Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

KAREL SOBĚHART

Speciální moduly a jejich příklady

Katedra matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Libuše Tesková, CSc.
Studijní program: Obecná matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Plzeň 2017

Na tomto místě bych chtěl poděkovat své vedoucí bakalářské práce paní RNDr. Libuši Teskové, CSc. za námět a vedení práce, především však za trpělivost při jejím zpracování. Dále bych rád poděkoval svojí rodině za podporu během studií.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

V .... dne .... Podpis autora

Abstrakt :

Tato práce je zaměřena na speciální moduly. Je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole jsou uvedeny základní pojmy a tvrzení z teorie modulů. Druhá kapitola se zabývá speciálním typem modulů a to velkými podmoduly. Ve třetí kapitole je soubor příkladů objasňující tvrzení z druhé kapitoly. V práci je zaveden nový pojem fundamentálního podmodulu a uveden vztah mezi velkým a fundamentálním podmodulem. Práce může sloužit jako studijní materiál.

Klíčová slova: modul, velký podmodul, fundamentalní podmodul, Abelova grupa, vektorový prostor

Abstract :

This thesis is focused on special modules. Paper is structured into three chapters. First chapter defines basic concepts and propositions from module theory. Second chapter is focused on special type of modules – big modules. Third chapter contains set of examples clarifying propositions from second chapter. Paper defines new concept of fundamental submodule and presents relation between large module and fundamental submodule. This paper can server as a study material.

Keywords: module, large submodule, fundamental submodule, Abelian subgroup, vector space

Tady bude vloženo oficiální zadání práce.

Obsah

Úvod

V první kapitole se budu zabývat základními poznatky, jejichž znalost je vhodná pro pochopení následujících kapitol. Jmenovitě definice struktur a jejich příklady, morfismy mezi těmito strukturami.

V druhé kapitole se zaměřím na teorii speciálních modulů, konkrétně velkých modulů. Pokusím se o vlastní formulaci důkazů základních vět této teorie.

V poslední kapitole se pokusím modelovat teorii na příkladech. Budu je hledat hlavně v Abelových grupách, neboť ty by měly být čtenáři známé.

Práci budu koncipovat tak, aby mohla sloužit i jako studijní materiál pro zájemce o tuto problematiku. Zároveň se pokusím prozkoumat strukturu speciálních modulů pomocí řešených příkladů.

Kapitola 1

Základní pojmy

V této kapitole se seznámíme s nejdůležitějšími pojmy, které budeme potřebovat pro pochopení následujících kapitol. Hlavními zdroji pro tuto kapitolu jsou [1], [2], [5].

1.1 Základní struktury

Definice 1.1. (Abelova) grupa

Neprázdná množina G s binární operací $+$ tvoří strukturu, kterou nazýváme grupa, právě když splňuje následující podmínky:

$(A1)$ Pro všechny prvky g_1, g_2 z G platí, že $g_1 + g_2$ je také prvkem G.

$(A2)$ Pro všechny prvky g_1, g_2, g_3 z G platí, že

$$(g_1 + g_2) + g_3 = g_1 + (g_2 + g_3).$$

$(A3)$ V G existuje prvek 0 takový, že pro všechny g_1 z G platí, že

$$g_1 + 0 = 0 + g_1 = g_1.$$

$(A4)$ Ke každému prvku g_1 z G existuje prvek opačný $-g_1$ z G takový, že platí

$$g_1 + (-g_1) = -g_1 + g_1 = 0.$$

Budeme ji značit $\mathbf{G} = (G, +)$.

Struktura $\mathbf{G}$ se nazývá komutativní grupa nebo také Abelova grupa, právě když je navíc splněná podmínka:

$(A5)$ Pro všechny prvky g_1, g_2 z G platí, že

$$g_1 + g_2 = g_2 + g_1.$$

Definice 1.2. podgrupa

Neprázdná množina H, kde $H \subseteq G$ a $\mathbf{G}$ je grupa, se nazývá podgrupa grupy $\mathbf{G}$, pokud

(1) $0 \in H$,

(2) $a + b \in H \ \forall a, b \in H$,

(3) $-a \in H \ \forall a \in H$.

Tento vztah zapíšeme jako $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$.

Poznámka: Podmnožina $H \subseteq G$ grupy $\mathbf{G}$ je podgrupa, pokud $\forall a, b \in H$ je

$$a - b \in H.$$

Definice 1.3. okruh

Neprázdná množina R s binárními operacemi + a . tvoří strukturu, kterou nazýváme okruh, právě když splňuje následující podmínky:

(1) $(R, +)$ je Abelova grupa.

$(M1)$ Pro všechny prvky r_1, r_2 z R platí:

$$r_1.r_2 \in R.$$

$(D1)$ Pro všechny prvky r_1, r_2, r_3 z R platí:

$$r_1.(r_2 + r_3) = r_1.r_2 + r_1.r_3.$$

$(D2)$ Pro všechny prvky r_1, r_2, r_3 z R platí:

$$(r_2 + r_3).r_1 = r_2.r_1 + r_3.r_1.$$

Okruh budeme značit $\mathbf{R} = (R, +, .)$.

Okruh $\mathbf{R} = (R, +, .)$ se nazývá unitární okruh nebo také okruh s jednotkovým prvkem, právě když je navíc splněná podmínka:

$(M2)$ V R existuje prvek 1 takový, že pro všechny r_1 z R platí:

$$r_1.1 = 1.r_1 = r_1.$$

Okruh $\mathbf{R} = (R, +, .)$ se nazývá asociativní okruh, právě když je navíc splněná podmínka:

$(M3)$ Pro všechny prvky r_1, r_2, r_3 z R platí:

$$(r_1.r_2).r_3 = r_1.(r_2.r_3).$$

Okruh $\mathbf{R} = (R, +, .)$ se nazývá komutativní okruh, právě když je navíc splněná podmínka:

$(M3)$ Pro všechny prvky r_1, r_2 z R platí:

$$r_1.r_2 = r_2.r_1.$$

Definice 1.4. modul [2]

Nechť $\mathbf{R}$ je asociativní, komutativní okruh s jednotkovým prvkem 1. Množina M se nazývá $\mathbf{R}$-modul $\mathbf{M}$, pokud $(M, +)$ je aditivní komutativní grupa a pro každý prvek $m \in M$ a pro každé $\kappa \in R$ platí, že $\kappa m \in M$ a platí následující podmínky pro všechny prvky κ, λ okruhu $\mathbf{R}$ a všechny prvky m_1, m_2 modulu $\mathbf{M}$:

(1) $\kappa(m_1 + m_2) \;=\; \kappa m_1 \;+\; \kappa m_2$,

(2) $(\kappa \;+\; \lambda)m_1 \;=\; \kappa m_1 \;+\; \lambda m_1$,

(3) $(\kappa\lambda)m_1 \;=\; \kappa(\lambda m_1)$,

(4) $1m_1 \;=\; m_1$.

Poznámka: Moduly lze považovat za zobecnění vektorových prostorů, neboť axiomy jsou stejné, jen místo tělesa pracujeme s okruhem.

Příklad 1.5. [2] Pro daný okruh $\mathbf{R}$ a přirozené číslo n, je množina R^n všech uspořádaných n-tic $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ modul. Pokud operace definujeme po složkách následovně pro všechny prvky $(\xi_1, ..., \xi_n), (\eta_1, ..., \eta_n)$ modulu R^n a pro všechny prvky κ okruhu R je

$$(\xi_1, ..., \xi_n) + (\eta_1, ..., \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, ..., \xi_n + \eta_n),$$

$$\kappa(\xi_1, ..., \xi_n) = (\kappa\xi_1, ..., \kappa\xi_n).$$

Příklad 1.6. [2] Každá komutativní grupa je modul nad okruhem celých čísel. V aditivní grupě $\mathbf{A}$ máme totiž pro každé celé n a $a \in \mathbf{A}$ definované násobení $na = \underbrace{a + a + ... + a}_{n}$, pokud $n > 0$; $0{*}a = 0$; $na = (-n)(-a) = \underbrace{(-a) + (-a) + ... + (-a)}_{-n}$, pokud $n < 0$. Toto zobrazení splňuje $\forall \kappa, \lambda \in Z, a, b \in \mathbf{A}$, rovnosti

(1) $\kappa(a + b) = \kappa a + \kappa b$,

(2) $(\kappa + \lambda)a = \kappa a + \lambda a$,

(3) $(\kappa\lambda)a = \kappa(\lambda a)$,

(4) $1a = a$.

Nyní si názorně ukážeme platnost podmínek modulu.

(1) $\kappa(a + b) = \underbrace{(a + b) + (a + b) + ... + (a + b)}_{\kappa} =$

$= \underbrace{a + a + ... + a}_{\kappa} + \underbrace{b + b + ... + b}_{\kappa} = \kappa a + \kappa b, \quad \forall \kappa \in \mathbf{Z}, \kappa > 0, \forall a, b \in \mathbf{A},$

$0(a + b) = 0 = 0a + 0b, \quad \kappa = 0, \forall a, b \in \mathbf{A},$

$\kappa(a + b) = (-\kappa)((-a) + (-b)) = \kappa a + \kappa b, \quad \forall \kappa \in \mathbf{Z}, \kappa < 0, \forall a, b \in \mathbf{A},$

(2) $(\kappa + \lambda)a = \underbrace{a + a + ... + a}_{\kappa+\lambda} = \underbrace{a + a + ... + a}_{\kappa} + \underbrace{a + a + ... + a}_{\lambda} =$

$= \kappa a + \lambda a, \quad \forall \kappa, \lambda \in \mathbf{Z}, \kappa > 0, \lambda > 0 \ \forall a \in \mathbf{A},$

$\kappa a + \lambda a = (-\kappa)(-a) + \lambda a = \underbrace{(-a) + (-a) + ... + (-a)}_{-\kappa} + \underbrace{a + a + ... + a}_{\lambda} =$

$= (\lambda - (-\kappa))a = (\lambda + \kappa)a, \quad \forall \kappa, \lambda \in \mathbf{Z}, \kappa \leq 0, \lambda > 0, -\kappa < \lambda \ \forall a \in \mathbf{A},$

$\kappa a + \lambda a = (-\kappa)(-a) + \lambda a = \underbrace{(-a) + (-a) + ... + (-a)}_{-\kappa} + \underbrace{a + a + ... + a}_{\lambda} =$

$= (-\lambda + (-\kappa))(-a) = (\lambda + \kappa)a, \quad \forall \kappa, \lambda \in \mathbf{Z}, \kappa \leq 0, \lambda > 0, -\kappa > \lambda \ \forall a \in \mathbf{A},$

Zcela analogicky by se rozepsali případy pro $\kappa > 0, \lambda \leq 0, \kappa > -\lambda$ nebo $\kappa > 0, \lambda \leq 0, \kappa < -\lambda$.

