ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

POPULARIZACE MATEMATIKY PROSTŘEDNICTVÍM GEOCACHINGU

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tereza Činčerová

Přírodovědná studia - obor Matematická studia

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň 2018

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím literatury a zdrojů informací uvedených na konci práce.

V Plzni, 24. dubna 2018

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu práce PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D. za výbornou spolupráci, cenné rady a připomínky při tvorbě práce.

Dále bych ráda poděkovala své rodině za podporu a pomoc v průběhu celého studia.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

SEZNAM ZKRATEK

GC	Geocaching
USA	Spojené státy americké
GPS	Globální polohový družicový systém
AP	Aritmetická posloupnost
GP	Geometrická posloupnost
KO	Kružnice opsaná
KSS	Kartézská soustava souřadnic
FP	Fibonacciho posloupnost

ÚVOD

Geocaching je v současné době velmi oblíbená outdoorová hra na rozhraní mezi turistikou a sportem. Hra vznikla v roce 2000 v USA a během pár následujících let se rozšířila téměř do celého světa. Vznikla díky technickému pokroku v oblasti GPS. V dubnu 2017 měl geocaching po celém světě kolem 7 milionů registrovaných hráčů a zhruba 3 miliony aktivních keší [Zdroj: www.geocaching.com/blog]. Díky technologickému rozvoji je hra dostupná téměř pro všechny, jelikož GPS přijímače se dnes nacházejí ve všech chytrých zařízeních.

Matematika je často označována za královnu věd. Je jedním z prvních předmětů vyučovaných na základních školách a je využívána po celý život. Při studiu mnoha oborů se bez ní nelze obejít stejně jako v praktickém životě. Přesto nepatří mezi nejoblíbenější předměty.

Cílem bakalářské práce je zjistit, zda lze využít tuto populární hru pro budování lepšího vztahu k matematice zejména u dětí a dospívajících. A také jestli mohou keše motivovat ke studiu matematiky.

1 GEOCACHING

Geocaching (GC) je v současné době velmi oblíbená hra a také zábava pro všechny věkové kategorie. Je převážně outdoorová a nachází se na rozhraní mezi sportem a turistikou. Hra spočívá v hledání skrytého objektu zvaného cache (česky keš), o jehož umístění jsou známy pouze jeho geografické souřadnice. Cílem je na daných souřadnicích najít fyzické umístění keše. K hledání keší se užívá navigační systém GPS[1]. Při hledání se používají turistické přijímače GPS. Dříve to byly zejména turistické navigační přístroje, nyní hráči využívají hlavně aplikace v chytrých zařízeních. Člověk, který se GC zabývá je označován jako geocacher (česky geokačer).

Keš je nepromokavá uzavíratelná krabička či jiná vhodná nádoba ukrytá ve skrýši. V nalezené keši tradičně bývá logbook (zápisník pro nálezce), tužka a většinou další předměty - dárky pro nálezce nebo předměty, jež mohou být vyjmuty a uloženy do jiné keše, tzv. travel bug. Na oficiálním webu www.geocaching.com má každá keš svůj listing neboli popis. V popisu bývá kromě souřadnic dále uveden owner (vlastník), typ keše, popis, velikost, obtížnost nalezení a obtížnost terénu a také nápověda, tzv. hint. Popis může obsahovat zajímavosti o lokalitě, v níž se keš nalézá, případně instrukce nutné pro nalezení keše. Na webové stránce každé keše lze zalogovat návštěvu a sdělit dojmy či nenápadnou nápovědu dalším geokačerům a také poděkovat zakladateli keše.

Obecně se keše umisťují na místa, která jsou něčím zajímavá, a přesto nejsou turisty tolik navštěvovaná. V popisu keše může být vysvětleno, čím je místo zajímavé nebo významné a proč byla keš založena právě zde. Keše jsou umisťovány i na místech, která jsou sice frekventovanější, ale takovéto umístění keše dělá lov ještě atraktivnější, zejména pro hravé geokačery. Úkolem geokačera je odlovit takovou keš bez přítomnosti tzv. mudlů neboli lidí, kteří se geocachingu nevěnují.

[1] GPS je globální polohový družicový systém, který vytváří Ministerstvo obrany USA. Tento systém umožňuje určování polohy a času na Zemi. Data jsou dostupná nepřetržitě, jedinou omezující podmínkou je přímá viditelnost na oblohu. GPS tedy nelze nebo pouze s velkým omezením využívat v podzemí, tunelech, budovách a husté vegetaci, což může geokačerovi ztížit hledání. [Zdroj: Gregořica, 2011]

1.1 HISTORIE GEOCACHINGU

Za zrození geocachingu je považován 1. květen 2000, kdy tehdejší americký prezident Bill Clinton odstranil umělé rušení signálu GPS. Což znamenalo zpřesnění polohy na pár metrů z původních několika desítek až stovek metrů. Během pár následujících dní vznikl geocaching v USA.

Umístění první keše proběhlo 3. května 2000. Byla umístěna Davem Ulmerem na souřadnicích N 45° 17.460 W 122° 24.800. Tehdy jí umisťoval jako první keš hry zvané „GPS Stash Hunt“ a nazval ji Stash#1 (dalo by se přeložit jako tajná skrýš). Keš byla nalezena hned následujícího dne, nálezce je však sporný. Během pár dní se GC dostal za hranice USA a to díky Peteru McKellarovi, který 12. května 2000 ukryl na Novém Zélandu první keš mimo USA. O tři dny později byla ukryta keš ve třetí zemi - v Chile.

Dave Ulmer 1. června 2000 oznámil, že oficiálním názvem této hry se stává „Geocaching“ a původní Stash Hunt se stal názvem neoficiálním. Stalo se tak na popud Matta Stuma, který tvrdil, že původní název zní nelegálně.

Geocaching se během pár následujících měsíců stal celosvětovou hrou. První keš v Evropě byla ukryta 3. června 2000, konkrétně v Irsku. Do Čech se geocaching dostal zhruba rok po svém vzniku. Nejstarší českou keší se stala Tex-Czech, ukrytá v národním parku Štramberk, jež je doposud aktivní. V dubnu 2017 bylo po celém světě ukryto více než 3 000 000 aktivních keší z toho 50 000 v České republice.

GC na Plzeňsku začal 26. června 2004, kdy geokačer Toniczech ukryl nedaleko Radyně první keš.

1.2 OFICIÁLNÍ STRÁNKA GEOCACHINGU A APLIKACE DO CHYTRÝCH ZAŘÍZENÍ

Oficiální stránkou GC je www.geocaching.com. Tato stránka obsahuje informace o všech keších světa včetně virtuálních. Každý zaregistrovaný hráč zde může keše vyhledávat, zakládat a získávat o nich informace. Vyhledávat lze dvěma způsoby, první je hledání v mapě a druhá hledání podle názvu, GC kódu či města/státu. Pro vyhledání keší lze nastavit různé filtry – typ, velikost, obtížnost keše… Lze také vyhledávat cestovní předměty – mince, štítky… Po vyhledání keše se hráči zobrazí tzv. listing neboli popis keše.

Dále zde najdeme odkaz na komunitu geokačerů. Ta obsahuje diskusní fórum, návod jak se stát dobrovolníkem, oficiální blog, kalendář akcí (eventů) a v neposlední řadě videa související s GC. Je zde také odkaz na GC obchod, kde lze koupit potřeby pro zakladatele keší i pro hráče.

Aplikace do mobilu

Hráč GC má na výběr z více aplikací, které mu usnadní hledání a lovení keší. Aplikace jsou oficiální, neoficiální, placené i neplacené. Oficiální aplikace nabízí společnost Groudspeak a to ve dvou verzích. První vhodnou pro začátečníky, která má méně funkcí a je zdarma, tzv. „Geocaching Intro". Druhou prodávanou pod názvem „Geocaching" vhodnou pro pokročilé hráče, ta je však již placená. Má mnohem více funkcí než Geocaching Intro, a proto je vhodnější pro hráče, kteří se GC opravdu věnují.

Nejoblíbenější neoficiální aplikací pro Android je „c:geo". Poskytuje všechny potřebné funkce jako je vyhledávání keší v okolí, ukládání souřadnic, logování, nabízí několik druhů mapových podkladů, je možné stáhnout keše do offline režimu a mnoho dalšího. Jedinou nevýhodou je vysoká náročnost na datové přenosy. [Zdroj: Hron, 2018]

1.3 KATEGORIZACE KEŠÍ

1.3.1 TYPY KEŠÍ DLE CHARAKTERU

Nejrozšířenějšími typy keší jsou

a) *Tradiční keše* – nejjednodušší typ keše. Krabička je umístěna přímo na souřadnicích, uvedených v listingu.

b) *Multi keše* – zadání souřadnic není přímé. Je třeba nalézt několik dalších „stage", ve kterých jsou informace k nalezení finální skrýše. Souřadnice první keše jsou zadané (typově je to tradiční keš). Potřebné informace k následujícím keším mohou být zadané šifrou nebo je nutné splnit nějaký úkol či vyhledat informaci. Zvládnutí úkolu nasměruje geokačera buď na následující keš, nebo mu dá informace k nalezení keše finální. Multi keše mají mnoho podob, společným znakem je postupné hledání řetězce pomocných skrýší nebo plnění úkolů směřujících k nalezení finální skrýše.

c) *Mystery keše* (českými geokačery nazývaná mysterka) – souřadnice v listingu ukazují do blízkého okolí keše, ale přesné souřadnice musí geokačer získat například prostudováním informací, vyluštěním hádanky, šifry, příkladu apod.

Další méně používané typy keší

d) *Webcam* (český výraz webka) – keš se neloví klasicky jako ostatní „krabičkové“ keše, ale přivedou geokačera před konkrétní webkameru a dojde k virtuálnímu "odlovení keše" (geokačer se nechá vyfotit). Následně se snímek z webkamery uloží a použije jako důkaz k elektronickému zalogování.

e) *Letterbox hybrid* – kombinace geocachingu a starší hry letterboxing. Hledání skrýše probíhá jen z části pomocí GPS, z části pak podle různých indicií (např. slovní popis cesty, fotografie). Oproti tradiční keši obsahuje navíc razítko, které si nálezce může otisknout do svého deníčku.

f) *Virtuální cache* – na souřadnicích není žádná krabička. Online log je uznán geokačerovi po přiložení fotky nebo zodpovězení určitých informací, které najde právě na finálních souřadnicích. Tyto keše již nelze zakládat, ale stále existují, takže je možné je hledat.

g) *Earth keše* – jsou podobné virtuálním keším. S tím rozdílem, že keše se zakládají na místech, která jsou zajímavá geologicky nebo jinak spojená s planetou Země. Obvykle se posílají odpovědi na zadané otázky ownerovi, který poté uzná log.

h) *Event keše* – není klasická keš, je to spíše setkání geokačerů. Na setkání si geokačeři vyměňují zkušenosti, travelbugy, geocoiny, atp. Obdobou je *Cache In Trash Out Event* (CITO), při které je cílem vyčistit určité území od nepořádku.

i) *Wherigo keše* - propojení geocachingu a hry wherigo[2]. Od klasické hry wherigo se liší v podstatě pouze tím, že na konci cesty je uložená keš.

[2] Hra Wherigo – hra spočívá v hraní dobrodružných her (adventur) v reálném životě namísto hraní na počítači. Rozdíl oproti GC je, že hráč se až během hry dozví, co ho na daném místě čeká, co musí splnit za úkol a jaké jsou další možnosti postupu nikoliv dopředu z listingu jako u klasických keší.

1.3.2 TYPY KEŠÍ DLE VELIKOSTI

- *Micro* – nejmenší keš velikosti zhruba jako je kapsle od filmu do fotoaparátu, obecně do 100 ml. Díky její velikosti ji lze uložit téměř všude. Využívá se toho zejména u keší uložených ve městech či ve skrýších, kam se větší krabička nevejde. V keši se obvykle nachází jen malý logbook a tužka menších rozměrů. Výjimečně lze v krabičce najít malé předměty na výměnu, například mince nebo odznaky. Můžeme se setkat i s keší typu nano, která nemá vlastní kategorii při zakládání. Obvykle se do ní nevejde více než proužek papíru místo logbooku.
- *Small* - objem od 100 ml až do 1 litru. Velikost keše poskytuje možnost širokého výběru možných skrýší, ale stále se do ní nevejde moc předmětů – běžně obsahuje logbook, tužku a pár malých předmětů, třeba figurky z kinder vajíčka nebo turistické známky.
- *Regular* – velikost vyvažující dobré možnosti úkrytu a dostatečného objemu pro předměty na výměnu. Klasicky v ní nalezneme logbook, tužku a navíc třeba plyšovou hračku, CD…
- *Large* – kromě klasických věcí se do ní vejdou i větší předměty například knihy. Oproti regular keši je již těžší najít vhodný úkryt.
- *Other* – jsou schránky, které nelze zařadit do výše zmíněných kategorií. Nemusí to být nutně nějaký box. V listingu bývá geokačer upozorněn na neobvyklý tvar keše a někdy tam najde i bližší popis, co má vlastně očekávat. Příkladem mohou být plastové kancelářské desky s magnetickou fólií z jedné strany a papírem místo logbooku ze strany druhé.

