

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

NĚKTERÉ APLIKACE LINEÁRNÍ ALGEBRY
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eva Hružová
Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň 2018

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně
s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 25. dubna 2018

.....
vlastnoruční podpis

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala mé vedoucí Mgr. Martině Kašparové, PhD. za odbornou pomoc, vedení a řadu cenných podnětů při zpracování mé bakalářské práce, i za obohacení mých vědomostí během celého bakalářského studia. Zároveň velké díky patří i rodině, která mi byla vždy oporou, nejen ve studiu, ale i v životě.

Děkuji.

OBSAH

ANOTACE A KLÍČOVÁ SLOVA	3
ÚVOD A CÍL PRÁCE	4
1 ÚVODNÍ POZNATKY O LINEÁRNÍ ALGEBŘE	6
2 RANÉ APLIKACE LINEÁRNÍ ALGEBRY	7
3 ROVNICE KŘIVEK A POVRCHŮ PROCHÁZEJÍCÍCH ZADANÝMI BODY	15
4 MARKOVOVY ŘETĚZCE	25
5 LESLIEHO MODEL RŮSTU POPULACE	31
6 APLIKACE LINEÁRNÍ ALGEBRY V GENETICE	37
ZÁVĚR	I
RESUMÉ	II
SEZNAM LITERATURY	III
SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ	IV

ANOTACE

Práce je zaměřena na ukázkou možných aplikací lineární algebry v celé řadě vědních oborů a její využití v praxi. Lineární algebra je jednou ze základních disciplín matematiky a je nenahraditelnou součástí matematických, technických i informačních odvětví. Je využívána i v jiných odvětvích, kterými mohou být biologie, lékařství, geografie, geometrie a mnoho dalších. Práce má sloužit jako důkaz propojení lineární algebry s běžným životem.

KLÍČOVÁ SLOVA

lineární algebra, aplikace lineární algebry, rané aplikace lineární algebry, matice, vektor, determinant, analytická geometrie, Markovovy řetězce, pravděpodobnost, kombinatorika, matice přechodu, stavový vektor, Leslieho model růstu populace, populační model, pravděpodobnost přežití, míra reprodukce, genetika, genotyp, fenotyp, autozomální dědičnost

ANNOTATION

The bachelor thesis is focused on the demonstration of possible applications of linear algebra in a wide range of disciplines and its application in practice. Linear algebra is one of the basic disciplines of mathematics and is an irreplaceable part of mathematical, technical and information fields. It is also used in other subjects, such as biology, medicine, geography, geometry and many others. The thesis was made to prove the connection between linear algebra and its using in real life.

KEYWORDS

linear algebra, applications of linear algebra, the earliest applications of linear algebra matrix, vector, determinant, analytic geometry, Markov chains, probability, combinatorics, transition matrix, state vector, Leslie age – specific population growth, population model, probability of survival, rate of reproduction, genetics, genotype, phenotype, autosomal inheritance

Úvod

Bakalářská práce je na téma Některé aplikace lineární algebry. Jak název napovídá, práce se zabývá využitím jedné ze základních disciplín matematiky především v zajímavých úlohách v mimooborovém uplatnění.

Cílem této bakalářské práce je pokusit se čtenáři srozumitelně předložit některé zajímavé aplikace lineární algebry, které jsem vybrala záměrně pro popularizaci této vědecké disciplíny.

Lineární algebra nalezne své využití v mnoha různých vědních oborech. Ve své práci se zabývám aplikací v genetice, geografickým modelem populačního růstu, meteorologickou předpovědí s využitím Markovových řetězců, analytickou geometrií i pohledem do historie. Při vytváření tohoto textu jsem byla motivována pomocí současným i budoucím studentům matematiky, ale i užší veřejnosti, propojením jejich znalostí z jiných předmětů a popularizací této matematické disciplíny na vybraných ukázkových příkladech.

Struktura práce byla zvolena na základě zkušenosti ze školního prostředí, kdy prokládání teorie řešenými příklady vede ke snadnějšímu pochopení dané látky.

Práce je rozdělena do šesti tematických kapitol. Součástí všech kapitol jsou vybrané příklady.

První a druhá kapitola jsou převážně kapitoly popisné. Záměrně jsem je zde uvedla, protože vedou k lepšímu porozumění nadcházejících kapitol. První kapitola je úvodní, ve které je představena lineární algebra. Druhá kapitola pojednává o raných aplikacích lineární algebry, například v Babylonii, či Egyptě. Starověké civilizace řešily především praktické výpočetní problémy, mezi něž patří výměra pozemků, výběr daní, či výpočet dědictví. V mnoha případech tyto problémy vedly k soustavám lineárních rovnic, protože linearita je nejjednodušším vztahem mezi existujícími proměnnými.

Třetí kapitola se zabývá popisem techniky, která využívá výpočet determinantu k nalezení obecné rovnice přímky, kružnice, kuželosečky, roviny a koule. Postupovala jsem tak, že nejprve uvádím křivky rovinné a následně prostorové útvary.

Ve čtvrté kapitole se věnuji Markovovým řetězcům, dnes v praxi hojně využívané aplikaci, která si našla místo v celé řadě oblastí (meteorologie, ekonomie, bankovníctví, informační technologie, aj.). Markovův řetězec popisuje náhodný diskrétní proces,

u kterého nezávisí pravděpodobnost přechodu od současného do následujícího stavu na předchozích stavech, ale pouze na současném stavu. Předpokládá se diskretnost času i stavů. Jako příklad mohu uvést počasí v určitém místě, které může být v jednom z následujících stavů: jasno, polojasno, nebo zataženo a tento stav se změní na jiný s určitou pravděpodobností. Já jsem zvolila jako ukázkou právě využití v meteorologii při předpovědích počasí. Pro znázornění řetězce jsem vytvořila jednoduchý přechodový diagram.

V páté kapitole uvádím příklad maticového modelu populačního růstu, na kterém se pokusím vysvětlit základní principy těchto modelů. Cílem je seznámení se s populačním modelem v diskretním čase, konkrétně s Leslieho maticovým modelem. Jedná se o soustavu lineárních rovnic, která popisuje chování věkově strukturované populace. V tomto modelu se předpokládá uzavřenost společnosti a modelují se pouze jedinci ženského pohlaví. Mužské pohlaví hraje velkou roli při reprodukci, avšak pro růst populace v tomto modelu nemá žádný význam. Pro vývoj populace je důležitá natalita a mortalita. Migraci a jiné procesy a vlivy tento model zanedbává.

Poslední kapitola je věnována dědičnosti. Zaměřila jsem se především na dědičnost autozomální, u které jsou geny uloženy na autozomech – nepohlavních chromozomech. Každý jedinec od rodičů dědí dva geny, které vytvářejí jednotlivé genotypy. Genotypy mohou být buď dominantní, nebo recesivní. K určení pravděpodobnosti dědičnosti určitého jevu využívám znalosti umocňování matice, která je utvořena z pravděpodobností jednotlivých jevů.

Další využití lineární algebry nalézáme v teorii grafů, v lékařství ve výpočetní tomografii (CT, X-ray CT). Některé lineární transformace můžeme použít k popisu a generování složitých množin bodů v euklidovské rovině, zvaných fraktály, které jsou v současné době předmětem matematického a vědeckého výzkumu. Lineární algebra nalezne své využití i v kryptografii, při způsobu kódování a dekodování zpráv. Příkladů využití této disciplíny je mnoho, avšak rozsahem své práce mohu uvést jen několik vybraných aplikací.

Při tvorbě této bakalářské práce mi byly nápomocny softwary MatrixCalc a WolframAlpha, bez kterých by některé výpočty byly obtížnější.

1 ÚVODNÍ POZNATKY O LINEÁRNÍ ALGEBŘE

Lineární algebra je jednou ze základních disciplín matematiky a je nenahraditelnou součástí matematických, technických i informačních odvětví. Je základem pro ostatní disciplíny matematiky, kterými jsou například matematická analýza, lineární programování, funkcionální analýza, geometrie a další.

Název této matematické disciplíny „lineární algebra“ se v první polovině dvacátého století objevoval velmi málo a to v nepřilíš ujasněném smyslu. Každý z autorů si pod tímto názvem představoval něco jiného. První monografie vymezující lineární algebru se objevují až koncem čtyřicátých a začátkem padesátých let dvacátého století.

Lineární algebra se zabývá především maticemi, vektorovými (lineárními) prostory a lineárními zobrazeními (homomorfismy), determinanty a soustavami lineárních rovnic. Oproti minulosti, kdy byl hlavní zájem o determinanty a soustavy lineárních rovnic, se nyní pozornost matematiků ubírá i směrem k vektorovým prostorům a lineárním zobrazením.

Slovní úlohy, které bychom dnes zapsali soustavou lineárních rovnic, tj. jako úlohu lineární algebry, se řešily již před čtyřmi tisíci lety. Lineární algebra taková, jakou známe dnes, jako soubor definic, axiomů a vět, vznikla až na přelomu čtyřicátých a padesátých let dvacátého století.

Mezi důležité osobnosti této disciplíny patří Hermann G. Grassmann (1809 – 1877), Giuseppe Peano (1858 – 1932), nebo Salvatore Pincherle (1853 – 1936), kteří přispěli k velkému rozvoji a jinému pojetí lineární algebry.

Také rozvoj informatiky a výpočetní techniky, který umožňuje řešení velmi náročných úloh, které byly dříve jen těžko řešitelné, otvírá možnosti nejrůznějším aplikacím lineární algebry. Mezi významné výpočetní nástroje patří Mathematica, Maple, MATLAB. K těmto matematickým softwarům existuje rozsáhlá literatura navádějící začátečníky i pokročilé k efektivnímu využití programů na řešení početně obtížných úloh.

2 RANÉ APLIKACE LINEÁRNÍ ALGEBRY

Starověké civilizace řešily především praktické výpočetní problémy. Mezi tyto problémy patřila například výměra pozemku a půdy, doprava zboží a nerostných zdrojů i zdrojů k obživě. Dále také výběr daní, poplatků a výpočet dědictví. V mnoha případech tyto problémy vedly k soustavám lineárních rovnic, protože linearita je nejjednodušším vztahem mezi existujícími proměnnými.

V této části práce bych chtěla ukázat některé matematické problémy, jimiž se zabývaly starověké civilizace. Úlohy ukazují, jak lidé dříve používali a řešili systémy lineárních rovnic. Jsou dokladem algebraických znalostí ve starověkém Egyptě, Mezopotámii a Číně.

2.1 EGYPT

Obr. č. 1 – Začátek Rhindova papyru



Asi před 1650 lety před naším letopočtem byl na dvoře faraona Amenemhata III. zaměstnán písař a matematik jménem Ahmos. Ahmosův papyrus je dodnes cenným zdrojem většiny informací o starověkých egyptských matematicích. Byl objeven skotem Alexanderem Henrym Rhindem v 19. století, proto je někdy nazýván také jako Rhindův papyrus. Je to pás široký přibližně 30 centimetrů s délkou neuvěřitelných 5 metrů, obsahující 87 krátkých matematických problémů, společně s jejich řešeními.

