

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA EKONOMICKÁ

Diplomová práce

**Matematické modely oceňování finančních derivátů – základy
teorie a vybrané aplikace**

**Mathematical models of financial derivatives pricing – basic
theory and selected applications**

Bc. Šárka Vostárková

Plzeň 2012

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta ekonomická
Akademický rok: **2011/2012**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Šárka VOSTÁRKOVÁ**
Osobní číslo: **K09N0206P**
Studijní program: **N6208 Ekonomika a management**
Studijní obor: **Podniková ekonomika a management**
Název tématu: **Matematické modely oceňování finančních derivátů - základy
teorie a vybrané aplikace**
Zadávající katedra: **Katedra ekonomie a kvantitativních metod**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Zpracujte stručně problematiku finančních derivátů a jejich oceňování.
2. Popište matematické modely oceňování vybraných finančních derivátů.
3. Proveďte výpočty ocenění vybraných finančních derivátů.
4. Zpracujte přehledně získané výsledky.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy: **60 - 80 stran**

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

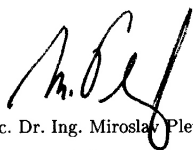
- **BLAKE, D.** *Analýza finančních trhů.* Praha: Grada, 1995. ISBN 80-7169-201-8
- **CIPRA, T.** *Finanční a pojistné vzorce.* Praha: Grada, 2006. ISBN 80-247-1633-X
- **MÁLEK, J.** *Opce a futures.* Praha: VŠE, 2003. ISBN 80-7079-442-9
- **ZMEŠKAL, Z. a kol.** *Finanční modely.* Praha: EkoPress, 2004. ISBN 80-86119-87-4

Vedoucí diplomové práce:

Doc. RNDr. Ing. Ladislav Lukáš, CSc.
Katedra ekonomie a kvantitativních metod

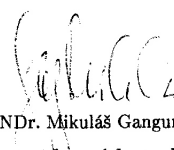
Datum zadání diplomové práce: **30. listopadu 2011**

Termín odevzdání diplomové práce: **27. dubna 2012**



Doc. Dr. Ing. Miroslav Plevný
děkan

L.S.



RNDr. Mikuláš Gangur, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 30. listopadu 2011

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma

„Matematické modely oceňování finančních derivátů – základy teorie a vybrané aplikace“

vypracovala samostatně pod odborným dohledem vedoucího diplomové práce za použití pramenů uvedených v bibliografii.

V Plzni, dne 27. 4. 2012

.....
podpis autora

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu diplomové práce doc. RNDr. Ing. Ladislavu Lukášovi, CSc. za podporu, cenné rady, připomínky a inspiraci při tvorbě diplomové práce.

OBSAH

ÚVOD	7
1. PRINCIP FINANČNÍCH DERIVÁTŮ	9
1.1 Charakteristika finančních derivátů	9
1.2 Stručná historie vývoje finančních derivátů.....	9
1.3 Základní možnosti využívání derivátů.....	10
1.3.1 Zajištění (hedging)	10
1.3.2 Spekulace.....	10
1.3.3 Arbitráž	11
1.4 Obecná klasifikace finančních derivátů	11
1.4.1 Podle vzájemného postavení účastníků.....	11
1.4.2 Podle typu podkladového aktiva	12
1.4.3 Podle místa obchodování	12
2. PEVNÉ DERIVÁTY	13
2.1 Forwardové obchody.....	13
2.1.1 Charakteristika forwardových obchodů	13
2.1.2 Typy forwardových obchodů	14
2.1.3 Ocenění forwardů	15
2.2 Futures obchody.....	17
2.2.1 Charakteristika futures	17
2.2.2 Ocenění futures	18
2.3 Swapové obchody	19
2.3.1 Charakteristika swapových obchodů	19
2.3.2 Typy swapových obchodů.....	19
2.3.3 Ocenění swapových obchodů	20
3. PODMÍNĚNÉ KONTRAKTY	21
3.1 Opce.....	21
3.1.1 Pojem opce	21
3.1.2 Typy opcí.....	22
3.1.3 Pozice v opci	22
3.2 Další opční kontrakty.....	25
3.2.1 Opční listy (warranty)	25
3.2.2 Caps, floors, collars.....	25
4. MODEL Y OCEŇOVÁNÍ EVROPSKÝCH OPCÍ	26
4.1 Vnitřní a časová hodnota opce	26
4.2 Meze pro opční prémii evropské opce.....	28

4.2.1	Meze pro opční prémii evropské call opce	28
4.2.2	Meze pro opční prémii evropské put opce	29
4.3	Put-call parita evropské opce	29
4.4	Binomický model oceňování evropských opcí	30
4.4.1	Jednoperiodický model.....	31
4.4.2	Víceperiodický model	34
4.4.3	Odhad parametrů p, u, d	36
4.4.4	Binomický model oceňování evropských opcí v SW Mathematica.....	37
4.5	Black-Scholesův model oceňování opcí	48
4.5.1	Wienerův proces a jeho vlastnosti.....	49
4.5.2	Itôovo lemma.....	51
4.5.3	Black-Scholesův model oceňování opcí	53
4.5.4	Black-Scholesův model v SW Mathematica	55
4.5.5	Citlivosti opcí - Greeks	59
4.5.6	Modifikace Black-Scholesova vzorce	67
4.6	Binomický model versus Black-Scholesův model.....	68
5.	MODELÝ OCEŇOVÁNÍ AMERICKÝCH OPCÍ.....	74
5.1	Meze pro opční prémii americké call opce	74
5.2	Meze pro opční prémii americké put opce	74
5.3	Put-call parita americké opce	75
5.4	Binomický model oceňování amerických opcí	75
5.4.1	CRR model v SW Mathematica	75
5.4.2	Americké opce versus Evropské opce.....	81
5.5	Další modely oceňování amerických opcí	83
6.	ZÁVĚR	84
7.	SEZNAM POUŽITÝCH TABULEK	89
8.	SEZNAM POUŽITÝCH OBRÁZKŮ.....	89
9.	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	91
10.	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	92
11.	SEZNAM PŘÍLOH	96

Úvod

Finance jsou jednou z nejrychleji se vyvíjejících oblastí bankovního a podnikového světa. Investování do finančních derivátů zaznamenalo v posledních letech rapidní nárůst. Při pohledu na dvě předchozí desetiletí dosáhlo triumfálního úspěchu. Deriváty se staly nedílnou součástí finančního světa. Objem termínovaných obchodů se neustále zvyšuje. Nejčastějším důvodem k investování do finančních derivátů je zajištění se proti riziku, ale také spekulanti často využívají těchto finančních nástrojů.

Během mého studia jsem díky zvolenému studijnímu zaměření Finanční inženýrství získala spoustu cenných informací z oblasti finančního trhu. Zejména díky předmětům Kvantitativní finance, Finanční deriváty a Základy analýzy kapitálového trhu jsem objevila svoji zálibu ve financích a především mě nadchla problematika finančních derivátů, což mě vedlo ke zvolení tématu mé diplomové práce „Matematické modely oceňování finančních derivátů“.

V první části charakterizujeme finanční deriváty, jen krátce naznačíme historii vývoje finančních derivátů, uvedeme základní možnosti jejich využívání a jak je možné finanční deriváty klasifikovat podle různých hledisek.

V další části práce rozdělíme finanční deriváty na dvě hlavní skupiny a to na pevné a podmíněné deriváty. Využijeme toto dělení, protože se jejich způsob oceňování zásadně liší. Postupně je charakterizujeme a představíme základní typy pevných a podmíněných derivátů. Zaměříme se především na oceňování opcí, kterému věnujeme dvě samostatné kapitoly a budou tvořit stěžejní a nejobsáhlejší část práce. Oceňování pevných derivátů – forwardů, futures a swapů se budu zabývat jen okrajově kvůli ucelenosti práce.

K oceňování opcí se užívají modely dílčí a úplné rovnováhy. Nejvíce se zaměříme na diskrétní binomický model oceňování opcí a spojitý Black-Scholesův model, který je jednou z nejúspěšnějších teorií nejen ve financích, ale v celé ekonomii. Oba modely za stanovených předpokladů odvodíme pro větší názornost a jednoduchost pouze pro evropské opce na akcie nevyplácející dividendy.

V dnešní době je téměř nemožné se při oceňování derivátů obejít bez výpočetní techniky a vhodného softwaru. Na trhu existuje řada softwarů, které je možné k oceňování finančních derivátů použít. V této práci se pokusíme využít SW

Mathematica, Wolfram Research, Inc. k sestavení teoretických modelů oceňování derivátů a jejich využití na konkrétních příkladech. S tímto softwarem jsem se setkala v rámci výuky na univerzitě a získala tak znalosti potřebné k naprogramování modelů oceňování opcí. Díky konzultacím s vedoucím práce mám umožněn přístup k tomuto softwaru.

Modely oceňování opcí v SW Mathematica sestavíme na základě vzorců odvozených v teoretické části za pomoci vhodné literatury. Pokusíme se využít co nejvíce z obrovské škály funkcí, které SW Mathematica nabízí. Především budeme využívat výpočetních a grafických možností tohoto široce uplatnitelného programu. Ukážeme, jak mohou účastníci finančních trhů využívat tento software a výrazně si tak usnadnit práci.

Pro každý z modelů provedeme numerické experimenty. Nejprve vždy ověříme vytvořený model pomocí testovacího příkladu uvedeného v některém ze zdrojů a poté se budeme věnovat složitějším aplikacím. V rámci oceňování evropských opcí porovnáme cenu opce získanou binomickým modelem a cenu získanou Black-Scholesovým modelem, a ověříme, zda skutečně binomický model numericky konverguje k Black-Scholesovu.

V poslední části se zaměříme na oceňování amerických opcí, které je velmi složitou záležitostí. Existuje celá řada modelů, která se zabývá oceňováním amerických opcí, budeme se ale blíže zabývat pouze binomickým modelem oceňování amerických opcí. Na konkrétním příkladu se poté pokusíme porovnat ceny evropských a amerických opcí oceněných binomickým modelem pro různé varianty opcí.

Cílem práce je přehledné, ucelené zpracování problematiky finančních derivátů a jejich oceňování, především pak evropských a amerických opcí. Zpracování vhodných numerických modelů pomocí SW Mathematica, Wolfram Research, Inc. Provedení numerických experimentů s vytvořenými programy a jejich zhodnocení.

1. Princip finančních derivátů

1.1 Charakteristika finančních derivátů

„Finanční deriváty (odvozené finanční instrumenty nebo jen krátce deriváty) jsou finanční instrumenty, jejichž hodnota závisí na hodnotě jiných finančních instrumentů. Vzhledem k této závislosti tak deriváty představují určité podmíněné nároky, které výrazně ovlivňují mimo jiné také matematiku těchto nástrojů. Část finančních derivátů má podobu cenných papírů.“ [10, s. 157]

Finanční deriváty jsou termínové obchody, při nichž se v současnosti uzavřou podmínky o nákupu nebo prodeji určitého podkladového aktiva a v budoucnosti je tento obchod za těchto podmínek realizován. [18]

Základními a nejznámějšími finančními deriváty jsou forwardy, futures, swapy a opce. Finanční deriváty mohou být obchodovány jak na burzách, tak i na mimoburzovních trzích.

Podle zákona o obchodování na kapitálovém trhu se pod pojmem deriváty rozumí:

- opce na investiční nástroje (investiční cenné papíry, cenné papíry kolektivního investování a nástroje peněžního trhu),
- finanční termínové smlouvy (zejména futures, forwardy a swapy) na investiční nástroje,
- rozdílové smlouvy a obdobné nástroje pro přenos úrokového nebo kursového rizika,
- nástroje umožňující přenos úvěrového rizika,
- jiné nástroje, ze kterých vyplývá právo na vypořádání v penězích a jejichž hodnota se odvozuje zejména z kursu investičního cenného papíru, indexu, úrokové míry, kursu měny nebo ceny komodity. [37]

1.2 Stručná historie vývoje finančních derivátů

Finanční deriváty, jak je známe dnes, vznikly z komoditních termínovaných obchodů na derivátových burzách. Již více než 2000 let před naším letopočtem se v Indii objevily první formy trhu s deriváty. V souvislosti s různými regiony světa a ekonomickými změnami, lidé uzavírali termínované kontrakty, aby zafixovali ceny zboží dodávaného po moři a snížili tak riziko vyplývající z nestability cen.

Od středověku víme o termínovaných kontraktech v Anglii a Francii. Jednalo se především o komoditní termínové obchody se zbožím, které bylo dodáváno z Asie o několik měsíců později. Motivem pro tuto transakci bylo opět zabezpečení cen.

Za první termínový trh na světě je považován trh v japonském městě Osaka, kde se hojně obchodovalo s rýží a hedvábím, termínová směna se zde nazývala „Dojima rýžový trh“.

Otázkou zůstává, co se skrývá za rostoucí popularitou termínovaných obchodů. Rapidní nárůst veřejné dluhu v Americe spolu se zrušením pevných měnových kursů v roce 1972 vyústilo v ekonomické prostředí s větší nestabilitou a tedy i volatilitou. Rostla nejistota ohledně budoucího vývoje cen finančních instrumentů, neboť v důsledku nestability finančních trhů narůstá volatilita úrokových sazeb, měnových kursů a kursů cenných papírů. V reakci na obavy z volatility byl v Chicagu v 70. letech představen první finanční termínovaný obchod, který znamenal oficiální vznik finančních termínovaných obchodů. V roce 1972 byl obchodován první termínovaný obchod v cizí měně. V roce 1992 začala fungovat obchodní počítačová platforma CME's GLOBEX Trading System. Největšími hráči jsou na trhu finančních derivátů americké banky. [8]

1.3 Základní možnosti využívání derivátů

V praxi mohou být deriváty velmi silným nástrojem především k zajištění se proti riziku, hojně využívány jsou také ke spekulacím na trhu a existuje i možnost arbitráží.

1.3.1 Zajištění (hedging)

Zajištění neboli hedging umožňuje snižovat či úplně eliminovat tržní riziko obchodů s podkladovými aktivy tak, že se zafixuje cena k sjednanému budoucímu datu. „Jinými slovy snažíme se získat určité pojištění (zajištění) portfolia. Jakýkoli pokles akciového portfolia je automaticky vyvážen růstem hodnoty derivátů, které takto efektivně uzamykají hodnotu držených aktiv na předem určené úrovni.“ [7, s. 32]

1.3.2 Spekulace

Spekulace je „nákup nebo prodej finančního produktu na „krátkou“ dobu s cílem dosáhnout zisk“. [18, s. 89] Při spekulaci je sjednáván termínový obchod, který spekulant předpokládá. Spekuluje se na to, že sjednaná termínová cena bude nižší nebo

vyšší než skutečná cena podkladového aktiva na promptním trhu, takže se termínově nakupuje nebo prodává. Přes svou rizikovost jsou spekulativní transakce s deriváty velmi oblíbené.

1.3.3 Arbitráž

Další možností využití derivátů je arbitráž, při které arbitrážér využívá rozdílů cen stejného zboží na různých trzích za účelem dosažení téměř bezrizikového zisku. U termínovaných obchodů by se jednalo o tzv. časovou arbitráž, tedy využití rozdílů na spotovém a termínovém trhu. Ovšem s rostoucí globalizací jsou na vyspělých trzích možnosti časové arbitráže prakticky nulové. Na efektivním trhu by nemělo být možné koupit cenný papír na jednom trhu a okamžitě jej prodat na jiném trhu za vyšší cenu. Metody stanovení ceny derivátů vycházejí právě z principu absence arbitrážního zisku.

1.4 Obecná klasifikace finančních derivátů

Klasifikace derivátů je možná z několika různých hledisek, uvedeme členění např. podle vzájemného postavení účastníků, podle typu podkladového aktiva nebo podle místa obchodování. V práci budou dále členěny deriváty právě podle vzájemného postavení účastníků a jednotlivě blíže charakterizovány.

1.4.1 Podle vzájemného postavení účastníků

Dalším členěním, pro naši práci nejdůležitějším, je členění podle vzájemného postavení obou účastníků termínovaného obchodu.

➤ **Pevné (nepodmíněné) deriváty** – „Pevné deriváty představují termínový obchod, který jsou oba účastníci povinni k datu splatnosti uskutečnit bez ohledu na to, jaká je k tomuto datu skutečná cena bazického instrumentu. Nepodmíněné deriváty se vyznačují tím, že vstup do takového termínovaného kontraktu je obvykle pro oba účastníky bezplatný.“ [10, s. 159] Pevné deriváty je možné dále členit na forwardy, futures a swapy.

➤ **Opční (podmíněné) deriváty** – Opční neboli podmíněné kontrakty „se od termínových liší především tím, že kupující opčního kontraktu má právo, ale nikoliv povinnost svou opci k určitému budoucímu datu realizovat neboli uplatnit.“ [6, s. 13] Jeden z účastníků má právo sjednaný obchod uskutečnit, přičemž na jeho rozhodnutí

je závislý druhý účastník, který má při uplatnění opce povinnost splnit podmínky uzavřené v opčním kontraktu. Druhý účastník je ochoten toto podstoupit kvůli získání odměny, kterou je pro něj opční prémie.

1.4.2 Podle typu podkladového aktiva

Podle typu podkladového aktiva se deriváty dělí na [10]

- **komoditní deriváty** (kontrakty na budoucí nákup či prodej fyzických komodit jako je pšenice, kakao, ropa, zlato a jiné),
- **úrokové deriváty** (kontrakty na budoucí nákup či prodej úrokových instrumentů jako je depozitum, úvěr, krátkodobý či dlouhodobý dluhopis),
- **měnové deriváty** (kontrakty na budoucí nákup či prodej určité měny),
- **akciové deriváty** (kontrakty na budoucí nákup či prodej akcií),
- **deriváty na cenový index** (kontrakty na budoucí nákup či prodej akcií).

1.4.3 Podle místa obchodování

Deriváty můžeme dále členit z hlediska místa, na kterém je obchodováno na

- **burzovní**,
- **mimoburzovní** – tzv. over the counter (OTC) obchody.

2. Pevné deriváty

2.1 Forwardové obchody

Nejprve se detailněji podíváme na pevné deriváty. Postupně je charakterizujeme, představíme základní typy pevných derivátů a způsoby jejich oceňování.

2.1.1 Charakteristika forwardových obchodů

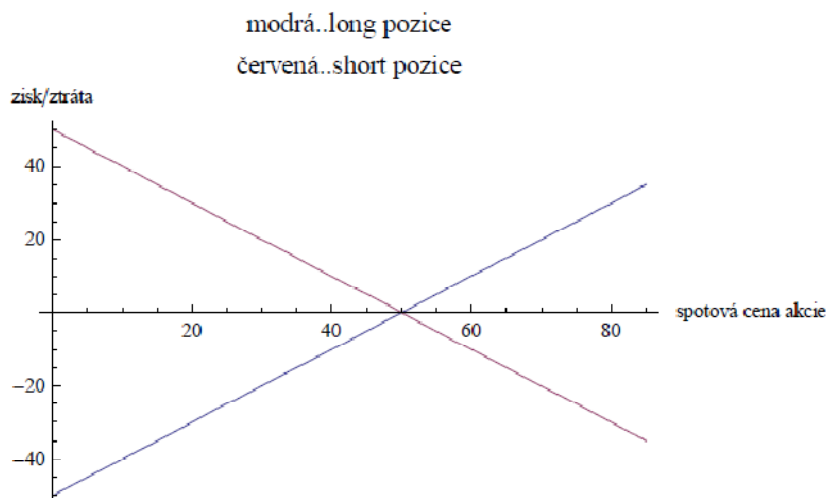
Forward je individuálně sjednaná „smlouva mezi dvěma stranami, kupujícím a prodávajícím, o koupi a prodeji určitého předmětného aktiva v budoucnosti, s tím, že cena se dohodne již v okamžiku uzavření smlouvy.“ [32, s. 201]

Tyto obchody jsou sjednávány na mimoburzovních trzích. Uzavřením forwardového kontraktu se účastník v dlouhé pozici (long pozici) zaváže, že k datu splatnosti kontraktu koupí podkladové aktivum za termínovou cenu sjednanou při uzavření forwardového kontraktu. Stejně tak účastník krátké pozici (short pozici) se zaváže, že podkladové aktivum prodá za sjednanou termínovanou cenu. Podmínky forwardového kontraktu jsou sjednávány individuálně a obchodují se na mimoburzovních trzích, na OTC nebo zcela individuálně. [10] Což je velmi výhodné, protože je možné forward tzv. „ušít na míru“ tak, aby vyhovovaly oběma účastníkům obchodu. Na druhou stranu je nevýhodou nízká likvidnost a obchodovatelnost forwardů a také neexistuje žádná záruka, že účastníci splní svoje závazky.

Kupující forwardu neboli účastník v dlouhé pozici v době splatnosti forwardu může realizovat zisk, pokud spotová cena podkladového aktiva v době splatnosti forwardu bude vyšší než cena příslušného podkladového aktiva forwardu sjednaná při uzavření kontraktu. Tento zisk není nijak omezen. V případě, že spotová cena podkladového aktiva bude nižší než cena dodávky, realizuje ztrátu, která je omezená do výše nulové hodnoty podkladového aktiva.

Přesně opačná situace platí pro účastníka v krátké pozici neboli prodávající forwardu. Jeho zisk je omezen do výše nulové hodnoty podkladového aktiva a jeho případná ztráta je neomezená. Ilustrační situace je znázorněna v grafu vytvořeném v SW Mathematica, kde cena dodávky je znázorněna hodnotou 50, kde se setkává křivka long a short pozice.

Obr. č. 1 Zisk a ztráta z forwardu v dlouhé pozici



Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

2.1.2 Typy forwardových obchodů

Forwardové obchody je možné rozdělit, stejně jako finanční deriváty obecně, na několik základních typů, na akciové forwardy, komoditní forwardy, měnové forwardy a úrokové forwardy. Měnové a úrokové forwardy FRA budeme blíže charakterizovat vzhledem k tomu, že jsou v praxi nejčastěji využívány.

Úrokové forwardy FRA

FRA je jedním z forwardů na úrokové sazby s tím, že FRA je smlouva mezi dvěma stranami, která fixuje úrokovou sazbu z pomyslné nominální částky na určité budoucí období. Tento nástroj používají především podniky s velkým objemem investic anebo půjček, a to z následujících důvodů: [32, s. 202]

- Firma, která si krátkodobě půjčuje, se prostřednictvím FRA může zajistit proti riziku rostoucích úrokových sazeb, a tak si uzamknout pevnou sazbu na půjčku.
- Firma, která poskytuje krátkodobě půjčky anebo má krátkodobé investiční portfolio, se může prostřednictvím FRA zajistit proti riziku poklesu úrokových sazeb, a tak uzamknout pevnou sazbu na úrokový příjem.

Přitom FRA nespočívá ve faktickém budoucím přijetí úvěru či poskytnutí depozita mezi smluvními partnery, ale pouze ve vyrovnání úrokového rozdílu, který k datu splatnosti FRA skutečně vznikne mezi sjednanou termínovou úrokovou mírou a určenou tržní úrokovou mírou, kterou v této souvislosti označíme jako referenční sazbu. Kupující

FRA (strana v dlouhé pozici) obdrží od prodávajícího FRA k datu splatnosti tržní úrok a zaplatí mu FRA-úrok. Naproti tomu prodávající FRA (strana v krátké pozici) obdrží od kupujícího FRA k datu splatnosti FRA-úrok a zaplatí mu tržní úrok.

Měnové forwardy

Jedna z nejčastějších použití forwardů v praxi jsou termínové nákupy a prodeje měny pomocí měnových forwardových transakcí. Měnový forward obvykle sjednává s bankou klient, který si chce zabezpečit přijatelný kurs pro zamýšlený budoucí nákup nebo prodej určité cizí měny. Mohou mít však také čistě spekulativní charakter, kdy spekulant spekuluje na devizovém trhu na budoucí růst či pokles některé měny.

Aktuální měnové kursy kotované bankami pro nákup nebo prodej zahraniční měny se v termínových obchodech označují jako spotové měnové kursy.

2.1.3 Ocenění forwardů

Cenou **měnového forwardu** je termínový kurs, který se stanoví eliminací případného arbitrážního zisku, který by vznikl vzhledem k rozdílným úrokovým mírám pro obě zvolené měny. Přitom je však také nutné rozlišit úrokovou míru pro vklad a úrokovou míru pro úvěr v dané měně.

Pro výpočet výše termínového měnového kursu využijeme běžně používané vzorce, uvedené v [11, s. 77]. Ovšem pro kompaktnější zápis použitých vzorců zavedeme jiné označení, než které uvádí Cipra.

V tomto případě si určíme jako bazickou měnu české koruny a nebazickou měnu eura, pak můžeme označit nákupní termínový kurs směny koruny za eura TK_N a obdobně prodejní termínový kurs TK_P , nákupní spotový měnový kurs SK_N a prodejní spotový kurs SK_P . Úroková míra pro vklad v korunách je značena jako i_C a pro úvěr jako j_C , analogicky pro eura i_E a j_E . Jako t je označeno současné datum, tedy datum sjednání kontraktu a T je datum splatnosti forwardu.

Pak je prodejní termínový kurs roven:

$$TK_P = SK_P \frac{1 + j_C(T - t)/360}{1 + i_E(T - t)/360} \quad (1)$$

Z předchozího vzorce vyplývá, že prodejní termínový kurs se přibližně rovná rozdílu mezi úrokovou mírou pro úvěr v českých korunách a úrokové míry pro vklad v eurech

za dobu do splatnosti vynásobené spotovým měnovým kursem. Čímž je eliminována případná možnost arbitráže.

Podobně odvodíme i vzorec pro nákupní termínový měnový kurs:

$$TK_N = SK_N \frac{1 + i_C(T-t)/360}{1 + j_E(T-t)/360} \quad (2)$$

kde je analogicky s prodejním termínovým kursem zřetelná eliminace získání bezrizikového zisku, tedy arbitráže.

Podobně jako u měnového forwardu můžeme odvodit **forwardovou úrokovou sazbu** na základě úvahy o eliminaci možnosti arbitrážního zisku:

$$i_F = \frac{i_{T^*}(T^* - t) - i_T(T - t)}{[1 + i_T(T - t)/360](T^* - T)} \quad (3)$$

kde: i_T ... bezriziková úroková míra v čase t ,

i_{T^*} ... bezriziková úroková míra v čase t se splatností v čase T^* .

Při oceňování forwardů se obvykle využívá model „cost of carry“ neboli model čistých refinančních nákladů. To znamená, že vstup do určité pozice forwardu musí odpovídat refinančním nákladům, které by bylo nutné vynaložit k dosažení stejného výsledku na spotovém trhu. Pokud by se totiž lišily, znamenalo by to možnost arbitrážního zisku. Je uvažováno spojitě úročení.

Vzorce pro ocenění forwardů touto metodou mají všeobecnou platnost a jsou uvedeny ve více použitých zdrojích, v tomto případě budeme čerpat především z [13].

Nejprve se budeme zabývat oceňováním **forwardů na akcii, která nevyplácí dividendy**.

$$F_t = S_t e^{r(T-t)}, \quad (4)$$

kde: r ... bezriziková úroková míra,

T ... datum splatnosti,

$(T - t)$... doba do splatnosti,

F_t ... rovnovážná cena forwardového kontraktu,

S_t ... spotová cena akcie v čase t .

Pokud by neplatila rovnost mezi cenou forwardu v čase t a diskontovanou spotovou cenou podkladového aktiva o období do splatnosti, bylo by možné realizovat arbitrážní zisk. Jedná se o velmi jednoduchý výpočet, který ukážeme na velmi jednoduchém příkladu.

Příklad 1. Šestiměsíční forward na akcii nevyplácející dividendy. Současná hodnota akcie je 9500 Kč, bezriziková úroková míra činí 4%. Jaká je současná cena forwardu?

$$F_t = 9500e^{0,04(0,5)} = 9692$$

Cena forwardu by v tomto případě byla 9692,- Kč.

Dále přejdeme k **forwardu na akcii, která vyplácí diskrétní dividendy** v intervalu $(T-t)$ a jejich výše je předem známa.

$$F_t = (S_t - D_t)e^{r(T-t)}, \quad (5)$$

kde: D_t ... výše dividendy v čase t .

Forward na akcii vyplácející dividendy kontinuálně s konstantní roční intenzitou q .

$$F_t = S_t e^{(r-q)(T-t)}, \quad (6)$$

Uvažujme nyní **forward na cizí měnu**

$$F_t = S_t e^{(r-r_f)(T-t)}, \quad (7)$$

kde: r_f ... cizí bezriziková úroková míra.

Vzorec je možné modifikovat i na **forward na skladovatelnou komoditu**. Přičemž při uzavření forwardového obchodu na skladovatelnou komoditu, jako například drahé kovy, je nutné uvažovat i náklady na skladování.

$$F_t = K = S_t e^{(r+s)(T-t)}, \quad (8)$$

kde: s ... roční skladovací náklady.

2.2 Futures obchody

2.2.1 Charakteristika futures

Futures jsou forwardy standardizované tak, že je lze uzavírat a obchodovat s nimi masově na termínovaných burzách. Důvody, které vedou ke standardizaci forwardů do podoby futures jsou především: [11]

- průběžné zúčtování zisků a ztrát každý obchodní den bez nutnosti čekat na datum splatnosti termínového obchodu,
- eliminace rizika spočívajícího v nedodržení smluvních závazků protistranou,

- možnost odstoupení od sjednaného kontraktu v libovolném čase jeho odprodejem na likvidním sekundárním trhu nebo případně vyrovnání dané pozice prostřednictvím vstupu do pozice k ní opačné,
- místo podkladového aktiva může figurovat vhodný index cenných papírů – pomocí takových futures lze např. spekulovat na vývoj akciových indexů.

Přesto ale může standardizace představovat oproti forwardům nepříjemná omezení. Standardizovaná forma nemusí zcela odpovídat potřebám klienta. Standardizován je typ podkladového aktiva, množství podkladového aktiva, datum splatnosti futures specifikované jako přesně určené dny v roce a standardizované je i kotování ceny futures.

Subjekt s otevřenou pozicí může futures držet až do doby splatnosti a kontrakt zrealizovat nebo jej může vyrovnat vyrovnávací transakcí, kterou končí většina kontraktů futures. [21]

Tab. č. 1 Srovnání forwardů a futures kontraktů

FORWARD	FUTURES
- Soukromý kontrakt mezi dvěma stranami	- Obchodovány na burze
- Nestandardizovány	- Standardizovány
- Obvykle specifikováno datum dodání	- Řada možných dat dodání
- Vyrovnány na konci kontraktu	- Vyrovnání možné každý den
- Dodání a konečné vyrovnání se obvykle uskuteční v době splatnosti	- Jsou často ukončeny před datem splatnosti

Zdroj: vlastní zpracování podle [21]

2.2.2 Ocenění futures

Vzhledem k tomu, že futures jsou pouze standardizované forwardy, i princip jejich oceňování je stejný. I při oceňování futures je využíván model cost of carry a v rámci tohoto modelu se eliminuje arbitrážní zisk. Tímto způsobem vypočítaný termínový kurs má ale pouze teoretickou hodnotu. V praxi vstupuje do ceny kromě čistých refinančních nákladů také očekávání tržních subjektů, volatilita promptního kursu, likvidita trhu a další. Proto se skutečný termínový kurs od toho teoretického odlišuje. Rozdíl mezi spotovou cenou podkladového nástroje a cenou futures se označuje jako báze. Nejvíce se hovoří o kursově bázi, carry bázi a value bázi.

2.3 Swapové obchody

2.3.1 Charakteristika swapových obchodů

„Swapy neboli kontrakty s rozdíly jsou syntetické cenné papíry zahrnující kombinace dvou nebo více základních stavebních bloků. Většina swapů, které se v současnosti obchodují, zahrnuje kombinace dvou nebo více nástrojů peněžního trhu. Existují ale také swapy, které obsahují i složku typu futures a forward, nebo swapy s komponentou opce.“ [7, s. 340]

Většina swapům je obchodována na trhu OTC „na míru“ protistranám. Ale některé typy swapů jsou obchodovány také na burze.

Problematika swapových obchodů je velmi obsáhlá, nebudeme se však jimi zabývat nikterak dopodrobna, vzhledem k tomu, že cíl této práce je zaměřen jiným směrem.

2.3.2 Typy swapových obchodů

Existuje mnoho různých typů swapových obchodů, pět nejzákladnějších typů jsou úrokové swapy, měnové swapy, úvěrové swapy, komoditní swapy a akciové swapy. Kromě uvedené základní kvalifikace existuje i mnoho konkrétních typů swapů, např. bazické swapy, koktejlové swapy, kuponové swapy a mnoho dalších.

Blíže charakterizujeme pouze úrokové swapy, které mají v dnešní době velmi důležité postavení.

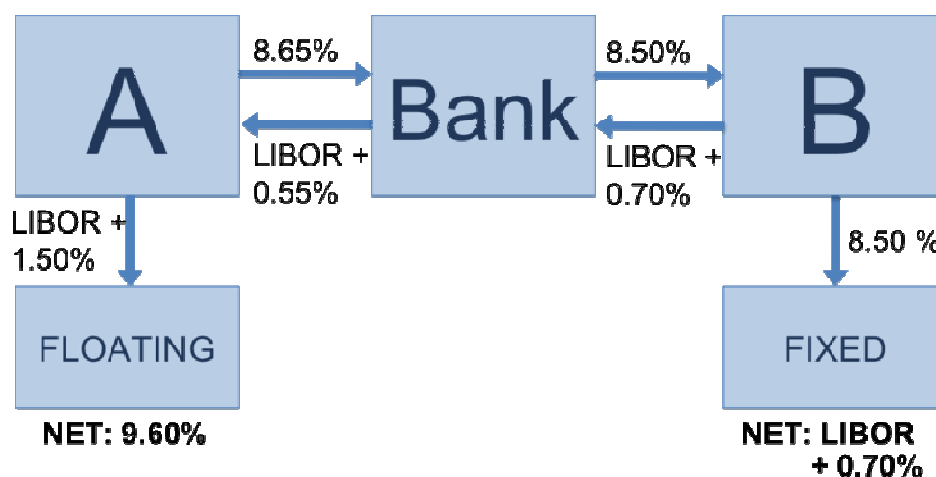
Úrokový swap je dohoda mezi dvěma protistranami, že si vymění platby s fixní úrokovou sazbou za platby s plovoucí úrokovou sazbou (typu LIBOR) ve stejné měně. Tyto platby se počítají k pomyslné nominální hodnotě jistiny. Nedochozí ke směně kapitálu a i směna úrokových plateb se většinou řeší pouhým vyrovnáním jejich salda.

Důvodem k uskutečnění úrokového swapového obchodu je získání komparativní výhody. Některé společnosti mohou mít komparativní výhodu na trzích s fixovanou úrokovou sazbou, zatímco jiné mohou mít komparativní výhodu na trzích s plovoucí úrokovou sazbou.

Pro ilustraci ukážeme schéma úrokového swapu na příkladu. V obrázku je pod písmenem „A“ plovoucí platba v současné době (FLOATING), kterou chce investor zafixovat. Pod písmenem „B“ je v současnosti zafixovaná platba (FIXED), kterou chce

investor přeměnit na plovoucí. Při vstupu do úrokového swapu je čistý efekt takový, že každá protistrana může vyměnit neboli „swapovat“ (vychází z anglického slova swap, který lze přeložit jako vyměnit) stávající závazky za jejich požadované závazky. Obvykle protistrany „neswapují“ své platby přímo, ale raději si každý samostatně zařídí swap prostřednictvím finanční instituce, nejčastěji banky. Banka si za tuto službu inkasuje spread ze swapových plateb. [34]

Obr. č. 2 Ukázkové schéma fungování úrokových swapů



Zdroj: *Swap (finance)*. [online] Wikipedia. [cit. 2012-04-18], Dostupné z [www:<http://en.wikipedia.org/wiki/Swap_%28finance%29>](http://en.wikipedia.org/wiki/Swap_%28finance%29)

Platba subjektu „A“ má plovoucí úrokovou sazbu stanovenou na úrovni LIBOR+1,50%, chce si ji ale zafixovat. Na druhé straně platba subjektu „B“ má zafixovanou úrokovou sazbu na úrovni 8,50% a chce ji přeměnit na plovoucí úrokovou sazbu. Banka jako prostředník mezi těmito dvěma stranami provede swapové platby podle jejich požadavku. Banka zafixuje platbu „A“ na úrovni 9,60%. Platbu „B“ přemění na plovoucí úrokovou sazbu ve výši LIBOR+0,70%. Ve skutečnosti jsou aktuální úrokové sazby pro „A“ a „B“ o něco nižší kvůli spread, který si inkasuje banka.

2.3.3 Ocenění swapových obchodů

Oceňování jednotlivých druhů swapů se liší, princip ale zůstává stejný a vychází z neexistence arbitrážního zisku. Nemožnost získání arbitrážního zisku je zajištěna tím způsobem, že čistá současná hodnota (NPV) jednotlivých peněžních toků je rovna nule. Ocenění swapových obchodu již nebude na tomto místě blíže specifikováno.

3. Podmíněné kontrakty

V této kapitole blíže charakterizujeme podmíněné kontrakty. Mezi opční kontrakty patří nejen opce, ale i jiné finanční instrumenty jako jsou opční listy, cap, floor, collar a další. Zaměříme se na opce, vysvětlíme pojem opce, charakterizujeme typy opcí a pozice, ve kterých se může účastník opčního obchodu nacházet. Opce jsou jedním z náročnějších finančních instrumentů a jsou centrálním finančním derivátem této práce, proto je opcím věnována zvláštní pozornost. Modelům oceňování opcí budou věnovány samostatné kapitoly.

3.1 Opce

3.1.1 Pojem opce

Opce jsou podmíněné deriváty, v nichž držitel neboli kupující opce v dlouhé pozici má právo, ale nikoli povinnost, uskutečnit ve sjednaném termínu příslušný obchod, zatímco upisovatel neboli prodávající opce v krátké pozici se pasivně podřizuje rozhodnutí držitele opce. Vstup do dlouhé pozice proto není bezplatný jako u pevných derivátů, ale uskuteční se koupí opce za opční prémii. Podobně vstup do krátké pozice se uskuteční prodejem opce za opční prémii. [10]

Při sjednávání opčního kontraktu se stanoví objem opce (množství podkladového aktiva), realizační cena, datum splatnosti opce (přesněji datum vypršení opce, datum realizace opce a datum zúčtování).

Rozhodování držitele opce v čase t vychází z porovnání realizační ceny opce (X) se spotovou cenou podkladového aktiva S_t . V této souvislosti se říká, že opce je v čase t :

- na penězích („at-the-money“): když $S_t = X$,
- v penězích („in-the-money“) – když je K pro držitele opce výhodnější než S_t :
 - když: $X < S_t$ (pro call-opci),
 - když: $X > S_t$ (pro put-opci),
- mimo peníze („out-of-the-money“) - když je X pro držitele opce méně výhodná než S_t :
 - když: $X > S_t$ (pro call-opci),
 - když: $X < S_t$ (pro put-opci).

3.1.2 *Typy opcí*

Existují dva základní typy opcí – call neboli kupní opce a put neboli prodejní opce. **Call opce** je právo koupit podkladové aktivum za pevně stanovenou cenu neboli realizační cenu ve stanovené době, která je označována jako doba realizace opce za pevně stanovených podmínek. V případě **put opce** se jedná o právo prodat podkladové aktivum za pevně stanovenou cenu ve stanovené době za pevně stanovených podmínek.

Aby se využilo právo na nákup či prodej opce, musí se opce uplatnit. Právě podle možnosti uplatnění můžeme opce členit opce buď na evropského, nebo amerického typu. Pokud je právo opce možné uplatnit kdykoli za dobu života opce, mluvíme o **opci americké**. Naproti tomu **evropskou opce** je možno uplatnit pouze v době expirace. Americké a evropské opce nemají nic společného s místem obchodování. Přestože je obecně snadnější analyzovat evropské opce, je většina obchodovaných opcí amerického typu. Postupem času vznikají i opce dalších typů jako je bermudská, asijská, exotická, pařížská, ruská a další.

Další členění opcí je členění podle druhu podkladového aktiva na opce na komodity, měnové opce, úrokové opce, akciové opce, opce na akciový index, opce na futures.

3.1.3 *Pozice v opci*

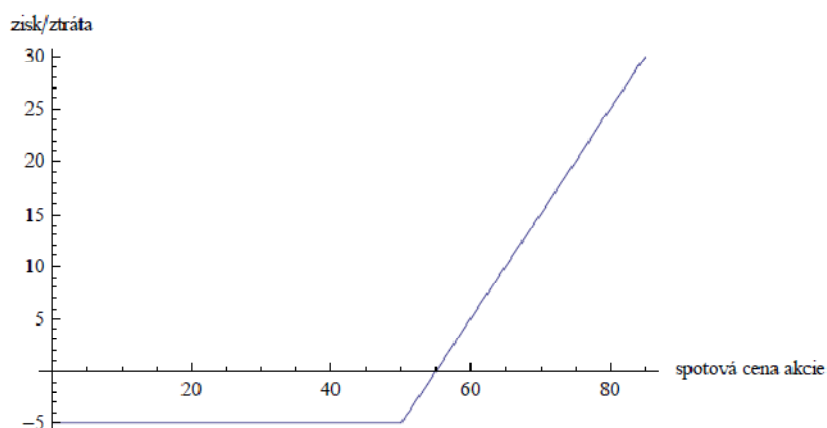
V každém opčním kontraktu vystupují dvě strany. Na jedné straně držitel, který je v dlouhé pozici, tedy kupuje opci. Na druhé straně upisovatel, který je v krátké pozici, prodává, neboli upisuje opci. Upisovatel opce obdrží opční prémii, ale vzniká mu potenciální závazek do budoucna. Pokud upisovatel realizuje zisk, pak držitel realizuje ztrátu a naopak. Jejich zisky a ztráty jsou protichůdné. [1]

Existují čtyři možné typy pozic v opci, ve kterých účastník opčního obchodu může být, dlouhá call, dlouhá put, krátká call a krátká put. Všechny čtyři pozice jsou nejprve popsány a poté znázorněny v grafech, které jsme vytvořili v SW Mathematica na základě znalostí získaných při výuce předmětu Kvantitativní finance (KEM/KF) a Finanční deriváty (KEM/FDE) viz příloha A. Ve všech grafech je realizační cena stanovena na 50 eur, jedná se pouze o ilustrační příklad.

Dlouhá pozice call - koupě kupní opce

Dlouhá pozice call znamená právo koupit za danou realizační cenu podkladové aktivum. Za zakoupení pozice musí subjekt zaplatit opční prémii. V tomto případě je maximální ztráta omezena na výši zaplacené opční prémie, naopak ziskový potenciál je neomezen. S růstem spotové ceny podkladového aktiva rostou i zisky neomezeně. Pokud bude v době realizace opce výhodnější zakoupit podkladové aktivum přímo na spotovém trhu, pak nechá držitel opce opci propadnout.