1.4 ÚROVEŇ OBTÍŽNOSTI A TERÉNU V OKOLÍ KEŠE

Tyto údaje jsou vždy uvedeny v listingu, neboť jsou pro geokačery zásadní. Udávají, jak náročné je keš najít a v jakém terénu se bude geokačer pohybovat. Jednotlivé úrovně jsou jasně definované, ale skutečná obtížnost může být ve skutečnosti trochu jiná. Každý vnímá obtížnost jinak a při hledání keše záleží i na náhodě a štěstí.

1.4.1 TERÉN

Popisuje obtížnost pohybu v terénu po cestě ke keši a kolem ní. Terén je rozdělen na pět úrovní (v listingu jsou znázorněny hvězdičkami). Je vždy uvedena obtížnost nejtěžšího úseku celé cesty, která je klasifikována za běžných podmínek (sucho, doba během dne) a pro člověka průměrné výšky. Uveďme pro představu dvě úrovně - nejlehčí a nejtěžší (oficiálně).

Stupeň 1 – obecně zpevněné cesty: silnice, lesní a polní cesty. Cesty jsou vhodné pro všechny včetně rodin s kočárky, vozíky pro invalidy, bruslaře. Sklon cesty by neměl překročit 10 procent, keš by měla být umístěna do 1 metru nad zemí a do 150 metrů od nejbližšího místa k zaparkování.

Stupeň 5 – jen pro velmi zdatné. Je to velmi náročný terén, který může vyžadovat i speciální vybavení – horolezecké, potápěčské.

Podle neoficiálního rozlišení počet hvězdiček odpovídá počtu končetin nutných pro zdolání keše.

1* = ke keši lze doskákat po jedné noze nebo dojet na invalidním vozíku, kolečkových bruslích atp.

2* = ke keši se dá bez problémů dojít po dvou nohách

3* = během cesty je nutné se občas přidržet jednou rukou

4* = je třeba někam vylézt, potřeba jsou obě nohy i obě ruce

5* = je nutné nějaké vybavení – horolezecké či potápěčské vybavení, člun, žebřík…

1.4.2 OBTÍŽNOST

Udává, jak náročné je objevit keš v její skrýši, popřípadě jak náročné je vyluštit finální souřadnice. Opět pro představu nejlehčí a nejtěžší úroveň.

Stupeň 1 – lze je lehce najít i bez GPS, pokud se geokačer připraví doma. Jsou vhodné pro začátečníky.

Stupeň 5 – keše, které je velice těžké nebo časově náročné najít. Patří sem nejtěžší mystery keše, které vyžadují vysoký intelekt geokačera. Je časté, že se nález nepodaří ani na několikátý pokus.

1.5 ZPŮSOB ZADÁNÍ JEJICH POLOHY

Uvedení souřadnic je způsob určení polohy bodu na Zemi. Skládá se ze dvou číselných údajů – severní (N) nebo jižní (S) zeměpisné šířky a západní (W) nebo východní (E) zeměpisné délky. V geocachingu se souřadnice udávají v systému WGS-84, případně S-42 a S-JTSK.

Příklad: Nejstarší keš na Plzeňsku má souřadnice N 49° 40.995 E 013° 27.848 z nichž víme, že se keš bude nacházet na severní polokouli (N) kolem 49. rovnoběžky a na východní polokouli (E) kolem 13. poledníku. Při bližším určení se dostaneme ke hradu Radyně konkrétně kousek od nedaleké vyhlídky.

2 UKÁZKA KEŠÍ SE VZTAHEM K MATEMATICE S NÁVRHY NA ZPŮSOBY ŘEŠENÍ

Nejčastějšími druhy keší, které mají vztah k matematice, jsou mystery keše. Jak již bylo řečeno, mystery keše nemají cílové souřadnice uvedeny přímo v listingu, tam jsou uvedeny pouze výchozí souřadnice (např. parkoviště). Cílové souřadnice geokačer zjistí vyluštěním nějaké hádanky, šifry, zjištěním informací či vypočítáním příkladu. A právě těmto keším budou věnovány následující kapitoly.

Matematické keše mohou pomáhat k získávání kladného vztahu k matematice, což je v dnešní době, kdy většina dětí matematiku nemá ráda, velmi důležité. Keše s matematickým základem jim hravou formou ukazují, co všechno matematika obsahuje, kde všude se skrývá, jak si lze s matematikou hrát a k čemu je užitečná. Mohou být považovány za motivaci ke studiu matematiky. Ukazují využití matematiky samotné a také její propojení s dalšími vědami. Každá keš je něčím specifická, využívají různé druhy znalostí, učí přemýšlet různými způsoby. Za odměnu se děti dostanou na zajímavá místa.

Existuje několik druhů keší se vztahem k matematice, nazvěme je „matematické“. Od jednoduchých (rekreační matematika a lehké slovní úlohy) až po velice těžké, ke kterým luštitel potřebuje vysokoškolské vzdělání v oboru matematika. Dále keše, které využívají znalosti z jiných oborů, třeba fyziky, informatiky, chemie. Můžeme se též setkat s logickými úlohami. Na následujících stránkách budou uvedeny příklady matematických mystery keší, které jsou pro lepší orientaci rozděleny do několika skupin (dělení je pouze orientační, jelikož se druhy různě prolínají), s návrhy na jejich řešení.

1) Úroveň základní školy
2) Úroveň střední školy
3) Úroveň vysoké školy a výše
4) Propojené s jinými obory
5) Logické a rekreační
6) Ostatní

2.1 ÚROVEŇ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Při luštění těchto keší by si hráč měl vystačit se znalostmi ze základní školy, jsou tedy dostupné pro všechny. Ukazují dětem, co to vlastně matematika je, co všechno se díky ní dá vypočítat a že umí být i zábavná a hravá. Seznamují děti se základy matematiky a logického uvažování. Tato úroveň je velmi důležitá, jelikož může rozhodnout, zda se děti o matematiku budou zajímat nebo ne. Další úrovně je pak utvrzují v jejich rozhodnutí.

Matematická cache (GC1AAF0) – Staré Město nad Metují (Královehradecký kraj)

V listingu keše se dočteme, že autor byl k vytvoření této keše inspirován úlohou z matematiky určenou pro žáky základních škol. Autor nám také poskytl informaci, že keš se nalézá na souřadnicích N 50° 24.PQR a E 16°08.Z. Abychom získali kompletní souřadnice, musíme vypočítat dvě matematické úlohy.

A) N 50° 24.PQR

„První běžec běží rychlostí 3 m/s. Druhý běžec běží rychlostí 2,4 m/s. Před oběma je vzdálenost 1,2 km. Jak velký časový rozdíl bude mezi oběma běžci v cíli? Výsledek v sekundách zaokrouhlen na celá čísla + 23 je ve tvaru PQR.“

Časový rozdíl běžců v cíli si označíme *t*, potom PQR = t + 23.

Běžec …….. rychlost………. vzdálenost

1. Běžec A………. 3 m/s ……….. 1,2 km
2. Běžec B………. 2,4 m/s ……… 1,2 km

Časový rozdíl *t*, lze vypočítat pomocí rovnice

$$t = |t_a - t_b|$$

Jelikož máme rychlosti zadány v m/s je potřeba převést vzdálenost na metry 1,2 km = 1200 m.

Definice č. 1

Průměrná rychlost v je fyzikální veličina vyjadřující změnu polohy tělesa v čase. Vyjadřuje ji podíl dráhy *s* a času *t*, tj.

$$v = \frac{s}{t} \qquad (1.1)$$

Ze vztahu (1.1) vyjádříme $t = \frac{s}{v}$ a dosadíme.

$$t_a = \frac{1200}{3} = 400 \text{ s}$$

$$t_b = \frac{1200}{2{,}4} = 500 \text{ s}$$

Dosadíme do rovnice

$$t = |t_a - t_b| = |400-500| = 100 \text{ s}$$

Dále do rovnice

PQR = t + 23 = 100 + 23 = 123

Výsledná souřadnice N 50° 24.PQR je tedy N 50° 24.123.

<u>B) E 16°08.Z</u>

„Vlak č. 1 jede rychlostí 58 km/h. V čase t urazí vzdálenost 4000 km. Jakou rychlostí musí jet vlak č. 2, aby za stejný čas urazil dráhu 4344 km? Výsledek ve tvaru XY musí být zaokrouhlen na celá čísla. Souřadnice Z = XY · 10 – 85“

XY = v_2

<u>Vlak……….rychlost…………vzdálenost………..čas</u>

Č. 1……….. 58 km/h…………4000 km…………. t

Č. 2……….? km/h …………. 4344 km……………. t

Pro výpočet opět využijeme t, vyjádřené ze vztahu (1.1)

$$t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{4000}{58} = 68{,}97 \text{ h}$$

Pro získání rychlosti druhého vlaku vyjádříme ze vztahu (1.1) rychlost *v*

$$v_2 = \frac{s_2}{t} = \frac{4344}{68{,}97} = 62{,}98 \text{ km/h} \ \text{->}\ v_2 \doteq 63 \text{ km/h.}$$

Dosazením do rovnice pro získání Z, dostaneme $Z = 63 \cdot 10 - 85 = 545$.

Výsledná souřadnice E 16° 08.Z je tedy E 16° 08.545

Nyní máme kompletní souřadnice keše N 50° 24.123 E 16° 08.545, které zadáme do navigace. Zjistíme, že keš se nachází v blízkém okolí Starého Města nad Metují, což souhlasí s informací od majitele keše, který tvrdí, že keš je ukryta v místech nejstaršího osídlení Náchoda.

2.2 ÚROVEŇ STŘEDNÍ ŠKOLY

Tento typ keší by měl zvládnout absolvent či student středních škol. Keše na středoškolské úrovni znalostí jsou založeny na větších početních znalostech řešitele než keše na úrovni základních škol, k jejichž řešení jsou potřeba pouze základní matematické znalosti nebo pouze „selský rozum“. Tuto úroveň lze ještě rozdělit na několik podskupin. Každá z nich se věnuje jinému směru matematiky. Díky svému širokému okruhu, jemuž se věnují, jsou dobrou motivací ke studiu matematiky. Dítě má možnost vybrat si směr, který se mu líbí.

2.2.1 ALGEBRA

Tento směr obsahuje příklady, v nichž se objevují lomené výrazy, lineární a kvadratické rovnice, matice, polynomy atp.

Soustava rovnic (GC2438Y) – Brandýs nad Labem (Středočeský kraj)

Pro získání finálních souřadnic musíme vyřešit soustavu *n* rovnic o *n* neznámých, konkrétně 10 rovnic o 10 neznámých.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 + 7x_7 - 8x_8 + 9x_9 - 10x_{10} = -99$$

$$-2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 + 5x_6 - 6x_7 + 7x_8 - 8x_9 + 9x_{10} = 82$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 - 4x_6 + 5x_7 - 6x_8 + 7x_9 - 8x_{10} = -71$$

$$-4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 4x_7 + 5x_8 - 6x_9 + 7x_{10} = 56$$

$$5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 + 3x_7 - 4x_8 + 5x_9 - 6x_{10} = -59$$

$$-6x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 - 2x_7 + 3x_8 - 4x_9 + 5x_{10} = 50$$

$$7x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 - 2x_6 + x_7 - 2x_8 + 3x_9 - 4x_{10} = -49$$

$$-8x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 5x_4 - 4x_5 + 3x_6 - 2x_7 + x_8 - 2x_9 + 3x_{10} = 48$$

$$9x_1 - 8x_2 + 7x_3 - 6x_4 + 5x_5 - 4x_6 + 3x_7 - 2x_8 + x_9 - 2x_{10} = -61$$

$$-10x_1 + 9x_2 - 8x_3 + 7x_4 - 6x_5 + 5x_6 - 4x_7 + 3x_8 - 2x_9 + x_{10} = 66$$

Finální souřadnice cache se nachází na souřadnicích N 50° $x_1x_2.x_3x_4x_5$ E 14° $x_6x_7.x_8x_9x_{10}$.

Existuje několik metod řešení soustav rovnic, mezi ně patří dosazovací, sčítací nebo řešení pomocí maticového zápisu. Vzhledem k počtu rovnic volíme poslední metodu. Soustavu rovnic si vyjádříme pomocí maticového zápisu - matice A. Daná matice je však velmi rozsáhlá pro řešení pomocí papíru a tužky. Pro ulehčení práce můžeme využít některý z mnoha on-line kalkulátorů, třeba www.matrixcalc.org. Do kalkulátoru zadáme soustavu rovnic vyjádřenou maticí A a necháme program, aby ji vyřešil - volíme řešení metodou převedení na trojúhelníkový tvar.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & 9 & -10 & 99 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & 9 & -82 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & 71 \\ -4 & 3 & -2 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & -56 \\ 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 59 \\ -6 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -50 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & -2 & 3 & -4 & 49 \\ -8 & 7 & -6 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & -2 & 3 & -48 \\ 9 & -8 & 7 & -6 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & -2 & 61 \\ -10 & 9 & -8 & 7 & -6 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & -66 \end{pmatrix}$$

Získáme $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 2$; $x_4 = 9$; $x_5 = 6$; $x_6 = 4$; $x_7 = 0$; $x_8 = 7$; $x_9 = 4$; $x_{10} = 5$.