$\kappa a + \lambda a = (-\kappa)(-a) + (-\lambda)(-a) = = ((-\kappa) + (-\lambda))(-a) = (-(\kappa + \lambda))(-a)$

$= (\kappa + \lambda)a, \quad \forall \kappa, \lambda \in \mathbf{Z}, \kappa < 0, \lambda < 0 \ \forall a \in \mathbf{A},$

(3) $\kappa(\lambda a) \;=\; (\underbrace{\lambda a + \lambda a + ... + \lambda a}_{\kappa} \;=$

$$= \underbrace{\overbrace{a + a + ... + a}^{\lambda} + \overbrace{a + a + ... + a}^{\lambda} + ... + \overbrace{a + a + ... + a}^{\lambda}}_{\kappa} =$$

$$= \underbrace{a + a + ... + a}_{\kappa\lambda} = (\kappa\lambda)a, \;\; \forall \kappa, \lambda \in \mathbf{Z}, \kappa > 0, \lambda > 0, \; \forall a \in \mathbf{A},$$

$$\kappa(\lambda a) = 0 = 0 * a = (\kappa\lambda)a, \;\; \kappa = 0, \lambda = 0, \; \forall a \in \mathbf{A},$$

$$(-\kappa)(-\lambda a) = \underbrace{(-\lambda a) + (-\lambda a) + ... + (-\lambda a)}_{-\kappa} =$$

$$= \underbrace{\overbrace{(-a) + (-a) + ... + (-a)}^{\lambda} + ... + \overbrace{(-a) + (-a) + ... + (-a)}^{\lambda}}_{-\kappa} =$$

$$= \lambda(-\kappa)(-a) = (-\lambda\kappa)(-a) = \kappa\lambda a, \;\; \forall \kappa, \lambda \in \mathbf{Z}, \kappa < 0, \lambda > 0, \; \forall a \in \mathbf{A},$$

$$\kappa(\lambda a) = \kappa((-\lambda)(-a)) = (\kappa(-\lambda))(-a) = = (-\kappa\lambda)(-a) = \kappa\lambda a,$$
$$\forall \kappa, \lambda \in \mathbf{Z}, \kappa > 0, \lambda < 0, \; \forall a \in \mathbf{A},$$

$$\kappa(\lambda a) = (-\kappa)(-\lambda a) = (-\kappa)(\lambda(-a)) = = (-\kappa)((-\lambda)(-(-a))) =$$
$$= (-\kappa)((-\lambda)a) = (-\kappa)(-\lambda)a = (\kappa\lambda)a \;\; \forall \kappa, \lambda \in \mathbf{Z}, \kappa < 0, \lambda < 0, \; \forall a \in \mathbf{A},$$

(4) $1a \;=\; a, \;\; \forall a \in \mathbf{A}.$

1.2 Základní vlastnosti modulů

Definice 1.7. podmodul [2]

Nechť $\mathbf{M}$ je $R-$modul a $\mathbf{M}_1$ je podgrupa grupy $\mathbf{M}$. Pokud pro všechny prvky m_1 grupy $\mathbf{M}_1$ a všechny prvky κ okruhu R je součin κm_1 prvkem $\mathbf{M}_1$, pak $\mathbf{M}_1$ je podmodul modulu $\mathbf{M}$. Píšeme $\mathbf{M}_1 \leq \mathbf{M}$.

Definice 1.8. vlastní podmodul, nenulový podmodul [2]

Vlastním podmodulem rozumíme každý podmodul modulu $\mathbf{M}$ různý od modulu $\mathbf{M}$ a od nulového modulu.
Nenulovým podmodulem rozumíme každý podmodul modulu $\mathbf{M}$ různý od nulového modulu.

Věta 1.9. [2] Množina všech podmodulů $\mathbf{D}$ modulu $\mathbf{A}$ je částečně uspořádaná relací inkluze. Pokud $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$ jsou podmoduly modulu $\mathbf{A}$, tak i jejich množinový průnik $D \cap E$ a i jejich součet $D + E$, definovaný jako podmnožina

$$D + E = \{d + e;\ d \in D\ ,\ e \in E\},$$

jsou podmoduly modulu A.

Důkaz: Pro libovolné prvky a, b množiny $D \cap E$ platí, že jsou zároveň prvky množin D a E. Protože D a E jsou podmoduly modulu A, tak platí, že rozdíl $a - b$ leží jak v D, tak i v E. Proto rozdíl $a - b$ musí ležet i v $D \cap E$. Tedy $\mathbf{D} \cap \mathbf{E}$ je podgrupa grupy $\mathbf{A}$.

Pro libovolný prvek a množiny $D \cap E$ platí, že je zároveň prvek množin D a E. Protože D a E jsou podmoduly modulu A, tak platí pro a a pro libovolný prvek κ okruhu R, že násobek κa leží jak v D, tak i v E. Proto κa musí ležet i v $D \cap E$. Tedy $\mathbf{D} \cap \mathbf{E}$ je podmodul modulu $\mathbf{A}$.

Všechny prvky a, b množiny $D + E$ jsou ve tvaru $a = d + e$ a $b = d' + e'$, kde d, d' jsou prvky množiny D a e, e' jsou prvky množiny E. Pak rozdíl prvků a, b je ve tvaru $a - b = (d + e) - (d' + e') = (d - d') + (e - e')$. Protože D a E jsou podmoduly modulu A, tak rozdíl $d - d'$ je prvek modulu D a rozdíl $e - e'$ je prvek modulu E. Proto $a - b = (d - d') + (e - e')$ je prvek $D + E$. Tedy $\mathbf{D+E}$ je podgrupa grupy $\mathbf{A}$.

Každý prvek a množiny $D + E$ je ve tvaru $a = d + e$, kde d je prvek množiny D a e je prvek množiny E. Protože D a E jsou podmoduly modulu A, tak pro a a pro libovolný prvek κ okruhu R je násobek κd prvek modulu D a násobek κe je prvek modulu E. Proto $\kappa a = \kappa(d + e) = \kappa d + \kappa e$ je prvek $D + E$. Tedy $\mathbf{D+E}$ je podmodul modulu $\mathbf{A}$.

Lemma 1.10. Nechť $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ jsou podmoduly modulu $\mathbf{M}$. Pak platí $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \leq \mathbf{M}_1$ a i $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \leq \mathbf{M}_2$.

Dále platí $\mathbf{M}_1 \leq \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ a i $\mathbf{M}_2 \leq \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$. Navíc modul $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ je nejmenší modul obsahující moduly $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$.

Důkaz: Z definice průniku dvou množin víme, že $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$ a z věty 1.9 víme, že $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \leq \mathbf{M}$, tím je také $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \leq \mathbf{M}_1$.

Zcela obdobně lze ukázat, že $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ je podmodul modulu $\mathbf{M}_2$.
Zřejmě $M_1 \subseteq M_1 + M_2$, neboť pro každý prvek $m_1 \in M_1$ platí, že $m_1 = m_1 + 0 \in M_1 + M_2$, kde $0 \in M_2$. Z věty 1.9 víme, že $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ je podmodul modulu $\mathbf{M}$, tím $\mathbf{M}_1 \leq \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$.

Zcela obdobně lze ukázat, že $\mathbf{M}_2$ je podmodul modulu $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$.

Nyní sporem ukážeme, že $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ je nejmenší modul obsahující moduly $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$. Nechť existuje menší modul $\mathbf{M}_3$ obsahující moduly $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$. Pak existuje prvek $m_1 + m_2 \in \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ takový, že $m_1 + m_2 \notin \mathbf{M}_3$, kde $m_1 \in \mathbf{M}_1, m_2 \in \mathbf{M}_2$. Protože modul $\mathbf{M}_3$ obsahuje moduly $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ tak musí obsahovat i prvky m_1, m_2

a protože je to modul, tak musí obsahovat i jejich součet $m_1 + m_2$, což je spor s předpokladem $m_1 + m_2 \notin \mathbf{M}_3$. Tedy modul $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ je nejmenší modul obsahující moduly $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$.

Důsledek 1.11. Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou podmoduly modulu $\mathbf{M}$. Pak $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, právě tehdy když $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A}$ a to je právě tehdy, když $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B}$.

Důkaz: Z věty věty 1.9 víme, že $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ je modul. Protože $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, tak $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Pokud $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A}$, tak i $A \subseteq B$. Protože $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou podmoduly modulu $\mathbf{M}$, je $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$.

Nechť $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Opět z věty 1.9 víme, že $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je modul, jehož prvky jsou ve tvaru $a + b$, kde $a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}$. Platí, že $a \in \mathbf{B}$, neboť $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Proto je $a + b \in \mathbf{B}$, tedy $A + B \subseteq B$ a tedy $\mathbf{A+B} \leq \mathbf{B}$. Pro každý prvek b modulu $\mathbf{B}$ platí $b = b + 0$, kde $0 \in \mathbf{A}$, tedy $B \subseteq A + B$ a tedy $\mathbf{B} \leq \mathbf{A+B}$. Tím $\mathbf{A+B} = \mathbf{B}$.

Pokud modul $\mathbf{A+B} = \mathbf{B}$, tak prvky jsou ve tvaru $a + b_1 = b_2$, kde $a \in \mathbf{A}, b_1, b_2 \in \mathbf{B}$. Protože $\mathbf{A+B}$ je modul, tak $a = b_2 - b_1$, tím $a \in \mathbf{B}$ pro všechna $a \in \mathbf{A}$. Tedy $A \subseteq B$ a protože $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou moduly, tak $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$.

Věta 1.12. [2] Nechť m je prvek modulu $\mathbf{M}$. Pak množina $Rm = \{\kappa m : \kappa \in R\}$ je podmodul modulu $\mathbf{M}$.

Důkaz: Pro libovolné prvky κm, λm množiny Rm jsou κ, λ prvky okruhu $\mathbf{R}$, pak $\kappa m - \lambda m = (\kappa - \lambda)m$, tedy $\kappa m - \lambda m$ je prvek Rm, neboť $\kappa - \lambda$ je prvek okruhu $\mathbf{R}$. Tedy $\mathbf{Rm}$ je podgrupa grupy $\mathbf{M}$.

Pro libovolný prvek κm množiny Rm je κ prvek okruhu R a pro libovolný prvek λ okruhu $\mathbf{R}$ je $\lambda(\kappa m) = (\lambda\kappa)m$, tedy $\lambda(\kappa m)$ je prvek Rm, neboť $\lambda\kappa$ je prvek okruhu $\mathbf{R}$. Tedy $\mathbf{Rm}$ je podmodul modulu $\mathbf{M}$.

Definice 1.13. cyklický modul [2]

Pokud m je prvek modulu $\mathbf{M}$ nad okruhem $\mathbf{R}$, pak modul $\mathbf{Rm}$ popsaný ve větě 1.12 se nazývá cyklický modul generovaný prvkem m.

