

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Plzeň 2018

Pavel Halama

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Torzní kmitání vysokorychlostního pohonu
kolejového vozidla

Plzeň 2018

Pavel Halama

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a na základě literatury a pramenů uvedených v seznamu použité literatury.

V Plzni dne 4. června 2018

.....

podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce Ing. Miroslavu Byrtusovi, Ph.D. za čas strávený konzultacemi, revidováním práce a za poskytnutí cenných rad a literatury při jejím vypracovávání. Děkuji také svoji rodině za podporu a vstřícnost během mého studia.

Abstrakt

Práce se věnuje problematice torzního kmitání pohonů kolejových vozidel. V úvodní části je uvedena základní rešerše koncepcí těchto pohonů. V teoretické části jsou odvozeny matematické modely torzního kmitání hřídelů jako 1D kontinuí použitím metody konečných prvků, včetně teoretického rozboru kontaktu kolo-kolejnice. Metodika výpočtového modelování a dynamické analýzy je aplikována na pohonnou jednotku vyvíjenou na ZČU ve spolupráci s firmou Wikov MGI a.s. Implementace vytvořené metodiky modelování je provedena v programovém prostředí MATLAB.

Klíčová slova: torzní kmitání hřídelů, metoda konečných prvků, kontakt kolo-kolejnice, adhezní charakteristika

Abstract

This bachelors thesis is concerned with an issue of mathematical modelling and computational analysis of torsional vibration of drive systems for railway applications. In the inductive part of the thesis, basic drive designs for railway applications are mentioned. In the theoretical part, mathematical models of torsional vibration of shafts as 1D continuum are derived using finite element method, theory of wheel rail contact is also mentioned. The derived methods of computational modelling and dynamic analysis are applied to drive system which is being developed at the University of West Bohemia in cooperation with company Wikov MGI a.s. Implementation of derived methods of modelling is performed using MATLAB.

Keywords: torsional vibration, finite element method, wheel rail contact, adhesion characteristics

Obsah

1 Úvod	8
1.1 Cíle práce	8
2 Základní řešerše koncepcí pohonů kolejových vozidel	9
2.1 Centrální pohon spojnicový	9
2.2 Individuální pohon dvojkolí	9
2.2.1 Pohony s trakčním motorem s osou rovnoběžnou s nápravou	9
2.2.2 Pohon motorem s osou kolmou k nápravě	12
2.2.3 Nízkopodlažní koncepty individuálního pohonu dvojkolí	13
2.2.4 Koncepty pro vysokorychlostní vozidla	15
2.3 Skupinový pohon dvojkolí	16
2.3.1 Nízkopodlažní koncept skupinového pohonu dvojkolí	16
2.4 Shrnutí	17
3 Modelování torzních kmitů pohonných soustav s ozubenými koly	18
3.1 Matematické modely diskrétních mechanických soustav	18
3.2 Modelování torzního kmitání hřídelů metodou konečných prvků	19
3.3 Model torzního kmitání hřídelové soustavy	25
3.4 Hřídelová soustava s ozubeným převodem	26
3.5 Vnitřní dynamika ozubených převodů	28
3.5.1 Matematický model torzních kmitů ozubených kol	28
3.5.2 Matematický model hřídelové soustavy s vnitřním buzením	30
3.6 Model kontaktu kolo-kolejnice s vlivem skříně vozidla	31
3.6.1 Adhezní účinky působících v kontaktu kolo-kolejnice	31
3.6.2 Matematický model hřídelové soustavy s kontaktem kolo-kolejnice pro vyšetřování modálních vlastností	33
3.6.3 Matematický model hřídelové soustavy s kontaktem kolo-kolejnice pro časovou simulaci	36
4 Metody dynamické analýzy kmitajících soustav	38
4.1 Modální analýza lineárních konzervativních soustav	38
4.2 Modální analýza lineárních silně nekonzervativních soustav	39
4.3 Ustálená odezva harmonicky buzených soustav	42
4.3.1 Slabě nekonzervativní model	42
4.3.2 Silně nekonzervativní model	43
4.4 Numerická integrace pohybových rovnic	45
5 Aplikace na vnitřní vestavbu prototypu vysokorychlostní pohonné jednotky	46
5.1 Výpočtové modelování pohonné jednotky	47
5.2 Modální analýza	51
5.2.1 Modální analýza pohonné jednotky	51
5.2.2 Modální analýza pohonné jednotky s kontaktem kolo-kolejnice	53
5.3 Ustálená odezva na vnitřní buzení vlivem kinematické úchytky kol	57
5.3.1 Vnitřní vestavba	57

5.3.2	Pohonná jednotka s kontaktem kolo-kolejnice a vlivem skříně vozidla	61
5.4	Simulace rozjezdu vozidla v časové oblasti	64
5.4.1	Rozjezd bez prokluzu	66
5.4.2	Rozjezd s prokluzem	67
6	Závěr	69
A	Ustálená odezva na buzení kinematickou úchylnou	71

1 Úvod

Pohonné systémy používané v kolejové dopravě přenášejí moment z trakčního motoru nebo spalovacího motoru (obvykle dieselového) na dvojkolí přes převodovou skříň. Hnací vozidlo má alespoň jedno dvojkolí hnané. Pohony kolejových vozidel musí splňovat několik, zdánlivě protichůdných, požadavků. Musí být schopny přenášet vysoké výkony, až 1600 kW na nápravu, zároveň je prostor pro pohon omezen a současně je kladen důraz na nízkou hmotnost. Je však potřeba pohon kolejového vozidla v průběhu provozu udržovat. Z toho plyne požadavek na nízké náklady a dlouhodobou životnost. U nových lokomotiv probíhá údržba pravidelně, avšak hlavní servis je proveden až poté, co vozidlo urazí kolem milionu kilometrů. Rychlovlaky mohou dosáhnout i 350 km/h a to vše je dnes nutné mít na paměti při jejich konstrukci. Nároky na spolehlivost jednotlivých komponent pohonu jsou proto striktnější než u jiných druhů dopravy. V úvodní části této práce je uvedena základní rešerše koncepcí pohonů kolejových vozidel.

V současné době je při konstrukci pohonných systémů využito matematického modelování. Výhodou tohoto modelování jsou nízké finanční nároky a s rozvojem výpočetní techniky také přesnost řešení. Matematické a výpočtové modelování nám umožňuje zkoumat mechanickou odezvu systému při provozu a ladit návrhové parametry modelu tak, abychom zlepšili jeho dynamické chování. V teoretické a aplikační části se práce zaměřuje na odvození matematických a výpočtových modelů torzního kmitání hřídelových soustav pohonů kolejových vozidel.

1.1 Cíle práce

Hlavní cíle práce jsou

- základní rešerše koncepcí pohonu kolejových vozidel,
- modelování torzních kmitů soustav s ozubenými koly,
- torzní model pohonu s respektováním skříně vozidla a kontaktu kolo-kolejnice,
- aplikace na prototyp vysokorychlostní pohonné jednotky.

2 Základní řešerše koncepcí pohonů kolejových vozidel

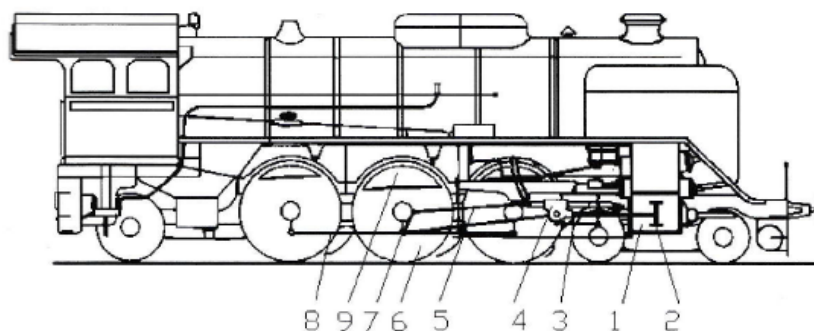
V průběhu vývoje kolejových vozidel vznikla celá řada koncepcí. V zásadě je lze v případě pohonu dvojkolí rozdělit na centrální pohon spojnicový, individuální a skupinový pohon dvojkolí.

2.1 Centrální pohon spojnicový

Tento typ pohonu [1] pochází z dob parních lokomotiv (Obr. 1), kde byla dvojkolí spojená pevnou vazbou, spojnicí 8. Rozpínáním páry v parním válci 1 se pohyboval píst s pístnicí 3. Klika 7 na kole 6 společně s ojnicí 5 a křížákem 4 tvoří klikový mechanismus, který mění posuvný pohyb pístnice na rotační pohyb kola. Kola jsou vyvážena protizávažím 9.

Výhodou takto uspořádaného pohonu je, že nemůže dojít k prokluzu jednoho dvojkolí. K prokluzu může dojít jedině při ztrátě adheze všech propojených kol.

Nevýhodou je potřeba vyvažování kol v důsledku rotačního pohybu kola a kliky a tím způsobených setrvačných účinků.



Obr. 1: Centrální pohon dvojkolí [1]

2.2 Individuální pohon dvojkolí

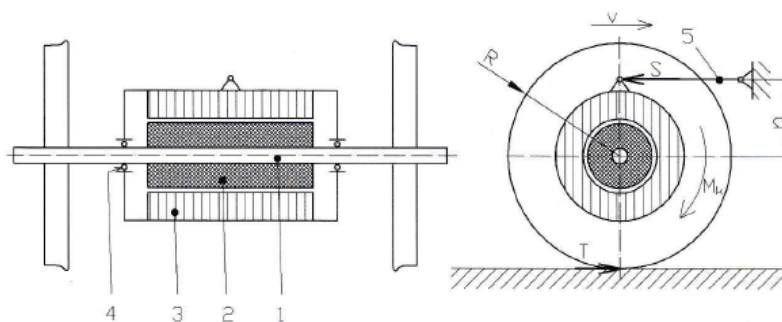
Individuální pohon dvojkolí znamená, že jedním zdrojem (trakční motor) je poháněné pouze jedno dvojkolí (náprava). Tento druh pohonu lze dále rozdělit na pohony s trakčním motorem s osou rovnoběžnou s nápravou, s trakčním motorem s osou kolmou k nápravě a dále pak koncepty pro nízkopodlažní, případně vysokorychlostní vozidla.

2.2.1 Pohony s trakčním motorem s osou rovnoběžnou s nápravou

Přímý pohon

Jeden z nejjednodušších způsobů je nasazení rotoru motoru na nápravu. Hnací moment se tak z motoru na dvojkolí přenáší bez převodu čili přímo. Otáčky motoru se shodují s otáčkami dvojkolí. Schéma tohoto pohonu [1] je znázorněno na Obr. 2.

Na dvojkolí 1 je přímo nasazen rotor 2. Stator motoru 3 je uložen pomocí ložisek 4 na nápravě.

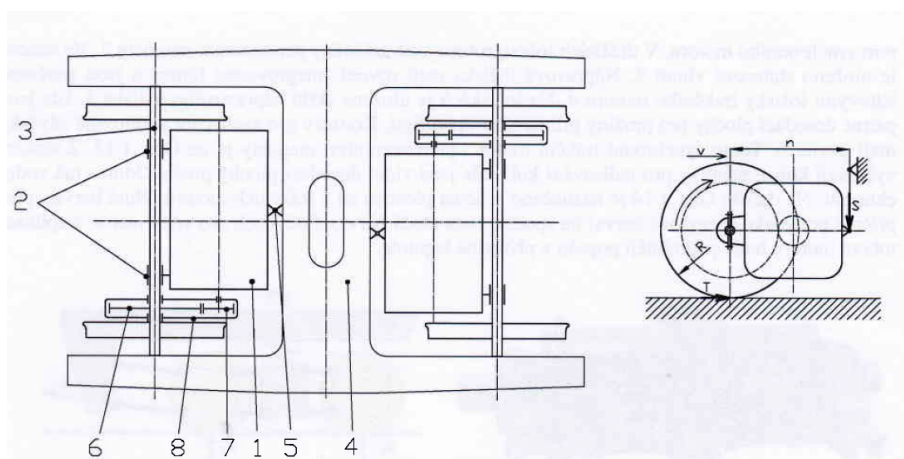


Obr. 2: Přímý pohon dvojkolí [1]

Výhodou tohoto uspořádání je jednoduchá konstrukce a malé náklady. Avšak nevýhod je poměrně více. Tím, že je celá hmotnost motoru uložena na nápravě, vznikají velké nevypružené hmoty a tím i značné zatížení celého systému.

Pohon tlapovým motorem

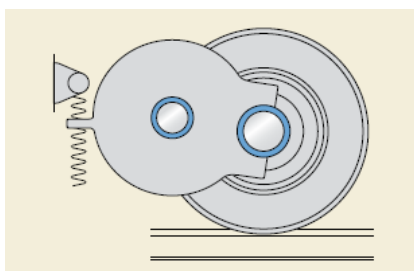
Jedná se o jednu z nejstarších koncepcí pohonných systémů kolejových vozidel [1]. Byla a stále je využívána u tramvají a elektrických nebo dielelektrických lokomotiv. Tento koncept je používán pro některé své pozitivní vlastnosti. Patří k nim jednoduchost, spolehlivost a přijatelné výrobní náklady. Jako každá varianta má i tato jisté nevýhody. Tím, že přibližně polovina hmotnosti motoru spočívá na nápravě, je tato hmota nevypružená a mohou tak vznikat dynamické složky reakcí v ložiskách a tím velká zatížení jednotlivých součástí. Z tohoto důvodu je tento koncept limitován rychlostí vozidla. Schéma systému je na Obr. 3.



Obr. 3: Pohon tlapovým motorem [1]

Trakční motor 1 je uložen na rámu podvozku 4 pomocí závěsky 5 a na nápravě 3 pomocí ložisek 2. Kroutící moment motoru pohání ozubená kola 6 a 7 umístěné v převodové skříní 8. Kolo 7 je pevně spojeno s nápravou.

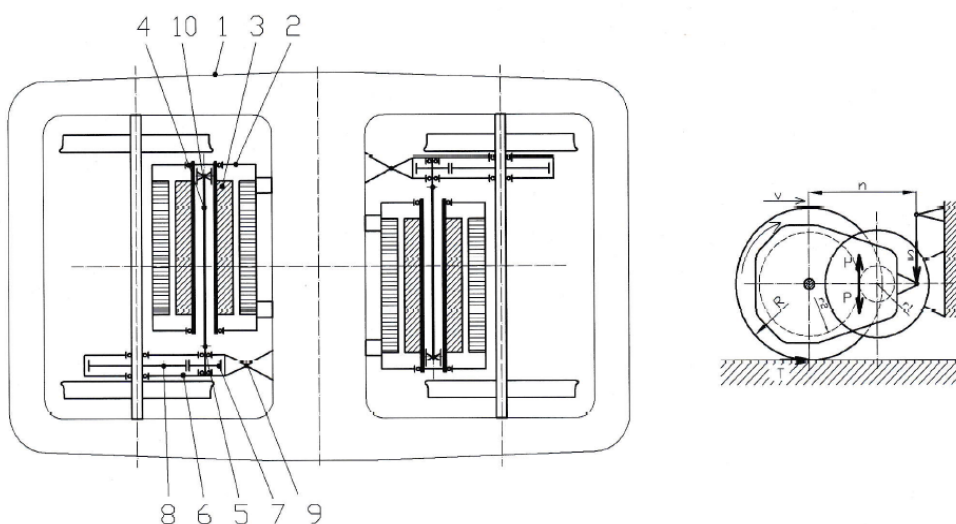
Velikost nevypružených hmot lze redukovat pružnou závěskou, jako například na Obr. 4.



Obr. 4: Tlapový pohon s pružnou závěškou [3]

Pohon kloubovou hřídelí procházející dutinou rotoru trakčního motoru

Pokud je pohonný systém výrazně prostorově omezen, lze použít dutý rotor motoru s kloubovou hřídelí procházející touto dutinou [1], viz Obr. 5.

