}{3\alpha^2 + 2} = \sqrt{2}.$$

Nyní danou rovnost umocníme na druhou a poté ji upravíme sledem základních matematických kroků:

$$\frac{(\alpha^3 + 6\alpha - 3)^2}{(3\alpha^2 + 2)^2} = 2$$

$$\alpha^6 + 12\alpha^4 + 36\alpha^2 - 6\alpha^3 - 36\alpha + 9 = 2(9\alpha^4 + 12\alpha^2 + 4)$$

$$\alpha^6 + 12\alpha^4 - 6\alpha^3 + 36\alpha^2 - 36\alpha + 9 = 18\alpha^4 + 24\alpha^2 + 8$$

$$\alpha^6 - 6\alpha^4 - 6\alpha^3 + 12\alpha^2 - 36\alpha + 1 = 0.$$

Nalezli jsme minimální polynom prvku α nad tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$, vypočítejme i prvek $\frac{1}{\alpha}$:

$$1 = -\alpha^6 + 6\alpha^4 + 6\alpha^3 - 12\alpha^2 + 36\alpha$$

$$\frac{1}{\alpha} = -\alpha^5 + 6\alpha^3 + 6\alpha^2 - 12\alpha + 36.$$

Teď musíme zpětně dosadit $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$:

$$\alpha^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9},$$

$$\alpha^3 = 3 + 2\sqrt{2} + 6\sqrt[3]{3} + 3\sqrt{2}\sqrt[3]{9},$$

$$\begin{aligned}\alpha^5 = \alpha^2 \cdot \alpha^3 &= \left(2 + 2\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right)\left(3 + 2\sqrt{2} + 6\sqrt[3]{3} + 3\sqrt{2}\sqrt[3]{9}\right)\\ &= 6 + 4\sqrt{2} + 12\sqrt[3]{3} + 6\sqrt{2}\sqrt[3]{9} + 6\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + 8\sqrt[3]{3} + 12\sqrt{2}\sqrt[3]{9} + 36\\ &+ 3\sqrt[3]{9} + 2\sqrt{2}\sqrt[3]{9} + 18 + 9\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\\ &= 60 + 4\sqrt{2} + 20\sqrt[3]{3} + 15\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{9} + 20\sqrt{2}\sqrt[3]{9}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} = -60 - 4\sqrt{2} - 20\sqrt[3]{3} - 15\sqrt{2}\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{9} - 20\sqrt{2}\sqrt[3]{9}\\ + 6\left(3 + 2\sqrt{2} + 6\sqrt[3]{3} + 3\sqrt{2}\sqrt[3]{9}\right) + 6\left(2 + 2\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right)\\ - 12\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right) + 36\\ = -60 - 4\sqrt{2} - 20\sqrt[3]{3} - 15\sqrt{2}\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{9} - 20\sqrt{2}\sqrt[3]{9}\\ + \left(18 + 12\sqrt{2} + 36\sqrt[3]{3} + 18\sqrt{2}\sqrt[3]{9}\right) + \left(12 + 12\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{9}\right)\\ - 12\sqrt{2} - 12\sqrt[3]{3} + 36 = 6 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{9} - 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{2}\sqrt[3]{9}\end{aligned}$$

Závěr

V první části bakalářské práce jsme se na chvíli vrátili do 19. století, kdy děti navštěvovaly tzv. měšťanské školy. V této době žáci neměli kalkulačky, a tak jim nezbylo nic jiného, než druhé odmocniny spočítat tzv. **oddvojmocňováním**. Po ukázce citovaného textu tehdejší učebnice jsme si sami metodu zkusili. Poté jsme definovali třetí a posléze i n −tou odmocninu. Připomněli jsme si pravidla základních matematických operací pro odmocniny. Ke konci první části jsme se zaobírali tzv. **surdickými výrazy**, s nimiž jsme definovali vzorce, díky kterým bylo možné vyjádřit jakékoliv přirozené číslo n.

V dalším úseku jsme hledali různé metody, jak se zbavit odmocnin ve jmenovateli. Začali jsme s jednoduchými dvojčlennými jmenovateli ve tvaru $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, kde $\forall a, b \geq 0$. Zde jsme si vzpomněli na základní vzorec: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, s nímž jsme se druhých odmocnin ve jmenovateli snadno zbavili. U dvoučlenných jmenovatelů s druhými odmocninami nás už tak nemohlo nic překvapit, proto jsme si příklad ztížili a začali řešit vícečlenné jmenovatele. Ti nás mohli na okamžik vyděsit, ale opět se potvrdilo, že strach má velké oči. Nakonec šlo jen o triviální rozdělení jmenovatele na dva členy a, b a tak jsme opět využili znalosti vzorce jako na úplném začátku. Posléze jsme však narazili, jakmile by bylo odmocnin více jak pět, odmocniny by při rozšiřování zlomku přestaly mizet. I kdybychom propočítali tímto dosud fungujícím postupem celé noci, bylo by to stejné jako nosit sovy do Athén. Nakonec jsme se ale nenechali „porazit“. Seznámili jsme se se dvěma metodami, které řešili i tento problém.