Finální souřadnice jsou N 50° 13.296 E 14° 40.745.

2.2.2 FUNKCE

Pro děti je spousta výpočtů z matematiky nepředstavitelná a některé z tohoto důvodu matematika nebaví. Funkce si mohou nakreslit a zjistit, co ve skutečnosti počítají. Vhodné je také použití některých programů či webových stránek, které jim ulehčí práci a ušetří čas jako v předchozím případě.

Kvadratická (GC466J2) – Líbeznice/ Brandýs nad Labem (Středočeský kraj)

„Souřadnice stage jsou následující:

Ns = N + 10 · x

Es = E + y

Přičemž platí, že Ns a Es jsou souřadnice stage, N a E úvodní souřadnice a x a y vypočítáte zjištěním průniku dvou parabol. Každá je grafickou reprezentací jiné kvadratické funkce a paraboly procházejí následujícími body:

p1 = (26, -250) (2, 1520) (42, 520)

p2 = (26, 150) (50, -1710) (10, -660)

Na zjištěných souřadnicích se dozvíte jak na finálku."

Úvodní souřadnice N 50° 12.098 E 014° 29.846.

Definice č. 2

Kvadratická funkce je každá funkce na množině R, která je dána předpisem

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (2.1)$$

kde $a \in R - 0$ a $b, c \in R$.

$P_1 = a_1x^2 + b_1x + c$ a prochází body A[26, -250], B[2, 1520], C [42, 520]

$P_2 = a_2x^2 + b_2x + c$ a prochází body D[26, 150], E[50, -1710], F[10, -660]

Body parabol dosadíme do obecné rovnice kvadratické funkce (2.1) a vypočteme a, b, c.

P_1:

$$-250 = 676a_1 + 26b_1 + c_1$$

$$1520 = 4a_1 + 2b_1 + c_1$$

$$\underline{520 = 1764a_1 + 24b_1 + c_1}$$

$$a_1 = \frac{195}{64},\ b_1 = \frac{-2545}{16},\ c_1 = \frac{29215}{16}$$

Parabola 1 má rovnici: $y_1 = \frac{195}{64}x^2 + \frac{-2545}{16}x + \frac{29215}{16}$

P_2:

$$150 = 676a_2 + 26b_2 + c_2$$

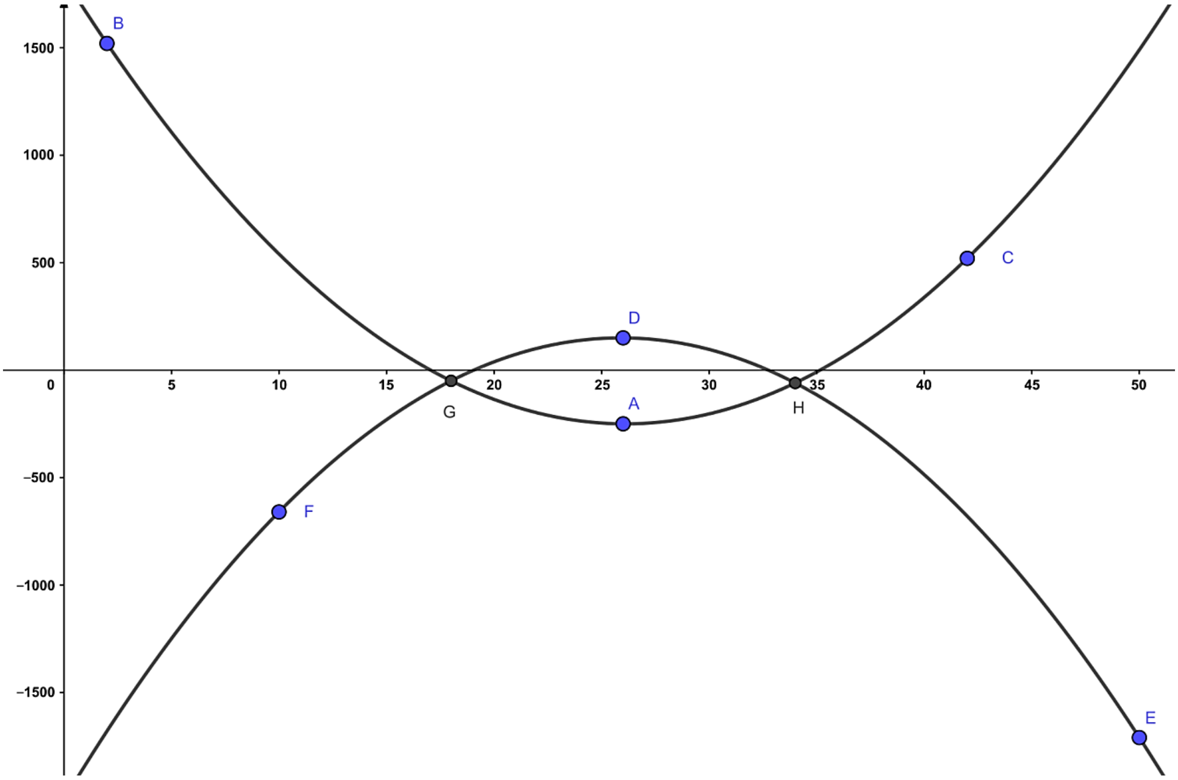
$$-1710 = 2500a_2 + 50b_2 + c_2$$

$$\underline{-660 = 100a_2 + 10b_2 + c_2}$$

$$a_2 = \frac{-205}{64},\ b_2 = \frac{2655}{16},\ c_2 = \frac{-31985}{16}$$

Parabola 2 má rovnici: $y_2 = \frac{-205}{64}x^2 + \frac{2655}{16}x + \frac{-31985}{16}$

Rovnice obou parabol zadáme například do programu *Geogebra.* (Správnost vypočítaných rovnic můžeme ověřit zadáním bodů náležejících parabolám - musí ležet na daných parabolách). Vyjdou dva průsečíky: G[18, -50], H[34, -60] - (graf č. 1 - Paraboly).



Graf č. 1 - Paraboly

V listingu se dočteme, že x a y jsou tisíciny minut.

Průsečíky a úvodní souřadnice dosadíme do rovnic. Máme dva průsečíky, takže budou dvě soustavy rovnic.

$$Ns = N + 10 \cdot x$$

$$Es = E + y$$

1) $Ns_1 = 50° \ 12.098 + 0.180$

$\underline{Es_1 = 014° \ 29.846 - 0.050}$

$Ns_1 = 50° \ 12.278$

$Es_1 = 014° \ 29.796$

2) Ns_2 = 50° 12.098 +0.340

<u>Es_2 = 014° 29.846 -0.060</u>

Ns_2 = 50° 12.438

Es_2 = 014° 29.786

Souřadnice zadáme do mapy. Podle hintu by měla být keš na stromě, volíme tedy první možnost, souřadnice Ns_1 50° 12.278 Es_1 014° 29.796, kdy poloha vychází na kraji lesa. Pokud bychom keš zde nenašli, zkusíme hledat na druhých souřadnicích Ns_2 50° 12.438 Es_2 014° 29.786.

2.2.3 KOMBINATORIKA A PRAVDĚPODOBNOST

Kombinatorika a pravděpodobnost jsou náročná témata, která se špatně vysvětlují, a proto jim spousta dětí nerozumí. Při hraní GC mají děti motivaci se téma pravděpodobnosti učit a některé to začne i bavit. Příklady jsou někdy využitelné v praxi, což je další aspekt, proč by děti mohly bavit.

Matematická (GC1W7ZM) – Olšany/ Nepomuk (Jihočeský kraj)

„Jak jste na tom se znalostmi kombinatoriky? Nic moc? Nebojte se, vybrala jsem lehčí příklady. Tak jdeme na to!

1.) Na večírku je 40 osob a každý si ťukne s každým. Kolik se ozve ťuknutí? - vyjde vám číslo ve tvaru <u>HDA</u>

2.) Kolik existuje trojciferných čísel, která neobsahují nulu? - vyjde vám číslo ve tvaru <u>BCI</u>

3.) V sáčku je 100 kuliček: 28 červených, 20 modrých, 12 zelených, 10 žlutých, 10 bílých a 20 fialových. Jaký nejmenší počet kuliček musím vytáhnout, mají-li být zastoupeny všechny barvy? - vyjde vám číslo ve tvaru <u>IE</u>

4.) Určete počet všech čtyřciferných čísel, jejichž zápis je složen z číslic 1, 2, 3, 4, 5, která jsou dělitelná 5? - vyjde vám číslo ve tvaru <u>FCG</u>

5.) *V obchode mají 3 druhy kávy v balení po 50 gramech. Kolika způsoby si může zákazník koupit 200 g kávy? - vyjde vám číslo ve tvaru FJ*

ještě malá nápověda: E = F, G = J, B = H. Keš je na N 49° AB.CDE E 015°FG.HIJ“.

1.

> *Definice č. 3*
>
> *Kombinace* je neuspořádaná *k*-tice z *n* prvků sestavená tak, že každý prvek se v *k*-tici vyskytuje pouze jednou. Počet takovýchto *k*-tic vyjadřuje kombinační číslo $\binom{n}{k}$, které lze rozepsat jako
>
> $$K_{(k,n)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.2),$$

Budeme vybírat dvojice (k = 2) z množiny 40 lidí (n = 40) a nezáleží nám na pořadí, tedy kombinace. Možnosti jakými si lidé mohou ťuknout, vyjadřuje kombinační číslo $\binom{40}{2}$,

$$K_{(2,40)} = \frac{40!}{2!\,38!} = 780$$

2.

> *Definice č. 4*
>
> *Variace s opakováním* – je uspořádaná *k*-tice sestavená z *n* prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše *k*-krát. Počet těchto *k*-tic vyjadřuje vztah
>
> $$V'_{(k,n)} = n^k \quad (2.3)$$

Z množiny 9 čísel (*n*) tvoříme trojice (*k*), u nichž nám záleží na pořadí. Použijeme vztah pro variace s opakováním

$$V'_{(3,9)} = 9^3 = 729$$

3. Začněme následující úvahou. Pokud bychom vytáhli 10 kuliček je možné, že bude každá jiné barvy, ale také se může stát, že budou všechny třeba žluté. Deset kuliček je tedy málo. Dále, pokud bychom vytáhli 38 kuliček, může se stát, že budou všechny červené nebo žluté. Musíme tedy zvyšovat počet vytažených kuliček na hodnotu, kdy by v nepříznivé situaci byly zastoupeny všechny kuličky červené, modré, zelené, fialové a třeba žluté barvy. To dává dohromady 28 + 20 + 12 + 20 + 10 = 90. Pokud k tomu vytáhneme ještě jednu kuličku, bude mít určitě bílou barvu a tím budou s jistotou zastoupeny všechny barvy. Potřebný počet kuliček je 91.

4. Podobně jako v příkladu č. 2 využijeme vztah pro variace s opakováním (2.3). Nyní budeme vybírat trojice *(k = 3)* z množiny pěti *(n = 5)* číslic. Výsledek vynásobíme počtem možností, které máme na obsazení poslední cifry. Na poslední cifru můžeme dosadit pouze číslo 5, jednu číslici, variace s opakováním tedy násobíme 1.

$$V'_{(3,5)} = 5^3 = 125$$

5.

Definice č. 5 *Kombinace s opakováním* - je neuspořádaná *k*-tice sestavená z *n* prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše *k*-krát. Počet těchto *k*-tic vyjadřuje kombinační číslo $K'_{(k,n)} = \binom{n+k-1}{n-1}$ (2.4)

Vybíráme 200 g čili 4 balíčky (*n*) a máme 3 druhy kávy (*k*). Nezáleží na pořadí. Volíme vzorec pro kombinace s opakováním

$$K'_{(4,3)} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

Z výsledků příkladů vyplývá, že A = 0, B = H = 7, C = 2, D = 8, E = F = 1, G = J = 5, I = 9.

Dosadíme do rovnice souřadnic N 49° AB.CDE = N 49° 07.281

E 015° FG.HIJ = E 015° 15.795

Finální souřadnice jsou N 49° 07.281 E 015° 15.795.

Matematická (GC228KJ) – Černín/ Zdice (Středočeský kraj)

„Dva kačeři se chtějí potkat na eventu, který trvá přesně tři hodiny. Každý z nich dorazí v náhodný okamžik během trvání eventu, nezávisle na tom druhém. Každý se zdrží jen půl hodiny nebo do okamžiku skončení eventu, pokud ten nastane dříve než půl hodiny od příchodu dotyčného. Jaká je pravděpodobnost, že se oba na eventu skutečně potkají? Výsledek vyjádřete ve tvaru čísla mezi nulou a jedničkou a zaokrouhlete jej na čtyři desetinná místa.

Výsledné číslo ve tvaru: P = 0,ABCD, použijte pro výpočet finálních souřadnic takto:

N 49°56.(C - 1)(D + 2)(B + 4) E 013°56.(C + 3)(A - 3)(B + 1)“

Ze zadání je zřejmé, že jde o geometrickou pravděpodobnost.