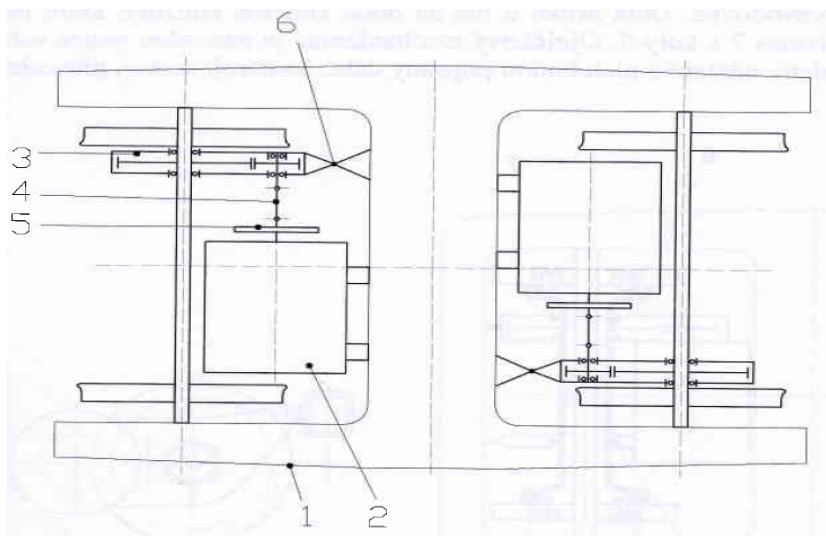


Obr. 5: Pohon kloubovou hřídelí procházející dutinou rotoru trakčního motoru [1]

Motor 2 je pevně umístěn na rámu 1. Dutý rotor 3 pohání přes kloub 10 kloubovou hřídel 4 a poté přes převodovou skříň 6 celou nápravu, jako v případě tlapového pohonu. Výhody nejsou jen prostorové, ale také je tento pohon snadno opravitelný a udržovatelný.

Pohon kloubovou hřídelí mezi motorem a převodovkou

Schema pohonu [1] je znázorněno na Obr. 6. Pokud není prostor příliš omezen, lze kroutící moment na převodovku přenést pomocí krátké kloubové hřídele 5 umožňující přenos momentu mezi hřídeli, jejichž osy neleží v jedné přímce.

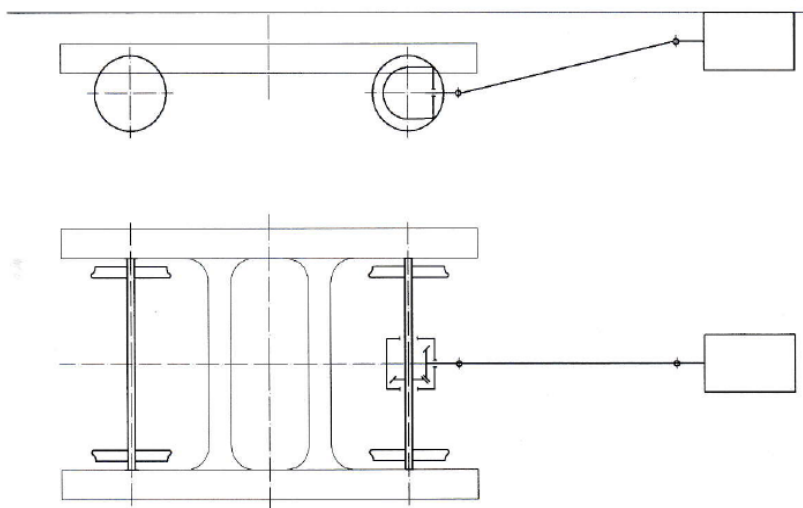


Obr. 6: Pohon kloubovou hřídelí mezi motorem a převodovkou [1]

2.2.2 Pohon motorem s osou kolmou k nápravě

Motor pod skříní vozidla, pohání dvojkolí v rámu podvozku

Tento typ pohonu [1] lze aplikovat v případě, pokud je potřeba zefektivnit zástavbový prostor. Kroutící moment motoru je přenesen kloubovou hřídelí na kuželovou převodovku, která umožní přenos momentu na osu dvojkolí (Obr. 7).

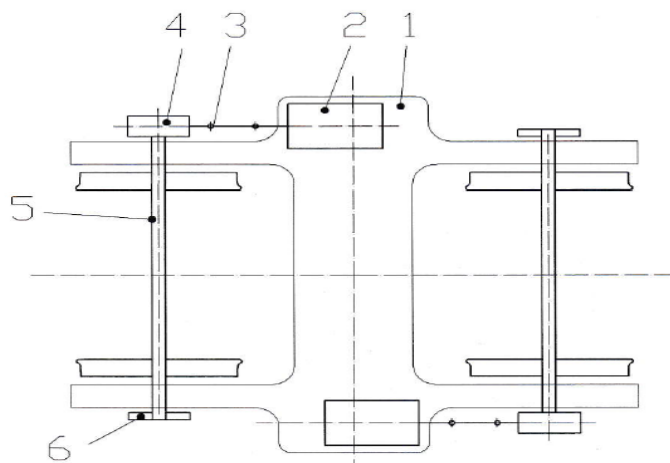


Obr. 7: Motor pod skříní vozidla, pohání dvojkolí v rámu podvozku [1]

Motor pohání dvojkolí vně rámu podvozku

Schéma tohoto pohonu [1] je na Obr. 8. Je-li třeba uvolnit prostor v ose podvozku, lze použít pohonný systém s motorem 2 uloženým vně rámu podvozku 1. Moment motoru pohání dvojkolí přes kloubovou hřídel 3 a kuželovou převodovku 4. Kotoučová brzda 6 je

umístěna na druhém kole. Z důvodů umístění motoru a brzdy je tento pohon používán u vozidel s velmi tuhou nápravou.



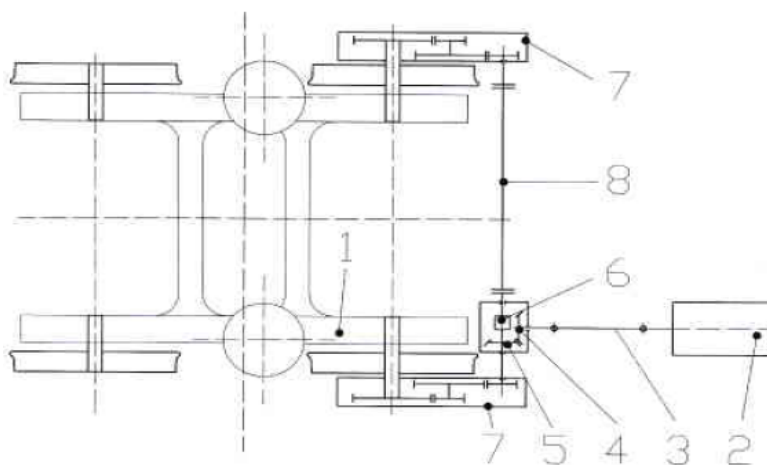
Obr. 8: Motor umístěn vně rámu podvozku [1]

2.2.3 Nízkopodlažní koncepty individuálního pohonu dvojkolí

Moderním trendem dopravy se staly nízkopodlažní vozy. Nízká podlaha, zejména u vozidel městské dopravy, umožňuje snadný nástup a výstup cestujícím, především pro imobilní osoby. Pro tyto účely je nutné uspořádat systém pohonu tak, aby se co nejvíce prostoru uvolnilo v ose podvozku. Vznikly tak různé koncepty a to zejména pohony motorem s osou kolmou k nápravě, ale také tak zvaný pohon volně otočného kola, které jsou popsány dále.

Motor uložený pod skříní vozidla pohání kola přes dvě čelní převodovky

Schéma pohonu [1] je na Obr. 9.



Obr. 9: Motor umístěn pod skříní vozidla[1]

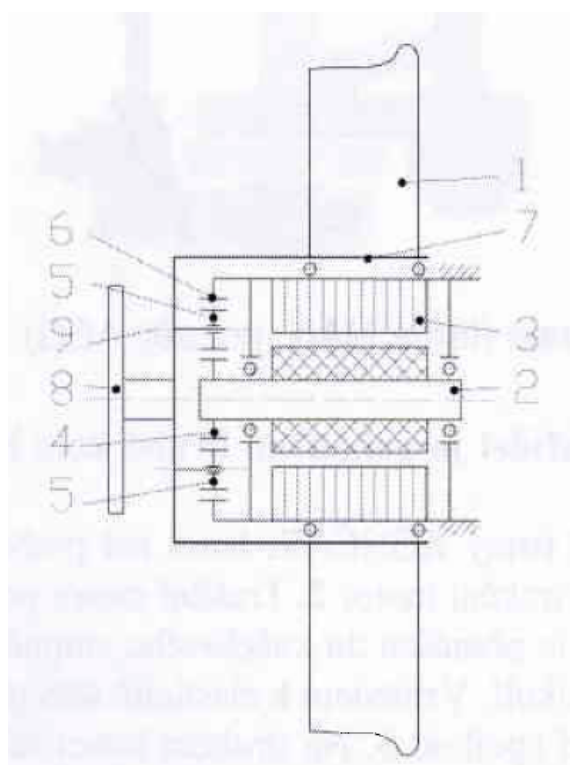
Tento pohon nemá pevnou (vázanou) nápravu. Uvolnil se tím tak potřebný prostor pro nízkou podlahu. Moment z motoru 2 se přenáší kloubovou hřídelí 3 na kuželový převod 4 a 5, který pohání přes dvoustupňovou převodovku 7 kola nalisovaná na nápravách. Oproti ostatním konceptům je zde však diferenciál 6 zajišťující rozdílné otáčky kol při jízdě obloukem. To má řadu výhod. Dochází tak k menšímu opotřebení kol a zmírnění hluku při průjezdu menším obloukem.

Pohon volně otočného kola

Pro tento pohon je typické, že motor pohání pouze jedno kolo. Navíc je motor umístěn tak, aby nezasahoval do prostoru osy podvozku. Několik koncepcí je dále uvedeno.

Pohon volně otočného kola s planetovou převodovkou

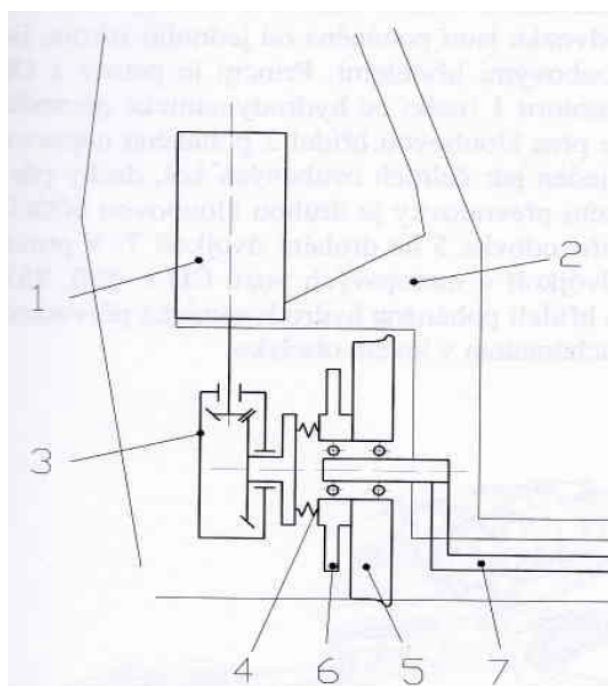
Schéma pohonu [1] je na Obr. 10. Rotor 2 motoru 3 pohání planetovou převodovku, kterou tvoří ozubené kolo 4, 6 a satelity 5. Satelity jsou propojeny s unášecem 9, který pohání nalisované kolo 1 na náboji 7.



Obr. 10: Pohon volně otočného kola s planetovou převodovkou [1]

Pohon volně otočného kola se svislou osou motoru

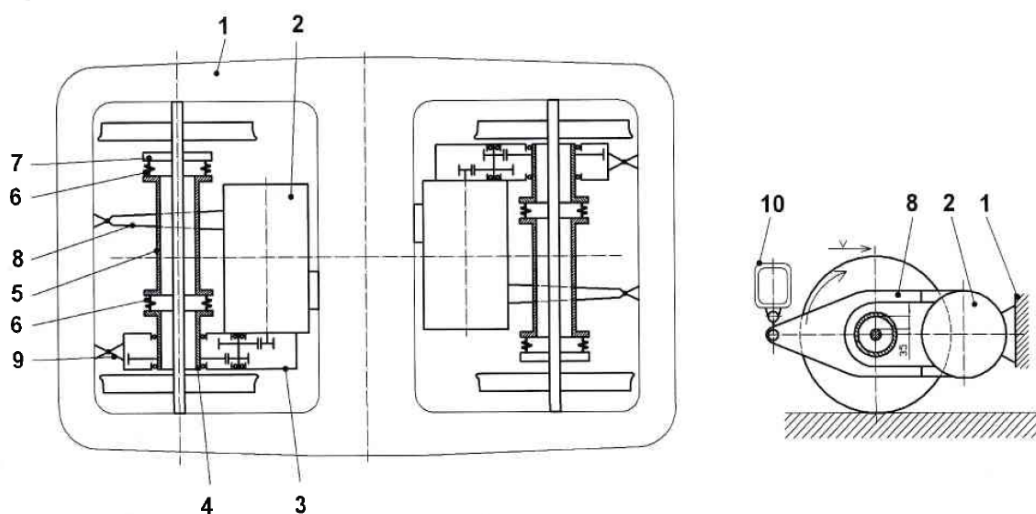
Schéma je na Obr. 11. U tohoto uspořádání [1] lze zcela uvolnit prostor pro nízkou podlahu. Motor 1 pohání kuželovou převodovku 3, která přes kardanovou spojku 4 a brzdny kotouč 6 pohání kolo 5. Kolo je uloženo ložisky na nápravě 7.



Obr. 11: Pohon volně otočného kola se svislou osou motoru [1]

2.2.4 Koncepty pro vysokorychlostní vozidla

Pro středně dlouhé vzdálenosti nabízí vysokorychlostní kolejová doprava spolehlivý, komfortní a pro životní prostředí nezávadný způsob cestování. Dnes jsou vysokorychlostní vozy převážně poháněny elektrinou. Při vysokých rychlostech vznikají mnohem větší dynamické složky reakcí a proto je rozhodující snížení velikosti nevypružených hmot. Motory mají navíc vysoké otáčky a proto je nutné používat víceúrovňové převodovky. Takovéto požadavky lze zajistit pohonem dutou kloubovou hřídelí kolem nápravy [1]. Schéma tohoto systému je na Obr. 12.



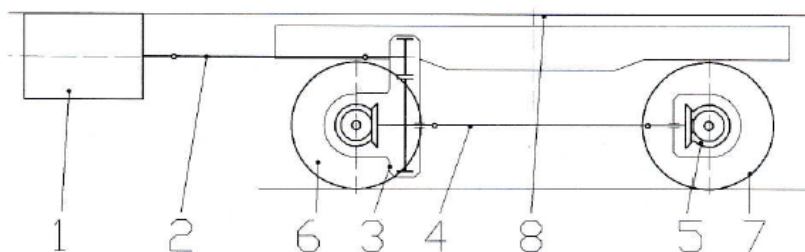
Obr. 12: Pohon dutou kloubovou hřídelí kolem nápravy [1]

Motor 2 je uložen na rámu podvozku 1. Kroutící moment motoru je převezen přes dvoustupňovou převodovku 3 na trubkový unašeč 4. Pomocí mechanismu 6, duté hřídele 5 a mechanismu 7 je moment převezen na nápravu.

Výhodou tohoto uspořádání je, že nevypružené zůstává pouze dvojkolí a část hřídele 5, zároveň umožňuje větší volnost dvojkolí. Nevýhodou je, že se při případné poruše musí vyvázat celý podvozek a demontovat dvojkolí.

2.3 Skupinový pohon dvojkolí

Pojem skupinový pohon dvojkolí znamená, že od jednoho zdroje jsou poháněna dvě nebo tři dvojkolí. V zásadě se u takto uspořádaného systému používá pohon motorem s osou kolmou k nápravě. Schéma některé z variant je na Obr. 13 [1]. Motor 1 pohání

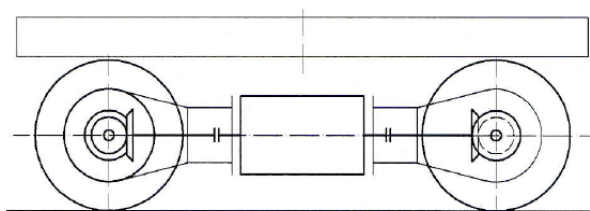


Obr. 13: Skupinový pohon dvojkolí [1]

přes kloubovou hřídel 2 a převodovku 3 kolo 6. Zároveň pomocí kloubové hřídele 4 a kuželočelního převodu 5 pohání kolo 7.