Obr. č. 3 Dlouhá pozice call opce

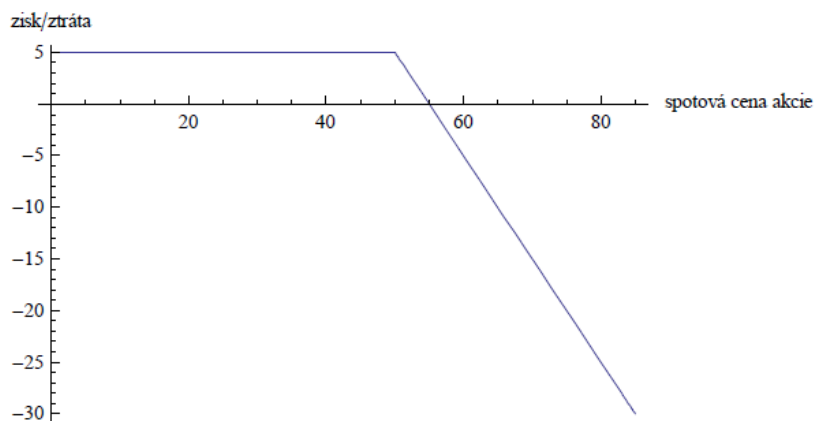


Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

Krátká pozice call - prodej call opce

Krátká pozice call představuje povinnost prodat podkladový instrument protistraně, pokud opci uplatní. Za tuto povinnost získá upisovatel opce opční prémii. Maximální výši zisku představuje opční prémie, zato možnost ztráty je neomezená.

Obr. č. 4 Krátká pozice call opce

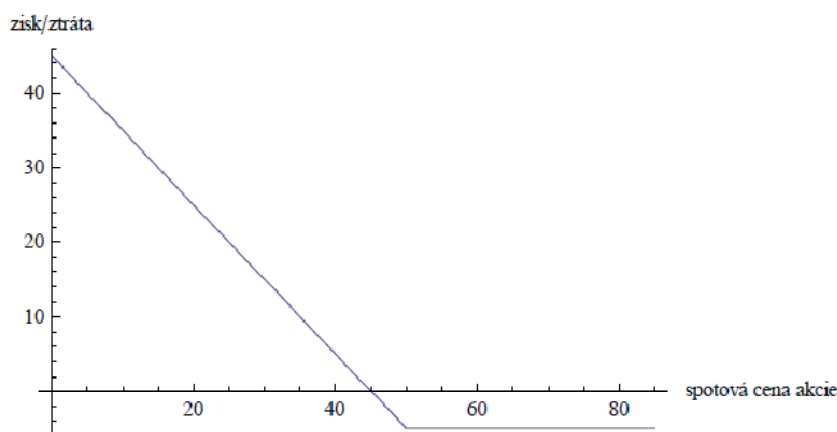


Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

Dlouhá pozice put – koupě prodejní opce

Dlouhá pozice put pozice dává držiteli opce právo prodat za danou realizační cenu podkladové aktivum. Za zakoupení opce musí zaplatit upisovateli opční prémii. Maximální ztráta je zde opět omezena pouze do výše zaplacené opční prémie. Ziskový potenciál je vysoký, s poklesem ceny roste výhodnost této pozice, ale v tomto případě je zisk omezen poklesem ceny podkladového aktiva na nulovou hodnotu.

Obr. č. 5 Dlouhá pozice put opce

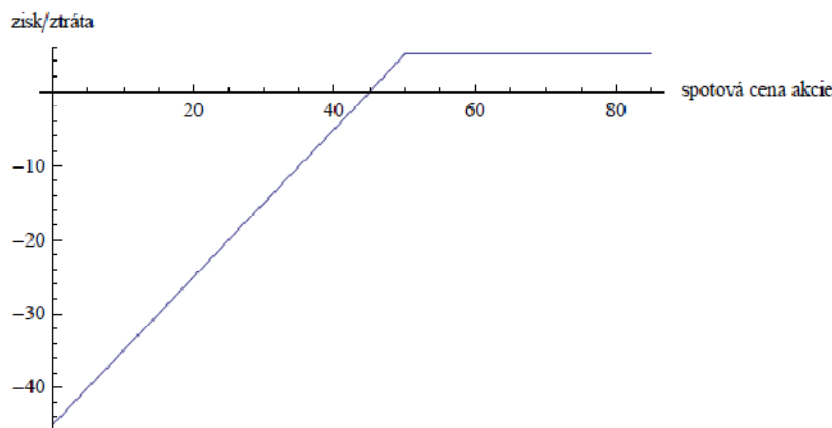


Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

Krátká pozice put - prodej put opce

Krátká pozice put s sebou nese povinnost koupit podkladové aktivum od protistrany, pokud ji uplatní. Upisovatel put opce má zisk omezen výší opční prémie a výše ztráty, kterou může utrpět, je omezená na úrovni nulové hodnoty podkladového aktiva. Je zde tedy možnost značné ztráty.

Obr. č. 6 Krátká pozice put opce



Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

V praxi se obvykle různým způsobem kombinují opce s jinými cennými papíry, ale také mezi sebou. Tím způsobem lze realizovat různé strategie podle očekávání budoucího vývoje trhu. Z důvodu značné rozsáhlosti kombinačních strategií se jimi v této práci nebudeme dále zabývat.

3.2 Další opční kontrakty

3.2.1 Opční listy (warranty)

Warranty jsou vlastně dlouhodobé americké opce call, která jsou emitovány firmou na její vlastní kmenové akcie. Podkladovým aktivem opčního listu je tedy kmenová akcie společnosti, která warrant vypisuje nebo prodává.

Warranty stejně jako opce budou uplatněny za předpokladu, že výnos bude větší než nula. Faktory ovlivňující cenu warrant jsou podobné jako u opce, oceňování se tedy provádí obdobným způsobem jako opce. [32]

3.2.2 Caps, floors, collars

Caps, floors a collars jsou speciálním případem opce, které jsou obchodovány na OTC trhu. Jsou používány k zajištění rizika změny úrokových měř portfolia firmy.

Cap neboli strop je call opce na úrokové míry, často s více možnými daty splatnosti. Koupí stropu na úrokové sazby se držitel jistí proti vzrůstu úrokových měř. Pokud tedy úroková sazba ve stanovené době překročí stanovený „strop“, pak musí upisovatel zaplatit držiteli úrokový rozdíl.

Floor neboli dno je put opce na úrokové míry, stejně jako caps obvykle s více možnými termíny splatnosti. Pokud úroková sazba klesne pod „dno“, pak upisovatel musí držiteli vykompenzovat rozdíl.

Collar neboli obojek je simultánní pozice ve stropu (cap) a dnu (floor). Jako například koupě stropu a prodej dna.

4. Modely oceňování evropských opcí

Modely oceňování opcí jsou modely vhodné k určování rovnovážných opčních prémie v čase t . Tato kapitola je věnována výhradě oceňování evropských opcí na akcie. Tyto modely vychází z arbitrážní techniky a jedná se buď o modely dílčí rovnováhy, jako je model parity call a put opce, nebo o modely úplné rovnováhy, diskrétní binomický model a spojitý Black-Scholesův model. [18]

Před samotným odvozením modelů oceňování je vhodné nejprve definovat pojem opční prémie, vnitřní a časové hodnoty opce a ukázat, jak lze celkem jednoduchým způsobem stanovit meze pro výši opční prémie jak call, tak i put opce.

4.1 Vnitřní a časová hodnota opce

Opční prémie je cenou opce, která je sjednaná na mimoburzovním trhu nebo obchodována na burzovním trhu. Opční prémie tvoří horní hranici pro ztrátu držitele opce a pro zisk upisovatele opce. Je složena ze dvou složek, a to z vnitřní a časové hodnoty opce.

Vnitřní hodnota opce je v čase t kladná část potenciálního zisku, který by plynul z okamžitého uplatnění opce. Slouží především jako teoretická hodnota, především pro evropské opce. Závisí pouze na spotovém kursu podkladového aktiva (S_t) v čase t a realizační ceně (X).

Pro call opci platí:

$$VHC_t = \max(0, S_t - X), \quad (9)$$

kde: VHC_t ... vnitřní hodnota call opce v čase t ,

a pro put opci:

$$VHP_t = \max(0, X - S_t), \quad (10)$$

kde: VHP_t ... vnitřní hodnota put opce v čase t .

Působení změny spotové a realizační ceny na vnitřní hodnotu call a put opce je uveden v následující tabulce.

Tab. č. 2 Závislost vnitřní hodnoty opce na spotové a realizační ceně

	Změna	Změna vnitřní hodnoty	
		Call opce	Put opce
Spotová cena (S_t)	Růst	roste	klesá
Realizační cena (X)	Růst	klesá	roste

Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Časová hodnota opce je dána rozdílem mezi opční prémie a vnitřní hodnotou opce. Časová hodnota opce v čas t je cena, kterou byl ochoten zaplatit držitel opce za potenciální možnost, že do doby splatnosti se změní cena podkladového aktiva v jeho prospěch. Se zkracující se dobou do splatnosti klesá časová hodnota opce až na nulu, při $t = T$.

„Časová hodnota opce je vlastně investory oceněná šance, že v době, která ještě zbývá do expirace, podkladová akcie poroste nebo poklesne v ceně.“ [1]

Vnitřní hodnota je určena funkcionálním vztahem, je dána exaktně a je měřitelná, to ale není možné u časové hodnoty opce. V časové hodnotě se odráží mnoho různých faktorů, navíc ne všechny je možné kvantifikovat. Proto je nutné postupovat aproximativně. Úspěšně se s funkcionálním vyjádřením časové hodnoty opce vyrovnává Black-Scholesův model, o kterém budeme hovořit v další části práce.

Vliv některých faktorů na změnu časové hodnoty opce ilustruje následující tabulka.

Tab. č. 3 Závislost časové hodnoty opce v závislosti na změně některých faktorů

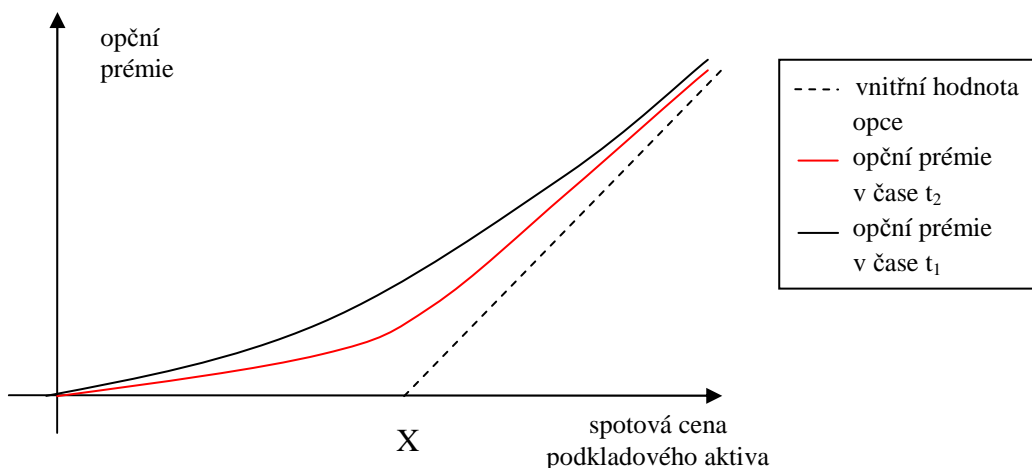
	Změna	Změna časové hodnoty	
		Call opce	Put opce
Doba do konce splatnosti ($T - t$)	růst	roste	Roste
Volatilita (σ)	růst	růst	Růst
Tržní úroková míra (r)	růst	růst	Pokles
Rozdíl mezi spotovou a realizační cenou ($S_t - X$)	růst	pokles	Pokles
Vyplácení dividendy	ano	pokles	Růst

Zdroj: vlastní zpracování, 2012

V následujícím grafu je znázorněna závislost opční prémie, vnitřní hodnoty opce a časové hodnoty opce na spotové ceně podkladového aktiva. Zobrazeny jsou opční prémie v čase t_1 a v čase t_2 , přičemž platí $t_1 < t_2 < T$, a vnitřní hodnoty opce. Prostor mezi opční prémie a vnitřní hodnotou opce je výše časové hodnoty opce. Je zřejmé, že v čase t_2 je hodnota časové opce nižší než v čase t_1 , neboť se zkracující se dobou

splatnosti klesá časová hodnota opce. Dále je v grafu možné pozorovat, že s rostoucí spotovou cenou podkladového aktiva se časová hodnota opce snižuje.

Obr. č. 7 Závislost opční prémie, vnitřní hodnoty opce a časové hodnoty opce na spotové ceně podkladového aktiva



Zdroj: vlastní zpracování podle [10], 2012

4.2 Meze pro opční prémie evropské opce

Pro opční prémie opce je možné odvodit některé meze, které ji limitují shora i zdola. Pro toto odvození se využívá opět princip eliminace arbitrážní zisku. Je uvažováno spojitě úročení a opce evropského typu.

4.2.1 Meze pro opční prémie evropské call opce

Nejprve odvodíme meze pro opční prémie evropské call opce na akcii nevyplácející dividendy. Vycházíme přitom z vlastností opční prémie:

- opční prémie nemůže být záporná: $C_t \geq 0$,
- opční prémie nemůže být vyšší než aktuální cena podkladového aktiva (protože pak by bylo výhodnější koupit akcii přímo): $C_t \leq S_t$,
- pro opční prémie platí: $C_t \geq S_t - Xe^{-r(T-t)}$.

Z předchozích tvrzení dostáváme meze pro opční prémie evropskou call opce nevyplácející dividendy:

$$\max(S_t - Xe^{-r(T-t)}, 0) \leq C_t \leq S_t. \quad (11)$$

Pokud budeme uvažovat akcie vyplácející dividendy a jako D_t označíme počáteční hodnotu dividend vyplacených do splatnosti opce (v čase t), pak můžeme jednoduše odvodit i meze opční prémie evropské call opce vyplácející dividendy:

$$\max(S_t - Xe^{-r(T-t)} - D_t, 0) \leq C_t \leq S_t - D_t. \quad (12)$$

4.2.2 Meze pro opční prémii evropské put opce

Analogicky odvodíme meze pro opční prémii evropské put opce na akcie nevyplácející dividendy. Opět vycházíme z vlastností opční prémie:

- opční prémie nemůže být záporná $P_t \geq 0$,
- majitel opce může v době splatnosti získat maximálně částku ve výši realizační ceny (pokud kurs akcie klesne až na nulu). Kupující tedy nebude ochoten platit více, než je současná hodnota realizační ceny: $P_t \leq Xe^{-r(T-t)}$,
- pro opční prémii platí $P_t \geq Xe^{-r(T-t)} - S_t$.

Meze pro opční prémii evropské put opce nevyplácející dividendy můžeme tedy zapsat jako

$$\max(Xe^{-r(T-t)} - S_t, 0) \leq P_t \leq Xe^{-r(T-t)}. \quad (13)$$

Modifikace pro evropskou put opci vyplácející dividendy:

$$\max(Xe^{-r(T-t)} - S_t + D_t, 0) \leq P_t \leq Xe^{-r(T-t)} + D_t. \quad (14)$$

4.3 Put-call parita evropské opce

Cenu put opce je možné určit i na základě ceny call opce. Známe-li cenu call opce, pak můžeme jednoduchým způsobem vypočítat i cenu put opce. Tento způsob se nazývá put-call parita neboli model dílčí rovnováhy. Používá se k výpočtu opční prémie put opce na základě vypočtené opční prémie call opce. Předpokladem je, že se jedná o stejné podkladové aktivum (akcie), se stejnou realizační cenou (X) a stejnou dobou do splatnosti ($T - t$).

Budeme vycházet ze dvou investičních strategií. Zaprvé nákup call opce za C_t a uložení částky $Xe^{-i(T-t)}$. A za druhé nákup put opce za P_t a nákup akcie za S_t . Pokud obě strategie vyhodnotíme, zjistíme, že jsou ekvivalentní.

- Put-call parita pro evropské opce na akcii nevyplácející dividendy:

$$P_t = C_t + Xe^{-r(T-t)} - S_t. \quad (15)$$

- Put-call parita pro evropské opce na akcii vyplácející dividendy:

$$P_t = C_t + Xe^{-r(T-t)} - S_t + D_t. \quad (16)$$

[10]

4.4 Binomický model oceňování evropských opcí

Binomický model byl poprvé předložen Coxem, Rossem a Rubinsteinem v roce 1979 v článku „Option Pricing: A Simplified Approach“ v časopisu Journal of Financial Economics. Podle jmen autorů proto bývá také nazýván jako CRR (Cox, Ross, Rubinstein) model.

Pro odvození binomického modelu je nutné nejprve stanovit předpoklady modelu, samotné odvození bude vycházet především z originálního článku autorů modelu [12], který můžeme použít díky databázi Science Direct (dostupné na sciencedirect.com), která je přístupná na univerzitě. Dále budeme používat článek [29], knihy [21], [38], [1] a přednášky z předmětu Finanční deriváty [25].

Model binomického stromu může být v určitých souvislostech používán jako diskretní aproximace spojitých modelů. Velmi často používaným a oblíbeným modelem oceňování opcí je sestavení binomického stromu.

Binomický model odvodíme pro evropskou call opci. Budeme pracovat s těmito zjednodušujícími předpoklady: [1, s. 86]

- Neuvažujeme žádné transakční náklady.
- Neuvažujeme žádné daně ani poplatky z obchodování.
- Trh je efektivní, okamžitě odstraňuje možnosti arbitráže.
- Existuje jedna bezriziková úroková míra pro půjčování i vypůjčování kapitálu.
- Neexistují žádná omezení.
- Neuvažujeme žádná časová zpoždění.
- Na podkladovou akcii se nevyplácí žádná dividendy.
- Můžeme obchodovat s jakoukoli částí jedné akcie.

Základním předpokladem je, že cena podkladového aktiva v ekvidistantních časových okamžicích, je vyjádřena diskretním stochastickým procesem, který je vyjádřen posloupností náhodných veličin s binomickým rozdělením.

Binomické rozdělení s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0,1)$, značené $\text{Bi}(n,p)$, je diskretní rozdělení na množině $\{0,1, \dots, n\}$ s pravděpodobnostní funkcí

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}, x = 0,1,2, \dots, n. \quad (17)$$

Náhodná veličina X s binomickým rozdělením má parametry:

$$E(X) = np, \quad D(X) = np(1-p).$$

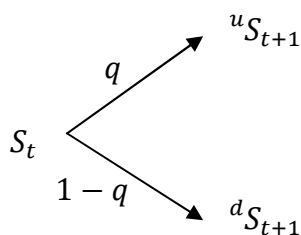
Binomickým rozdělením můžeme modelovat počet úspěchů nastávajících v posloupnosti n nezávisle opakovaných náhodných pokusů, z nichž každý končí úspěchem s pravděpodobností p a neúspěchem s pravděpodobností $1-p$. [18]

Předchozí poznámky ukázaly, že neexistence arbitrážního zisku omezuje cenu opce. Nicméně pouhá neexistence arbitrážního zisku nestačí k určení přesné ceny opce jako funkce podkladového aktiva. K tomu je potřeba přijmout další předpoklady.

Tento model přijímá předpoklad, že podkladové aktivum nabývá pouze jedné ze dvou možných hodnot. Přestože to může vypadat nerealisticky, tento předpoklad vede k vzorci, který umožňuje přesně určit cenu opce. Začneme nejprve s oceněním jednoduché evropské opce na akcii nevyplácející dividendu.

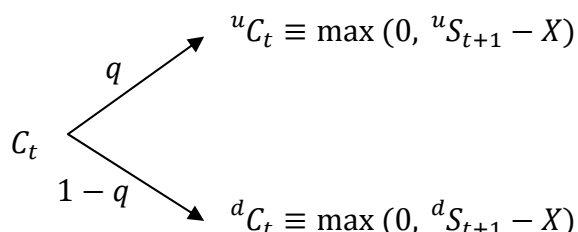
Kromě předpokladu neexistence arbitrážní příležitosti, předpokládá binomický model, že současná cena akcie (S_t) se pohybuje buď nahoru v poměru u , nebo dolů v poměru d , v každé periodě. Pravděpodobnost pohybu nahoru je q a pravděpodobnost pohybu dolů je $1-q$. Hodnotu podkladového aktiva pak můžeme znázornit jako jednoperiodický nebo víceperiodický binomický strom.

4.4.1 Jednoperiodický model

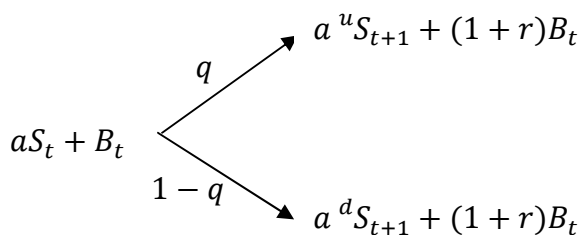


Označme nyní r jako bezrizikovou úrokovou sazbu pro dané období, která je v čase konstantní. Aby se předešlo arbitráži mezi akciami a bezrizikovou investicí, musí platit $d < r < u$.

Pokud C_t je hodnota evropské call opce na akcii a její realizační cena je X . Pak platí:



Jakou hodnotu bude mít C_t jedno období před expirací? Uvažujme portfolio, které obsahuje a podkladového aktiva (např. akcií) a B_t bezrizikového aktiva (např. státních dluhopisů). Portfolio má současnou hodnotu $aS_t + B_t$. Pak se toto portfolio vyvíjí následovně:



Se dvěma cennými papíry (akcie a dluhopis) a dvěma stavy světa (nahoru nebo dolů), a a B_t , může být vytvořeno portfolio tak, aby při jakémkoli vývoji byla replikována hodnota opce, tedy aby se hodnota portfolia rovnala hodnotě opce:

$$a {}^u S_{t+1} + (1+r)B_t = {}^u C_{t+1}$$

$$a {}^d S_{t+1} + (1+r)B_t = {}^d C_{t+1}$$

Odtud si vyjádříme proměnné a a B_t (${}^u S_{t+1}$ lze vyjádřit pomocí intenzity u jako $S_t u$, ${}^d S_{t+1}$ pomocí intenzity d jako $S_t d$, pak změnu (${}^u S_{t+1} - {}^d S_{t+1}$) můžeme zapsat jako $S_t(u - d)$).

$$a = \frac{{}^u C_{t+1} - {}^d C_{t+1}}{{}^u S_{t+1} - {}^d S_{t+1}} = \frac{{}^u C_{t+1} - {}^d C_{t+1}}{S_t(u-d)}$$

$$B_t = \frac{{}^d C_{t+1} {}^u S_{t+1} - {}^u C_{t+1} {}^d S_{t+1}}{({}^u S_{t+1} - {}^d S_{t+1})(1+r)} = \frac{{}^d C_{t+1} u S_t - {}^u C_{t+1} d S_t}{S_t(u-d)(1+r)} = \frac{{}^d C_{t+1} u - {}^u C_{t+1} d}{(u-d)(1+r)}$$

Jelikož s touto strategií dosahujeme stejných výnosů jako při pořízení call opce, musí být pořizovací náklady rovny ceně opce v čase ($T - 1 = t$), tedy

$$C_t = aS_t + B_t$$

Do této rovnice dosadíme získané hodnoty a a B_t a dostaneme vztah:

$$C_t = \frac{{}^u C_{t+1} - {}^d C_{t+1}}{S_t(u-d)} S_t + \frac{{}^d C_{t+1} u - {}^u C_{t+1} d}{(u-d)(1+r)} = \frac{{}^u C_{t+1} - {}^d C_{t+1}}{(u-d)} + \frac{{}^d C_{t+1} u - {}^u C_{t+1} d}{(u-d)(1+r)}$$

$$= \frac{\left(\frac{(1+r_f) - d}{u-d} {}^u C_{t+1} + \frac{u - (1+r_f)}{u-d} {}^d C_{t+1} \right)}{(1+r)}$$

Tento vztah nezávisí na pravděpodobnosti pohybu akcie nahoru nebo dolů q . Vzhledem k tomu, že q určuje očekávanou míru návratnosti akcie, $uq + d(1-q) - 1$, tak q nemusí být známo nebo odhadováno v případě řešení hodnoty opce s nemožností arbitráže. Hodnoty u a d potřebujeme znát, jedná se totiž o velikosti pohybu za jedno období, které určují volatilitu akcie. Ale přesto si můžeme povšimnout, že cena call opce není přímo závislá na investorově vztahu k riziku.

Označíme-li

$$p = \frac{(1+r) - d}{u-d},$$

kde: p ... rizikově neutrální pravděpodobnost růstu,

pak lze původní vzorec zapsat přehledněji jako vztah

$$C_t = \frac{1}{(1+r)} (p {}^u C_{t+1} + (1-p) {}^d C_{t+1}), \quad (18)$$

který umožňuje pravděpodobnostní interpretaci.

Na proměnou p se můžeme dívat jako na pravděpodobnost, neboť $0 < p < 1$. Ve skutečnosti by se tato „pseudo-pravděpodobnost“ p rovnala skutečné

pravděpodobnosti q , pokud by byl investor rizikově neutrální, protože očekávaná návratnost akcie by se rovnala r :

$$[uq + d(1 - q)]S_t = (1 + r)S_t,$$

vyřešením této rovnice dostaneme

$$q = \frac{(1 + r) - d}{u - d} = p.$$

Na pravděpodobnost p se proto můžeme dívat jako na pravděpodobnost růstu hodnoty portfolia v bezrizikovém prostředí s konstantním výnosem r .

4.4.2 Víceperiodický model

V době splatnosti ($t = T$) víme, že cena opce se rovná její vnitřní hodnotě, neboť časová hodnota opce je nulová, takže poslední dvě rovnice budou mít tvar:

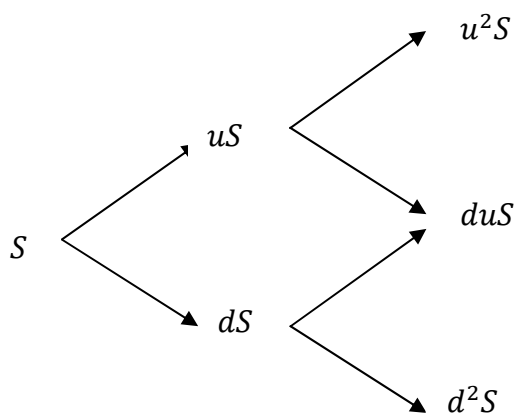
$$a^u S_{T-1} + B_{T-1} = {}^u C_T = \max({}^u S_T - X, 0),$$

$$a^d S_{T-1} + B_{T-1} = {}^d C_T = \max({}^d S_T - X, 0).$$

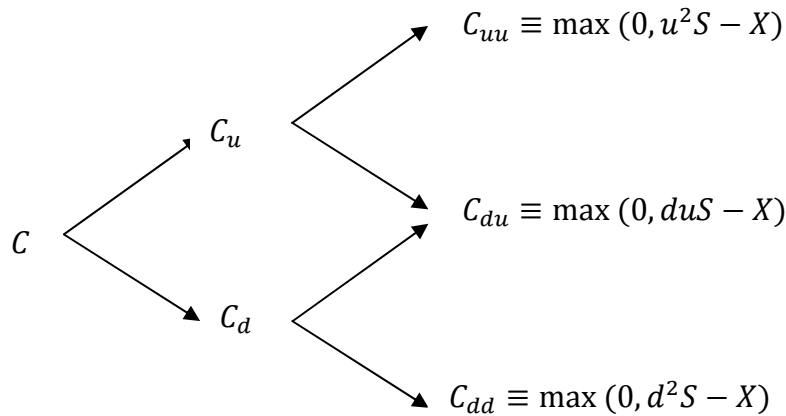
Tyto vztahy poskytují důležitý závěr, že všechny hodnoty opce v době splatnosti dokážeme vypočítat ze známých hodnot cen akcií v době splatnosti a realizační ceny.

Z nichž je možno za použití vztahu (18) spočítat zpětně všechny hodnoty call opce ($C_t, t = (T - 1), \dots, 1, 0$), kdy hodnota C_0 představuje spravedlivou cenu evropské call opce, která byla stanovena replikační strategií.

Nejprve přejdeme k modelu se dvěma periodami do doby splatnosti. Proces ceny akcie je následovný:



, potom proces ceny opce je:



Pro zjednodušení a lepší názornost jsme zavedli označení C_u místo ${}^u C_{t+1}$, analogicky C_d namísto ${}^d C_{t+1}$. V tomto označení budeme pokračovat a opční prémii v dalším období označíme jako C_{uu} , C_{du} a C_{dd} podle toho, v jakém směru se pohybuje.

Využijeme nyní předchozí analýzu a budeme uvažovat pouze jedno období, pak

$$C_u = \frac{pC_{uu} + (1-p)C_{du}}{(1+r)},$$

$$C_d = \frac{pC_{du} + (1-p)C_{dd}}{(1+r)}.$$

Pro druhé období můžeme znovu zopakovat tento krok a zjistit opční prémii jako

$$C = \frac{1}{(1+r)}(pC_u + (1-p)C_d).$$

Při substituci C_u a C_d dostaneme

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(1+r)^2} (p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}) \\ &= \frac{1}{(1+r)^2} (p^2 \max(0, u^2 S - X) + 2p(1-p) \max(0, duS - X) \\ &\quad + (1-p)^2 \max(0, d^2 S - X)). \end{aligned}$$

Můžeme si všimnout, že cena opce závisí na ceně podkladového aktiva, realizační ceně, intenzitě pohybu nahoru a dolu, bezrizikové úrokové míře a době do splatnosti opce

(v tomto případě dvě období). Stejným způsobem můžeme pokračovat pro tři, čtyři, pět, ..., n period do doby splatnosti. Výpočet pro n časových období:

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \max(0, u^j d^{n-j} S - X) \right], \quad (19)$$

kde: j ... počet vzrůstů ceny za období T ,

n ... počet diskrétních intervalů,

$\binom{n}{j}$... binomický koeficient.

Analogicky odvodíme binomický model ocenění put opce:

$$P = \frac{1}{(1+r)^n} \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \max(0, X - u^j d^{n-j} S) \right] \quad (20)$$

4.4.3 Odhad parametrů p, u, d

Jedním z důležitých propočtů je určení a odhad vstupních parametrů p, u, d . Předpokládáme-li, že podkladové aktivum má spojitý vývoj v rizikově neutrálním prostředí, uvažujeme spojitě úročení bezrizikového aktiva s úrokovou mírou δ , časový krok označíme jako $\Delta t = T/n$. Střední hodnota ceny akcie se tedy rovná ceně akcie při bezrizikovém výnosu (uvažujeme dva časové okamžiky, které jsou vzdálené o jeden časový krok):

$$S e^{\delta \Delta t} = p S u + (1-p) S d$$

Dále se uvažuje, že rozptyl akcie v čase, je proporcionálně úměrný délce časového intervalu:

$$p(Su)^2 + (1-p)(Sd)^2 - (pSu + (1-p)Sd)^2 = S^2 \sigma^2 \Delta t.$$

Poslední podmínkou je požadavek beztrendové změny akcie u binomického modelu:

$$ud = 1.$$

Řešením soustavy těchto tří rovnic dostaneme hledané hodnoty:

$$p = \frac{e^{\delta \Delta t} - d}{u - d}, \quad (21)$$

$$u = e^{\sigma \sqrt{\delta \Delta t}}, \quad (22)$$

$$d = e^{-\sigma \sqrt{\delta \Delta t}}. \quad (23)$$

4.4.4 *Binomický model oceňování evropských opcí v SW Mathematica*

V další části textu využijeme software Mathematica k výpočtům cen evropských opcí binomickým modelem a k analýze tohoto modelu. V literatuře lze najít řadu vhodných prací, které jsou věnovány teoretickým vztahům z předchozí kapitoly v různých programových jazycích. Několik z nich je věnováno sestavení algoritmů v SW Mathematica: [31], [4], [5], [26], [33] a [35]. Pro naše účely budeme využívat především [4] a [5].

Začneme se sestavením základního binomického modelu oceňování evropských opcí v SW Mathematica a jeho ověřením jednoduchým příkladem a testovacím příkladem uvedeným v některém ze zdrojů.

```

Clear[statePrices]
statePrices[up_, down_, R_] :=
  Solve[{p * up + q * down == 1, p + q == 1 / R}, {p, q}][[1]]

Clear[binomialCall]
binomialCall[s_, x_, n_] :=
  Sum[
    p^j * q^(n - j) * Binomial[n, j] * Max[s * up^j * down^(n - j) - x, 0], {j, 0, n}] /.
    statePrices[up, down, R]
    
```

V sestaveném modelu je jednoznačně možné identifikovat vzorec (19), který byl odvozen v kapitole 4.4.

Pak už stačí zadat jen hodnoty spotové ceny podkladového aktiva (s), realizační cenu (x), počet období do splatnosti opce (n), bezrizikovou úrokovou míru (R) a velikost pohybu nahoru (up) a dolu ($down$).

Analogicky definujeme algoritmus pro evropskou put opci na akcii nevyplácející dividendy podle vzorce (20)

```

Clear[binomialPut]
binomialPut[s_, x_, n_] :=
  Sum[
    p^j * q^(n - j) * Binomial[n, j] * Max[x - s * up^j * down^(n - j), 0], {j, 0, n}] /.
    statePrices[up, down, R]
    
```

Příklad 2. Předpokládejme, že jsou nám známy údaje o evropské call opci na akcii nevyplácející dividendy, spotová cena akcie je 50 eur, realizační cena je 45 eur, dále nám jsou známy míra posunu up , která činí 1,1, a míra posunu $down$ 0,97. Určete cenu opce, pokud předpokládáme počet období dvě a poté čtyři.

Řešení. Nejprve zadáme údaje ze zadání do modelu podle systému, jakým byly definovány, vypočítáme cenu opce pro dvě období. Viz příloha B.

```
up = 1.1;
down = 0.97;
R = 1.06;
binomialCall[50, 45, 2]
9.95016
```

Cena opce je v tomto případě 9,95016 eur. Poté v zadání změníme jediný parametr pro získání ceny opce pro 4 období.

```
up = 1.1;
down = 0.97;
R = 1.06;
binomialCall[50, 45, 4]
14.361
```

Když jsme zvýšili počet období ze dvou na čtyři, změnila se nám i výrazným způsobem cena, vzrostla na 14,361 eur, což je přibližně o 4,41 eur více než v případě dvou období.

Jako testovací příklad modelu zvolíme velmi jednoduchý příklad, který je uveden v [6, s. 124-125].

Příklad 3. Předpokládejte, že se jedná o evropskou call opci vystavenou na akcii firmy ABC s realizační cenou 1100 Kč. Z historické časové řady tržní ceny této akcie, která nevyplácí dividendy, předpokládejte, že za rok se mohou stát pouze dvě věci: akcie ABC buď stoupne ze své současné, běžné tržní ceny, 1000 Kč na 1250 Kč, nebo klesne na 800 Kč. V tomto případě pro zjednodušení předpokládejte jednoroční úrokovou míru 10% p.a. Ignorujte makléřské provize, poplatky, atd. Určete cenu opce.

Řešení. Zadané hodnoty dosadíme do modelu v SW Mathematica a porovnáme s výsledkem uvedeným v literatuře. Ze zadání vyplývá, že tato akcie v příštím časovém období stoupne o 25% na 1250 Kč nebo klesne o 20% na 800 Kč. Míra *up* tedy činí 1,25 a míra *down* 0,8. Zdrojový kód je možné vidět v příloze B.

```
up = 1.25;
down = 0.8;
R = 1.1;
binomialPut[1000, 1100, 1]
90.9091
```

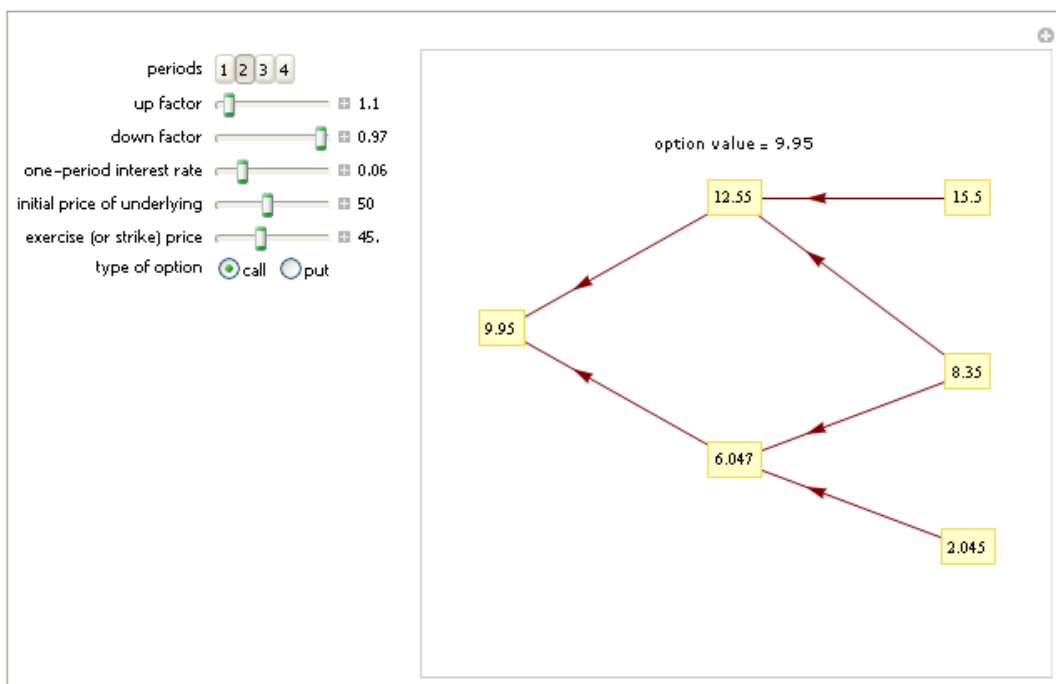
Stejně jako v literatuře je výsledná cena opce 90,90 Kč. Tento jednoduchý testovací příklad nám posloužil k ověření zkonstruovaného modelu.

V rámci „Wolfram Demonstrations Project“ byl Fionou Maclachlan vytvořen projekt s názvem „Binomial Option Pricing Model“ [27] který je dostupný na webových stránkách <http://demonstrations.wolfram.com>. Jedná se o interaktivní vizualizaci konceptu binomického modelu oceňování opcí. Jen pomocí tlačítek je možné měnit jednotlivé parametry modelu a sledovat vývoj ceny přes jednotlivé kategorie. Algoritmus tohoto projektu je uveden v příloze C.

Příklad 4. Zadejte data z příkladu 2 do demonstračního projektu „Binomial Option Pricing Model“ a vypočítejte cenu tímto způsobem.

Řešení. Vrátime se k zadání příkladu 2 a uvedené hodnoty zadáme pomocí tlačítek a výběru z možností do vytvořeného modelu. Nejprve uvažujeme 2 období.

Obr. č. 8 Binomický strom call opce pro dvě období–příklad 4

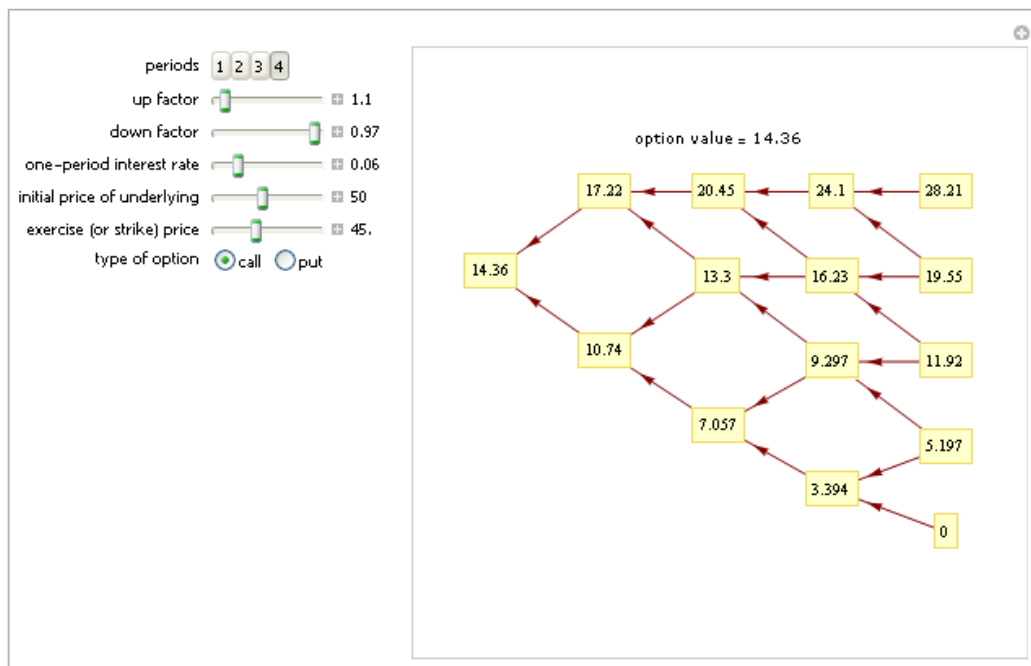


Zdroj: vlastní zpracování na základě demonstračního projektu [27], 2012

Cena evropské call opce vyšla stejně jako při výše uvedeném postupu, a to 9,95 eur. V tomto projektu je vidět nejen výsledná cena opce, ale i jednotlivé trajektorie, jak se cena vyvíjela v jednotlivých obdobích při pohybu nahoru a dolů, což je velmi zajímavé sledovat.

Dále změníme počet období na čtyři.

Obr. č. 9 Binomický strom call opce pro čtyři období – příklad 4



Zdroj: vlastní zpracování na základě demonstračního projektu [27], 2012

Výsledná cena evropské call opce činí 14,36 eur, což nám potvrdilo výsledek výše.

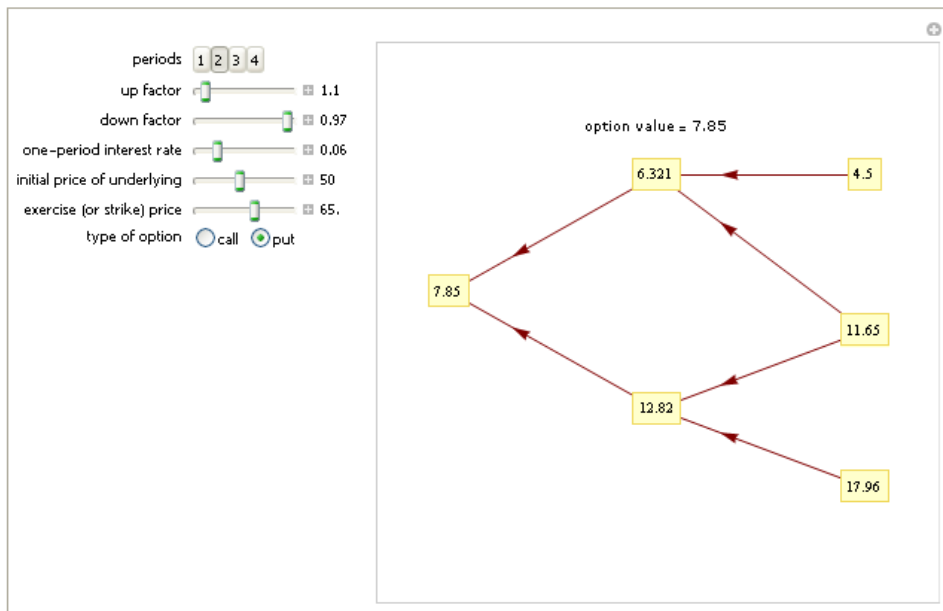
Příklad 5. Uvažujte následující údaje o evropské put opci na akcii nevyplácející dividendy. Spotová cena akcie je 50 eur, realizační cena je 65 eur, dále nám jsou známy míra posunu *up*, která činí 1,1, a míra posunu *down* 0,97. K výpočtu využijte obě metody, jak sestavený model v SW Mathematica, tak i demonstrační projekt. Jaká je cena put opce pro dvě období a pro čtyři období?