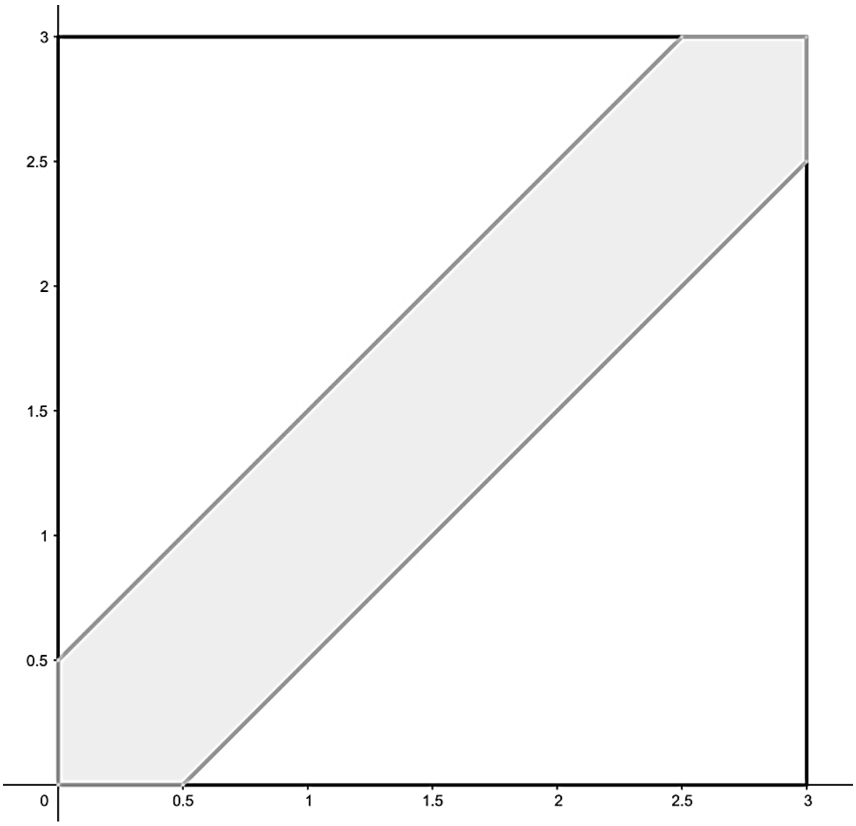
Definice č. 6

Geometrická pravděpodobnost - Nechť jsou prvky jevového pole *S* podmnožiny omezené množiny M $\in R^n$. Množina M je jistý jev a operace s jevy jsou podobné operacím s množinami. Jestliže si označíme *v* *n*–rozměrný objem, *v* $\in R^n$, pak funkce P definovaná předpisem

$$P(A) = \frac{v(A)}{v(M)} \qquad (2.5)$$

má vlastnosti pravděpodobnosti.

Všechny možné příchody obou kačerů vyjadřuje množina dvojic [x,y], kde x je čas příchodu kačera A a y čas příchodu kačera B. Aby se kačeři potkali, musí se jejich příchody lišit maximálně o půl hodiny. Všechny možné příchody jsou v grafu č. 2 – Geometrická pravděpodobnost naznačeny čtvercem o rozměrech 3 x 3 a všechny příznivé šedivým nepravidelným šestiúhelníkem.



Graf č. 2 – Geometrická pravděpodobnost

Hledaná pravděpodobnost je poměr obsahu šedivé části (A) k obsahu čtverce (M).

$$S_M = a^2 = 3^2 = 9$$

$$S_{trojúhelníka} = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{2{,}5 \cdot 2{,}5}{2} = 3{,}125$$

$$S_A = S_M - 2 \cdot S_{trojúhelníka} = 9 - 6{,}25 = 2{,}75$$

$$P = \frac{S_A}{S_M} = \frac{2{,}75}{9} = 0{,}3056$$

A = 3, B = 0, C = 5, D = 6

Finální souřadnice: N 49° 56.(C - 1)(D + 2)(B + 4) = N 49° 56.484

E 013° 56.(C + 3)(A - 3)(B + 1) = E 013° 56.801

2.2.4 GEOMETRICKÉ

Jak již název napovídá, keše budou věnovány geometrii. Úlohy z geometrie dávají dětem možnost si na matematiku „sáhnout". Geometrie se dá využít v mnoha oborech studia či zaměstnání.

Kružnice opsaná (GC6Y034) – archivovaná, Plzeň (Plzeňský kraj)

Abychom získali finální souřadnice, musíme vypočítat střed kružnice opsané k trojúhelníku danému těmito body:

A) Základní škola N 49° 45.599 E 013° 25.160 („Start")
B) Gymnázium N 49° 45.079 E 013° 24.833 („2")
C) Výchozí souřadnice N 49° 45.574 E 013° 24.069 („Cíl")

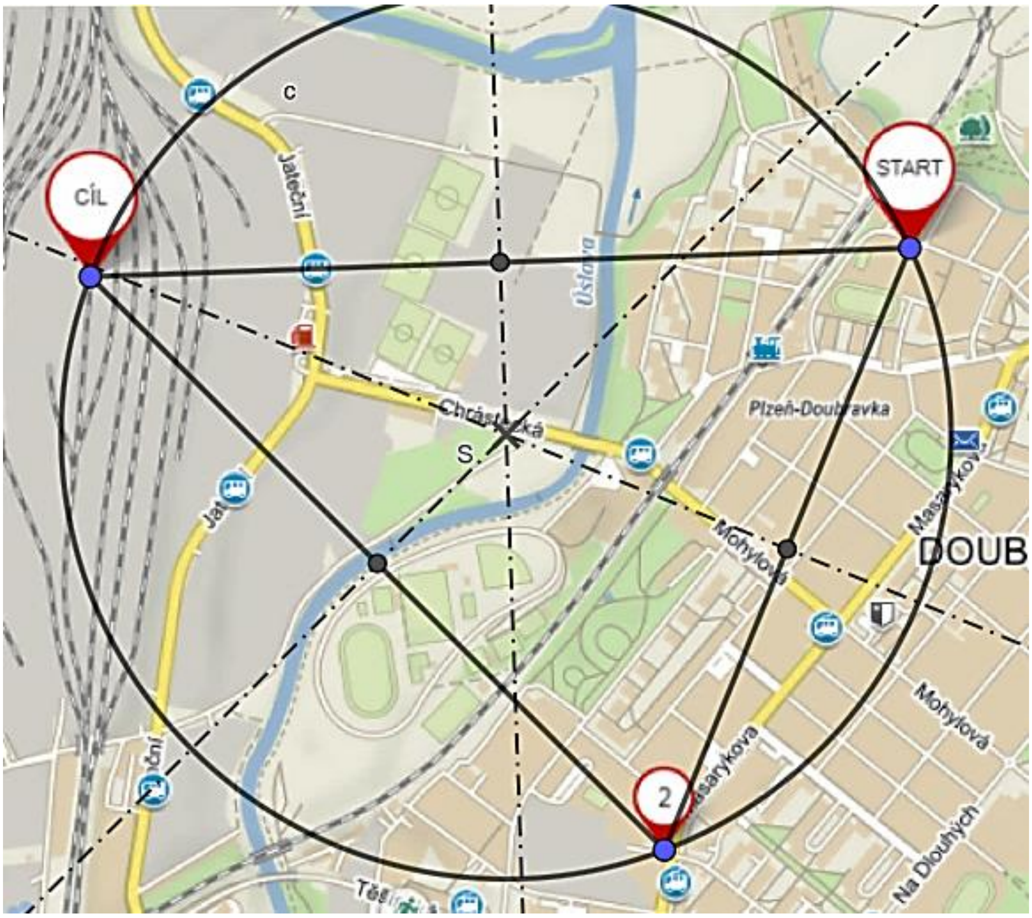
Budeme rýsovat přímo do mapy. Body zadáme například do www.mapy.cz a mapu s body vytiskneme. Pomocí pravítka a kružítka sestrojíme kružnici opsanou trojúhelníku tvořeného zadanými body.

Definice č. 7 *Kružnice opsaná (KO)* – je kružnice, která prochází všemi třemi vrcholy trojúhelníka. Takováto kružnice existuje právě jedna.

Postup sestrojení KO

1) Sestojíme osy stran trojúhelníka – osa je kolmice procházející středem úsečky.
2) V místě, kde se osy stran protnou je střed *S* kružnice opsané k danému trojúhelníku.
3) Narýsujeme kružnici se středem S a poloměrem |SA|, neboli vzdáleností od středu k libovolnému vrcholu.

Při řešení zadaného příkladu nám stačí splnit pouze body 1 a 2, třetí je jen pro kontrolu (obrázek č. 1 – Kružnice opsaná)



Obrázek č. 1 – Kružnice opsaná

Na mapě najdeme místo, kde nám vyšel střed KO a zapíšeme si souřadnice – N 49° 45.438 E 13° 24.629.

K úloze je přiložený GeoCheck[3] a také owner po archivaci keše zadal finální souřadnice – *N* 49° 45.437 E 013° 24.623. Naše řešení se liší jen o pár metrů, což je způsobeno převedením zkonstruovaného středu zpět do mapy. Při lovení keší to nebývá problém, schránku lze i v takovýchto případech najít.

3 GeoCheck je nástroj na kontrolu souřadnic. Jsou zde uvedeny některé keše a uloženy jejich finální souřadnice. Po zadání námi vypočítaných souřadnic můžeme ověřit shodu.

2.3 ÚROVEŇ VYSOKÉ ŠKOLY A VYŠŠÍ

Při jejich řešení využijeme znalosti z vysoké školy. Případně můžeme použít některý z programů či webových stránek, se kterými jsme se seznámili při řešení předchozích keší nebo využít jiný. Pokud řešitel ještě vysokou školu nestudoval, může tímto způsobem zjistit, co bude studovat, co všechno matematika zahrnuje a kam vede. Také se může ujistit, zda se doopravdy chce ubírat směrem, který si předtím vybral či zvolit jiný.

Fav jsem z toho paf (GC1M1AC) – Plzeň – Jižní předměstí (Plzeňský kraj)

Keš je o stejnojmenné fakultě čili o Fakultě aplikovaných věd (FAV) Západočeské univerzity v Plzni. V listingu se dočteme o historii fakulty, jaké má katedry a pro rozveselení několik vtipů o „Favácích“. Keš se nachází na souřadnicích:

„N (1)°(2).(3) E (4)°(5).(6)

(1) $a_n = a_{n-1} \cdot q$; $a_1 = 7$; $q = \frac{6}{7}$; $n \to \infty$; $s_n = ?$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; *det(A) – det(B) = ?*

(3) A) $D \in E_2$, $D: \{y = x, y = \frac{x}{2}, x = 3\}$, $S = \iint_D (xy - y^2)\ dx\, dy$

B) $\Omega \in E_3$, $\Omega : \{x = 0, y = 0, z = 0, z = 1, x + y + z = 2\}$, $V = \iiint_\Omega dxdydz$; $288 \cdot S + 36 \cdot V = ?$

(4) $t = 2s$, $s_0 = 3m$, $v_0 = 1{,}5\ m.s^{-1}$, $a = 3{,}5\ m.s^{-2}$, $s = ?$

(5) $\Delta t_0 = 16s$, $v = 180\,000\ km.s^{-1}$, $\Delta t \approx ?$

(6) $a = 7, b = 3, c = 4$

while $a > b$ ***do***

if $c < a$ ***then***

$a = a + 1$

$c = c + 2$

else

$a = a - 5$

$b = b * 2$

End

End

Return $\boldsymbol{7 * a + 71 * b + 52 * c}$ *“*

(1)

Definice č. 7

Geometrická posloupnost (GP) - je druh posloupnosti s prvním členem a_1, další členy jsou stálým násobkem, tzv. kvocientem *q*, předchozího členu. Kvocient je podíl libovolného členu a členu předchozího, kromě prvního členu.

s_n je součet prvních *n* členů GP.

Pokud $|q|<1$, součet prvních *n* členů GP vypočteme pomocí vztahu

$$s_n = \frac{a_1}{1-q} \quad (3.1)$$

$$s_n = \frac{7}{1-\frac{6}{7}} = 49$$

(2) det(A) – det(B) = ?