2.3.1 Nízkopodlažní koncept skupinového pohonu dvojkolí

Skupinový pohon u nízkopodlažních vozů lze docílit motorem s osou kolmou k nápravě (Obr. 14) [1].



Obr. 14: Nízkopodlažní koncept skupinového pohonu dvojkolí [1]

Jedním zdrojem (trakčním motorem) jsou přes pružné spojky a kuželočelní převody poháněny obě postranní kola. Tento typ pohonu lze použít u městských vozidel, dokonce i metra.

2.4 Shrnutí

S vývojem kolejové dopravy stoupají nároky na rychlost, spolehlivost a komfort provozu. Z pohledu dynamiky kolejových vozidel je zejména důležitá nízká hmotnost a vyváženost jednotlivých komponent pohonu. Nevypružené hmoty totiž mohou způsobovat nežádoucí dynamické zatížení systému. Důležitá je také životnost, neboť nadstandardní údržba je finančně nákladná. Umístění pohonné jednotky je zároveň omezeno prostorem, zvláště pak u nízkopodlažních vozů. Nízká podlaha najde své uplatnění zejména u vozidel městské hromadné dopravy.

V současné době je na ZČU ve spolupráci s firmou Wikov MGI a.s. vyvíjen vysoko-rychlostní pohon pro kolejovou dopravu. V kapitole 5 je uveden popis tohoto pohonu.

3 Modelování torzních kmitů pohonných soustav s ozubenými koly

V současné době jsou kladeny vysoké nároky na účinnost a spolehlivost strojních komponent. Zároveň se ale požaduje jejich nízká hmotnost, vysoká životnost a dlouhé servisní intervaly. Z pohledu dynamiky a kmitání se od pohonů kolejových vozidel vyžaduje nízká hlučnost a s ní související vibrace. V případě pohonů hrají významnou roli torzní kmity rotujících částí. Většinou se jedná o soustavu hřídele motoru elektromotoru, který je spojen s vnitřní rotující vestavbou převodovky.

Při navrhování nových pohonů se v předvýrobní části vývoje s výhodou využívají výpočtové modely, které dokáží predikovat možné nežádoucí stavy pohonu a v případě, že se tyto stavy projeví v provozní oblasti, je možné optimalizovat návrhové parametry a tím zlepšit dynamické chování.

3.1 Matematické modely diskrétních mechanických soustav

Reálné mechanické soustavy lze modelovat různými přístupy. Úlohy mechanických soustav lze obecně popsat parciálními diferenciálními rovnicemi. Takto formulované úlohy lze pak řešit různými metodami, například metodou konečných prvků, která je založena na diskretizaci kontinua, která vede na formulaci tzv. diskrétních modelů. Diskrétní soustavy jsou složeny z diskrétních prvků, t.j. tuhá tělesa, hřídele atp. Jejich kmitavý pohyb lze popsat obyčejnými diferenciálními rovnicemi.

Pohybové rovnice můžeme sestavit pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu v maticovém tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{f}(t), \quad (3.1.1)$$

kde $\mathbf{q} = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$ je vektor n zobecněných souřadnic (n je počet stupňů volnosti) a $\mathbf{f}(t) = [F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)]^T$ je vektor zobecněných budících sil.

Kinetickou energii E_k , potenciální energii E_p a Rayleighovu disipační funkci R lze vyjádřit takto

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad E_p = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.1.2)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{B} je matice tlumení a \mathbf{K} je matice tuhosti. Pro prvky těchto matic platí

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad k_{ij} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j}, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (3.1.3)$$

kde $i, j = 1, 2, \dots, n$. Po dosazení (3.1.2) do (3.1.1) a provedení příslušných derivací dostaneme výslednou pohybovou rovnici

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (3.1.4)$$

Vektor zobecněných budících sil $\mathbf{f}(t)$ lze získat např. z principu virtuálních prací δW_j aplikovaného na síly konající práci (bez konzervativních a tlumících sil) při j -tém virtuálním pohybu δq_j , který udělíme soustavě. Pro virtuální práci platí

$$\delta W_j = F_j \delta q_j \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.5)$$

U slabě tlumených soustav se v technické praxi často uvažuje proporcionální tlumení, tedy matice tlumení je dána tzv. Rayleighovo vztahem [4]

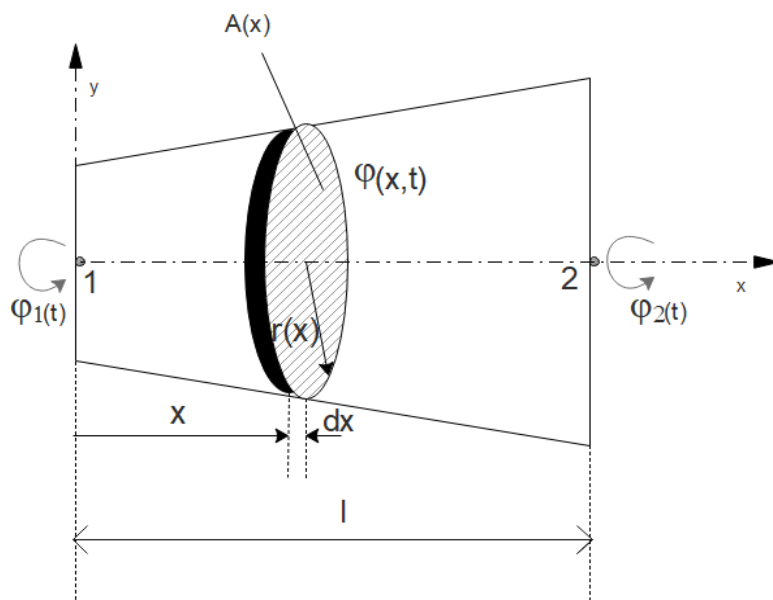
$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}. \quad (3.1.6)$$

3.2 Modelování torzního kmitání hřídelů metodou konečných prvků

Hřídel lze modelovat jako jednorozměrné kontinuum, které lze při použití metody konečných prvků diskretizovat tzv. hřídelovými prvky. Diskretizace hřídele respektuje jeho geometrii, tj. počet zavedených prvků závisí na požadované přesnosti řešení.

Hřídelový prvek

Vytkneme z hřídele obecný element (hřídelový prvek), jehož průřez je kruhový s plochou velikosti $A(x)$, kde x je souřadnice definující polohu zavedeného řezu v lokálním souřadnicovém systému prvku (viz Obr. 15). Konečný prvek délky l je umístěn mezi uzly



Obr. 15: Hřídelový (konečný) prvek

1 a 2 v lokálním číslování elementu. Torzní výchylky v místech uzlů prvku označíme $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$. Torzní natočení podél prvku v libovolném místě x aproximujeme lineárním polynomem

$$\varphi(x, t) = C_0(t) + C_1(t)x, \quad (3.2.1)$$

kde $C_0(t)$ a $C_1(t)$ jsou časově závislé koeficienty. Vztah (3.2.1) lze zapsat v maticovém tvaru

$$\varphi(x, t) = \Phi(x)\mathbf{c}(t), \quad (3.2.2)$$

kde zřejmě platí

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \end{bmatrix}.$$

Vztah (3.2.1) musí vyhovovat i v uzlech prvku. Dosadíme tedy souřadnice uzlových bodů 1 ($x = 0$) a 2 ($x = l$). Pro natočení v uzlech pak platí

$$\varphi_1(t) = C_0(t), \quad \varphi_2(t) = C_0(t) + C_1(t)l. \quad (3.2.3)$$

Zavedeme vektor zobecněných souřadnic (výchylek) v uzlech prvku e

$$\mathbf{q}^{(e)}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{c}(t). \quad (3.2.4)$$

Matice \mathbf{S} je regulární a proto lze vektor koeficientů $\mathbf{c}(t)$ vyjádřit z (3.2.4) ve tvaru

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}^{(e)}. \quad (3.2.5)$$

Vztah (3.2.5) dosadíme do (3.2.2) a dostaneme výsledný tvar aproximace torzní výchylky v libovolném bodě uvnitř prvku

$$\varphi(x, t) = \Phi(x)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}^{(e)}, \quad (3.2.6)$$

Matice hmotnosti a tuhosti hřídelového prvku

Matice hmotnosti a tuhosti hřídelového prvku odvodíme z Lagrangeových rovnic (3.1.1). Pro kinetickou energii prvku platí [10]

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho J_p(x) \dot{\varphi}^2(x, t) dx, \quad (3.2.7)$$

kde ρ je hustota materiálu a J_p je polární moment průřezu v místě x . Je nutné vyjádřit časovou derivaci natočení v místě x a její druhou mocninu. Derivací (3.2.6) dostaneme

$$\dot{\varphi}(x, t) = \Phi(x)\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{q}}^{(e)} \quad \text{a} \quad \dot{\varphi}^2(x, t) = (\dot{\mathbf{q}}^{(e)})^T \mathbf{S}^{-T} \Phi(x)^T \Phi(x) \mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{q}}^{(e)}. \quad (3.2.8)$$

Vztahy (3.2.8) dosadíme do (3.2.7) a dostaneme

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^{(e)})^T \mathbf{S}^{-T} \left(\int_0^l \rho J_p(x) \Phi(x)^T \Phi(x) dx \right) \mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{q}}^{(e)}. \quad (3.2.9)$$

Rovnici (3.2.9) lze přepsat takto

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^{(e)})^T \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)}, \quad \mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{S}^{-T} \left(\int_0^l \rho J_p(x) \Phi(x)^T \Phi(x) dx \right) \mathbf{S}^{-1}. \quad (3.2.10)$$

Nadále budeme uvažovat prizmatický prvek, tedy $J_p(x) = J_p$, pak matici hmotnosti prvku $\mathbf{M}^{(e)}$ vyjádříme jako

$$\mathbf{M}^{(e)} = \rho J_p \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_\Phi \mathbf{S}^{-1}, \quad \text{kde } \mathbf{I}_\Phi = \int_0^l \Phi(x)^T \Phi(x) dx. \quad (3.2.11)$$

Zavedenou integrální matici \mathbf{I}_Φ je možné vyjádřit v závislosti na délce konečného prvku

$$\mathbf{I}_\Phi = \int_0^l \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} dx = \int_0^l \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix} dx = l \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix}. \quad (3.2.12)$$

Vztah (3.2.12) dosadíme do (3.2.11) a dostaneme výslednou matici hmotnosti prvku

$$\mathbf{M}^{(e)} = \rho J_p l \begin{bmatrix} 1 & -\frac{l}{l} \\ 0 & \frac{l}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} = \underbrace{\rho J_p l}_{I^{(e)} [kgm^2]} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad (3.2.13)$$

kde $I^{(e)}$ je moment setrvačnosti prvku k ose rotace. Pro potenciální (deformační) energii prvku platí

$$E_p^{(e)} = \int_{(V)} \lambda dV, \quad (3.2.14)$$

kde λ je hustota deformační energie, pro kterou platí $\lambda = \frac{1}{2} G \gamma^2$, kde G je modul pružnosti ve smyku a γ je zkos.

Zkos můžeme vyjádřit takto [10]

$$\gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial x} r, \quad (3.2.15)$$

Pokud dosadíme do vztahu (3.2.15) výraz (3.2.6) dostaneme zkos ve tvaru

$$\gamma = \Phi'(x) \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}^{(e)} r \rightarrow \gamma^2 = (\mathbf{q}^{(e)})^T \mathbf{S}^{-T} \Phi'(x)^T \Phi'(x) \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}^{(e)} r^2. \quad (3.2.16)$$

(3.2.16) dosadíme do deformační energie a vyjádříme

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} (\mathbf{q}^{(e)})^T \mathbf{S}^{-T} \left(\int_{(V)} G (\Phi')^T(x) \Phi'(x) r^2 dV \right) \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{(e)} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}, \quad (3.2.17)$$

kde $\mathbf{K}^{(e)}$ je matice tuhosti hřidelového prvku. Tuto matici vyjádříme následovně

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{(e)} &= \mathbf{S}^{-T} \left(\int_{(A)} \int_{(x)} G(\Phi')^T(x) \Phi'(x) r^2 dA dx \right) \mathbf{S}^{-1} = \\ &= \mathbf{S}^{-T} \left(\int_0^l G(\Phi')^T(x) \Phi'(x) dx \int_{(A)} r^2 dA \right) \mathbf{S}^{-1} = \\ &= \mathbf{S}^{-T} \left(\int_0^l G J_p(x) (\Phi')^T(x) \Phi'(x) dx \right) \mathbf{S}^{-1}.\end{aligned}\quad (3.2.18)$$

Nechť je hřidelový prvek prizmatický, potom lze vztah (3.2.18) přepsat do tvaru

$$\mathbf{K}^{(e)} = G J_p \mathbf{S}^{-T} \mathbf{I}_\Phi \mathbf{S}^{-1}, \quad \text{kde } \mathbf{I}_\Phi = \int_0^l (\Phi')^T(x) \Phi'(x) dx, \quad (3.2.19)$$

Zavedenou integrální matici vyjádříme v závislosti na délce prvku

$$\mathbf{I}_\Phi = \int_0^l \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} dx = \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dx = l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.20)$$

Vztah (3.2.20) dosadíme do (3.2.19) a dostaneme výsledný tvar matice tuhosti prvku

$$\mathbf{K}^{(e)} = G J_p l \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{l} \\ 0 & \frac{l}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{G J_p}{l}}_{k^{(e)} [Nm/rad]} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.21)$$

kde $k^{(e)}$ je tuhost hřidelového prvku.

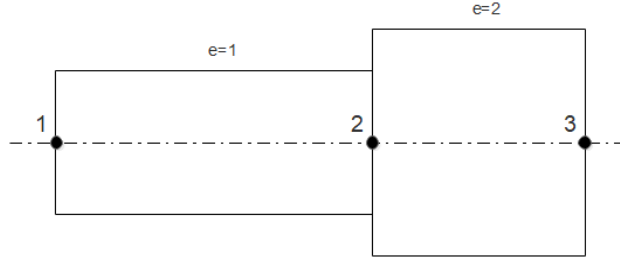
Pohybové rovnice hřidelového prvku

Pohybové rovnice hřidelového prvku získáme využitím Lagrangeových rovnic (viz matematické modely diskretních mechanických soustav), které můžeme zformulovat pro konečný prvek ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \frac{\partial E_p^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \mathbf{f}^{(e)}(t). \quad (3.2.22)$$

Dosazením kinetické energie prvku (3.2.10) a potenciální energie (3.2.17) do Lagrangeových rovnic (3.2.22) dostaneme pohybové rovnice hřidelového prvku

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)}(t) + \mathbf{B}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)}(t) + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}(t) = \mathbf{f}^{(e)}(t). \quad (3.2.23)$$



Obr. 16: Hřídel

Pohybové rovnice diskretizované hřídele

Pro sestavení matematického modelu diskretizovaného hřídele vyjádříme celkovou kinetickou a potenciální energii soustavy, která je tvořena konečnými hřídelovými prvky. Příkladem je torzně izolovaný hřídel rozdělený na 2 prvky, jako je na Obr. 16. Celková kinetická energie hřídele je dána součtem kinetických energií prvků

$$E_k = \sum_{e=1}^2 E_k^{(e)} = \sum_{e=1}^2 \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^{(e)})^T \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)}, \quad (3.2.24)$$

analogicky vyjádříme potenciální energii

$$E_p = \sum_{e=1}^2 E_p^{(e)} = \sum_{e=1}^2 \frac{1}{2} (\mathbf{q}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}. \quad (3.2.25)$$

Zavedeme vektor zobecněných souřadnic

$$\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T. \quad (3.2.26)$$

Výchyvky uzlů prvku (3.2.4) v lokálních souřadnicích lze pomocí těchto zobecněných souřadnic vyjádřit takto

$$\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{T}_e \mathbf{q}. \quad (3.2.27)$$

Například pro $e = 2$ má matice \mathbf{T}_e tvar

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.28)$$

Nyní do kinetické a potenciální energie dosadíme vztah (3.2.27)

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left(\sum_{e=1}^2 \mathbf{T}_e^T \mathbf{M}^{(e)} \mathbf{T}_e \right) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^{(h)} \dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{M}^{(h)} = \sum_{e=1}^2 \mathbf{T}_e^T \mathbf{M}^{(e)} \mathbf{T}_e, \quad (3.2.29)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\sum_{e=1}^2 \mathbf{T}_e^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{T}_e \right) \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}^{(h)} \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{K}^{(h)} = \sum_{e=1}^2 \mathbf{T}_e^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{T}_e. \quad (3.2.30)$$