Věta 1.14. [2] Nechť $\mathbf{M}_1$ je podmodul modulu $\mathbf{M}$. Pak množinu rozkladových tříd modulu $\mathbf{M}$ podle modulu $\mathbf{M}_1$, jejíž prvky jsou $m + M_1 = \{m + m_1; m_1 \in \mathbf{M}_1\}$, označujeme M/M_1. Na této množině můžeme zavést operaci sčítání rozkladových tříd a násobení prvkem z okruhu $\mathbf{R}$.

Pro libovolné prvky $m_{11} + M_1$ a $m_{12} + M_1$ množiny M/M_1, je

$$(m_{11} + M_1) + (m_{12} + M_1) = (m_{11} + m_{12}) + M_1.$$

Pro libovolný prvek $m + M_1$ množiny M/M_1 a libovolný prvek κ okruhu $\mathbf{R}$ je

$$\kappa(m + M_1) = \kappa m + M_1.$$

Množina M/M_1 s takto definovanými operacemi tvoří modul.

Důkaz: Pro libovolné prvky m_1+M_1 a m_2+M_1 množiny M/M_1 je m_1+m_2 prvek modulu M, tedy $(m_1 + m_2) + M_1$ je prvek množiny M/M_1.

Pro libovolné prvky $m_1 + M_1, m_2 + M_1, m_3 + M_1$ množiny M/M_1 je

$$[(m_1 + M_1) + (m_2 + M_1)] + (m_3 + M_1) = [(m_1 + m_2) + M_1] + (m_3 + M_1) =$$

$$((m_1+m_2)+m_3)+M_1 = (m_1+(m_2+m_3))+M_1 = (m_1+M_1)+[(m_2+m_3)+M_1] =$$
$$(m_1 + M_1) + [(m_2 + M_1) + (m_3 + M_1)].$$

Pro libovolné prvky $m_1 + M_1$ a $m_2 + M_1$ množiny M/M_1 je

$$(m_1+M_1)+(m_2+M_1) = (m_1+m_2)+M_1 = (m_2+m_1)+M_1 = (m_2+M_1)+(m_1+M_1).$$

V množině M/M_1 existuje nulový prvek $0+M_1$, kde 0 je nulový prvek v $\mathbf{M}$. Pak pro libovolný prvek $m_1 + M_1$ množiny M/M_1 je

$$(m_1 + M_1) + (0 + M_1) = (0 + M_1) + (m_1 + M_1) = (0 + m_1) + M_1 = m_1 + M_1.$$

Pro libovolný prvek $m_1 + M_1$ množiny M/M_1 je m_1 prvek modulu $\mathbf{M}$, proto existuje prvek opačný $-m_1$ modulu $\mathbf{M}$ takový, že

$$m_1 + (-m_1) = (-m_1) + m_1 = 0,$$

pak

$$(m_1+M_1)+(-m_1+M_1) = (-m_1+M_1)+(m_1+M_1) = (-m_1+m_1)+M_1 = 0+M_1.$$

Tím $-m_1 + M_1 = -(m_1 + M_1)$.

Pro libovolný prvek κ okruhu $\mathbf{R}$ a libovolný prvek $m_1 + M_1$ grupy M/M_1 je m_1 prvek modulu $\mathbf{M}$, proto κm_1 je prvek modulu $\mathbf{M}$ a tedy $\kappa(m_1+M_1) = \kappa m_1+M_1$ je prvek množiny M/M_1.

Pro libovolný prvek κ okruhu $\mathbf{R}$ a libovolné prvky m_1+M_1, m_2+M_1 grupy $\mathbf{M}/\mathbf{M}_1$ je

$$\kappa((m_1 + M_1) + (m_2 + M_1)) = \kappa((m_1 + m_2) + M_1) = \kappa(m_1 + m_2) + M_1 =$$

$$= \kappa m_1 + \kappa m_2 + M_1 = (\kappa m_1 + M_1) + (\kappa m_2 + M_1) = \kappa(m_1 + M_1) + \kappa(m_2 + M_1).$$

Pro libovolné prvky κ, λ okruhu $\mathbf{R}$ a libovolný prvek $m_1 + M_1$ grupy $\mathbf{M}/\mathbf{M}_1$ je

$$(\kappa + \lambda)(m_1 + M_1) = (\kappa + \lambda)m_1 + M_1 = \kappa m_1 + \lambda m_1 + M_1 =$$

$$(\kappa m_1 + M_1) + (\lambda m_1 + M_1) = \kappa(m_1 + M_1) + \lambda(m_1 + M_1).$$

Pro libovolné prvky κ, λ okruhu $\mathbf{R}$ a libovolný prvek $m_1 + M_1$ grupy $\mathbf{M}/\mathbf{M}_1$ je

$$(\kappa\lambda)(m_1 + M_1) = (\kappa\lambda)m_1 + M_1 = \kappa(\lambda m_1) + M_1 =$$

$$\kappa(\lambda m_1 + M_1) = \kappa(\lambda(m_1 + M_1)).$$

Pro jednotkový prvek 1 okruhu $\mathbf{R}$ a libovolný prvek $m_1 + M_1$ grupy $\mathbf{M}/\mathbf{M}_1$ je

$$1(m_1 + M_1) = 1m_1 + M_1 = m_1 + M_1.$$

Definice 1.15. faktorový modul [2]

Nechť $\mathbf{M}_1$ je podmodul modulu $\mathbf{M}$. Pak modul $\mathbf{M}/\mathbf{M}_1$ popsaný ve větě 1.15 se nazývá faktorový modul $\mathbf{M}$ podle podmodulu $\mathbf{M}_1$.

1.3 Morfismy modulu

Definice 1.16. morfismus modulů [2]

Nechť $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ jsou moduly. Funkci $t : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ nazveme homomorfismem modulů, pokud pro libovolné prvky m_1, m_2 modulu $\mathbf{M}_1$ a libovolný prvek κ okruhu $\mathbf{R}$ je

(1) $t(m_1 + m_2) = t(m_1) + t(m_2)$,

(2) $t(\kappa m_1) = \kappa t(m_1)$.

Poznámka: Obecně pokud z daných prvků κ_i okruhu $\mathbf{R}$ a prvků m_i modulu $\mathbf{M}_1$ vytvoříme jejich lineární kombinaci, pak pro homomorfismus t platí

$$t(\kappa_1 m_1 + ... + \kappa_n m_n) = \kappa_1(t(m_1)) + ... + \kappa_n(t(m_n)).$$

Z tohoto důvodu se homomorfismy modulů nazývají lineární transformace.

Příklad 1.17. [2] V modulu $\mathbf{R}^n$ všech n-tic definujme lineárních transformaci $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ předpisem

$$t_1 : (\xi_1, ..., \xi_n) \mapsto \xi_1, \ \forall(\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Jelikož chceme ukázat, že se jedná o homomorfismus musíme ukázat splnění podmínek (1) a (2): $\forall(\xi_1,...,\xi_n),(\theta_1,...,\theta_n) \in \mathbf{R}^n, \kappa \in \mathbf{R}$

$$t_1((\xi_1,...,\xi_n)+(\theta_1,...,\theta_n)) = t_1(\xi_1+\theta_1,...,\xi_n+\theta_n) = \xi_1+\theta_1 = t_1(\xi_1,...,\xi_n)+t_1(\theta_1,...,\theta_n)$$

$$t_1(\kappa(\xi_1,...,\xi_n)) = t_1(\kappa\xi_1,...,\kappa\xi_n) = \kappa\xi_1 = \kappa t_1(\xi_1,...,\xi_n).$$

Jako další příklad uvažujme transformaci $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ předpisem

$$t_2 : (\xi_1,...,\xi_n) \mapsto (\xi_2,\xi_3,...,\xi_n,\xi_1),\ \forall(\xi_1,...,\xi_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Jelikož chceme ukázat, že se jedná o homomorfismus musíme ukázat splnění podmínek (1) a (2): $\forall(\xi_1,...,\xi_n),(\theta_1,...,\theta_n) \in \mathbf{R}^n, \kappa \in \mathbf{R}$

$$t_2((\xi_1,...,\xi_n) + (\theta_1,...,\theta_n)) = t_2(\xi_1 + \theta_1,...,\xi_n + \theta_n) =$$

$$= ((\xi_2 + \theta_2),(\xi_3 + \theta_3),...,(\xi_n + \theta_n),(\xi_1 + \theta_1)) =$$

$$= (\xi_2,\xi_3,...,\xi_n,\xi_1) + (\theta_2,\theta_3...,\theta_n,\theta_1) = t_2(\xi_1,...,\xi_n) + t_2(\theta_1,...,\theta_n)$$

$$t_2(\kappa(\xi_1,...,\xi_n)) = t_2(\kappa\xi_1,...,\kappa\xi_n) = (\kappa\xi_2,\kappa\xi_3,...,\kappa\xi_n,\kappa\xi_1) =$$

$$= \kappa(\xi_2,\xi_3...,\xi_n,\xi_1) = \kappa t_2(\xi_1,...,\xi_n).$$

Poznámka 1.18. [2]

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ jsou Abelovy grupy, pak každý homomorfismus $t : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ komutativních grup je morfismem $\mathbb{Z}-$modulů. Z příkladu 1.5 víme, že komutativní grupa je $\mathbb{Z}-$modul. Potom pro všechny prvky a, b grupy $\mathbf{A}$ je zobrazení součtu těchto prvků roven součtu zobrazení těchto prvků. Pro všechny prvky a grupy $\mathbf{A}$ a všechny prvky n okruhu $\mathbb{Z}$ je zobrazení násobku na rovno násobku zobrazení a.

Definice 1.19. jádro homomorfismu [2]

Nechť $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ jsou moduly, pak jádrem homomorfismu $t : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ je množina

$$Ker(t) = \{m_1 \in \mathbf{M}_1 : t(m_1) = 0\}.$$

Definice 1.20. obraz homomorfismu [2]

Nechť $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ jsou moduly, pak obraz homomorfismu $t : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ je množina

$$Im(t) = \{m_2 \in \mathbf{M}_2 : \exists m_1 \in M_1, t(m_1) = m_2\}.$$

Věta 1.21. [2] Nechť $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ jsou moduly. Je-li $t : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ homomorfismus, pak $\mathbf{Ker(t)}$ je podmodul modulu $\mathbf{M}_1$.

Důkaz: Než začneme s vlastním důkazem, tak dokážeme pomocné tvrzení, které využijeme dále. Pokud prvek m_1 modulu $\mathbf{M}_1$ je prvek jádra $\mathbf{Ker(t)}$, tedy $t(m_1) = 0$, pak prvek opačný $-m_1$ je také prvek jádra $\mathbf{Ker(t)}$, neboť platí

$$0 = t(0) = t(m_1 - m_1) = t(m_1) + t(-m_1) = 0 + t(-m_1) = t(-m_1).$$

Nyní k vlastnímu důkazu. Pro libovolné prvky k_1, k_2 jádra $\mathbf{Ker(t)}$, chceme ukázat, že prvek $k_1 - k_2$ také náleží do jádra $\mathbf{Ker(t)}$. Protože k_2 je prvkem $\mathbf{Ker(t)}$, je také $-k_2$ prvkem $\mathbf{Ker(t)}$, tedy $t(-k_2) = 0$. Platí

$$t(k_1 - k_2) = t(k_1) + t(-k_2) = 0 + 0 = 0,$$

proto jádro $\mathbf{Ker(t)}$ je podgrupa grupy $\mathbf{M}_1$.
Pro libovolný prvek k_1 jádra $\mathbf{Ker(t)}$ a libovolný prvek κ okruhu $\mathbf{R}$, chceme ukázat, že prvek κk_1 také náleží do jádra $\mathbf{Ker(t)}$. Platí

$$t(\kappa k_1) = \kappa t(k_1) = \kappa 0 = 0,$$

proto jádro $\mathbf{Ker(t)}$ je podmodul modulu $\mathbf{M}_1$.