Definice č. 8

Determinant - Buď A ∈ R^{nxn} čtvercová matice řádu *n*. *Determinant matice* A je reálné číslo detA přiřazené matici A následujícím způsobem

1. Je-li A matice řádu 1, tj. A = (a_{11}), je detA = a_{11}
2. Máme-li definován determinant z matice řádu (n−1) označme symbolem M_{ij} determinant matice řádu (n−1), která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Definujme *algebraický doplněk*[4] A_{ij} prvku a_{ij} jako součin A_{ij} = $(-1)^{i+j} * M_{ij}$.
3. Determinant řádu n definujeme následovně, zvolíme libovolný index i ∈ {1,2,…n} a definujeme: detA = $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$

[4] Algebraický doplněk prvku a_{ij} v determinantu D je determinant, který vznikne z determinantu D odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce a vynásobením determinantu číslem $(-1)^{i+j}$

A) det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

- Uděláme rozvoj podle prvního sloupce

$$\det(A) = 1 \,.\, \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \,.\, \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \,.\, \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$2 \,.\, \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- Hodnoty determinantů určíme pomocí Sarrusova pravidla[5] => det(A) = 42

B) det(B) = $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

- Opět rozvoj podle prvního sloupce a řešení determinantů Sarrusovým pravidlem

$$\det(B) = 3 \,.\, \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \,.\, \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \,.\, \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$3 \,.\, \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \text{ tj. } \det(B) = -1.$$

Z toho vyplývá

det(A) – det(B) = 42 – (-1) = **43.**

(3) Budeme počítat *vícerozměrný integrál.*

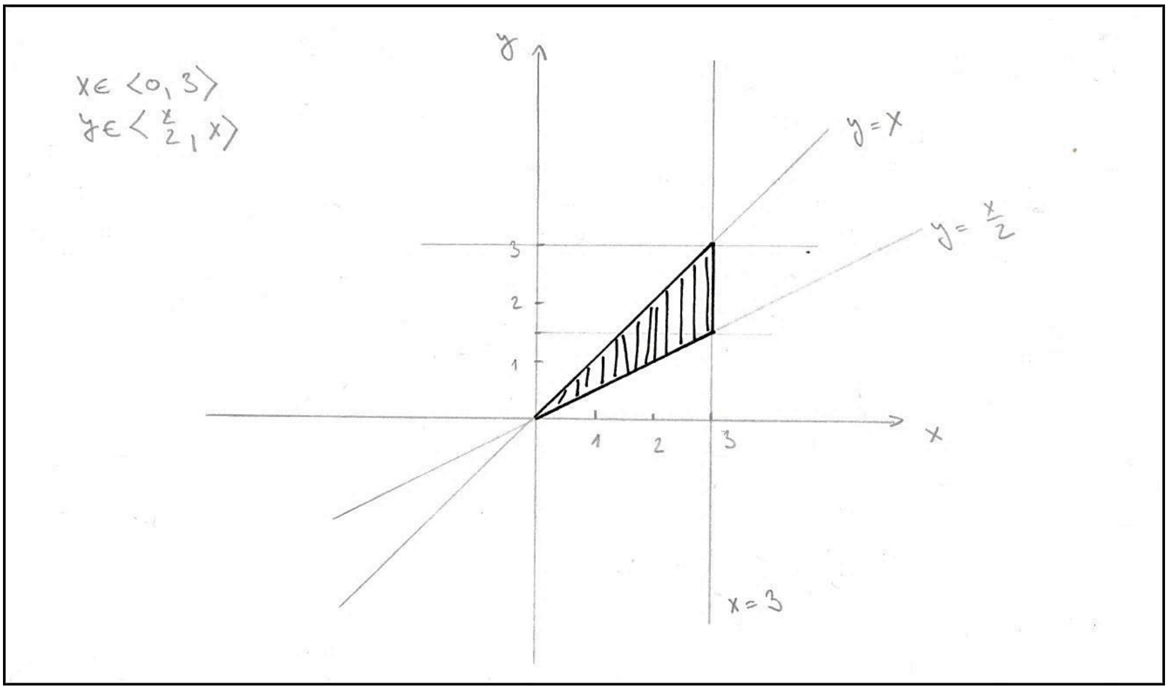
Definice č. 9

Určitý integrál – Nechť je *f* funkce reálné proměnné x, x ∈ $< a, b >$. Potom $\int_a^b f(x)dx$ je obsah plochy, která je vymezena grafem funkce *f*, osou *x* a přímkami *x = a, x = b.*

[5] Sarussovo pravidlo – lze použít pouze pro výpočet determinantů matic třetího řádu. Postup je následující: pod původní matici opíšeme první dva řádky a poté čísla ležící na diagonálách násobíme. Pokud směřují z levého horního rohu do pravého dolního rohu, mají kladné znaménko a ty co směřují z levého dolního rohu do pravého horního rohu, mají znaménko záporné. Sečtením těchto součinů vyjde hodnota determinantu.

Pozn. Vícerozměrný integrál – je integrace více proměnných, tj. $\int_{\Omega} f(x^1, x^2, \cdots, x_n) d\Omega$, kde Ω je určitá oblast.

a) Zanesením přímek y = x, y = $\frac{x}{2}$, x = 3 do kartézské soustavy souřadnic (KSS), získáme trojúhelník, jehož obsah budeme počítat (obrázek č. 2 – Dvojný integrál). Z obrázku č. 2 – Dvojný integrál je zřejmé, že x ∈ $< 0, 3 >$ a y ∈ $< \frac{x}{2}, x >$, což jsou meze jednotlivých integrálů.

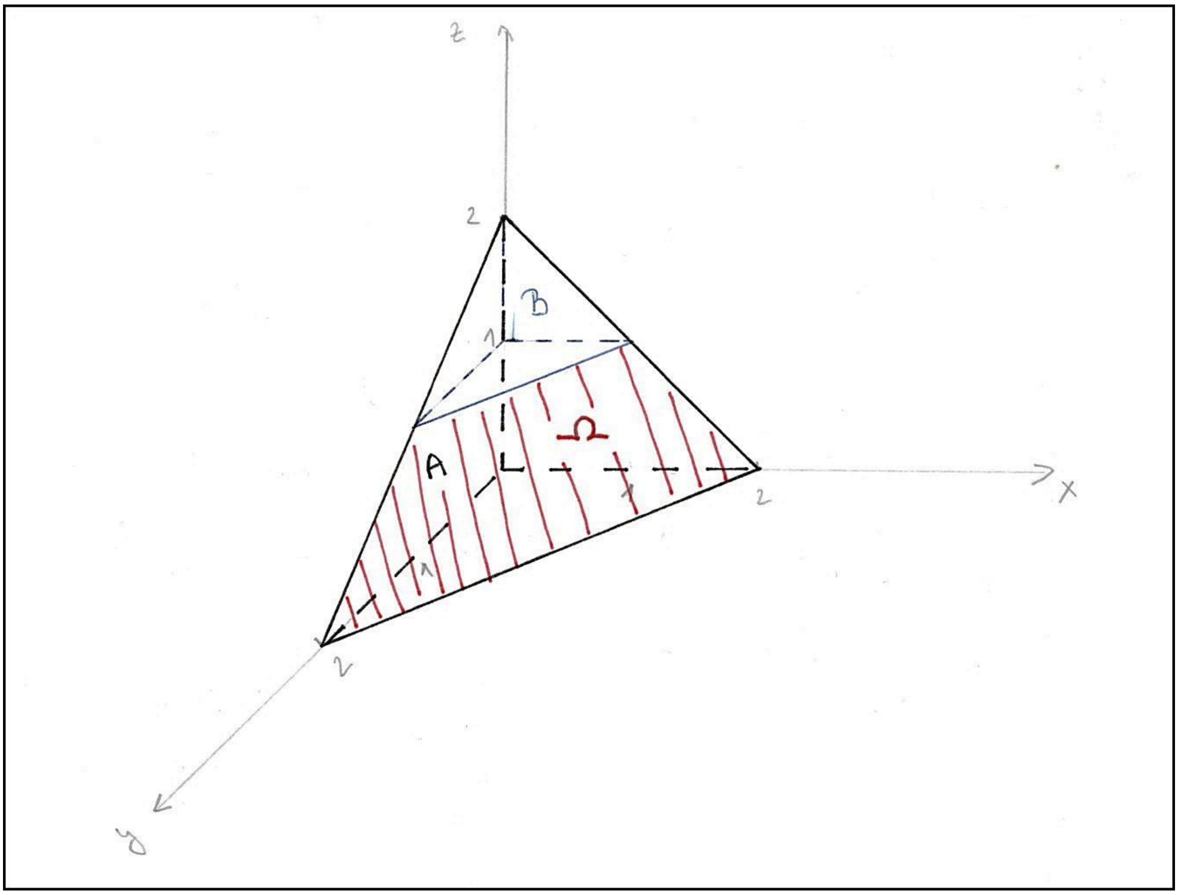


Obrázek č. 2 – Dvojný integrál

$$S = \int_0^3 \int_{\frac{x}{2}}^{x} (xy - y^2) dy dx = \int_0^3 \left[\frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{\frac{x}{2}}^{x} dx = \int_0^3 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{12}\right) dx =$$

$$\frac{1}{12}\int_0^3 x^3 dx = \frac{1}{12}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{1}{12} \cdot \frac{81}{4} = \frac{27}{16}$$

b) Integrál vyjadřuje objem tělesa, které vznikne vynesením rovin patřících do množiny Ω do KSS. Vzniklým tělesem je čtyřstěn (obrázek č. 3 – Trojný integrál) protnutý rovinou z = 1.



Obrázek č. 3 – Trojný integrál

Není nutné počítat trojný integrál. Je možné objem tělesa Ω (V_{Ω}), vypočítat jako rozdíl objemů čtyřstěnu *A* (V_1) a čtyřstěnu *B* (V_2),

tj. $V_{\Omega} = |V_1 - V_2|$

Objem čtyřstěnu lze vypočítat pomocí absolutní hodnoty determinantu. Jednotlivé řádky determinantu tvoří souřadnice vektorů ležící v hranách rovnoběžnostěnu a mají stejný počáteční bod. Objem čtyřstěnu je $\frac{1}{6}$ objemu rovnoběžnostěnu.

$$V_1 = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{8}{6}$$

$$V_2 = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}$$

$$V_{\Omega} = |V_1 - V_2| = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$288 \cdot S + 36 \cdot V = 288 \cdot \frac{27}{16} + 36 \cdot \frac{7}{6} = \mathbf{528}$$

(4)

Definice č. 10

Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb – je druh nerovnoměrného pohybu hmotného bodu. Hmotný bod se pohybuje po přímce, jeho rychlost není konstantní, rovnoměrně se s časem zvětšuje.

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (3.2)$$

kde *s* je celková dráha, s_0 je počáteční dráha, v_0 - počáteční rychlost, t – čas, *a* – zrychlení.

Dosadíme do vztahu (3.2)

$$s = 3 + 1{,}5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot 2^2 = \mathbf{13}$$

(5) Dilatace času – se vzrůstající rychlostí, kterou se těleso pohybuje, se pro dané těleso zpomaluje čas. Toto bylo prokázáno několika pokusy. Jedním z nich bylo porovnání času na synchronizovaných hodinách, přičemž jedny zůstaly na zemi a druhé byly na palubě letícího letadla. Hodiny v letadle se zpozdily oproti těm, co zůstaly na zemi.

Dilataci času vypočítáme pomocí následujícího vztahu

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3.3)$$

kde t_0 je tzv. vlastní čas, *v* je rychlost tělesa a *c* - rychlost světla ve vakuu. Po převedení se *v* = 18× 10^7 m/s, vše ostatní je ve správných jednotkách. Dosadíme do vztahu (3.3)

$$\Delta t = \frac{16}{\sqrt{1 - \frac{(18 \times 10^7)^2}{299792458^2}}} = \frac{16}{\sqrt{1 - \frac{324 \times 10^{14}}{898{,}3482 x 10^{14}}}} = \frac{16}{\sqrt{0{,}64}} = \frac{16}{0{,}8} = \mathbf{20}$$

(6) *Pseudokód* je přehledný neúplný a neformální způsob zápisu počítačového algoritmu. Řídí se programovacími předpisy, ale neobsahuje detailní syntaxi. Někdy obsahuje vysvětlivky nebo jiné popisy.

Máme zadáno a = 7, b = 3, c = 4.

Pokud $a > b$ udělej

Když $c < a$ potom

$$a = a + 1$$

$$c = c + 2$$

jinak

$$a = a - 5$$

$$b = 2 \cdot b$$

konec

Zadaný postup budeme opakovat, dokud budou platit vstupní podmínky.

1) a = 7, b = 3, c = 4

   Platí $a > b$ neboli $7 > 3$, dále platí $c < a$ neboli $4 < 7$. Dosadíme do rovnic:

   a = a + 1 = 7 + 1 = 8

   c = c + 2 = 4 + 2 = 6

2) a = 8, b = 3, c = 6

   platí $a > b$ a $c < a$

   a = 8 + 1 = 9

   c = 6 + 2 = 8

3) a = 9, b = 3, c = 8

   platí $a > b$ a $c < a$

   a = 9 + 1 = 10

   c = 8 + 2 = 10

4) a = 10, b = 3, c = 10

   Platí $a > b$, ale neplatí $c < a$, dosadíme do rovnic:

   a = a – 5 = 10 – 5 = 5

   b = 2b = 2 · 3 = 6

5) a = 5, b = 6, c = 10

   Neplatí vstupní podmínka $a > b$, proces tedy končí.

Konečné hodnoty jsou a = 5, b = 6, c = 10, tyto hodnoty dosadíme do rovnice

$$7a + 71b + 52c = 7 \cdot 5 + 71 \cdot 6 + 52 \cdot 10 = \mathbf{981}.$$

Vypočítali jsme všechny části finálních souřadnic, ty jsou N 49° 43.528 E 13° 20.981.