Úlohy jsou označovány R1 až R87. (Bečvář, 2003)

Než si ukážeme jednu z úloh Rhindova papyru, je třeba říci, že staří Egyptané nepoužívali poziční zápis čísel. Pracovali s několika znaky, které symbolizovaly jednotku, desítku, stovku apod., takže násobení a dělení v tomto zápisu bylo velmi obtížné. (Anton, 2010)

PŘÍKLAD 1 - DĚLENÍ JEČMENE

Jedním z problémů Ahmosova papýru bylo rozdělit 100 jednotek ječmene mezi pět mužů v aritmetické posloupnosti tak, aby součet dvou nejmenších jednotek byl roven jedné sedmině součtu tří největších.

Označme tedy nejmenší jednotku symbolem a a symbolem d označme diferenci v aritmetické posloupnosti. Jeden muž dostane příděl a , další čtyři muži dostanou $a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d$ jednotek. Podmínky zformulované v zadání úlohy lze zapsat soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) = 100$$

$$\frac{1}{7}[(a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d)] = a + (a + d)$$

Jednoduchou úpravou získáváme ekvivalentní soustavu rovnic:

$$5a + 10d = 100$$

$$11a - 2d = 0$$

Ve snaze vyhnout se operaci dělení, staří Egypťané řešili lineární rovnice a jejich soustavy pomocí metody chybného předpokladu. Tento postup spočívá ve volbě konkrétní neznámé, která zpravidla úlohu neřešila, ale pomocí ní bylo snazší najít řešení. (Bečvář, 1999).

V našem případě zkusím zvolit $a = 1$. Z druhé rovnice nám vychází $d = 11/2$. Pokud tyto výsledky dosadíme do levé strany první rovnice, dostáváme $5 + 55 = 60$, kdežto pravá strana rovnice je rovna 100. Levá strana se bude rovnat pravé, pokud se zvětší $100/60$ krát. Zvolenou hodnotu a i vypočtenou hodnotu d proto také $100/60$ krát zvětšíme. Tudíž neznámá a , kterou jsme zvolili rovnu jedné, je rovna $100/60 = 5/3$. Zbývající neznámá d je tedy rovna $\left(\frac{11}{2}\right) \times \left(\frac{5}{3}\right) = 55/6$.

Z toho vyplývá, že první muž dostane příděl ječmene $10/6 = 5/3$, druhý $65/6$, třetí $120/6 = 20$, čtvrtý $175/6$ a poslední muž dostane $230/6 = 115/3$.

Metoda chybného předpokladu byla používána různými civilizacemi po mnoho let.

Mezi další dochované egyptské matematické texty (starší než antické) patří Moskevský papýrus, obsahující 25 různých příkladů, Káhúnské papýry obsahující tabulky $2/n$ (viz níže), Dřevěné tabulky z Achmímu a Kožený svitek nalezený současně

s Rhindovým papyrem. Současně s Rhindovým papyrem a Koženým svitkem byl také v Thébách nalezen Berlínský papyrus, který je dnes uložen v Berlínském muzeu.

$\frac{2}{3}$	2		
$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$	$1\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$	$1\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$	$1\frac{21}{36}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$	$1\frac{11}{28}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$	$1\frac{11}{312}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$	$1\frac{11}{212}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}$	$1\frac{21}{34}$	$\frac{1}{12}$	
$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{2}{27} = \frac{1}{18} + \frac{1}{54}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$	$1\frac{11}{624}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{8}$
$\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$	$1\frac{11}{220}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{33} = \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$	$1\frac{1}{6}$	$\frac{21}{36}$	

Obr. č. 2 – Tabulka $2/n$ – ukázka z první strany

Tabulka $2/n$ nalezena na jednom z Káhúnských papyrů obsahuje rozklad zlomků $\frac{2}{n}$ na kmenné zlomky, které mají v čitateli jednotku. (Výjimkou je zlomek $2/3$, který je považován za kmenný, i když v čitateli nemá jednotku.)

Tato tabulka se pravděpodobně používala k řešení některých lineárních rovnic.

Pokud se vrátíme k příkladu 1, tak s využitím rozkladu zlomků na kmenné zlomky první muž dostane přiděl ječmene $1\frac{2}{3}$, druhý muž $10\frac{1}{2}\frac{1}{3}$, atd.

2.2 BABYLONIE

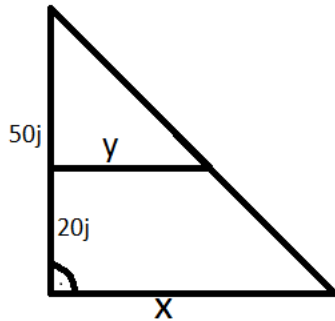
Babylonie byla jižní část Mezopotámie, nynější Irák. Centrem říše bylo město Babylón na řece Eufrat. Původními obyvateli byli Sumerové, kteří vynalezli klínové písmo, jímž psali na hliněné destičky. Z doby existence Babylonie se dochovala řada památek. Pro matematiku přínosnými památkami byly již zmíněné objevené hliněné destičky, na kterých se nacházely matematické problémy. Stáří těchto destiček se odhaduje na 1900-1600 před Kristem. (Anton, 2010).

PŘÍKLAD 2 - LICHOBĚŽNÍK

Následující problém, který jsem vybrala na ukázkou, byl nalezen na hliněné destičce okolo roku 1950 před Kristem. Zní následovně: Lichoběžník, který má obsah $320j^2$ je vyříznut z pravoúhlého trojúhelníka tak, aby jeho dolní strana byla totožná se stranou trojúhelníka, a jeho horní strana byla rovnoběžná s jeho dolní stranou.

Výška trojúhelníku je $50j$ a výška lichoběžníku $20j$. Jak velké jsou horní a dolní strana lichoběžníku? (Anton, 2010).

Obr. č. 3 – Lichoběžník



Označme x dolní šířku lichoběžníku a y horní šířku lichoběžníku. Obsah lichoběžníku $320j^2$ lze pomocí horní a dolní šířky spočítat jako $20\left(\frac{x+y}{2}\right)$. S využitím podobnosti trojúhelníků získáváme druhou rovnici $\frac{x}{50} = \frac{y}{30}$. Tyto dva vztahy vedou po úpravě k soustavě dvou lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$\frac{(x + y)}{2} = 16$$

$$\frac{(x - y)}{2} = 4$$

Dolní šířka x je součtem obou rovnic, $x = 20$, horní šířka se získá jako jejich rozdíl, $y = 12$. Dolní strana lichoběžníku měří $20j$ a horní strana $12j$.

2.3 ČÍNA

Největším dílem v dějinách čínské matematiky je Matematika v devíti knihách. Toto dílo je sbírkou 246 problémů s jejich řešeními. Bylo shromážděno a v konečné podobě sepsáno autorem Liu Huiem v roce 263 našeho letopočtu. Nicméně obsah díla se datuje k začátku dynastie Han ve druhém století před naším letopočtem.

Matematika v devíti knihách obsahuje soubory číselných úloh a metod jejich řešení. Samotná metoda bez úlohy nemá smysl, úloha bez metody není opodstatněná. (Hudeček, 2008).

Obr. č. 4 – Obsah devíti kapitol

Kapitola	Obsah
PRAVOÚHLÁ POLE	Výměry útvarů, zlomkové operace
OBILÍ A ZRNO	Trojčlenka, konverze
ODSTUPŇOVANÉ ROZDĚLENÍ	Dělení celku do podílů, trojčlenka
MENŠÍ ŠÍŘKA	Dělení obsahů součtem zlomků, odmocniny
POSOUZENÍ PRACÍ	Objemy těles a výpočty práce podle norem
ROVNOMĚRNÁ DODÁVKA	Podíly podle dvou kritérií, násobná trojčlenka
PŘEBYTEK A NEDOSTATEK	Chybný odhad a dvojitý chybný odhad
PARALELNÍ OHODNOCENÍ	Soustavy lineárních rovnic
KRATŠÍ A DELŠÍ ODVĚSNA	„Pythagorova“ věta a pravoúhlý trojúhelník

Osmá kapitola Matematiky v devíti knihách se nazývá Paralelní ohodnocení. Zde nalezneme 18 problémů, které vedou k soustavám lineárních rovnic o třech až šesti neznámých. Metoda, kterou v díle Liu Hui popisuje, je téměř identická s metodou Gaussovy eliminace, kterou v 19. století objevil Carl Friedrich Gauss. (Anton, 2010).

PARALELNÍ OHODNOCENÍ

Kapitola Paralelní ohodnocení v knize velmi vyniká. Vedle obecného postupu řešení soustavy lineárních rovnic je v ní uvedena metoda „Kladná a záporná“ obsahující pravidla pro počítání se zápornými čísly. Přípuštění existence záporných čísel jako dluhů a práce s nimi bylo nezbytné pro zachování jednotného postupu „paralelní ohodnocení“ pro všechny úlohy v osmé knize. Záporná čísla se v dějinách poprvé objevují právě v kapitole Paralelní ohodnocení. Na rozdíl od předchozích kapitol, které jsou založené na praktických příkladech ze života, tato kapitola obsahuje ilustrativní příklady, které jsou, jak se vědci domnívají, uměle vytvořené.

PŘÍKLAD 3 – SNOPY OBIÍ

„Mějme 3 snopy lepšího obilí, 2 snopy středního obilí a 1 snop horšího obilí, obsah je celkem 39 *dou*. Mějme 2 snopy lepšího, 3 snopy středního a 1 snop horšího, obsah je 34 *dou*. Mějme 1 snop lepšího, 2 snopy středního a 3 snopy horšího, obsah je 26 *dou*. Ptáme se, kolik je obsah 1 snopu lepšího, středního a horšího obilí?

Odpověď zní: 1 snop lepšího obilí je 9 celých a 1 ze 4 dílů *dou*. 1 snop středního obilí jsou 4 celé a 1 ze 4 dílů *dou*. 1 snop horšího obilí jsou 2 celé a 3 ze 4 dílů *dou*.“ (Hudeček, 2008, s. 187).

Paralelní ohodnocení znamená porovnání. Pro určitou směs věcí se stanovuje množství jednotlivých věcí a vyjadřuje se celkový obsah. Každý sloupec vytváří poměry, pokaždé se hodnotí opakovaně podle množství věcí.

„Metoda zní: Položme 3 snopy lepšího, 2 snopy středního, 1 snop horšího a obsah 39 *dou* na pravou stranu. Obilí ve středním a levém sloupci se rozmístí stejně jako vpravo. Lepším obilím vpravo vynásobíme všechny složky středního sloupce a eliminujeme ho.“ (Hudeček, 2008, s. 187 - 188).