Věta 1.22. [2] Nechť $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ jsou moduly. Je-li $t : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ homomorfismus, pak $\mathbf{Im(t)}$ je podmodul modulu $\mathbf{M}_2$.

Důkaz: Nechť m_{21}, m_{22} jsou libovolné prvky obrazu $\mathbf{Im(t)}$, pak existují jejich vzory $m_{11}, m_{12} \in \mathbf{M}_1$, tedy $t(m_{11}) = m_{21}$, $t(m_{12}) = m_{22}$, pak $t(-m_{12}) = -m_{22}$, protože $0 = t(0) = t(m_{12} + (-m_{12})) = t(m_{12}) + t(-m_{12})$ z čehož vyplývá, že $t(-m_{12}) = -t(m_{12})$. Chceme ukázat, že prvek $m_{21} - m_{22}$ také náleží do obrazu $\mathbf{Im(t)}$. Platí

$$t(m_{11} - m_{12}) = t(m_{11} + (-m_{12})) = t(m_{11}) + t(-m_{12}) = m_{21} - m_{22},$$

proto obraz $\mathbf{Im(t)}$ je podgrupa grupy $\mathbf{M}_2$.

Pro libovolný prvek m_2 obrazu $\mathbf{Im(t)}$ existuje jeho vzor m_1, tedy je $t(m_1) = m_2$. Pro libovolný prvek κ okruhu $\mathbf{R}$, je násobek κm_2 také prvek obrazu $\mathbf{Im(t)}$. Protože

$$t(\kappa m_1) = \kappa t(m_1) = \kappa m_2,$$

tak obraz $\mathbf{Im(t)}$ je podmodul modulu $\mathbf{M}_2$.

Věta 1.23. [5] Nechť $\mathbf{B}$ je podmodul modulu $\mathbf{A}$. Definujme zobrazení $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathbf{B}$ předpisem

$$\pi(a) = a + B, \quad \forall a \in \mathbf{A}.$$

Toto zobrazení je epimorfismus, tj. homomorfismus na $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ a $\mathbf{Ker}(\pi) = \mathbf{B}$. Zobrazení π se nazývá přirozená projekce.

Důkaz: Pro libovolné prvky a_1, a_2 modulu $\mathbf{A}$ je

$$\pi(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2) + B = (a_1 + B) + (a_2 + B) = \pi(a_1) + \pi(a_2).$$

Pro libovolný prvek a_1 modulu $\mathbf{A}$ a pro libovolný prvek κ okruhu $\mathbf{R}$ je

$$\pi(\kappa a_1) = (\kappa a_1) + B = \kappa(a_1 + B) = \kappa\pi(a_1).$$

Tedy π je homomorfismus. Dále snadno ukážeme, že tento homomorfismus je na $\mathbf{A}/\mathbf{B}$. Pokud $a+B$ je libovolný prvek $\mathbf{A}/\mathbf{B}$, tak a je prvek $\mathbf{A}$ a tedy $a+B = \pi(a)$. Tedy zobrazení π je epimorfismus.

Zbývá ukázat, že $\mathbf{Ker}(\pi) = \mathbf{B}$. Pro všechny prvky k jádra zobrazení π platí $\pi(k) = 0 + B$, proto $k + B = 0 + B = B$, tím $k \in \mathbf{B}$. Z tohoto vyplývá, že $\mathbf{Ker}(\pi) \leq \mathbf{B}$.

Nyní naopak pro všechny prvky b modulu $\mathbf{B}$ platí $\pi(b) = b + B = B$. Z toho vyplývá, že $\mathbf{B} \leq \mathbf{Ker}(\pi)$. Čímž jsme ukázali, že $\mathbf{Ker}(\pi) = \mathbf{B}$.

Věta 1.24. [5] Nechť $\mathbf{B}$ je podmodul modulu $\mathbf{A}$, $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathbf{B}$ je přirozená projekce a $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ homomorfismus modulu $\mathbf{A}$ do modulu $\mathbf{A}'$ takový, že $\mathbf{B} \leq \mathbf{Ker}(\phi)$. Potom existuje právě jeden homomorfismus $\psi : \mathbf{A}/\mathbf{B} \to \mathbf{A}'$ takový, že platí $\psi\pi = \phi$.

Důkaz: Pro libovolné prvky $a + B$ modulu $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ definujeme $\psi(a + B) = \phi(a)$.

Potřebujeme ukázat, že zobrazení je dobře definováno. Předpokládejme, že $a + B = a' + B$. Pak $a = a + 0 \in a + B = a' + B$, tedy existuje $b \in \mathbf{B}$ takové, že $a = a' + b$. Potom

$$\psi(a + B) = \phi(a) = \phi(a' + b) = \phi(a') + \phi(b) = \phi(a') + 0 = \psi(a' + B),$$

$\phi(b) = 0$, protože $\mathbf{B} \leq \mathbf{Ker}(\phi)$.

Pro zobrazení $\psi : \mathbf{A}/\mathbf{B} \to \mathbf{A}'$ je $\psi(\pi(a)) = \psi(a + B) = \phi(a)$, $\forall a \in \mathbf{A}$ tedy $\psi\pi = \phi$.

Dále zbývá ukázat, že toto zobrazení ψ je homomorfismus. Pro libovolné prvky $a_1 + B, a_2 + B \in \mathbf{A}/\mathbf{B}$ a pro libovolný prvek $\kappa \in \mathbf{R}$ je

$$\phi(a_1 + a_2) = \phi(a_1) + \phi(a_2) = \psi(a_1 + B) + \psi(a_2 + B)$$

$$\phi(a_1 + a_2) = \psi((a_1 + a_2) + B) = \psi((a_1 + B) + (a_2 + B))$$

a zároveň

$$\psi(\kappa(a_1 + B)) = \psi(\kappa a_1 + B) = \phi(\kappa a_1) = \kappa\phi(a_1) = \kappa\psi(a_1 + B).$$

Tedy ψ je homomorfismus.

Nyní ukážeme, že toto zobrazení je jediné s touto vlastností. Předpokládejme další zobrazení s touto vlastností. Označme si toto zobrazení ψ'. Tedy $\psi' : \mathbf{A}/\mathbf{B} \to \mathbf{A}'$ takové, že $\psi'\pi = \phi$. Pro všechny prvky $a + B$ modulu $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ je

$$\psi(a + B) = \phi(a) = (\psi'\pi)(a) = \psi'(a + B) \Rightarrow \psi = \psi'.$$

Věta 1.25. první věta o izomorfismu [5]

Nechť $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ je homomorfismus modulu $\mathbf{A}$ do modulu $\mathbf{A}'$. Potom moduly $\mathbf{A}/\mathbf{Ker}(\phi)$ a $\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{Im}(\phi)$ jsou izomorfní, což se zapisuje symbolicky $\mathbf{A}/\mathbf{Ker}(\phi) \simeq \mathbf{Im}(\phi)$.

Důkaz: K důkazu využijeme větu 1.24 Položíme $\mathbf{B} = \mathbf{Ker}(\phi)$. Stačí nám ukázat, že homomorfismus ψ je bijektivní zobrazení z $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ na $\mathbf{Im}(\phi)$.

Nejprve ukážeme, že homomorfismus ψ je injektivní. Pro libovolné prvky $a_1 + Ker(\phi), a_2 + Ker(\phi)$ modulu $\mathbf{A}/\mathbf{Ker}(\phi)$ takové, že

$$\psi(a_1 + Ker(\phi)) = \psi(a_2 + Ker(\phi)) \Rightarrow \phi(a_1) = \phi(a_2) \Rightarrow \phi(a_1 - a_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 - a_2 \in Ker(\phi) \Rightarrow a_1 + Ker(\phi) = a_2 + Ker(\phi).$$

Dále potřebujeme ukázat, že homomorfismus ψ je na $\mathbf{Im}(\phi)$. Pro libovolný prvek $a + Ker(\phi)$ modulu $\mathbf{A}/\mathbf{Ker}(\phi)$ je $\psi(a + Ker(\phi)) = \phi(a) \in \mathbf{Im}(\phi)$. Z toho plyne $\mathbf{Im}(\psi) \leq \mathbf{Im}(\phi)$.

Pro libovolný prvek y obrazu $\mathbf{Im}(\phi)$ existuje prvek a modulu $\mathbf{A}$ takový, že $\phi(a) = y$. Pak $a + Ker(\phi) \in \mathbf{A}/\mathbf{Ker}(\phi)$, $\psi(a + Ker(\phi)) = \phi(a) = y$.
Tím je $y \in \mathbf{Im}(\psi)$, tedy $\mathbf{Im}(\phi) \leq \mathbf{Im}(\psi)$. Proto ψ je izomorfismus $\mathbf{A}/\mathbf{Ker}(\phi)$ na $\mathbf{Im}(\phi)$.

Věta 1.26. druhá věta o izomorfismu [5]

Nechť $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ jsou podmoduly modulu $\mathbf{A}$.
Potom moduly $(\mathbf{V} + \mathbf{U})/\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}/(\mathbf{U} \cap \mathbf{V})$ jsou izomorfní.

Důkaz: $\mathbf{V} + \mathbf{U}$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ jsou podmoduly modulu $\mathbf{A}$ podle věty 1.9.

Definujme zobrazení $\phi : \mathbf{U} \to (\mathbf{V} + \mathbf{U})/\mathbf{V}$ předpisem

$$\phi(u) = u + V.$$

Pro libovolné prvky u_1, u_2 modulu $\mathbf{U}$ je

$$\phi(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2) + V = (u_1 + V) + (u_2 + V) =$$
$$= \phi(u_1) + \phi(u_2).$$

Pro libovolný prvek u_1 modulu $\mathbf{U}$ a libovolný prvek κ okruhu $\mathbf{R}$ je

$$\phi(\kappa u_1) = \kappa u_1 + V = \kappa(u_1 + V) = \kappa\phi(u_1).$$

Tedy zobrazení ϕ je homomorfismus.

Pro libovolný prvek $y + V \in \mathbf{V} + \mathbf{U}/\mathbf{V}$ je y prvek modulu $\mathbf{V} + \mathbf{U}$, proto existuje prvek u modulu $\mathbf{U}$ a prvek v modulu $\mathbf{V}$ takový, že $y = v + u = u + v$, pak prvek $y + V = u + v + V = u + V$. Proto $\phi(u) = u + V = y + V$, tedy zobrazení je epimorfismus.