2.4 JINÉ OBORY

Z uvedených typů keší je tento asi nejsložitější. Ne kvůli náročnosti keší, ale proto, že řešitel potřebuje mít kromě matematických znalostí také znalosti z příbuzných oborů jako je fyzika, chemie, informační technologie a další. To však na druhou stranu dělá keše zajímavější a matematiku z pohledu dítěte využitelnější a zábavnější. Při jejich řešení dítě zjistí, že matematika je nutná v mnoha dalších předmětech a směrech studia.

Fyzika pod mostem (GC1PC89) – Staré Sedlo/ Sokolov (Karlovarský kraj)

Příbuzný obor, na který se zaměříme, je fyzika. Pokud se jí chceme věnovat, bez matematiky se neobejdeme. Řešení příkladu by měl zvládnout žák na druhém stupni základní školy.

Zadání se dělí na čtyři části, každou budeme řešit zvlášť. Jejich zadání je dlouhé, proto vybereme jen důležité informace.

1) *Michal*

a) *Délka mostu je 300 m. Za jak dlouho přejede Michal most, pokud jede rychlostí 90 km/h ? [za AB sekund]*

b) *Výška mostu je 55 metrů nad hladinou řeky. Kolikátou sekundu se dostane kačer na úroveň hladiny řeky, pokud padá volným pádem? [C. sekundu]*

2) *Bongo*

Bongo si podložil pádlo a páčil kámen. Kámen nadzdvihl [D]x vetší silou, než jakou tlačil na konec pádla. Bongovo pádlo je dlouhé 120 cm. Bongo pádlo podložil 20 cm od konce pádla.

3) *Donald*

Jakým tlakem působil Donald na led, když zrovna přesouval jednu nohu před druhou? Donaldova hmotnost je 94 kg, velikost podrážky jeho boty 400 cm². [BE,D kPa]

4) *Radomír*

Ujel na kole 1700 m za 6 minut. Jel tedy průměrnou rychlostí [AF] km/h.

50° A(D - C).(C - E)FD

12° (F - E)B.A(C + D)(B + C)

1) a)

Rychlost (v)…………… 90 km/h = 25 m/s

Vzdálenost (s)………. 300 m

Čas (t)…………………… ?

Počítáme průměrnou rychlost, využijeme tedy t vyjádřené ze vztahu (1.1) a dosadíme

$$t = \frac{s}{v} = \frac{300}{25} = 12 \text{ s.} \quad \text{AB} = 12$$

b)

Výška mostu (s)………………….. 55 m

Gravitační zrychlení (g)……….10 m/s^2

Čas (t)…………………………………?

Definice č. 11

Volný pád je rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb tělesa o hmotnosti *m* se zrychlením *g* a s nulovou počáteční rychlostí. Kromě tíhové síly na těleso nepůsobí žádné další síly nebo jsou zanedbatelné (odpor prostředí). Trajektorie je svisle dolů. Dráha volného pádu je rovna polovině součinu gravitačního zrychlení a času umocněného na druhou, tj.

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (4.1)$$

z toho plyne, že hmotnost tělesa nemá na volný pád vliv.

Ze vzorce (4.1) vyjádříme čas t a dosadíme

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 55}{10}} = \sqrt{11} = 3{,}32$$

=> Michal dopadl 4. sekundu. C = 4

2)

Pádlo (d)………………………………………………………………120 cm

Vzdálenost od kamene k podložení pádla (d_1)…..20 cm

Poměr síly na koncích pádla………………………………?

Jde o úlohu typu „páka“. Páka je jednoduchý stroj se třemi částmi – osou otáčení (místo podložení), dvěma rameny, u nichž nás zajímá jejich délka (d) a působícími silami na jednotlivá ramena (F). Páka je v rovnováze, jestliže se výsledný moment sil působících na páku rovná nule.

Moment síly *M*,

$$M = F \,.\, d \qquad (4.2)$$

k rovnováze dojde, jestliže $M_1 = M_2$, tj.

$$F_1 .\, d_1 = F_2 \,.\, d_2 \qquad (4.3)$$

Vzdálenost d_1 je 20 cm. Vzdálenost d_2 vypočítáme jako rozdíl celkové délky *d* a délky d_1

$$d_2 = d - d_1 = 120 – 20 = 100.$$

Dosadíme do vztahu rovnováhy (4.3)

$$F_1 .\, d_1 = F_2 \,.\, d_2 \Rightarrow F_1 .\, 20 = F_2 \,.\, 100 \Rightarrow F_1 = 5 \,.\, F_2$$

Bongo kámen nadzdvihl 5x větší silou, než kterou tlačil na pádlo. D = 5

3)

Donaldova hmotnost (*m*)………. 94 kg

Obsah podrážky *(S)*………………… 400 cm^2 = 0,04 m^2

Gravitační konstanta (*g*)………..10 m/s^2

<u>Tlak (*p*) ………………………………….. ?</u>

Definice č. 12

Tlak p je fyzikální veličina vyjadřující poměr velikosti síly *F* působící kolmo na rovinnou plochu o obsahu *S* této plochy, tj.

$$p = \frac{F}{S} \qquad (4.4)$$

Síla se vypočítá jako součin hmotnosti *m* a gravitační konstanty *g*, tj.

$$F = m \,.\, g \qquad (4.5)$$

Sloučením vztahů (4.4) a (4.5) nám vznikne:

$$p = \frac{m \,.\, g}{S} \qquad (4.6)$$

$$p = \frac{94 \,.10}{0{,}04} = 23\,500 \text{ Pa} = 23{,}5 \text{ kPa}. \qquad \text{BE,D} = 23{,}5$$

4)

Vzdálenost (s) ……………………..1700 m = 1,7 km

Čas (t) ……………………………….6 minut = 0,1 h

<u>Průměrná rychlost (v) …………?</u>

Počítáme rychlost pomocí vztahu (1.1)

$$v = \frac{S}{t} = \frac{1{,}7}{0{,}1} = 17 \text{ km/h}. \qquad \text{AF} = 17$$

Z vyřešených příkladů vyplývá, že A = 1, B = 2, C = 4, D = 5, E = 3, F = 7

Nyní dosadíme do rovnic finálních souřadnic:

50° A(D - C).(C - E)FD = 50° 11.175

12° (F - E)B.A(C + D)(B + C) = 12° 42.196

Excel IV. – Kocour v botách (GC4PPBH) – Líbeznice/Brandýs nad Labem (Středočeský kraj)

Vybrali jsme čtvrtou keš z minisérie o Excelu, která se nachází v okrese Praha – východ. Keše na sebe nenavazují, takže není nutné začít u první.

<u>O sérii</u>

Série se zaměřuje na tabulkový kalkulátor Excel. V listingu každé keše bývá teorie zaměřená na vybranou funkci Excelu, poté následuje příklad, který se dá většinou řešit použitím této funkce. Po vyřešení příkladu získáme finální souřadnice keše. Owner upozorňuje, že není nutné použít přímo Excel nebo jiný tabulkový kalkulátor, ale samozřejmě lze použít tužku, papír a kalkulačku. My Excel při řešení využijeme.

Další keše z minisérie:

- Excel I. – Začátek (GC4PPBA)
- Excel II. – Záchrana (GC4PPBR)
- Excel III. – Malování (GC4PPBN)
- Excel V. – Hříčky (GC4NVR5)
- Excel VI. – Zaminovaná (GC5P9ZJ)
- Excel VII. – Nastavovaná kase (GC73BHD)

Listing Excelu IV. se zaměřuje na pokročilé funkce a nástroje Excelu. Zmiňuje, že jich je mnoho, a že se o nich nelze dlouze rozepisovat. Dočteme se pouze, že lze počítat a operovat nejen s čísly, ale také s texty, logickými výrazy, daty a časy, logickými výrazy… Dále, že existuje mnoho vestavěných funkcí, ale že si může uživatel definovat i své vlastní.

„Bylo, nebylo. Jednoho dne jsem takhle potkal někde v severní Itálii Kocoura v botách. Dali jsme se do řeči a jemu se strašně líbil náš oregon a kupon od Groundspeaku na měsíční premium členství zdarma. Slovo dalo slovo a po chvíli jsem s ním obojí vyměnil za jeho kouzelné boty. Rozloučili jsme se a šli dál každý svou cestou. Už od začátku se mi ale zdálo, že s těmi botami je něco v nepořádku. Čekal jsem, že každým krokem ujdou 7 mil., tady v Evropě tedy spíš 11,263 km. Ale ono to bylo jinak. Snímaly totiž nějak GPS souřadnice (když jsme se s Kocourem loučili, tak mi poslední pohled na milovaný oregon ukázal "N 46 00.717 E 10 20.718"). Když jsem udělal krok, tak jsem se posunul o 2 tisíciny na sever i východ. Když další, tak o 4. Třetí krok už o 6. Pomalu se z toho stával docela kvapík. Jenže mě to docela unavovalo a nakonec jsem se naštval a po 500. kroku jsem naštvaně boty zul, na tom místě je zahodil a pěšky došel domů. Jestli chcete, můžete je zkusit nalézt. Určitě víte, kde je hledat.“

Při řešení využijeme excelovskou tabulku

A)	1. krok	0,002		B) Aritmetická posloupnost				C) Součet n členů AP		
	2. krok	0,004			a_1	0,002			$s_{500} = n(a_1 + a_{500})/2$	
	3. krok	0,006			d	0,002				
	….	…			n	500			s_{500}	250,5
	500. krok	?								
	celkem	?			$a_{500} = a_1 + (n-1)d$					
					a_{500}	1				
D)	250,5 = 4° 10.5			E)	N 46°00.717		E 10° 20.718			
					4°10.5		4°10.5			
				=	**50° 11.217**		**14° 31.218**			

Tabulka č. 1 – Excel IV.

A) Rozepsali jsme si, o jakou vzdálenost se cestovatel každý krok posunul. Z toho zjistíme, že jde o aritmetickou posloupnost (AP)

Definice č. 13

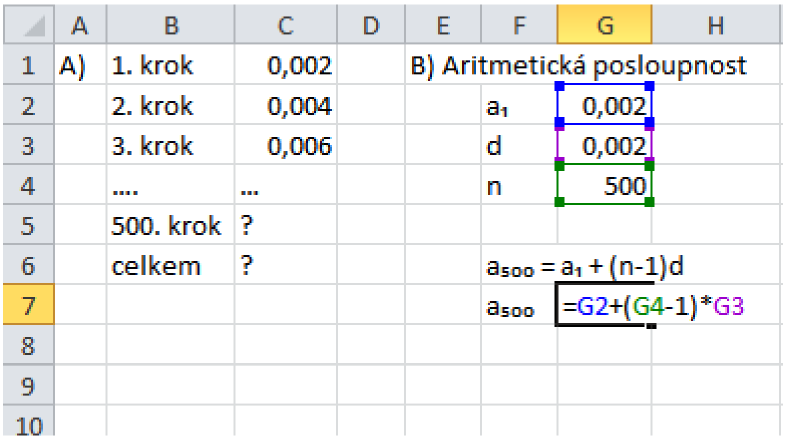
Aritmetická posloupnost – je druh posloupnosti, v níž je mezi sousedními členy stálý rozdíl, kromě prvního členu. Rozdíl nazýváme diference *d,* tj.

$$a_{n+1} = a_n + d \qquad (4.7)$$

B) Počítáme AP. Počet členů (*n*) je 500, diference (*d*) je 0,002. Vzorec pro výpočet *n-tého* členu AP:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad (4.8)$$

Vypočítáme a_{500}, podle vzorce (4.8). Nedosazujeme čísla, ale souřadnice polí (obr. č. 4 – Excel IV.).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	A)	1. krok	0,002		B) Aritmetická posloupnost			
2		2. krok	0,004			a_1	0,002	
3		3. krok	0,006			d	0,002	
4		....	...			n	500	
5		500. krok	?					
6		celkem	?			$a_{500} = a_1 + (n-1)d$		
7						a_{500}	=G2+(G4-1)*G3	
8								
9								
10								

Obrázek č. 4 – Excel IV.

C) Součet prvních *n* členů AP vyjadřuje vzorec

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad (4.9)$$

V našem případě se n = 500.

D) Vyšel posun o 250,5, výsledek je v minutách. Převedeme ho na stupně.

E) Výsledný posun sečteme s výchozími souřadnicemi a vyjdou nám finální souřadnice – modře zvýrazněné.

Motivace: Počítání v Excelu je jednoduché a rychlé. Není třeba zadávat několikrát to samé číslo pro různé výpočty jako do kalkulačky. Excel má mnoho vestavěných funkcí, které lze použít nebo si může řešitel nadefinovat své, třeba zadáním vzorce jako v případě výpočtu B. Znalost práce s Excelem šetří čas i námahu.

2.5 Logické a rekreační

2.5.1 LEHČÍ

Jsou určeny hlavně pro děti, rozvíjí jejich logické myšlení. Formou her s čísly je učí kladnému vztahu k matematice. Typickým příkladem jsou japonské rébusy či malované křížovky.