Hlavní myšlenkou metody je odečtení menšího sloupce od většího, dokud se nevyčerpá první pozice.

Dnes bychom úlohu zapsali následující soustavou lineárních rovnic:

$$3x + 2y + 1z = 39$$

$$2x + 3y + 1z = 34$$

$$1x + 2y + 3z = 26$$

kde x = množství lepšího obilí, y = množství středního obilí, z = množství horšího obilí.

Průběh eliminace vyjadřuje následující obrázek:

Obr. č. 5 – Eliminace středního sloupce

1	2	3	→	1	6	3	→	1	3	3	→	1		3
2	3	2	→	2	9	2	→	2	7	2	→	2	5	2
3	1	1	→	3	3	1	→	3	2	1	→	3	1	1
26	34	39	→	26	102	39	→	26	63	39	→	26	24	39

Eliminovat znamenalo opakované odečítání celého pravého sloupce, dokud na první pozici levého a středního sloupce nezískáme nulu. Dále následující řádky eliminujeme stejným způsobem.

Obr. č. 6 – Paralelní ohodnocení

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & 3 \\ \hline 6 & 5 & 2 \\ \hline 9 & 1 & 1 \\ \hline 78 & 24 & 39 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 3 \\ \hline 4 & 5 & 2 \\ \hline 8 & 1 & 1 \\ \hline 39 & 24 & 39 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 3 \\ \hline 20 & 5 & 2 \\ \hline 40 & 1 & 1 \\ \hline 195 & 24 & 39 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 3 \\ \hline & 5 & 2 \\ \hline 36 & 1 & 1 \\ \hline 99 & 24 & 39 \\ \hline \end{array}$$

V prvním sloupci je vyjádřený obsah horšího obilí. Pokud chceme zjistit obsah středního obilí, použijeme stejné metody, akorát s využitím horšího obilí.

Obr. č. 7 – Odečtení levého sloupce od středního sloupce

		3
	$5 \cdot 4$	2
4		1
11	$24 \cdot 4 - 11 = 85$	39

Po eliminaci metodou paralelního ohodnocení je obsah 1 snopu horšího obilí $\frac{11}{4}$, obsah 1 snopu středního obilí $\frac{17}{4}$ a obsah 1 snopu lepšího obilí v dané směsi $\frac{37}{4}$. Úpravou zlomků dostáváme následující řešení: obsah 1 snopu horšího obilí je 2 a $\frac{3}{4}$ dou, obsah 1 snopu středního obilí je 4 a $\frac{1}{4}$ dou a obsah lepšího obilí je 9 a $\frac{1}{4}$ dou.¹

Metoda paralelního ohodnocení se od Gaussovy eliminační metody liší nepodstatně – koeficienty lineárních rovnic jsou zapsány do sloupců, opakované odčítání sloupce nahrazujeme odčítáním vhodného násobku řádku od jiného řádku. V obou případech je výsledkem eliminace trojúhelníková matice.

Matematika v devíti knihách, nebo také jinak Matematika v devíti kapitolách obsahuje kromě formulací problémů, také jejich vyřešení a výklad jednotlivých řešení. Jedná se o jeden z nejstarších dochovaných čínských matematických textů a je přínosem nejen z hlediska matematiky, ale také po jazykové stránce. Ukazuje nám vývoj jazyka klasické čínské matematiky a společně s komentáři, které napsali Liu Hui a dále také Li Chunfeng, můžeme zkoumat nejen samotný matematický jazyk a jeho vývoj, ale také komentáře jako žánr, který má své specifika. (Hudeček, 2005).

¹ dou = jednotka objemu, 1 dou = 10 l

Soustavy lineárních rovnic i jiné použití lineární algebry lze najít v historických textech mnoha starověkých civilizací. Další ukázkou může být i starověké Řecko. Mezi známou dochovanou úlohu pocházející právě z Řecka patří Archimédova úloha o dobytku, neboli Úloha o Héliových býcích. V roce 1770 ji objevil německý novinář, kritik a teolog G. E. Lessing v jednom starém řeckém kodexu. V roce 1773 ji poté zveřejnil i ve své knize. Jedná se o úlohu, která vede k soustavě sedmi lineárních rovnic o osmi neznámých. Cílem je zjistit, kolik bílých, černých, strakatých a hnědých býků a krav se pase na ostrově Sicílie ve čtyřech stádech boha Héliia. Další příklad nalezneme i v Indii, odkud pochází rukopis z Bakhšháli, jehož vznik se datuje přibližně ve čtvrtém století našeho letopočtu. Tento matematický text napsaný na březové kůře byl objeven roku 1881 u vesnice, která dnes leží na území Pákistánu. Kromě mnoha výpočetních problémů vedoucích k soustavám lineárních rovnic obsahoval i znak symbolizující nulu. I přestože se lineární algebra, takovou, jakou ji známe dnes, formovala až ve dvacátém století našeho letopočtu, její využití se datuje mnohem dříve.

3 ROVNICE KŘIVEK A POVRCHŮ PROCHÁZEJÍCÍCH ZADANÝMI BODY

V této části bakalářské práce bych chtěla popsat techniku hledání obecné rovnice, která využívá determinanty pro nalezení rovnic přímk, kružnic a obecně všech kuželoseček skrze stanovené body v rovině. Tento postup lze vhodně použít například i pro nalezení rovnice roviny a kulové plochy v prostoru a jakýchkoliv jiných útvarů, pro něž známe (obecnou) rovnici.

Inspirací pro tvorbu této kapitoly mi byla kniha *Elementary linear algebra* od autora Howarda Antona, konkrétně podkapitola *Constructing Curves and Surfaces Through Specified Points*. (Anton, 2010). Strukturu kapitoly jsem volila následovně: první jsou uvedeny křivky rovinné (přímka, kružnice, kuželosečka) a poté prostorové útvary (rovina a kulová plocha).

Předpokladem pro správné pochopení postupu je znalost determinantů a analytické geometrie.

Homogenní soustava lineárních rovnic, která má počet rovnic roven počtu neznámých, má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant matice soustavy nulový.

V této části bude vysvětleno, jak lze teorii použít k určení rovnic různých křivek a povrchů procházejících zadanými body.

3.1 PŘÍMKA PROCHÁZEJÍCÍ DVĚMA ZADANÝMI BODY

Obecnou rovnici přímky můžeme nalézt více způsoby. Jednou z možností může být například nalezení parametrické rovnice přímky ze zadaných (dvou) bodů a následné odstranění parametru vedoucí k získání obecné rovnice přímky.

PŘÍKLAD 1

Nalezněte obecnou rovnici přímky procházející danými body

$$A = (1,3) \text{ a } B = (2,5).$$

Pro nalezení parametrické rovnice přímky potřebujeme směrový vektor utvořený ze zadaných bodů A, B , $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ a jeden z bodů, např. $A = (1,3)$.

Parametrické vyjádření přímky: $X = A + t\vec{u}$

$$3.1.1 \quad x = 1 + t$$

$$y = 3 + 2t;$$

Vynásobením první rovnice (-2)krát vzniká rovnice $-2x = -2 - 2t$. Sečtením obou rovnic odstraníme parametr t z dané soustavy (3.1.1) a získáme obecnou rovnici přímky: $-2x + y - 1 = 0$.

Jiným, podle mého názoru efektivnějším způsobem, je nalezení obecné rovnice přímky pomocí determinantu vytvořeného z bodů, jimiž má přímka procházet.

Postup ukážeme nejprve na obecném příkladu, následně se zaměříme na aplikaci v několika praktických příkladech.

Uvažujme dva body $X = (x_1, y_1)$ a $Y = (x_2, y_2)$, které jsou různé. Existuje právě jedna přímka, která prochází těmito dvěma body, s obecnou rovnicí

$$ax + by + c = 0,$$

kde z koeficientů a, b je alespoň jeden různý od nuly.

Po dosazení $X = (x_1, y_1)$ a $Y = (x_2, y_2)$ máme soustavu dvou rovnic:

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

Všechny tři rovnice tvoří homogenní soustavu lineárních rovnic s neznámými a, b, c , která má za předpokladu, že alespoň jeden z koeficientů a, b je různý od nuly, netriviální řešení, když je determinant matice soustavy

$$ax + by + c = 0$$

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

roven nule, tj. platí-li

$$3.1.2 \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

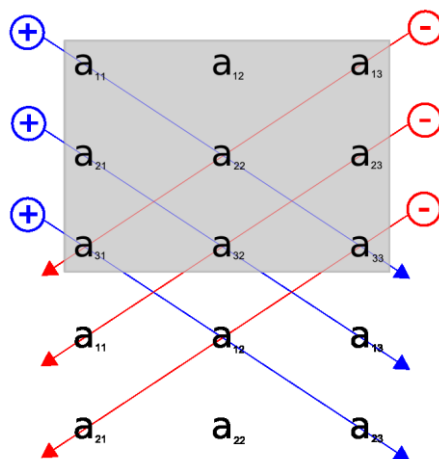
PŘÍKLAD 2

Obecnou rovnici přímky AB z příkladu 1 nalezneme pomocí dosazení souřadnic bodů A, B do vztahu (3.1.2)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

S využitím Sarrusova pravidla (obr. č. 8) dostáváme rovnici

$3x + 2y + 5 - 5x - y - 6 = 0$, po úpravě $-2x + y - 1 = 0$, mnohem efektivněji.



Obr. č. 8 - Sarrusovo pravidlo

PŘÍKLAD 3

Nalezněte rovnici přímky procházející danými body $A = (0,0)$, $B = (1,1)$.

Pokud dosadíme souřadnice do vztahu (3.1.2)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

získáváme obecnou rovnici přímky, která prochází zadanými body A, B , a to $-x + y = 0$, a můžeme ji zapsat i ve tvaru směrnicovém: $y = x$.

Výpočet determinantu můžeme provést různými způsoby. V případě determinantu čtvercové matice 3×3 , doporučuji volit Sarrusovo pravidlo. Pokud je determinant vyššího řádu než 3, neexistuje žádná pomůcka pro výpočet, ale můžeme zvolit výpočet rozvojem podle i -tého řádku, nebo j -tého sloupce nebo úpravu matice podle pravidel. Nebo můžeme využít výše doporučených výpočetních nástrojů, kterými mohou být softwary MATLAB, Maple, nebo i softwarů volně dostupných online na internetu, kterými mohou být MatrixCalc, či WolframAlpha.

PŘÍKLAD 4

Nalezněte rovnici přímky procházející zadanými body $A = (1, -10)$, $B = (5, 5)$.

Dosazením souřadnic bodů A, B do (3.1.2) dostáváme vztah

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -10 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ze kterého po vyčíslení determinantu získáváme rovnici

$$-10x + 5 + 5y + 50 - 5x - y = 0, \text{ po úpravě } -15x + 4y + 55 = 0.$$

PŘÍKLAD 5

Nalezněte rovnici přímky procházející zadanými body $A = (100, \pi)$, $B = (0, 7)$.