Nechť $\mathbf{K} = \mathbf{Ker}(\phi)$. Podle věty 1.25 víme, že
$\mathbf{U}/\mathbf{K} \simeq (\mathbf{U} + \mathbf{V})/\mathbf{V}$. Aby důkaz byl kompletní je třeba ukázat, že
$\mathbf{K} = (\mathbf{U} \cap \mathbf{V})$.

Nechť u je prvek modulu $(\mathbf{U} \cap \mathbf{V})$. Pak u je prvkem $\mathbf{V}$ a proto $u + V = V$, proto $\phi(u) = u + V = V = 0 + V$, tedy $u \in \mathbf{Ker}(\phi) = \mathbf{K}$ z toho vyplývá, že $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} \leq \mathbf{K}$.

Nechť k je prvek modulu $\mathbf{K}$. Protože $\mathbf{K} = \mathbf{Ker}(\phi) \leq \mathbf{U}$ je k prvek modulu $\mathbf{U}$. Prvek k je prvkem jádra $\mathbf{Ker}(\phi)$ z toho vyplývá, že $\phi(k) = 0$, proto $k + V = V$ tedy k je prvek modulu $\mathbf{V}$. Tudíž k je prvek modulu $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$, tím $\mathbf{K} \leq \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Proto $\mathbf{K} = \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

Věta 1.27. třetí věta o izomorfismu [5]

Nechť $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ jsou podmoduly modulu $\mathbf{A}$ takové, že $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$. Potom moduly $\mathbf{A}/\mathbf{V}$ a $(\mathbf{A}/\mathbf{U})/(\mathbf{V}/\mathbf{U})$ jsou izomorfní.

Důkaz: Definujeme zobrazení $\phi : \mathbf{A}/\mathbf{U} \to \mathbf{A}/\mathbf{V}$ pro libovolný prvek $a+U$ modulu $\mathbf{A}/\mathbf{U}$ předpisem $\phi(a + U) = a + V$.

Pokud $a_1 + U = a_2 + U$, pak $a_1 - a_2$ je prvek modulu $\mathbf{U}$, který je podmodulem modulu $\mathbf{V}$, tedy $a_1 - a_2$ je prvek modulu $\mathbf{V}$, proto $a_1 + V = a_2 + V$. ϕ je opravdu zobrazení.

Pro libovolné prvky $a_1 + U, a_2 + U$ modulu $\mathbf{A}/\mathbf{U}$ je

$$\phi((a_1 + U) + (a_2 + U)) = \phi((a_1 + a_2) + U) = (a_1 + a_2) + V =$$
$$= (a_1 + V) + (a_2 + V) = \phi(a_1 + U) + \phi(a_2 + U).$$

Pro libovolný prvek $a + U$ modulu $\mathbf{A}/\mathbf{U}$ a libovolný prvek κ okruhu $\mathbf{R}$ je

$$\phi(\kappa(a + U)) = \phi(\kappa a + U) = \kappa a + V = \kappa(a + V) = \kappa\phi(a + U).$$

Z toho vyplývá, že ϕ je homomorfismus.

Pro libovolný prvek $a + V$ modulu $\mathbf{A}/\mathbf{V}$ je a prvek modulu $\mathbf{A}$, proto $a + U$ je prvek modulu $\mathbf{A}/\mathbf{U}$, tedy $\phi(a+U) = a+V$ z čehož vyplývá, že ϕ je epimorfismus.

Podle věty 1.25 je $(\mathbf{A}/\mathbf{U})/\mathbf{Ker}(\phi) \simeq \mathbf{A}/\mathbf{V}$. Aby byl důkaz kompletní je třeba ukázat, že $\mathbf{Ker}(\phi) = \mathbf{V}/\mathbf{U}$.
Pokud $v + U$ je prvek modulu $\mathbf{V}/\mathbf{U}$, pak $\phi(v + U) = v + V = \mathbf{V}$. Proto $v + U$ náleží do $\mathbf{Ker}(\phi)$. Tedy $\mathbf{V}/\mathbf{U} \leq \mathbf{Ker}(\phi)$.

Pokud $a + U$ je prvek $\mathbf{Ker}(\phi)$, tak platí $\phi(a + U) = \mathbf{V}$, neboli $a + V = V$. Z poslední rovnosti vyplývá, že a je prvkem $\mathbf{V}$, proto $a + U$ je prvek $\mathbf{V}/\mathbf{U}$. Tedy $\mathbf{Ker}(\phi) \leq \mathbf{V}/\mathbf{U}$. Proto $\mathbf{Ker}(\phi) = \mathbf{V}/\mathbf{U}$.

Kapitola 2

Speciální pojmy

V této kapitole definujeme speciální podmoduly a moduly. Ukážeme jejich vlastnosti a v následující kapitole je budeme modelovat na konkrétních příkladech. Hlavními zdroji pro tuto kapitolu jsou [1], [3], [4], [5].

2.1 Velké moduly

Definice 2.1. [1] Podmodul $\mathbf{M}_1$ modulu $\mathbf{M}$ je velký, pokud

$$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{N} \neq \mathbf{0}$$

pro každý nenulový podmodul $\mathbf{N}$ modulu $\mathbf{M}$.
Tento vztah zapíšeme jako $\mathbf{M_1} \trianglelefteq \mathbf{M}$.

Věta 2.2. [1] Každý modul $\mathbf{M}$ je velký sám v sobě.

Důkaz: Pro každý nenulový podmodul $\mathbf{N}$ modulu $\mathbf{M}$ je průnik $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \mathbf{N}$, tedy není nulový. Z toho vyplývá, že $\mathbf{M}$ je velký v $\mathbf{M}$.

Věta 2.3. [1] Jsou-li moduly $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ takové, že $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}_2 \subseteq \mathbf{M}_3$. Pak modul $\mathbf{M}_1$ je velký v modulu $\mathbf{M}_3$, právě když modul $\mathbf{M}_2$ je velký v modulu $\mathbf{M}_3$ a modul $\mathbf{M}_1$ je velký v modulu $\mathbf{M}_2$.

Důkaz: Nechť modul $\mathbf{M}_1$ je velký v modulu $\mathbf{M}_3$, proto pro každý nenulový podmodul $\mathbf{M}'_3$ modulu $\mathbf{M}_3$ je $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}'_3 \neq \mathbf{0}$.

Každý nenulový podmodul $\mathbf{M}'_2$ modulu $\mathbf{M}_2$ je zároveň nenulový podmodul modulu $\mathbf{M}_3$, proto $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}'_2 \neq \mathbf{0}$, tím $\mathbf{M}_1$ je velký v $\mathbf{M}_2$.

Pro každý nenulový podmodul $\mathbf{M}'_3$ modulu $\mathbf{M}_3$ je $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}'_3 \neq \mathbf{0}$. Protože $\mathbf{M}_1 \leq \mathbf{M}_2$ je $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}'_3 \leq \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}'_3$, $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}'_3 \neq 0$. Z toho plyne, že $\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}'_3 = 0$. Tedy $\mathbf{M}_2$ je velký v $\mathbf{M}_3$.

Nyní uvažujme případ, kdy modul $\mathbf{M}_1$ je velký v modulu $\mathbf{M}_2$ a modul $\mathbf{M}_2$ je velký v modulu $\mathbf{M}_3$. Jelikož $\mathbf{M}_2$ je velký v $\mathbf{M}_3$, tak pro každý nenulový podmodul $\mathbf{M}'_3$ modulu $\mathbf{M}_3$ je $\mathbf{M}'_3 \cap \mathbf{M}_2 \neq \mathbf{0}$ a zároveň $\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}'_3$ je nenulový podmodul modulu $\mathbf{M}_2$.

Dále modul $\mathbf{M}_1$ je velký v modulu $\mathbf{M}_2$, tedy $\mathbf{M}_1 \cap (\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}'_3) \neq \mathbf{0}$. Tím $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}'_3 = (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2) \cap \mathbf{M}'_3 = \mathbf{M}_1 \cap (\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}'_3) \neq \mathbf{0}$, proto modul $\mathbf{M}_1$ je velký v modulu $\mathbf{M}_3$.

Věta 2.4. [1] Jsou-li moduly $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ takové, že $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}_2 \subseteq \mathbf{M}_3$. Pak modul $\mathbf{M}_2$ je velký v modulu $\mathbf{M}_3$, pokud modul $\mathbf{M}_2/\mathbf{M}_1$ je velký v $\mathbf{M}_3/\mathbf{M}_1$.

Důkaz: Pro každý nenulový podmodul $\mathbf{M}'_3$ modulu $\mathbf{M}_3$ platí, že $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}'_3$ je nenulový podmodul modulu $\mathbf{M}_3$. Tedy $(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}'_3)/\mathbf{M}_1$ je podmodul modulu $\mathbf{M}_3/\mathbf{M}_1$.

Pokud $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}'_3/\mathbf{M}_1 \neq 0$, pak protože modul $\mathbf{M}_2/\mathbf{M}_1$ je velký v modulu $\mathbf{M}_3/\mathbf{M}_1$, tak $(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}'_3)/\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2/\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{0}$. Z toho vyplývá existence prvku $m_2 + \mathbf{M}_1 \neq 0 + \mathbf{M}_1$ z modulu $(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}'_3)/\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2/\mathbf{M}_1$. Kde $m_2 = m_1 + m'_3$, $m_2 \in \mathbf{M}_2$, $m_1 \in \mathbf{M}_1$, $m'_3 \in \mathbf{M}'_3$, tedy $0 \neq m_2 + \mathbf{M}_1 = m_1 + m'_3 + \mathbf{M}_1 = m'_3 + \mathbf{M}_1$, proto $m'_3 + \mathbf{M}_1$ je prvkem modulu $(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}'_3)/\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2/\mathbf{M}_1$. Prvek m'_3 nemůže být z modulu $\mathbf{M}_1$ a je nenulový, protože $m'_3 + \mathbf{M}_1 \neq 0 + \mathbf{M}_1$. Z toho vyplývá, že $\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}'_3 \neq \mathbf{0}$, protože prvek $m_2 - m_1 = m'_3$ leží v obou modulech. Tedy modul $\mathbf{M}_2$ je velký v modulu $\mathbf{M}_3$.

Pokud $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}'_3/\mathbf{M}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}'_3 = \mathbf{M}_1$, proto $\mathbf{M}'_3 \leq \mathbf{M}_1 \leq \mathbf{M}_2 \Rightarrow \mathbf{M}'_3 \cap \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}'_3 \neq 0$.

Lemma 2.5. [1] Jestliže moduly $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ jsou velké v $\mathbf{M}$, pak i průnik $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ je velký v $\mathbf{M}$.