Nesmíme však zapomenout, že ve jmenovateli nemusejí být jen druhé odmocniny. I v těchto případech existují postupy, které také umožňují usměrnění zlomku. Při studiu těchto metod jsme využili např. racionalizační formuli známou z geometrických řad či symetrické polynomy, které jsme podrobněji rozebrali v poslední kapitole této práce. K závěru práce jsme se seznámili s úvodem do Galoisovy teorie rozšíření těles, díky níž jsme dostali záruku, že bude možné usměrnit jakýkoliv zlomek obsahující radikály.

Při psaní této bakalářské práce jsme získali řadu znalostí o vývoji algebry. Zároveň lze také říci, že jsme stejně jako Alenka v naší říši divů poznali pozoruhodné osobnosti, které se nejen zasloužili o rozvoj algebraického poznání, ale měli také velice pozoruhodné životní osudy.

Resumé

Bakalářská práce se zabývá odmocninami a způsoby usměrňování zlomků s iracionálními jmenovateli. Text je členěn do tří kapitol.

V první kapitole nahlédneme do 19. století, kdy k výpočtu odmocnin nebyly k dispozici dnešní moderní výpočetní prostředky jako kalkulátory a počítače. Dále jsou zde shrnuty základní definice a vzorce pro počítání s odmocninami. Poslední část kapitoly se zabývá vyjádřením přirozených čísel pomocí výrazů ve tvaru $a \pm \sqrt{b}$. Druhá kapitola uvádí různé způsoby usměrňování zlomků. Třetí kapitola se orientuje na symetrické polynomy a úvod do Galoisovy teorie.

Resume

This bachelor thesis deals with roots and ways of directing fractions with irrational denominators. The text is divided into three chapters.

In the first chapter, we look into the 19th century, when today's modern computing resources such as calculators and computers were not available for calculating roots. Further, there are summarized basic definitions and formulas for calculating with roots. The last part of the chapter deals with expression of natural numbers using expressions in the form of $a \pm \sqrt{b}$. Second chapter lists various ways to regulate fractions. The third chapter focuses on symmetric polynomials and an introduction to Galois theory.

Seznam literatury

[1] BERELE, A., Catoiu S.: *Rationalizing Denominators*, Mathematics Magazine, Vol. 88, No. 2 (April 2015), p. 121–134.

[2] DLAB, Vlastimil a Kateřina FIŠEROVÁ. Surdická vyjádření přirozených čísel I. *Rozhledy matematicko-fyzikální.* Praha: Jednota českých matematiků a fyziků. 2017, roč. 92, č. 2, s. 1-9. ISSN 0035-9343

[3] DLAB, Vlastimil a Kateřina FIŠEROVÁ. Surdická vyjádření přirozených čísel II. *Rozhledy matematicko-fyzikální.* Praha: Jednota českých matematiků a fyziků. 2017, roč. 92, č. 3, s. 1-6. ISSN 0035-9343

[4] GOLAT, Sebastian. *Odmocnina z čísel surdických a čísel komplexních.* Ostrava, 2014. Wichterlovo gymnázium.

[5] KNEIDL, František a Michael MARHAN. *Početnice pro měšťanské školy dívčí*. Praha: [s.n.], 1886, s. 12–15

[6] KRÁLOVÁ, Magda. Evariste Galois. In *Techmania science center* [online]. [cit. 2018-06-29]. Dostupné z:

http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1153/galois

[7] KRÁLOVÁ, Magda. François Viète. In *Techmania science center* [online]. [cit. 2018-06-29]. Dostupné z: http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1354/viete

[8] MASTIN, Luke, 2010. 19th century mathematics – Galois. *The Story of Mathematics* [online]. [cit. 2018-06-29]. Dostupné z:

http://www.storyofmathematics.com/19th_galois.html

[9] PAVLICOVÁ, Vladimíra, 2010. Základní pojmy a vztahy. *Portál středoškolské matematiky* [online]. Univerzita Karlova v Praze: Matematicko-fyzikální fakulta [cit. 2018-06-29]. Dostupné z:

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/mocniny/?page=Druha_odmocnina

[10] PAVLICOVÁ, Vladimíra, 2010. Základní pojmy a vztahy. *Portál středoškolské matematiky* [online]. Univerzita Karlova v Praze: Matematicko-fyzikální fakulta [cit. 2018-06-29]. Dostupné z:

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/mocniny/?page=Odmocniny

[11] PŠENIČKA, J.: *Surdické výrazy*. Rozhledy matematicko-fyzikální, 56 (1977–78), č. 4, 158–161

[12] SECHOVSKÝ, Hynek. *Algebra: příručka algebry s řešenými příklady a počátky počtu infinitesimalního*. Mor. Ostrava: A. Perout, 1921, s. 45-50

[13] *StukLopechat.COM: Otec matematika algebry François Viet* [online]. 2018 [cit. 2018-06-29]. Dostupné z: https://sk.stuklopechat.com/novosti-i-obschestvo/74665-otec-algebry-matematik-fransua-viet.html

[14] VAŠÍČEK, Karel, 2005. Evariste Galois. In: *Věda.cz* [online]. 17.6. [cit. 2018-06-29]. Dostupné z: http://www.veda.cz/article.do?articleId=11062.

[15] ZELINKA, Bohdan. Proč máme tolik druhých odmocnin. *Učitel matematiky.* Praha: Jednota českých matematiků a fyziků. Březen 2005, roč. 13, č. 3 (55), s. 135-136. ISSN 1210-9037