Dosazením souřadnic bodů A, B do determinantu soustavy získáváme

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 100 & \pi & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

s použitím Sarrusova pravidla dostáváme rovnost $\pi x + 700 - 7x - 100y = 0$,

$$\text{po úpravě } (\pi - 7)x - 100y + 700 = 0.$$

PŘÍKLAD 6

Nalezněte souřadnice bodu $A = (a, 10)$, pokud znáte obecnou rovnici přímky p procházející body A a B s využitím vztahu (3.1.2), kde $p: 2x + y + 4 = 0$ a $B = (1, -6)$.

Dosazením souřadnic bodů A, B do (3.1.2) získáváme determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 10 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{tj. } 16x + (1 - a)y - (6a + 10) = 0.$$

Vyhovující řešení získáme vynásobením první rovnice osmkrát a porovnáním členů daných rovnic.

$$16x + 8y + 32 = 0$$

$$16x + (1 - a)y + (-6a - 10) = 0$$

$$a = -7$$

3.2 KRUŽNICE PROCHÁZEJÍCÍ TŘEMI ZADANÝMI BODY

Nejprve si postup opět ukážeme na obecném příkladu, poté přejdeme k řešení konkrétních úloh.

Uvažujme tři různé body, které neleží v přímce $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2)$ a $Z = (x_3, y_3)$. Takové body určují kružnici. Z analytické geometrie známe její středovou rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

kde r je poloměr kružnice, (m, n) jsou souřadnice středu kružnice a (x, y) souřadnice bodu, kterým kružnice prochází.

Umocněním závorek a převedením rovnice na jednu stranu dostáváme obecnou rovnici kružnice:

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0$$

Vhodný tvar pro použití v nadcházejících výpočtech:

$$3.2.1 \quad a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0,$$

kde $a \neq 0, b^2 + c^2 - 4ad > 0$.

Dosazením bodů $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2)$ a $Z = (x_3, y_3)$ do rovnice (3.2.1) vzniká soustava tří rovnic:

$$a(x_1^2 + y_1^2) + bx_1 + cy_1 + d = 0$$

$$a(x_2^2 + y_2^2) + bx_2 + cy_2 + d = 0$$

$$a(x_3^2 + y_3^2) + bx_3 + cy_3 + d = 0$$

Spolu s (3.2.1) všechny čtyři rovnice tvoří homogenní lineární soustavu pro koeficienty a, b, c a d . Jako u předchozí kapitoly i zde platí, že determinant matice musí být nulový.

$$3.2.2 \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

PŘÍKLAD 1

Nalezněte rovnici kružnice procházející zadanými body A, B, C .

$$A = (3,9), B = (2,0), C = (5,3).$$

Dosazením souřadnic bodů A, B, C do determinantu čtvercové matice (3.2.2) dostáváme

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 9 + 81 & 3 & 9 & 1 \\ 4 + 0 & 2 & 0 & 1 \\ 25 + 9 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Odečtením třetího řádku od prvního, druhého a čtvrtého se vynulují všechny koeficienty čtvrtého sloupce, až na koeficient a_{43} . Následným rozvojem podle čtvrtého sloupce a zkrácením dvanácti nacházíme požadovaný výsledek.

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 - 4 & x - 2 & y & 0 \\ 86 & 1 & 9 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 30 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^7 \begin{vmatrix} x^2 + y^2 - 4 & x - 2 & y \\ 86 & 1 & 9 \\ 30 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$24x^2 + 24y^2 - 12x - 228y - 72 = 0.$$

Rovnici vydělíme číslem 12 a dostáváme obecnou rovnici kružnice procházející danými body A, B, C : $2x^2 + 2y^2 - x - 19y - 6 = 0$.

PŘÍKLAD 2

Nalezněte rovnici kružnice procházející zadanými body A, B, C .

$$A = (0,0), B = (5,0), C = (1,1).$$

Pokud dosadíme souřadnice bodů do vztahu (3.2.2), vyjde

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 0 + 0 & 0 & 0 & 1 \\ 25 + 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 + 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vypočtením determinantu pomocí rozvoje některého řádku, či sloupce, nebo s využitím některého z dostupných programů (WolframAlpha, MatrixCalc) vychází rovnice:

$$5(x^2 - 5x + y^2 + 3y) = 0$$

Po úpravě má tvar $x^2 - 5x + y^2 + 3y = 0$, odkud $(x - \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{17}{2}$ je středová rovnice kružnice určené body A, B, C .

3.3 OBECNÁ KUŽELOSEČKA PROCHÁZEJÍCÍ PĚTI ZADANÝMI BODY

V této podkapitole předkládám pouze stručný návod, jak nalézt obecnou rovnici kuželosečky, neboť princip hledání řešení je čtenáři již znám z předchozích podkapitol.

Rovnice rovinné kuželosečky (elipsy, paraboly i hyperboly a jejich degenerovaných forem) vypadá následovně:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Ke konstrukci jakékoliv kuželosečky nám stačí pět daných bodů $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3], [x_4, y_4], [x_5, y_5]$. Pokud jako u předchozích kapitol vytvoříme soustavu pěti rovnic o pěti neznámých, bude rovnice kuželosečky vypadat takto:

$$3.3.1 \quad \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

PŘÍKLAD 1

Nalezněte rovnici kuželosečky procházející body

$$A = (-3, -3), B = (-3, 4), C = (-1, -2), D = (-1, 3), E = (0, -2).$$

Dosažením souřadnic bodů A, B, C, D, E do (3.3.1) získáváme rovnici:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 9 & 9 & 9 & -3 & -3 & 1 \\ 9 & -12 & 16 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ponechám na čtenáři, zda se tento determinant pokusí vyčíslit například rozvoji podle některých řádků či sloupců a následným použitím některého z pravidel, nebo zda použije některý z volně dostupných softwarů. Já jsem pro tento příklad vybrala software MatrixCalc, ze kterého dostáváme řešení $x^2 - y^2 + x + y + 6 = 0$. Z této obecné rovnice lze s využitím klasifikace kuželoseček podle invariantů² poznat, že zadané body tvoří hyperbolu.

² Každou kuželosečku lze vyjádřit algebraickou rovnicí v následujícím tvaru $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. Uvedená rovnice má tři invarianty: determinant kuželosečky, determinant kvadratických členů a stopu malé matice. Invarianty rovnice kuželosečky lze použít ke klasifikaci jednotlivých křivek, které jsou touto rovnicí určeny.

3.4 ROVINA PROCHÁZEJÍCÍ TŘEMI ZADANÝMI BODY

Rovině $ax + by + cz + d = 0$, která prochází zadanými různými body $X = (x_1, y_1, z_1)$, $Y = (x_2, y_2, z_2)$ a $Z = (x_3, y_3, z_3)$, které jsou navíc nekolineární, odpovídá vztah:

$$3.4.1 \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

PŘÍKLAD 1

Nalezněte rovnici roviny, která prochází zadanými body

$$A = (0,0,0), B = (2,0,1), C = (2,9,2).$$

Dosazením souřadnic bodů A, B, C do levé strany rovnice (3.4.1) získáme determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

který musí být nulový. U tohoto příkladu se k řešení nabízí rozvoj podle druhého řádku.

$$\text{Tj. } (-1)^6 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -9x - 2y + 18z, \text{ a tedy } -9x - 2y + 18z = 0 \text{ je hledaná}$$

obecná rovnice roviny procházející body A, B, C .

PŘÍKLAD 2

Nalezněte rovnici roviny, která prochází zadanými body

$$A = (5,1,-3), B = (1,-1,7), C = (0,-1,2).$$

Pokud dosadíme souřadnice bodů A, B, C do levé strany vztahu (3.4.1), která je následně upravována

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 5 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^8 \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 5 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10x - 30y - 2z - 26.$$

Odkud je $10x - 30y - 2z - 26 = 0$ obecná rovnice roviny procházející zadanými body. Po jednoduché úpravě má tvar $5x - 15y - z - 13 = 0$.

3.5 KULOVÁ PLOCHA PROCHÁZEJÍCÍ ČTYŘMI ZADANÝMI BODY

Kulová plocha je množina všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu (středu kulové plochy) stejnou vzdálenost (poloměr kulové plochy).

Středová rovnice kulové plochy má tvar:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2$$

Obecnou rovnici (splňující podmínky rovnice kulové plochy) lze použít ve tvaru

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + dz + e = 0,$$

který využijeme společně se zadanými body $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$,

$C = (x_3, y_3, z_3)$ a $D = (x_4, y_4, z_4)$ k tvorbě determinantu (3.5.1)

$$3.5.1 \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

PŘÍKLAD 1

Kulová plocha je určena těmito čtyřmi body:

$$A = (-3, -3, -2), B = (-1, -5, -2), C = (-1, -1, -2) \text{ a } D = (-1, -3, 0).$$

Najděte obecnou rovnici této kulové plochy s využitím poznatků této kapitoly.

Pokud dané body dosadíme do determinantu čtvercové matice (3.5.1), získáváme rovnici:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ 22 & -3 & -3 & -2 & 1 \\ 30 & -1 & -5 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 10 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Po úpravě levé strany determinantu vypadá rovnice kulové plochy následovně:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y + 4z + 10 = 0$$

Způsobem, který v této práci prezentuji, lze řešit rovnice řady útvarů, jak rovinných tak vícedimenzionálních, pokud známe obecnou rovnici útvaru a dostatečný počet bodů k jeho určení. Ty, které jsem zvolila pro názornou ukázkou, měly za cíl vystihnout podstatu řešení. Běžně se setkáváme s podobnými úlohami na středních školách, kde se obecné rovnice přímk, kružnic i dalších kuželoseček a rovin nalézají pomocí zdlouhavého a náročného počítání soustav rovnic. Tento způsob s využitím znalosti determinantů efektivně zkracuje a zjednodušuje řešení zmíněných soustav. U náročnějších útvarů lze pro výpočet složitějších determinantů využít některého z výpočetních nástrojů.

4 MARKOVY ŘETĚZCE

Mezi další zajímavou a v současné době v praxi hojně využívanou aplikaci patří Markovovy řetězce. V textu předkládám příklady z meteorologie, ale řetězce (procesy) nachází své místo v mnohem širším spektru využití.

Markovův řetězec, pojmenovaný po ruském matematikovi Andreju Markovovi (1856 – 1922), popisuje náhodný diskrétní proces, u kterého nezávisí pravděpodobnost přechodu od současného do následujícího stavu na předchozích stavech, ale pouze na současném stavu. Předpokládá se diskrétnost času i stavů. Jako příklad mohu uvést počasí v určitém místě, které může být v jednom z následujících stavů: jasno, polojasno, nebo zataženo a tento stav se změní na jiný s určitou pravděpodobností. (Navara, 2016).