Řešení. Analogicky jako v předchozích příkladech dosadíme.

```

up = 1.1;
down = 0.97;
R = 1.06;
binomialPut[50, 65, 2]
: 7.84977
    
```

Obr. č. 10 Binomický strom put opce pro dvě období – příklad 5



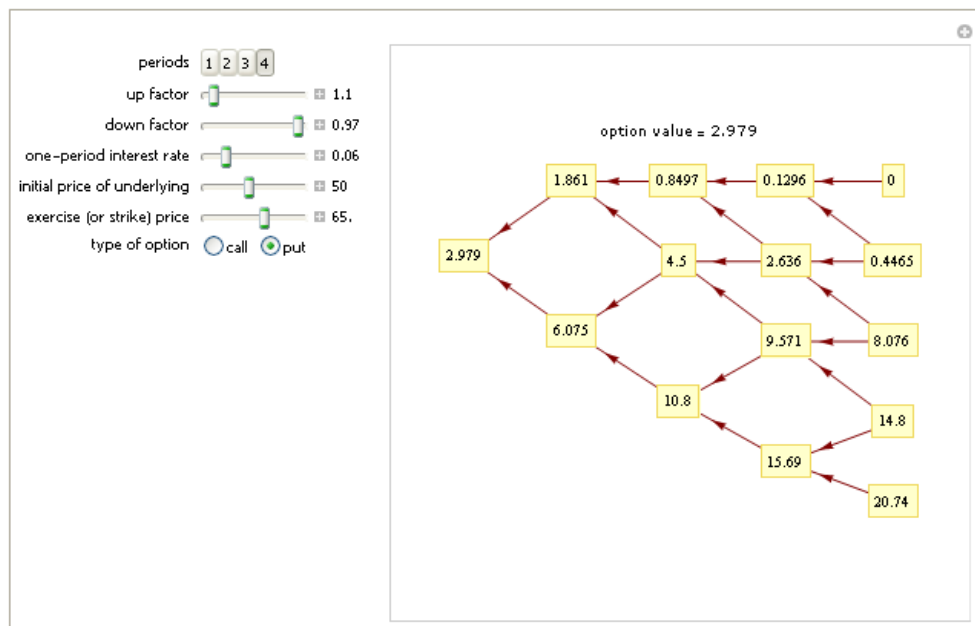
Zdroj: vlastní zpracování na základě demonstračního projektu [27], 2012

Cena evropské put opce se zadanými údaji, pokud máme dvě období, činí 7,85 dolarů.

```

up = 1.1 ;
down = 0.97 ;
R = 1.06 ;
binomialPut[50, 65, 4]
= 2.97906
    
```

Obr. č. 11 Binomický strom put opce pro čtyři období – příklad 4.



Zdroj: vlastní zpracování na základě demonstračního projektu [27], 2012

V tomto případě jsme změnili jediný parametr, a to počet období ze dvou na čtyři období. Na rozdíl od call opce, kdy s větším počtem období cena opce výrazně stoupla, v případě put opce se cena snížila na 2,979 eur, což je téměř o 4,9 eur.

Předchozí analýza byla velmi zjednodušená, v případě demonstračního projektu byl model omezen navíc počtem období na pouhé čtyři, přesto lze pomocí tohoto modelu pochopit zákonitosti oceňování opcí na základě binomického stromu a velmi snadno měnit jednotlivé parametry a pozorovat jejich vliv na cenu opce.

V algoritmu pro ocenění opce sice nejsme omezeni počtem období, ale setkáváme se tu s problémem stanovení hodnoty pohybu *up* a *down*, který je možné odvodit tak, jak to byla ukázáno v kapitole 5.4.3.

Tentokrát ale již nebudeme odhadovat velikost pohybu nahoru a dolu v každé periodě, ale namísto toho použijeme roční historickou volatilitu a úrokovou míru podle vzorce (22) a (23).

```
Clear[up, down, R, P, Q, EuropeanOption, EuropeanCall, EuropeanPut, mean];
up[n_, sigma_, T_] := N[ Exp[ Sqrt[T/n] sigma ] ];
down[n_, sigma_, T_] := 1 / up[n, sigma, T];
R[n_, Rf_, T_] := N[ Exp[ Rf T / n ] ];
P[up_, down_, r_] := N[ (r - down) / (up - down) / r ];
Q[up_, down_, r_] := N[ 1 / r - P[up, down, r] ];
mean[m_List] := Apply[ Plus, m ] / Length[m];
```

S použitím těchto definic můžeme zapsat funkci, která vypočte cenu evropské opce.

```
EuropeanOption[s_, sigma_, T_, Rf_, exercise_Function, n_] :=
Module[{u = up[n, sigma, T], d = down[n, sigma, T],
r = R[n, Rf, T], p, q},
p = P[u, d, r];
q = Q[u, d, r];
Sum[ exercise[s * u^j * d^(n - j)] *
Binomial[n, j] * p^j * q^(n - j), {j, 0, n}];
```

Funkce „EuropeanOption“ má argumenty současnou cenu opce s , počet období n , roční volatilitu σ , dobu do splatnosti T (v letech), roční bezrizikovou úrokovou míru a funkci realizační ceny (*exercise_Function*). Vnitřní proměnné u, d, r, p a q jsou definovány zřejmým způsobem. Poslední operátor je definován jako suma všech možných konečných stavů výplat, kde vahami jsou stavové ceny. Jsme schopni poskytnout přesný vzorec pro stavové ceny, neboť vycházíme z předpokladu, že všechno je statické (konstantní volatilita, úroková míra,...). Toto je vzorec pro evropskou opci obecně.

Nyní se zaměříme na call a put opce, které budou definovány následovně:

```
payoffCall[ s_, X_] := Max[s - X, 0]
EuropeanCall[ X_, s_, sigma_, T_, Rf_, n_] :=
  EuropeanOption[ s, sigma, T, Rf, payoffCall, n]
```

Jedna z funkcí softwaru Mathematica umožňuje zjednodušení zápisu pomocí ryzí funkce $\text{Max}[\# - X, 0]$

```
EuropeanCall[ s_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_] :=
  EuropeanOption[ s, sigma, T, Rf, Max[# - X, 0] &, n];
EuropeanPut[ s_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_] :=
  EuropeanOption[ s, sigma, T, Rf, Max[X - #, 0] &, n];
```

Můžeme využít příklad uvedený v [6], kde jsou počítány hodnoty dvou opcí, obě mají spotovou cenu podkladového aktiva 50, realizační cenu 45, volatilitu 40%, doba do splatnosti je 1 rok a roční bezriziková úroková míra má hodnotu 10%. V obou případech je doba do splatnosti rozdělena na 100 subintervalů.

```
EuropeanCall[50, 45, 0.4, 1, 0.1, 100]
```

```
12.7526
```

```
EuropeanPut[50, 45, 0.4, 1, 0.1, 100]
```

```
3.47028
```

Výsledek souhlasí s výsledkem uvedeným ve zdroji, ověřili jsme si tedy správnost zadaného algoritmu a můžeme ho využít k numerickým experimentům.

Příklad 6. Dnes (9. 4. 2012) je vypsána opce na akcii Apple Inc., bezriziková úroková míra se po celou dobu nemění a činí 2% p.a. Jako volatilitu budeme uvažovat volatilitu ceny za posledních 50 dní. Za jedno období zvolíme jeden týden. Předpokládáme, že akcie po celou dobu nebude vyplácet dividendu. Opce je evropského typu.

Jaká bude cena roční, půlroční a čtvrtletní call a put opce získaná binomickým modelem v případě, že bude realizační cena od 600 do 700 dolarů v krocích po deseti?

Řešení. Nejprve využijeme funkci, kterou máme v SW Mathematica k dispozici „FinancialData“. Tato funkce umožňuje načíst aktuální data z rozsáhlé databáze, ze které je možné získat data o amerických a jiných akciích a finančních instrumentech a obrovské množství dalších dat. Během momentu zjistíme cenu akcii k dnešnímu dni (9.4.2012) a volatilitu ceny akcie za posledních 50 dní.

```
FinancialData["AAPL"] (*Hodnota akcie Apple Inc. ke dni 9.4.2012*)
635.101

FinancialData["AAPL", "Volatility50Day"]
(*Volatilita ceny akcie Apple Inc. za posledních 50 dní*)
0.214019
```

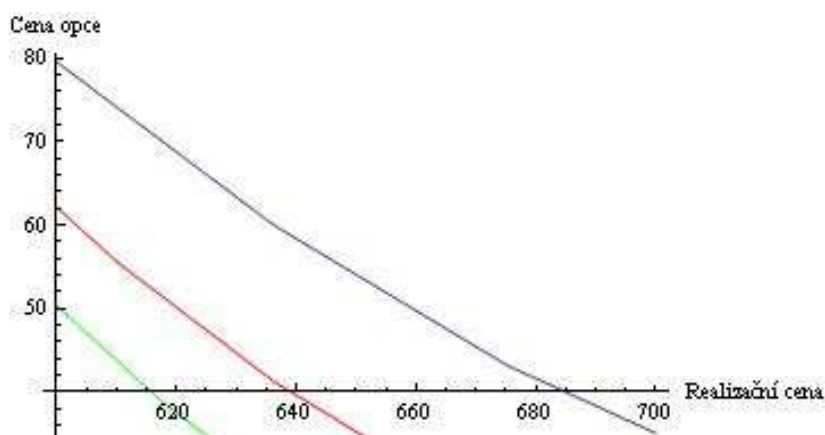
Získané údaje zadáme do výše vytvořeného modelu oceňování opcí binomickým modelem. Výsledky prezentujeme přehledně v tabulce a poté graficky, nejprve pro call a poté pro put opci. Zdrojový kód je možné najít v příloze D.

Tab. č. 4 Ceny roční, půlroční a čtvrtletní call opce- příklad 6

X	$C(t = 1)$	$C(t = 0,5)$	$C(t = 0,25)$
600	79,514	61,6827	50,8693
610	74,1261	56,0028	43,8335
620	68,7382	50,3228	37,2815
630	63,3503	44,6429	32,3339
640	58,3628	39,5322	27,3862
650	54,0542	35,3866	22,4386
660	49,7455	31,241	18,4359
670	45,4369	27,0954	15,5686
680	41,625	23,6307	12,7013
690	38,2517	20,9045	9,83392
700	35,0785	18,1782	7,6595

Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Obr. č. 12 Graficky zpracované výsledky příklad 6 – call opce



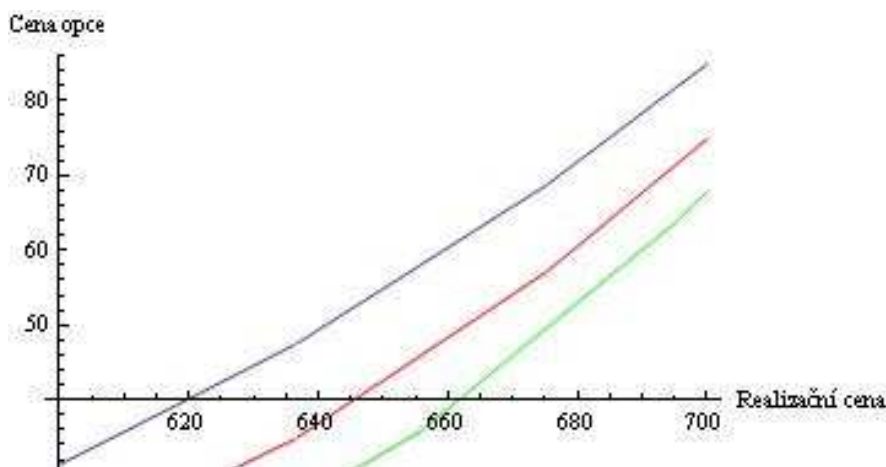
Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Tab. č. 5 Ceny roční, půlroční a čtvrtletní put opce- příklad 6

X	$P(t = 1)$	$P(t = 0,5)$	$P(t = 0,25)$
600	31,3432	19,4226	11,5868
610	35,7573	23,6432	14,5011
620	40,1714	27,8637	17,8993
630	44,5855	32,0843	22,9018
640	49,4	36,8741	27,9042
650	54,8933	42,629	32,9067
660	60,3867	48,3839	38,8542
670	65,88	54,1388	45,9369
680	71,8701	60,5746	53,0197
690	78,3988	67,7489	60,1025
700	84,9275	74,9231	67,8782

Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Obr. č. 13 Graficky zpracované výsledky příklad 6 – put opce



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

V grafu je modrou barvou znázorněna opce se splatností 1 rok, červenou barvou opce se splatností půl roku a zelená barva představuje splatnost tři měsíce.

V případě call opce je cena opce, s nižší dobou do splatnosti, nižší při jakékoli realizační ceně. S rostoucí realizační cenou cena call opce vždy klesá. Pro put opci je situace opačná, opce s delší dobou do splatnosti je levnější pro všechny výše realizační ceny a s rostoucí realizační cenou v případě put opce roste i její cena rychlým tempem.

Příklad 7. Proved'te experiment s cenou evropské opce získanou binomickým modelem takovým způsobem, že zjistíte průměrnou cenu akcie IBM (International Business Machines Corp.) za posledních 50 dní, stejně tak za posledních 50 dní bude pro nás

směrodatná i volatilita. Bezriziková úroková míra je 5%, dohodnutá realizační cena je 200 dolarů. Předpokládáme, že akcie po celou dobu držení opce nevyplácí dividendu. Zjištěnou průměrnou cenu akcie zaokrouhlete na desítky a spočítejte cenu opce pro spotovou cenu o 25 dolarů levnější a o 25 dolarů dražší v krocích po pěti, poté zobrazte graficky závislost ceny opce na spotové ceně pokladového aktiva v daném intervalu. Tento úkol proveďte postupně pro call a put opci s dobou do splatnosti opce 1 rok, půl roku a čtvrt roku, přičemž za jedno období zvolíme jeden den. Využijeme standard 30E/360, což představuje evropskou metodu (každý měsíc má 30 dní, rok 360 dní) viz [14].

Řešení. Pomocí funkce „FinancialData“ získáme zadané údaje.

```
FinancialData["IBM", "Average50Day"]
(*Průměrná cena akcie IBM za posledních 50 dní*)
202.281

FinancialData["IBM", "Volatility50Day"]
(*Volatilita ceny akcie IBM za posledních 50 dní*)
0.102088
```

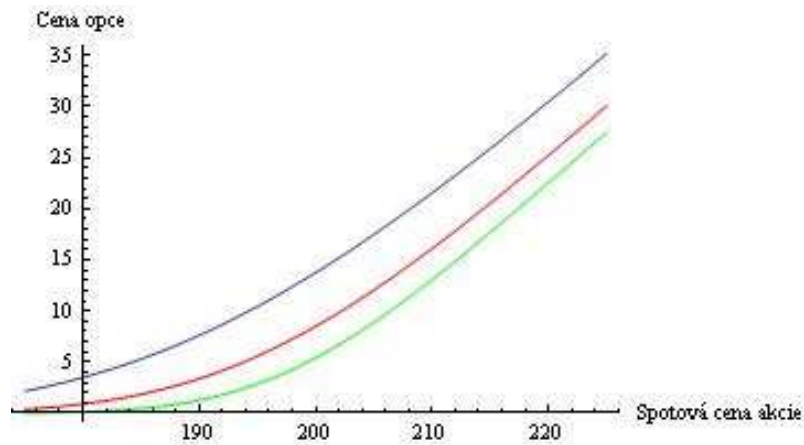
Tyto hodnoty spolu s hodnotami ze zadání dosadíme do vzorce pro oceňování opcí binomickým modelem, viz příloha E, s tím, že průměrnou cenu akcie za posledních 50 dní jsme zaokrouhlili na 200 dolarů, budeme tedy počítat cenu opce pro spotovou cenu od 175 do 225 dolarů.

Tab. č. 6 Ceny roční, půlroční a čtvrtletní call opce- příklad 7.

S	$C(t = 1)$	$C(t = 0,5)$	$C(t = 0,25)$
175	2,16526	0,385735	0,0269396
180	3,49108	0,900537	0,127999
185	5,29847	1,84752	0,457737
190	7,61719	3,37588	1,2738
195	10,4491	5,589	2,87001
200	13,7474	8,48558	5,39838
205	17,4834	12,0441	8,88683
210	21,5628	16,1084	13,0711
215	25,917	20,5462	17,696
220	30,4802	25,2336	22,5499
225	35,1951	30,0727	27,5018

Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Obr. č. 14 Graficky zpracované výsledky příklad 7 – call opce



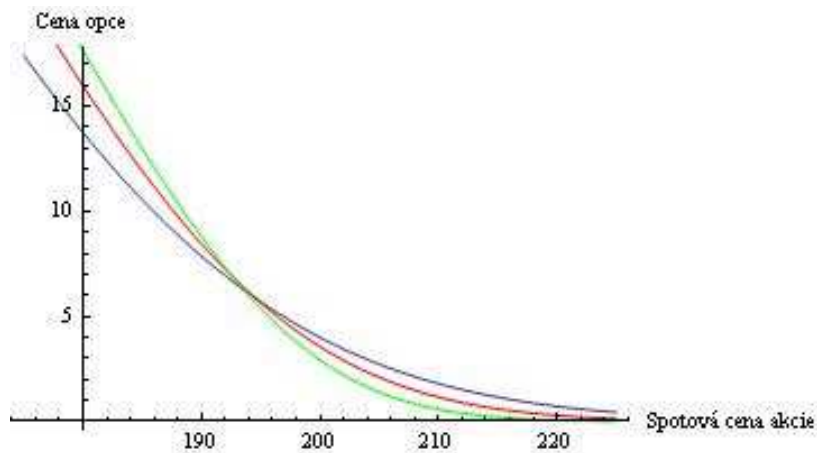
Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Tab. č. 7 Ceny roční, půlroční a čtvrtletní put opce- příklad 7.

S	$P(t = 1)$	$P(t = 0,5)$	$(t = 0,25)$
175	17,4111	20,4477	22,5425
180	13,737	15,9625	17,6436
185	10,5444	11,9095	12,9733
190	7,86307	8,43786	8,78936
195	5,69498	5,65098	5,38557
200	3,99332	3,54756	2,91394
205	2,72925	2,10612	1,40239
210	1,80873	1,17039	0,586672
215	1,16292	0,608146	0,211573
220	0,726124	0,295621	0,0654856
225	0,440957	0,134722	0,0174041

Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Obr. č. 15 Graficky zpracované výsledky příklad 7 – put opce



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

V grafu je zobrazena modrou barvou roční opce, červenou barvou půlroční opce a zelenou barvou tříměsíční opce.

Provedený experiment ukázal, že cena call opce s delší dobou do splatnosti bude vyšší než cena call opce s nižší dobou do splatnosti při všech zkoumaných spotových cenách podkladového aktiva. Od té chvíle, kdy spotová cena akcie překročí hodnotu realizační ceny opce, začne její cena růst výrazně rychleji s každým dalším zvýšení spotové ceny aktiva.

Co se týče put opce, v grafu můžeme pozorovat, že v cenách opcí pro různé doby do splatnosti nejsou tak výrazné rozdíly, jak u call opce. Dokonce ve vyšší spotové ceny akcie kolem 195 dolarů se křivky protínají a výše cen je téměř stejná. Do tohoto bodu byla nejdražší cena s dobou do splatnosti 3 měsíce, to se ale změnilo, neboť má tato křivka jiný sklon, a od ceny 195 dolarů je cena tříměsíční opce nejlevnější ze třech porovnávaných opcí. Čím vyšší je spotová cena akcie, tím se cena opce více blíží nule.

4.5 Black-Scholesův model oceňování opcí

V roce 1997 byla udělena Nobelova cena za ekonomii dvěma americkým profesorům – Robertu Mertonovi z Harvardské univerzity a Myronovi Scholesovi ze Stanfordské univerzity. Tuto cenu obdrželi za jejich průkopnický a fundamentální přínos k teorii oceňování derivátů. Klíčovou prací na toto téma uveřejnili v roce 1973 Myron Scholes a Fischer Black v časopise *Journal of Political Economy* pod názvem *The pricing of Options and Corporate Liabilities*. Základní metoda pro výpočet ceny opce nese jejich jméno – Black-Scholes Option Pricing Model. Tato teorie oceňování opcí je široce uznávaná jako nejúspěšnější teorie nejen v oblasti financí, ale ve všech oblastech ekonomie.

Pro odvození Black-Scholesova modelu je nutné nejprve stanovit předpoklady modelu. Samotné odvození parciální diferenciální rovnice sestává ze třech částí. V první části se určí stochastická rovnice, podle které se chová podkladové aktivum. Ve druhé části odvodíme stochastickou parciální diferenciální rovnici pro vývoj ceny podkladového aktiva. A ve třetí části sestavíme portfolio s neutrálním vztahem k riziku. Tímto způsobem získáme Black-Scholesovu parciální diferenciální rovnici. Řešením této rovnice je možné získat při stanovení určitých podmínek po technických úpravách Black-Scholesův vzorec pro opční prémii evropské opce.

Budeme postupovat na základě několika zahraničních i českých zdrojů, a to [21], [36], [10], [11], [38], [1] a přednášky z předmětu Finanční deriváty [25]. Pro jednoduchost a lepší názornost se budeme zabývat pouze oceňováním opcí na akcie.

Ve své práci z roku 1973 Black a Scholes stanovili předpoklady na finančním trhu [1] :

- Obchody jsou prováděny kontinuálně.
- Bezriziková úroková míra je známá a konstantní v čase.
- Aktivum nevyplácí dividendy.
- Neexistují transakční náklady při prodeji nebo nákupu aktiva nebo opce, ani daně.
- Aktiva jsou dokonale dělitelná.
- Neexistují žádné sankce pro short prodej a je povoleno plné využití výnosů.
- Neexistuje příležitost bezrizikové arbitráže.

Black-Scholesův vzorec vyjadřuje matematicky opční prémii jako funkci pěti proměnných: promptní ceny podkladového aktiva S_t , realizační ceně opce X , době do splatnosti $T - t$, volatilitě ceny akcie σ a bezrizikové úrokové míře r . Pro odvození základního tvaru Black-Scholesova vzorce pro opční prémii evropských opcí na akcii nevyplácející dividendu využijeme model akciových cen založený na Wienerově procesu.

4.5.1 Wienerův proces a jeho vlastnosti

Cena akcie je jev náhodně se měnící v čase a pro jeho modelový popis se používají náhodné procesy. Přestože se údaje měřené v čase ve financích zaznamenávají v diskrétních časových okamžicích (např. jednotlivé obchodní dny) a v diskrétních jednotkách, přesto se často pro jejich popis volí spojité náhodné procesy ve spojitém čase. [10]

Pro modelování cen akcií jsou využívány především markovské náhodné procesy. U markovského procesu je jedinou relevantní hodnotou pro předpověď hodnot procesu jeho současná hodnota bez ohledu na hodnoty minulé. Záznamy minulých hodnot jsou relevantní z hlediska určení charakteristik modelu při jeho konstrukci. Nejčastěji používaným makrovským procesem je Wienerův proces, znám též jako Brownův pohyb.

Aby se nějaká veličina řídila Wienerovým procesem, musí splňovat dva předpoklady.

Prvním předpokladem je, že změna Δz během krátkých časových intervalů Δt je

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

kde: ε ... náhodná veličina se standardizovaným normálním rozdělením $\phi(0,1)$.

Druhým předpokladem je, že hodnota Δz pro libovolné krátké časové intervaly Δt jsou navzájem nezávislé.

Z prvního předpokladu plyne, že také přírůstek Δz má normální rozdělení s momenty $E(\Delta z) = 0, \sigma^2 = \Delta t$ a $\sigma = \sqrt{\Delta t}$.

Druhý předpoklad znamená, že se jedná o markovský proces.

Tyto vlastnosti můžeme převést na změny hodnot proces z během relativně delšího časového intervalu T (což můžeme označit jako $z(T) - z(0)$). Wienerův proces budeme považovat za sumu změn z v N krátkých intervalech o délce Δt ($N = \frac{T}{\Delta t}$) pak můžeme zapsat:

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t},$$

kde: ε_i ... navzájem nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením $\phi(0,1)$, pro $i = 1, 2, \dots, N$

Z druhého předpokladu Wienerova procesu, že ε_i jsou navzájem nezávislé, plynou i momenty přírůstku, střední hodnota je 0, rozptyl $N\Delta t = T$ a směrodatná odchylka \sqrt{T} . Je vidět, že rozptyl přírůstku Wienerova procesu je přímo roven délce časového intervalu T .

Pomocí Wienerova procesu je možné definovat zobecněný Wienerův proces x jako

$$dx = a dt + b dz, \tag{24}$$

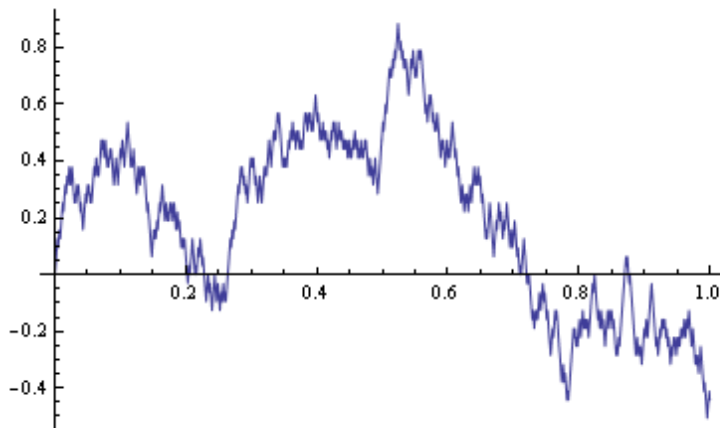
kde: a ... trendový koeficient,

b ... difuzní koeficient.

Koeficient a představuje směrnici, koeficient b je stochastická složka, jakýsi „šum“. Zobecněný Wienerův proces popisuje vývoj proměnných s normálním rozdělením

se směrnicí a za jednotku času a s rozptylem b^2 za jednotku času, přičemž a a b^2 jsou konstantní.

Obr. č. 16 Ukázka Brownova pohybu



Zdroj: vlastní zpracování v programu Mathematica podle přednášek [25], 2012

V případě, že trendový a difuzní koeficient nebudou v čase konstantní, nazývá se Wienerův proces x difuzní proces neboli **Itôův proces**

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz, \quad (25)$$

kde: $a(x, t)$... trendový koeficient v čase t ,

$b(x, t)$... difuzní koeficient v čase t .

K Itôovu procesu se váže Itôovo lemma, které je využíváno při oceňování finančních derivátů.

4.5.2 Itôovo lemma

Itôovo lemma hraje významnou roli v oceňování finančních derivátů. Umožňuje sestrojovat diferenciální transformace stochastických procesů. Podle Itôova lemmatu platí pro libovolnou dostatečně hladkou funkci G difuzního procesu x v čase t vztah

$$dG(x, t) = \left(\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} \right) dt + b(x, t) \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} dz, \quad (26)$$

Libovolná funkce difuzního procesu je tedy také proces s trendovým koeficientem:

$$\left(\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} \right)$$

a difuzním koeficientem

$$b(x, t) \frac{\partial G(x, t)}{\partial x}.$$

Pokud tržní cenu akcie nevyplácející dividendy v čase t označíme jako S_t , pak můžeme příslušný zobecněný Wienerův proces (24) aplikovat pro tržní cenu akcie ve tvaru (pro jednoduchost nebudeme značit časové indexy):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \quad (27)$$

kde: μ ... spojitá míra zisku akcie,

σ ... volatilita ceny akcie.

Potom podle Itôova lemmatu platí:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \mu S \frac{\partial G}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 (x, t)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial G}{\partial x} dz. \quad (28)$$

Nyní využijeme Itôovo lemma k odvození procesu, který se řídí funkcí $\ln S$, pokud se cena akcie řídí podle (27)

Stanovíme

$$G = \ln S.$$

Protože

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0,$$

podle rovnice (28) dostaneme

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (29)$$

Protože μ a σ jsou konstantní, rovnice ukazuje, že se také $\ln P$ řídí zobecněným Wienerovým procesem s trendovým koeficientem $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ a difuzním koeficientem σ .

Pro změnu $\ln S$ mezi časem 0 a budoucím datem T je proto normální rozdělení:

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T), \sigma^2 T \right] \quad (30)$$

nebo

$$\ln S_T \sim \phi \left[\ln S_0 \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T), \sigma^2 T \right], \quad (31)$$

kde: S_T ... cena akcie v budoucím datu T ,

S_0 ... je cena akcie v čase 0,

$\phi(\mu, \sigma^2)$... distribuční funkce normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 .

Rovnice (31) ukazuje, že $\ln S_T$ má normální rozdělení. Proměnná má logaritmicko-normální rozdělení, pokud přirozený logaritmus této veličiny má normální rozdělení. Proto se v rámci modelu chování ceny akcie, který jsme vyvinuli, řídí tržní cena akcie **logaritmicko-normálním rozdělením**.

Navíc směrodatná odchylka logaritmu ceny akcie je lineární funkcí \sqrt{T} , proto vzrůstá nejistota ohledně chování logaritmu ceny akcie s rostoucím časovým horizontem.

4.5.3 *Black-Scholesův model oceňování opcí*

Protože opční prémie C_t je mimo jiné funkcí ceny podkladového aktiva (akcie) a času, dostaneme podle Itôova lemmatu:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(x, t)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial x} dz.$$

Tyto vztahy lze přepsat do přírůstkového tvaru:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z$$

a

$$\Delta C = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(x, t)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial C}{\partial x} \Delta z.$$

Sestrojíme nyní portfolio tak, abychom mohli vyloučit z jeho přírůstkového vztahu náhodný člen. Potom by se takové portfolio chovalo deterministicky.

Portfolio (P) je tvořené krátkou pozicí call opce na uvažovanou akcii a $\partial C / \partial S$ kusy této akcie. Pak je cena tohoto portfolia:

$$P = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S$$

a její přírůstek během časového intervalu je možné vyjádřit jako

$$\Delta P = -\Delta C + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S = \left(-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta t.$$

Snaha vyloučit ze vztahu náhodný člen byla úspěšná, neboť opravdu vypadl člen s přírůstkem Wienerova procesu Δz . Toto portfolio se tedy nyní chová deterministicky a k popisu jeho zhodnocování můžeme použít bezrizikovou úrokovou míru r

$$\Delta P = Pr\Delta t.$$

Porovnáním třech posledních vzorců dostaneme tzv. **Black-Scholesovu diferenciální rovnici** pro cenu call opce ve tvaru

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC \quad (32)$$

s okrajovou podmínkou

$$C_T = \max(S_T - X, 0).$$

Způsob řešení Black-Scholesovy rovnice spočívá v transformaci na ekvivalentní problém, který je neutrální vůči riziku. To je možné na základě toho, že uvažovaná rovnice neobsahuje žádný faktor závisející na rizikových preferencích investora. Z toho důvodu je možné vycházet z libovolných rizikových preferencí.

Speciálně lze tedy vycházet z neutrality vůči riziku s bezrizikovou úrokovou mírou r a hledat opční prémii jako

$$C_t = e^{-r(T-t)} E[\max(S_T - X, 0)].$$

Vzhledem k tomu, že se střední hodnota počítá při bezrizikové úrokové míře, tak můžeme psát:

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_X^\infty (S_T - X) f(S_T) dS_T,$$

kde: $f(S_T)$... pravděpodobnostní funkce hustoty ceny akcie S_T .

S využitím vzorce (31) dostaneme po technických úpravách **Black-Scholesův vzorec pro opční prémii evropské call opce nevyplácející dividendy:**

$$C_t = S_t \Phi(d_1) - X e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (33)$$

kde: Φ ... distribuční funkce normálního normovaného rozdělení,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Black-Scholesův vzorec pro opční prémii evropské put opce na akcii nevyplácející dividendu získáme jednoduše na základě put-call parity:

$$P_t = X e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1) = X e^{-r(T-t)} [1 - \Phi(d_2)] - S_t [1 - \Phi(d_1)] \quad (34)$$

4.5.4 *Black-Scholesův model v SW Mathematica*

K řešení Black-Scholesova modelu oceňování opcí je vhodné využít SW Mathematica. I pro Black-Scholesův model je možné najít v literatuře několik vhodných zdrojů, ve kterých je teoreticky zpracován Black-Scholesův model v různých programovacích jazycích. Pro nás budou směrodatné zdroje zabývající se sestavením algoritmů v SW Mathematica: [31], [4], [5], [35] a [26]. Black-Scholesovu rovnici (33) tak, jak je uvedena výše můžeme zapsat v SW Mathematica následujícím způsobem pro call opce na akcii nevyplácející dividendu:

```
Clear[S, X, σ, t, r, q];
cdfNorm[x_] := (1 + Erf[x / Sqrt[2]]) / 2;
d1[S_, σ_, X_, t_, r_] := ((r + σ * σ / 2) * t + Log[S / X]) / (σ * Sqrt[t]);
d2[S_, σ_, X_, t_, r_] := d1[S, σ, X, t, r] - σ * Sqrt[t];
BScall[S_, σ_, X_, t_, r_] :=
    S * cdfNorm[d1[S, σ, X, t, r]] - X * Exp[-r * t] * cdfNorm[d2[S, σ, X, t, r]];
```

V případě put opce bude vzorec (34) vypadat takto:

```
BSput[S_, σ_, X_, t_, r_] :=
    -S * cdfNorm[-d1[S, σ, X, t, r]] + X * Exp[-r * t] * cdfNorm[-d2[S, σ, X, t, r]]
```


S použitím programu Mathematica pak můžeme jednoduše stanovit cenu opce a vytvářet grafy závislosti opční prémie stanovené na základě Black-Scholesovy rovnice. To můžeme ilustrovat na testovacím příkladu uvedeném v [6].

Příklad 8. Uvažujte situaci, kde je tržní cena předmětné akcie 6 měsíců přes splatnosti opce 420 eur. Realizační cena opce je 400 eur, bezriziková úroková míra je 10% p.a. a volatilita 20% p.a. Dále abstrahujeme od transakčních nákladů.

Řešení. Jednoduchým způsobem dosadíme hodnoty ze zadání do vzorce pro call a poté pro put opce a porovnáme s výsledkem uvedeným ve zdroji, ze kterého byl testový příklad čerpán.

```
BScall[420, 0.2, 400, 0.5, 0.1]
47.5942
```

V [6] je uvedena výsledná cena call opce 47,55 eur. Drobná neshoda je dána zaokrouhlováním v postupu příkladu v literatuře.

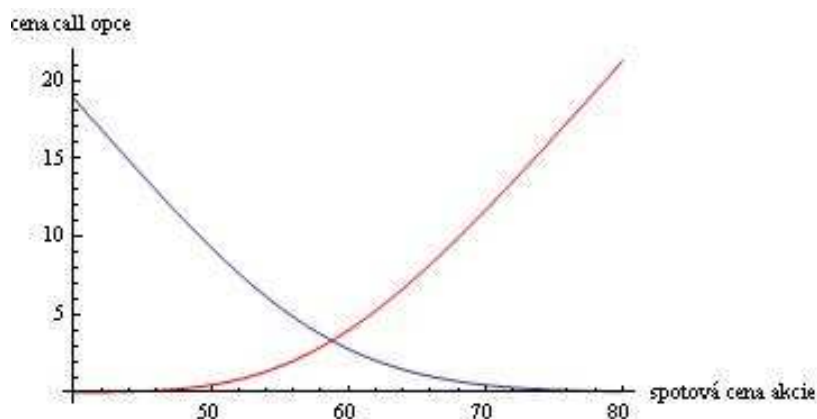
```
BSput[420, 0.2, 400, 0.5, 0.1]
8.08599
```

Stejně i vypočtená cena put opce v literatuře 8,05 eur se kvůli zaokrouhlování mírně rozlišuje. Můžeme tedy říct, že testovací příklad nám pomohl ověřit správnost sestaveného modelu.

Příklad 9. Předpokládejte opci, jejímž podkladovým aktivem je akcie nevyplácející dividendy do doby expirace, jejíž realizační cena je \$60, volatilita ceny akcie je 20%, doba do expirace je 6 měsíce (0,5 roku), roční bezriziková úroková míra činí 4%, úročení je spojitě. Porovnejte a graficky znázorněte vliv jednotlivých faktorů kromě spotové ceny akcie ovlivňujících cenu opce v Black-Scholesově modelu u evropské call a put opce na akcii nevyplácející dividendy.

Řešení. Celý postup řešení je možné vidět v příloze F. Na tomto místě ukážeme pouze jednotlivé výsledné grafy a porovnáme, jak který faktor působí na put a call opci. V každém grafu je červenou barvou znázorněna call opce a modrou barvou put opce.

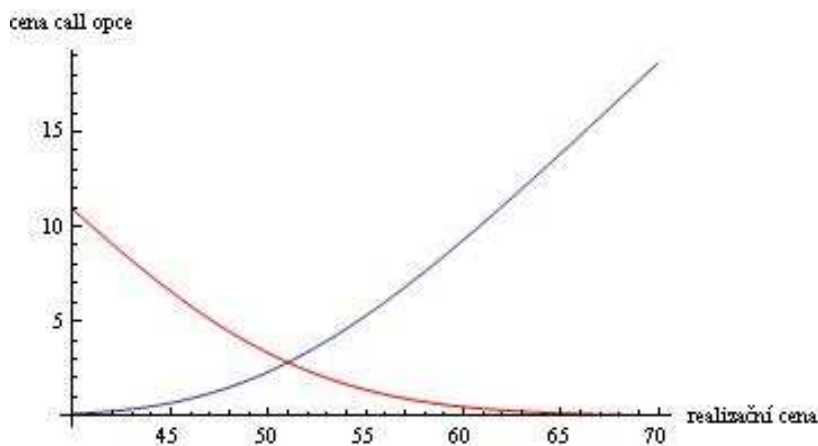
Obr. č. 17 Vliv spotové ceny na změnu ceny call a put opce



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Vliv spotové ceny na výši opční prémie je jednoznačný. V případě call opce s rostoucí spotovou cenou akcie vždy roste její cena. Naopak cena put opce s rostoucí spotovou cenou akcie vždy klesá. Růst call opce a pokles put opce má téměř stejnou rychlost. Proto je graf téměř symetrický. Přibližně v místě realizační ceny se ceny put a call opce rovnají.

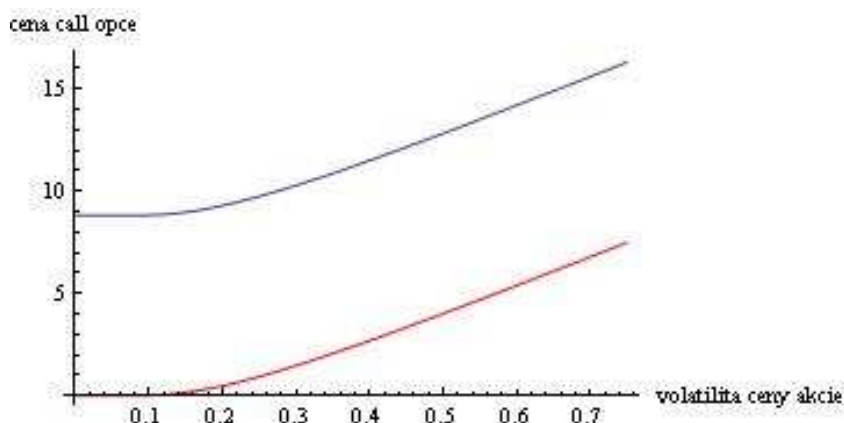
Obr. č. 18 Vliv realizační ceny na změnu ceny call a put opce



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Změna realizační ceny působí u call a put opce protichůdně. Zatímco v případě call opce s růstem realizační ceny cena opce rychle klesá, v případě put opce cena s růstem realizační ceny neustále roste. Tempa růstu (poklesu) jsou ale různá, cena put opce s růstem realizační ceny roste rychleji, jak je patrné z grafu.

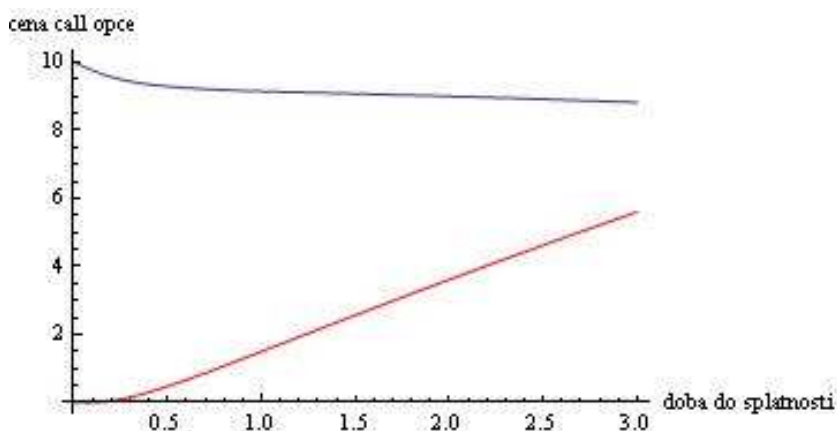
Obr. č. 19 Vliv volatility ceny akcie na změnu ceny call a put opce



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Pokud uvažujeme růst rizikovosti ceny akcie, tak je logické, že s větší nejistotou se stávají dražšími jak ceny call, tak i cena put opce. Cena call opce nám v tomto případě vychází výrazně nižší než cena put opce, přesto mají oba typy velmi podobný sklon křivek.

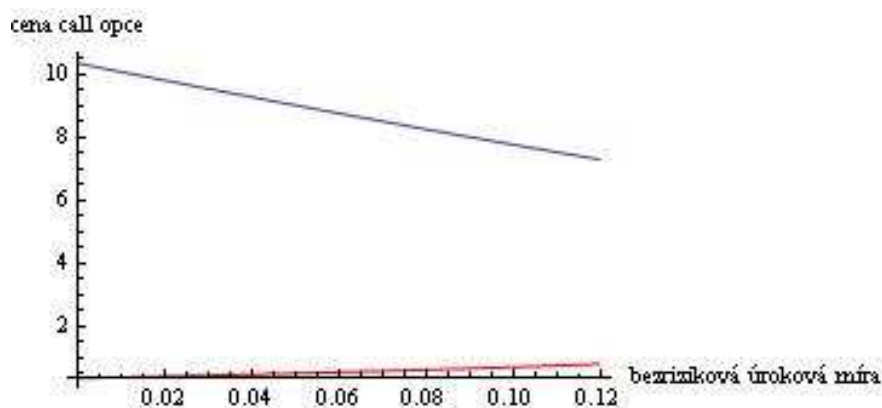
Obr. č. 20 Vliv doby do splatnosti opce na změnu ceny call a put opce



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

S rostoucí dobou do splatnosti opce roste cena call opce, zatímco cena put opce klesá. Tento faktor tedy působí na cenu call a put opce opačně. Cena put opce klesá po celou dobu prodlužování doby do splatnosti, přestože se při porovnání s růstem call opce, zdá pokles minimální.