Nejznámějším japonským rébusem je sudoku. Další rébusy bychom našli pod názvy nurikabe, kakuro, sikaku a další. Kolem města Liberec je ukryta celá série zaměřená na japonské rébusy, má 7 keší plus jednu bonusovou.

Jelikož je sudoku nejznámější, uvedeme si právě tento typ japonského rébusu. Mohli bychom použít keš z liberecké série, ale podobná je i u Karlových Varů a má bohatší listing, proto volíme právě tuto.

Sudoku (GC6VMD1) – Karlovy Vary (Karlovarský kraj) – ÚPRAVA OBRÁZKŮ

Po přečtení listingu keše víme, že hru vymyslel H. Garns v roce 1979. Dříve byla nazývána „Number place“, velmi si ji oblíbili v Japonsku, kde ji přejmenovali na nám dnes známé „Sudoku“ a pod tímto názvem se hra vrátila k nám. V dnešní době je sudoku spolu s křížovkou součástí mnoha periodik.

Sudoku je tabulka s políčky 9 x 9, která jsou rozdělena do 9 čtverců 3 x 3. Některá políčka jsou vyplněna čísly, zbytek je třeba doplnit. Při vyplňování musí platit, že v každém řádku, sloupci a čtverci je použita každá z číslic 1 až 9 právě jednou. Možností vyplnění těchto políček je 6 670 903 752 021 072 936 960.

Ač se to na první pohled nezdá, obtížnost není dána počtem vyplněných políček, ale jejich umístěním a vzájemnými vazbami. Doba luštění sudoku je různá, záleží na zkušenostech luštitele a obtížnosti konkrétního sudoku.

A teď už k samotnému řešení. Úkolem je vyřešit tři sudoku (obrázky č. 5,6 a 7 – Sudoku), kde jsou zadaná šedivě podbarvená pole. Čísla, která jsou v polích označených písmenem, budeme potřebovat k výpočtu souřadnic. Souřadnice jsou zadány předpisem

$$N\ 50°\ 13.(A + A)(C - 1)E \qquad E\ 012°\ 50.C(2 \cdot B)(D - 1)$$

1	9	8	A 3	5	2	4	6	7
4	2	5	1	6	7	8	9	3
3	7	6	8	4	9	2	1	5
7	4	2	6	3	8	1	5	9
8	5	3	9	2	1	6	7	4
9	6	1	4	7	5	3	8	2
5	3	7	2	1	6	9	4	8
6	8	4	5	9	3	7	2	1
2	1	9	7	8	4	5	3	6

Obrázek č. 5 – Sudoku 1

5	3	B 4	6	7	8	C 9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Obrázek č. 6 – Sudoku 2

D3	6	4	7	8	5	1	2	9
1	8	2	4	3	9	6	5	7
7	9	5	2	1	6	8	3	4
4	7	1	5	9	2	3	6	8
9	5	6	3	7	8	4	1	2
8	2	3	6	4	1	7	9	5
2	1	8	E9	6	4	5	7	3
6	3	9	8	5	7	2	4	1
5	4	7	1	2	3	9	8	6

Obrázek č. 7 – Sudoku 3

Z vyluštěných sudoku zjistíme, že A = 3, B = 4, C = 9, D = 3, E = 9. Po dosazení do zadaných rovnic dostáváme finální souřadnice keše N 50° 13.(3 + 3)(9 - 1)9 = N 50° 13.689

E 12° 50.9(2 · 4)(3 - 1) = E 12° 50.982

2.5.2 TĚŽŠÍ

Součin a Součet (GC13V4M) – archivovaná, Žabovřesky/ Brno (Jihomoravský kraj)

„Učitel si myslí dvě přirozená čísla větší než 1. Dva studenti mají za úkol uhodnout která. Prvnímu studentovi poví součin těchto čísel a druhému součet.

První: "Neznám součet."
Druhý: "To jsem věděl. Součet je menší než 14."
První: "To jsem věděl. Ale teď už čísla znám."
Druhy: "Já také."

Jaká byla ta čísla?

*Označte čísla písmeny **A, B**. Cache je ukryta ve vzdálenosti **3 · A · B-A** metrů v azimutu **(A - B) · (A + B)** od počátečních souřadnic (azimut i vzdálenost jsou přirozená čísla).“*

Začneme sestrojením tabulky se čtyřmi sloupci. Do prvního a druhého sloupce napíšeme všechny dvojice čísel větších než jedna, které dají v součtu méně než čtrnáct. Do třetího napíšeme součty a do čtvrtého součiny těchto dvojic. Poté budeme postupně mazat dvojice, které se nehodí (tabulka č. 2 – Součin a součet).

1) Po prvním výroku mažeme dvojice, jejichž součin je tvořen dvěma prvočísly popřípadě druhou nebo třetí mocninou prvočísel. Jelikož z tohoto součinu, by si první odvodil čísla a znal i součet, který znát nemá.

2) Po vyřčení druhého výroku vymažeme jen dvojici 3 a 4, jelikož jiná dvojice nemá stejný součet.

3) První student věděl, že součet je menší než 14, proto můžeme mazat dvojice, jejichž součin se dá rozložit více způsoby na činitele se součtem větším nebo rovným 14. Příkladem je třeba dvojice 4 a 6, se součinem 24, který se dá také vyjádřit jako 2 · 12 = 14.

4) Nakonec mažeme všechny dvojice, které mají stejný součin s jinou dvojicí. Zbyde jediná dvojice a tou je dvojice 2 a 6, tato čísla jsou výsledkem.

		X	Y	Součet	Součin		X	Y	Součet	Součin
1)		2	11	13	22		3	5	8	15
		2	10	12	20		3	4	7	12
2)		2	9	11	18		3	3	6	9
		2	8	10	16		4	9	13	36
3)		2	7	9	14		4	8	12	32
		2	6	8	12		4	7	11	28
4)		2	5	7	10		4	6	10	24
		2	4	6	8		4	5	9	20
		2	3	5	6		4	4	8	16
		2	2	4	4		5	8	13	40
		3	10	13	30		5	7	12	35
		3	9	12	27		5	6	11	30
		3	8	11	24		5	5	10	25
		3	7	10	21		6	7	13	42
		3	6	9	18		6	6	12	36

Tabulka č. 2 – Součin a součet

Označme čísla A = 6 a B = 2 (v tomto pořadí, jelikož výsledky rovnic azimutu a metrů musí vyjít kladné). Dosadíme do rovnice pro zjištění metrů $3 \cdot A \cdot B - A = 3 \cdot 6 \cdot 2 - 6 = 30$. A do rovnice azimutu $(A - B) \cdot (A + B) = (6 - 2) \cdot (6 + 2) = 32$. Výchozí souřadnice jsou N 49° 13.236 E 016° 34.962, vzdálenost v metrech a azimut ve stupních zadáme do navigace a vyjdou nám cílové souřadnice N 49° 13.264 E 016° 34.988.

2.6 OSTATNÍ

Do této skupiny patří keše, u kterých bývá zajímavý jejich listing. V něm se kačer dozvídá zajímavé informace o historii matematiky, slavných matematicích a mnoho dalšího. Jsou dobrou motivací ke studiu, jelikož dětem ukazují, že matematika nejsou pouze čísla, ale mnoho dalšího. Pro představu si jeden ukážeme.

Fibonacci (GC1915P) – Praha – Nusle (Hlavní město Praha)

V bohatém listingu si přečteme informace o Leonardu Fibonaccim, který žil ve 12. století a zpopularizoval používání arabských číslic namísto římských, čímž obchodníkům značně ulehčil počítání. Můžeme si také přečíst jeho velmi známou úlohu o populaci králíků, na které je vysvětlena Fibonacciho posloupnost. Úloha pochází z Fibonacciho knihy *„Liber abaci"*, v níž je vysvětleno používání arabských číslic. Jsou přiloženy obrázky znázorňující Fibonacciho posloupnost v přírodě (spirála daná Fibonacciho čísly) – ve tvaru spirály jsou uspořádána semínka slunečnice, lastury, semena šišek… Dále se dozvíme o Fibonacciho číslech, zlatém řezu atp.

„Napřed budete muset spočítat pár čísel z Fibonacciho posloupnosti:

XXX = (fib(1515) MOD 1000) + fib(12) - fib(5)

YYY = (fib(1516) MOD 1000) - fib(13) - fib(7)

Keška se nachází na souřadnicích N50 03.XXX E014 27.YYY"

Definice č. 14

Fibonacciho posloupnost (FP) - je nekonečná řada čísel. Tato čísla jsou někdy nazývána Fibonacciho čísla. V posloupnosti je prvním číslem nula, druhým jednička a každé následující číslo je součet dvou předchozích čísel.

$$F(n) = \begin{cases} 0; & pro\ n = 0 \\ 1; & pro\ n = 1 \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2); & n \geq 2 \end{cases}$$

Řada tak začíná čísly 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...

Výpočet souřadnic si zjednodušíme pomocí výpočetního a vědomostního nástroje Wolfram|Alpha, který nalezneme na www.wolframalpha.com. Do příkazového řádku postupně zadáme výrazy nacházející se na pravých stranách rovnic, kterými jsou zadané části XXX a YYY finálních souřadnic.

XXX = (*fib(1515) MOD 1000) + fib(12) - fib(5) = 749*

YYY = (fib(1516) MOD 1000) - fib(13) - fib(7) = 741

Dosadíme XXX a YYY do N 50° 03.XXX E 014° 27.YYY = N 50° 03.749 E 014° 27.741.

3 NÁVRH VLASTNÍ KEŠE

Založení vlastní keše je splněným snem snad každého geokačera. Není to ale jen o tom, že uložíme krabičku na oblíbené místo. Umisťování keší má svá pravidla, která je nutné dodržovat. Pravidla lze najít na www.geocaching.com, kde je i krátké video o zakládání keší. Uvedu jen shrnutí pár základních pravidel a přidám pár doporučení, která lze najít na webové stránce www.wiki.geocaching.cz, pod záložkou „zakládání cache".

Pravidla

- Při umisťování je třeba dodržovat místní zákony. Hráči nesmí být nuceni vstoupit při lovu na soukromý pozemek nebo do míst, kam je vstup zakázán.
- Minimální vzdálenost mezi dvěma sousedními kešemi či waypointy je 161 m.
- Keš musí mít dlouhodobou životnost, být dostupná a nevynucovat kontakt s ownerem či jiným hráčem.
- Není pohřbená v zemi.
- Pokud je zakládána mystery keš, musí mít pouze jedno řešení.
- Keš nebo její odlov nepoškozuje cizí majetek.
- Odeslání návrhu reviewerovi, který schválí, že je keš založena podle pravidel.
- Po schválení a fyzickém umístění keše udržovat listing, kontrolovat vhodnost logů a také kontrolovat fyzické umístění keše.

Doporučení pro založení dobré keše

- Nespěchat na založení keše. Hráč by měl mít odloveno nejméně několik desítek lépe stovek keší, aby ta co založí, měla smysl. Geokačer si lovením vytříbí svůj vkus, získá zkušenosti a nápady, o to pak bude jím založená keš lepší.
- Měla by mít nápad/téma.
- Vybrat vhodnou lokalitu – podle pravidel, dávat pozor na bezpečnost, neukrývat keš do přemudlené lokality.
- Ukrýt keš na zajímavé místo.

- Dostupné umístění a odpovídající velikost – ne v zemi nebo příliš vysoko, ani moc velká nebo malá.
- Správně zaměřit souřadnice.
- Připravit kvalitní listing.
- Dobře rozmyslet úroveň obtížnosti a terénu.
- Provést betatest[6] – může provést kamarád nebo dobrovolník z komunity geokačerů.

Z časových důvodů (příprava, umístění, několikanásobná kontrola, betatest, schválení reviewerem atp.) pouze navrhnu, kde a jakým způsobem bych keš založila, ale nebudu ji fyzicky umisťovat.

3.1 PROMYŠLENÍ MÍSTA ÚKRYTU

Mým prvním krokem je promyšlení místa úkrytu. Jelikož bych keš umisťovala poprvé, zvolím oblast, kterou dobře znám. Hráče chci přivést na lesní vyhlídku, ze které je nádherný výhled na okolní přírodu. Místo je navštěvované, ale pro svou polohu v lese na kopci ne příliš frekventované čili pro ukrytí keše ideální. Nejbližší keše jsou 250 a více metrů vzdálené, takže splňuji pravidlo o vzdálenosti sousedních keší. Souřadnice nebudu prozrazovat, kdybych se ji někdy rozhodla opravdu založit, abych hráčům nezkazila radost z luštění.

Podle doporučení by keš měla mít nápad/téma. Tématem keše bude odpovědět dětem na klasickou otázku pokládanou při hodinách matematiky: *„K čemu mi ta matika bude?“*, pokud možno zábavným způsobem a s nadhledem.