Markovův řetězec, nebo také Markovův proces, je posloupnost diskrétních celočíselných náhodných veličin $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ s hodnotami ze spočetné množiny stavů S a diskrétními časovými okamžiky $n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$, právě tehdy když

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n),$$

pro každé n nezáporné a $i_n \in Z$ takové, že $\mathbf{P}(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) > 0$. (Dvořák, 2015).

Tato definice nám říká, že nezávisí na předchozích stavech, pouze na stavu současném. Nezápornost zaručuje, že dané stavy nejsou jevy nemožné.

Maticí přechodu od stavu i ke stavu j rozumíme matici:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

kde p_{ij} je pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j v jednom kroku. Tato matice má jednotkové řádkové součty (tj. je stochastická), neboť podmínkou je úplnost soustavy jevů. (Navara, 2016).

PŘÍKLAD 1

Označme stav jasno číslem 1, polojasno číslem 2 a zataženo číslem 3, pak matice přechodu od jednotlivých stavů bude mít podobu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

kde např. p_{12} je pravděpodobnost, že se počasí změní z jasného na polojasné.

Položme $p_{11} = 0,3$; $p_{12} = 0,5$; pak pravděpodobnost p_{13} musí nutně být rovna 0,2. Pravděpodobnost změny z jasného počasí na jasné počasí v konkrétním místě např. v Plzni je 30 %. V Plzni je také 50% šance, že z jasného počasí nastane polojasné a jen 20% šance, že z jasného počasí bude zataženo. Pokud budeme pokračovat dále a pravděpodobnost změny počasí z polojasného na další definované stavy bude $p_{21} = 0,3$; $p_{22} = 0,4$ a $p_{23} = 0,3$ a ze zatažena $p_{31} = 0,1$; $p_{32} = 0,6$ a $p_{33} = 0,3$, pak matice přechodu bude mít podobu

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnosti stavů

Pravděpodobnost stavu můžeme na začátku vyjádřit stavovým řádkovým vektorem $p(0)$,

$$p(0) = (p_{11}, p_{12}, p_{13}).$$

Dále pravděpodobnost daného stavu určujeme rekurentním vzorcem:

$$p(n+1) = p(n) P,$$

který říká, že Markovovy řetězce můžeme popsat pomocí vektoru absolutních pravděpodobností stavů $p(n)$ a maticí přechodu P . (Navara, 2016).

Postupným zjednodušováním můžeme rovnost upravit až na vztah:

$$4.1 \quad p(n+1) = p(0) P^{n+1}$$

PŘÍKLAD 2

Naším počátečním stavem je jasné počasí, stavový vektor pro jasné počasí $p(0)$ je tedy roven $(0,3; 0,5; 0,2)$.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v čase $n = 1$ bude zataženo?

b) Jaká je pravděpodobnost že v čase $n = 10$ bude polojasno?

a) S využitím vztahu (4.1) pro $n = 0$ získáváme:

$$p(1) = p(0) P$$

$$\begin{aligned}
 p(1) &= (0,3; 0,5; 0,2) \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} = \\
 &= (0,09 + 0,15 + 0,02; 0,15 + 0,2 + 0,12; 0,06 + 0,15 + 0,06) = \\
 &= (0,26; 0,47; 0,27)
 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že v čase $n = 1$ bude zataženo je 27 %.

b) S využitím vztahu (4.1) a s pomocí kalkulačky matic MatrixCalc, která jednoduše spočítá i vysoké mocniny matic, dostáváme pravděpodobnosti jednotlivých stavů.

$$\begin{aligned}
 p(10) &= p(0) P^{10} \\
 p(10) &= (0,3; 0,5; 0,2) \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}^{10} = \\
 &= (0,3; 0,5; 0,2) \begin{pmatrix} 0,25 & 0,48 & 0,27 \\ 0,25 & 0,48 & 0,27 \\ 0,25 & 0,48 & 0,27 \end{pmatrix} = (0,25; 0,48; 0,27)
 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že v čase $n = 10$ bude polojasno, je 0,48.

Matice přechodu je regulární, pokud je P^n pro konečné n bez nulových prvků. Tato matice zároveň konverguje k limitní matici A typu

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

jejíž řádky tvoří stavový řádkový vektor $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, kterému se říká limitní, nebo také stacionární vektor.

Z předchozího příkladu vyplývá, že se pravděpodobnosti určitého stavu počásí po dostatečně dlouhé době ustálí na pravděpodobnosti jasného počasí 0,25; polojasného počasí s pravděpodobností 0,48 a zataženého počasí s pravděpodobností 0,27. Matice přechodu z předchozího příkladu je regulární, protože již pro $n = 1$ neobsahuje žádné nulové prvky.

Klasifikace stavů

Pro zajímavost zde uvádím klasifikaci stavů Markovových řetězců s konečně mnoha stavy.

Stav j je **dosažitelný** ze stavu i , pokud ze stavu i do stavu j lze přejít s nenulovou pravděpodobností po nějakém počtu kroků. Stavy vzájemně dosažitelné nazveme sousledné.

Stav i je **trvalý** (návrtný, rekurentní, permanentní), pokud pravděpodobnost, že se do stavu i v budoucnu vrátíme je rovna jedné.

Stav j je **přechodný** (nenávrtný, tranzientní), pokud není trvalý. To znamená, že pravděpodobnost, že se do něj v budoucnosti opět vrátíme, není rovná jedné.

Stav i může být **periodický**, jestliže má časovou periodu $n > 1$, jinak je neperiodický. Pokud je stav i periodický, musí být odpovídající prvek na diagonále p_{ii} roven nule. Příkladem periodického stavu může být oscilace mezi dvěma stavy.

Markovův řetězec se nazývá **nerozložitelný**, jestliže je každý jeho stav dosažitelný z jiného stavu, jinak je řetězec rozložitelný. (Navara, 2016).

PŘÍKLAD 3

Novákovi se chystají na dovolenou do Řecku, kde je velmi časté jasné počasí. Počasí v jednotlivých týdnech může být buď polojasné, jasné, nebo zatažené s dešťovými přeháňkami. Dlouhodobým pozorováním se zjistilo, že po jasném týdnu nastává s pravděpodobností 0,6 týden s polojasným počasím a s pravděpodobností 0,4 přijde týden, kde počasí bude zatažené s dešťovými přeháňkami. Po polojasném nebo zataženém týdnu s dešťovými přeháňkami přijde vždy s pravděpodobností 1 týden jasný. Dovolenu si chtějí zamluvit do měsíce od rozhodování. Na jaký termín si ji mají zakoupit, pokud preferují jasné počasí a tento týden je v Řecku polojasné počasí?

Stavový vektor pro polojasné počasí je $p(0) = (0,1,0)$ a matice přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Již z matice přechodu můžeme tušit, že polojasné počasí bude stav periodický, neboť na místě p_{11} se nachází nulový prvek. Také prvek p_{22} i p_{33} je nulový, může se tedy jednat o periodické stavy, ale tuto skutečnost musíme ověřit, protože výskyt nulového

prvku na diagonále je pouze podmínkou nutnou, nikoli postačující. S využitím vztahu (4.1) dostáváme:

$$p(1) = p(0)P$$

$$p(2) = p(0)P^2$$

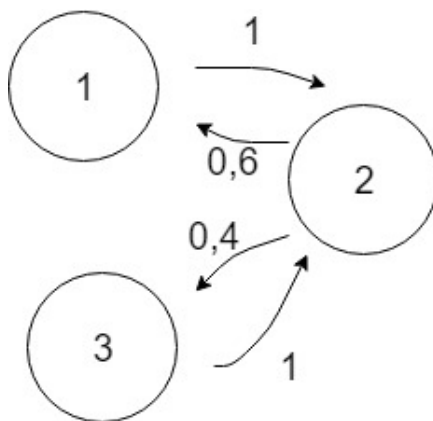
$$p(3) = p(0)P^3$$

$$p(4) = p(0)P^4$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{pmatrix} \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^4 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Po vypočtení prvních čtyř mocnin matice přechodu (Novákovi se rozhodují čtyři týdny dopředu) vidíme, že všechny stavy jsou **periodické** s periodou dva. Jelikož po polojasném týdnu přijde týden jasný, což je **jev jistý**, a stavy se opakují s periodou dva, měli by si Novákovi zakoupit dovolenou v termínu za tři týdny.

Pro znázornění Markovových řetězců se velmi často používají přechodové diagramy. Uvádím zde jednoduchý Markovův řetězec se třemi stavy z předchozího příkladu:



Obr. č. 9 – Přechodový diagram (číslo 1 značí polojasné počasí, číslo 2 jasné počasí a číslo 3 představuje zatažené počasí)

Kromě meteorologie naleznou Markovovy řetězce své využití zejména v ekonomii a bankovníctví. Používají se především pro predikování pohybu cen akcií. Zajímavým použitím Markovových řetězců je také chytrá klávesnice Android, nebo iOS, která po napsání prvních písmen doplňuje zbylé slovo, aby dávalo smysl. Například po písmenu M je 60% šance, že bude následovat písmeno A atd., tudíž klávesnice nabízí výběr slov od nejpravděpodobnějšího po méně pravděpodobné a uživateli tím usnadňuje psaní. Také algoritmus známý jako PageRank ohodnocující důležitost webových stránek, který byl vytvořen pro internetový prohlížeč Google, je založený na Markovových řetězcích.

Markovovy řetězce jsou jednou ze zajímavých praktických aplikací lineární algebry a nechají se využít všude, kde se mění stav systému s určitou pravděpodobností na stavy jiné.

5 LESLIEHO MODEL RŮSTU POPULACE

Jestli početnost populace poroste, poklesne, nebo zůstane stejná, tedy její dynamiku, určují tři základní populační charakteristiky – natalita, mortalita a disperze (emigrace a imigrace). Ze základních charakteristik poté vychází různé populační modely, které s určitou pravděpodobností predikují vývoj dané entity.

V této kapitole se zaměřuji na jeden konkrétní příklad maticového populačního modelu a tím je Leslieho model za účelem vysvětlení základních principů těchto modelů. Více informací o maticových populačních modelech lze nalézt například ve skriptech Maticové populační modely (Pospíšil, 2015), která mi byla pro obsah této kapitoly částečnou inspirací.

V roce 1945 publikoval Patrick Holt Leslie (1900 – 1972) v časopise *Biometrika* svoji nejslavnější práci *On the use of matrices in certain population mathematics*. V této práci se zabýval modelem růstu počtu samic v populaci potkanů. Jeho model připouští jedinou charakteristiku samice a tou je její věk. Při narození je věk nulový a dále postupně narůstá. Věk může nabývat pouze přirozených hodnot, avšak čas je plynulý, tudíž může nabývat všech reálných hodnot. Časovou jednotkou můžeme stanovit den, týden, měsíc, rok, podle toho jakou populaci budeme popisovat. Pokud je zkoumaným subjektem živočich dožívající se nižšího věku, je vhodnější volit jemnější časovou jednotku. Například u hlodavců, dožívajících se řádově jednotek roků bych zvolila časovou jednotku měsíc. Leslieho model růstu populace lze použít i pro lidskou populaci, kde se jako optimální časová jednotka jeví rok, v určitých případech dekády.