Obr. č. 21 Vliv bezrizikové úrokové míry na změnu ceny call a put opce



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

I bezriziková úroková míra má vliv na změnu ceny opce, její účinek je u call a put opce opačný. U call opce s růstem bezrizikové úrokové sazby roste i cena opční prémie, v případě put opce je situace opačná.

Ukázali jsme si tak na příkladu, jak je možné prostřednictvím SW Mathematica provádět různé experimenty s Black-Scholesovým modelem. Stejně tak by bylo možné znázornit tento příklad oceněný binomickým modelem a závěry ohledně působení jednotlivých faktorů na cenu opce by byly stejné.

Stejným způsobem je možné provádět během chvíle experimenty nejrůznějšího typu, potenciál SW Mathematica je nejen v tomto směru obrovský. A jistě by toto bylo využitelné pro všechny účastníky finančního trhu. A to nejen k určení tzv. spravedlivé ceny opce, ale k pochopení souvislostí a fungování mechanismu nejen Black-Scholesova modelu.

Zajímavé je také využití funkce „Plot3D“, která nám umožní vytvořit graf závislosti opční na prémie na dvou faktorech zároveň. Ukázka je uvedena v příloze G, kvůli rozsahu ovšem není uveden tento příklad v textu.

4.5.5 Citlivosti opcí - Greeks

Vliv některých faktorů jsme si již naznačili v příkladu 9, k přesnější analýze ale existují tzv. Greeks, což jsou citlivosti opcí neboli míry, které měří vliv změny jednotlivých faktorů, které ovlivňují cenu opce. Jejich název vychází z řeckých názvů těchto měr – gama, delta, rho, theta, vega. Používají se nejen u opcí, ale u opcí je jejich využívání nejrozšířenější.

Citlivosti v této kapitole jsou odvozeny z Black-Scholesova modelu pro call a put opci. Výpočet jednotlivých měr není složitý, protože se většinou jedná o derivaci teoretické opční prémie vždy podle příslušného faktoru. Kvantifikuje tak přibližnou lineární závislost opční prémie na daném faktoru.

Znalosti získané v předmětu Kvantitativní finance a Finanční deriváty umožnily využít software Mathematica k velmi názornému vyobrazení měr citlivosti, jak v dvourozměrném tak i trojrozměrném grafu, použité algoritmy jsou uvedeny v příloze H.

Delta Δ

Delta popisuje citlivost opce na změnu ceny podkladového aktiva. Vyjadřuje, o kolik se změní cena opce, změní-li se cena podkladového aktiva o jednotku.

$$\Delta_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = \Phi(d_1), \quad (42)$$

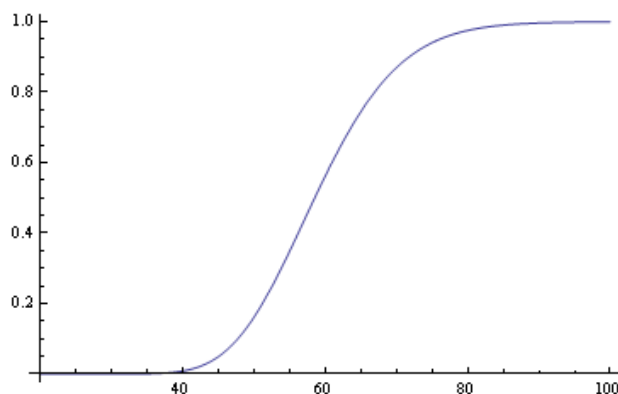
kde: Δ_t^C ... citlivost call opce na změnu ceny podkladového aktiva v čase t .

$$\Delta_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial S_t} = \Phi(d_1) - 1, \quad (43)$$

kde: Δ_t^P ... citlivost put opce na změnu ceny podkladového aktiva v čase t .

Pomocí programu Mathematica graficky zobrazíme míru citlivosti delta. Uvažujme příklad, kdy máme call opci na akcii nevyplácející dividendy s realizační cenou 60 eur, zbývající čas do splatnosti jsou čtyři měsíce ($t=0,3$), roční bezriziková úroková míra je 4% a volatilita je 29%. V grafu je znázorněna citlivost ceny opce – míra delta (osa y) na změnu spotové ceny podkladového aktiva (osa x).

Obr. č. 22 Grafické zobrazení míry citlivosti delta

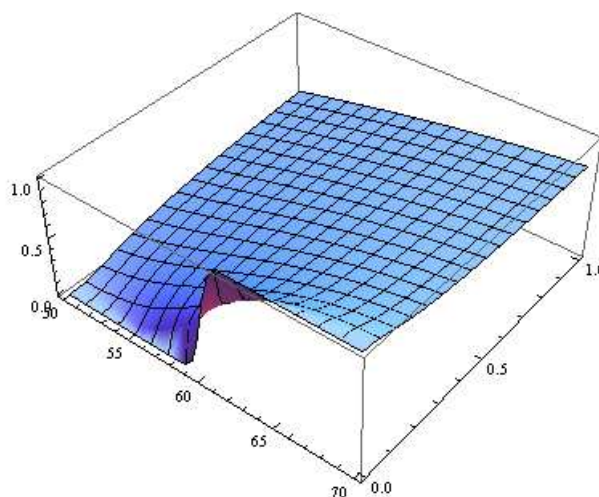


Zpracování: vlastní podle přednášky KEM/FDE, 2012

Jak je možné vidět v grafu delta call opce dosahuje hodnot [0,1]. Nejvyšší hodnoty nabývá delta call opce v případě, že je opce „in the money“.

Nyní se podíváme na míru citlivosti delta v trojrozměrném zobrazení, kdy do původního grafu navíc přidáme osu znázorňující čas zbývající do expirace.

Obr. č. 23 3D graf míry citlivosti delta



Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

Je možné pozorovat, že se zkracující se dobou splatnosti se v okolí realizační ceny delta zvyšuje, a je tedy citlivější na změnu ceny podkladového aktiva.

Gama Γ

Gama popisuje citlivost míry delty na změnu ceny podkladového aktiva.

$$\Gamma_t^C = \frac{\partial \Delta_t^C}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = \frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}, \quad (44)$$

kde: Γ_t^C ...citlivost míry delta call opce na změnu ceny podkladového aktiva v čase t .

$\varphi(d_1)$... hustota pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení:

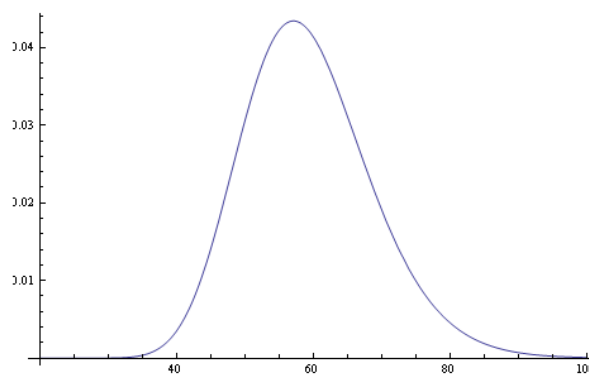
$$\varphi(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

$$\Gamma_t^P = \frac{\partial \Delta_t^P}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 P_t}{\partial S_t^2} = \frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}, \quad (45)$$

kde: Γ_t^P ... citlivost míry delta put opce na změnu ceny podkladového aktiva v čase t .

Pro grafické zobrazení míry gama využijeme stejně údaje jako v příkladu použitým u míry citlivosti delta. Dvourozměrný graf ukazuje vývoj míry gama v závislosti na změně spotové ceny.

Obr. č. 24 Grafické zobrazení míry citlivosti gama

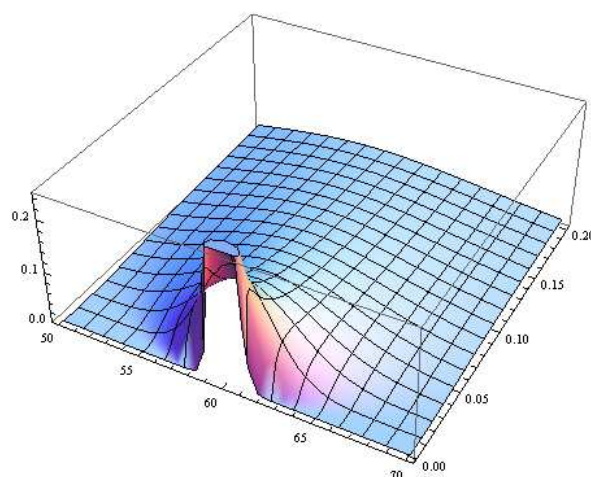


Zdroj: vlastní zpracování podle KEM/FDE, 2012

V grafu je možné pozorovat, že gama dosahuje nejvyšší hodnoty, když je opce „at the money“.

Nyní opět přejdeme k trojrozměrnému zobrazení, kde další dimenzí je doba do splatnosti opce.

Obr. č. 25 3D graf míry citlivosti gama



Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

Je pozorovatelné, že při zkracování doby do splatnosti opce se míra gama zvyšuje.

Omega Ω

Omega nebo také faktor páky měří pružnost ceny opce vůči změně kursu podkladového aktiva.

$$\Omega_t^C = \frac{\partial C_t / C_t}{\partial S_t / S_t} = \Delta_t^C \frac{S_t}{C_t} = \Phi(d_1) \frac{S_t}{C_t}, \quad (46)$$

kde: Ω_t^C ... pružnost ceny call opce vůči změně kursu podkladového aktiva v čase t .

$$\Omega_t^P = \frac{\partial P_t / P_t}{\partial S_t / S_t} = \Delta_t^P \frac{S_t}{P_t} = \Phi[(d_1) - 1] \frac{S_t}{P_t}. \quad (47)$$

kde: Ω_t^P ... pružnost ceny put opce vůči změně kursu podkladového aktiva v čase t .

Rho ρ

Rho popisuje změnu citlivosti opční prémie na změnu bezrizikové úrokové míry.

$$\rho_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial r} = XT e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (48)$$

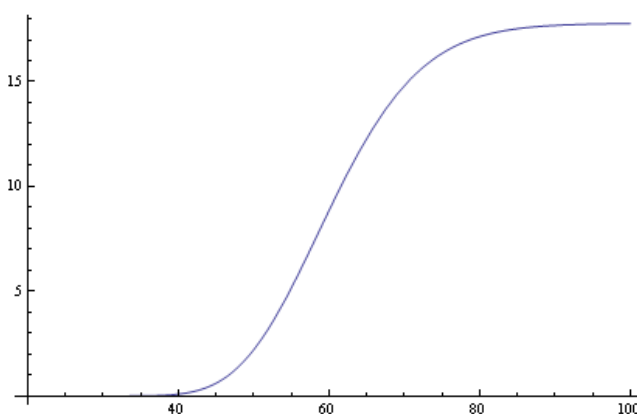
kde: ρ_t^C ... citlivost ceny call opce na změnu bezrizikové úrokové míry v čase t .

$$\rho_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial r} = -XT e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) \quad (49)$$

kde: ρ_t^P ... citlivost ceny put opce na změnu bezrizikové úrokové míry v čase t .

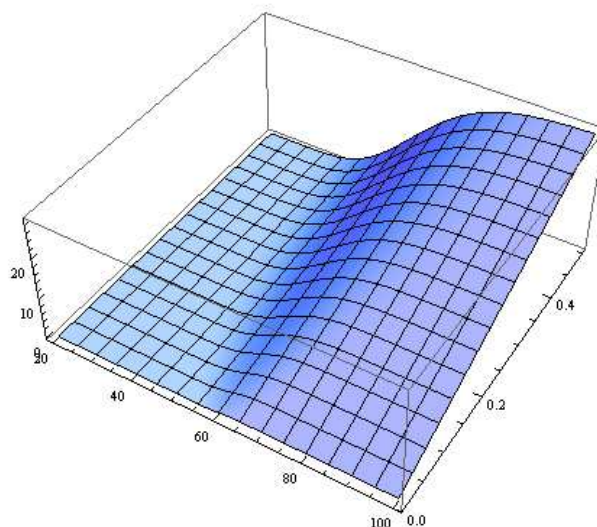
Míru citlivosti rho zobrazíme ve dvou- a trojrozměrném grafu, s využitím údajů výše.

Obr. č. 26 Grafické zobrazení míry citlivosti rho



Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

Obr. č. 27 3D graf míry citlivosti rho



Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

Theta Θ

Theta vyjadřuje citlivost ceny opce na změnu doby do splatnosti opce.

$$\theta_t^C = -\frac{\partial C_t}{\partial(T-t)} = -\frac{S\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{(T-t)}} - Xr_f e^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad (50)$$

kde: θ_t^C ... citlivost ceny call opce na změnu doby do splatnosti v čase t .

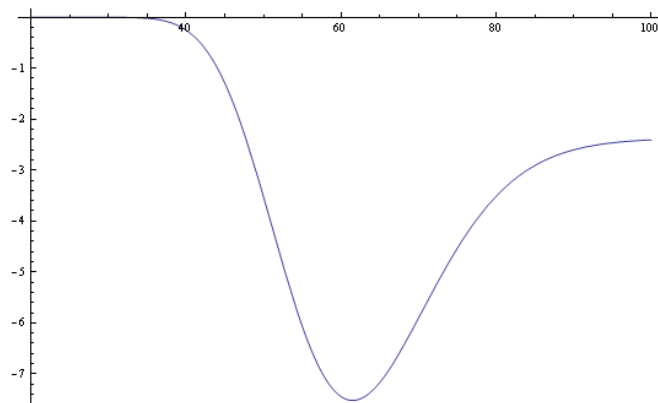
$$\theta_t^P = -\frac{\partial P_t}{\partial(T-t)} = -\frac{S\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{(T-t)}} - Xr_f e^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad (51)$$

kde: θ_t^P ... citlivost ceny put opce na změnu doby do splatnosti v čase t .

S ubíhajícím časem klesá hodnota opce, theta měří pokles hodnoty opce.

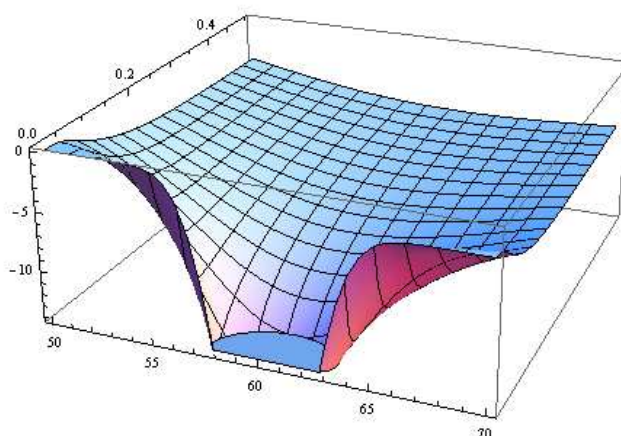
I míru theta je možné zobrazit pomocí grafu, uvažujeme stejné parametry jako u předchozích měř citlivosti.

Obr. č. 28 Grafické zobrazení míry citlivosti theta



Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

Obr. č. 29 3D grafické zobrazení míry citlivosti theta



Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

Theta je ve většině případů záporná, kromě evropské put opce na akcii nevyplácející dividendu, pokud je „in the money“, a evropská call opce, která vyplácí vysokou dividendu a je „in the money“.

Vega v

Vega popisuje citlivost opční prémie na změnu volatility ceny podkladového aktiva.

$$v_t^c = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = \varphi(d_1) S_t \sqrt{(T-t)}, \quad (52)$$

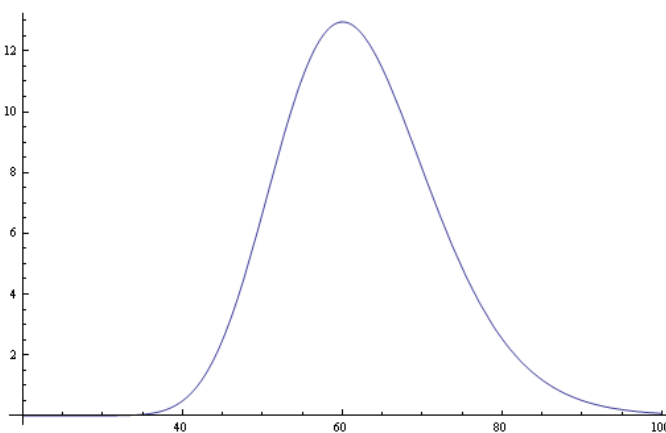
kde: v_t^c ... citlivost ceny call opce na změnu volatility ceny podkladového aktiva v čase t .

$$v_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial \sigma} = \varphi(d_1) S_t \sqrt{(T-t)}, \quad (53)$$

kde: v_t^P ... citlivost ceny put opce na změnu volatility ceny podkladového aktiva v čase t .

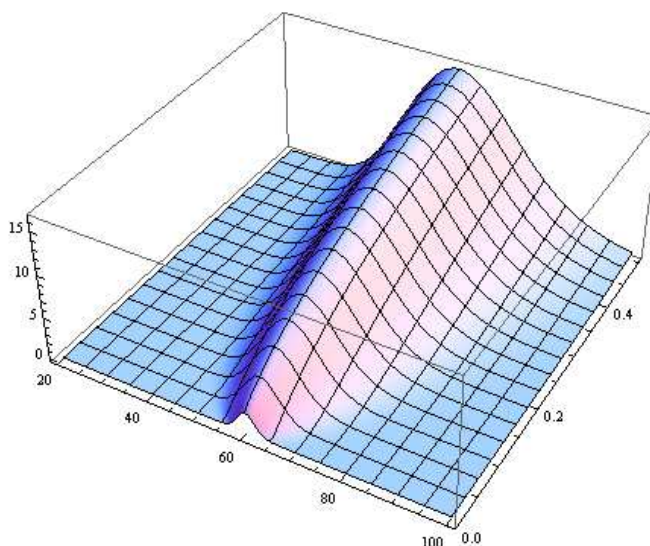
Míru citlivosti je též možné zobrazit s využitím dvou a trojrozměrného grafu při zachování nezměněných parametrů.

Obr. č. 30 Grafické zobrazení míry citlivosti vega



Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

Obr. č. 31 3D graf míry citlivosti vega



Zdroj: vlastní zpracování podle přednášek KEM/FDE, 2012

V grafech je možné pozorovat, že nejvyšší citlivost na změnu volatility ceny podkladového aktiva mají opce, které jsou „at the money“, pro opce „in the money“ a „out of the money“ se citlivost snižuje. A se zkracující se dobou do splatnosti opce se míra vega snižuje.

4.5.6 Modifikace Black-Scholesova vzorce

V předchozí části kapitoly jsme definovali základní Black-Scholesův vzorec na oceňování opcí na akcii nevyplácející dividendu, který slouží k pochopení základních souvislostí a fungování tohoto modelu. V praxi se ovšem takto zjednodušený model téměř nevyskytuje. Proto se Black-Scholesův vzorec dočkal mnohých modifikací, některé z nich zde jen krátce nastíníme.

Black-Scholesův vzorec pro opční prémii na akcii vyplácející dividendu

V případě, že budeme uvažovat o call a put opci na akcii vyplácející dividendu kontinuálně, pak můžeme vzorec přepsat do podoby:

$$C_t = S_t e^{-d(T-t)} \Phi(d_1) - X e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (35)$$

$$P_t = X e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t e^{-d(T-t)} \Phi(-d_1), \quad (36)$$

kde: d ... konstantní roční intenzita dividendového výnosu ve spojitém čase.

Vzorce (35) a (36) jsme získali tak, že jsme od vzorce pro akcii nevyplácející dividendu odečetli od spotové ceny akcie počáteční hodnoty dividend vyplácených do splatnosti opce.

Black-Scholesův vzorec pro opční prémii na futures

Black-Scholesův vzorec je možné modifikovat i pro opce na futures, nejprve uvedeme vzorec pro call a poté pro put opci.

$$C_t = e^{-r(T-t)} [F_t \Phi(d_1) - X \Phi(d_2)], \quad (37)$$

$$P_t = e^{-r(T-t)} [X \Phi(-d_2) - F_t \Phi(-d_1)], \quad (38)$$

kde:
$$d_1 = \frac{\ln(F_t/X) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

F_t ... cena futures v čase t .

Z toho je možné jednoduše odvodit put-call paritu:

$$P_t + F_t e^{-r(T-t)} = C_t + X e^{-r(T-t)}. \quad (39)$$

Garman-Kohlhagenův vzorec pro opční prémii měnových opcí

Black-Scholesův vzorec modifikovali v roce 1983 Garman a Kohlhagen na vzorec pro opční prémii měnových opcí. V podstatě rozšířili Black-Scholesův vzorec o přítomnost dvou úrokových měr pro každou uvažovanou měnu. [28] Vzorec pro call opce:

$$C_t = S_t e^{-r_f(T-t)} \Phi(d_1) - X e^{-r_d(T-t)} \Phi(d_2), \quad (40)$$

kde: r_d ... domácí bezriziková úroková míra,

r_f ... zahraniční bezriziková úroková míra.

Vzorec pro put opci:

$$P_t = X e^{-r_d(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t e^{-r_f(T-t)} \Phi(-d_1). \quad (41)$$

4.6 Binomický model versus Black-Scholesův model

S využitím SW Mathematica můžeme porovnat opční prémie stanovené binomickým modelem a opční prémie stanovené Black-Scholesovým modelem.

Příklad 10. Porovnejte cenu evropské call a put opce na akcii nevyplácející dividendu získanou binomickým modelem s cenou opce získanou Black-Scholesovým modelem. Využijte data z příkladu 7 s tím rozdílem, že uvažujte jen půlroční opci a za období binomického stromu vezměte postupně nejprve 2 týdny, 1 týden a nakonec 1 den. Výsledky prezentujte v tabulce, rozdíl mezi cenami pak porovnejte graficky.

Řešení. Využijeme vzorec pro binomický model oceňování a vzorec pro Black-Scholesův model, který již byl vytvořen. Do vzorců dosadíme zadaná data a postupně vypočítáme podle zadání, výsledky jsou uvedeny v následující tabulce. Zdrojový kód je uveden v příloze I.

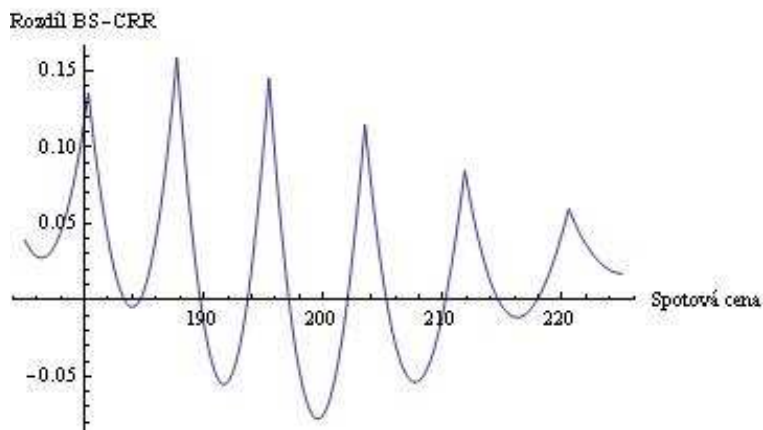
Tab. č. 8 Cena call opce podle Black-Scholesova modelu a podle binomického modelu s různou délkou období - příklad 10.

S	BS	CRR		
		(t = 180/14)	(t = 180/7)	(t = 180)
175	0,387604	0,348045	0,376147	0,385735
180	0,903775	0,785859	0,899252	0,900537
185	1,8493	1,84263	1,85786	1,84752
190	3,37593	3,39144	3,39493	3,37588
195	5,58444	5,48294	5,59927	5,589
200	8,4939	8,56895	8,48489	8,48558
205	12,0406	12,0272	11,9965	12,0441
210	16,1042	16,1128	16,103	16,1084
215	20,5447	20,5493	20,5991	20,5462
220	25,2344	25,5493	25,2429	25,2336
225	30,0741	30,057	30,0724	30,0727

Zdroj: vlastní zpracování, 2012

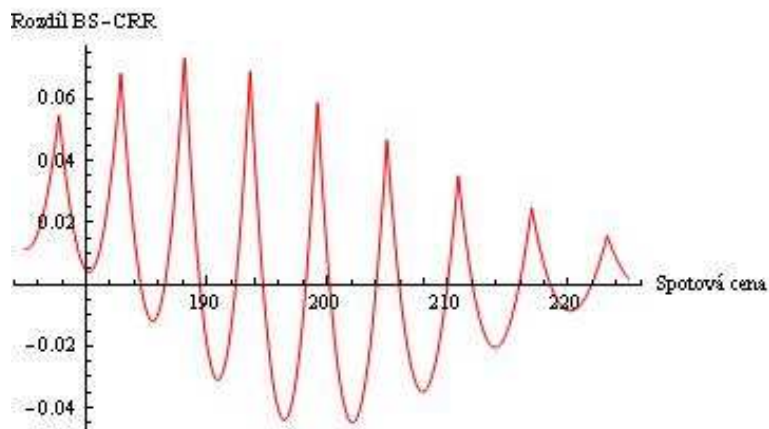
V tabulce si můžeme povšimnout, že výsledky obou modelů vychází podobné, rozdíly jsou v desetinách centů. Pro lepší interpretaci výsledků v tabulce graficky zobrazíme rozdíly mezi jednotlivými cenami získanými binomickým modelem pro různou délku období a Black-Scholesovým modelem v intervalu od 175 do 225 dolarů.

Obr. č. 32 Rozdíl mezi Black-Scholesovým modelem a binomickým modelem pro období 2 týdny – call opce



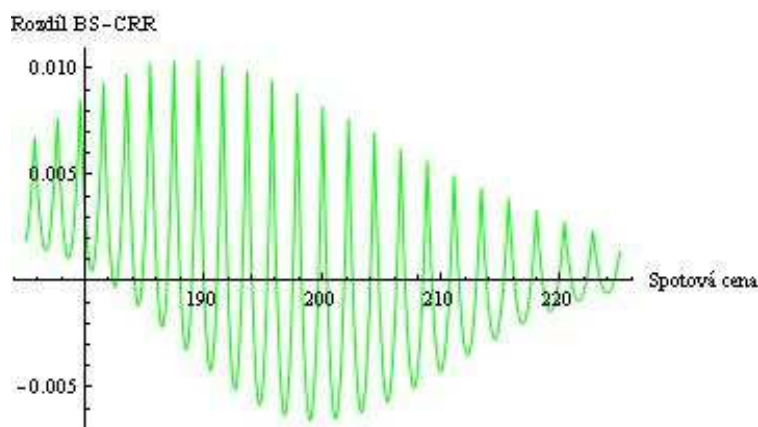
Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Obr. č. 33 Rozdíl mezi Black-Scholesovým modelem a binomickým modelem pro období 1 týden – call opce



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

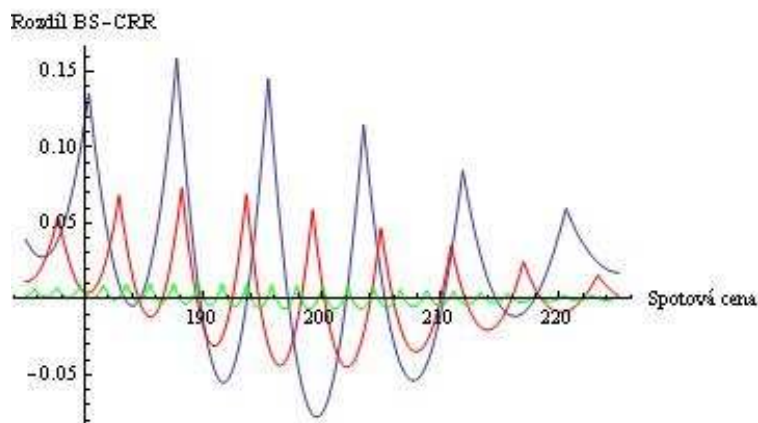
Obr. č. 34 Rozdíl mezi Black-Scholesovým modelem a binomickým modelem pro období 1 den – call opce



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Pomocí grafu jsme zjistili, že rozdíl mezi Black-Scholesovým modelem a binomickým modelem (neboli CRR-modelem) je významně ovlivněn počtem období, na které je rozdělen interval do splatnosti. Rozdíly probíhají v „zubech“, které odpovídají počtu období a se zvyšujícím se počtem období, a tedy se zkracujícím se intervalem, klesá rozdíl mezi oběma zkoumanými modely. Pro lepší představu ještě ukážeme tyto tři grafy v jednom grafu, aby byly jasně patrné rozdíly. Barva zůstává zachována.

Obr. č. 35 Porovnání rozdílů mezi Black-Scholesovým modelem a binomickým modelem pro období 2 týdny, 1 týden a 1 den – call opce



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Nyní je naprosto přesně vidět, jak se zvyšujícím se počtem období klesají rozdíly v cenách získaných jak binomickým tak i Black-Scholesovým modelem. Pro období jednoho den jsou rozdíly již velmi malé.

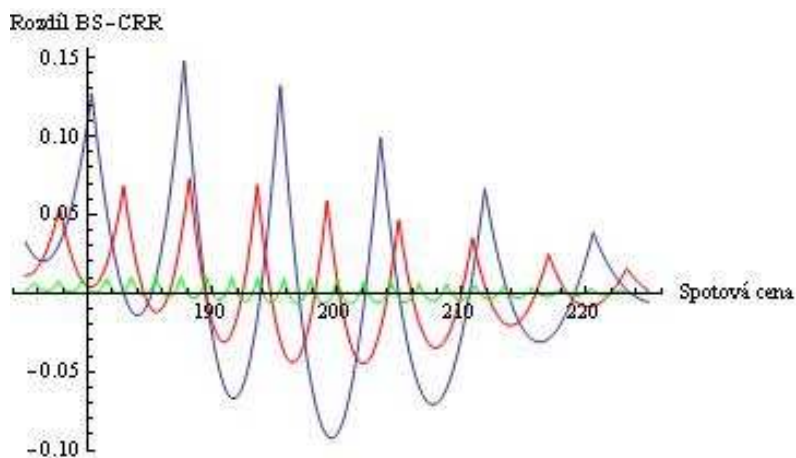
Stejnou situaci ještě vypočítáme pro put opci a poté graficky znázorníme.

Tab. č. 9 Cena put opce podle Black-Scholesova modelu a podle binomického modelu s různou délkou období - příklad 10.

S	BS	CRR		
		($t = 180/14$)	($t = 180/7$)	($t = 180$)
175	20,4496	20,4168	20,4381	20,4477
180	15,9658	15,8562	15,9612	15,9625
185	11,9113	11,9145	11,9198	11,9095
190	8,43791	8,4649	8,45692	8,43786
195	5,64642	5,55797	5,66125	5,65098
200	3,55588	3,64556	3,54688	3,54756
205	2,10259	2,10541	2,05844	2,10612
210	1,16616	1,19254	1,16496	1,17039
215	0,60671	0,630609	0,621101	0,60815
220	0,29636	0,273255	0,304865	0,29562
225	0,13612	0,141508	0,13436	0,13472

Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Obr. č. 36 Porovnání rozdílů mezi Black-Scholesovým modelem a binomickým modelem pro období 2 týdny, 1 týden a 1 den – put opce



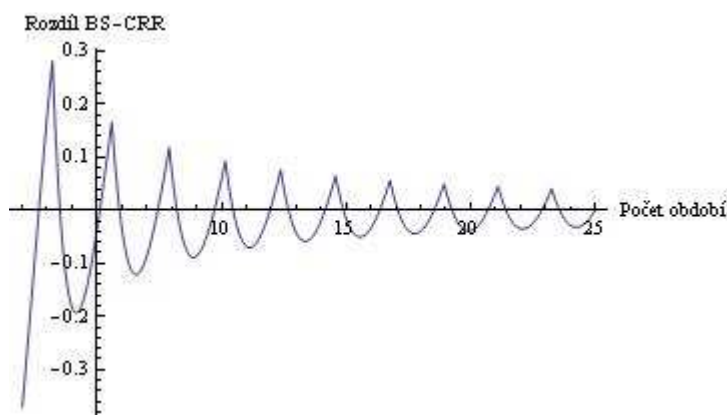
Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Situace pro put opci je prakticky totožná s call opcí.

Příklad 11. Na základě předchozího příkladu graficky zobrazte, jak se zmenšování časových intervalů, tedy s rostoucím počtem období, na které je doba do splatnosti rozdělena, konverguje cena získaná binomický modelem k ceně získané Black-Scholesovým modelem.

Řešení. Pomocí SW Mathematica zformulujeme funkci, která zobrazí, jak se změní rozdíl mezi cenou vypočítanou podle Black-Scholesova modelu a podle binomického modelu při rostoucí počtu období, na které je interval do doby splatnosti rozdělen. Celý algoritmus je uveden v příloze I. Pro 25 období vypadá graf takto:

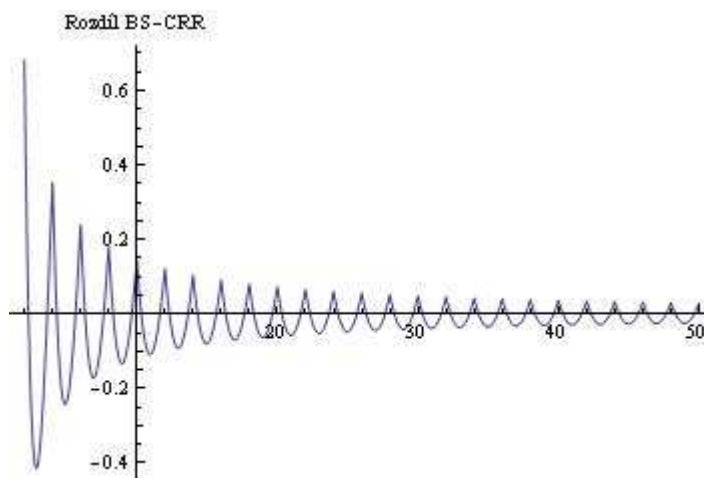
Obr. č. 37 Rozdíl BS a CRR podle počtu období – do 25



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

A v případě dvojnásobného počtu období, 50:

Obr. č. 38 Rozdíl BS a CRR podle počtu období – do 50



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Pro větší počet období by již byl výpočet velmi náročný, ale jak je vidět tak se rozdíl neustále zvyšuje, tudíž jsme prokázali, že diskrétní relativně jednoduchý binomický model za určitých okolností, tedy při dostatečně velkém n , konverguje k Black-Scholesově modelu. Zvolením dostatečně velkého počtu období se v podstatě přibližuje ke spojitosti procesu Black-Scholesova modelu.

Hlavní výhoda BS spočívá v rychlosti, můžeme počítat obrovské množství cen opcí ve velmi krátkém čase. Zatímco binomický model není vhodný ani s použitím dnešních nejrychlejších počítačů ke kalkulacím tisíců cen během několika vteřin.

5. Modely oceňování amerických opcí

Oceňování amerických opcí je nesmírně složitou záležitostí. Je možné stanovit meze pro opční prémii call a put opce. Ale vzhledem k tomu, že je možné americkou opci uplatnit prakticky kdykoli, v jakémkoli časovém okamžiku, je její přesné stanovení téměř nemožné. Existují některé modely, které se snaží cenu americké opce co nejvíce přiblížit, ale není možné najít takový, který by byl naprosto přesný. Z tohoto důvodu a také kvůli značné složitosti se v této kapitole budeme zabývat pouze binomickým modelem oceňování amerických opcí a naznačíme Black-Scholesův model, který lze použít pro americké opce jen ve velmi omezené míře.

5.1 Meze pro opční prémii americké call opce

Pro americkou opci call na akcii nevyplácející dividendy je opční premie shodná s opční premií evropské opce. Neboť pokud by byla cena americké opce vyšší než cena evropské opce, pak by bylo pro investora výhodnější předčasné uplatnění opce, přitom by jeho zisk byl $S_t - X$. Ale jelikož musí v každém okamžiku platit $C_t \geq S_t - Xe^{-i(T-t)} > S_t - X$, bylo by výhodnější tuto opci prodat. Možnost předčasného splacení tedy nepřináší žádnou výhodu a musí platit, že americká opční premie se rovná té evropské.

5.2 Meze pro opční prémii americké put opce

Opční premie americké opce může být nejen rovna, ale i významně vyšší než opční premie evropské opce. Pokud opci investor uplatní předčasně a peníze uloží (získá tak $Xe^{i(T-t)}$), tak za určitých okolností může mít vyšší zisk, než kdyby opci držel do doby expirace.

Meze pro opční prémii jsou tak následující:

$$\max(X - S_t, 0) \leq P_t \leq X. \quad (54)$$

V případě akcie vyplácející dividendy už neplatí ani pro americkou call, že bude jednoznačně nevýhodné předčasné uplatnění.

5.3 Put-call parita americké opce

Put-call parita pro americké opce na akcii nevyplácející dividendy:

$$S_t - X \leq C_t - P_t \leq S_t - X e^{-r(T-t)}. \quad (55)$$

Put-call parita pro americké opce na akcii nevyplácející dividendy:

$$S_t - X - D_t \leq C_t - P_t \leq S_t - X e^{-r(T-t)}. \quad (56)$$

5.4 Binomický model oceňování amerických opcí

Doposud jsme pomocí binomického modelu oceňovali pouze evropské opce, nyní přejdeme k americkým opcím. Tento proces spočívá v tom, že opět postupujeme odzadu, ale u amerických opcí v každém kroku zkoumáme, zda bude výhodné opci uplatnit. Pokud nebude opce uplatněna v dřívějším kroku, pak bude cena americké opce stejná jako cena evropské opce.

Musíme tedy vzít v úvahu možnost uplatnění opce do zralosti. To závisí na vnitřní hodnotě opce. Rovnice vnitřní hodnoty tedy bude modifikována takto [38],

$$C_t = \max[VH_t; (1+r)^{-dt}(C_{t+dt}^u p + C_{t+dt}^d (1-p))]. \quad (57)$$

5.4.1 CRR model v SW Mathematica

Stejně jako u modelů v kapitole 5.4.4 a 5.5.3 se necháme i u vytvoření binomického modelu oceňování amerických opcí v SW Mathematica inspirovat v literatuře [4], [31], [35] a [33].

Oceňování americké opce od evropské se liší tím, že je možné ji uplatnit kdykoli. Otázkou je, kdy je výhodné americkou opci uplatnit? Odpověď je v zásadě jednoduchá. Známe cenu opce, pokud je uplatněna až v době expirace. Den před expirací řešíme dilema, zda opci uplatnit nebo počkat. Pokud opci uplatníme dříve, získáme hodnotu opce, která je dána současnou cenou akcie. Pokud ale opci neuplatníme, budeme dále držet opci, jejíž hodnota na konci dalšího dne bude buď ve stavu *up* nebo ve stavu *down*.

Při rozhodování budeme postupovat tím způsobem, že spočteme hodnotu opce k poslednímu dni, a to tak, že vynásobíme hodnotu opce ve stavu *up* pravděpodobností p a hodnotu opce ve stavu *down* pravděpodobností q . Tuto hodnotu pak porovnáme

s hodnotou opce v případě, že by byla uplatněna den předtím. Rozhodnutí pak záleží na tom, která z těchto dvou hodnot je vyšší.

Nyní přejdeme k sestavení algoritmu pro ocenění americké opce. Nejprve definujeme „AmericanOption“ jako funkci pěti proměnných, stejně jako v případě evropských opcí. V tomto případě ale využijeme velmi silný aparát, a to rekursivní funkci. Elementárním a všeobecně známým příkladem rekursivní funkce je faktoriál.

Rozdíl v algoritmu spočívá v použití funkce „OpRecurse“. Definujeme tedy cenu opce rekursivně. Na úrovni n použijeme realizační cenu jako definici, na všech ostatních úrovních by se mělo zvolit maximum mezi opcemi „naživu“ (vážený součet cen dalších období, které už jsou vypočítány) a její skutečnou hodnotou, která se rovná konečným výplatám vypočítaným ze současné hodnoty akcie.

```

up[n_, sigma_, T_] := N[Exp[Sqrt[T/n] sigma]];
down[n_, sigma_, T_] := 1 / up[n, sigma, T];
R[n_, Rf_, T_] := N[Exp[Rf T / n]];
P[up_, down_, r_] := N[(r - down) / (up - down) / r];
Q[up_, down_, r_] := N[1 / r - P[up, down, r]];
AmericanOption[s_, n_, sigma_, T_, Rf_, exercise_Function] :=
Module[{u = up[n, sigma, T],
        d = down[n, sigma, T],
        r = R[n, Rf, T], p, q, OpRecurse},
  p = P[u, d, r]; q = Q[u, d, r];
  OpRecurse[node_, level_] :=
    OpRecurse[node, level] = If[level == n, exercise[s * d^node * u^(level - node)],
      Max[{p, q} * {OpRecurse[node, level + 1], OpRecurse[node + 1, level + 1]},
        exercise[s * d^node * u^(level - node)]];
  OpRecurse[
    0,
    0];

```

Poté můžeme definovat americkou call a put opci, stejně jako u evropské opce

```

AmericanCall[X_, s_, n_, sigma_, T_, Rf_] :=
  AmericanOption[s, n, sigma, T, Rf, Max[#1 - X, 0] &];

AmericanPut[X_, s_, n_, sigma_, T_, Rf_] :=
  AmericanOption[s, n, sigma, T, Rf, Max[X - #1, 0] &];

```

Jako testovací příklad sloužící k ověření sestaveného modelu zvolíme jednoduchý příklad uvedený v [21].

Příklad 12. Vypočítejte cenu dvouleté americké put opce, pokud víte, že spotová cena akcie je 50 eur, realizační cena 52 eur, bezriziková úroková míra 5% p.a., volatilita je 30% p.a. Uvažujte pouze dvě období.

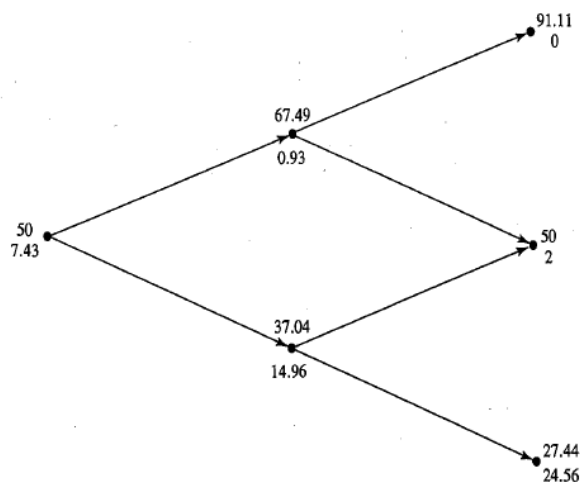
Řešení. Údaje zadáme do modelu v nadefinovaném pořadí.

```
AmericanPut[52, 50, 2, 0.3, 2, 0.05]
```

```
7.4284
```

Výsledná cena dvouleté americké opce nám vyšla 7,284 eur, pro porovnání uvedeme graf uvedený v [21].

Obr. č. 39 Binomický strom – výsledek příkladu 12.



Zdroj: [21]

Tento graficky znázorněný binomický strom udává stejný výsledek jako námi sestavený model. Jedná se ale o velmi zjednodušený model, který příliš neodpovídá realitě. Jednalo by se v tomto případě o americkou opci, kterou by bylo možné uplatnit jen dvakrát během dvou let, ve skutečnosti je ale americkou opci možné uplatnit kdykoli.