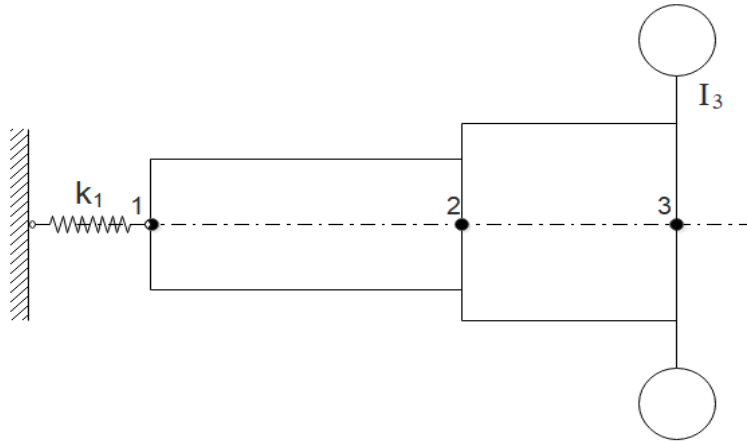
Podle tohoto procesu lze pak získat globální matice hmotnosti a tuhosti. Pro hřídel se dvěma prvky (Obr. 16) mají tyto matice tvar

$$\mathbf{M}^{(h)} = \begin{bmatrix} \frac{I^{(1)}}{3} & \frac{I^{(1)}}{6} & 0 \\ \frac{I^{(1)}}{6} & \frac{I^{(1)}}{3} + \frac{I^{(2)}}{3} & \frac{I^{(2)}}{6} \\ 0 & \frac{I^{(2)}}{6} & \frac{I^{(2)}}{3} \end{bmatrix}, \mathbf{K}^{(h)} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (3.2.31)$$

kde index h značí matice odvozené pro izolovaný hřídel. Analogicky lze tyto matice sestavit pro libovolný počet stupňů volnosti n , pro $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

Model hřídele s kotouči a diskretní torzní vazbou

Popišme nyní způsob, s jakým lze model diskretizovaného hřídele doplnit v případě, kdy jsou na hřídeli nasazeny tuhé kotouče nebo diskretní torzní vazby. Předpokládáme tuhé kotouče s daným momentem setrvačnosti a nehmotné vazby modelované jako pružina o dané tuhosti. Pro příklad uvažujme hřídel z Obr. 16 s kotouči a vazbou k rámu, viz Obr. 17. Pohybové rovnice hřídele, resp. matice hmotnosti a tuhosti jsme již od-



Obr. 17: Hřídel s kotoučem a torzní vazbou

vodili v (3.2.31). Pro kinetickou a potenciální energii kotouče, resp. vazby v souladu se zobecněnými souřadnicemi (3.2.26) platí

$$E_k^{(d)} = \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2, \quad E_p^{(d)} = \frac{1}{2} k_1 \varphi_1, \quad (3.2.32)$$

kde index d značí diskretní prvky. Matice hmotnosti a tuhosti pro kotouče a vazbu má pak, podle (3.1.3), tvar

$$\mathbf{M}^{(d)} = \frac{\partial^2 E_k^{(d)}}{\partial \dot{\varphi}_i \partial \dot{\varphi}_j} \rightarrow \mathbf{M}^{(d)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, \quad (3.2.33)$$

$$\mathbf{K}^{(d)} = \frac{\partial^2 E_p^{(d)}}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \rightarrow \mathbf{K}^{(d)} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2.34)$$

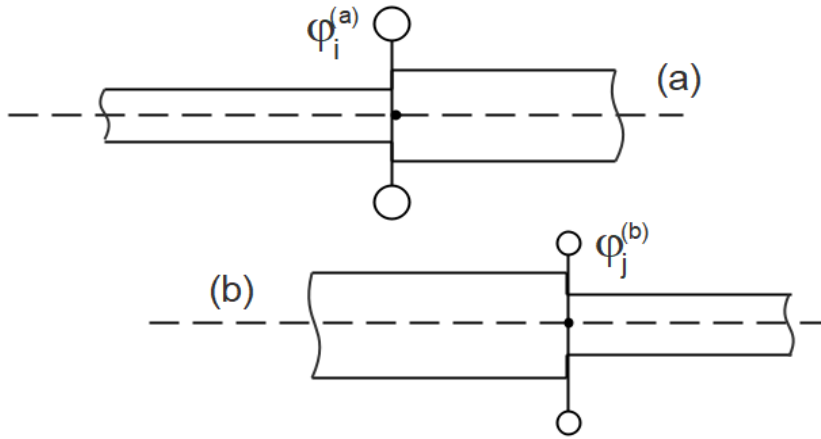
Globální matice hmotnosti a tuhosti pro model hřídele s kotouči a torzní vazbou získáme sečtením matic spojitých prvků hřídele a matic diskrétních prvků

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(h)} + \mathbf{M}^{(d)}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^{(h)} + \mathbf{K}^{(d)}, \quad (3.2.35)$$

kde index h značí matici hmotnosti a tuhosti odvozenou obecně ve tvaru (3.2.31). Analogickým způsobem lze model odvodit pro vazbu nebo kotouč umístěný v libovolném uzlu.

3.3 Model torzního kmitání hřídelové soustavy

Při modelování hřídelových soustav (dva a více hřídelů) je výhodné použít metodu dekompozice na subsystemy. Uvažujme dva torzně izolované hřídele (bez vazby) reprezentující dva subsystemy, jako je na Obr. 18. U hřídele s indexem a zavedeme vektor zobecněných



Obr. 18: Hřídelová soustava

souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{q}_a = [\varphi_i^{(a)}], \quad i = 1, 2, \dots, n_1. \quad (3.3.1)$$

Analogicky zavedeme i pro hřídel b

$$\mathbf{q}_a = [\varphi_j^{(a)}], \quad j = 1, 2, \dots, n_2, \quad (3.3.2)$$

kde n_1 a n_2 je počet stupňů volnosti hřídele a , resp. hřídele b . Zavedením vektoru zobecněných souřadnic výchylek uzlů obou hřídelů ve tvaru

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b] \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \quad (3.3.3)$$

můžeme podle (3.2.35) sestavit matice hmotnosti a tuhosti hřídelů, pro něž platí

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_a^{(h)} + \mathbf{M}_a^{(d)}, \quad \mathbf{K}_a = \mathbf{K}_a^{(h)} + \mathbf{K}_a^{(d)}, \quad (3.3.4)$$

$$\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_b^{(h)} + \mathbf{M}_b^{(d)}, \quad \mathbf{K}_b = \mathbf{K}_b^{(h)} + \mathbf{K}_b^{(d)}. \quad (3.3.5)$$

Analogicky lze odvodit matici tlumení. Výsledný matematický model pak má tvar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}, \quad (3.3.6)$$

kde \mathbf{f}_a , resp. \mathbf{f}_b jsou vektory zobecněných sil působících na hřídeli a , resp. b . Analogicky lze model sestavit pro libovolný počet hřídelů.

3.4 Hřídelová soustava s ozubeným převodem

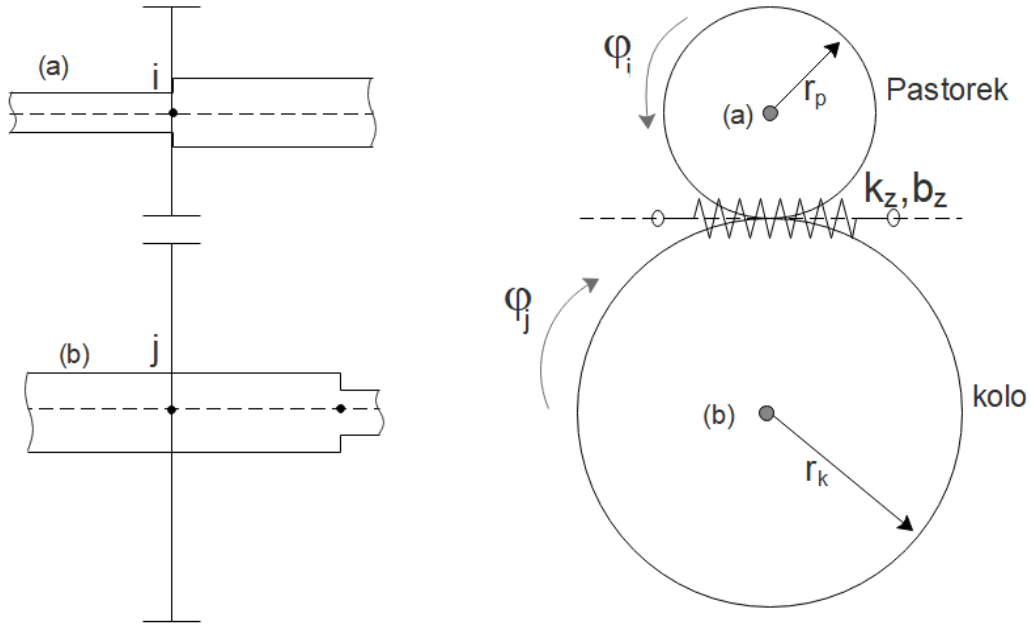
Modelování zubových vazeb při prostorovém kmitání představuje obecně složitý problém. Při předpokladu torzního kmitání a stálého záběru lze síly přenášené jakýmkoli typem ozubení vyjádřit pouze tečnou složkou působící v rovině spoluzabírajících ozubených kol. Zubovou vazbu pak lze nahradit diskretní visko-elastickou vazbou. Mějme hřídel a s uloženým pastorkem v uzlu i a hřídel b s kolem v uzlu j . Pastorek a kolo tvoří zubový záběr (viz Obr. 19).

Matematický model torzního kmitání hřídelů a a b jsme obecně odvodili v (3.3.6). Deformační energie (potenciální energie) a Rayleighovu disipativní funkci vazby z pak vyjádříme takto

$$E_p^{(z)} = \frac{1}{2}k_z(r_p\varphi_i - r_k\varphi_j)^2, \quad R^{(z)} = \frac{1}{2}b_z(r_p\dot{\varphi}_i - r_k\dot{\varphi}_j)^2. \quad (3.4.1)$$

Potenciální energii a Rayleighovu funkci dosadíme do Lagrangeových rovnic (3.1.1) pro zavedené zobecněné souřadnice $\mathbf{q} = [\mathbf{q}^{(a)}, \mathbf{q}^{(b)}]$, kde dle (3.1.3) vyjádříme derivace a zapíšeme v maticovém tvaru

$$\frac{\partial E_p^{(z)}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & k_z r_p^2 & \cdots & -k_z r_k r_p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -k_z r_k r_p & \cdots & k_z r_k^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \\ \varphi_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{K}_z \mathbf{q}, \quad (3.4.2)$$



Obr. 19: Zubová vazba

$$\frac{\partial R^{(z)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_z r_p^2 & \cdots & -b_z r_k r_p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -b_z r_k r_p & \cdots & b_z r_k^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \dot{\varphi}_i \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{B}_z \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.4.3)$$

Globální model kmitání hřídelové soustavy s ozubeným převodem dostaneme přičtením matice tuhosti vazeb \mathbf{K}_z a matice tlumení vazeb \mathbf{B}_z k odpovídajícím maticím hřídelové soustavy

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{B}_z)\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_z)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (3.4.4)$$

Matice \mathbf{M} a \mathbf{K} má vlivem přidání kotouče kola, resp. pastorku tvar (3.3.4), (3.3.5). Pro zavedené zobecněné souřadnice pro ně platí

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a^{(h)} + \mathbf{M}_a^{(d)} & \\ & \mathbf{M}_b^{(h)} + \mathbf{M}_b^{(d)} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a^{(h)} + \mathbf{K}_a^{(d)} & \\ & \mathbf{K}_b^{(h)} + \mathbf{K}_b^{(d)} \end{bmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Přijmeme-li předpoklad proporcionálního tlumení (3.1.6), lze matici tlumení zapsat ve tvaru $\mathbf{B} = \beta\mathbf{K}$, resp. $\mathbf{B}_z = \beta\mathbf{K}_z$. Pokud soustava obsahuje Z zubových převodů a s hřídelů má matematický model tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \sum_{z=1}^Z \mathbf{B}_z)\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \sum_{z=1}^Z \mathbf{K}_z)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (3.4.6)$$

kde matice hmotnosti $\mathbf{M} = \text{diag}(M_1, \dots, M_s)$, tlumení $\mathbf{B} = \text{diag}(B_1, \dots, B_s)$ a tuhosti $\mathbf{K} = \text{diag}(K_1, \dots, K_s)$.

3.5 Vnitřní dynamika ozubených převodů

V předchozím případě jsme uvažovali ideální evolventní ozubení. Avšak u reálných případů má zubová vazba výrobní nepřesnosti. Tyto nepřesnosti se při provozu projevují jako zdroj vnitřního buzení. Vlivem poddajnosti hřídelů může dojít k rozkmitání převodové skříně a šíření hluku do vozu. Modelování vnitřního buzení je tak v zájmu většiny výzkumných pracovišť.

Výrobní nepřesnost ozubených kol budeme nazývat kinematickou úchytkou převodového poměru. Lze ji simulovat klínem proměnné šířky $\Delta_z(t)$ vkládaným mezi ideálně zabírající boky zubů [4]. Podle [4] lze kinematickou úchytku vyjádřit jako součet k harmonických funkcí

$$\Delta_z(t) = \sum_k (\Delta_{kc} \cos k\omega_z t + \Delta_{ks} \sin k\omega_z t), \quad (3.5.1)$$

kde ω_z je zubová frekvence, k je index harmonické složky, Δ_{kc} je kosinová složka amplitud a Δ_{ks} je sinová složka amplitud výchylek. Situace záběru dvou ozubených kol nasazených v uzlech i a j s kinematickou úchytkou je znázorněna na Obr. 20.

Na Obr. 20 je schématicky zobrazena zubová vazba mezi pastorkem a kolem o momentech setrvačnosti I_i a I_j k osám otáčení a poloměrech r_i a r_j . Za předpokladu stálého záběru a torzních kmitů lze poddajnost ozubení modelovat pružinami, resp. tlumiči o tuhosti k_i a k_j , resp. b_i a b_j . Mezi zuby je vkládán klín o šířce $\Delta_z(t)$ představující kinematickou úchytku zubového záběru. ω_i a ω_j jsou úhlové rychlosti obou kotoučů pro něž z důvodu kinematické vazby platí $\omega_i r_i = \omega_j r_j$. φ_i a φ_j představují torzní výchylky kol, M_i a M_j je statické zatížení ozubeného převodu. Sériově řazené pružiny i tlumiče lze nahradit výslednou tuhostí

$$k_z = \frac{k_i k_j}{k_i + k_j}, b_z = \frac{b_i b_j}{b_i + b_j}.$$

Tímto modelem lze v prvním přiblížení popsat chování ozubeného převodu s vnitřním buzením.

Poznamenejme, že u reálných soukolí se při otáčení zpravidla střídají jeden a dva páry zubů. Tuhost ozubení k_z potom není konstantní, ale časově proměnná. Podle [4] lze pro jednoduchost uvažovat střední tuhost ozubení $k_z = 2, 1^{10} h$ [N/m], kde h je šířka ozubení.