Věk (který je reálně spojitý) musíme rozdělit do diskrétních věkových tříd. První třídu n_1 tvoří samice od narození po první časovou jednotku, druhou třídu utvoří samice ve věku od jedné do druhé časové jednotky atd., tj. v i – té věkové třídě se nacházejí samice, které jsou staré alespoň $(i - 1)$ a mladší než i , jejich věk se tedy nalézá v polouzavřeném intervalu $[i - 1, i)$.

Dále definujeme vektor $n(t)$,

$$n(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t), \dots, n_i(t), \dots, n_n(t)),$$

kde $n_i(t)$ vyjadřuje počet samic v i - té věkové třídě v časovém okamžiku t . Počet samic nemusí být vyjádřen pouze počtem jedinců, ale i jinou jednotkou, například vztažením na jednotku plochy, nejčastěji počet zkoumaných subjektů na m^2 .

Z hlediska růstu určité populace jsou nejvýznamnější dva procesy – a to narození a smrt. Pro růst populace jsou významné i jiné procesy a vlivy, jako například migrace, počasí, životní prostředí, predace, potrava, apod. V tomto modelu tyto procesy a vlivy zanedbáme. Dále předpokládáme, že v různých věkových třídách se samice z hlediska natality a mortality od sebe neliší. Nejprve definujeme pravděpodobnost přežití z hlediska úmrtí, poté se budeme věnovat míře reprodukce z pohledu rození nových samic:

Pokud označíme P_i pravděpodobnost jevu, že samice z i - té věkové třídy, která se zde nachází v čase t , bude žít i v čase $(t + 1)$, bude P_i rovno relativní četnosti samic z i - té věkové třídy, které žijí i v následující období, tj.

$$P_i = \frac{n_{i+1}(t+1)}{n_i(t)},$$

kde pravděpodobnost P_i nazveme pravděpodobností přežití.

Hodnoty P_i závisí pouze na věku samic, jiné vlivy (ostatní podmínky) nebereme v potaz. Maximálním věkem dožití budeme rozumět takový věk, který nelze přesáhnout.

Tj. existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $P_i > 0$ pro všechny $i = 1, 2, 3, \dots, k - 1$ a $P_k = 0$.

Počet samic, které přežijí jedno časové období, můžeme vyjádřit následující rovností:

$$n_{i+1}(t + 1) = P_i n_i(t), \text{ kde } i = 1, 2, 3, \dots, k - 1.$$

Dále platí, že počet samic ve věkové třídě $(i + 1)$ je menší nebo roven počtu samic ze třídy i . Tedy $n_{i+1}(t + 1) \leq n_i(t)$. Proto pravděpodobnost přežití P_i náleží intervalu $(0, 1]$, kde $i = 1, 2, 3, \dots, k - 1$.

Počtem nově narozených samic v i - té věkové třídě v časovém intervalu $(t, t + 1]$ rozumíme hodnotu $F_i n_i(t)$, kde F_i je očekávaný počet živých dcer jedné samice z i -té věkové třídy za jeden časový interval. Hodnotu F_i nazveme mírou reprodukce ve věku i . Míra reprodukce je limitována věkem. Příliš mladé samičky, a samičky některých druhů (lidé, primáti,..) po menopauze již nemohou mít potomstvo. Označme tedy m věk pohlavní dozrállosti a M věk menopauzy. Pokud samičky (např. potkanů) nemají menopauzu, věk menopauzy se bude rovnat maximálnímu věku dožití.

$\exists m, M \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ takové, že $m \leq M$ a

$$0 = F_1 = F_2 = \dots = F_{m-1}$$

$$0 = F_{M+1} = F_{M+2} = \dots = F_k$$

$$F_m > 0, F_{m+1} > 0, F_{m+2} > 0, \dots, F_{M-1} > 0, F_M > 0$$

Pokud známe vektor distribuce věku $\mathbf{n}(t)$, kde

$$\mathbf{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t), \dots, n_{k-1}(t), n_k(t)),$$

počet nově narozených samic $n_1(t+1)$ v čase $(t+1)$

$$n_1(t+1) = F_1 n_1(t) + F_2 n_2(t) + F_3 n_3(t) + \dots + F_k n_k(t)$$

a z pravděpodobnosti přežití vyjádřený počet samic, které přežijí jedno dané období

$$n_{i+1}(t+1) = P_i n_i(t),$$

můžeme vyjádřit model růstu populace jako soubor k rovnic:

$$n_1(t+1) = F_1 n_1(t) + F_2 n_2(t) + F_3 n_3(t) + \dots + F_k n_k(t)$$

$$n_2(t+1) = P_1 n_1(t)$$

$$n_3(t+1) = P_2 n_2(t)$$

...

$$n_k(t+1) = P_{k-1} n_{k-1}(t).$$

Leslieho matice \mathbf{A} má tedy tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_{k-1} & F_k \\ P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Leslieho model růstu populace lze zapsat maticově jako

$$\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{n}(t)\mathbf{A}.$$

PŘÍKLAD 1

Uvažujme jednoduchý Leslieho model populace strukturované do tří věkových tříd, kde maximální věk dožití je 15 let. Věkové třídy budeme klasifikovat po pěti letech. Na začátku máme populaci o velikosti 1000 jedinců v každé věkové třídě a Leslieho matici ve tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n(1) = (1000, 1000, 1000).$$

Po pěti letech

$$n(2) = n(1)A,$$

$$n(2) = (1000, 1000, 1000) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{pmatrix} = (500, 1300, 5000),$$

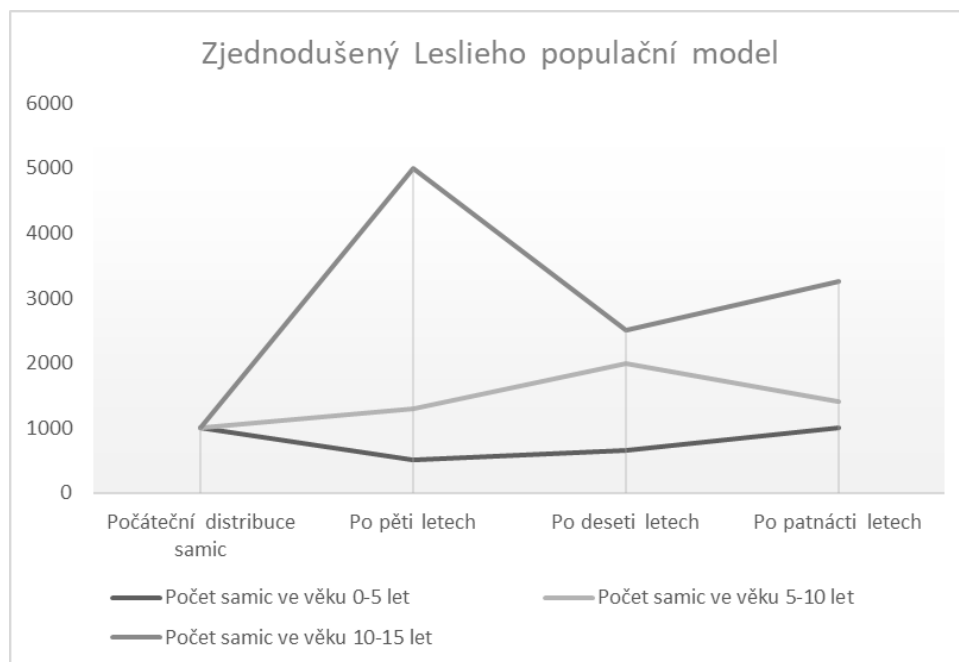
po deseti letech

$$n(3) = n(2)A = (500, 1300, 5000) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{pmatrix} = (650, 2000, 2500)$$

a po patnácti letech bude věková distribuce následující:

$$n(4) = n(3)A = (650, 2000, 2500) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{pmatrix} = (1000, 1400, 3250)$$

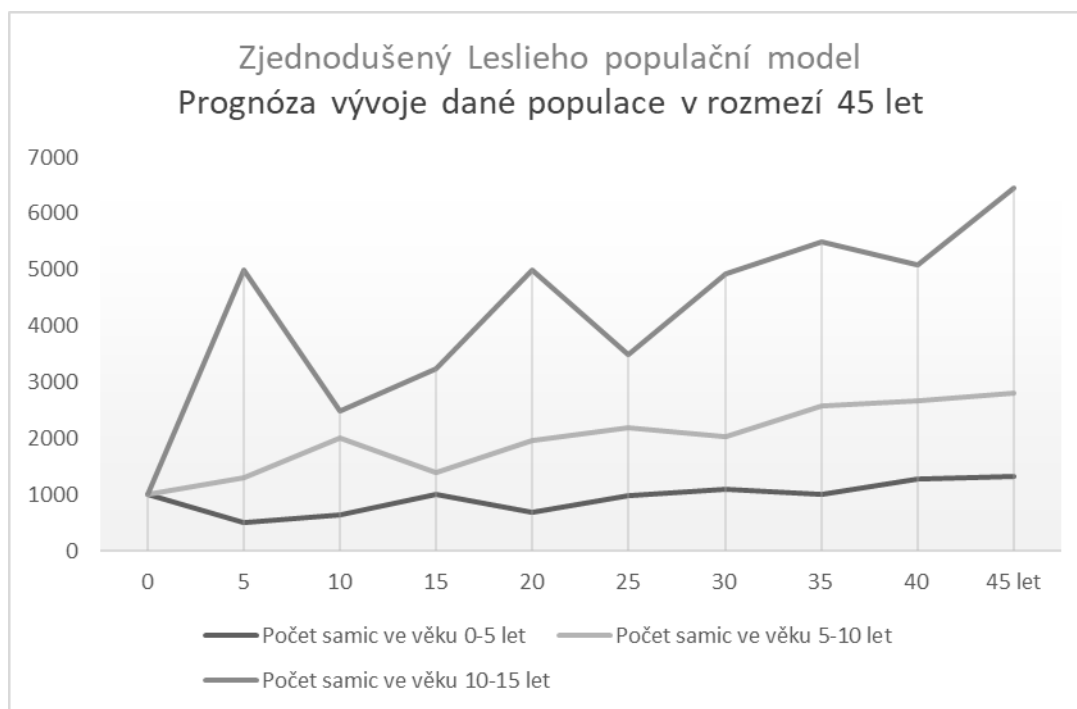
Tj. 1000 samic bude ve věku 0 až 5, 1400 ve věku 5 až 10 a zbylé budou ve věku 10 až 15.