Stejným způsobem je možné napočítat hodnoty americké opce pro různé parametry, je možné sledovat vliv jednotlivých faktorů na změnu ceny opce a blíže tak analyzovat cenu americké opce získané pomocí binomického modelu.

Hlavní problém při oceňování amerických opcí binomickým modelem, jak bylo vidět v příkladu [12], spočívá v tom, že aby model odpovídal skutečnosti, musel by být počet období nekonečně velký. A to vzhledem k tomu, že je možné opci uplatnit kdykoli. Jako

příklad lze uvést, že pokud máme období např. 3 měsíců, počet období zvolíme 90, znamená to tedy, že opci můžeme uplatnit každý den, ale pouze jednou, v jeden moment. Ve skutečnosti, ale můžeme opci uplatnit v jakýkoli moment.

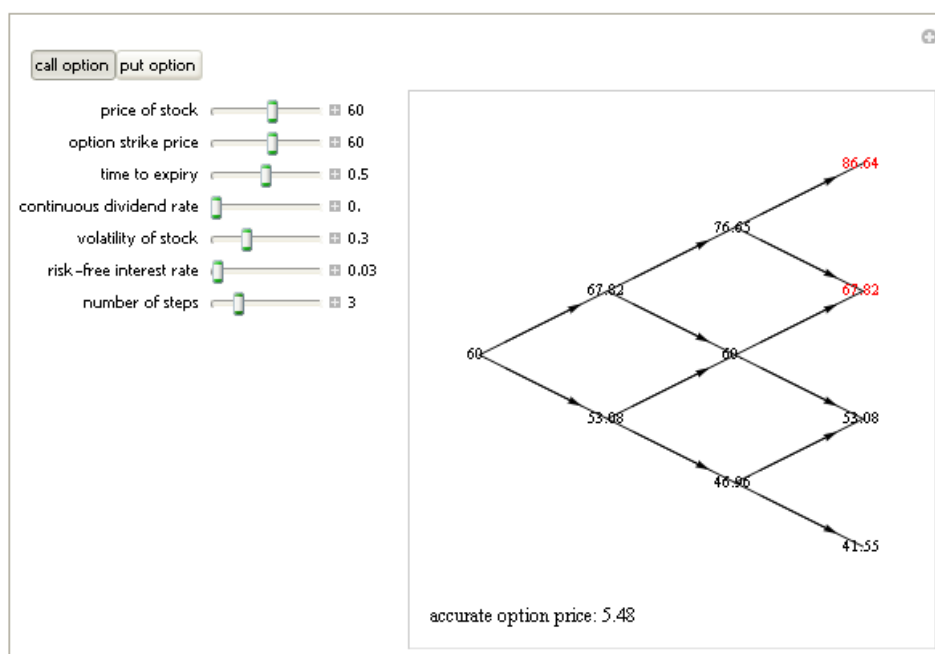
Jelikož Mathematica využívá rekursivní funkci, která je náročná na výpočet, pokud zvýšíme významně počet období, výpočet potrvá příliš dlouho. Přesto je ale tento model i přes značné zjednodušení účinným prostředkem pro pochopení fungování amerických opcí a pro přibližné určení ceny americké opce.

Příklad 13. Vypočítejte cenu americké opce a určete, kdy bude výhodné uplatnit americkou opci dříve než v době splatnosti. Uvažujte tyto parametry: realizační cena 60 eur, spotová cena akcie je 60 eur, roční volatilita 30%, roční bezriziková úroková míra je 3%, doba do splatnosti je 6 měsíce, počet období 3. Mějte dvě varianty, kdy první variantou je opce na akcii nevyplácející dividendy, ve druhé variantě akcie vyplácí dividendu 5% ročně.

Řešení. Pro tento příklad využijeme projekt Wolfram Demonstration, který byl již představen v kapitole 4.4.4. Celý algoritmus je možné vidět v příloze J.

Výpočet provedeme nejprve pro první variantu, pro call opci na akcii nevyplácející dividendu a poté pro call opci na akcii vyplácející dividendu.

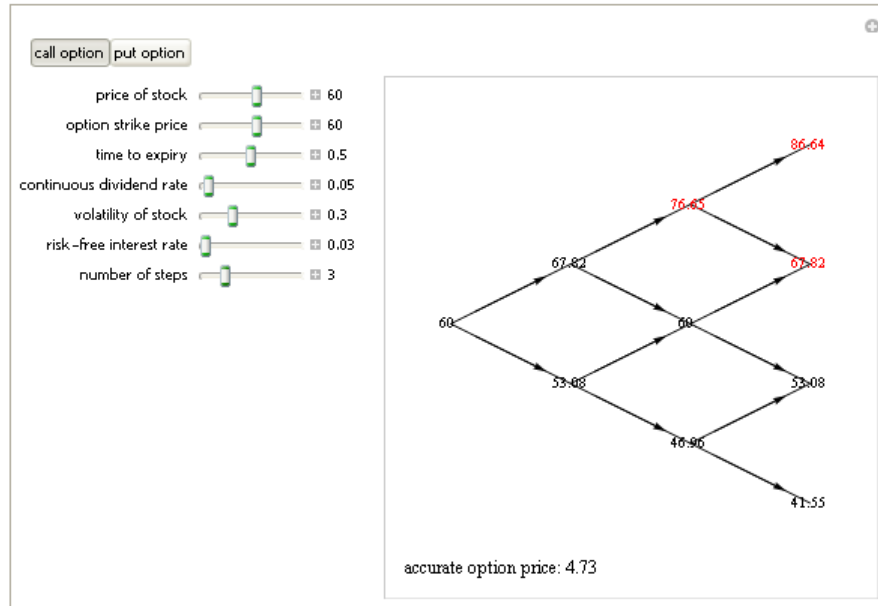
Obr. č. 40 Binomický strom oceňování americké call opce na akcii nevyplácející dividendu



Zdroj: vlastní zpracování na základě demonstračního projektu [22], 2012

Cena opce je 5,48 eur. Červeně je v binomickém stromu znázorněn okamžik, kdy bude výhodnější opci uplatnit. Americkou call opci na akcii nevyplácející dividendu nebude výhodné uplatnit předčasně v žádném z okamžiků.

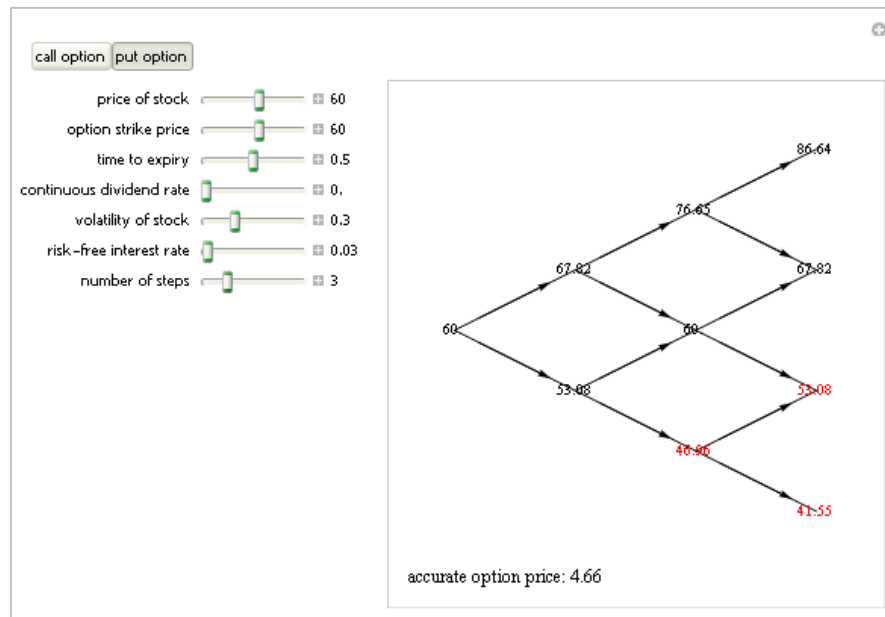
Obr. č. 41 Binomický strom oceňování americké call opce na akcii vyplácející dividendu 5%



Zdroj: vlastní zpracování na základě demonstračního projektu [22], 2012

Situace se změní, jakmile se bude jednat o americkou call opci na akcii, která vyplácí dividendy. Opce se stejnými parametry by bylo výhodné uplatnit již v některém ze stavů v jednom období před datem splatnosti. Tento stav je v binomickém stromu znázorněn červenou barvou. Cena opce je nižší a činí 4,73 eur.

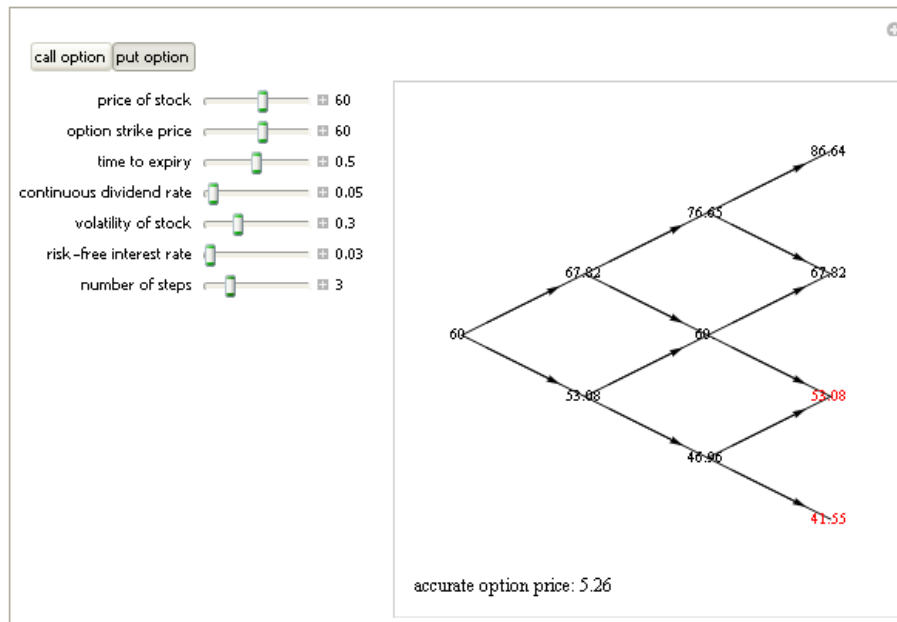
Obr. č. 42 Binomický strom oceňování americké put opce na akcii nevyplácející dividendu



Zdroj: vlastní zpracování na základě demonstračního projektu [22], 2012

Put opci na akcii nevyplácející dividendu by podle binomického stromu bylo výhodné uplatnit již taky při jednom ze stavů o jedno období před splatností. Cena put opce v tomto případě je 4,66 eur.

Obr. č. 43 Binomický strom oceňování americké put opce na akcii nevyplácející dividendu



Zdroj: vlastní zpracování na základě demonstračního projektu [22], 2012

Americkou put opci na akcii, která vyplácí roční dividendu 5%, není výhodné uplatnit v žádném okamžiku před dobou splatnosti opce. Cena opce je 5,26 eur.

Shrneme-li výsledky tohoto příkladu, můžeme konstatovat, že americké call opce na akcii nevyplácející dividendu není výhodné uplatnit předčasně, zatímco call opce na akcii, které vyplácí dividendy, je výhodné za určitých okolností uplatnit dříve než v době splatnosti. U amerických put opcí je to přesně naopak, put opci na akcii nevyplácející dividendy může být výhodnější v určitém případě uplatnit dříve, zatímco put opci na akcii nevyplácející dividendy je nejvýhodnější uplatnit až v době splatnosti opce.

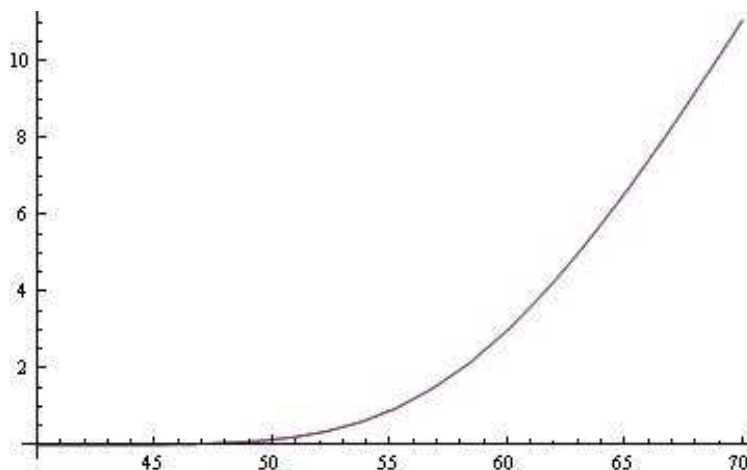
5.4.2 *Americké opce versus Evropské opce*

V předchozí části práce jsme v programu Mathematica ukázali, jak je možné ocenit evropské i americké opce pomocí binomického modelu oceňování. S využitím těchto algoritmů můžeme nyní obě varianty porovnat a zhodnotit, jakou měrou ovlivňuje typ opce jeho cenu.

Příklad 14. Graficky porovnejte cenu půlroční opce call a put oceněné binomickým modelem s parametry: realizační cena 60 eur, roční volatilita 15%, roční bezriziková úroková míra je 3%, počet období 60. Porovnání proveďte na intervalu spotové ceny akcie, nevyplácející dividendy, 40 až 70 eur.

Řešení. Začneme s call opcí, nejprve zobrazíme cenu americké a evropské opce vypočtenou binomickým modelem v jednom grafu. Přesný postup včetně algoritmů je možné vidět v příloze K.

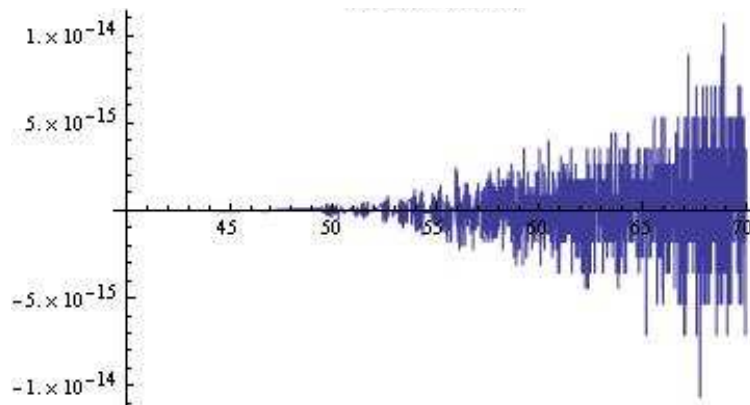
Obr. č. 44 Ceny call opce amerického a evropského typu – příklad 13



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Vidíme, že ceny opcí obou typů nám v tomto grafu splývají. Potvrdil se nám tedy závěr získaný v příkladu 12, že není výhodné uplatnit americkou call na akcii nevyplácející dividendu dříve než v době splatnosti, jako je tomu u evropské call opce. Zkusíme se tedy podívat na graf jako rozdíl mezi cenou americké a cenou evropské opce.

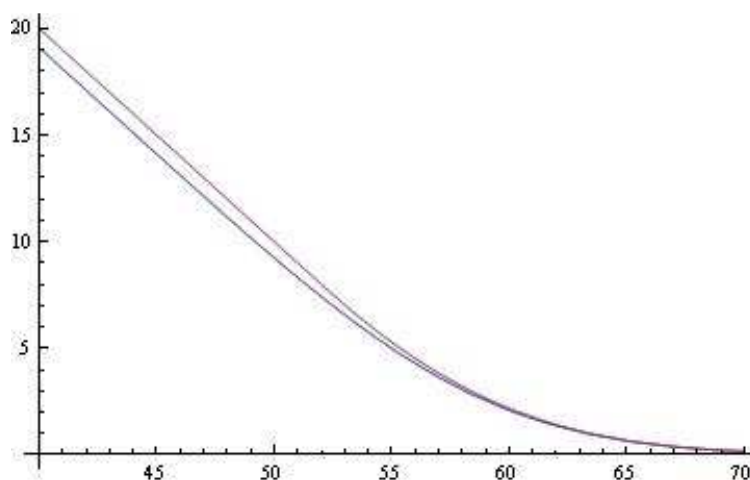
Obr. č. 45 Rozdíl ceny call opce amerického a evropského typu – příklad 13



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Při detailním pohledu na rozdíl mezi cenou americké a evropské opce určenou binomickým modelem vidíme, že do 50 eur není rozdíl prakticky žádný, s rostoucí cenou akcie se rozdíl zvyšuje, ale jedná se o tak minimální rozdíly, že můžeme říct, že cena je téměř stejná. Což vyplývá z toho, že call opci na akcii nevyplácející dividendy není výhodné uplatnit předčasně. Z toho důvodu se ceny americké a evropské call opce příliš neliší.

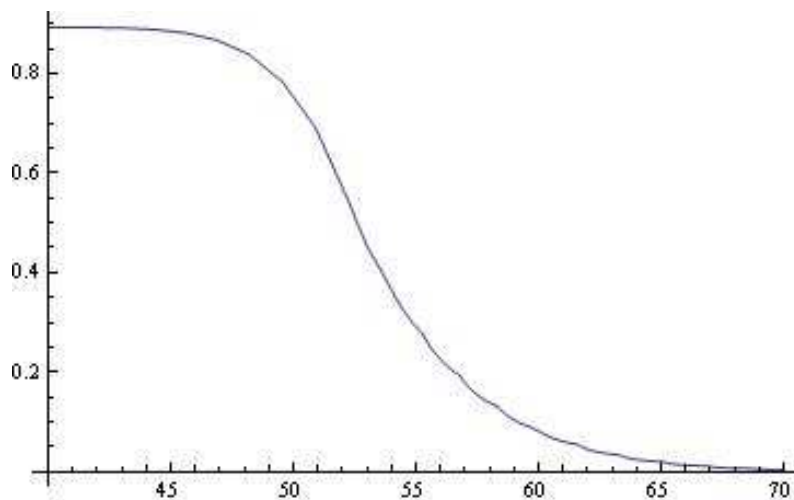
Obr. č. 46 Ceny put opce amerického a evropského typu – příklad 13



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

V případě put opce je při zobrazení obou typů opcí mezi nimi již patrný rozdíl. Americká put opce je zobrazena červenou barvou, je tedy vyšší než cena evropské put opce. Na rozdíl se ještě podíváme detailněji při grafickém zobrazení rozdílu mezi put opcí amerického a evropského typu.

Obr. č. 47 Rozdíl ceny opce amerického a evropského typu – příklad 13.



Zdroj: vlastní zpracování, 2012

Je zřejmé, že čím nižší je spotová cena akcie, tím větší je rozdíl mezi americkou a evropskou put opcí. Přibližně od 55 eur začíná být cena americké opce znatelně dražší, a s klesající spotovou cenou akcie vzniká stále větší rozdíl. To je způsobeno tím, že v těchto případech by mohlo být výhodnější za jistých podmínek uplatnit americkou opci dříve než v době splatnosti.

5.5 Další modely oceňování amerických opcí

Black-Scholesův vzorec pro opční prémii amerických call opcí na akcii nevyplácející dividendu je, jak již bylo uvedeno výše, totožný se vzorcem (29) pro evropskou call opci na akcii nevyplácející dividendu. Ovšem „v případě americké put opce takový analytický vzorec neexistuje a je nutné použít numerické procedury či aproximační vzorce.“ [10]

Existuje množství dalších modelů, které se zabývají oceňováním amerických opcí, žádný z nich ale není naprosto přesný. Jako nejznámější modely můžeme jmenovat Carr-JarrowMyneni model, MBAW model, Mertonův Jump-Difussion model, často je využívána také metoda Monte Carlo a další. Těmito modely se ale již dále nebudeme zabývat.

6. Závěr

Finanční deriváty jsou nedílnou součástí finančních trhů, každý jeho účastník by v dnešní době měl tento pojem nejen znát, ale i rozumět souvislostem a principům jakými jsou finanční deriváty oceňovány. V mnoha situacích je pro spekulanty a hedgery atraktivnější obchodovat s deriváty na aktiva než se samotnými aktivy.

Oceňování finančních derivátů je složitou záležitostí, která vyžaduje využívání matematiky a také využívání výpočetní techniky. Jedná se o velmi obsáhlé téma, v jehož rámci se nabízelo mnoho možností, kterým by se bylo možné věnovat. Díky znalostem získaným na domácí univerzitě a také díky studijnímu pobytu na německé univerzitě Uni Bayreuth., kde jsem měla přístup k rozsáhlému množství vhodné literatury, jsem se rozhodla zaměřit se na oceňování opcí především evropských opcí na akcie, ale i amerických opcí. Jako ústředním bodem jsem zvolila binomický model oceňování evropských opcí a slavný Black-Scholesův model.

První cíl práce, kterým je přehledné zpracování problematiky finančních derivátů, je uveden v prvních třech kapitolách. V první kapitole jsou finanční deriváty stručně charakterizovány, je nastíněna historie jejich vývoje a základní možnosti využívání finančních derivátů. V závěru kapitoly jsou uvedena některá hlediska, podle kterých je možné finanční deriváty klasifikovat. Rozhodující klasifikací pro oceňování finančních derivátů je dělení na pevné a podmíněné deriváty, neboť jejich oceňování se podstatně liší. Podle tohoto hlediska jsou rozděleny následující dvě kapitoly.

Kapitola 2 se zabývá pevnými deriváty, konkrétně forwardy, futures a swapy. S ohledem na to, že zvolené zaměření této práce je především na oceňování opcí, jsou pevné deriváty pouze jednotlivě vysvětleny, charakterizovány jsou vybrané nejčastěji používané typy a součástí této kapitoly je i oceňování vybraných typů pevných derivátů. Které jsou uvedeny kvůli ucelenosti zvoleného tématu, ale blíže jsme se jimi již nezabývali.

Ve třetí kapitole se dostáváme k podmíněným derivátům, které tvoří opce, opční listy, caps, floors a collars. Jádrem celé práce jsou matematické modely oceňování opcí, proto je pozornost zaměřena na charakteristiku opcí. Jsou vymezeny pojmy, které jsou nezbytné k analýze modelů oceňování opcí a základní zákonitosti fungování opčních obchodů. Kvůli rozdílným metodám oceňování evropských a amerických opcí jsou

modely oceňování opcí rozděleny právě podle tohoto hlediska a jsou jim věnovány samostatné kapitoly.

Zpracování problematiky oceňování finančních derivátů, jež je také jedním z cílů této diplomové práce, jsou již částečně naznačeny v podkapitolách 3.1.3 a 3.2.3, které se týkají stručného objasnění oceňování vybraných forwardů a futures. Tento cíl je splněn především ve dvou posledních a svým obsahem i nejobsáhlejších kapitolách práce, konkrétně v kapitole 4 a 5.

Teoretická část není striktně oddělena od praktické části, ale částečně se prolínají. Je to z důvodu přehlednosti a lepší návaznosti. Praktické příklady jsou vždy uvedeny za související teoretickou částí.

Provedla jsem veliké množství experimentů, které kvůli rozsahu práce nebylo možné všechny v práci uvést, bylo tedy nutné selektovat numerické experimenty s určitou vypovídací hodnotou. To byl jeden z největších problémů, před kterými jsem v průběhu práce stála.

V rámci oceňování evropských opcí jsme se nejprve zabývali diskrétním binomickým modelem. Odvodili jsme na základě neexistence arbitrážního zisku vzorec nejdříve pro call opci na jedno období. Vzorec byl odvozen s využitím replikační strategie. Model byl dále rozšířen na dvě období, poté na n období a konečně byl rozšířen i pro put opci. Podle vzorce pro binomický model oceňování opcí jsme sestavili model v SW Mathematica. Pomocí testovacího příkladu, uvedeného v jedné z použité literatury, jsme ověřili sestavený model. K oceňování opcí binomickým modelem jsme využili i demonstrační projekt Wolfram Demonstrations, který je přístupný na internetu. Tento projekt poskytuje přehledné grafické znázornění binomického stromu, kde můžeme vidět i jednotlivé trajektorie vývoje ceny opce. Tento projekt je sice omezen jen na čtyři období, ale přesto může fungovat názorně jako nástroj k pochopení fungování oceňování opcí pomocí binomického stromu a během okamžiku měnit parametry modelu a sledovat vliv na cenu opce a trajektorie, které k výsledné ceně vedly. Zkonstruovaný model jsme dále využili k napočítání několika složitějších příkladů, z nichž jsou v práci uvedeny dva. SW Mathematica nám umožnil díky grafickým funkcím znázornit výsledky nejen v tabulce, ale i v grafu a umožnil tak lepší interpretaci výsledků.

K aktuálnímu zjištění údajů o cenách akcií a jejich volatilitě jsme použili jednu z mnoha fascinujících funkcí SW Mathematica, která představuje obrovské zjednodušení a zrychlení oceňování opcí. SW Mathematica je napojen na rozsáhlou databázi, která během několika vteřin poskytne naprosto aktuální, ale i historická data týkající se nejen finančních trhů. My jsme využili této funkce pro příklady oceňování opcí binomickým modelem na akcie společnosti Apple a IBM, kdy jsme si vygenerovali jejich aktuální spotovou cenu a průměrnou volatilitu za posledních 50 dní.

V kapitole 4.5 byl představen a odvozen jeden z nejznámějších modelů oceňování opcí, za který tvůrci obdrželi dokonce Nobelovu cenu za ekonomii za rok 1997, Black-Scholesův model. Byly stanoveny předpoklady, za kterých je model odvozen, vysvětlena byla i teorie nutná k odvození tohoto modelu. Na základě Wienerova procesu, Itôova lemmatu, logaritmicke-normálního rozdělení tržní ceny akcie, Black-Scholesovy parciální diferenciální rovnice jsme získali po určitých úpravách Black-Scholesův vzorec pro opční prémii evropské opce.

S využitím použité literatury jsme sestavili algoritmus pro Black-Scholesův model v SW Mathematica, model jsme opět ověřili testovacím numerickým příkladem. Získali jsme tak velmi silný nástroj k rychlému oceňování evropských opcí na akcie nevyplácející dividendy pro call i put opce. Jednoduchým dosazením parametrů ovlivňujících cenu opce získáme okamžité řešení. Navíc je možné SW Mathematica využít také ke grafickému zpracování ve dvou- i trojrozměrném zobrazení. Bylo provedeno několik experimentů, z nichž je v textu uveden příklad, ve kterém je srovnávána cena call a put opce v závislosti na výši všech jednotlivých parametrů ovlivňujících cenu opce. Stejným způsobem bychom mohli provádět nespočet dalších výpočtů. Proto je sestavený model využitelný pro každého účastníka finančních trhů a může být významným pomocníkem pro všechny se zájmem o finanční deriváty.

Grafické možnosti SW Mathematica jsme využili také v kapitole 4.5.5, kdy jsme nejprve charakterizovali citlivosti opcí neboli Greeks a poté každou z měř citlivosti zobrazili ve 2D a 3D grafech. Pro každou míru jsme tak mohli určit, při jaké hodnotě je cena opce méně či více citlivá na změnu faktoru.

I přes svůj jednoznačný světový úspěch se Black-Scholesův model stává často terčem kritiky z mnoha různých důvodů. Jedná se o model, který realitu dosti zjednodušuje. Stačí se pozastavit u předpokladů, ze kterých Black-Scholesův model vychází.

Bezriziková míra ve skutečnosti není konstantní v čase, ale mění se, což je třeba brát v úvahu. Také transakční náklady, daně a další poplatky hrají v určení ceny opcí významnou roli, přesto nejsou v modelu zahrnuty. Navíc akcie často vyplácí dividendy, což je třeba brát také v úvahu. Postupem času můžeme pozorovat snahy odstranit nedostatky tohoto modelu. Black-Scholesův model se proto dočkal mnohých modifikací, některé z nich jsou uvedeny v kapitole 4.5.6. Jistě by bylo zajímavé se dále zabývat rozšířením a modifikacím Black-Scholesova vzorce, to by ale přesáhlo rámec této diplomové práce.

V další části jsme provedli numerický experiment srovnání ceny opce vypočítané pomocí binomického modelu s cenou opce vypočtenou Black-Scholesovým modelem. Na konkrétním příkladě jsme vyzorovali, že při porovnání opcí s totožnými parametry, s růstem počtu období, na které je rozdělena doba do splatnosti v binomickém modelu, se cena získaná binomickým modelem přibližuje k ceně určené podle Black-Scholesova modelu. To nás vedlo k dalšímu příkladu, kde jsme se zaměřili přímo na tento jev. Graficky jsme znázornili rozdíl v cenách opcí obou modelů v závislosti na počtu období. V grafu jsme jednoznačně potvrdili, že cena získaná binomickým modelem numericky konverguje k ceně získané Black-Scholesovým modelem. To je dáno tím, že čím více je období v binomickém modelu, tím více se zkracuje interval, a diskrétní binomický model se stává „spojitějším“, čímž se přibližuje ke spojitému Black-Scholesovu modelu.

Poslední, pátá kapitola se zabývá oceňováním opcí amerického typu. Pro cenu americké opce je možné stanovit určité meze, získání konkrétní ceny je ale podstatně složitější záležitostí. Existuje řada modelů, která se pokouší vyrovnat se s oceňováním amerických opcí, které je možné uplatnit kdykoli během držení opce. My jsme se zaměřili pouze na binomický model oceňování amerických opcí, kvůli rozsahu jsme ale již model neodvozovali, jako tomu bylo u předchozích modelů. Zaměřili jsme se na využití SW Mathematica, kde bylo potřeba využít velmi silný aparát, kterým je použití rekursivní funkce. Po ověření testovacím příkladem jsme se vrátili k možnosti využití demonstračního projektu Wolfram Demonstrations Project, tentokrát pro binomický model oceňování amerických opcí. V tomto modelu je názorně v binomickém stromu vidět nejen cena opce v jednotlivých trajektoriích, ale je i zvýrazněno, kdy je opci výhodné uplatnit předčasně, což je hlavní rozdíl mezi

evropskou a americkou opcí. Pokud by byla americká opce uplatněna až v době splatnosti, příliš by se cena americké opce neměla od ceny evropské opce lišit. V tomto příkladu jsme využili i možnost vyplácení dividend, která je důležitým faktorem v rozhodování, zda opci uplatnit dříve či nikoli. Závěrečným experimentem je porovnání americké a evropské ceny opce určené binomickým modelem. Nabízí se prozkoumat další modely zabývající se oceňováním amerických opcí. Je zajímavé pozorovat, jak se různé modely vyrovnávají s tak složitým úkolem, jakým stanovení výše opční prémie americké opce jistě je. Některé další modely pouze zmíníme, jejich analýza by již přesáhla rámec diplomové práce.

7. Seznam použitých tabulek

Tab. č. 1 Srovnání forwardů a futures kontraktů	18
Tab. č. 2 Závislost vnitřní hodnoty opce na spotové a realizační ceně.....	27
Tab. č. 3 Závislost časové hodnoty opce v závislosti na změně některých faktorů.....	27
Tab. č. 4 Ceny roční, půlroční a čtvrtletní call opce- příklad 6	44
Tab. č. 5 Ceny roční, půlroční a čtvrtletní put opce- příklad 6.....	45
Tab. č. 6 Ceny roční, půlroční a čtvrtletní call opce- příklad 7.	46
Tab. č. 7 Ceny roční, půlroční a čtvrtletní put opce- příklad 7.....	47
Tab. č. 8 Cena call opce podle Black-Scholesova modelu a podle binomického modelu s různou délkou období - příklad 10.	69
Tab. č. 9 Cena put opce podle Black-Scholesova modelu a podle binomického modelu s různou délkou období - příklad 10.	71

8. Seznam použitých obrázků

Obr. č. 1 Zisk a ztráta z forwardu v dlouhé pozici.....	14
Obr. č. 2 Ukázkové schéma fungování úrokových swapů.....	20
Obr. č. 3 Dlouhá pozice call opce	23
Obr. č. 4 Krátká pozice call opce.....	23
Obr. č. 5 Dlouhá pozice put opce.....	24
Obr. č. 6 Krátká pozice put opce	24
Obr. č. 7 Závislost opční prémie, vnitřní hodnoty opce a časové hodnoty opce na spotové ceně podkladového aktiva	28
Obr. č. 8 Binomický strom call opce pro dvě období– příklad 4.....	39
Obr. č. 9 Binomický strom call opce pro čtyři období – příklad 4	40
Obr. č. 10 Binomický strom put opce pro dvě období – příklad 5	41
Obr. č. 11 Binomický strom put opce pro čtyři období– příklad 4.....	41
Obr. č. 12 Graficky zpracované výsledky příklad 6 – call opce	44
Obr. č. 13 Graficky zpracované výsledky příklad 6 – put opce.....	45
Obr. č. 14 Graficky zpracované výsledky příklad 7 – call opce	47
Obr. č. 15 Graficky zpracované výsledky příklad 7 – put opce.....	47
Obr. č. 16 Ukázka Brownova pohybu.....	51
Obr. č. 17 Vliv spotové ceny na změnu ceny call a put opce	57
Obr. č. 18 Vliv realizační ceny na změnu ceny call a put opce	57
Obr. č. 19 Vliv volatility ceny akcie na změnu ceny call a put opce.....	58
Obr. č. 20 Vliv doby do splatnosti opce na změnu ceny call a put opce	58
Obr. č. 21 Vliv bezrizikové úrokové míry na změnu ceny call a put opce.....	59
Obr. č. 22 Grafické zobrazení míry citlivosti delta.....	60
Obr. č. 23 3D graf míry citlivosti delta.....	61
Obr. č. 24 Grafické zobrazení míry citlivosti gama.....	62
Obr. č. 25 3D graf míry citlivosti gama.....	62
Obr. č. 26 Grafické zobrazení míry citlivosti rho	63

Obr. č. 27 3D graf míry citlivosti rho	64
Obr. č. 28 Grafické zobrazení míry citlivosti theta.....	65
Obr. č. 29 3D grafické zobrazení míry citlivosti theta.....	65
Obr. č. 30 Grafické zobrazení míry citlivosti vega.....	66
Obr. č. 31 3D graf míry citlivosti vega	66
Obr. č. 32 Rozdíl mezi Black-Scholesovým modelem a binomickým modelem pro období 2 týdny – call opce	69
Obr. č. 33 Rozdíl mezi Black-Scholesovým modelem a binomickým modelem pro období 1 týden – call opce	70
Obr. č. 34 Rozdíl mezi Black-Scholesovým modelem a binomickým modelem pro období 1 den – call opce	70
Obr. č. 35 Porovnání rozdílů mezi Black-Scholesovým modelem a binomickým modelem pro období 2 týdny, 1 týden a 1 den – call opce	71
Obr. č. 36 Porovnání rozdílů mezi Black-Scholesovým modelem a binomickým modelem pro období 2 týdny, 1 týden a 1 den – put opce.....	72
Obr. č. 37 Rozdíl BS a CRR podle počtu období – do 25	72
Obr. č. 38 Rozdíl BS a CRR podle počtu období – do 50	73
Obr. č. 39 Binomický strom – výsledek příkladu 12.....	77
Obr. č. 40 Binomický strom oceňování americké call opce na akcii nevyplácející dividendu	78
Obr. č. 41 Binomický strom oceňování americké call opce na akcii vyplácející dividendu 5%	79
Obr. č. 42 Binomický strom oceňování americké put opce na akcii nevyplácející dividendu	80
Obr. č. 43 Binomický strom oceňování americké put opce na akcii nevyplácející dividendu	80
Obr. č. 44 Ceny call opce amerického a evropského typu – příklad 13	81
Obr. č. 45 Rozdíl ceny call opce amerického a evropského typu – příklad 13.....	82
Obr. č. 46 Ceny put opce amerického a evropského typu – příklad 13	82
Obr. č. 47 Rozdíl ceny opce amerického a evropského typu – příklad 13.	83

9. Seznam použitých symbolů a zkratek

CEM	Chicago Mercantile Exchange
CRR	Cox, Ross Rubinstein
FDE	Finanční deriváty
FRA	Forward Rate Agreement
IBM	International Business Machines Corporation
Inc.	Incorporated
KEM	Katedra ekonomie a kvantitativních metod
KF	Kvantitativní finance
LIBOR	London Interbank Offered Rate
NPV	Čistá současná hodnota
OTC	Over The Counter
resp.	respektive
tzv.	takzvané
ZAKT	Základy analýzy kapitálových trhů
2D	dvourozměrný
3D	třírozměrný

10. Seznam použité literatury

- [1] AMBROŽ, L. *Oceňování opcí*. 1. vydání, Praha: C. H. Beck, 2002, ISBN 80-7179-531-3
- [2] *Black-Scholes*. [online], poslední aktualizace 23. března 2012 [cit. 2012-27-03], Wikipedia. Dostupné z WWW: < <http://en.wikipedia.org/wiki/Black-Scholes> >
- [3] BENNINGA, S. a kol. *Implementing numerical option pricing models*. [online] Philadelphia: Wharton, University of Pennsylvania, FINANCE DEPARTMENT, [cit. 2012-02-16]. Dostupné na www: <<http://finance.wharton.upenn.edu/~rlwctr/papers/9311.PDF>>
- [4] BENNINGA, S. a kol. *Binomial Option Pricing, the Black-Scholes Option Pricing Formula, and Exotic Options*. [online] Tel-Aviv, [cit. 2012-03-27]. Dostupné na www: <<http://simonbenninga.com/wiener/MiER64.pdf>>
- [5] BENNINGA, S. a kol. *The binomial option pricing model*. [online] Tel-Aviv, [cit. 2012-03-15]. Dostupné na www: <<http://simonbenninga.com/wiener/MiER63.pdf>>
- [6] BLÁHA, Z. S. a kol., *Opce, swapy, futures – deriváty finančního trhu*. 2. vydání, Praha: MANAGEMENT PRESS, Ringier ČR, a. s., 1997, ISBN 80-85943-29-8
- [7] BLAKE, D. *Analýza finančních trhů*. 1. vydání, Praha: Grada Publishing, 1995, ISBN 80-7169-201-8
- [8] BLOSS, M. a kol. *Derivatives*. 1. vydání, München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2008, ISBN 978-3-486-58632-9
- [9] CIPRA, T. *Finanční a pojistné vzorce*. 1. vydání, Praha: Grada Publishing, a.s., 2006, ISBN 80-247-1633
- [10] CIPRA, T. *Matematika cenných papírů*. 1. vydání, Praha: HZ Praha, spol. s r.o., 2000, ISBN 80-86009-35-1
- [11] *Cost of carry*. [online], poslední aktualizace 18. června 2011 [cit. 2012-01-12], Wikipedia. Dostupné z WWW: < http://en.wikipedia.org/wiki/Cost_of_carry >
- [12] COX, J. C. a kol. *Option Pricing: A Simplified Approach*. [online]. *Journal of Financial Economics*, September 1979, [cit 2012-03-02]. Dostupné z www: <<http://www.sciencedirect.com/>>

- [13] CVITANOVIĆ, J. a kol. *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*. 2. vydání, Cambridge: The MIT Press, ISBN 0-262-03320-8
- [14] *Day count convention*. [online], poslední aktualizace 11. dubna 2012 [cit. 2012-04-13], Wikipedia. Dostupné z WWW: < http://en.wikipedia.org/wiki/Cost_of_carry>
- [15] DVOŘÁK, P. *Finanční deriváty*. 3. vydání, Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 1998, ISBN 80-7079-633-2
- [16] EGER, L. *Metodika k vypracování bakalářské/diplomové práce*. [online]. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, [cit. 2012-01-12]. Dostupné na www: <http://fek.zcu.cz/blob.php?table=internet_list&type=FileType&file=Data&name=FileName&idname=IDInternet&id=1999>
- [17] *Foreign-exchange option*. [online], poslední aktualizace 27. března 2012 [cit. 2012-04-02], Wikipedia. Dostupné z WWW: < http://en.wikipedia.org/wiki/Foreign-exchange_option>
- [18] FRIESL, M. a kol. *Finanční matematika hypertextově*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni 2003 [cit. 2012-02-05]. Dostupné na www: < <http://home.zcu.cz/~friesl/hfim/>>
- [19] GANGUR, M. *Studijní materiály k předmětu Základy analýzy kapitálových trhů. (KEM/ZAKT)*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.
- [20] *Geometric Brownian Motion*. [online], poslední aktualizace 25. března 2012 [cit. 2012-29-03], Wikipedia. Dostupné z WWW: < http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_Brownian_motion>
- [21] HULL, J., *Options, futures and Other Derivatives*. 7. vydání, New Jersey: Pearson Education, Inc., 2009, ISBN-13: 978-0-13-500994-9
- [22] KOZLOWSKI, A. *American call and put option*. [online], USA: Wolfram Demonstrations Project, [cit. 2012-04-05]. Dostupné z www: <<http://demonstrations.wolfram.com/AmericanCallAndPutOption/>>
- [23] KWOK, Y. – K. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. 2. vydání, Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2008, ISBN 978-3-540-4228-4
- [24] LUKÁŠ, L. *Studijní materiály k předmětu Kvantitativní finance. (KEM/KF)*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.