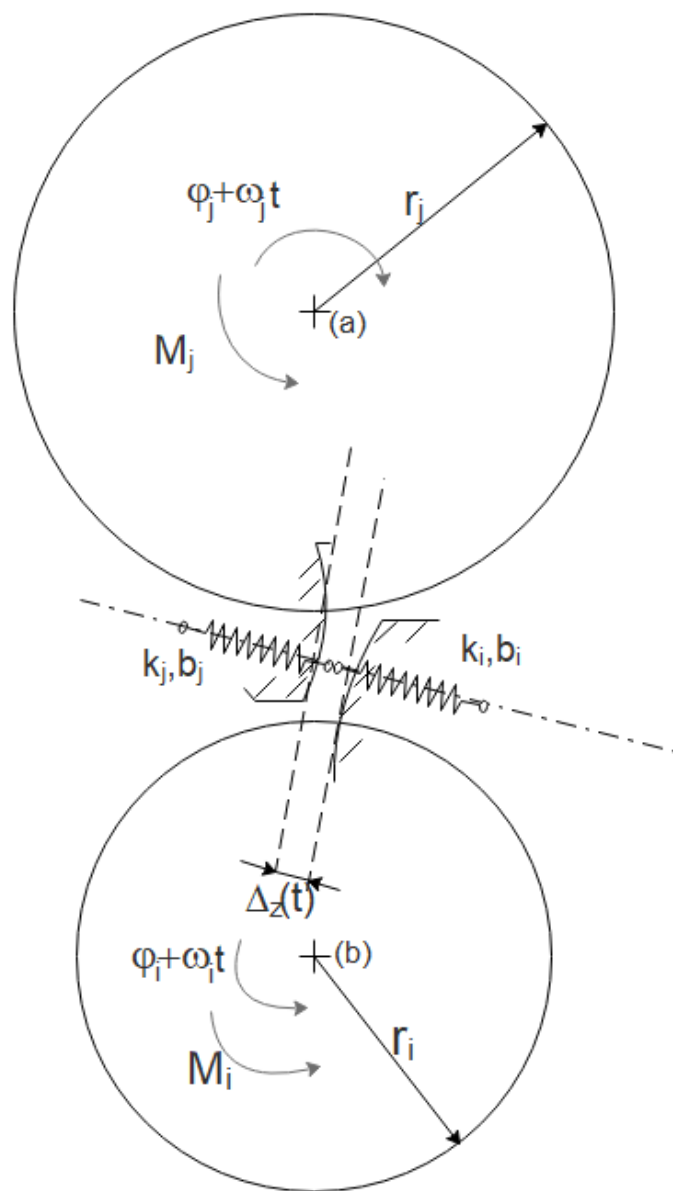
3.5.1 Matematický model torzních kmitů ozubených kol

Pro sestavení matematického modelu využijeme Lagrangeových rovnic (3.1.1) pro zobecněné souřadnice kol $\mathbf{q} = [\varphi_i, \varphi_j]^T$. Kinetická energie, potenciální energie a Reyleighovo disipační funkce ozubeného převodu má tvar

$$E_k = \frac{1}{2} I_i (\omega_i + \dot{\varphi}_i)^2 + \frac{1}{2} I_j (\omega_j + \dot{\varphi}_j)^2, \quad E_p = \frac{1}{2} k_z x^2, \quad R = \frac{1}{2} b_z \dot{x}^2, \quad (3.5.2)$$

kde x je deformace ozubení na záběrové přímce

$$x = (\omega_i t + \varphi_i) r_i - (\omega_j t + \varphi_j) r_j + \Delta_z(t) = r_i \varphi_i - r_j \varphi_j + \Delta_z(t), \quad (3.5.3)$$



Obr. 20: Schéma zubové vazby s kinematickou úchylkou

časová derivace deformace má tvar

$$\dot{x} = r_i \dot{\varphi}_i - r_j \dot{\varphi}_j + \dot{\Delta}_z(t). \quad (3.5.4)$$

Rayleighova funkce a potenciální energie má po dosazení deformace tvar

$$E_p = \frac{1}{2} k_z (r_i \varphi_i - r_j \varphi_j + \Delta_z(t))^2, \quad R = \frac{1}{2} b_z (r_i \dot{\varphi}_i - r_j \dot{\varphi}_j + \dot{\Delta}_z(t))^2.$$

Dosazením do Lagrangeových rovnic dostaneme

$$I_i \ddot{\varphi}_i + k_z (r_i \varphi_i - r_j \varphi_j + \Delta_z(t)) r_i + b_z (r_i \dot{\varphi}_i - r_j \dot{\varphi}_j + \dot{\Delta}_z(t)) r_i = M_i, \quad (3.5.5)$$

$$I_j \ddot{\varphi}_j - k_z (r_i \varphi_i - r_j \varphi_j + \Delta_z(t)) r_j - b_z (r_i \dot{\varphi}_i - r_j \dot{\varphi}_j + \dot{\Delta}_z(t)) r_j = -M_j, \quad (3.5.6)$$

po úpravě

$$I_i \ddot{\varphi}_i + k_z (r_i \varphi_i - r_j \varphi_j) r_i + b_z (r_i \dot{\varphi}_i - r_j \dot{\varphi}_j) r_i = M_i - k_z \Delta_z(t) r_i - b_z \dot{\Delta}_z(t) r_i, \quad (3.5.7)$$

$$I_j \ddot{\varphi}_j - k_z (r_i \varphi_i - r_j \varphi_j) r_j - b_z (r_i \dot{\varphi}_i - r_j \dot{\varphi}_j) r_j = -M_j + k_z \Delta_z(t) r_j + b_z \dot{\Delta}_z(t) r_j. \quad (3.5.8)$$

3.5.2 Matematický model hřídelové soustavy s vnitřním buzením

Uvažujme hřídelovou soustavu s ozubeným převodem stejně jako na Obr. 19 v kapitole 3.4. Matematický model torzního kmitání takového systému je odvozený (3.4.4) ve tvaru

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{B}_z) \dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_z) \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (3.5.9)$$

Vnější i vnitřní buzení se podle (3.5.7) a (3.5.8) projeví ve vektoru pravých stran

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}^E + \mathbf{f}_z^I, \quad (3.5.10)$$

kde index E značí externí silové účinky a index I jsou vnitřní silové účinky. Tyto vektory lze vyjádřit takto

$$\mathbf{f}^E = \begin{bmatrix} \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ -M_j \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_z^I = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ -r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_z} \left(k_z \Delta_z(t) + b_z \dot{\Delta}_z(t) \right), \quad (3.5.11)$$

kde \mathbf{c}_z představuje vektor geometrických parametrů zubové vazby z . Obecně může mít hřídelová soustava Z zubových vazeb. Celkový matematický model pak získáme sečtením buzení přes všechny zubové vazby

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \sum_{z=1}^Z \mathbf{B}_z) \dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \sum_{z=1}^Z \mathbf{K}_z) \mathbf{q}(t) = \sum_{z=1}^Z \left[\left(k_z \Delta_z(t) + b_z \dot{\Delta}_z(t) \right) \mathbf{c}_z \right] + \mathbf{f}^E. \quad (3.5.12)$$

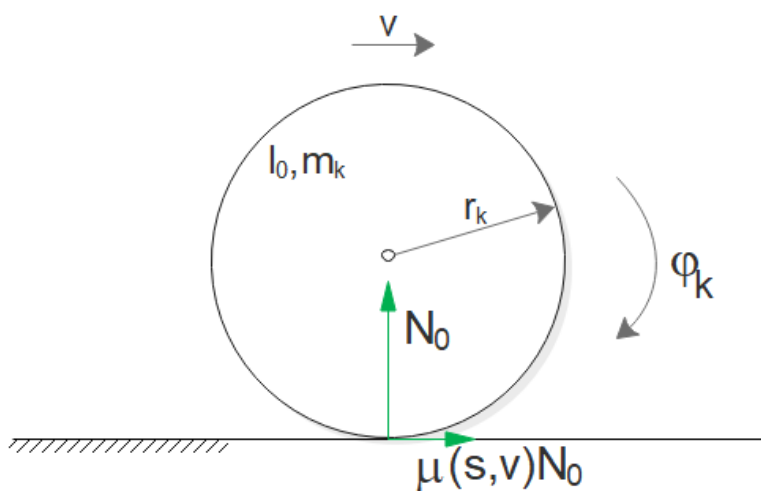
3.6 Model kontaktu kolo-kolejnice s vlivem skříně vozidla

Modelování kontaktu kolo-kolejnice představuje obecně velmi složitý problém [9]. Při odvalování ocelového kola po ocelové kolejnici může díky nepříznivým podmínkám dojít k prokluzu. Vzniká tak silná nelinearita při popisu jejich kontaktu. Skluz vzniká v případě rozdílných obvodových rychlostí těles v místě dotyku. Tento jev závisí na geometrii kola a kolejnice, na materiálech, na rychlosti, kterou se kolo pohybuje po kolejovém pásu a v neposlední řadě na vnějších podmínkách a nerovnostech.

Při valení vznikají v místě kontaktu tečná a normálová složka valivé vazby. Normálové silové působení v kontaktu vyjadřuje přenos sil při vzájemném přitlačení obou dotýkajících se těles. Tečná složka způsobuje přenos sil z kola na kolejnici. Při prokluzu dojde k nárůstu tzv. *relativního skluzu* a ke snížení tzv. *koeficientu adheze*, to způsobuje také pokles tečné (třecí) složky valivé vazby. Adhezi lze definovat jako schopnost přenosu sil mezi dvěma tělesy při vzájemném kontaktu. Součinitel adheze pak představuje míru adheze, závisí tedy na okolních podmínkách. Závislost mezi relativním skluzem a součinitelem adheze nám dává přehled o stabilní oblasti bez prokluzu a nestabilní oblasti s prokluzem (je definováno níže).

3.6.1 Adhezní účinky působících v kontaktu kolo-kolejnice

Situaci kontaktu si popíšeme na Obr. 21.



Obr. 21: Model kontaktu kolo-kolejnice

Adhezní moment působící na kolo při uvažování skluzu s a rychlosti v lze vyjádřit jako

$$M_{ad} = \mu(s, v)N_0r_k, \quad (3.6.1)$$

kde $\mu(s, v)$ je součinitel adheze a N_0 je jmenovitá kolová (normálová) síla, r_k je poloměr kola.

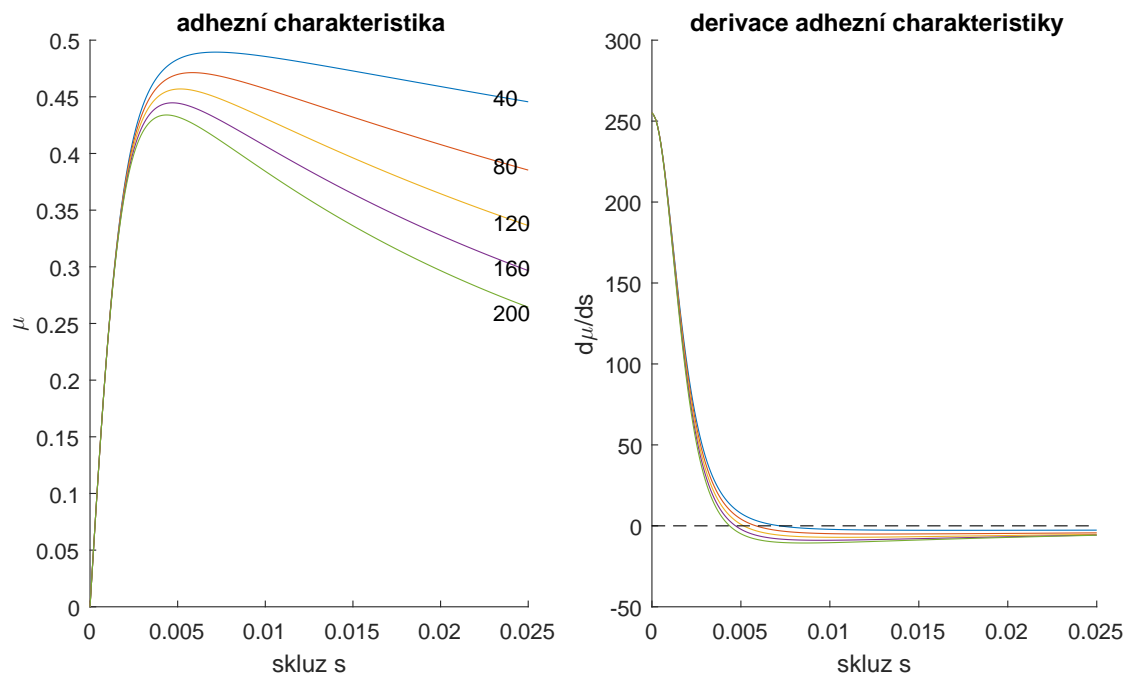
Koeficient adheze ve styku kol s kolejnicí lze na základě experimentů podle [6] a [7] popsat závislostí na relativním skluzu s a rychlosti vozidla v ve tvaru

$$\mu(s, v) = \frac{2}{\pi} f \left[\operatorname{arctg} \frac{s}{\rho_{ad} f} + \frac{\frac{s}{\rho_{ad} f}}{1 + \left(\frac{s}{\rho_{ad} f} \right)^2} \right], \quad (3.6.2)$$

kde součinitel tření f je dán závislostí

$$f = ae^{-bvs} + c. \quad (3.6.3)$$

Konstanty a, b, c mají podle [6] hodnoty $a = 0,395, b = 0,2083, c = 0,125$ a adhezní parametr $\rho_{ad} = (5 \div 15) \cdot 10^{-3}$. Pro danou rychlost pak můžeme vykreslit závislost relativního skluzu s na součiniteli adheze μ , která je uvedena v úvodu této kapitoly. Na Obr. 22 je vykreslena adhezní charakteristika pro rychlosti $v = 40 \div 200 [km/h]$ a $\rho_{ad} = 5 \cdot 10^{-3}$. Na Obr. 23 je znázorněna derivace součinitele adheze podle relativního skluzu. Z ní vyplývá možnost existence nestabilních oblastí, pokud $d\mu/ds < 0$.



Obr. 22: Adhezní charakteristika

Obr. 23: Derivace adhezní charakteristiky

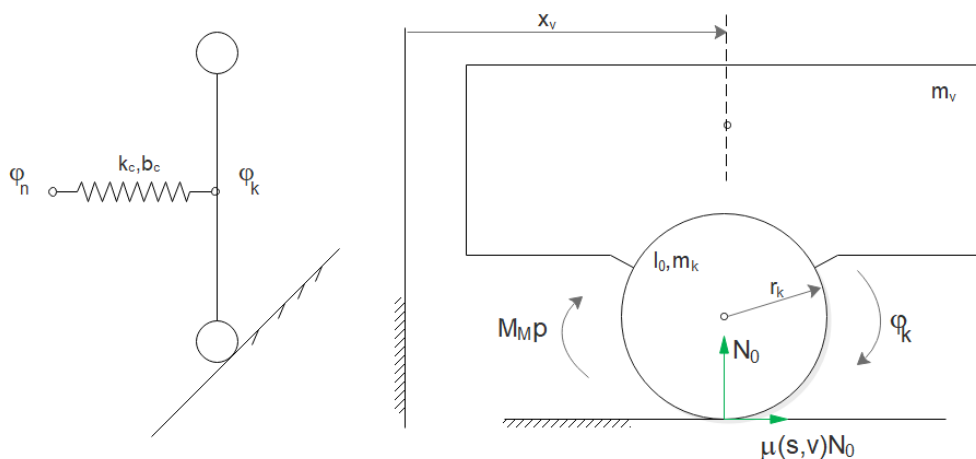
3.6.2 Matematický model hřídelové soustavy s kontaktem kolo-kolejnice pro vyšetřování modálních vlastností

Mějme matematický model hřídelové soustavy s ozubenými převody obecně ve tvaru

$$\underbrace{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}_p} \ddot{\mathbf{q}}_p(t) + \underbrace{\left(\mathbf{B} + \sum_{z=1}^Z \mathbf{B}_z\right)}_{\mathbf{B}_p} \dot{\mathbf{q}}_p(t) + \underbrace{\left(\mathbf{K} + \sum_{z=1}^Z \mathbf{K}_z\right)}_{\mathbf{K}_p} \mathbf{q}_p(t) = \mathbf{f}_p(t), \quad (3.6.4)$$

kde index p značí převodovou soustavu. Necht' má tato soustava n stupňů volnosti s vektorem zobecněných souřadnic $\mathbf{q}_p = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$.

K hřídelové soustavě připojme na n -tý uzel pomocí torzní pružné vazby o tuhosti k_c a koeficientu tlumení b_c kolo o momentu setrvačnosti I_0 , hmotnosti m_k a poloměru r_k s kontaktem kolo-kolejnice a skříní vozidla o hmotnosti m_v . Na kolo je přes převod p převeden moment motoru M_M . Situace je znázorněna na Obr. 24.