Důkaz: Nechť moduly $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ jsou velké v modulu $\mathbf{M}$. Tedy pro každý nenulový podmodul $\mathbf{M}'$ modulu $\mathbf{M}$ je průnik $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}'$ nenulový a zároveň platí, že

$$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}' \leq \mathbf{M}.$$

Modul $\mathbf{M}_2$ je velký v modulu $\mathbf{M}$, proto průnik

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{M}_2 \cap (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}') = (\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_1) \cap \mathbf{M}',$$

tedy modul $(\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2)$ je velký v modulu $\mathbf{M}$.

Věta 2.6. [1] Jestliže konečně mnoho podmodulů $\mathbf{M}_1, ..., \mathbf{M}_n, n \in \mathbf{N}$ je velkých v modulu $\mathbf{M}$, pak i průnik $\mathbf{M}_1 \cap ... \cap \mathbf{M}_n$ je velký v modulu $\mathbf{M}$.

Důkaz: Pro $n = 2$ tvrzení platí viz lemma 2.5.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $k = n-1$ a ukážeme platnost tvrzení pro $k = n$. Z platnosti pro $k = n-1$ vyplývá, že modul $\mathbf{M}_1 \cap ... \cap \mathbf{M}_{n-1}$ je velký v modulu $\mathbf{M}$. Tedy pro každý nenulový podmodul $\mathbf{M}'$ modulu $\mathbf{M}$ je $(\mathbf{M}_1 \cap ... \cap \mathbf{M}_{n-1}) \cap \mathbf{M}' \neq \mathbf{0}$ a zároveň je $(\mathbf{M}_1 \cap ... \cap \mathbf{M}_{n-1}) \cap \mathbf{M}' \leq \mathbf{M}$ nenulový v $\mathbf{M}$.

Modul $\mathbf{M}_n$ je velký v modulu $\mathbf{M}$, proto průnik

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{M}_n \cap (\mathbf{M}_1 \cap ... \cap \mathbf{M}_{n-1} \cap \mathbf{M}') = (\mathbf{M}_n \cap \mathbf{M}_1 \cap ... \cap \mathbf{M}_{n-1}) \cap \mathbf{M}',$$

tedy modul $\mathbf{M}_1 \cap ... \cap \mathbf{M}_n$ je velký v modulu $\mathbf{M}$.

Věta 2.7. [1] Nechť $\mathbf{M}_1$ je podmodul modulu $\mathbf{M}$. Nechť $\mathbf{M}_M$ je maximální podmodul modulu $\mathbf{M}$ takový, že $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_M = \mathbf{0}$. Potom podmodul $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_M = \mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_M$ je velký v modulu $\mathbf{M}$.

Důkaz: Existence maximálního podmodulu $\mathbf{M}_M$ takového, že $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_M = \mathbf{0}$ plyne z Zornova lemmatu. Sporem předpokládejme, že podmodul $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_M$ není velký v $\mathbf{M}$, pak existuje nenulový podmodul $\mathbf{N}$ modulu $\mathbf{M}$ takový, že $(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_M) \cap \mathbf{N} = \mathbf{0}$.

Kdyby $\mathbf{M}_M + \mathbf{N} = \mathbf{M}_M$, pak $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}_M$, tedy $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_M$, tím $\mathbf{N} \cap (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_M) = \mathbf{N} \neq \mathbf{0}$. To není, proto $\mathbf{M}_M + \mathbf{N} > \mathbf{M}_M$. Pak pro nenulový podmodul $\mathbf{M}_M + \mathbf{N}$ modulu $\mathbf{M}$ platí, že $\mathbf{M}_1 \cap (\mathbf{M}_M + \mathbf{N}) \neq \mathbf{0}$, protože $\mathbf{M}_M$ byl maximální s vlastností $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_M = \mathbf{0}$. Tedy existuje prvek m_1 z modulu $\mathbf{M}_1$, který splňuje $m_1 \neq 0$ $m_1 = m_M + n$, kde m_M je z $\mathbf{M}_M$ a n z $\mathbf{N}$. Pak ovšem $m_1 - m_M = n$. Kdyby $n = 0$, pak $0 \neq m_1 = m_m$ a tedy $0 \neq m_1$ by byl prvkem modulu $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_M$, což je ve sporu s tím, že $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_M$ je nulový. Proto n je nenulový prvek modulu $\mathbf{N}$, ale i modulu $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_M$, proto $(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_M) \cap \mathbf{N} \neq \mathbf{0}$. Tedy podmodul $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_M$ je nutně velký v modulu $\mathbf{M}$.

Věta 2.8. Nechť $\mathbf{V}$ je lineární vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ konečné dimenze n a $\mathbf{P}$ podprostor prostoru $\mathbf{V}$. Prostor $\mathbf{P}$ je velký podmodul modulu $\mathbf{V}$ právě tehdy když $dim(\mathbf{P}) = n$, tedy $\mathbf{P} = \mathbf{V}$.

Důkaz: Nechť $\mathbf{P}$ je velký podmodul modulu $\mathbf{V}$, pak lze ukázat, že $dim(\mathbf{P}) = n$, tedy $\mathbf{P} = \mathbf{V}$. Prostor $\mathbf{V}$ je dimenze n a má tedy n bázových prvků $b_1, b_2, ..., b_n$. Pro každý prvek v z $\mathbf{V}$ je $\langle v \rangle$ podprostor prostoru $\mathbf{V}$, kde $\langle v \rangle$ je lineární obal prvku v. Protože všechny prvky b_i, $i \in I$, kde $I = \{1, 2, ..., n\}$, jsou navzájem lineárně nezávislé, tak když $i \neq j$ pak $\langle b_i \rangle \cap \langle b_j \rangle = \mathbf{0}$. Podprostor $\mathbf{P}$ je velký ve $\mathbf{V}$, tedy pro každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{V}_1 \leq \mathbf{V}$ je $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{P} \neq \mathbf{0}$. Tedy $\forall i \in I$ je $\mathbf{P} \cap \langle b_i \rangle \neq \mathbf{0}$. Pak existuje nenulový prvek p z prostoru $\mathbf{P}$ a zároveň z $\langle b_i \rangle$, lze ho tedy zapsat ve tvaru $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + ... + \lambda_k p_k = \alpha_i b_i$, kde $\lambda_j, \alpha_i \in \mathbf{T}$, kde $j \in J = \{1, 2, ..., k\}$ a p_j jsou bázové prvky prostoru $\mathbf{P}$. Protože b_i lze zapsat jako lineární kombinaci prvků p_j, tak $b_i \in \mathbf{P}$, $\forall i \in I$. Protože prvky $b_1, b_2, ..., b_n$ jsou lineárně nezávislé, tak $dim(\mathbf{P}) \geq n$. Zároveň $\mathbf{P}$ je podprostor prostoru $\mathbf{V}$ tedy $dim(\mathbf{P}) \leq n$. Tím $dim(\mathbf{P}) = n$.

Na druhou stranu nechť $dim(\mathbf{P}) = n$, pak lze ukázat, že $\mathbf{P}$ je velký podmodul modulu $\mathbf{V}$. Protože $dim(\mathbf{P}) = n = dim(\mathbf{V})$, tak $\mathbf{P} = \mathbf{V}$. Podle věty 2.2 je podmodul $\mathbf{P}$ velký v modulu $\mathbf{V}$.

Důsledek 2.9. Nechť $\mathbf{V}$ je lineární vektorový prostor konečné dimenze n, pak každý vlastní podmodul $\mathbf{P}$ modulu $\mathbf{V}$ v něm není velký.

Důkaz: Z věty 2.8 víme, že podmodul $\mathbf{P}$ modulu $\mathbf{V}$ je v něm velký, právě tehdy, když $P = V$, což je ve sporu s tím, aby $\mathbf{P}$ byl vlastní podmodul modulu $\mathbf{V}$. Proto podmodul $\mathbf{P}$ nemůže být velký ve $\mathbf{V}$.

Definice 2.10. Pokud existuje $\mathbf{F} \trianglelefteq \mathbf{M}$ takový, že $\mathbf{F} \leq \mathbf{M}_1$ pro všechny velké podmoduly $\mathbf{M}_1$ modulu $\mathbf{M}$, pak jej nazveme fundamentální podmodul.

Věta 2.11. 2.11 Nechť $\mathbf{M}$ je $\mathbf{R}$-modul, který má konečně mnoho podmodulů. Potom v $\mathbf{M}$ existuje fundamentální modul.

Důkaz: Položme

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{F} \leq \mathbf{M}; \mathbf{F} \trianglelefteq \mathbf{M}\}$$

$\mathcal{F} \neq \emptyset$, protože $\mathbf{M} \trianglelefteq \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{M} \in \mathcal{F}$. Modul $\mathbf{M}$ má konečně mnoho podmodulů, proto $\mathcal{F}$ je konečná množina částečně uspořádaná inkluzí. Tedy v množině $\mathcal{F}$ existuje minimální prvek $\mathbf{F}_0$, protože $\mathcal{F}$ je konečná.

Ukážeme, že $\mathbf{F}_0 \leq \mathbf{F}, \forall \mathbf{F} \in \mathcal{F}$ a tedy, že $\mathbf{F}_0$ je nejmenší prvek v $\mathcal{F}$. Kdyby existoval $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$ takový, že $\mathbf{F}_0 \nleq \mathbf{F}$. Pak modul $\mathbf{F}_0 \cap \mathbf{F}$ je podle věty 2.5 velký v $\mathbf{M}$ a tedy $\mathbf{F}_0 \cap \mathbf{F} \in \mathcal{F}$. Dále $\mathbf{F}_0 \cap \mathbf{F} \neq \mathbf{F}_0$, protože $\mathbf{F}_0 \nleq \mathbf{F}$ a $\mathbf{F}_0 \cap \mathbf{F} \leq \mathbf{F}_0$. Proto $\mathbf{F}_0$ není minimální, což je ve sporu s naším předpokladem.

Tedy $\mathbf{F}_0$ je nejmenší v $\mathcal{F}$ a proto $\mathbf{F}_0$ je fundamentální.

Důsledek 2.12. 2.12 Každá konečná Abelova grupa má fundamentální podmodul.

Věta 2.13. Nechť $\mathbf{M}_1$ je podmodul modulu $\mathbf{M}$ a nechť v $\mathbf{M}$ existuje fundamentální podmodul $\mathbf{F}$.

Potom modul $\mathbf{M}_1$ je velký v $\mathbf{M}$ právě tehdy, když $\mathbf{F} \leq \mathbf{M}_1$.

Důkaz: Pokud $\mathbf{M}_1 \trianglelefteq \mathbf{M}$, $\mathbf{F}$ je fundamentální, pak $\mathbf{F} \leq \mathbf{M}_1$.
Naopak pokud $\mathbf{F} \leq \mathbf{M}_1 \leq \mathbf{M}$, $\mathbf{F} \trianglelefteq \mathbf{M}$, pak podle věty 2.3 $\mathbf{M}_1 \trianglelefteq \mathbf{M}$.