- [25] LUKÁŠ, L. *Studijní materiály k předmětu Finanční deriváty*. (KEM/FDE). Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.
- [26] MANGANO, S. *Mathematica Cookbook*. 1. vydání, Sebastopol: O'Reilly Media, Inc., 2010, ISBN 978-0-596-52099-1
- [27] MACLACHLAN, F. *Binomial Option Pricing Model*. [online], USA: Wolfram Demonstrations Project, [cit. 2012-02-27]. Dostupné z www: <<http://demonstrations.wolfram.com/BinomialOptionPricingModel/>>
- [28] *Modification of Black-Scholes model*. [online]. Belfast: Queen's University, Applied Mathematics & Theoretical Physics. [cit 2012-04-11]. Dostupné z www: <<http://web.am.qub.ac.uk/users/m.s.kim/chap7.pdf>>
- [29] PENATI, A. a kol. *The Cox-Ross-Rubinstein Option Pricing Model*. [online] Pittsburgh: University of Pittsburgh, [cit. 2012-03-11]. Dostupné na www: <<http://home.cerge-ei.cz/petrz/FM/f400n10.pdf>>
- [30] *Science Direct*. [online]. Elsevier B.V. [cit 2012-04-01]. Dostupné z www: <<http://www.sciencedirect.com/>>
- [31] SHAW, W. *Modelling Financial Derivatives with Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press, 1. vydání, 1998, ISBN 0-521-59233
- [32] STEIGAUFG, S. *Investiční matematika*. 1. vydání, Praha: Grada Publishing, spol. s r. o., 1999, ISBN 80-7169-429-0
- [33] STOJANOVIC, S. *Computational Financial Mathematics using MATHEMATICA®*. 1. vydání, Boston: Birkhäuser Boston, c/o Springer-Verlag New York, Inc., 2003, ISBN 0-8176-4197-1
- [34] *Swap (finance)*. [online], poslední aktualizace 13. dubna 2012 [cit. 2012-04-18], Wikipedia. Dostupné z www: <http://en.wikipedia.org/wiki/Swap_%28finance%29>
- [35] VARIAN, H. R., *Computational economics and finance modeling and analysis with MATHEMATICA®*, 1. vydání, New York: Springer-Verlag New York, Inc.
- [36] WILMOTT, P. a kol. *The Mathematics of Financial Derivatives*. 1. vydání, New York: Cambridge University Press, 1995, ISBN 0-521-49699-3

[37] *Zákon č. 256/2004 Sb., o podnikání na kapitálovém trhu.* [online] Business Center, Praha, [cit 2012-01-14], Dostupné z www:

<<http://business.center.cz/business/pravo/zakony/podnikani-na-kapitalovem-trhu/>>

[38] ZMEŠKAL, Z. a kol. *Finanční modely.* 2. vydání, Praha: EKOPRESS, s.r.o., 2004, ISBN 80-86119-87-4

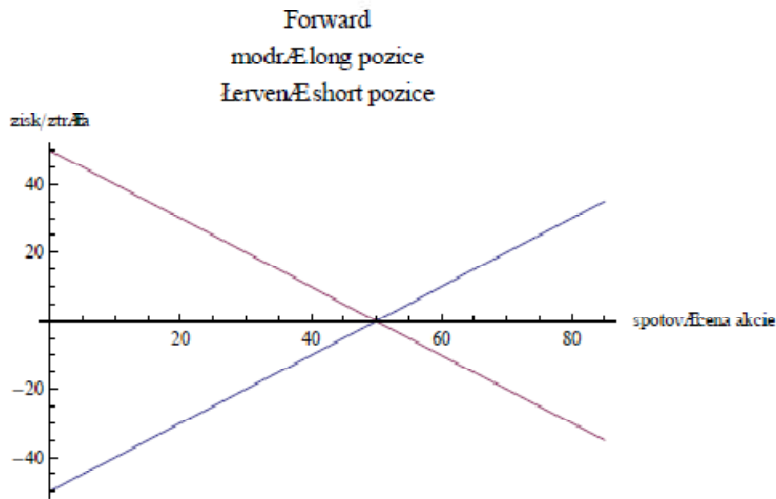
11. Seznam příloh

- Příloha A:** Zisk a ztráta z forwardů a opcí, krátké a dlouhé pozice
- Příloha B:** Binomický model oceňování evropských opcí s odhadem míry pohybu nahoru a dolu + příklady
- Příloha C:** Algoritmus Wolfram Demonstrations Project – Binomial Option Pricing model
- Příloha D:** Binomický model oceňování evropských opcí – příklad opce na akcie Apple
- Příloha E:** Binomický model oceňování evropských opcí – příklad opce na akcie IBM
- Příloha F:** Black-Scholesův model oceňování evropských opcí – srovnání call a put opce
- Příloha G:** Black-Scholesův model oceňování evropských opcí – 2D a 3D zobrazení
- Příloha H:** Citlivosti opcí – Greeks, příklad 2D a 3D zobrazení
- Příloha I:** Srovnání binomického modelu oceňování evropských opcí s Black-Scholesovým modelem oceňování evropských opcí
- Příloha J:** Algoritmus pro demonstrační projekt Wolfram Demonstrations Project s názvem American Call and Put Option
- Příloha K:** Srovnání americké a evropské call a put opce vypočítané pomocí binomického modelu oceňování opcí

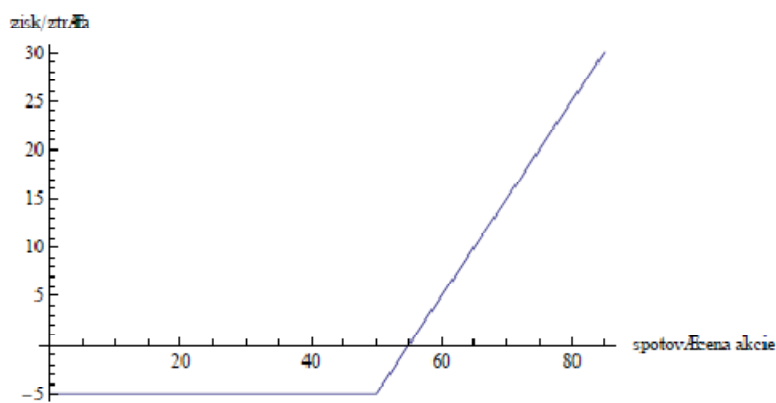
Příloha A: Zisk a ztráta z forwardů a opcí, krátké a dlouhé pozice

```
forwardLong[K_, S_] := Module[
  {k = K, s = S, y},
  (* analytic form: y:=s-k, y:=VT..payoff at maturity time T *)
  y = s - k;
  y]
forwardShort[K_, S_] := Module[
  {k = K, s = S, y},
  (* analytic form: y:=k-s, y:=VT..payoff at maturity time T *)
  y = k - s;
  y]
callLong[K_, S_, premium_] := Module[
  {k = K, s = S, p = premium, y, w},
  (* analytic form: y1:=-p, 0≤s≤k; y2:=s-(k+p), s≥k *)
  y = k; w = K + p;
  If[(s - k > 0), y = s - w, y = -p];
  y]
callShort[K_, S_, premium_] := Module[
  {k = K, s = S, p = premium, y, w},
  (* analytic form: y1:=p, 0≤s≤k; y2:=-s+(k+p), s≥k *)
  y = k; w = K + p;
  If[(s - k ≥ 0), y = -s + w, y = p];
  y]
putLong[K_, S_, premium_] := Module[
  {k = K, s = S, p = premium, y, w},
  (* analytic form: y1:=-s+(k-p), 0≤s≤k; y2:=-p, s≥k *)
  y = k; w = K - p;
  If[(s - k ≤ 0), y = -s + w, y = -p];
  y]
putShort[K_, S_, premium_] := Module[
  {k = K, s = S, p = premium, y, w},
  (* analytic form: y1:=s-(k-p), 0≤s≤k; y2:=p, s≥k *)
  y = k; w = K - p;
  If[(s - k ≤ 0), y = s - w, y = p];
  y]
```

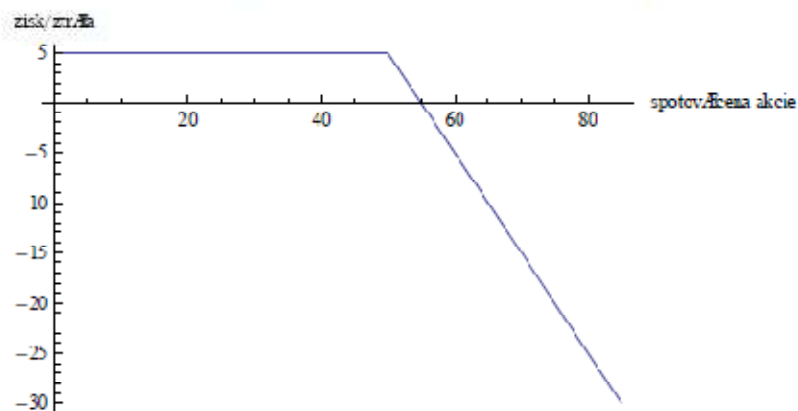
```
Plot[{forwardLong[50, s], forwardShort[50, s]}, {s, 0, 85},
  PlotLabel -> "Forward\nmodr\u00e9 long pozice\n\u00e9erven\u00e9 short po:
  AxesLabel -> {"spotov\u00e9 cena akcie", "zisk/ztr\u00e1ta"}]
```



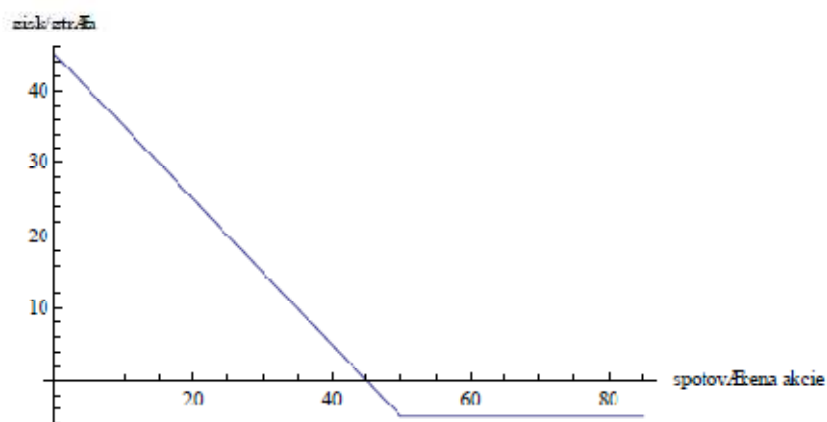
```
Plot[callLong[50, s, 5], {s, 0, 85},
  AxesLabel -> {"spotov\u00e9 cena akcie", "zisk/ztr\u00e1ta"}]
```



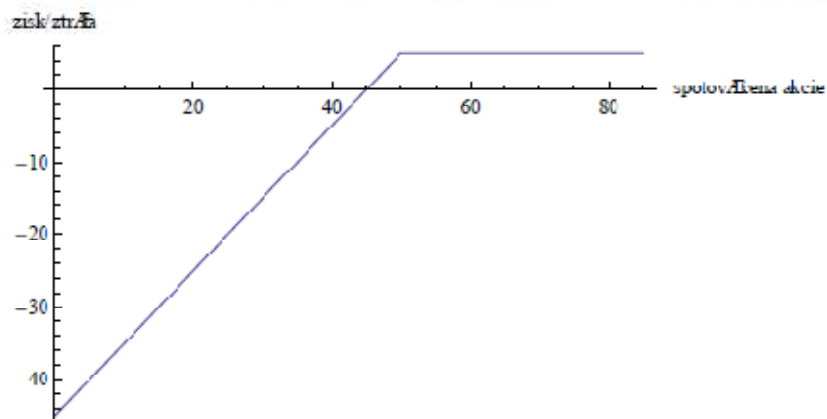
```
Plot[callShort[50, s, 5], {s, 0, 85},
  AxesLabel -> {"spotov\u00e9 cena akcie", "zisk/ztr\u00e1ta"}]
```



```
Plot[putLong[50, s, 5], {s, 0, 85},  
  AxesLabel -> {"spotov cena akcie", "zisk/ztráta"}]
```



```
Plot[putShort[50, s, 5], {s, 0, 85},  
  AxesLabel -> {"spotov cena akcie", "zisk/ztráta"}]
```



Příloha B: Binomický model oceňování evropských opcí s odhadem míry pohybu nahoru a dolu + příklady

```
Clear[statePrices]
statePrices[up_, down_, R_] :=
  Solve[{p * up + q * down == 1, p + q == 1 / R}, {p, q}][[1]]

(*Definice call opce*)

Clear[binomialCall]
binomialCall[s_, x_, n_] :=
  Sum[
    p^j * q^(n - j) * Binomial[n, j] * Max[s * up^j * down^(n - j) - x, 0], {j, 0, n}] /.
    statePrices[up, down, R]

(*1. příklad*)
up = 1.1;
down = 0.97;
R = 1.06;
binomialCall[50, 45, 2]
9.95016

up = 1.1;
down = 0.97;
R = 1.06;
binomialCall[50, 45, 4]
14.361

(*Definice put opce*)

Clear[binomialPut]
binomialPut[s_, x_, n_] :=
  Sum[
    p^j * q^(n - j) * Binomial[n, j] * Max[x - s * up^j * down^(n - j), 0], {j, 0, n}] /.
    statePrices[up, down, R]

(*2. příklad*)
up = 1.1;
down = 0.97;
R = 1.06;
binomialPut[50, 65, 2]
7.84977

up = 1.1;
down = 0.97;
R = 1.06;
binomialPut[50, 65, 4]
2.97906

(*testovací příklad Blaha*)
up = 1.25;
down = 0.8;
R = 1.1;
binomialPut[1000, 1100, 1]
90.9091
```

Příloha C: Algoritmus Wolfram Demonstrations Project – Binomial Option Pricing model

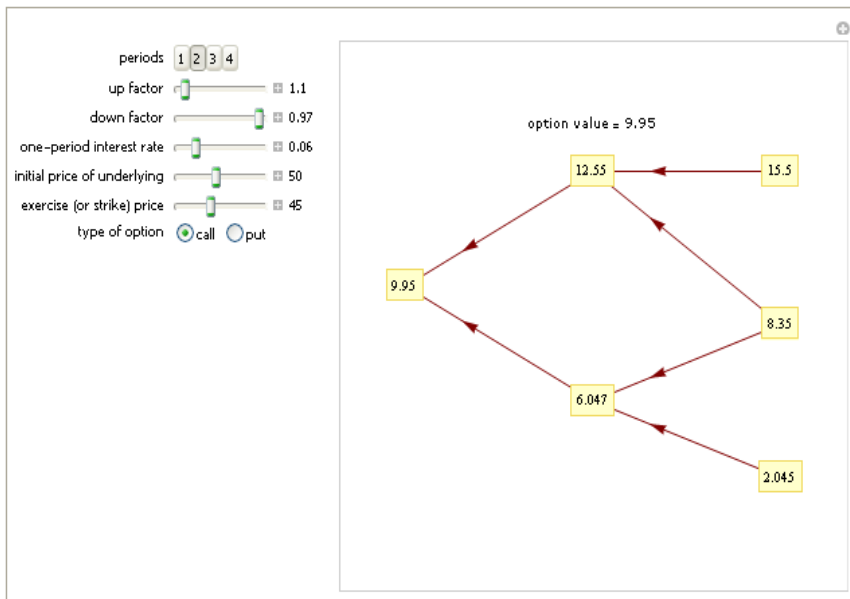
```

Manipulate[
$$\text{singlenode}[\{Vd\_ , Vu\_ \}] := -\frac{Vd - Vu}{-d + u} - \frac{u Vd - d Vu}{(1 + r)(d - u)} ;$$

  finalnodes := Table[Max[z (S u^m d^(#-m) - X), 0], {m, 0, #}] & /@ {1, 2, 3, 4};
  nodes[l_List] :=
    Table[singlenode[Table[{l[[i]], l[[i+1]]}], {i, Length[l] - 1}]
      [[j]], {j, Length[l] - 1};
  optionrules[t_] :=
    {2 → 1, 3 → 1, 4 → 2, 5 → 2, 5 → 3, 6 → 3, 7 → 4, 8 → 4, 8 → 5, 9 → 5, 9 → 6,
      10 → 6, 11 → 7, 12 → 7, 12 → 8, 13 → 8, 13 → 9, 14 → 9, 14 → 10, 15 → 10}[[
      Range[nr[[t]]]]; nr = {2, 6, 12, 20}; nn = {3, 6, 10, 15};

  TreePlot[optionrules[t] /. Table[Range[nn[[t]]][[i]] → NumberForm[
    Flatten[Reverse[NestList[nodes, finalnodes[[t]], t]][[i]], 4],
    {i, nn[[t]}], Left, DirectedEdges → True, VertexLabeling → True,
    AspectRatio → .75, PlotLabel → Style[Row[{"option value = ",
      NumberForm[Nest[nodes, finalnodes[[t]], t][[1]], 4]], "Label"],
    ImageSize → {350, 350}], {{t, 2, "periods"}, {1, 2, 3, 4},
    ControlType → SetterBar},
  {{u, 1.1, "up factor"}, 1.01, 2, .01,
    Appearance → "Labeled", ImageSize → Tiny},
  {{d, .91, "down factor"}, .5, .99, .01,
    Appearance → "Labeled", ImageSize → Tiny},
  {{r, .1, "one-period interest rate"}, .01, .25,
    .01, Appearance → "Labeled", ImageSize → Tiny},
  {{S, 50, "initial price of underlying"}, 10, 100,
    Appearance → "Labeled", ImageSize → Tiny},
  {{X, 50, "exercise (or strike) price"}, 10, 100,
    Appearance → "Labeled", ImageSize → Tiny},
  {{z, 1, "type of option"}, {1 → "call", -1 → "put"},
    ControlType → RadioButtonBar}, ControlPlacement → Left,
  TrackedSymbols → {t, u, d, r, S, X, z}, AutorunSequencing → {1, 3, 5} ]

```



Příloha D: Binomický model oceňování evropských opcí – příklad opce na akcie Apple

```

FinancialData["AAPL"] (*Hodnota akcie Apple Inc. ke dni 9.4.2012*)
635.101

FinancialData["AAPL", "Volatility50Day"]
(*Volatilita ceny akcie Apple Inc. za poslednich 50 dni*)
0.214019

(*Definice promennych*)

Clear[up, down, R, P, Q, EuropeanOption, EuropeanCall, EuropeanPut, mean];
up[n_, sigma_, T_] := N[ Exp[ Sqrt[T/n] sigma ] ];
down[n_, sigma_, T_] := 1/up[n, sigma, T];
R[n_, Rf_, T_] := N[ Exp[ Rf T/n ] ];
P[up_, down_, r_] := N[ (r - down) / (up - down) / r ];
Q[up_, down_, r_] := N[ 1/r - P[up, down, r] ];
mean[m_List] := Apply[ Plus, m ] / Length[n];

(*Binomicky vzorec ocenovani opci*)

EuropeanOption[s_, sigma_, T_, Rf_, exercise_Function, n_] :=
Module[{u = up[n, sigma, T], d = down[n, sigma, T],
r = R[n, Rf, T], p, q},
  p = P[u, d, r];
  q = Q[u, d, r];
  Sum[ exercise[s * u^j * d^(n-j)] *
Binomial[n, j] * p^j * q^(n-j), {j, 0, n}]];

(*Definice call a put opce*)

EuropeanCall[s_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_] :=
  EuropeanOption[s, sigma, T, Rf, Max[# - X, 0] &, n];
EuropeanPut[s_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_] :=
  EuropeanOption[s, sigma, T, Rf, Max[X - #, 0] &, n];

```

(*Call opce*)

```
Table[EuropeanCall[636.29, X, 0.214019, 1, 0.02, 52], {X, 600, 700, 10}]  
(*priklad pro ročni call opci*)
```

```
{79.514, 74.1261, 68.7382, 63.3503, 58.3628,  
54.0542, 49.7455, 45.4369, 41.625, 38.3517, 35.0785}
```

```
Table[EuropeanCall[636.29, X, 0.214019, 0.5, 0.02, 26], {X, 600, 700, 10}]  
(*priklad pro pulročni call opci*)
```

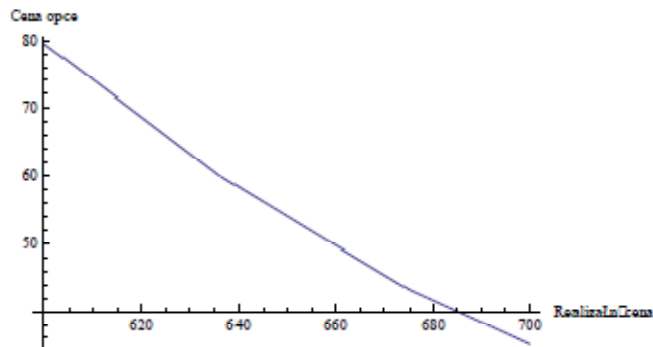
```
{61.5827, 56.0028, 50.3228, 44.6429, 39.5322,  
35.3066, 31.241, 27.0954, 23.6307, 20.9045, 18.1702}
```

```
Table[EuropeanCall[636.29, X, 0.214019, 0.25, 0.02, 13], {X, 600, 700, 10}]  
(*priklad pro čvrtletni call opci*)
```

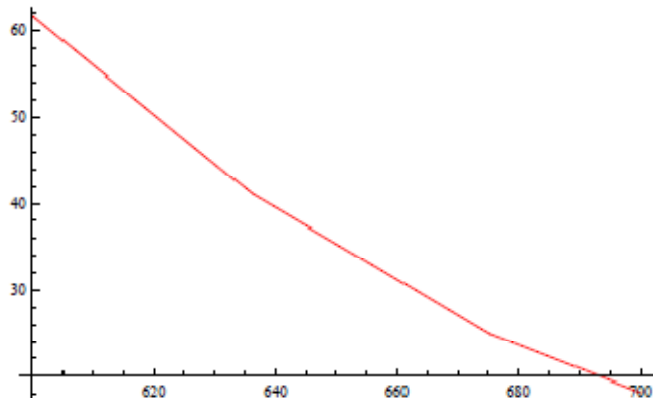
```
{50.8693, 43.8335, 37.2815, 32.3339, 27.3862,  
22.4386, 18.4359, 15.5686, 12.7013, 9.83392, 7.6595}
```

(*Grafy funkcí*)

```
EurCallt1 = Plot[EuropeanCall[636.29, X, 0.214019, 1, 0.02, 52],  
{X, 600, 700}, AxesLabel -> {"Realizace cena", "Cena opce"}]
```



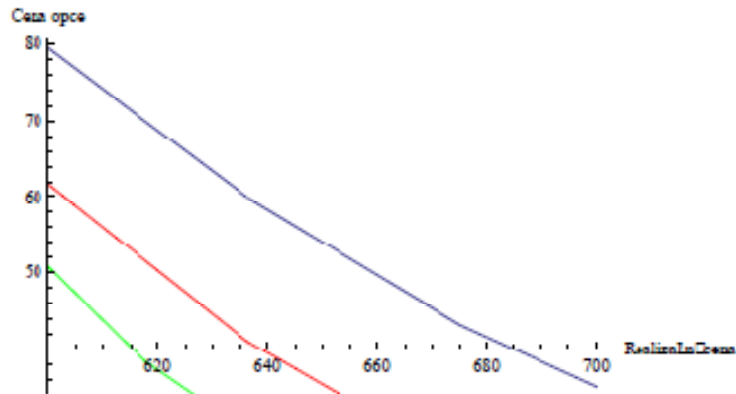
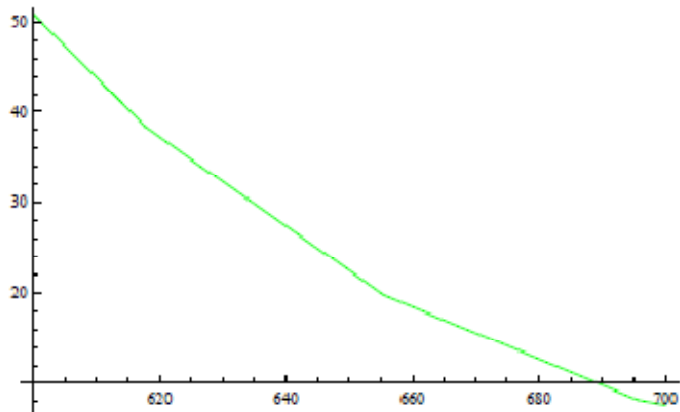
```
EurCallt05 = Plot[EuropeanCall[636.29, X, 0.214019, 0.5, 0.02, 26],  
{X, 600, 700}, PlotStyle -> Red]
```




```

EurCallt025 = Plot[EuropeanCall[636.29, X, 0.214019, 0.25, 0.02, 13],
  {X, 600, 700}, PlotStyle -> Green]
Show[EurCallt1, EurCallt05, EurCallt025]
(*sloucení 3 predchozich grafu do jednoho*)

```



```

Export["CRRprikkladX.jpeg", Show[EurCallt1, EurCallt05, EurCallt025]]
CRRprikkladX.jpeg

```

(*Put opce*)

```
Table[EuropeanPut[636.29, X, 0.214019, 1, 0.02, 52], {X, 600, 700, 10}]
```

(*priklad pro ročni put opci*)

```
{31.3432, 35.7573, 40.1714, 44.5855, 49.4,  
54.8933, 60.3867, 65.88, 71.8701, 78.3988, 84.9275}
```

```
Table[EuropeanPut[636.29, X, 0.214019, 0.5, 0.02, 26], {X, 600, 700, 10}]
```

(*priklad pro pulročni put opci*)

```
{19.4226, 23.6432, 27.8637, 32.0843, 36.8741,  
42.629, 48.3839, 54.1388, 60.5746, 67.7489, 74.9231}
```

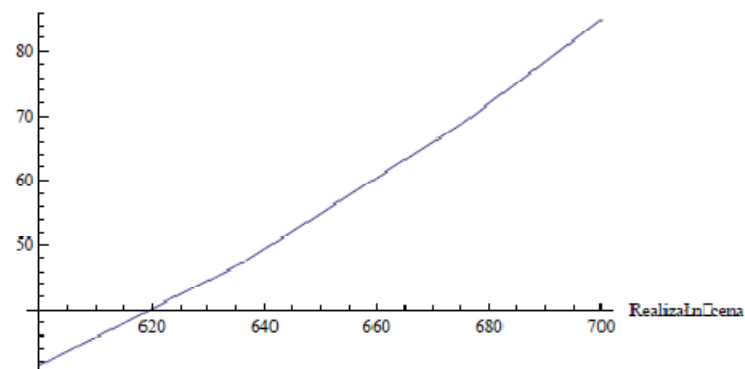
```
Table[EuropeanPut[636.29, X, 0.214019, 0.25, 0.02, 13], {X, 600, 700, 10}]
```

(*priklad pro cvrtletni put opci*)

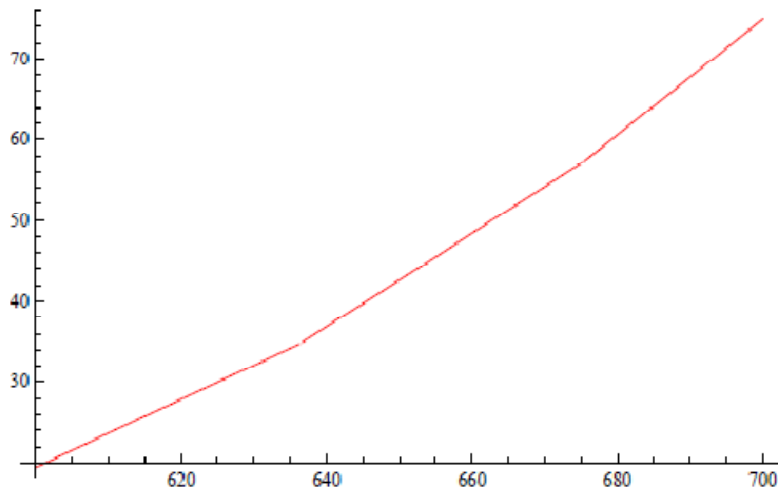
```
{11.5868, 14.5011, 17.8993, 22.9018, 27.9042,  
32.9067, 38.8542, 45.9369, 53.0197, 60.1025, 67.8782}
```

```
EurPutt1 = Plot[EuropeanPut[636.29, X, 0.214019, 1, 0.02, 52],  
{X, 600, 700}, AxesLabel -> {"Realizacijska cena", "Cena opce"}]
```

Cena opce



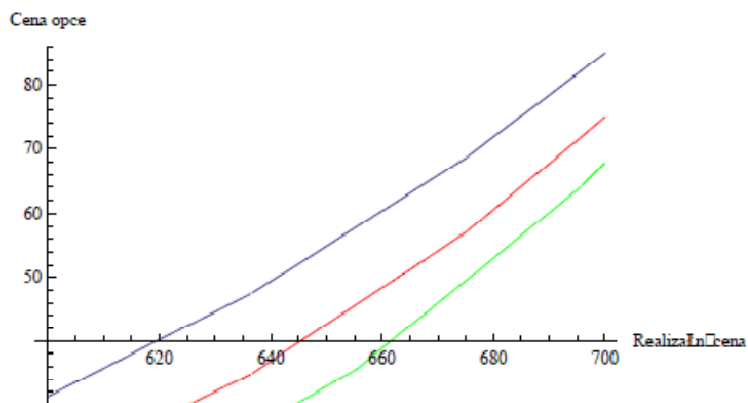
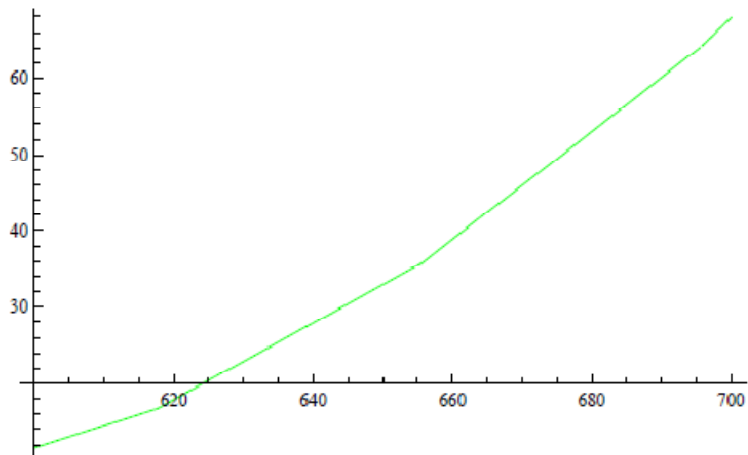
```
EurPutt05 = Plot[EuropeanPut[636.29, X, 0.214019, 0.5, 0.02, 26],  
{X, 600, 700}, PlotStyle -> Red]
```



```

EurPutt025 = Plot[EuropeanPut[636.29, X, 0.214019, 0.25, 0.02, 13],
  {X, 600, 700}, PlotStyle -> Green]
Show[EurPutt1, EurPutt05, EurPutt025]
(*sloucení 3 předchozích grafů do jednoho*)

```



```

Export["CRRprikkladXput.jpeg", Show[EurPutt1, EurPutt05, EurPutt025]]
CRRprikkladXput.jpeg

```

Příloha E: Binomický model oceňování evropských opcí – příklad opce na akcie IBM

```

FinancialData["IBM", "Average50Day"]
(*Premerna cena akcie IBM za poslednich 50 dni*)

202.281

FinancialData["IBM", "Volatility50Day"]
(*Volatilita ceny akcie IBM za poslednich 50 dni*)

0.102088

(*Definice binomickeho modelu ocenovani opce - call a put opce*)

Clear[up, down, R, P, Q, EuropeanOption, EuropeanCall, EuropeanPut, mean];
up[n_, sigma_, T_] := N[ Exp[ Sqrt[T/n] sigma ] ];
down[n_, sigma_, T_] := 1 / up[n, sigma, T];
R[n_, Rf_, T_] := N[ Exp[ Rf T / n ] ];
P[up_, down_, r_] := N[ (r - down) / (up - down) / r];
Q[up_, down_, r_] := N[ 1 / r - P[up, down, r]];
mean[m_List] := Apply[ Plus, m] / Length[m];

EuropeanOption[s_, sigma_, T_, Rf_, exercise_Function, n_] :=
Module[{u = up[n, sigma, T], d = down[n, sigma, T],
r = R[n, Rf, T], p, q},
  p = P[u, d, r];
  q = Q[u, d, r];
  Sum[ exercise[s * u^j * d^(n - j)] *
Binomial[n, j] * p^j * q^(n - j), {j, 0, n}]];

EuropeanCall[s_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_] :=
  EuropeanOption[ s, sigma, T, Rf, Max[# - X, 0] &, n];
EuropeanPut[s_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_] :=
  EuropeanOption[ s, sigma, T, Rf, Max[X - #, 0] &, n];

(*Call opce*)

Table[EuropeanCall[S, 200, 0.102088, 1, 0.05, 360], {S, 175, 225, 5}]
(*doba do splatnosti call opce 1 rok*)
{2.16526, 3.49108, 5.29847, 7.61719, 10.4491,
 13.7474, 17.4834, 21.5628, 25.917, 30.4802, 35.1951}

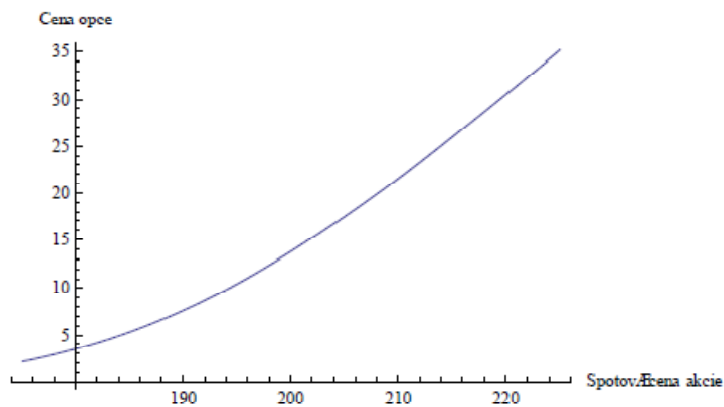
Table[EuropeanCall[S, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180], {S, 175, 225, 5}]
(*doba do splatnosti call opce 0,5 roku*)
{0.385735, 0.900537, 1.84752, 3.37588, 5.589,
 8.48558, 12.0441, 16.1084, 20.5462, 25.2336, 30.0727}

Table[EuropeanCall[S, 200, 0.102088, 0.25, 0.05, 90], {S, 175, 225, 5}]
(*doba do splatnosti call opce 0,25 roku*)
{0.0269396, 0.127999, 0.457737, 1.2738, 2.87001,
 5.39838, 8.83683, 13.0711, 17.696, 22.5499, 27.5018}

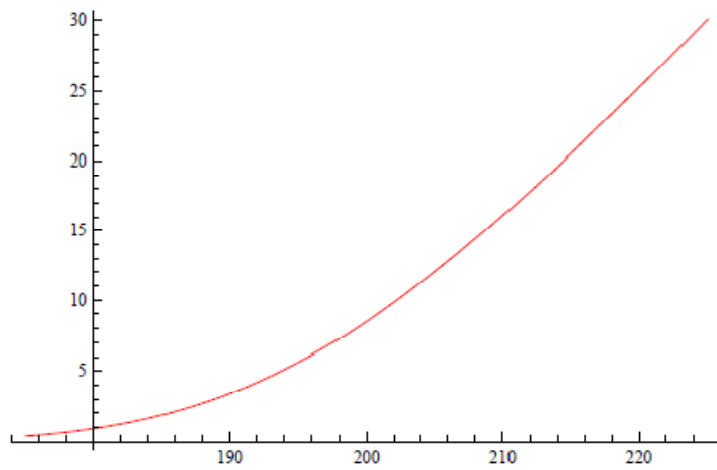
(*Grafy funkcii*)

```

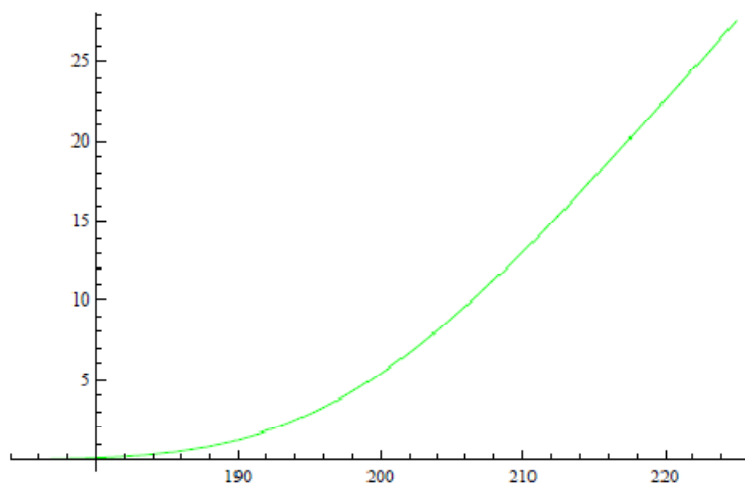
```
EurCallt1a = Plot[EuropeanCall[S, 200, 0.102088, 1, 0.05, 360],  
{S, 175, 225}, AxesLabel -> {"Spotov cena akcie", "Cena opce"}]
```



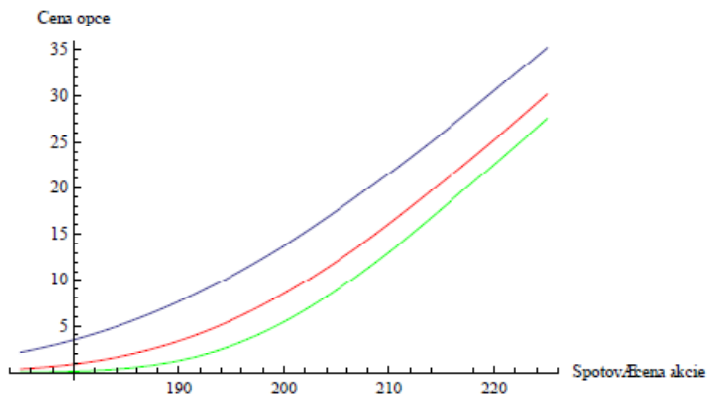
```
EurCallt05a = Plot[EuropeanCall[S, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180],  
{S, 175, 225}, PlotStyle -> Red]
```



```
EurCallt025a = Plot[EuropeanCall[S, 200, 0.102088, 0.25, 0.05, 90],  
{S, 175, 225}, PlotStyle -> Green]
```



```
Show[EurCallt1a, EurCallt05a, EurCallt025a]
(*slouŕenŕ 3 pŕedchozŕch grafŕ do jednoho*)
```



```
Export["CRRprikkladS.jpeg", Show[EurCallt1a, EurCallt05a, EurCallt025a]]
```

CRRprikkladS.jpeg

CRRprikkladS.jpeg

(*Put opce*)

```
Table[EuropeanPut[S, 200, 0.102088, 1, 0.05, 360], {S, 175, 225, 5}]
```

(*doba do splatnosti put opce 1 rok*)

```
{17.4111, 13.737, 10.5444, 7.86307, 5.69498,
 3.99332, 2.72925, 1.80873, 1.16292, 0.726124, 0.440957}
```

```
Table[EuropeanPut[S, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180], {S, 175, 225, 5}]
```

(*doba do splatnosti put opce 0,5 roku*)

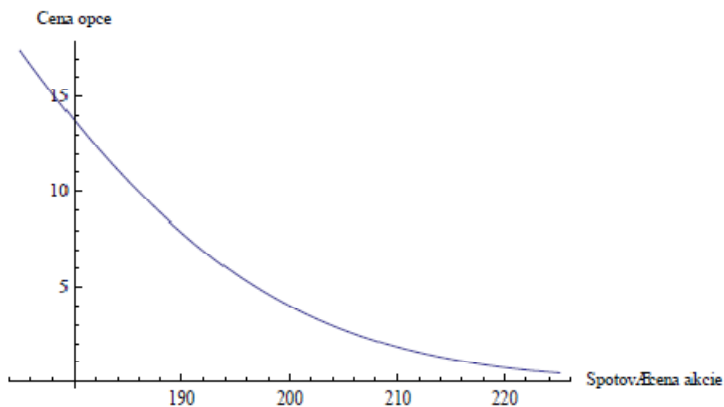
```
{20.4477, 15.9625, 11.9095, 8.43786, 5.65098,
 3.54756, 2.10612, 1.17039, 0.608146, 0.295621, 0.134722}
```

```
Table[EuropeanPut[S, 200, 0.102088, 0.25, 0.05, 90], {S, 175, 225, 5}]
```

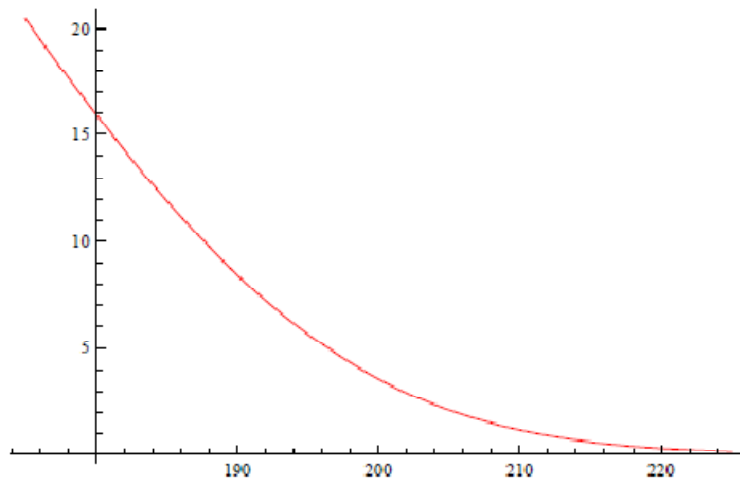
(*doba do splatnosti put opce 0,25 roku*)

```
{22.5425, 17.6436, 12.9733, 8.78936, 5.38557,
 2.91394, 1.40239, 0.586672, 0.211573, 0.0654856, 0.0174041}
```

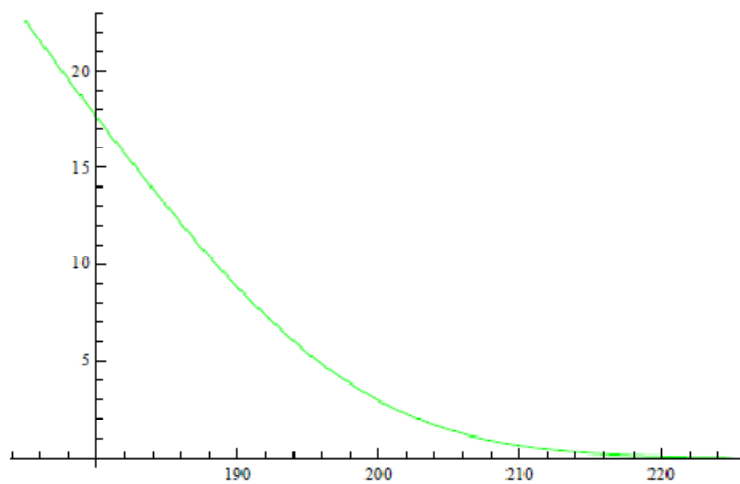
```
EurPutt1a = Plot[EuropeanPut[S, 200, 0.102088, 1, 0.05, 360],
  {S, 175, 225}, AxesLabel -> {"Spotovŕ cena akcie", "Cena opce"}]
```



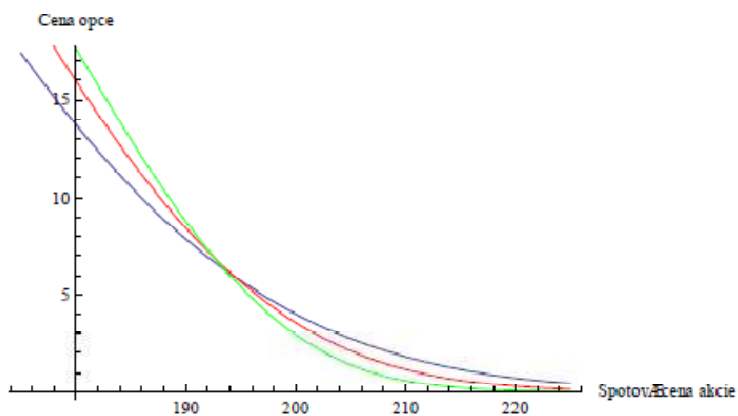
```
EurPutt05a = Plot[EuropeanPut[S, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180],
  {S, 175, 225}, PlotStyle -> Red]
```



```
EurPutt025a = Plot[EuropeanPut[S, 200, 0.102088, 0.25, 0.05, 90],
  {S, 175, 225}, PlotStyle -> Green]
```



```
Show[EurPutt1a, EurPutt05a, EurPutt025a]
(*sloužení 3 předchozích grafů do jednoho*)
```



```
Export["CRRprikkladSput.jpeg", Show[EurPutt1a, EurPutt05a, EurPutt025a]]
```

```
CRRprikkladSput.jpeg
```

Příloha F: Black-Scholesův model oceňování evropských opcí – srovnání call a put opce