Obr. 24: Kontakt kolo-kolejnice

Přidáním modelu kola s respektováním jeho vazby ke kolejnici a respektováním skříně vozidla se model rozšíří o dva stupně volnosti

$$\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_k, x_v]^T, \quad (3.6.5)$$

kde φ_k je výchylka kola a x_v je výchylka vozidla. Momentová statická charakteristika motoru závisí na typu motoru a je v prvním přiblížení aproximována v okolí provozního rovnovážného stavu přímkou [5]

$$M_M(\omega_M + \dot{\varphi}_0) = M_M(\omega_M) - b_M(v)\dot{\varphi}_0, \quad (3.6.6)$$

kde $M_M(\omega_M)$ je hnací moment motoru při provozní rychlosti v vozidla a relativním skluzu dvojkolí s , $\dot{\varphi}_0$ je úhlová rychlost motoru. Směrnice (strmost) charakteristiky motoru $b_M(v)$ [Nm/rad] se může měnit v širokém rozsahu podle typu motoru [5]. Pro další analýzy

předpokládejme $b_m = konst$, tedy $v = konst$. Moment motoru je přenesen přes hřídelovou soustavu na kolo a je znásoben převodovým poměrem. Ze vztahu pro adhezní moment (3.6.1), moment motoru a ze znalosti převodového poměru určíme ustálený stav ve tvaru

$$M_{Mp} = \mu(s, v)N_0r_k, \quad (3.6.7)$$

tj. stav, kdy je moment motoru ve statické rovnováze s adhezní silou ve styku kola s kolejnící. Závislost mezi součinitelem adheze a relativním skluzem je nelineární. My však musíme pro potřeby modální analýzy model linearizovat. Nahradíme-li vztah (3.6.2) prvními dvěma členy Taylorova rozvoje v bodě s_0

$$\mu(s, v) = \mu(s_0, v) + \left[\frac{\partial \mu}{\partial s} \right]_{s=s_0} (s - s_0), \quad (3.6.8)$$

a přihlédneme-li k definici skluzu podle [6]

$$s = s_0 + \frac{r_k \dot{\varphi}_k}{v} \cdot 3,6, \quad (3.6.9)$$

pak se kontakt kolo-kolejnice projeví ve vektoru pravých stran [5]

$$\mathbf{f} = \left[0, \dots, 0, -\frac{1}{N_M} (b_M \dot{\varphi}_i \dots b_M \dot{\varphi}_{i+N_M-1}), 0 \dots, 0, -b(s_0, v) \dot{\varphi}_k, 0 \right]^T, \quad (3.6.10)$$

kde N_M je počet uzlů, do nichž je na rotoru motoru rozložen hnací moment. Koeficient $b(s_0, v)$ vyjadřuje směrnici tečny charakteristiky adhezních momentů působících z koleje na prokluzující kola ve výchozích provozních podmínkách definovaných relativním skluzem s_0 a rychlostí vozidla v [km/hod]. Z výrazů (3.6.8) až (3.6.10) vyplývá

$$b(s_0, v) = \left[\frac{\partial \mu}{\partial s} \right]_{s=s_0} \cdot 3,6 \frac{N_0 r_k^2}{v}. \quad (3.6.11)$$

Vektor (3.6.10) lze zapsat takto

$$\mathbf{f} = -\mathbf{B}_0(s_0, v) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.6.12)$$

kde zřejmě

$$\mathbf{B}_0 = \text{diag} \left[0, \dots, 0, \frac{1}{N_M} (b_M, \dots, b_M), 0, \dots, 0, b(s_0, v), 0 \right], \quad (3.6.13)$$

Přidáním kola (tuhý kotouč) pomocí torzní vazby s vlivem skříně vozidla (Obr. 24) se projeví i v maticích \mathbf{M}_p , \mathbf{B}_p a \mathbf{K}_p původně známých řádu n . Vyjádříme kinetickou energii kola s vlivem skříně vozidla

$$E_k = \frac{1}{2}I_o\dot{\varphi}_k^2 + \frac{1}{2}m_k\dot{x}_v^2 + \frac{1}{2}m_v\dot{x}_v^2, \quad (3.6.14)$$

potenciální (deformační) energii

$$E_p = \frac{1}{2}k_c(\varphi_k - \varphi_n)^2 \quad (3.6.15)$$

a Rayleighovo disipační funkci

$$R = \frac{1}{2}b_c(\dot{\varphi}_k - \dot{\varphi}_n)^2. \quad (3.6.16)$$

Dosazením do Lagrangeových rovnic (3.1.1) pro zobecněné souřadnice (3.6.5) dostaneme výsledné matice matematického modelu ve tvaru

$$\mathbf{M} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{M}_p & & \\ \hline & I_o & 0 \dots \varphi_k \\ \hline & 0 & m_k+m_v \dots x_v \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{B}_p & & & \\ \hline & b_c & -b_c & 0 \dots n \\ \hline & -b_c & b_c & 0 \dots \varphi_k \\ \hline & 0 & 0 & 0 \dots x_v \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{K} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{K}_p & & & \\ \hline & k_c & -k_c & 0 \dots n \\ \hline & -k_c & k_c & 0 \dots \varphi_k \\ \hline & 0 & 0 & 0 \dots x_v \\ \hline \end{array}$$

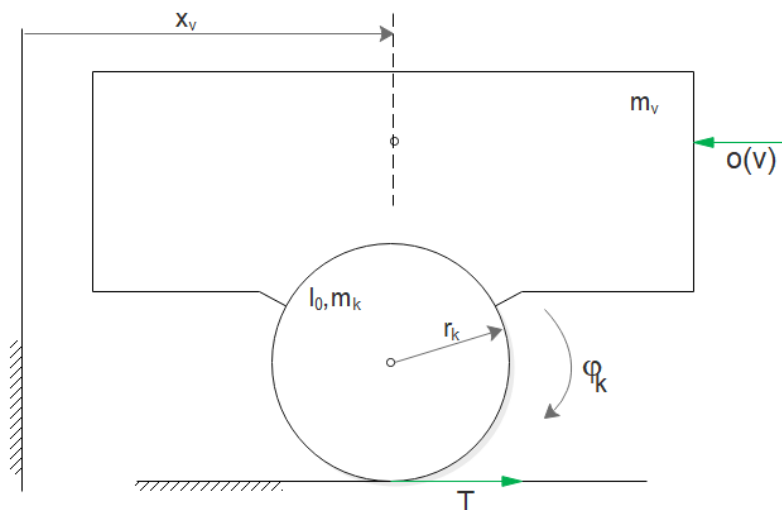
Výsledný matematický model popisující torzní kmitání hřídelové soustavy s linearizovaným kontaktem kolo-kolejnice lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0(s_0, v))\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.6.17)$$

Tento silně nekonzervativní model s linearizovanou adhezní charakteristikou v závislosti na relativním skluzu a rychlosti vozidla lze použít pro modální analýzu a posouzení stability při různých provozních stavech.

3.6.3 Matematický model hřídelové soustavy s kontaktem kolo-kolejnice pro časovou simulaci

Popišme si nejprve případ kontaktu kola s kolejnicí s vlivem skříně vozidla bez vazby na hřídelovou soustavu. Tento systém pak má 2 stupně volnosti. Situace je znázorněna na Obr. 25.



Obr. 25: Kontakt kolo-kolejnice bez vazby k hřídelové soustavě

Odpor prostředí $o(v)$ a tečná složka valivé vazby T představují vnější zatížení systému. Zavedeme vektor zobecněných souřadnic úhlu natočení kola a výchylky vozidla

$$\mathbf{q} = [\varphi_k, x_v]^T. \quad (3.6.18)$$

Kinetickou energii pak lze vyjádřit ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}_k^2 + \frac{1}{2} (m_k + m_v) \dot{x}_v^2. \quad (3.6.19)$$

Zobecněné silové účinky působící na kolo a vozidlo mají tvar

$$Q_{\varphi_k} = -T r_k, \quad Q_{x_v} = T - o(v), \quad (3.6.20)$$

dosazením do Lagrangeových rovnic druhého druhu pak dostaneme matematický model dané soustavy

$$(m_v + m_k) \ddot{x}_v = T - o(v), \quad (3.6.21)$$

$$I_0 \ddot{\varphi}_k = -r_k T. \quad (3.6.22)$$

Pokud tento subsystém připojíme vazbou typu torzní spojky k hřídelové soustavě o n stupních volnosti podobně jako v kapitole 3.6.2, bude mít matematický model pro zobecněné souřadnice (3.6.5) tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \quad (3.6.23)$$

kde matice hmotnosti, tlumení, tuhosti i vazeb mají stejný tvar jako v (3.6.17). Změní se však vektor pravých stran

$$\mathbf{f}(t) = [0, \dots, 0, -r_k T, T - o(v)]^T \in \mathbb{R}^{n+2}. \quad (3.6.24)$$

Pozornost bude nyní zaměřena na vyjádření vnějších silových účinků. Tečná složka valivé vazby má tvar

$$T = N_0 \mu(s, v), \quad (3.6.25)$$

kde N_0 je jmenovitá kolová síla a $\mu(s, v)$ je koeficient adheze. Adhezní součinitel jsme definovali v (3.6.2) ve tvaru

$$\mu(s, v) = \frac{2}{\pi} f \left[\operatorname{arctg} \frac{s}{\rho_{ad} f} + \frac{\frac{s}{\rho_{ad} f}}{1 + \left(\frac{s}{\rho_{ad} f} \right)^2} \right], \quad (3.6.26)$$

kde jednotlivé koeficienty jsou definovány výše. Skluz lze definovat podle [6] a [9] takto

$$s = \frac{r_k \dot{\varphi}_k - \dot{x}_v}{\dot{x}_v}, \quad (3.6.27)$$

kde r_k je poloměr kola, $\dot{\varphi}_k$ je úhlová rychlost kola a \dot{x}_v je rychlost vozidla.

4 Metody dynamické analýzy kmitajících soustav

4.1 Modální analýza lineárních konzervativních soustav

Modální analýzu konzervativních i slabě nekonzervativních soustav vyšetřujeme z pohybové rovnice v maticovém tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (4.1.1)$$

kde \mathbf{M} je symetrická matice hmotnosti a \mathbf{K} je symetrická matice tuhosti. Při počátečních podmínkách

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0, \quad (4.1.2)$$

předpokládáme řešení rovnice (4.1.1) ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v} \sin(\Omega t), \quad (4.1.3)$$

kde \mathbf{v} je neznámý vektor a Ω je neznámé číslo. Zřejmě platí

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\Omega^2 \mathbf{v} \sin(\Omega t). \quad (4.1.4)$$

Vztahy (4.1.3) a (4.1.4) dosadíme do (4.1.1)

$$-\Omega^2 \mathbf{M}\mathbf{v} \sin(\Omega t) + \mathbf{K}\mathbf{v} \sin(\Omega t) = \mathbf{0}, \quad (4.1.5)$$

za předpokladu, že je rovnice (4.1.5) splněna v každém časovém okamžiku platí

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4.1.6)$$

Rovnice (4.1.6) popisuje problém vlastních hodnot. Tato soustava rovnic má netriviální řešení pouze pokud

$$\det(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (4.1.7)$$

Rovnice (4.1.7) se nazývá charakteristickou rovnicí. Kořeny této rovnice $\lambda_i = \Omega_i^2$ nazýváme vlastní čísla, kde $i = 1, 2, \dots, n$ (počet stupňů volnosti soustavy). Vlastní frekvence dané konzervativní soustavy jsou ve tvaru

$$\Omega_i = +\sqrt{\lambda_i} \quad [\text{rad/s}]. \quad (4.1.8)$$

Dosadíme-li vlastní čísla do rovnice (4.1.6) můžeme určit neznámý vektor \mathbf{v}_i , který nazýváme vlastní vektor příslušející k vlastní frekvenci Ω_i . V technické praxi často uspořádáváme vlastní frekvence podle velikosti $\Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \dots \leq \Omega_n$.

Vzhledem k homogenitě rovnice

$$(\mathbf{K} - \Omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

jsou i vektory $c\mathbf{v}_i$ jejím řešením pro libovolné reálné číslo c . Pro jednoznačnost je proto nutné vlastní vektory normovat [2]. Podmínku pro normované vlastní vektory zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = 1. \quad (4.1.9)$$

Pak jsou vlastní vektory ortonormální a splňují podmínky [2]

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{v}_i^T \mathbf{K} \mathbf{v}_j = \Omega_j^2 \delta_{ij}. \quad (4.1.10)$$

Můžeme zapsat vlastní čísla soustavy do tzv. spektrální matice

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\Omega_i^2], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1.11)$$

a k nim příslušející normalizované vlastní vektory po sloupcích do modální matice

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n], \quad (4.1.12)$$

pak podmínky (4.1.9) můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}. \quad (4.1.13)$$

4.2 Modální analýza lineárních silně nekonzervativních soustav

Pohybová rovnice silně nekonzervativního systému s n stupni volnosti má tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (4.2.1)$$

Níže uvedený postup modální analýzy silně nekonzervativních soustav lze uplatnit za následujících předpokladů

- jedná se o lineární soustavu,
- zanedbáváme vliv gyroskopických účinků,
- matice \mathbf{M} , \mathbf{B} a \mathbf{K} jsou konstantní a symetrické.

Modální analýzu této soustavy je výhodné vyšetřovat ve stavovém prostoru definovaným stavovým vektorem ve tvaru

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Matematický model (4.2.1) rozšíříme o identitu

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.2.3)$$

a zapíšeme maticově

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{u}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}. \quad (4.2.4)$$

Soustava rovnic

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.2.5)$$

je řádu $2n$. Lze vyjádřit první derivaci ve tvaru

$$\dot{\mathbf{u}} = \underbrace{-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}\mathbf{u}. \quad (4.2.6)$$

Výsledný tvar soustavy rovnic (4.2.6) pak lze zapsat ve tvaru

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad (4.2.7)$$

kde \mathbf{A} je systémová matice, pro níž platí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.2.8)$$

Předpokládejme řešení soustavy rovnic (4.2.7) ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}e^{\lambda t}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \lambda\mathbf{v}e^{\lambda t}. \quad (4.2.9)$$

Dosazením (4.2.9) do (4.2.7) dostaneme po úpravě

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (4.2.10)$$

jedná se o problém vlastních hodnot systémové matice \mathbf{A} , kde \mathbf{v} je vlastní vektor příslušející k vlastnímu číslu λ . Netriviální řešení existuje pouze za předpokladu

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \quad (4.2.11)$$

Kořeny této charakteristické rovnice, vlastní čísla λ_ν , mohou být komplexně sdružená obecně ve tvaru [8]

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu \pm i\beta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (4.2.12)$$

nebo také reálná

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu \quad \nu = 2m + 1, 2m + 2, \dots, 2n. \quad (4.2.13)$$

Je účelné vlastní čísla seřadit. Prvních m komplexních vlastních čísel s kladnou imaginární částí β_ν uspořádáme vzestupně tak, aby $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_m$. Vlastní čísla se zápornou imaginární částí zařadíme za ně. Ostatní vlastní čísla $(2n - m)$ jsou reálná.