Obr. č. 10 – Jednoduchý model populačního růstu

Tento zjednodušený model nám však neposkytuje žádnou prognózu, jak bude vývoj populace vypadat v budoucnosti. Pro takové předpovědi je nutné počítat vývoj

populace podle Leslieho modelu na delším časovém úseku. Kolísání jednotlivých věkových tříd se po určitém čase ustálí a bude možné vyslovit prognózu, zdali bude velikost populace růst, či klesat a s určitou přesností budeme schopni poznat jakým způsobem (exponenciálně, logaritmicky, přímo úměrně, aj.).



Obr. č. 11 – Jednoduchý model populačního růstu z hlediska delšího časového období

Závěrem lze konstatovat, že Leslieho model růstu populace lze použít pro predikci růstu populace dané entity při znalosti základních vstupních parametrů, kterými jsou v daném případě rozdělní počtu samic do jednotlivých věkových tříd, věková třída, kdy dochází k pohlavní zralosti a k menopauze, maximální věk dožití a pravděpodobnost přežití jedince v jednotlivých věkových třídách.

Maticových populačních modelů existuje mnoho. Za první diskrétní model růstu populace lze dokonce považovat Fibonacciho posloupnost. Tuto úlohu vymyslel Leonardo Pisánský, známější jako Fibonacci, a publikoval již v roce 1202. Patrick Holt Leslie z Fibonacciho úlohy ve svém modelu vychází. V této kapitole jsem se zaměřila pouze na jeden konkrétní model s cílem ukázat základní principy těchto modelů. Více informací o maticových populačních modelech lze nalézt například ve skriptech Maticové populační modely (Pospíšil, 2015), které zájemcům velmi doporučuji.

6 APLIKACE V GENETICE

Genetika je věda zabývající se dědičností a proměnlivostí živých soustav. Patří mezi biologické vědy, ale úzce souvisí s matematikou. Sleduje variabilitu, rozdílnost a přenos dědičných znaků mezi rodiči a potomky, i mezi jedinci též generace, což je typické například pro bakterie. Genetická informace určuje budoucí stavbu a vzhled organismu, ale také jeho predispozice k různým defektům (dědičná onemocnění aj.). Poznatky z genetiky jsou přínosné pro řadu dalších oborů, jako jsou antropologie, či mikrobiologie. Dříve se lidé genetikou zabývali pouze z teoretického hlediska, nyní však nachází své uplatnění kromě lékařství také v zemědělství při šlechtění rostlin a chovu hospodářských i jiných zvířat.

V této kapitole bude mým cílem ukázat, jak se vyšetřují dědičné rysy zvířat, rostlin i lidí s využitím znalosti umocňování matice, s pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů.

Dědičnost je ojedinělá vlastnost živých organismů. Může docházet ke dvěma typům přenosů, a to k vertikálnímu přenosu genetické informace, tedy shora dolů, z rodičů na potomky, nebo k horizontálnímu přenosu genetické informace, který se vyznačuje přenosem genetické informace mezi jedinci jedné generace. Zaměřím se pouze na vertikální přenos genetické informace u jedinců rozmnožujících se pohlavně. Nový jedinec takto získává polovinu genetické informace od otce a polovinu od matky. U bakterií, nebo u jiných organismů, které se rozmnožují nepohlavně, vzniká nový jedinec z jedince původního.

Zabýváme se tedy dědičností podmíněnou dvěma geny, označme je A , a . Pod autozomální dědičností rozumíme dědičnost, kde jsou geny uloženy na nepohlavních chromozomech – autozomech. U každého potomka se alelární pár skládá z jedné alely otcovské a jedné alely mateřské. Přenos alel z rodičů na potomky se řídí základními pravidly kombinatoriky. Jejich možné kombinace mohou být AA , Aa , aa . Jako první se problematikou dědičnosti zabýval Gregor Mendel (1822 - 1884), který formuloval 3 Mendelovy zákony dědičnosti – zákon o uniformitě, zákon o náhodné segregaci genů do gamet a zákon o nezávislé kombinovatelnosti alel. Od Gregora Mendela také pochází

kombinační, tzv. Mendelovské čtverce, které jsou využívány pro obraznou ukázkou a výpočet pravděpodobnosti rozdělení genotypů.

Páru genů AA, Aa, nebo aa budeme říkat genotyp. Každý genotyp může být buď dominantní, nebo recesivní. U dominantního genotypu se znak objeví jak u heterozygotů (Aa), tak i u homozygotů (AA). U recesivního genotypu se znak objeví jen u recesivních homozygotů (aa). Výsledek společného působení genotypů a prostředí se nazývá fenotyp. Fenotyp je soubor všech definovatelných znaků jedince. Mohou to být nejen znaky pozorovatelné a definovatelné na úrovni organismu, jako jsou hmotnost, výška, barva, ale také charakteristiky fyziologických funkcí. Příkladem může být krevní skupina.

Genotyp dětí	Genotyp rodičů					
	AA-AA	AA-Aa	AA-aa	Aa-Aa	Aa-aa	aa-aa
AA	100%	50%	0%	25%	0%	0%
Aa	0%	50%	100%	50%	50%	0%
aa	0%	0%	0%	25%	50%	100%

Obr. č. 12 – Pravděpodobnostní tabulka, příklad autozomální dědičnosti

Pod gonozomální dědičností rozumíme takovou dědičnost, kde jsou dědičné znaky uloženy na gonozomech, tedy pohlavních chromozomech. Jedná se primárně o znaky určující pohlaví. Samičí pohlaví XX předává vždy jen chromozóm X, samčí pohlaví XY předává buď chromozóm X, nebo Y, determinace pohlaví je 50:50. Dědičnost související s pohlavními chromosomy existuje trojího typu – X-vázaná dominantní, X-vázaná recesivní a Y-vázaná, které se říká Holandrická. Mezi gonozomálně dědičné onemocnění patří například hemofilie A, B, nebo daltonismus (barvoslepost).

V následujícím odstavci se ze zadání pokusíme určit distribuci genotypů v populaci určitého druhu organismu s využitím poznatků z lineární algebry, pravděpodobnosti a statistiky.

PŘÍKLAD 1

Předpokládejme, že farmář pěstuje rostliny, které jsou zastoupeny všemi třemi genotypy – AA, Aa, aa. Farmář své rostliny šlechtí, a proto každá rostlina je oplodněna pouze rostlinou s genotypem AA a poté nahrazena svým potomkem. Zkusíme určit distribuci genotypů v populaci rostlin farmáře po jakémkoliv počtu generací. (Anton, 2010).

Nechť a_n je zastoupení rostlin s genotypem AA v n -té generaci, b_n je zastoupení rostlin s genotypem Aa v n -té generaci a c_n je zastoupení rostlin s genotypem aa v n -té generaci, pro $n = 0, 1, 2, \dots$. Prvotní distribuci genotypů u zkoumaných rostlin definují koeficienty a_0, b_0, c_0 . Dále z hlediska distribuce musí platit následující rovnost:

$$a_n + b_n + c_n = 1, \text{ pro } n = 0, 1, 2, \dots$$

Ze zadání příkladu společně s předchozí tabulkou můžeme utvořit následující rovnice:

$$a_n = a_{n-1} + 0,5b_{n-1}$$

$$b_n = c_{n-1} + 0,5b_{n-1}$$

$$c_n = 0.$$

Pokud definujeme vektor $x_n = (a_n, b_n, c_n)$, $x_{n-1} = (a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1})$ a pravděpodobnostní matici:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

která vychází z předchozí tabulky a určuje pravděpodobnost distribuce genotypů AA, Aa, aa, potom můžeme soustavu předchozích tří rovnic zapsat maticově:

$$x_n = x_{n-1}P$$

Dále platí:

$$x_n = x_{n-1}P = x_{n-2}P^2 = \dots = x_0P^n$$

Pro nalezení libovolného x_n , nejprve vyjádříme matici P^n rozkladem na součin matic. Tím si ušetříme zdlouhavého počítání. Když nalezneme diagonální matici podobnou matici P , tj. matici P diagonalizujeme, bude existovat regulární matice R a P půjde vyjádřit vztahem $P = R^{-1}DR$. Matice P se na n -tou snáze vypočte, je-li takto rozložená na součin, protože platí:

$$P^n = R^{-1}D^nR$$

kde R je regulární matice a D je diagonální matice, přičemž platí následující vztah:

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

Uvažujme tedy matici

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Vlastní čísla $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 0$ nalezneme vyřešením rovnice $\det(P - \lambda E) = 0$. Vlastní čísla matice P tvoří diagonální matici D , u které platí následující vztah pro umocňování matice:

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro nalezená vlastní čísla definujeme vlastní vektory. Vlastní vektor matice D je takový nenulový vektor u , pro který existuje číslo λ takové, že platí: $Pu = \lambda u$, neboli $(P - \lambda I)u = \vec{0}$. Číslo λ nazýváme vlastním číslem matice P . Vlastními vektory jsou vektory u_1, u_2, u_3 .

Např. pro $\lambda_3 = 0$ platí:

$$(P - \lambda I)u = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + 0,5u_2 \\ 0,5u_2 + u_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Vlastní vektor $u_3 = (1, -2, 1)$ jsme získali řešením dané rovnice. Obdobným způsobem dostáváme $u_1 = (1, 0, 0)$ a $u_2 = (1, -1, 0)$.

Vlastní vektory utvoří sloupce regulární matice R , tj.:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K R je inverzní matice

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní známe vše potřebné pro určení distribuce genotypů u n -té populace daných rostlin.

$$x_n = x_0 R^{-1} D^n R$$

$$x_n = (a_n, b_n, c_n) = (a_0, b_0, c_0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_n = (a_0 + b_0 + c_0 - 0,5^n b_0 - 0,5^{n-1} c_0; 0,5^n b_0 + 0,5^{n-1} c_0; 0)$$

S využitím rovnosti $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ dostáváme explicitní vyjádření zastoupení daných genotypů AA, Aa, aa v n -té generaci rostlin.

$$a_n = 1 - 0,5^n b_0 - 0,5^{n-1} c_0$$

$$b_n = 0,5^n b_0 + 0,5^{n-1} c_0$$

$$c_n = 0$$

Z limitního hlediska $a_n \rightarrow 1, b_n \rightarrow 0, c_n = 0$, z toho vyplývá, že po dostatečně dlouhém čase budou v populaci rostlin pouze rostliny s genotypem AA.

AUTOZOMÁLNÍ RECESIVNÍ DĚDIČNOST

Je mnoho genetický chorob (cystická fibróza, srpkovitá anémie, Wilsonova choroba, syndrom Hurlerové), které se dědí autozomálně recesivně. To znamená, že jedinec s genotypem AA je zdravý, jedinec s genotypem Aa je přenašeč onemocnění, ale onemocnění se u něj neprojevuje a jedinec s genotypem aa bývá postižený daným onemocněním. Obě pohlaví jsou postižena stejně často. Typicky se jedná o horizontální typ dědičnosti, rodiče jsou obvykle zdraví (homozygoti, nebo přenašeči onemocnění), nemoc se projevuje u potomků, tj. ob generaci.