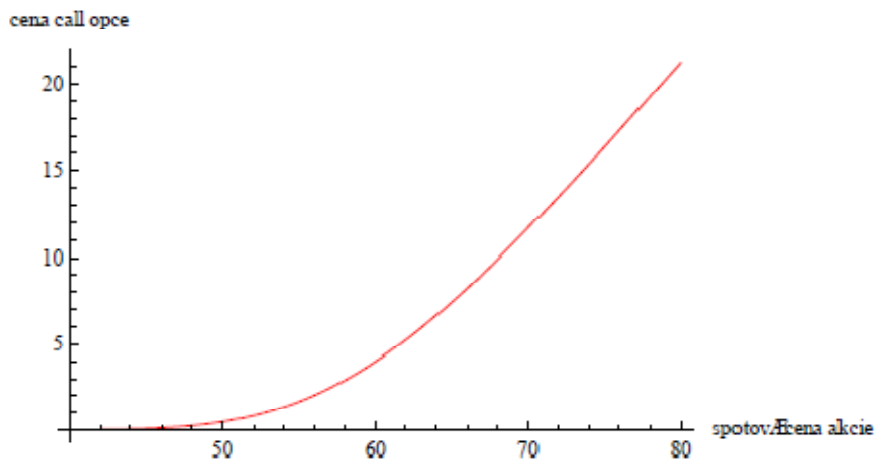
```
(*Definování Black-Scholesova vzorce*)
Clear[s, X, σ, t, r, q];
cdfNorm[x_] := (1 + Erf[x / Sqrt[2]]) / 2;
d1[s_, σ_, X_, t_, r_] := ((r + σ * σ / 2) * t + Log[s / X]) / (σ * Sqrt[t]);
d2[s_, σ_, X_, t_, r_] := d1[s, σ, X, t, r] - σ * Sqrt[t];
BScall[s_, σ_, X_, t_, r_] := s * cdfNorm[d1[s, σ, X, t, r]] -
  X * Exp[-r * t] * cdfNorm[d2[s, σ, X, t, r]]; (*Call opce*)
BSput[s_, σ_, X_, t_, r_] := -s * cdfNorm[-d1[s, σ, X, t, r]] +
  X * Exp[-r * t] * cdfNorm[-d2[s, σ, X, t, r]]; (*Put opce*)

(*Testovací příklad - Blaha*)
BScall[420, 0.2, 400, 0.5, 0.1]
47.5942

BSput[s_, σ_, X_, t_, r_] := -s * cdfNorm[-d1[s, σ, X, t, r]] +
  X * Exp[-r * t] * cdfNorm[-d2[s, σ, X, t, r]]; (*Put opce*)
BSput[420, 0.2, 400, 0.5, 0.1]
8.08599

(*Porovnání put a call opce oceněné Black-
Scholesovým modelem pro jednotlivé faktory působící na cenu opce*)
X = 60; σ = 0.2; t = 0.5; r = 0.04; q = 0;
BScalls = Plot[BScall[s, σ, X, t, r], {s, 40, 80}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"spotová cena akcie", "cena call opce"}, PlotStyle -> Red]

(*Vliv změny spotové ceny akcie na výši ceny call opce*)
```

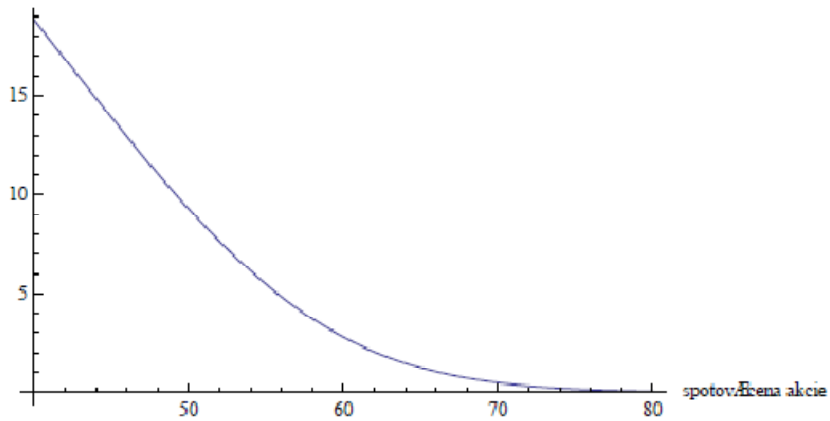



```

X = 60;  $\sigma$  = 0.2; t = 0.5; r = 0.04; q = 0; s = 50
BSputS = Plot[BSput[s,  $\sigma$ , X, t, r], {s, 40, 80}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"spotov cena akcie", "cena put opce"}]
(*Vliv zmeny spotove ceny akcie na vysl ceny put opce*)

```

cena put opce

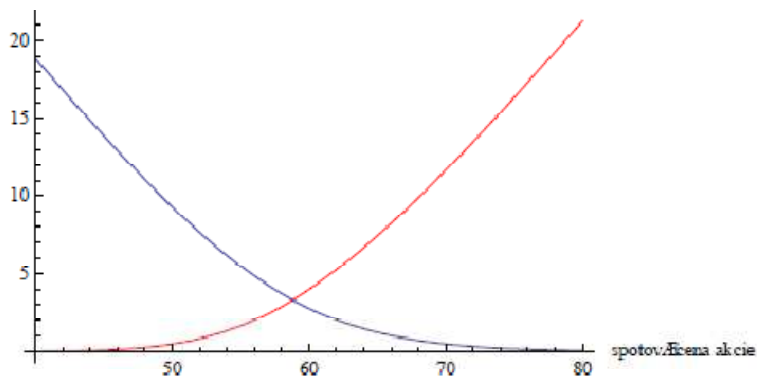


```

Show[BScalls, BSputS] (*porovnan call a put opce*)

```

cena call opce

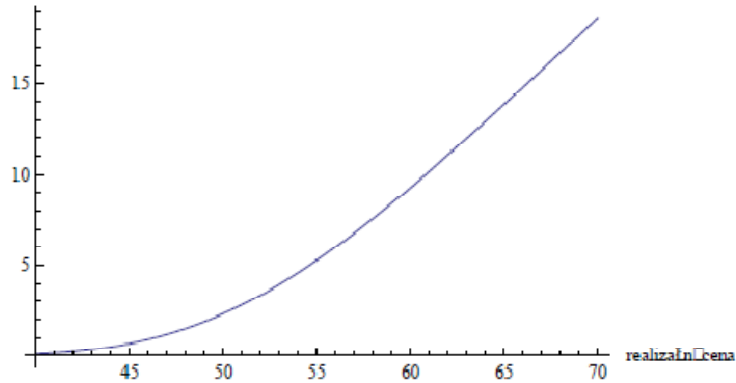


```

BSputX = Plot[BSpout[s, σ, X, t, r], {X, 40, 70},
  PlotRange → All, AxesLabel → {"realizační cena", "cena put opce"}]
(*Vliv zmeny realizacni ceny opce na vysí ceny put opce*)

```

cena put opce

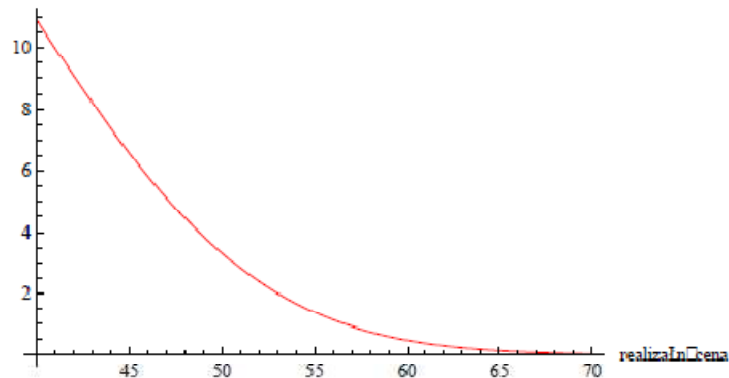


```

BScallX = Plot[BScall[s, σ, X, t, r], {X, 40, 70}, PlotRange → All,
  AxesLabel → {"realizační cena", "cena call opce"}, PlotStyle → Red]
(*Vliv zmeny realizacni ceny opce na vysí ceny call opce*)

```

cena call opce

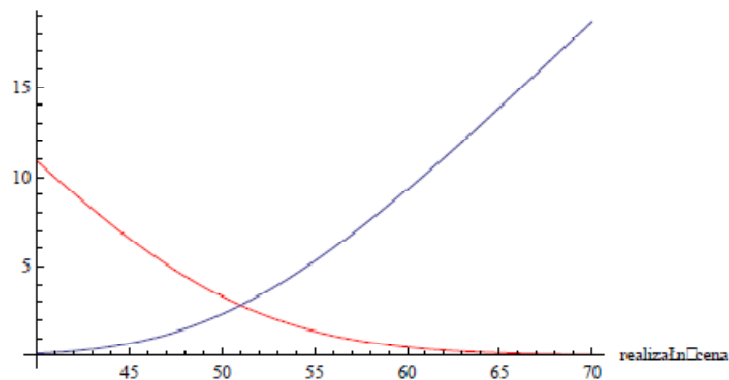


```

Show[BScallX, BSputX] (*porovnaní call a put opce*)

```

cena call opce

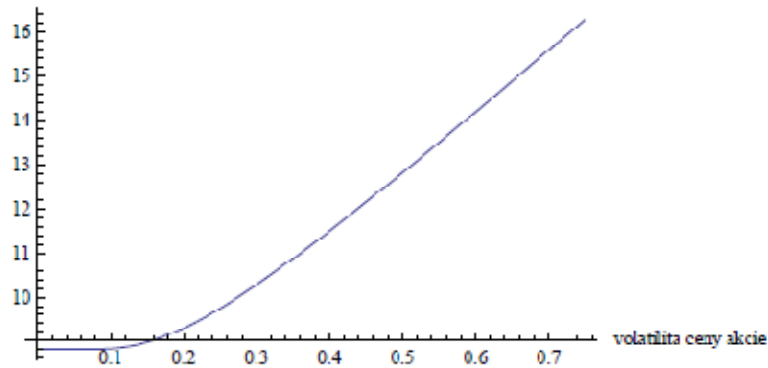


```

BSpotifySigma = Plot[BSpotify[s,  $\sigma$ , X, t, r], { $\sigma$ , 0, 0.75}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"volatilita ceny akcie", "cena put opce"}]
(*Vliv zmeny volatility ceny akcie na vysi ceny put opce*)

```

cena put opce

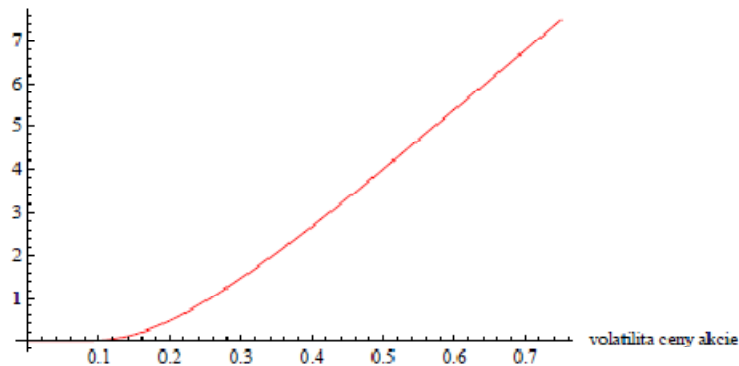


```

BScallSigma = Plot[BScall[s,  $\sigma$ , X, t, r], { $\sigma$ , 0, 0.75}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"volatilita ceny akcie", "cena call opce"}, PlotStyle -> Red]
(*Vliv zmeny volatility ceny akcie na vysi ceny call opce*)

```

cena call opce

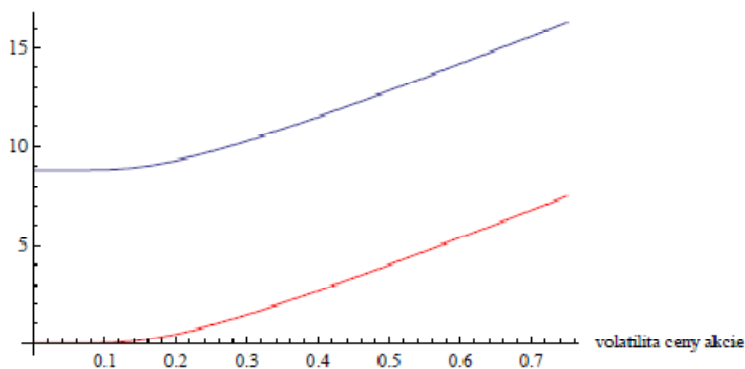


```

Show[BScallSigma, BSpotifySigma] (*porovnaní call a put opce*)

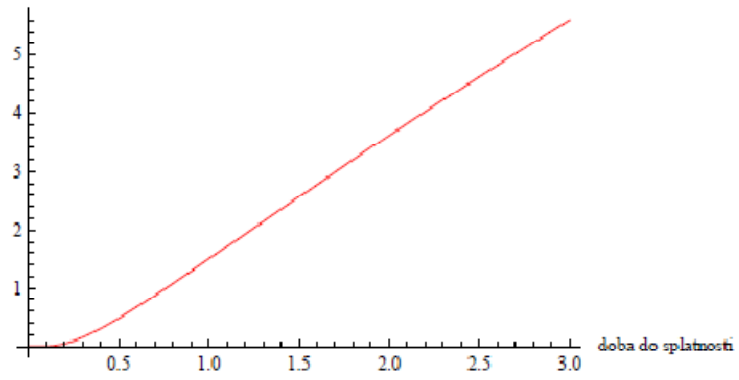
```

cena call opce



```
BScallt = Plot[BScall[s,  $\sigma$ , X, t, r], {t, 0, 3}, PlotRange -> All,  
  AxesLabel -> {"doba do splatnosti", "cena call opce"}, PlotStyle -> Red]  
(*Vliv zmeny doby do splatnosti na vysci ceny call opce*)
```

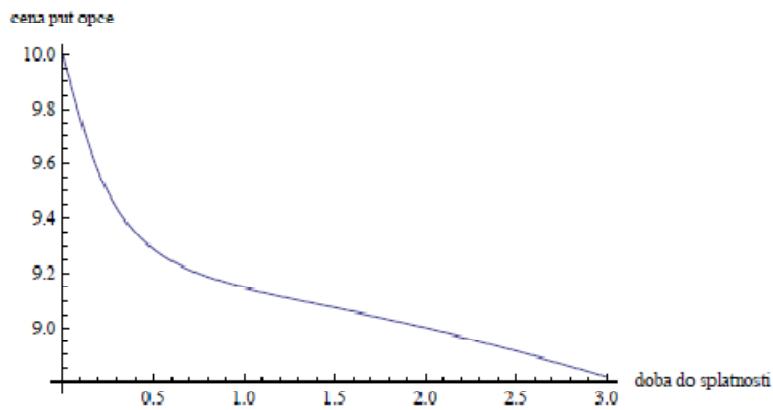
cena call opce



```

BSputt = Plot[BSPut[s,  $\sigma$ , X, t, r], {t, 0, 3}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"doba do splatnosti", "cena put opce"}]
(*Vliv zmeny doby do splatnosti na vysí ceny put opce*)

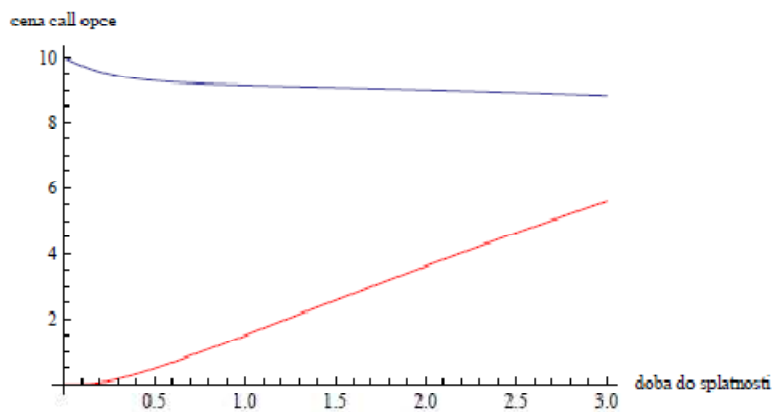
```



```

Show[BScallt, BSputt] (*porovnání call a put opce*)

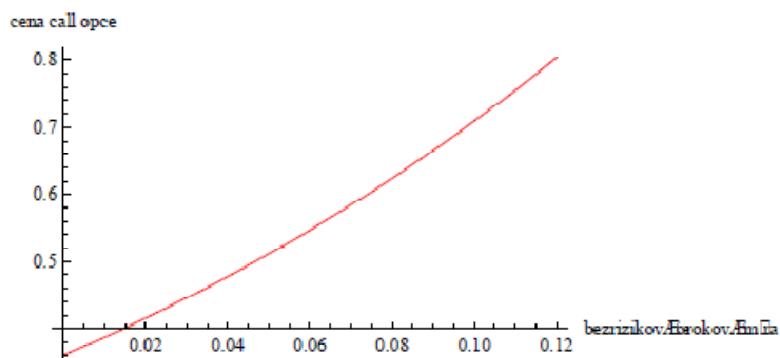
```



```

BScallr = Plot[BScall[s,  $\sigma$ , X, t, r], {r, 0, 0.12}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"bezriziková úroková míra", "cena call opce"}, PlotStyle -> Red]
(*Vliv zmeny bezrizikové úrokové míry na vysí ceny call opce*)

```

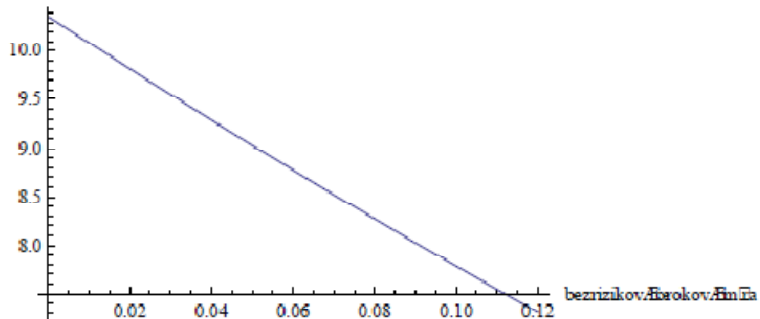


```

BSputr = Plot[BSput[s,  $\sigma$ , X, t, r], {r, 0, 0.12}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"bezrizikov  urokov  m ra", "cena put opce"}]
(*Vliv zmeny bezrizikove urokov  miry na vysl ceny put opce*)

```

cena put opce

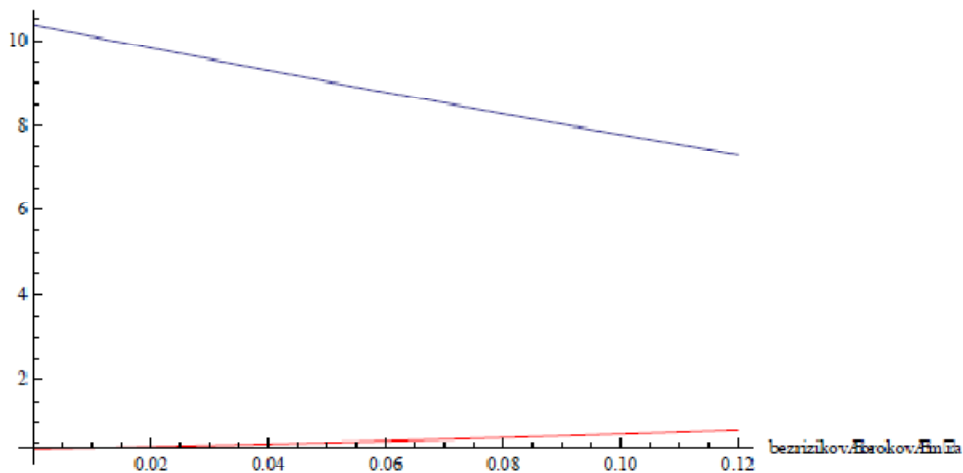


```

Show[BScallr, BSputr] (*porovnanl call a put opce*)

```

cena call opce



```

(*Export obrázku pro pouziti do textu*)

```

```

Export["BSX.jpeg", Show[BScallX, BSputX]]

```

```

Export["BSr.jpeg", Show[BScallr, BSputr]]

```

```

Export["BST.jpeg", Show[BScallt, BSputt]]

```

```

Export["BSSigma.jpeg", Show[BScallSigma, BSputSigma]]

```

```

BSX.jpeg

```

```

BSr.jpeg

```

```

BST.jpeg

```

```

BSSigma.jpeg

```

```

Export["BSS.jpeg", Show[BScallS, BSputS]]

```

```

BSS.jpeg

```

Příloha G: Black-Scholesův model oceňování evropských opcí – 2D a 3D zobrazení

```

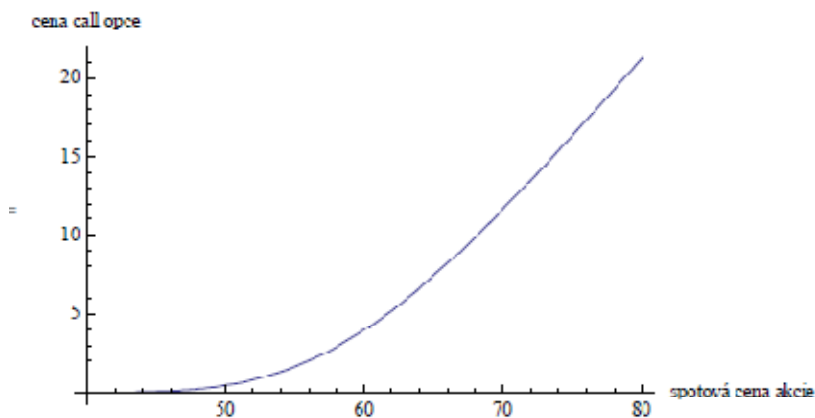
Clear[S, X, σ, t, r, q];
cdfNorm[x_] := (1 - Erf[x / Sqrt[2]]) / 2;
d1[S_, σ_, X_, t_, r_] := ((r + σ * σ / 2) * t + Log[S / X]) / (σ * Sqrt[t]);
d2[S_, σ_, X_, t_, r_] := d1[S, σ, X, t, r] - σ * Sqrt[t];
BScall[S_, σ_, X_, t_, r_] :=
  S * cdfNorm[d1[S, σ, X, t, r]] - X * Exp[-r * t] * cdfNorm[d2[S, σ, X, t, r]];

```

```

X = 60; σ = 0.2; t = 0.5; r = 0.04; q = 0;
Plot[BScall[S, σ, X, t, r], {S, 40, 80}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"spotová cena akcie", "cena call opce"}]

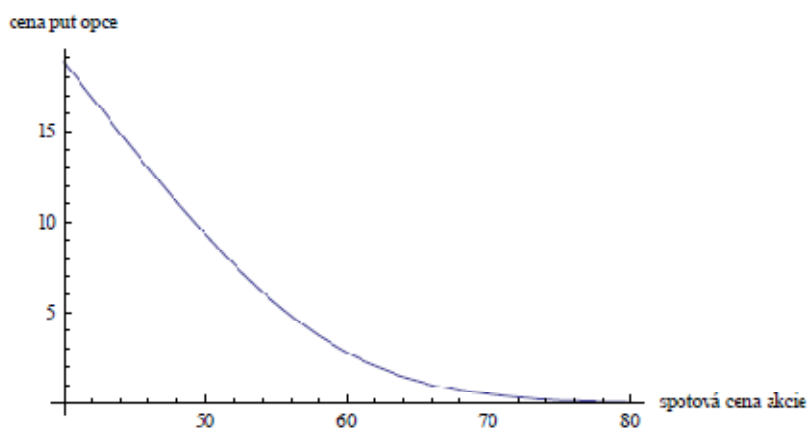
```



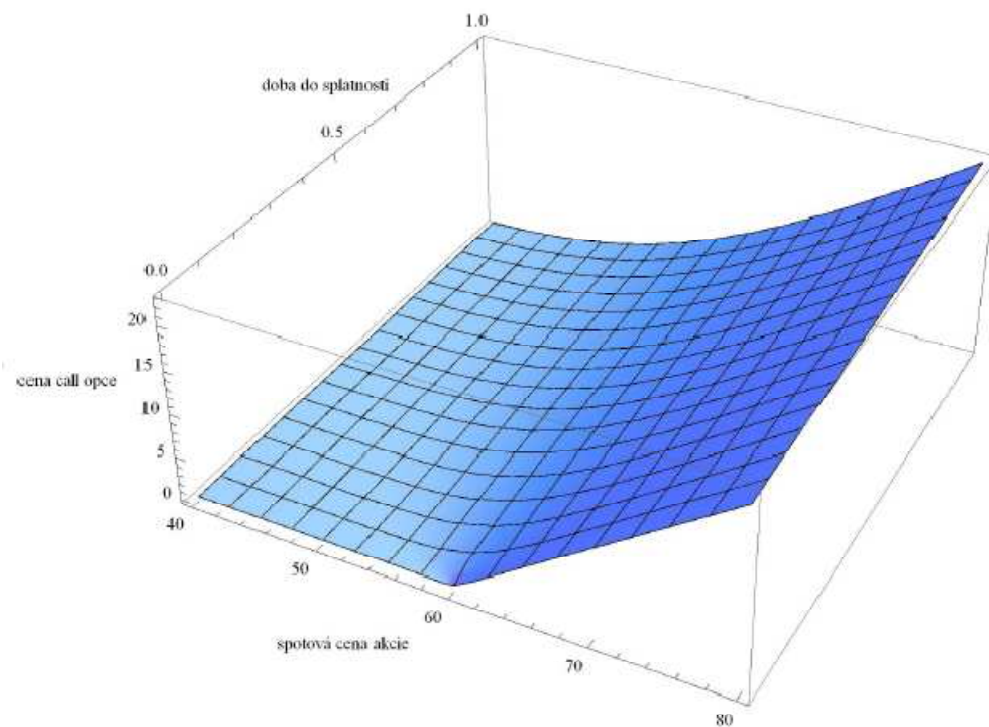
```

BSput[S_, σ_, X_, t_, r_] :=
  -S * cdfNorm[-d1[S, σ, X, t, r]] + X * Exp[-r * t] * cdfNorm[-d2[S, σ, X, t, r]]
X = 60; σ = 0.2; t = 0.5; r = 0.04; q = 0;
Plot[BSput[S, σ, X, t, r], {S, 40, 80}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"spotová cena akcie", "cena put opce"}]

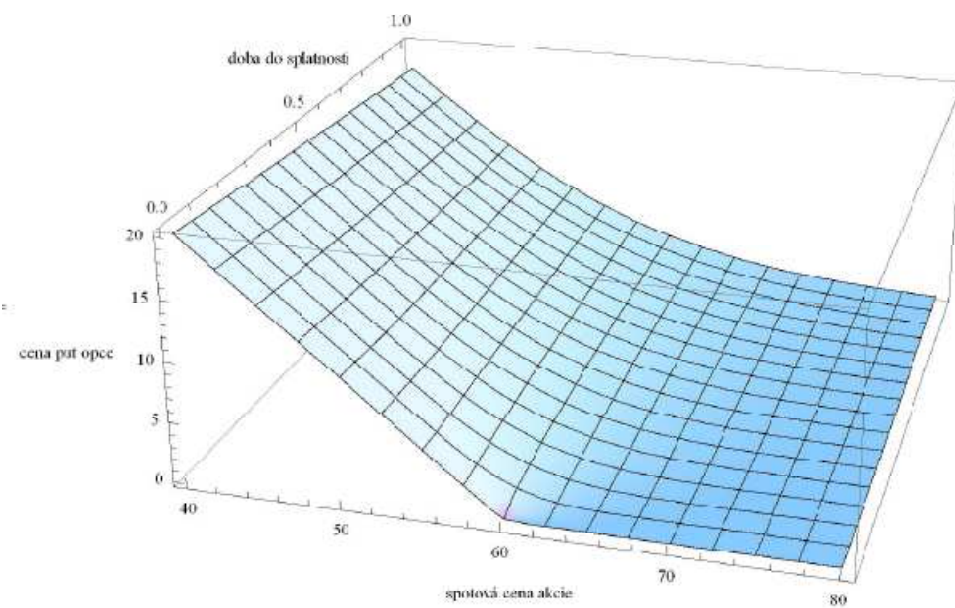
```



```
Plot3D[BScall[S,  $\sigma$ , X, t, r], {S, 40, 80}, {t, 0.001, 1}, PlotRange  $\rightarrow$  All,  
AxesLabel  $\rightarrow$  {"spotová cena akcie", "doba do splatnosti", "cena call opce"}]
```



```
Plot3D[BSpout[S,  $\sigma$ , X, t, r], {S, 40, 80}, {t, 0.001, 1}, PlotRange  $\rightarrow$  All,  
AxesLabel  $\rightarrow$  {"spotová cena akcie", "doba do splatnosti", "cena put opce"}]
```



Příloha H: Citlivosti opcí – Greeks, příklad 2D a 3D zobrazení

```

(* cdfNorm[x_]:=1/2*(1+Erf[x/Sqrt[2]]); ~~~ already declared ! *)
(* BS a-la pp.6-9, with the same but slightly explicit d1[], d2[] ! *)
d1expl[S_, σ_, K_, t_, r_, q_] :=
  ((r - q) * t + Log[S / K]) / (σ * Sqrt[t]) + (σ * Sqrt[t]) / 2;
d2expl[S_, σ_, K_, t_, r_, q_] :=
  ((r - q) * t + Log[S / K]) / (σ * Sqrt[t]) - (σ * Sqrt[t]) / 2;;
BScall[S_, v_, K_, t_, r_, q_] := S * Exp[-q * t] * cdfNorm[d1expl[S, v, K, t, r, q]] -
  K * Exp[-r * t] * cdfNorm[d2expl[S, v, K, t, r, q]];
BSput[S_, v_, K_, t_, r_, q_] :=
  -S * Exp[-q * t] * cdfNorm[-d1expl[S, v, K, t, r, q]] +
  K * Exp[-r * t] * cdfNorm[-d2expl[S, v, K, t, r, q]];
(* input data *)
K = 60; v = 0.29; r = 0.4; q = 0; t = 1;
Plot[BScall[S, v, K, t, r, q], {S, 50, 70}, PlotRange -> {{50, 70}, {0, 20}}]
(*orig {0,15}*)
Plot[BScall[S, v, K, t, r, q], {S, 50, 70}, PlotRange -> All]

(* Ex06 ~ sensitivity analysis, pp.154-155 *)
Clear[S, v, K, t, r, q];
BScallDelta[S_, v_, K_, t_, r_, q_] = Evaluate[D[BScall[S, v, K, t, r, q], S]];
BSputDelta[S_, v_, K_, t_, r_, q_] = Evaluate[D[BSput[S, v, K, t, r, q], S]];

BScallGamma[S_, v_, K_, t_, r_, q_] =
  Evaluate[D[BScall[S, v, K, t, r, q], {S, 2}]];
BSputGamma[S_, v_, K_, t_, r_, q_] = Evaluate[D[BSput[S, v, K, t, r, q], {S, 2}]];

BScallTheta[S_, v_, K_, t_, r_, q_] = -Evaluate[D[BScall[S, v, K, t, r, q], t]];
BSputTheta[S_, v_, K_, t_, r_, q_] = -Evaluate[D[BSput[S, v, K, t, r, q], t]];

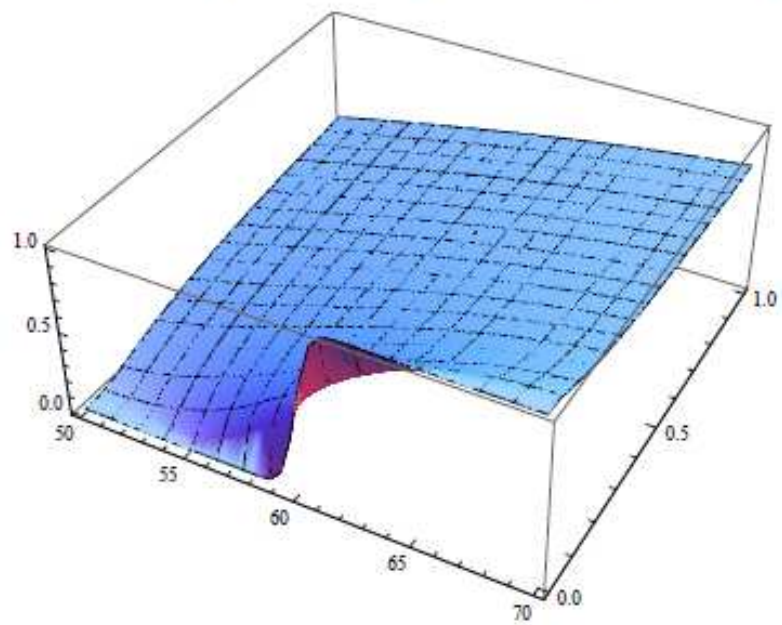
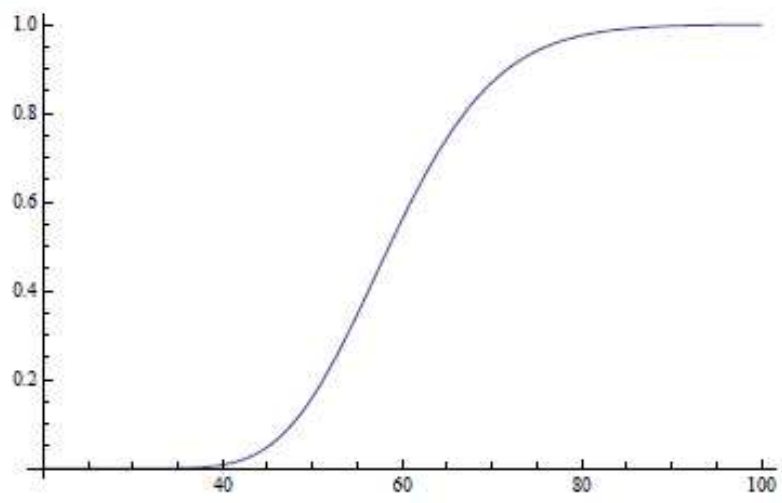
BScallRho[S_, v_, K_, t_, r_, q_] = Evaluate[D[BScall[S, v, K, t, r, q], r]];
BSputRho[S_, v_, K_, t_, r_, q_] = Evaluate[D[BSput[S, v, K, t, r, q], r]];

BScallVega[S_, v_, K_, t_, r_, q_] = Evaluate[D[BScall[S, v, K, t, r, q], v]];
BSputVega[S_, v_, K_, t_, r_, q_] = Evaluate[D[BSput[S, v, K, t, r, q], v]];
(* Ch.7.4 explore Delta *)
Simplify[BScallDelta[S, v, K, t, r, q]]

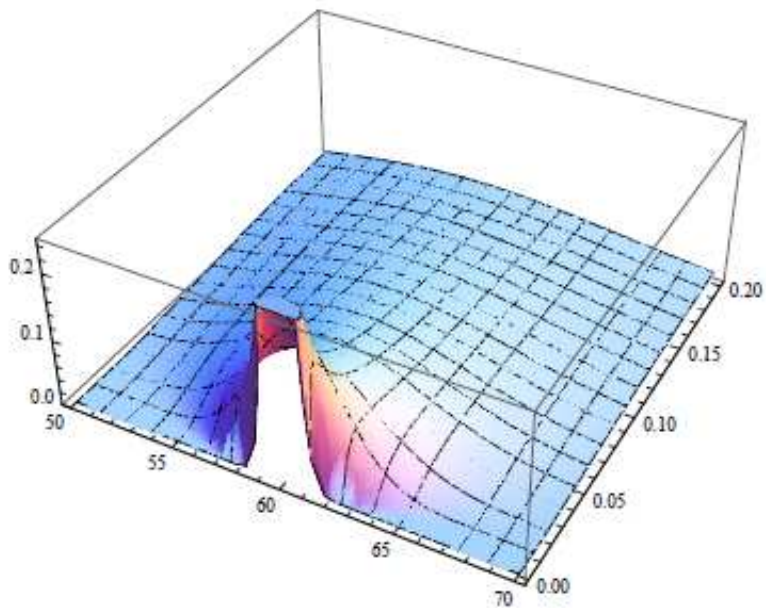
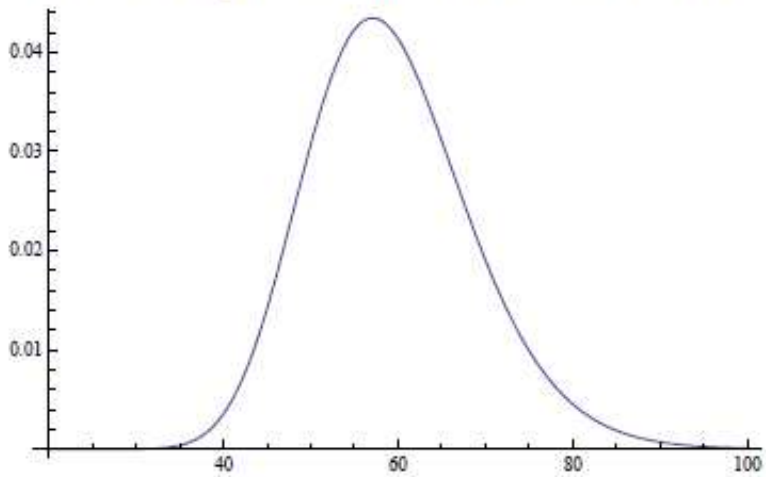
-----
(* input data *)
K = 60; v = 0.29; r = 0.4; q = 0; t = 0.3;

Plot[BScallDelta[S, 0.29, 60, 0.3, 0.04, 0], {S, 20., 100.}]
Plot3D[BScallDelta[S, 0.29, 60, t, 0.04, 0],
  {S, 50., 70.}, {t, 0.001, 1}, PlotPoints -> 40]

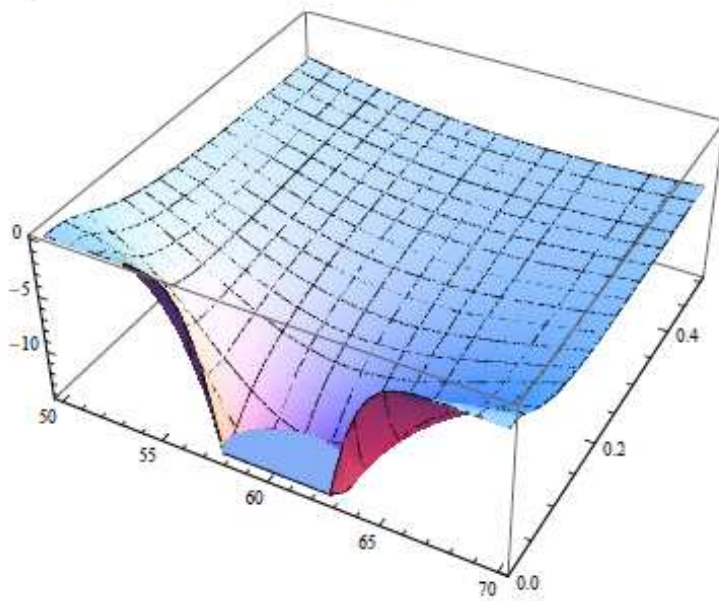
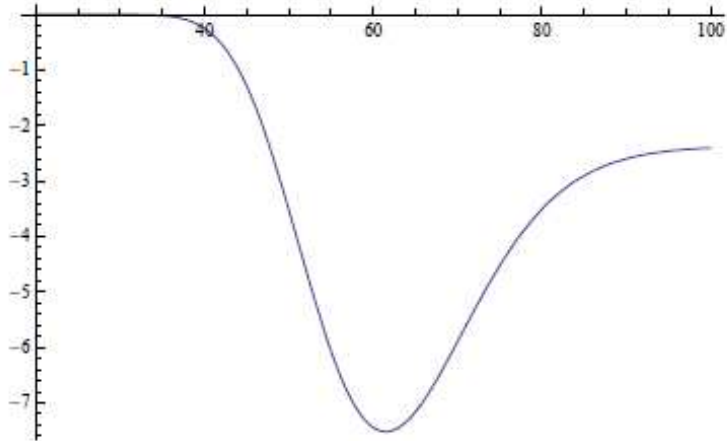
```



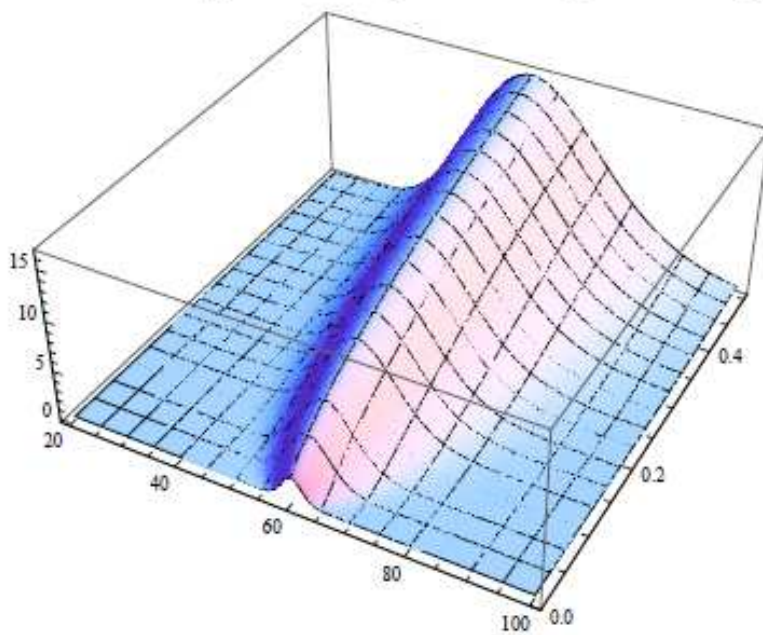
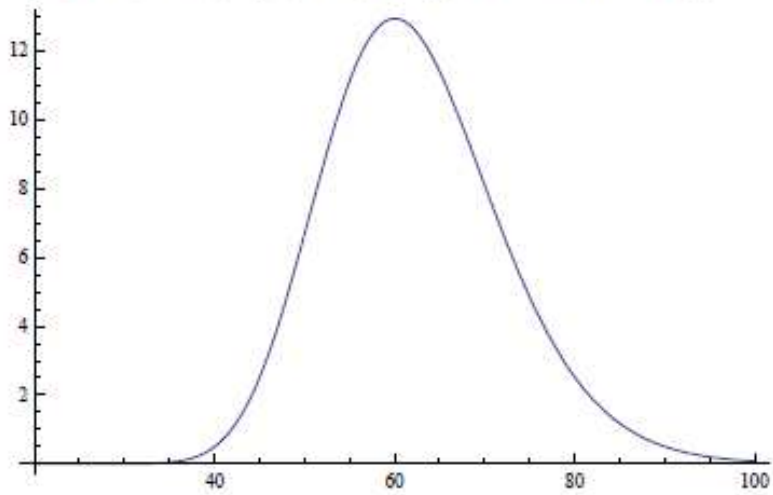
```
(* Ch.7.5 explore Gamma *)
Clear[S, v, K, t, r, q];
BScallGamma[S, v, K, t, r, q]
Plot[BScallGamma[S, 0.29, 60, 0.3, 0.04, 0], {S, 20., 100.}]
Plot3D[BScallGamma[S, 0.29, 60, t, 0.04, 0], {S, 50., 70.},
{t, 0.001, 0.2}, PlotPoints -> 40, PlotRange -> {0, 0.25}]
```