Vlastní vektory lze získat z rovnice

$$(\lambda_\nu \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_\nu = \mathbf{0}, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2n. \quad (4.2.14)$$

Vzhledem k homogenitě je nutné, stejně jako u modální analýzy konzervativních soustav, vlastní vektory normovat. Podmínku normovaných vlastních vektorů pro nekonzervativní systémy lze zapsat ve tvaru [8]

$$\mathbf{v}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{v}_\nu = 1. \quad (4.2.15)$$

Vlastní vektory pak splňují pro $\lambda_i \neq \lambda_j$ podmínky biortonormality

$$\mathbf{v}_i \mathbf{N} \mathbf{v}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{v}_i \mathbf{P} \mathbf{v}_j = -\lambda_j \delta_{ij}. \quad (4.2.16)$$

Zavedeme-li modální matici v P^{2n}

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_\nu] \in \mathbb{C}^{2n, 2n}, \quad (4.2.17)$$

poté je modální matice v P^n

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_\nu] \in \mathbb{C}^{n, 2n}, \quad (4.2.18)$$

s příslušnou modální maticí v P^{2n} vázána vztahem

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (4.2.19)$$

kde $\mathbf{\Lambda}$ je spektrální matice, kterou lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_\nu) \in \mathbb{C}^{2n, 2n}. \quad (4.2.20)$$

Podmínky (4.2.16) můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{V}^T \mathbf{N} \mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = -\mathbf{\Lambda}. \quad (4.2.21)$$

4.3 Ustálená odezva harmonicky buzených soustav

4.3.1 Slabě nekonzervativní model

Pohybovou rovnici slabě nekonzervativní (slabě tlumené) soustavy s harmonickým buzením uvažujme ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \sin \omega t, \quad (4.3.1)$$

kde \mathbf{f}_c a \mathbf{f}_s jsou vektory amplitud kosinových a sínových složek buzení. Jedná se o soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu, kde n představuje počet stupňů volnosti. Zavedeme vektor komplexních amplitud $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_c - i\mathbf{f}_s$ pak

$$\operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{f}}e^{i\omega t}\} = \mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \sin \omega t. \quad (4.3.2)$$

Soustavu rovnic (4.3.1) vyjádříme v komplexním tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{B}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{f}}e^{i\omega t}, \quad (4.3.3)$$

kde pro $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_c - i\mathbf{q}_s$ platí identita $\mathbf{q}(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{q}}e^{i\omega t}\}$. Ustálenou odezvu systému pak popíšeme partikulárním řešením, které odhadneme ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{q}}_p = \tilde{\mathbf{q}}_a e^{i\omega t}, \quad (4.3.4)$$

kde $\tilde{\mathbf{q}}_a$ je vektor komplexních amplitud, zřejmě platí

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_p = i\omega \tilde{\mathbf{q}}_a e^{i\omega t}, \quad \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_p = -\omega^2 \tilde{\mathbf{q}}_a e^{i\omega t}. \quad (4.3.5)$$

Dosazením rovnic (4.3.5) a (4.3.4) do (4.3.3) dostaneme po úpravě

$$\underbrace{(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K})}_{\mathbf{Z}(\omega)} \tilde{\mathbf{q}}_a = \tilde{\mathbf{f}}, \quad (4.3.6)$$

kde matice $\mathbf{Z}(\omega)$ je označována jako matice dynamické tuhosti. Komplexní amplitudu pak lze vyjádřit ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{q}}_a = \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \tilde{\mathbf{f}}, \quad (4.3.7)$$

kde označme $\mathbf{Z}^{-1}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)$ jako matici dynamické poddajnosti, i -tý tvar komplexní amplitudy má obecně tvar

$$\tilde{q}_a^i = q_{ic} - iq_{is}. \quad (4.3.8)$$

Úroveň kmitání hřídelové soustavy pak lze vyjádřit jako horní odhad zobecněných výchylek uzlů

$$\hat{q}_i(\omega) = \sqrt{|\tilde{q}_a^i|^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3.9)$$

Vykreslením hodnot komplexní amplitudy jednotlivých uzlů $\hat{q}_i(\omega)$ v závislosti na budící frekvenci ω získáme amplitudovou charakteristiku, která nám dává přehled o rezonančních frekvencích soustavy. Je proto nutné předem vyšetřit modální analýzu. Rezonance nastává v případě, kdy $\omega = \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

4.3.2 Silně nekonzervativní model

Matematický model silně nekonzervativního modelu s obecným buzením o n stupni volnosti uvažujeme ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (4.3.10)$$

kde matice tlumení \mathbf{B} je nekomutativní. Jedná se tak o silně tlumenou soustavu, kterou je výhodné vyšetřovat ve stavovém prostoru definovaném stavovým vektorem

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}. \quad (4.3.11)$$

Model lze ve stavovém prostoru zapsat ve tvaru

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}(t) = [\mathbf{0}^T, \mathbf{f}(t)^T]^T. \quad (4.3.12)$$

Provedeme modální transformaci

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}\mathbf{x}, \quad (4.3.13)$$

kde \mathbf{V} je modální matice (4.2.17). Dosazením (4.3.13) do (4.3.12) a násobením zleva transponovanou modální maticí dostaneme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{\Lambda}\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}^T\mathbf{p}(t). \quad (4.3.14)$$

Tato maticová rovnice představuje $2n$ na sobě nezávislých diferenciálních rovnic prvního řádu. Pro ν -tou rovnicí platí

$$\dot{x}_\nu(t) - \lambda_\nu x_\nu(t) = \mathbf{r}_\nu^T \mathbf{f}(t), \quad \nu = 1, 2, \dots, 2n. \quad (4.3.15)$$

Dále uvažujeme harmonické buzení

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_C \cos \omega t + \mathbf{f}_S \sin \omega t. \quad (4.3.16)$$

Zavedme komplexní tvary buzení i řešení

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}e^{i\omega t}, \quad \tilde{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}e^{i\omega t}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}e^{i\omega t}, \quad (4.3.17)$$

kde pro vektory komplexních amplitud platí

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_C - i\mathbf{f}_S, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_C - i\mathbf{q}_S, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_C - i\mathbf{x}_S. \quad (4.3.18)$$

Komplexní tvar diferenciálních rovnic (4.3.15)

$$\dot{\tilde{x}}_\nu(t) - \lambda_\nu \tilde{x}_\nu(t) = \mathbf{r}_\nu^T \tilde{\mathbf{f}}e^{i\omega t}, \quad (4.3.19)$$

má partikulární řešení $\tilde{x}_\nu(t) = \tilde{x}_\nu e^{i\omega t}$, kde komplexní amplitudy modálních souřadnic jsou zřejmě

$$\tilde{x}_\nu = \frac{\mathbf{r}_\nu^T \tilde{\mathbf{f}}}{i\omega - \lambda_\nu}. \quad (4.3.20)$$

Vztah (4.3.20) zapíšeme maticově

$$\tilde{\mathbf{x}} = (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{f}}. \quad (4.3.21)$$

Vzhledem k modální transformaci komplexní stavový vektor \mathbf{u} vyjadřující komplexní amplitudy zobecněných souřadnic \mathbf{q} i rychlostí $\dot{\mathbf{q}}$ má tvar

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{V}(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{f}}. \quad (4.3.22)$$

Podle (4.3.11) pak dostaneme vektor komplexních amplitud výchylek ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{R}(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{f}}, \quad (4.3.23)$$

kde ν -tý vektor komplexních amplitud má tvar

$$\tilde{\mathbf{q}}_\nu = \frac{\mathbf{r}_\nu \mathbf{r}_\nu^T \tilde{\mathbf{f}}}{i\omega - \lambda_\nu}. \quad (4.3.24)$$

Rezonanční stavy vzniknou tehdy, když tzv. participační faktory [8]

$$p_\nu(\omega) = \left| \frac{\mathbf{r}_\nu^T \tilde{\mathbf{f}}}{i\omega - \lambda_\nu} \right| \quad (4.3.25)$$

nabývají „výrazná“ maxima, tedy pro $\omega = \pm\beta_\nu$, kde $\nu = 1, 2, \dots, 2n$.

4.4 Numerická integrace pohybových rovnic

Uvažujme pohybové rovnice obecně ve tvaru (3.1.4). Jedná se o soustavu n obyčejných lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s konstantními koeficienty. Tato soustava řeší při zadaných počátečních podmínkách

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0, \quad (4.4.1)$$

pohyb kmitavého systému s n stupni volnosti. Řešením těchto rovnic získáme výchylku $\mathbf{q}(t)$ a rychlost $\dot{\mathbf{q}}(t)$ pro zadaný časový interval $t = [0, T]$.

Při numerické realizaci je výhodné převést systém n diferenciálních rovnic druhého řádu na soustavu $2n$ diferenciálních rovnic prvního řádu. Jedním ze způsobů převodu je připojit k (3.1.4) maticovou identitu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

zapišeme maticově

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{u}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}}, \quad (4.4.3)$$

zřejmě

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{f}}. \quad (4.4.4)$$

Soustavu rovnic (4.4.4) vynásobíme \mathbf{N}^{-1} zleva

$$\dot{\mathbf{u}} = \underbrace{-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{N}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}}_{\mathbf{F}}, \quad (4.4.5)$$

výsledná soustava diferenciálních rovnic prvního řádu má tvar

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (4.4.6)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.4.7)$$

Pro počáteční podmínky ve tvaru

$$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{bmatrix} \quad (4.4.8)$$

již lze řešit rovnici (4.4.6) například v programovém prostředí MATLAB numerickou metodou Runge-Kutta, procesem `ode45`.

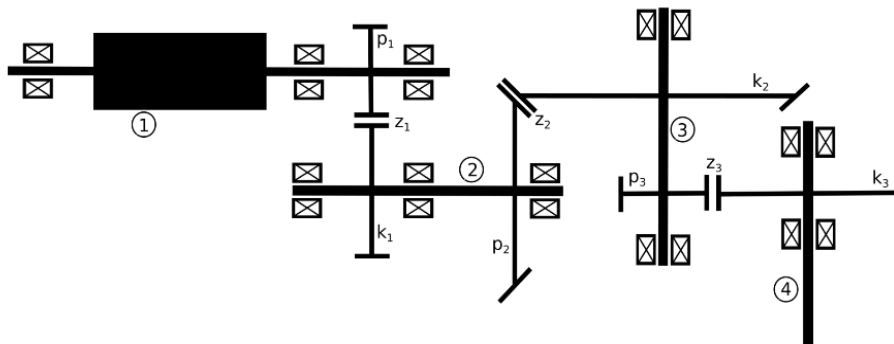
5 Aplikace na vnitřní vestavbu prototypu vysokorychlostní pohonné jednotky

Výše uvedené postupy matematického modelování uplatníme při výpočtovém modelování torzního kmitání vnitřní vestavby vysokorychlostní pohonné jednotky vyvíjené na ZČU v Plzni ve spolupráci s firmou Wikov MGI a.s. Fotografie pohonné jednotky je na Obr. 26.



Obr. 26: Fotografie pohonu - představení na mezinárodním veletrhu Innotrans Berlin 2016

Pro další potřeby modelování bude pozornost soustředěna na vnitřní vestavbu pohonné jednotky, jejíž kinematické schéma je uvedeno na Obr. 27.

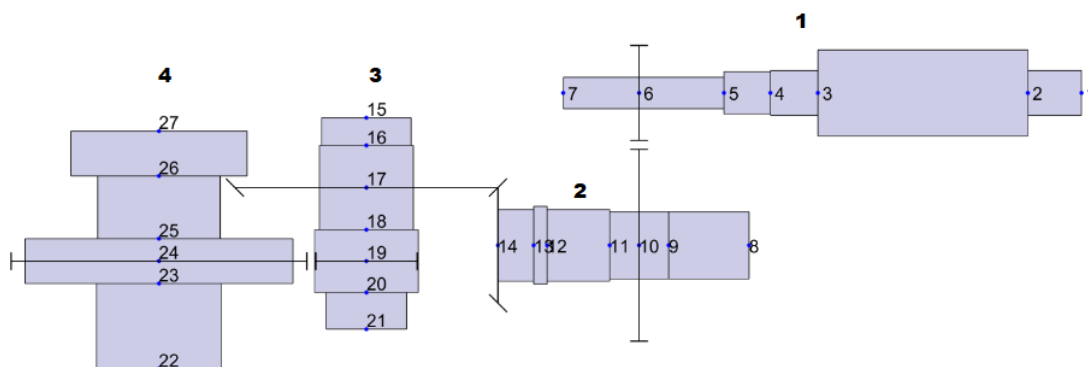


Obr. 27: Schéma pohonu

Vnitřní rotující vestavba je tvořena hřídelem motoru 1, který nese rotorový paket a pastorek p_1 , který je zubovou vazbou s šikmým ozubením z_1 propojen s kolem k_1 . Kolo k_1 je umístěno na předlohovém hřídeli 2. Pastorek p_2 a kolo k_2 tvoří kuželo-čelní ozubení propojující hřídel 2 a 3 zubovým záběrem z_2 . Na hřídel 3 nesoucí kolo k_2 je nasazen pastorek p_3 zabírající s kolem k_3 v zubové vazbě z_3 se šikmým čelním ozubením. Výstupní hřídel 4 pak lze spojit pomocí pružné spojky s kolem s nelineárním kontaktem kolo-kolejnice a nebo řetězec obsahující kloubové hřídele, momentové čidlo, prokluzovou spojku a asynchronní motor. Tento řetězec tvoří součást zkušebního standu, na němž lze provádět základní testy rychlostního pohonu.

5.1 Výpočtové modelování pohonné jednotky

Hřídele pohonného systému diskretizujeme konečnými prvky o odpovídajících parametrech. Uzly na elementech se nachází v místech změny průřezu hřídele a v místech nasazení kotoučů. Torzně izolovaný, diskretizovaný systém je znázorněn na Obr. 28.



Obr. 28: Diskretizace vnitřní vestavby pohonu

V každém uzlu je soustředěna torzní výchylka, celá soustava má tedy 27 stupňů volnosti.

Pro výpočtovou analýzu dynamického chování sestavíme výpočtový model zahrnující kmitání rotujících částí pohonné jednotky. Model zahrnuje následující předpoklady

1. torzní kmity,
2. spojitě rozložení hmotnosti,
3. materiálové tlumení,
4. zubová vazba bez ztráty kontaktu,
5. lineární model.

Za uvedených předpokladů lze použít výše odvozený postup modelování hřídelových soustav, viz. kapitola 3. Při tvorbě modelu je využita metoda dekompozice na subsystémy. Vnitřní rotující vestavbu lze rozdělit na 4 subsystémy odpovídající 4 hřídelům, samostatně jsou pak modelovány vazby mezi jednotlivými subsystémy, reprezentované zubovými vazbami z_1 , z_2 a z_3 . Matematický model každého subsystému lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}_s \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_s^E(t) + \mathbf{f}_s^Z(t), \quad (5.1.1)$$

kde \mathbf{M}_s je matice hmotnosti, \mathbf{B}_s je matice tlumení a \mathbf{K}_s je matice tuhosti s -tého subsystému pro $s = 1, 2, 3, 4$. Tyto matice jsou definovány v konfiguračním prostoru zobecněných souřadnic reprezentovaným vektorem $\mathbf{q}_s = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_s}]$, kde n_s je počet stupňů volnosti s -tého subsystému. Vektor vnějších sil $\mathbf{f}_s^E(t)$ a vektor vazbových sil $\mathbf{f}_s^Z(t)$ definují zatížení každého subsystému. Zavedeme-li globální vektor zobecněných souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{q}_p(t) = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4]^T \in \mathbb{R}^{27}, \quad (5.1.2)$$

dostaneme globální matematický model vnitřní vestavby

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_p(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_p(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}_p(t) = \mathbf{f}_p^E(t) + \mathbf{f}_p^Z(t). \quad (5.1.3)$$

Pro zavedené zobecněné souřadnice (5.1.2) mají pak matice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{27,27}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{27,27}$ a $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{27,27}$ tvar

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & & & \\ & \mathbf{M}_2 & & \\ & & \mathbf{M}_3 & \\ & & & \mathbf{M}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \mathbf{B}_3 & \\ & & & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & & & \\ & \mathbf{K}_2 & & \\ & & \mathbf{K}_3 & \\ & & & \mathbf{K}_4 \end{bmatrix}. \quad (5.1.4)$$

Zaměříme se nyní na vyjádření vazbových sil mezi subsystémy, které jsou reprezentované vektorem $\mathbf{f}^Z(t)$. Převodový systém obsahuje 3 zubové vazby. Při předpokladu torzního

kmitání lze síly přenášené jak šikmým čelním ozubením tak i kuželo-čelním ozubením vyjádřit pouze tečnou složkou působící v tečné rovině spoluzabírajících ozubených kol. Pokud zároveň předpokládáme stálý záběr bez ztráty kontaktu můžeme zubovou vazbu nahradit diskretní visko-elastickou vazbou, tak jak je uvedeno v kapitole 3.4. Matematický model je pak lineární. Podle (3.4.2) a (3.4.3) lze globální vektor vazbových sil vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{f}_p^Z(t) = \mathbf{K}_Z \mathbf{q}_p + \mathbf{B}_Z \dot{\mathbf{q}}_p, \quad (5.1.5)$$

kde předpokládejme, že \mathbf{K}_Z a \mathbf{B}_Z jsou globální matice tuhosti, resp. tlumení všech vazeb mezi subsystémy. Výsledný matematický model vnitřní rotující vestavby se zubovými vazbami má pak tvar

$$\underbrace{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}_p} \ddot{\mathbf{q}}_p(t) + \underbrace{(\mathbf{B} + \mathbf{B}_Z)}_{\mathbf{B}_p} \dot{\mathbf{q}}_p(t) + \underbrace{(\mathbf{K} + \mathbf{K}_Z)}_{\mathbf{K}_p} \mathbf{q}_p(t) = \mathbf{f}_p^E(t). \quad (5.1.6)$$

Pokud chceme v modelu zahrnout také vliv výrobních nepřesností, reprezentované kinematickými úchytkami kol, musíme na pravou stranu rovnice přičíst vektor vnitřního buzení \mathbf{f}^I , který je odvozen v kapitole 3.5.