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Obr. č. 13 – Tabulka určující pravděpodobnost výskytu postiženého potomka při předpokladu, že rodiče jsou heterozygotní jedinci. Potomek má čtvrtinovou pravděpodobnost, že bude postižen recesivní genetickou chorobou.

PŘÍKLAD 2

Uvažujme chovatele chrtů. Toto plemeno, má autozomálně recesivní genetické onemocnění progresivní retinální atrofii. Jednou z možností chovatele je vždy křížit fenu jakéhokoliv genotypu se zdravým psem (dominantním homozygotem AA). Mohou nastat tyto kombinace: AA-AA, AA-Aa, AA-aa. To by znamenalo, že žádný potomek, nebude postižen zmíněným onemocněním. Avšak zde bude procento potomků, kteří budou tuto nemoc přenášet. Označme $x_n = (a_n, b_n)$, kde a_n je podíl populace s genotypem AA v n-té generaci a b_n je podíl populace s genotypem Aa (přenašeč onemocnění) v n-té generaci. Jelikož křížíme psy, kde alespoň jeden z rodičů je genotyp AA, bude se jednat o podobnou úlohu jako s farmářem. (Anton, 2010).

$$x_n = (a_n, b_n) = x_0 R^{-1} D^n R, \text{ kde}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix},$$

vlastní čísla $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5$, vlastním číslům odpovídající vlastní vektory u_1, u_2 a regulární matice R jimi tvořená,

$$u_1 = (1,0), u_2 = (1,-1)$$

$$R = R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Z tohoto zadání získáváme rovnici

$$x_n = (a_0, b_0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (a_0 + b_0 - 0,5^n b_0; 0,5^n b_0),$$

a s využitím rovnosti $a_0 + b_0 = 1$ dostáváme podíl populace s genotypem AA a s genotypem Aa v n -té generaci. Pokud bude n dostatečně velké, podíl populace s genotypem AA se bude blížit jedné.

$$a_n = 1 - 0,5^n b_0$$

$$b_n = 0,5^n b_0$$

Prostřednictvím vektorů a matic, jejich matematickým zpracováním (násobením, umocňováním) lze určit možné genotypy potomstva sledovaného páru i jejich poměr. Můžeme nasimulovat výsledky šlechtitelských programů i pro následující generace. S využitím znalosti umocňování matic, nebo s využitím některých programů s touto dovedností, lze tyto postupy využívat pro obrovská n . To je přínosem pro šlechtitelskou práci, aby bylo možné vyloučit (eliminovat) genetické poruchy, např. dysplazii u psů. Matematické šetření s využitím lineární algebry a pravděpodobnosti a statistiky slouží i v případě ohrožených druhů. Zde je zapotřebí držet jejich počet na určité výši, jinak dochází k degeneraci, jako tomu bylo v případě šlechty ve středověku (příbuzenské svazky).

ZÁVĚR

Práce je zaměřena na možnosti a aplikace lineární algebry v celé řadě vědních oborů a její využití v praxi.

Kapitoly obsahují teoretickou průpravu i praktické ukázky řešených příkladů vztahujících se k dané problematice. U příkladů je nastíněno řešení tak, aby studenti pochopili postup a mohli pracovat s podobnými příklady samostatně. Práce může sloužit i jako důkaz propojení lineární algebry s praxí.

RESUMÉ

This Bachelor Thesis is focused on the possibilities and applications of linear algebra in a wide range of science disciplines and its application in practical life.

The chapters contain theoretical preparation and practical examples of solved problems related to the given issue. In the examples, the solution is outlined so the students understand the procedure and can work with similar examples separately. The Bachelor Thesis can also serve as evidence of linkage of linear algebra with practical life.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

ANTON, Howard. Elementary linear algebra. 10th ed. Hoboken, NJ: Wiley, c2010. ISBN 9780470432051.

BÁRTL OVÁ, Tereza a spol. Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla. Archimedova úloha o dobytku. Vyd.1. Praha: Matfyzpress 2012. str 99-108. ISBN: 978-80-7378-228-3

BEČVÁŘ, Jindřich. Algebra v 16. s 17. století. Vyd. 1. Praha: Prometheus, 1999. Dějiny matematiky, 12. svazek. ISBN 80-7196-150-7.

BEČVÁŘ, Jindřich. Lineární algebra. Vyd. 2. Praha: Matfyzpress, 2002. ISBN 80-85863-92-8.

BEČVÁŘ, Jindřich; Bečvářová, Martina; Vymazalová, Hana: Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus, 2003. 80-7196-255-4, pp. 32-148

BEČVÁŘ, Jindřich. Z historie lineární algebry. Vyd. 1. Praha: Matfyzpress 2007. ISBN 978-80-7378-036-4.

BICAN, Ladislav. Lineární algebra a geometrie. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9.

CABALKOVÁ, Petra. Sběrka příkladů z Markovských řetězců (s využitím Matlabu). Bakalářská práce. Brno: Masarykova univerzita, 2011. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/324014/prif_b/MarkovskeRetezce.pdf

CASWELL, Hal. Matrix population models: Construction, analysis, and interpretation. 2. vydání. Massachusetts, USA. 2006. ISBN 9780878931217

DVOŘÁK, Jiří. Markovovy řetězce. Praha. 2015. Učební text. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dvorak/teaching/2014_2015/NMFM310/NMFM310_2015_kap4.pdf

HANUŠ, Petr. Sběrka řešených příkladů k MB101. Diplomová práce. Brno: Masarykova univerzita, 2010. Dostupné z https://is.muni.cz/th/139893/fi_m/Diplomka.pdf

HRON, Karel, KUNDEROVÁ, Pavla. Markovovy řetězce a jejich aplikace. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. ISBN 978-80-244-3132-1.

HUDEČEK, Jiří. Jazyk staročínské „Matematiky v devíti kapitolách“ a jejich komentářů. Diplomová práce. Praha: Univerzita Karlova, 2005. Dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120138486>

HUDEČEK, Jiří. Matematika v devíti kapitolách. Sběrka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a další z doby Tang. Překlad,

vysvětlivky, úvod. Praha: Matfyzpress, 2008. Dějiny matematiky, sv. 37. ISBN 987-80-7378-046-3.

JANYŠKA, Josef, SEKANINOVÁ, Anna. Analytická teorie kuželoseček a kvadratick. Vyd. 2. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2604-9.

KRYNICKÝ, Martin. Učebnice matematiky pro gymnázia. Kulová plocha. Dostupné z: http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/07_Analyticka_geometrie/5_Kuzelosecky/7523_Kulova_plocha.pdf

KŘIVÝ, Ivan. Modely v populační biologii a ekologii. Ostrava: Aleko, 1991. ISBN 80-7042-047-2.

MURRAY, James Dickson. Mathematical biology. 3. vydání. New York: Springer, 2003. ISBN 0-387-95223-3.

NAVARA, Mirko. Markovovy řetězce. Učební text. Dostupné z: http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/Markov_print.pdf

OTOVÁ, Berta, MIHALOVÁ, Romana, VYMLÁTIL, Jiří. Základy biologie a genetiky. 2. vydání. Praha: Karolinum, 2009. ISBN 978-80-246-1709-1.

PECHA, Lukáš. Babylónie. Praha: Libri, 2006. Stručná historie států. ISBN 80-7277-137-X.

POSPÍŠIL, Zdeněk. Maticové populační modely. Učební text. Brno: Masarykova univerzita, 2015. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~pospisil/MathBio/MatPopMod.pdf>

PRITCHARD, Dorian J., KORF, Bruce R.. Základy lékařské genetiky. 1. vydání. Praha: Galén, 2007. ISBN 978-80-7262-449-2

SOUKUPOVÁ, Milena, SOUKUP, František. Kapitoly z lékařské biologie a genetiky II. 1. vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-581-7.

ŠÍPEK, Antonín. Genetika. Učební text. Dostupné z: <http://www.genetika-biologie.cz/soubory/Genetika.pdf>

TLUSTÝ, Pavel. Lineární algebra a její aplikace. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2003. ISBN 80-7040-650-x.

C. TRIMBLE & ASSOCIATES. Student solutions manual, Elementary linear algebra, applications version: Howard Anton, Chris Rorres. 10th ed., Applications version. Hoboken, N.J: Wiley, 2010. ISBN 9780470458228.

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ

Obr. č. 1 – Začátek Rhindova papyru. Zdroj: BEČVÁŘ Jindřich, Bečvářová Martina, Vymazalová Hana: Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus, 2003. pp. 32

Obr. č. 2 – Tabulka $2/n$ – ukázka z první strany. Zdroj: BEČVÁŘ Jindřich, Bečvářová Martina, Vymazalová Hana: Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus, 2003. pp. 55

Obr. č. 3 – Lichoběžník. Zdroj: Vlastní zpracování.

Obr. č. 4 – Obsah devíti kapitol. Zdroj: HUDEČEK, Jiří. Matematika v devíti kapitolách. Sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a další z doby Tang. Překlad, vysvětlivky, úvod. Praha: Matfyzpress, 2008. pp. 9

Obr. č. 5 – Eliminace středního sloupce. Zdroj: HUDEČEK, Jiří. Matematika v devíti kapitolách. Sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a další z doby Tang. Překlad, vysvětlivky, úvod. Praha: Matfyzpress, 2008. pp. 188

Obr. č. 6 – Paralelní ohodnocení. Zdroj: HUDEČEK, Jiří. Matematika v devíti kapitolách. Sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a další z doby Tang. Překlad, vysvětlivky, úvod. Praha: Matfyzpress, 2008. pp. 188

Obr. č. 7 – Odečtení levého sloupce od středního sloupce. Zdroj: HUDEČEK, Jiří. Matematika v devíti kapitolách. Sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a další z doby Tang. Překlad, vysvětlivky, úvod. Praha: Matfyzpress, 2008. pp. 189

Obr. č. 8 - Sarrusovo pravidlo. Zdroj:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Sarrusovo_pravidlo#/media/File:Sarrusovo_pravidlo.png

Obr. č. 9 – Přejchodový diagram. Zdroj: Vlastní zpracování.

Obr. č. 10 – Jednoduchý model populačního růstu. Zdroj: Vlastní zpracování.

Obr. č. 11 – Jednoduchý model populačního růstu z hlediska delšího časového období.

Zdroj: Vlastní zpracování.

Obr. č. 12 – Pravděpodobnostní tabulka, příklad autozomální dědičnosti. Zdroj:

Vlastní zpracování.

Obr. č. 13 - Tabulka určující pravděpodobnost výskytu postiženého potomka při předpokladu, že rodiče jsou heterozygotní jedinci. Zdroj: Vlastní zpracování.

Použité softwary:

Matematický kalkulátor WOLFRAMALPHA. Dostupný z:

<https://www.wolframalpha.com/>

Kalkulačka matic: MATRIXCALC. Dostupná z: <https://matrixcalc.org/cs/>

Tvorba diagramů: DRAW.io. Dostupné z: <https://www.draw.io/>