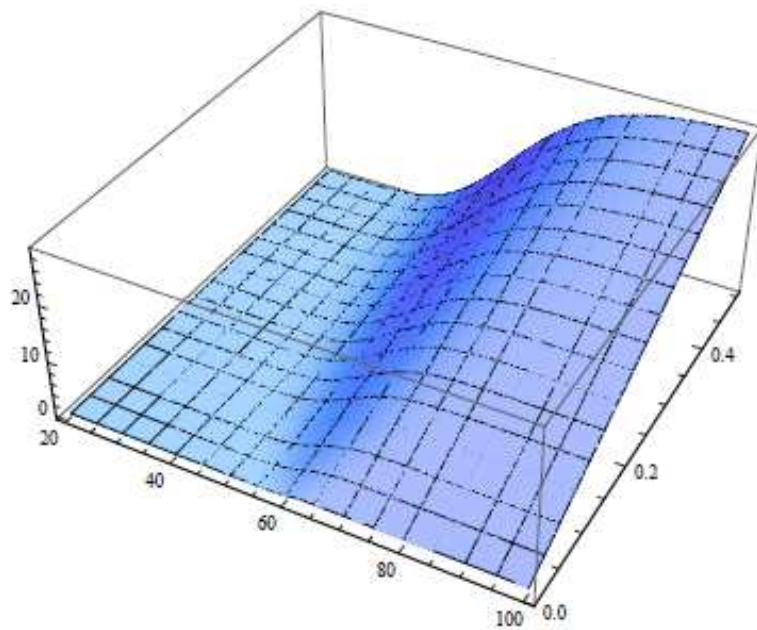
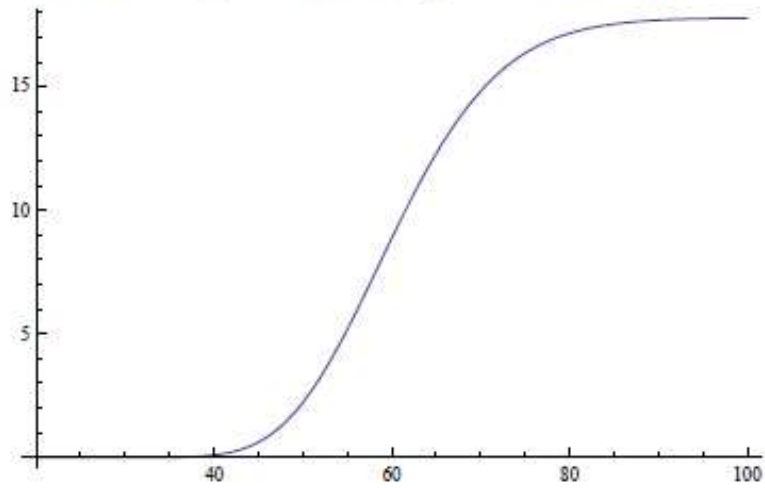
```
(* Ch.7.6 explore Theta *)
Clear[s, v, K, t, r, q];
BScallTheta[s, v, K, t, r, q]
Plot[BScallTheta[s, 0.29, 60, 0.3, 0.04, 0], {s, 20., 100.}]
Plot3D[BScallTheta[s, 0.29, 60, t, 0.04, 0],
  {s, 50., 70.}, {t, 0.01, 0.5}, PlotPoints -> 40]
```



```
(* Ch.7.7 explore Vega *)  
Clear[S, v, K, t, r, q];  
BScallVega[S, v, K, t, r, q]  
Plot[BScallVega[S, 0.29, 60, 0.3, 0.04, 0], {S, 20., 100.}]  
Plot3D[BScallVega[S, 0.29, 60, t, 0.04, 0],  
{S, 20., 100.}, {t, 0.01, 0.5}, PlotPoints -> 40]
```



```
(* Ch.7.8 explore Rho *)  
Clear[s, v, K, t, r, q];  
BScallRho[s, v, K, t, r, q]  
Plot[BScallRho[s, 0.29, 60, 0.3, 0.04, 0], {s, 20., 100.}]  
Plot3D[BScallRho[s, 0.29, 60, t, 0.04, 0],  
{s, 20., 100.}, {t, 0.01, 0.5}, PlotPoints -> 40]
```



Příloha I: Srovnání binomického modelu oceňování evropských opcí s Black-Scholesovým modelem oceňování evropských opcí

```
(*Definice binomickeho modelu*)
Clear[up, down, R, P, Q, EuropeanOption, EuropeanCall, EuropeanPut, mean];
up[n_, sigma_, T_] := N[ Exp[ Sqrt[T/n] sigma ] ];
down[n_, sigma_, T_] := 1 / up[n, sigma, T];
R[n_, Rf_, T_] := N[ Exp[ Rf T / n ] ];
P[up_, down_, r_] := N[ (r - down) / (up - down) / r];
Q[up_, down_, r_] := N[ 1 / r - P[up, down, r]];
mean[m_List] := Apply[ Plus, m ] / Length[m];

EuropeanOption[s_, sigma_, T_, Rf_, exercise_Function, n_] :=
Module[{u = up[n, sigma, T], d = down[n, sigma, T],
r = R[n, Rf, T], p, q},
  p = P[u, d, r];
  q = Q[u, d, r];
  Sum[ exercise[s * u^j * d^(n - j)] *
Binomial[n, j] * p^j * q^(n - j), {j, 0, n}]];

EuropeanCall[s_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_] :=
  EuropeanOption[ s, sigma, T, Rf, Max[# - X, 0] &, n];
EuropeanPut[s_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_] :=
  EuropeanOption[ s, sigma, T, Rf, Max[X - #, 0] &, n];

(*Definice Black-Scholesova modelu*)
Clear[s, X, sigma, t, r, q];
cdfNorm[x_] := (1 + Erf[x / Sqrt[2]]) / 2;
d1[s_, sigma_, X_, t_, r_] := ((r + sigma * sigma / 2) * t + Log[s / X]) / (sigma * Sqrt[t]);
d2[s_, sigma_, X_, t_, r_] := d1[s, sigma, X, t, r] - sigma * Sqrt[t];
BScall[s_, sigma_, X_, t_, r_] :=
  s * cdfNorm[d1[s, sigma, X, t, r]] - X * Exp[-r * t] * cdfNorm[d2[s, sigma, X, t, r]];
BSput[s_, sigma_, X_, t_, r_] :=
  -s * cdfNorm[-d1[s, sigma, X, t, r]] + X * Exp[-r * t] * cdfNorm[-d2[s, sigma, X, t, r]]

(*Tabulky hodnot cen call opci pro binomicky model*)
Table[EuropeanCall[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180 / 14], {s, 175, 225, 5}]
(*období 14 dnů*)
{0.348045, 0.785859, 1.84263, 3.39144, 5.48294,
 8.56895, 12.0272, 16.1128, 20.5493, 25.1903, 30.057}

Table[EuropeanCall[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180 / 7], {s, 175, 225, 5}]
(*období 1 t den*)
{0.376147, 0.899252, 1.85786, 3.39493, 5.59927,
 8.48489, 11.9965, 16.103, 20.5591, 25.2429, 30.0724}

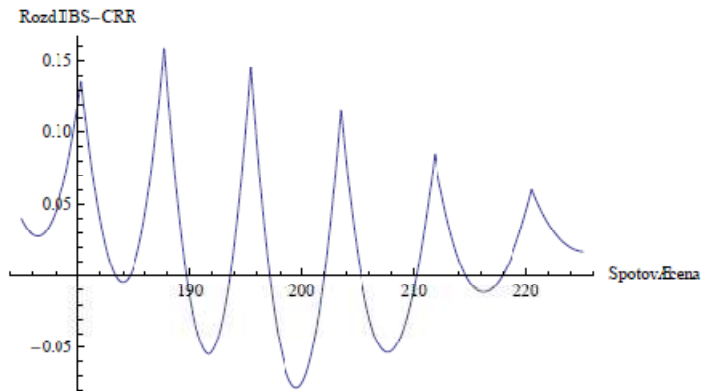
Table[EuropeanCall[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180], {s, 175, 225, 5}]
(*období 1 den*)
{0.385735, 0.900537, 1.84752, 3.37588, 5.589,
 8.48558, 12.0441, 16.1084, 20.5462, 25.2336, 30.0727}
```

```
(*Tabulky hodnot cen call opcí Black-Scholesuv model*)
Table[BScall[s, 0.102088, 200, 0.5, 0.05], {s, 175, 225, 5}]
{0.387604, 0.903775, 1.8493, 3.37593, 5.58444,
 8.4939, 12.0406, 16.1042, 20.5447, 25.2344, 30.0741}
```

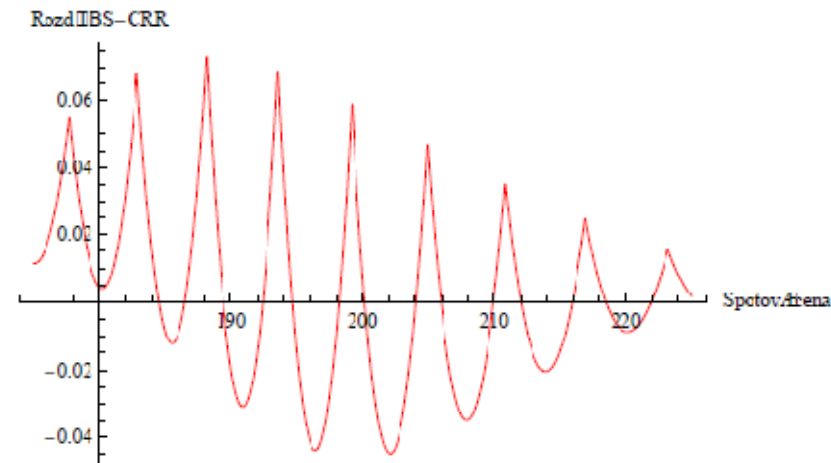
```
Plot[{EuropeanCall[s, 60, 0.2, 0.5, 0.04, 30],
  BScall[s, 0.102088, 200, 0.5, 0.05]}, {s, 40, 80}, PlotRange -> All]
```

```
(*Graf rozdilu Black-
Scholesova a binomickeho modelu ocenovani pro call opci*)
```

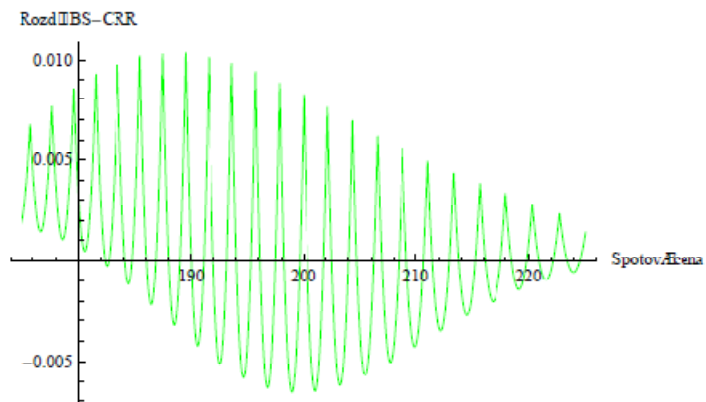
```
p1Call14d = Plot[{-EuropeanCall[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180 / 14] +
  BScall[s, 0.102088, 200, 0.5, 0.05]}, {s, 175, 225},
  PlotRange -> All, AxesLabel -> {"Spotov cena", "Rozdíl BS-CRR"}]
```



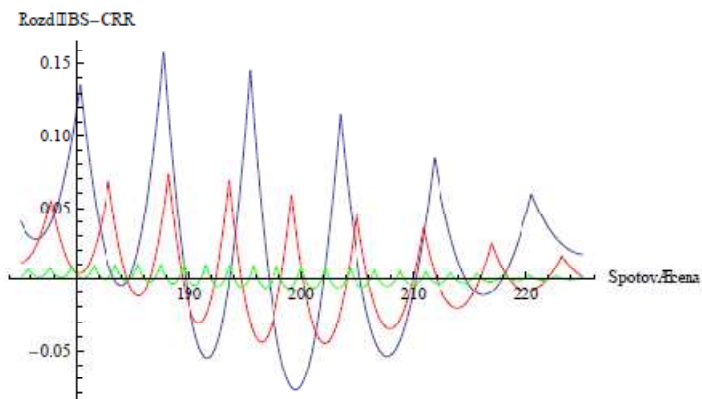
```
p2Call17d = Plot[{-EuropeanCall[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180 / 7] +
  BScall[s, 0.102088, 200, 0.5, 0.05]}, {s, 175, 225}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> Red, AxesLabel -> {"Spotov cena", "Rozdíl BS-CRR"}]
```




```
p3Call11d = Plot[(-EuropeanCall[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180] +
  BScall[s, 0.102088, 200, 0.5, 0.05]), {s, 175, 225}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> Green, AxesLabel -> {"Spotov cena", "Rozdíl BS-CRR"}]
```



```
Show[p1Call14d, p2Call17d, p3Call11d]
(*predchoz tri grafy ukazany v jednom grafu*)
```



```
Export["BSCRR14d.jpeg", p1Call14d]
Export["BSCRR7d.jpeg", p2Call17d]
Export["BSCRR1d.jpeg", p3Call11d]
Export["BSCRR14-7-1d.jpeg", Show[lp1Call14d, lp2Call17d, lp3Call11d]]
```

BSCRR14d.jpeg

BSCRR7d.jpeg

BSCRR1d.jpeg

BSCRR14-7-1d.jpeg

(*Tabulky hodnot cen put opci pro binomicky model*)

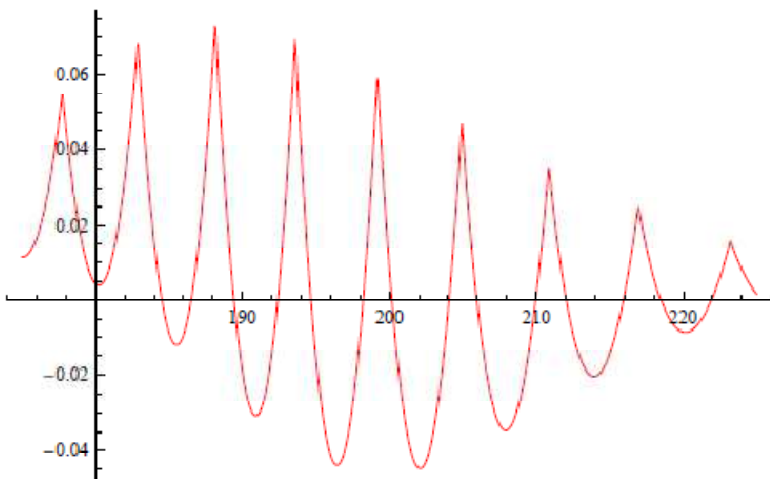
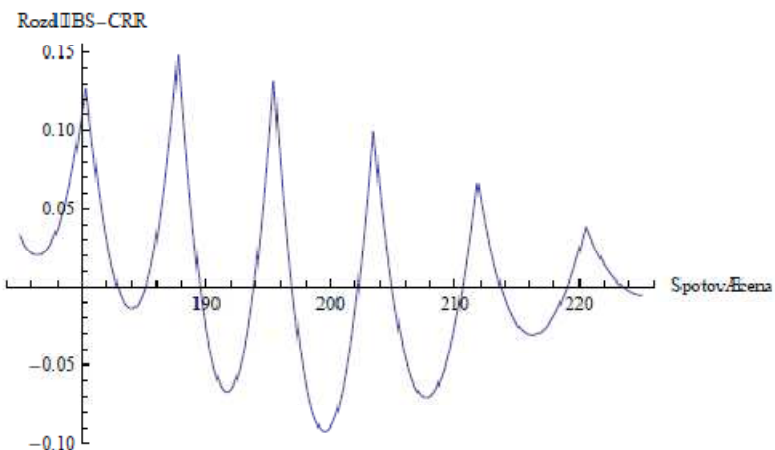
```
Table[EuropeanPut[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180 / 14], {s, 175, 225, 5}]
{20.4168, 15.8562, 11.9145, 8.4649, 5.55797,
  3.64556, 2.10541, 1.19254, 0.630609, 0.273255, 0.141508}
```

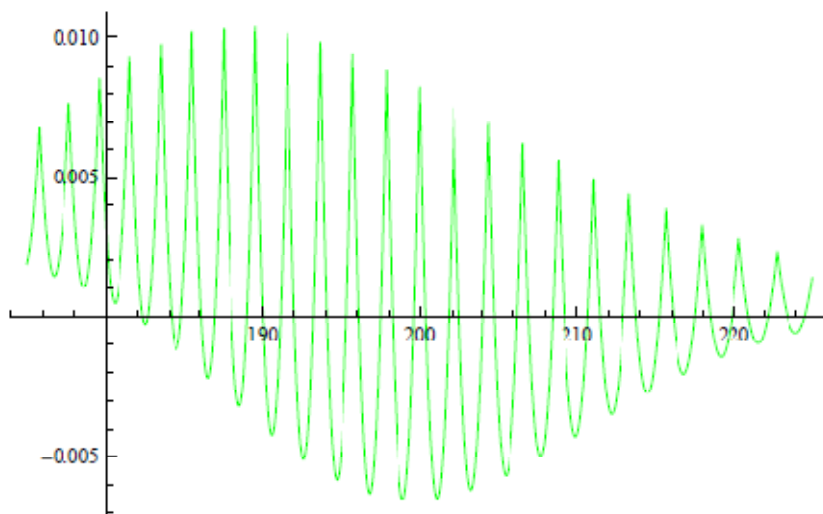
```
Table[EuropeanPut[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180 / 7], {s, 175, 225, 5}]
{20.4381, 15.9612, 11.9198, 8.45692, 5.66125,
 3.54688, 2.05844, 1.16495, 0.621101, 0.304865, 0.13436}
```

```
Table[EuropeanPut[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180], {s, 175, 225, 5}]
{20.4477, 15.9625, 11.9095, 8.43786, 5.65098,
 3.54756, 2.10612, 1.17039, 0.608146, 0.295621, 0.134722}
```

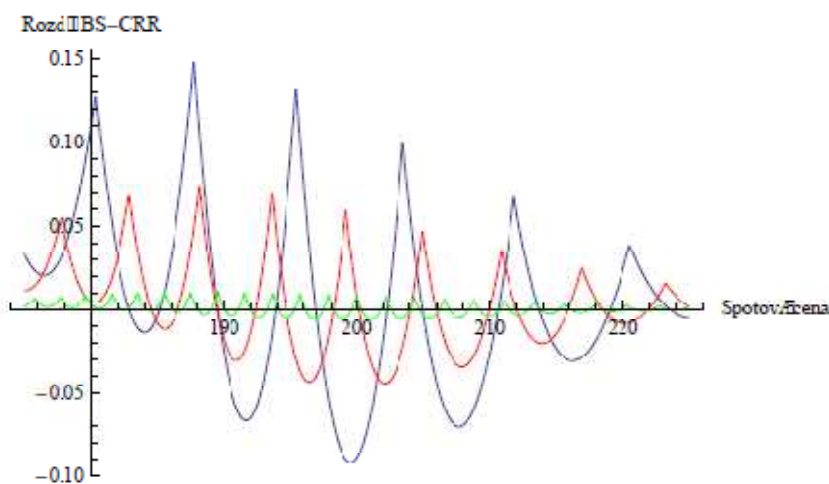
```
(*Tabulky hodnot cen put opcí Black-Scholesov model*)
Table[BSput[s, 0.102088, 200, 0.5, 0.05], {s, 175, 225, 5}]
{20.4496, 15.9658, 11.9113, 8.43791, 5.64642,
 3.55588, 2.10259, 1.16616, 0.606711, 0.296359, 0.13612}
```

```
(*Graf rozdilu Black-
Scholesova a binomickeho modelu ocenovani pro call opci*)
lp1Put14d = Plot[(-EuropeanPut[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180 / 14] +
  BSput[s, 0.102088, 200, 0.5, 0.05]), {s, 175, 225},
  PlotRange -> All, AxesLabel -> {"Spotov cena", "Rozdíl BS-CRR"}]
lp2Put7d = Plot[(-EuropeanPut[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180 / 7] +
  BSput[s, 0.102088, 200, 0.5, 0.05]),
 {s, 175, 225}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Red]
lp3Put1d = Plot[(-EuropeanPut[s, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, 180] +
  BSput[s, 0.102088, 200, 0.5, 0.05]),
 {s, 175, 225}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Green]
```





Show[lp1Put14d, lp2Put7d, lp3Put1d]
 (*predchozi tri grafy ukazany v jednom grafu*)



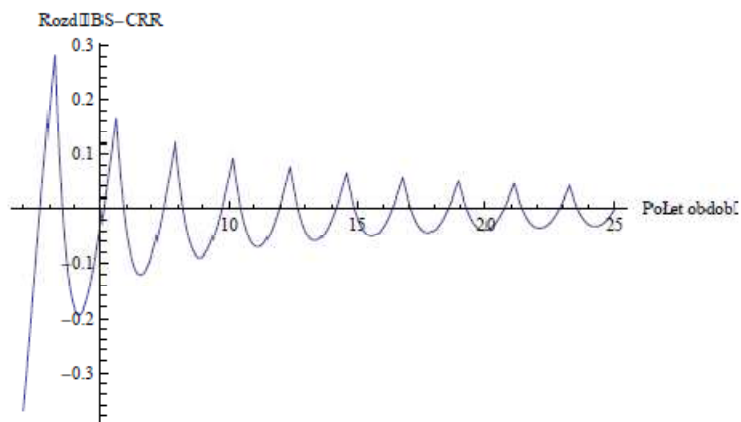
Export["BSCRRput14-7-1d.jpeg", Show[lp1Put14d, lp2Put7d, lp3Put1d]]
 BSCRRput14-7-1d.jpeg

(*Rozdil ceny opce urcene Black-Scholesovym a binomickym modelem v zavislosti na poctu obdobi*)

```

BSCRR25n = Plot[(-EuropeanPut[210, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, n] +
  BSput[210, 0.102088, 200, 0.5, 0.05]), {n, 2, 25},
  PlotRange -> All, AxesLabel -> {"Polet obdobi", "Rozdiel BS-CRR"}]

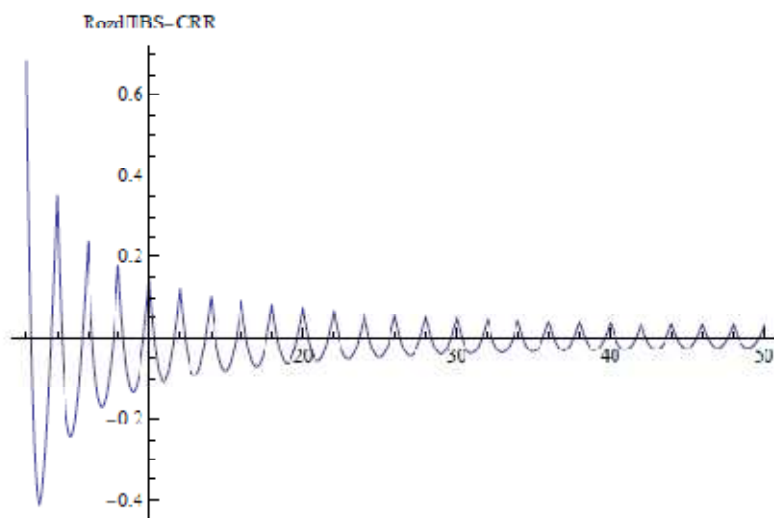
```



```

BSCRR50n = Plot[(-EuropeanPut[200, 200, 0.102088, 0.5, 0.05, n] +
  BSput[200, 0.102088, 200, 0.5, 0.05]), {n, 2, 50},
  PlotRange -> All, AxesLabel -> {"", "Rozdiel BS-CRR"}]

```



```
Export["BSCRR25n.jpeg", BSCRR25n]
```

```
BSCRR25n.jpeg
```

```
Export["BSCRR50n.jpeg", BSCRR50n]
```

```
BSCRR50n.jpeg
```

Příloha J: Algoritmus pro demonstrační projekt Wolfram Demonstrations Project
s názvem American Call and Put Option

```

AmericanOptionBinomialTree[S0_, n_, σ_,
  T_, Rf_, div_, exercise_Function, opts___] := Module[
  {u = N[Exp[Sqrt[T/n] σ]], d, r = N[Exp[(Rf - div) T/n]], disc = N[Exp[-Rf T/n]],
  vert, m, exers, AdjFun, VertNumber, Successors, Predecessors,
  Adjoints, AdjLists, stocklabels, options, optionvalues, optionlabels,
  vect1 = N[{0.5, Sqrt[3]/2}], vect2 = N[{0.5, -Sqrt[3]/2}], p, q, fx, initial},
  d = 1/u; p = N[ $\frac{\text{disc} * (r - d)}{(u - d)}$ ]; q = N[disc - p];
  vert[level_] := Flatten[
    Table[k vect2 + (1 - k) vect1, {k, 0, level}, {k, 0, 1}], 1];
  m = Length[vert[n]];
  VertNumber[node_, level_] := level (level + 1) / 2 + node + 1;
  Successors[node_, level_] /; level < n :=
    {VertNumber[node, level + 1], VertNumber[node + 1, level + 1]};
  Successors[node_, n] := {};
  Predecessors[node_, level_] /; 0 < node < level :=
    {VertNumber[node - 1, level - 1], VertNumber[node, level - 1]};
  Predecessors[0, level_] /; level > 0 := {VertNumber[0, level - 1]};
  Predecessors[level_, level_] /; level > 0 := {VertNumber[level - 1, level - 1]};
  Predecessors[0, 0] = {};
  Adjoints[node_, level_] /; level < n :=
    Join[Predecessors[node, level], Successors[node, level]];
  Adjoints[node_, n] := Predecessors[node, n];
  AdjLists = Flatten[Append[Table[Adjoints[node, level], {level, 0, n - 1},
    {node, 0, level}], Table[Predecessors[node, n], {node, 0, n}], 1];
  AdjFun[i_, j_] /; i ≤ j := If[MemberQ[AdjLists[[i]], j], 1, 0];
  AdjFun[i_, j_] /; i > j := AdjFun[j, i];
  initial = Table[exercise[S0 d^node u^(n - node)], {node, 0, n}];
  options = Reverse[
    NestList[Max/@Transpose[{Table[exercise[S0 d^r u^(Length[#] - 2 - r)],
      {r, 0, Length[#] - 2}], p + Drop[#, -1] +
      q + Drop[RotateLeft[#, -1]]] &, initial, Length[initial] - 1];
  fx[node_, level_] /; level < n && {p, q} . {options[[level + 2, node + 1]],
    options[[level + 2, node + 2]]} <
    exercise[S0 d^node u^(level - node)] := VertNumber[node, level];
  fx[node_, n] /; options[[n + 1, node + 1]] > 0 := VertNumber[node, n];
  fx[node_, level_] := Sequence[];
  exers = Flatten[Table[fx[i, k], {k, 0, n}, {i, 0, k}]];
  optionlabels = NumberForm[#, 4] & /@ Flatten[options]; stocklabels =
    NumberForm[#, 4] & /@ Flatten[Table[S0 d^i u^(k - 1), {k, 0, n}, {i, 0, k}]];
  GraphPlot[Table[AdjFun[i, j], {j, 1, Length[vert[n]]},
    {i, 1, Length[vert[n]]}], opts, VertexCoordinateRules -> MapThread[
    Rule, {Range[Length[vert[n]]], vert[n]}, EdgeRenderingFunction ->
    (If[OrderedQ[#2], {Arrowheads[0.03], Arrow[#1, 0.2]}, Line[#1]] &),
    AspectRatio -> 1] /. Tooltip[Point[i_, i_] =>
    Tooltip[If[MemberQ[exers, i], {Red, Text[stocklabels[[i]], i}],
      {Black, Text[stocklabels[[i]], i}], optionlabels[[i]]]]]

```

```

CompiledAmer = Compile[{{initial, _Real, 1}, {p, _Real, 0}, {q, _Real, 0},
  {S, _Real, 0}, {u, _Real, 0}, {d, _Real, 0}, {K, _Real, 0}, {l, _Integer}},
  Last[Nest[Max/@Transpose[{Table[Max[1 * (S d^r u^Length[#1]-2-r - K), 0],
    {r, 0, Length[#1] - 2}], p Drop[#1, -1] +
    q Drop[RotateLeft[#1], -1]}] &, initial, Length[initial] - 1]];

AmericanOption[S0_, n_, σ_, T_, Rf_, div_, K_, l_Integer: 1] :=
Module[{initial, u = N[Exp[Sqrt[T/n] σ]], d, r = N[Exp[(Rf - div) T/n]],
  disc = N[Exp[-Rf T/n]], p, q}, d = 1/u; p = N[ $\frac{\text{disc} * (r - d)}{(u - d)}$ ];
q = N[disc - p]; initial = Table[Max[1 * (S0 d^node u^n-node - K), 0], {node, 0, n}];
CompiledAmer[initial, p, q, S0, u, d, K, l]]

```

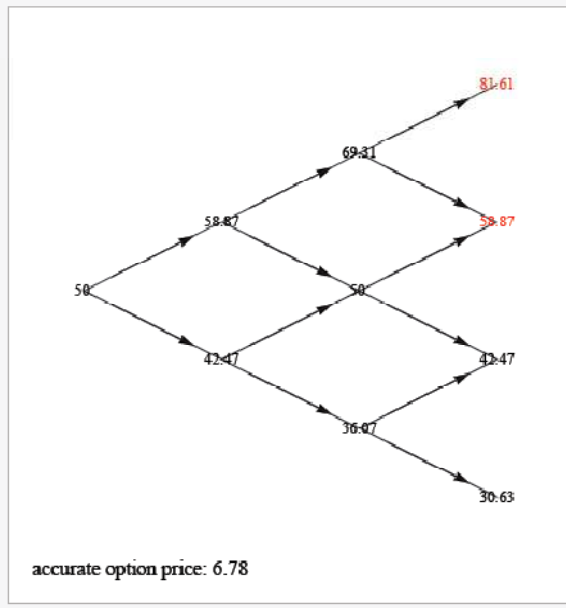
```

Manipulate[
Grid[{Function[1, Column[{AmericanOptionBinomialTree[price, steps, volatility,
  time, riskfree, dividend, Max[1 * (# - strike), 0] &,
  ImageSize → {300, 300}], Text@Row[{"accurate option price: ",
  NumberForm[AmericanOption[price, 100, volatility,
  time, riskfree, dividend, strike, 1], 3]}]]]/@λ}],
{{λ, {1}, ""}, {{1} → "call option", {-1} → "put option"},
ControlPlacement →
Top},
{{price, 50, "price of stock"}, 10, 100, .01, Appearance → "Labeled",
ImageSize → Tiny}, {{strike, 50, "option strike price"},
10, 100, .1, Appearance → "Labeled", ImageSize → Tiny},
{{time, 0.5, "time to expiry"}, 0.01, 1, .01, Appearance → "Labeled",
ImageSize → Tiny}, {{dividend, 0, "continuous dividend rate"},
0, 1, .01, Appearance → "Labeled", ImageSize → Tiny},
{{volatility, 0.4, "volatility of stock"}, 0.001, 0.99,
.001, Appearance → "Labeled", ImageSize → Tiny},
{{riskfree, 0.1, "risk-free interest rate"}, 0, 1,
.01, Appearance → "Labeled", ImageSize → Tiny},
{{steps, 3, "number of steps"}, 1, 10, 1, Appearance → "Labeled",
ImageSize → Tiny}, SaveDefinitions → True, ControlPlacement → Left]

```

call option put option

- price of stock
- option strike price
- time to expiry
- continuous dividend rate
- volatility of stock
- risk-free interest rate
- number of steps



Příloha K: Srovnání americké a evropské call a put opce vypočítané pomocí binomického modelu oceňování opcí

```
(* Definovani binomickeho modelu ocenovani americkych opci *)
up[n_, sigma_, T_] := N[Exp[Sqrt[T/n] sigma]];
down[n_, sigma_, T_] := 1/up[n, sigma, T];
R[n_, Rf_, T_] := N[Exp[Rf T/n]];
P[up_, down_, r_] := N[(r - down) / (up - down) / r];
Q[up_, down_, r_] := N[1 / r - P[up, down, r]];
AmericanOption[s_, n_, sigma_, T_, Rf_, exercise_Function] :=
Module[{u = up[n, sigma, T],
d = down[n, sigma, T],
r = R[n, Rf, T], p, q, OpRecurse},
p = P[u, d, r]; q = Q[u, d, r];
OpRecurse[node_, level_] :=
OpRecurse[node, level] = If[level == n, exercise[s * d^node * u^(level - node)],
Max[{p, q} * {OpRecurse[node, level + 1], OpRecurse[node + 1, level + 1]},
exercise[s * d^node * u^(level - node)]];
OpRecurse[
0,
0]];

AmericanCall[X_, s_, n_, sigma_, T_, Rf_] :=
AmericanOption[s, n, sigma, T, Rf, Max[#1 - X, 0] &];
AmericanPut[X_, s_, n_, sigma_, T_, Rf_] :=
AmericanOption[s, n, sigma, T, Rf, Max[X - #1, 0] &];

up[n_, sigma_, T_] := N[Exp[Sqrt[T/n] sigma]];
down[n_, sigma_, T_] := 1/up[n, sigma, T];
R[n_, Rf_, T_] := N[Exp[Rf T/n]];
P[up_, down_, r_] := N[(r - down) / (up - down) / r];
Q[up_, down_, r_] := N[1 / r - P[up, down, r]];

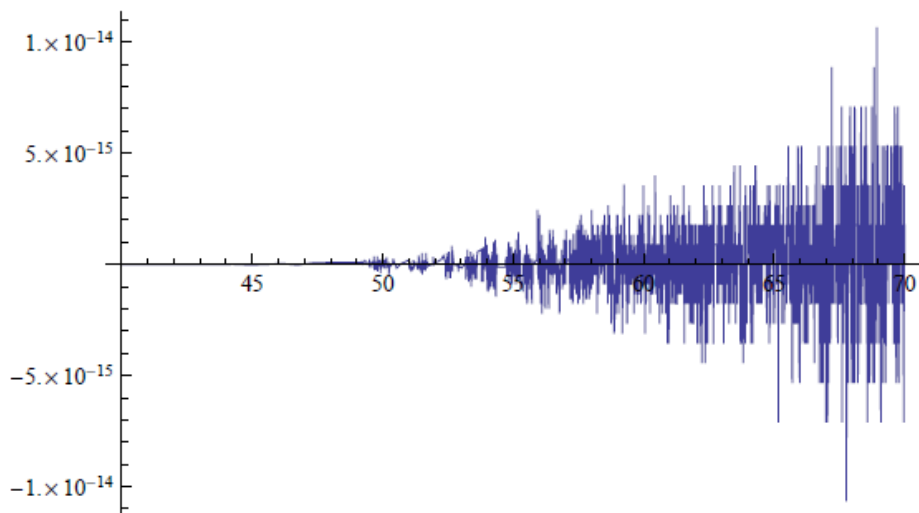
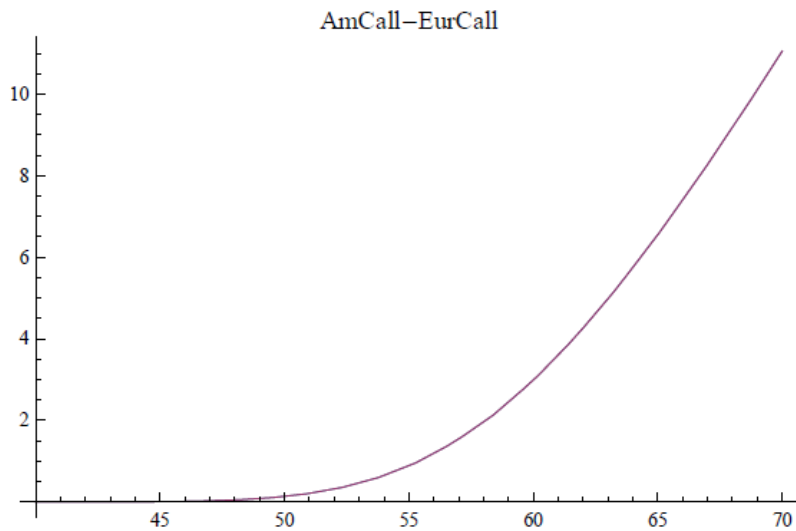
(* Definovani binomickeho modelu ocenovani evropskych opci *)
EuropeanOption[s_, sigma_, T_, Rf_, exercise_Function, n_] :=
Module[{u = up[n, sigma, T], d = down[n, sigma, T],
r = R[n, Rf, T], p, q},
p = P[u, d, r];
q = Q[u, d, r];
Sum[exercise[s * u^j * d^(n - j)] *
Binomial[n, j] * p^j * q^(n - j), {j, 0, n}]];
EuropeanCall[s_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_] :=
EuropeanOption[s, sigma, T, Rf, Max[# - X, 0] &, n];
EuropeanPut[s_, X_, sigma_, T_, Rf_, n_] :=
EuropeanOption[s, sigma, T, Rf, Max[X - #, 0] &, n];
```


(*Zobrazeni ceny americke a evropske call opce v jednom grafu*)

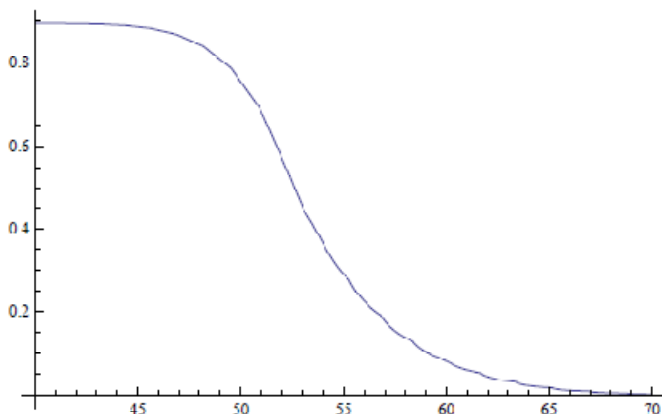
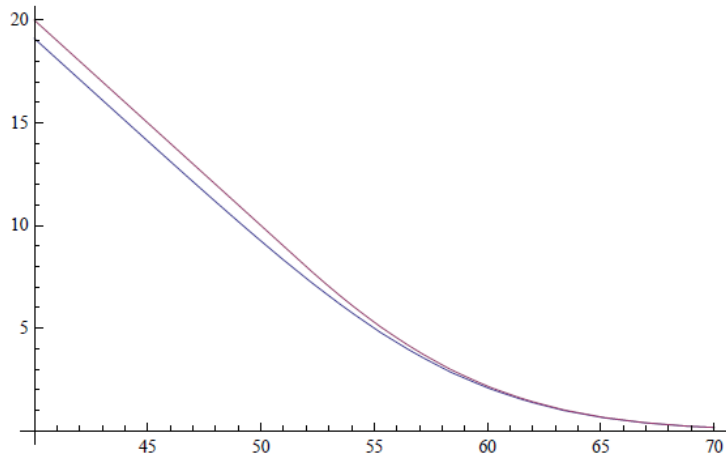
```
Plot[{EuropeanCall[s, 60, 0.15, 0.5, 0.03, 60],  
      AmericanCall[60, s, 60, 0.15, 0.5, 0.03]},  
      {s, 40, 70}, PlotRange -> All, PlotLabel -> "AmCall-EurCall"]
```

(*Zobrazeni rozdilu ceny americke a evropske call opce*)

```
Plot[(-EuropeanCall[s, 60, 0.15, 0.5, 0.03, 60] +  
      AmericanCall[60, s, 60, 0.15, 0.5, 0.03]),  
      {s, 40, 70}, PlotRange -> All, PlotLabel -> "AmCall-EurCall"]
```



```
(*Zobrazeni ceny americke a evropske put opce v jednom grafu*)
Plot[{EuropeanPut[s, 60, 0.15, 0.5, 0.03, 60],
      AmericanPut[60, s, 60, 0.15, 0.5, 0.03]}, {s, 40, 70}, PlotRange -> All]
(*Zobrazeni rozdilu ceny americke a evropske put opce*)
Plot[{-EuropeanPut[s, 60, 0.15, 0.5, 0.03, 60] +
      AmericanPut[60, s, 60, 0.15, 0.5, 0.03]}, {s, 40, 70}, PlotRange -> All]
```



```
(*Export obrazku za ucelem vlozeni do textu*)
Export["AmCall-EurCall.jpeg", Plot[{EuropeanCall[s, 60, 0.15, 0.5, 0.03, 60],
      AmericanCall[60, s, 60, 0.15, 0.5, 0.03]}, {s, 40, 70}, PlotRange -> All, PlotLabel -> "AmCall-EurCall"]]
AmCall-EurCall.jpeg

Export["AmCallEurCall.jpeg", Plot[{-EuropeanCall[s, 60, 0.15, 0.5, 0.03, 60] +
      AmericanCall[60, s, 60, 0.15, 0.5, 0.03]}, {s, 40, 70}, PlotRange -> All, PlotLabel -> "AmCall-EurCall"]]
AmCallEurCall.jpeg

Export["AmPutEurPut.jpeg", Plot[{EuropeanPut[s, 60, 0.15, 0.5, 0.03, 60],
      AmericanPut[60, s, 60, 0.15, 0.5, 0.03]}, {s, 40, 70}, PlotRange -> All]]
AmPutEurPut.jpeg

Export["AmPut-EurPut.jpeg", Plot[{-EuropeanPut[s, 60, 0.15, 0.5, 0.03, 60] +
      AmericanPut[60, s, 60, 0.15, 0.5, 0.03]}, {s, 40, 70}, PlotRange -> All]]
AmPut-EurPut.jpeg
```

Abstrakt

VOSTÁRKOVÁ, Š. *Matematické modely oceňování finančních derivátů – základy teorie a vybrané aplikace*. Diplomová práce. Plzeň: Fakulta ekonomická ZČU v Plzni, 96 s., 2012

Klíčová slova: Finanční deriváty, Oceňování opcí, Black-Scholesův model, Binomický model oceňování, Mathematica

Cílem této práce je prezentovat modely oceňování finančních derivátů, především evropských a amerických opcí. Nejprve jsou představeny nejpoužívanější deriváty, forwardy, futures, swapy a opce. Prezentovány jsou některé již známé finanční teorie a modely. Tyto teorie mají nutně matematický charakter. Odvozeny jsou binomický model oceňování opcí a Black-Scholesův model pro evropské opce na akcie nevyplácející dividendy. V softwaru Wolfram Mathematica, Research, Inc. jsou vytvořeny postupy oceňování různých evropských a amerických opcí a je ukázáno, jak může být SW Mathematica využit jako nástroj k modelování finančních derivátů. V poslední části jsou prezentovány některé výsledky oceňování evropských a amerických call a put opcí na akcie s využitím SW Mathematica.

Abstract

VOSTÁRKOVÁ, Š. *Mathematical models of financial derivatives pricing – basic theory and selected applications*. Diploma thesis. Pilsen: Faculty of Economics, University of West Bohemia, 96 p., 2012

Key words: Financial Derivatives, Option Pricing, Black-Scholes Model, Binomial Option Pricing Model, Wolfram Mathematica

The aim of this thesis is a presentation of pricing models for financial derivatives, primarily for European and American options. In the first section are introduced the most common derivative securities, forwards, futures, swaps and options. Some of the financial theory and models that have been developed to analyse derivatives are presented. This theory is necessarily mathematical in character. This thesis show how the Binomial Option Pricing Model and the Black-Scholes Model for valuing European options on a non-dividend-paying stock is derived. The routines for pricing various European and American options in Mathematica, Wolfram, Research, Inc. are developed and it is shown how can be SW Mathematica used as a derivatives modelling tool. In the final part are presented some results of the pricing of European and American call and put options on stocks using SW Mathematica.