Definice 2.14. Modul $\mathbf{M}$ nazveme stejnorodý, pokud každý nenulový podmodul $\mathbf{M}_1$ modulu $\mathbf{M}$ je v něm velký.

Lemma 2.15. Nechť modul $\mathbf{M}$ je cyklická grupa nekonečného řádu. Pak v modulu $\mathbf{M}$ je každý nenulový podmodul velký, tedy modul $\mathbf{M}$ je stejnorodý.

Důkaz: Sporem předpokládejme, že modul $\mathbf{M}$ není stejnorodý. Tedy existuje v něm nenulový podmodul $\mathbf{M}_1$, který není velký. Pak pro nějaký nenulový podmodul $\mathbf{N}$ modulu $\mathbf{M}$ je průnik $\mathbf{N} \cap \mathbf{M}_1$ nulový. Avšak každá podgrupa cyklické grupy je také cyklická, tedy i podgrupy $\mathbf{N}$ a $\mathbf{M}_1$. Modul $\mathbf{N} = n\mathbb{Z}$ a modul $\mathbf{M}_1 = m_1\mathbb{Z}$, kde $n, m_1 \in \mathbb{Z}$. Pak existuje společný násobek, tedy existuje $\kappa \in \mathbb{Z}$ takové, že $n\kappa = k$ a dále existuje $\lambda \in \mathbb{Z}$ takové, že $m_1\lambda = k$. Proto $k \in n\mathbb{Z} \cap m_1\mathbb{Z} = \mathbf{N} \cap \mathbf{M}_1$. Tedy v obou podmodulech existuje prvek $k \neq 0$. Proto oba podmoduly obsahují stejný nenulový prvek a jejich průnik nemůže být nulový modul. To je spor, proto každý nenulový podmodul $\mathbf{M}_1$ modulu $\mathbf{M}$ v něm velký.

Věta 2.16. Nechť existuje fundamentální podmodul $\mathbf{F}$ modulu $\mathbf{M}$. Pak modul $\mathbf{M}$ je stejnorodý, pokud $\mathbf{F}$ je nejmenší nenulový podmodul modulu $\mathbf{M}$.

Důkaz: Protože $\mathbf{F}$ je nejmenší nenulový podmodul, tak pro každý nenulový podmodul $\mathbf{M}_1$ modulu $\mathbf{M}$ platí $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{M}_1$. Podle lemmatu 2.13 je tedy každý podmodul $\mathbf{M}_1$ velký v modulu $\mathbf{M}$, proto modul $\mathbf{M}$ je stejnoměrný.

Důsledek 2.17. Stejnorodost je dědičná. Jinak řečeno každý vlastní podmodul $\mathbf{M}_1$ stejnorodého modulu $\mathbf{M}$ je stejnorodý.

Důkaz: Je-li $\mathbf{M}_1$ vlastní podmodul modulu $\mathbf{M}$, pak každý nenulový podmodul $\mathbf{M}_1'$ modulu $\mathbf{M}_1$ je nenulový podmodul modulu $\mathbf{M}$, proto $\mathbf{M}_1'$ je velký v $\mathbf{M}$. Podle věty 2.3 je $\mathbf{M}_1'$ velký v $\mathbf{M}_1$. Tím je $\mathbf{M}_1$ stejnorodý.

Kapitola 3

Příklady speciálních modulů

V této kapitole modelujeme teorii z předešlých kapitol na konkrétních příkladech. Hlavními zdroji pro tuto kapitolu jsou [2], [3], [5].

3.1 Příklady velkých podmodulů

3.1.1 Vektorové prostory

Příklad 3.1. Najděte v $\mathbb{R}$-vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ všechny velké podmoduly a určete zda se jedná o stejnorodý modul.

Řešení: Z věty 2.8. víme, že všechny podprostory s dimenzí rovné n jsou velké podmoduly, tedy prostory jejichž báze má n prvků. V našem případě pro $\mathbb{R}^3$ je $n = 3$. Tedy báze má 3 prvky, kterými mohou být například $b_1 = [1, 0, 0], b_2 = [0, 1, 0], b_3 = [0, 0, 1]$. Podprostor $\mathbf{P}$ s touto bází je velký podmodul modulu $\mathbb{R}^3$. Žádný jiný podprostor dimenze n již nemůžeme nalézt, tím jsem tedy hotovi s první částí úkolu. Tedy jediný velký podmodul je $\mathbb{R}^3$.

V další části máme rozhodnou zda $\mathbb{R}^3$ je stejnorodý podmodul. Protože však dovedeme nalézt podprostory dimenze 1 a 2, které nejsou velké podmoduly modulu $\mathbf{R}^3$, tak modul $\mathbf{R}^3$ není stejnorodý. Podprostory dané dimenze nalezneme snadno, tak že sestrojíme lineární obal jednoho nebo dvou bázových prvků.

Ukažme si názorně na podprostoru dimenze 1, že není velký podmodul modulu $\mathbb{R}^3$. Označme si tento podmodul $\mathbf{M}_1$. Aby $\mathbf{M}_1$ nebyl velký v $\mathbb{R}^3$, stačí nalézt jeden nenulový podmodul modulu $\mathbb{R}^3$ s kterým má nulový průnik. Všechny prvky $m_1 \in \mathbf{M}_1$ jsou ve tvaru $m_1 = \lambda_1 b_1$, kde $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ a $b_1 \in \mathbb{R}^3$. Uvažujme podmodul $\mathbf{M}_2$ jehož prvky budou ve tvaru $m_2 = \lambda_2 b_2$, kde $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $b_2 \in \mathbb{R}^3$. Kdyby $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ byl nenulový existoval by prvek p, který by šel zapsat pomocí bázových prvků podprostoru $\mathbf{M}_1$ i podprostoru $\mathbf{M}_2$. Tedy $0 \neq p = \lambda_1 b_1 = \lambda_2 b_2$, kde $0 \neq \lambda_1, 0 \neq \lambda_1 \in \mathbb{R}$. Z čehož vyplývá, že $\lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 = 0$. To by ale znamenalo, že prvky bází jsou lineárně závislé, což by bylo ve sporu s tím jak jsme prvky bází volili. Tedy průnik podmodulů $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ je nulový a tím $\mathbf{M}_1$ není velký v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.2. Najděte v $\mathbb{R}$-vektorovém prostoru $\mathbb{R}$ všechny velké podmoduly a určete zda se jedná o stejnorodý modul.

Řešení: Z věty 2.8. víme, že velké podmoduly musí mít dimenzi rovnou dimenzi vektorového prostoru. Protože vektorový prostor $\mathbb{R}$ má dimenzi jedna a všechny nenulové podprostory nemohou mít dimenzi 0, tak musí mít dimenzi 1. Tím jediný nenulový podprostor je $\mathbb{R}$, který je velký v $\mathbb{R}$. Aby modul $\mathbb{R}$ byl stejnorodý je třeba ukázat, že každý nenulový podmodul je v něm velký. Avšak každý nenulový podmodul $\mathbb{R}_1$ modulu $\mathbb{R}$ tvoří nad tělesem $\mathbb{R}$ vektorový podprostor dimenze 1, který je velký podmodul modulu $\mathbb{R}$. Proto je modul $\mathbb{R}$ stejnorodý. Tedy $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}$

Příklad 3.3. Najděte v $\mathbb{C}$-vektorovém prostoru $\mathbb{C}$ všechny velké podmoduly a určete zda se jedná o stejnorodý modul.

Řešení: Z věty 2.8. víme, že podprostor stejné dimenze jako je sám prostor je velký podmodul modulu $\mathbb{C}$. Protože $dim(\mathbb{C}) = 1$, tak obdobně jako v předešlém příkladu je každý nenulový podmodul velký. Proto je $\mathbb{C}$ stejnorodý modul.

Příklad 3.4. Najděte v $\mathbb{R}$-vektorovém prostoru $\mathbb{C}$ všechny velké podmoduly a určete zda se jedná o stejnorodý modul.

Řešení: Z věty 2.8 víme, že podprostor stejné dimenze jako je sám prostor je velký podmodul modulu $\mathbb{C}$. Protože $dim(\mathbb{C}) = 2$, tak velké podmoduly jsou právě ty podprostory jejichž dimenze je 2. Každý podprostor jehož dimenze je 1 není velký podmodul modulu $\mathbb{C}$. Příkladem takových podprostorů jsou $\langle 1 \rangle$ a $\langle i \rangle$. Protože v modulu $\mathbb{C}$ existují nenulové podmoduly, které nejsou velké, tak modul není stejnorodý.

Příklad 3.5. Najděte v $\mathbb{Q}$-modulu $\mathbb{Q}$ všechny velké podmoduly, určete zda má fundamentální podmodul a zda se jedná o stejnorodý modul.

Řešení: Protože $\mathbb{Q}$ je těleso, je každý $\mathbb{Q}$-modul vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Z věty 2.8. víme, že velké podmoduly musí mít dimenzi rovnou dimenzi vektorového prostoru. Protože vektorový prostor $\mathbb{Q}$ má dimenzi jedna a všechny nenulové podprostory nemohou mít dimenzi 0, tak musí mít dimenzi 1. Tím všechny podprostory prostoru $\mathbb{Q}$ jsou velké podmoduly modulu $\mathbb{Q}$. Aby modul $\mathbb{Q}$ byl stejnorodý je třeba ukázat, že každý nenulový podmodul je v něm velký. Avšak každý nenulový podmodul $\mathbf{M}_1$ modulu $\mathbb{Q}$ tvoří nad tělesem $\mathbb{Q}$ vektorový podprostor dimenze 1, který je velký podmodul modulu $\mathbb{Q}$. Proto je modul $\mathbb{Q}$ stejnorodý.

3.1.2 Abelovy grupy

Příklad 3.6. Najděme v $\mathbb{Z}$-modulu $\mathbb{Z}_{36}$ všechny podmoduly.

Řešení: Protože $\mathbb{Z}_{36}$ je cyklická grupa, tak i každá její podgrupa je cyklická, tedy i Abelova. Tedy každá podgrupa grupy $\mathbb{Z}_{36}$ je rovněž $\mathbb{Z}$-modul. Dále nám tedy stačí hledat pouze podgrupy grupy $\mathbb{Z}_{36}$.

Tedy k nalezení všech podgrup stačí pomocí každého prvku ze $\mathbb{Z}_{36}$ vygenerovat jemu příslušející podgrupu.

Podle Lagrangeovy věty řád podgrupy musí dělit řád grupy. Pokud $NSD(o(a), 36) = d$, pak $\langle a \rangle = \langle d \rangle$, stačí tedy generovat jen těmi prvky a ze $\mathbb{Z}_{36}$, pro které platí, že $o(a)|36$. Z prvočíselného rozkladu čísla $36 = 2^2.3^2$ vidíme, že takové prvky jsou $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$. Tyto prvky generují následující podgrupy $\langle 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_{36}$, $\langle 2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_{18}$, $\langle 3 \rangle \simeq \mathbb{Z}_{12}$, $\langle 4 \rangle \simeq \mathbb{Z}_9$, $\langle 6 \rangle \simeq \mathbb{Z}_6$, $\langle 9 \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$, $\langle 12 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$, $\langle 18 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$, $\langle 36 \rangle = \langle 0 \rangle$. Tím jsme nalezli všechny podmoduly modulu $\mathbb{Z}_{36}$.