Poté, co jsem si vybrala, kam keš umístím, jsem se vydala na ono místo. Pořádně jsem si ho prohlédla, abych zjistila, zda se keš dá někam schovat. Je tu perfektní úkryt ve škvíře

[6] Betatest - Kontrola připravované keše. Kontrola je zaměřená zejména na srozumitelnost listingu, jednoznačnost zadání úkolů a v neposlední řadě jejího umístění. Kontroluje se zejména, zda umístění není proti pravidlům a odlov není nebezpečný. Betatest je doporučený a někdy dokonce vyžádaný reviewerem.

mezi kameny. Změřím souřadnice, raději několikrát a ty si uložím. Podívám se také, jaká velikost keše by se do skrýše vešla. Udělám pár fotek s výhledem, které pak uložím do galerie v listingu, abych hráče na lov keše nalákala.

3.2 SOUŘADNICE

Dále si musím rozmyslet, jakým způsobem budu souřadnice zadávat. Existuje mnoho způsobů, jakými souřadnice zadat. Pro svou keš jsem se rozhodla souřadnice rozdělit na šest částí. Každá část obsahuje dvoj až trojciferné číslo, tj. N (1)°(2).(3) E (4)°(5).(6). Ke každé z těchto částí vymyslím příklad. Vzhledem k tématu budou příklady vycházet „ze života“. Užití matematiky v praxi budu demonstrovat na povoláních, ve kterých se dá matematika využít.

Nejdříve uvedu příklady, ze kterých hráč získá finální souřadnice. Poté promyslím další náležitosti listingu – výchozí souřadnice, úroveň obtížnosti a terénu, velikost keše a hint.

Zadání příkladů pro výpočet souřadnic

„Matematiku uplatníš ve spoustě zaměstnání. O účetních, učitelích matematiky, jaderných fyzicích, projektantech nebo prodavačkách asi není třeba mluvit, ti se bez ní určitě neobejdou. Ale co jiné obory? Zkusme se podívat, jak bychom matiku využili ať už v praxi nebo alespoň při studiu některých oborů.

(1) Švadlena

Švadlena má ušít padesátery stejné šaty. Kolik m² látky na ně bude celkem potřebovat? Aby se jí lépe šilo, rozdělila si šaty na 3 části – tílko, sukni a přes pas uváže mašli.

Rozměry jedněch šatů: tílko – obvod 88 cm, délka 30 cm; sukně – obvod v nejširší části 1,15 m, délka 60 cm; mašle – 3 cm x 1 m. *(Výsledek zaokrouhli na vyšší celé číslo, přebytek je na švy a odstřiženou látku)*.

(2) Automechanik

Protože jako automechanik budeš muset být taky trochu obchodník, musíš umět zákazníkům vysvětlit, proč ty nové pneumatiky potřebují.

Auto jede rychlostí 108 km.h^{-1}. Na sjetých pneumatikách auto zpomaluje rychlostí 0,2 m.s^{-1}, na nových 0,4 m.s^{-1}. Spočítej rozdíl délek brzdných drah v metrech na sjetých a nesjetých pneumatikách. (*Výsledek vyděl 100 a zaokrouhli na celé číslo*).

(3) Humanitní obory

Říkáš si, já budu historik, jazykovědec, sociolog… já tu matiku určitě potřebovat nebudu. Ale ve většině těchto oborů se dělají statistiky na různá témata a k tomu potřebuješ matiku. Úplným základem je třeba porovnávání výsledků žáků ve školách.

Nejmenovaná vysoká škola se rozhodla zjistit, jak fyzicky zdatní jsou právě nastupující studenti. Tělocvikáři sestavili testy fyzické zdatnosti. Testy obsahovaly několik aktivit jako je vytrvalostní běh, hod míčem, plavání atp. Studenti byli bodováni. Následující tabulka znázorňuje úspěšnost 60 z nich. Jaký je průměrný počet získaných bodů? (*Výsledek převeď na trojciferné číslo*)

Počet získaných bodů	43	51	55	59	62	65	68	71	85	90
Počet studentů	1	3	6	9	12	7	13	5	3	1

(4) Barman

Ti, kteří se moc nevidí ve „vážných“ zaměstnáních, si mohou zvolit třeba povolání barmana. Každý správný barman by měl vědět, kolika procentní drinky míchá. Jinak se mu hosti opijí moc rychle a začnou ničit zařízení a to by barman jistě nechtěl.

Barman se rozhodl, že namíchá bowli. Do teriny začal lít: 1 l bílého vína (13 %), 2 dcl bílého rumu (37 %), 700 ml sektu (12 %) a 0,5 l džusu. Poté přihodil nějaké to ovoce - kiwi, ananas, broskve, jahody, hroznové víno atp. Spočítej procento alkoholu připravené bowle (*ovoce při výpočtu zanedbej, zas tak přesně to vědět nepotřebuješ)*.

(5) Gambler

Po vyzkoušení všech možných zaměstnání zjistíš, že je moc namáhavé chodit denně do práce. Proto se rozhodneš stát se profesionálním gamblerem, to jsou přeci snadno vydělané peníze. Spočítej si, jakou máš šanci na výhru, jestli se ti to vůbec vyplatí.

Pravidla loterie: Sázející typuje 7 čísel z 30. Jakou má šanci, že se trefí? (Výsledek vynásob 10^8, zaokrouhli na celé číslo a odečti 2.)

(6) Geograf

Zpět k seriózním zaměstnáním. Chceš být geograf, proč ne?

Geografové často potřebují znát nejkratší vzdálenost mezi dvěma místy na Zemi (kulové ploše). Tato vzdálenost se nazývá ortodroma. Vypočítej nejkratší vzdálenost v kilometrech mezi těmito dvěma místy.

1) Plzeň - náměstí Republiky N 49°44.86698 E 13°22.70093
2) Žilina - zastávka Ovocinárská N 49°11.43287 E 18°47.39687

Jestli jsem tě stále nepřesvědčila o užitečnosti matiky, tak mi věř, že ji využiješ minimálně pro zjištění souřadnic této kešky ☺."

3.3 DALŠÍ ÚDAJE LISTINGU

- *Výchozí souřadnice* - Na místo se dá dojít několika cestami. Výchozí souřadnice volím na kraji nedalekého města, kde se dá ještě zaparkovat a je to odtud nejblíž.
- *Terén* - cesta je po turistických trasách či lesních pěšinách. Za normálních okolností je cesta na úrovni 2, ale je zhruba 3 km vzdálená od posledního možného místa k zaparkování a navíc většinu cesty do kopce. Při hledání samotné keše je třeba se občas něčeho přidržet. Výsledný počet hvězdiček volím 3.
- *Velikost keše* - keš budu schovávat do škvíry ve skále, kam se vejde keš velikosti small. Připravím si plastovou krabičku, do které dám logbook, tužku a nějaké předměty na výměnu, například figurky nebo geocoiny.
- *Náročnost keše* - mystery keše se obecně nacházejí na úrovni 3 až 4, podle obtížnosti zadání. Mnou zadané příklady nejsou nijak zvlášť těžké, proto zadám úroveň 3.
- *Hint* - ve škvíře
- *Galerie* - Do galerie přidám pořízené fotografie s výhledem. Kačeři tak budou vědět, že návštěva místa stojí za námahu s luštěním a delší cestou.

3.4 BETATEST A ZALOŽENÍ KEŠE NA OFICIÁLNÍM WEBU GEOCACHINGU

Vše mám rozmyšlené, takže je možné provést betatest. Požádám nějakého geokačera, aby podle zadání zkusil keš najít. Pokud keš nalezne a nezjistí při hledání žádné nesrovnalosti, mohu keš založit na oficiálních stránkách GC.

Přihlásím se na www.geocaching.com. Pod záložkou „Hrát“ najdu odkaz „Založit novou kešku“. Po kliknutí se otevře mapa a vyhledávač souřadnic. Zadám souřadnice, kam chci keš uložit a ověřím vzdálenost od nejbližších keší či waypointů. Pokud je to v pořádku mohu pokračovat.

Dále se otevřou záložky, kde si zvolím typ keše, trasové body, velikost a hodnocení keše a mohu zadat také popis. Vše vyplním podle výše sepsaných bodů. Po vyplnění bych vše odeslala reviewerovi a nechala si keš zkontrolovat.

3.5 PO ZALOŽENÍ

Po úspěšném založení keše bych dále kontrolovala fyzické umístění keše, zda je na svém místě a není poničená. Mou povinností by také bylo kontrolovat vhodnost logů v listingu a odpovídat na případné dotazy hráčů – kačeři mohou ownerovi napsat, pokud neví, jak keš řešit.

ZÁVĚR

V bakalářské práci bylo prokázáno, že matematika je velmi dobře použitelná jako námět keší v geocachingu. Bylo uvedeno několik modelových případů, jež ukazují matematiku i z té zábavnější a praktičtější části. Byl také vytvořen námět na vlastní keš s matematickým obsahem.

V České republice je ukryto 13 864 [Zdroj: Vaník 2017] mystery keší, z nichž je spousta matematická. Mystery keše je možné lovit po celé republice a nejen zde. V zahraničí jsou také velmi oblíbené. Hráči se mohou za matematickými kešemi vydat například do následujících států a najít uvedené keše.

- Německo – *„Wie man eine Gleichung umformt_FHM#46 (GC25FRD)“*
- Finsko – *„Jokeri (GC6XVVM)“*
- Kalifornie - *„Algebra Review Micro (GC25ACD)“*
- Brazílie – *„Taguatinga* (*GC59145)“*
- Rusko – *„Geometric style (GC6VHHG)“ nebo „Happy Tree Finders (GC2K5C1)“*

Možností je mnohem více, záleží pouze na preferencích každého, kam se chce vydat. Spousta keší je přeložena do angličtiny a tak nebývá problém hledat i v zemích s jiným úředním jazykem než je čeština či angličtina. Matematické keše mají navíc výhodu, že pokud je keš zadána jako příklad, jazyk není bariérou.

Z bakalářské práce vyplývá, že je možné využít podobné keše při výuce matematiky a jsou vhodnou pomůckou pro součást výuky a jejího oživení.

Existuje možnost využití propojení geocachingu i s dalšími předměty vyučovanými ve školách. Základem by byl zeměpis a tělesná výchova a dále předměty, které by byly obsahem mystery keší (přírodní vědy, dějepis, atp.). Vše by se dalo propojit v komplexním projektu.

Projekt by spočíval ve výjezdu třídy na turistický kurz, jehož programem by bylo hledání, řešení a lovení mystery keší se vztahem k vybraným předmětům. Výjezdy by se konaly v místech zajímavých z pohledu zeměpisného.

RESUMÉ

Bakalářská práce se věnuje propojení matematiky a geocachingu. Cílem bakalářské práce je ukázat, jak lze využít tuto populární hru pro budování lepšího vztahu k matematice zejména u dětí a dospívajících. A také ukázat jak mohou keše motivovat ke studiu matematiky.

První část je věnována geocachingu – popisuje čím je, jak vznikl a některé jeho charakteristiky. Ve druhé části je uvedeno několik vybraných keší se vztahem k matematice s návrhy na jejich řešení a uvedením způsobu, jakým mohou děti motivovat ke studiu matematiky. Ve třetí části je navržena vlastní „matematická“ keš.

RESUMÉ

The bachelor thesis focuses on linking mathematics and geocaching. The aim of the thesis is to show how to use this popular game for building a better relationship to mathematics. Especially to show, how the caches could motivate for mathematics studying children and adolescents.

The first part is about geocaching - describes what it is, how it began and some of its characteristics. In the second part, there are examples of caches related to mathematics with proposals for their solution and the way how they could motivate children to study mathematics. The third part describes the self-created "mathematical" cache.

SEZNAM LITERATURY

1. *Geocaching: Official Blog* [online]. Seattle: Groundspeak, Inc., 2017 [cit. 2018-04-12]. Dostupné z: https://www.geocaching.com/blog/2017/04/3-million-geocaches-the-infographic/
2. VANÍK, Jakub. *Atlas geocachingu* [online]. Plzeň, 2017 [cit. 2018-04-12]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~vanikj/maps/mystery-okresy/. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd. - v době tvoření této bakalářské práce ještě neobhájena
3. *Geocaching* [online]. Seattle: Groundspeak, Inc., 2018 [cit. 2018-04-12]. Dostupné z: https://www.geocaching.com
4. *Geocaching.cz* [online]. [cit. 2018-04-19]. Dostupné z http:// www.geocaching.cz
5. *GeoWiki* [online]. MediaWiki, 2014 [cit. 2018-04-12]. Dostupné z: http://wiki.geocaching.cz/wiki/Hlavn%C3%AD_strana – oficiální zdroj pro český GC
6. HRON, Michal. Před deseti lety Bill Clinton změnil svět. Vypnul umělé rušení GPS signálu. *Idnes.cz*[online]. Mafra, 2018 [cit. 2018-04-12]. Dostupné z: https://mobil.idnes.cz/pred-deseti-lety-bill-clinton-zmenil-svet-vypnul-umele-ruseni-gps-signalu-158-/navigace.aspx?c=A100430_110901_navigace_hro
7. VANÍK, Jakub. *Atlas geocachingu*. Plzeň, 2015. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni.
8. GREGOŘICA, Petr. *Zpracování GPS dat*. Plzeň, 2011. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni.
9. BOHATÝ, Jan. *Zpracování dat z GPS modulu*. Plzeň, 2013. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni.

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK A GRAFŮ

Obrázky

Tabulky

Grafy