Příklad 3.7. Najděte v $\mathbb{Z}$-modulu $\mathbb{Z}_{36}$ všechny velké podmoduly, určete zda má fundamentální podmodul a zda se jedná o stejnorodý modul.

Řešení: Úlohu si rozdělíme na tři pod úkoly. Za prvé najdeme fundamentální podmodul $\mathbf{F}$. Za druhé určíme které z podmodulů jsou velké. Nakonec určíme zda modul $\mathbb{Z}_{36}$ je stejnorodý.

1) Protože fundamentální podmodul $\mathbf{F}$ je velký v $\mathbb{Z}_{36}$, bude rozumné požadovat, aby obsahoval minimální vlastní podmoduly $\langle 18 \rangle, \langle 12 \rangle$. Neboť to je jediná možnost, aby $\mathbf{F} \cap \langle 18 \rangle \neq \mathbf{0}$ nebo $\mathbf{F} \cap \langle 12 \rangle \neq \mathbf{0}$. Tedy $\mathbf{F}$ je řádu jenž je násobek čísla 6. Z předchozího bodu víme, že takové podmoduly jsou $\langle 6 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle$. Zároveň požadujeme, aby $\mathbf{F}$ byl minimální s touto vlastností. Minimální z nich je $\langle 6 \rangle$, jedná se tedy o hledaný fundamentální podmodul $\mathbf{F}$.

2) Nyní podle věty 2.13. každý podmodul, jež obsahuje $\mathbf{F}$ jako podmodul, je velký. Protože $\langle 6 \rangle \leq \langle 6 \rangle$, $\langle 6 \rangle \leq \langle 3 \rangle$, $\langle 6 \rangle \leq \langle 2 \rangle$, $\langle 6 \rangle \leq \langle 1 \rangle$. Tedy velké podmoduly modulu $\mathbb{Z}_{36}$ jsou $\langle 6 \rangle$, $\langle 3 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 1 \rangle$.

3) Podle věty 2.16. víme, že modul není stejnorodý, protože $\mathbf{F}$ není nejmenší vlastní podmodul. Například $\langle 18 \rangle$ není velký v modulu $\mathbf{F}$, protože $\langle 18 \rangle \cap \langle 12 \rangle = 0$.

Příklad 3.8. Najděte v $\mathbb{Z}$-modulu $\mathbb{Z}_{16}$ všechny podmoduly.

Řešení: Protože $\mathbb{Z}_{16}$ je cyklická grupa, tak i každá její podgrupa je cyklická. Tedy k nalezení všech podgrup by stačilo pomocí každého prvku ze $\mathbb{Z}_{16}$ vygenerovat jemu příslušející podgrupu.

Podle Lagrangeovy věty řád podgrupy musí dělit řád grupy, tedy stačí generovat jen těmi prvky a ze $\mathbb{Z}_{16}$, pro které platí, že $o(a)|n$. Z prvočíselného rozkladu čísla $16 = 2^4$ vidíme, že takové prvky jsou $1, 2, 4, 8, 16$. Tyto prvky generují následující podgrupy $\langle 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_{16}$, $\langle 2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_8$, $\langle 4 \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$, $\langle 8 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$, $\langle 16 \rangle = \langle 0 \rangle$. Tím jsme nalezli všechny podmoduly modulu $\mathbb{Z}_{16}$.

Příklad 3.9. Najděte v $\mathbb{Z}$-modulu $\mathbb{Z}_{16}$ všechny velké podmoduly, určete zda má fundamentální podmodul a zda se jedná o stejnorodý modul.

Řešení: Úlohu si rozdělíme na tři pod úkoly. Za prvé najdeme fundamentální podmodul $\mathbf{F}$. Za druhé určíme které z podmodulů jsou velké. Nakonec určíme zda modul $\mathbb{Z}_{16}$ je stejnorodý.

1) Protože fundamentální podmodul $\mathbf{F}$ je velký v $\mathbb{Z}_{16}$, bude rozumné požadovat, aby obsahoval minimální vlastní podmodul $\langle 8\rangle$. Neboť to je jediná možnost, aby $\mathbf{F}\cap\langle 8\rangle \neq \mathbf{0}$. Tedy $\mathbf{F}$ je řádu jenž je násobek čísla 2. Z předchozího bodu víme, že takové podmoduly jsou $\langle 8\rangle, \langle 4\rangle, \langle 2\rangle, \langle 1\rangle$. Zároveň požadujeme, aby $\mathbf{F}$ byl minimální s touto vlastností. Minimální z nich je $\langle 8\rangle$, jedná se tedy o hledaný fundamentální podmodul $\mathbf{F}$.

2) Nyní podle věty 2.13. každý podmodul, jež obsahuje $\mathbf{F}$ jako podmodul, je velký. Protože $\langle 8\rangle \leq \langle 8\rangle$, $\langle 8\rangle \leq \langle 4\rangle$, $\langle 8\rangle \leq \langle 2\rangle$, $\langle 8\rangle \leq \langle 1\rangle$. Tedy všechny vlastní podmoduly modulu $\mathbb{Z}_{16}$ jsou velké.

3) Podle věty 2.16. víme, že modul je stejnorodý, protože $\mathbf{F}$ je nejmenší vlastní podmodul. Dále víme, že každý podmodul modulu $\mathbb{Z}_{16}$ je rovněž stejnorodý.

Příklad 3.10. Najděte v $\mathbb{Z}$-modulu $\mathbb{Z}$ všechny velké podmoduly a zda se jedná o stejnorodý modul. Rozhodněte, zda modul $\mathbb{Z}$ má fundamentální podmodul.

Řešení: Modul $\mathbb{Z}$ je cyklická grupa nekonečného řádu. Podle lemmatu 2.15. víme, že je to stejnorodý modul. Tedy všechny nenulové $\mathbf{N}$ podmoduly modulu $\mathbb{Z}$ jsou v něm velké.

Kdyby v modulu $\mathbb{Z}$ existoval fundamentální podmodul $\mathbf{F}$, tak $\mathbf{F} \leq \mathbb{Z}$, $\mathbf{F} \trianglelefteq \mathbb{Z}$. Protože $\mathbb{Z}$ je nekonečná cyklická grupa, tak $\mathbf{F} = f_0\mathbb{Z}$, kde $f_0 \in \mathbb{Z}$, $f_0 \neq 0$.

Pak například $\mathbf{M}_1 = 2 * f_0\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$, $\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{0}$, tedy $\mathbf{M}_1$ je velký v $\mathbb{Z}$, ale $\mathbf{M}_1 \lneq \mathbf{F}$. Tedy modul $\mathbb{Z}$ nemá fundamentální modul.

Poznámka: Stejným principem by se dalo ukázat pro každou cyklickou grupu nekonečného řádu, že nemá fundamentální modul.

Příklad 3.11. Rozhodněte, zda $\mathbb{Z}$-modul $\mathbf{M} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ je stejnorodý modul.

Řešení: Uvažujme nenulové podmoduly $\mathbf{M}_1 = \mathbb{Z}\oplus\mathbf{0}$ a $\mathbf{M}_2 = \mathbf{0}\oplus\mathbb{Z}$. Průnik těchto modulů $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ je nulový. Tedy ani jeden z nich není velký podmodul modulu $\mathbf{M}$. Proto modul $\mathbf{M}$ není stejnorodý.

Závěr

V první kapitole jsem rozepsal základní poznatky k teorii modulů. Z definic uveďme pojmy modulu, podmodulu a konstrukci cyklického a faktorového modulu. V tvrzeních lze nalézt vztah průniku a součtu podmodulů k modulu. V závěru kapitoly se nachází věty o izomorfismu pro moduly.

V druhé kapitole se mi povedlo dokázat všechny základní tvrzení k teorii velkých modulů. Tvrzení lze nalézt jako cvičení v Procházkovi. Vyslovil jsem větu, kdy vektorový podprostor je velký podmodul. Zavedl jsem nový pojem fundamentálního podmodulu a ukázal existenci u některých typů modulů. Poté jsem ukázal vztah mezi fundamentálním podmodulem a velkými podmoduly. Uvedl jsem pojem stejnorodého modulu a ukázal, že nekonečná cyklická grupa je stejnorodý modul. Dále jsem ukázal souvislost mezi fundamentálním podmodulem a stejnorodostí.

Poslední kapitola je rozdělena do dvou podkapitol. V první podkapitole se zabývám vektorovými prostory. Na začátku je řešen případ $\mathbb{R}$-vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, konkrétně pro $n = 3$ a $n = 1$. Povedlo se mi v nich nalézt všechny velké podmoduly a určit, zda se jedná o stejnorodý modul. Dále obdobně řeším případ $\mathbb{C}$-vektorového prostoru $\mathbb{C}$. Velmi zajímavý mi přijde příklad 3.4., neboť v něm vidíme jak se situace změní, pokud zvolíme odlišné těleso.

V druhé podkapitole se zabývám Abelovými grupami. Na začátku je řešen případ $\mathbb{Z}$- modulu $\mathbb{Z}_n$, konkrétně pro $n = 36$ a $n = 16$. Tedy kdy n není mocnina prvočísla a kdy n je mocnina prvočísla. Najdu v nich fundamentální podmodul a určím jaké podmoduly jsou velké a zda se jedná o stejnorodý podmodul. Dále obdobně diskutuji případ $\mathbb{Z}$- modulu $\mathbb{Z}$. Nakonec řeším případ $\mathbb{Z}$- modulu $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, kde určím, zda se jedná o stejnorodý podmodul.

Na závěr bych uvedl, že v práci by bylo možné pokračovat. Například se domnívám, že by bylo možné zavést algoritmus pro hledání fundamentálního podmodulu u některých případů modulů. Nebo by bylo možné navázat další kapitolou o malých podmodulech.

Literatura

[1] PROCHÁZKA, L., a kol. *Algebra.* 1.vyd. Academia, 1990. ISBN 80-200-301-0-21-077-90.

[2] MAC LANE, S., BIRKHOFF, G. *Algebra.* 2.vyd. ALFA, 1974.

[3] TESKOVÁ, L. *Lineární algebra.* 3.vyd. ZČU, 2010. ISBN 978-80-7043-966-1.

[4] AHMED, Mona, 2009. Weak essential submodules Um-Salama Science Journal. Baghdad. 2009, 6(1). 214-221 ISSN:2078-8665

[5] Ikenaga, Bruce. Notes and pages on topics in math: Abstract algebra [online]. Poslední změna 22.1. 2017. [Cit. 24.2.2017] Dostupné z: http://sites.millersville.edu/bikenaga/abstract-algebra-1/