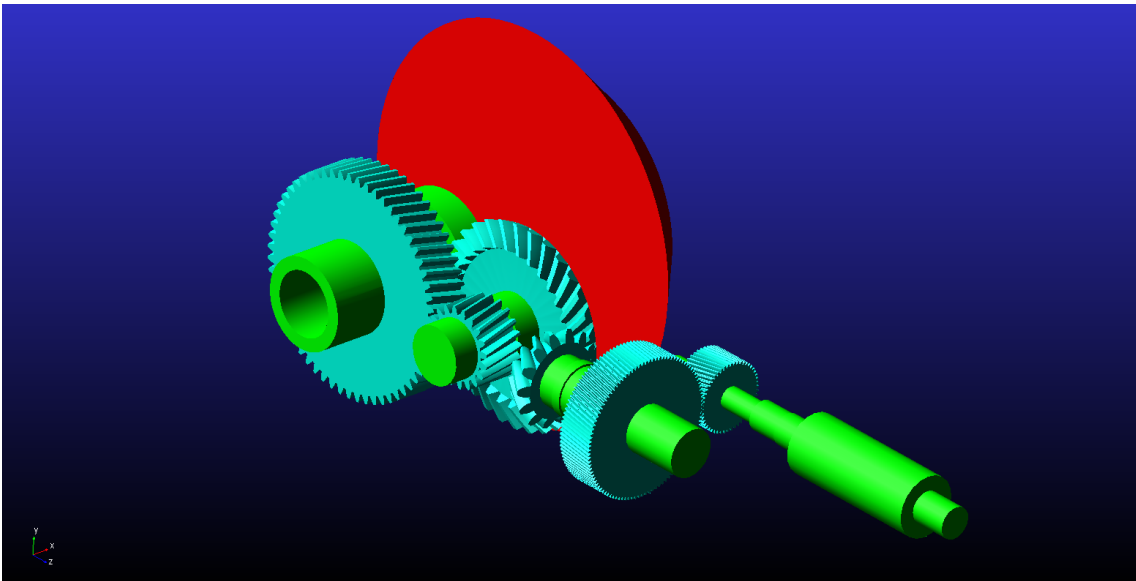
Výše zformulovaný matematický model vnitřní vestavby (index p) lze dále doplnit o další komponenty. Na výstupní hřídel (uzel 27) můžeme pomocí torzní spojky připojit model kolejevého kola s kontaktem kolo-kolejnice a zahrnout také vliv setrvačnosti skříně vozidla, ve které je pohonný systém uložen. Velikost tuhosti torzní spojky je uvažována $k_c = 10^8$ [Nm/rad], hmotnost kola $m_k = 150$ [kg] a hmotnost vozidla vztažená na jedno kolo $m_v = 2500$ [kg]. Matematický model se rozšíří o 2 stupně volnosti (bez indexu). Můžeme poté zkoumat modální vlastnosti silně nekonzervativního systému s linearizovanou adhezní charakteristikou, jehož matematický model je odvozen v kapitole 3.6.2. Dále je možné simulovat rozjezd vozidla v časové oblasti s nelineární vazbou v kontaktu kolo-kolejnice (kapitola 3.6.3). Je také možné na výstup pohonné jednotky připojit model torzní soustavy zkušebního standu.

Na základě formulovaného matematického modelu kmitání torzní soustavy v různých modifikacích byl sestaven odpovídající výpočtový model v programovém prostředí MATLAB.

Nad rámec práce byl v prostředí MSC.ADAMS sestaven model vnitřní vestavby s kontaktem kolo-kolejnice (Obr. 29). Cílem bylo vytvořit výpočtový model s parametry odpovídajícími MKP modelu. Při tvorbě modelu byly použity následující kroky

- jednotlivé hřídele jsou tvořeny z tuhých těles, které odpovídají konečným prvkům modelu v MATLABu,
- elementy jsou mezi sebou propojeny torzními vazbami a jsou rotačně připojeny k rámu,
- tuhost torzních vazeb odpovídá tuhosti příslušných konečných prvků MKP modelu,
- na výstupní hřídel je pomocí torzní spojky připojeno kolo (v Obr. 29 znázorněno červenou barvou) o stejném momentu setrvačnosti a hmotnosti,

- všechna tělesa konají pouze rotační pohyb,
- vliv vozidla (výchylka, rychlost i zrychlení) je v modelu definován diferenciální rovnicí (3.6.21), resp. soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu z ní vytvořené,
- adhezní účinky v kontaktu kolo-kolejnice jsou v modelu definované prostřednictvím adhezního momentu (3.6.1) působícího v ose rotace kola,
- model v prostředí ADAMS zahrnuje oproti MKP modelu reálné parametry ozubených kol.



Obr. 29: Model vnitřní vestavby v programu ADAMS

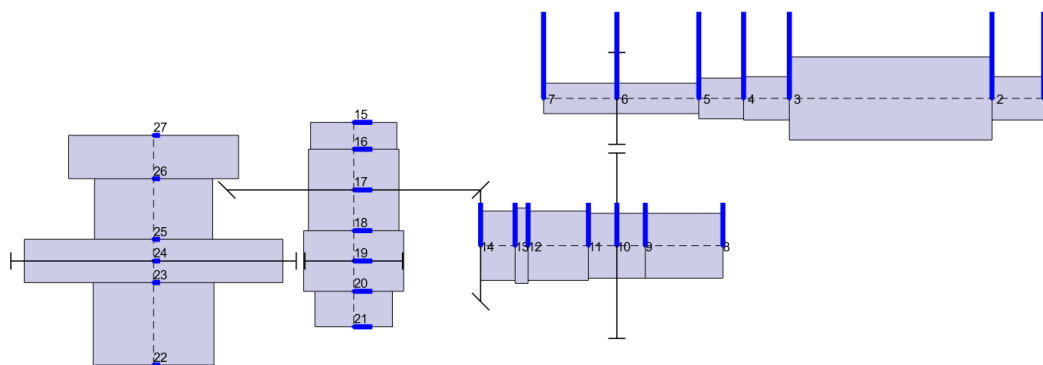
5.2 Modální analýza

5.2.1 Modální analýza pohonné jednotky

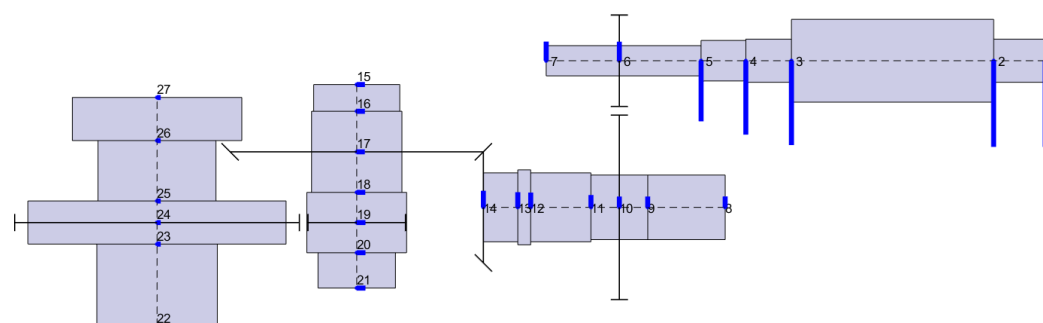
Modální analýza pohonné jednotky spočívá ve stanovení vlastních frekvencí $f_\nu [Hz]$ a jim odpovídajících vlastních vektorů \mathbf{v}_ν , pro $\nu = 1, 2, \dots, 27$, na přidruženém netlumeném, volně kmitajícím a torzně izolovaném modelu k (5.1.6) ve tvaru

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{q}}_p(t) + \mathbf{K}_p \mathbf{q}_p(t) = \mathbf{0}. \quad (5.2.1)$$

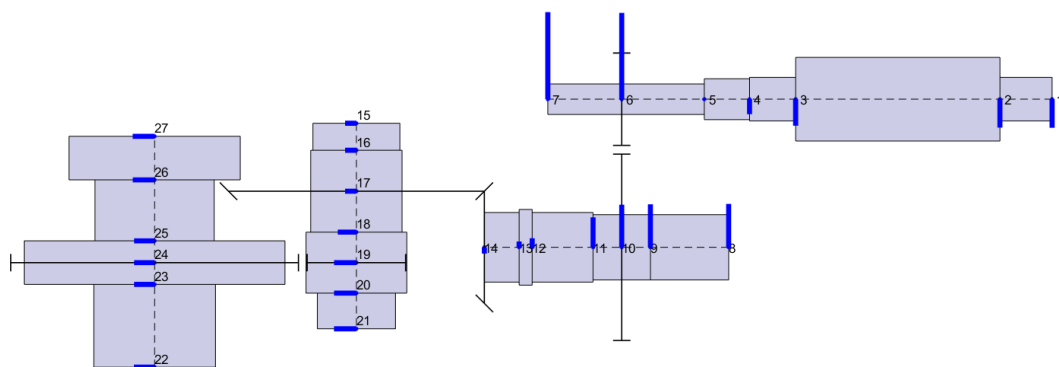
Pro ilustraci je na Obr. 30 až Obr. 34 zobrazeno 5 frekvenčně nejnižších vlastních tvarů a v Tab. 1 jsou uvedeny příslušné vlastní frekvence. Na každém hřídeli je v odpovídajícím uzlu vykreslena hodnota amplitudy příslušné vlastní frekvence (modrý sloupec). Přerušovaná čára znázorňuje osu hřídele.



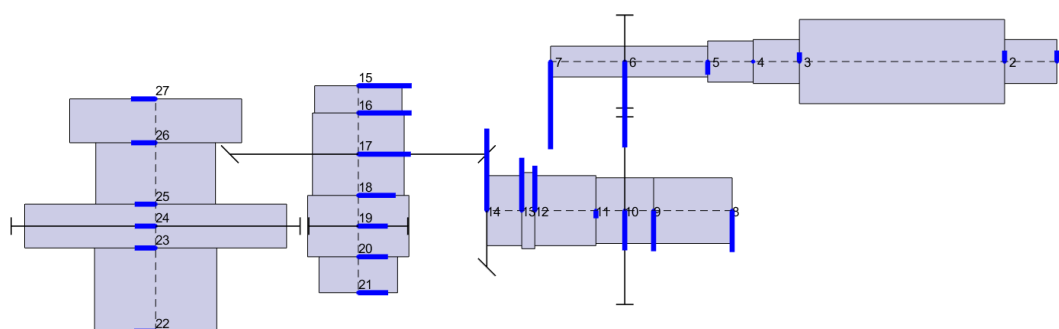
Obr. 30: První vlastní tvar



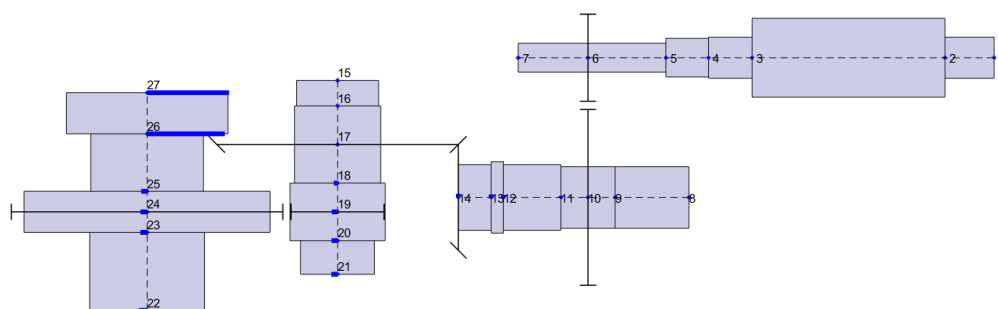
Obr. 31: Druhý vlastní tvar



Obr. 32: Třetí vlastní tvar



Obr. 33: Čtvrtý vlastní tvar



Obr. 34: Pátý vlastní tvar

Pořadí vlastní frekvence	Vlastní frekvence [Hz]	Charakteristika vlastních tvarů kmitání
f_1	0	Tuhý systém (bez deformací)
f_2	428,62	Torzní zkrucování rotoru motoru 1
f_3	792,83	Dominantní kmitání rotoru motoru 1
f_4	1215,3	Dominantní kmitání předlohového hřídele 2
f_5	3322,3	Kmitání hřídele 4

Tab. 1: Hodnoty vlastních frekvencí a charakteristika vlastních tvarů kmitání

V případě prvního vlastního tvaru příslušejícímu nulové vlastní frekvenci soustava nekmitá, nedochází k deformacím hřídelů, ani vazeb. Druhý vlastní tvar je charakteristický torzním zkrucováním hřídele motoru. U třetího tvaru kmitu dominuje torzní kmitání hřídele motoru, předlohový hřídel 2 kmitá v protifázi s hřídelem 3. Čtvrtý vlastní tvar je charakterizován především torzním zkrucováním předlohového hřídele 2, hřídel 3 kmitá v protifázi s hřídelem 4. Pátý tvar představuje dominantní kmitání výstupního hřídele 4.

5.2.2 Modální analýza pohonné jednotky s kontaktem kolo-kolejnice

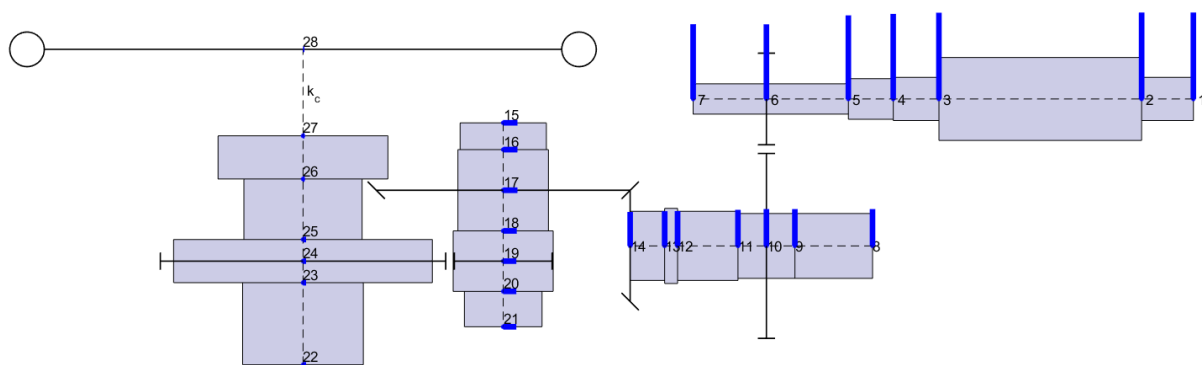
Matematický model pohonné jednotky se přidáním vazby kontaktu kolo-kolejnice s lineárnizovanou adhezní charakteristikou a uvažováním vlivu skříně vozidla rozšíří o dva stupně volnosti. Tento matematický model je odvozen v kapitole 3.6.2. Linearizovaná adhezní charakteristika se v modelu projeví v matici $\mathbf{B}_0(s_0, v)$, matematický model je ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0(s_0, v))\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.2.2)$$

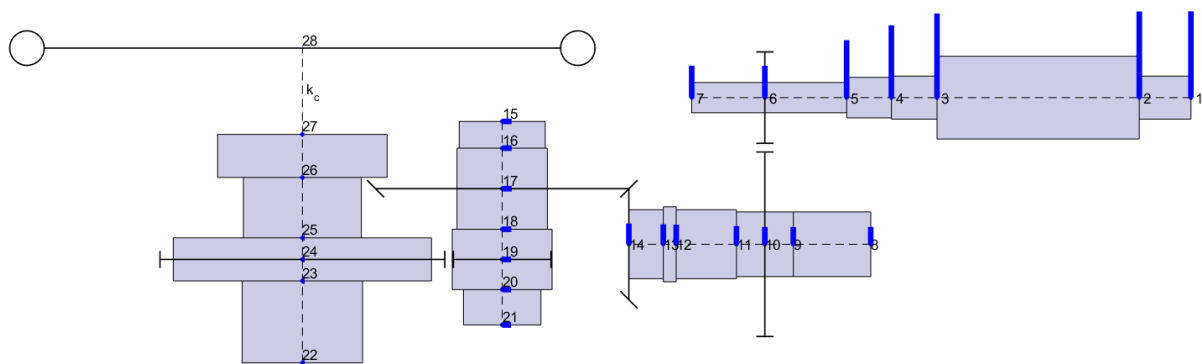
Je patrné, že tento silně nekonzervativní model je závislý na relativním skluzu s_0 a rychlosti vozidla v . Nechť je moment motoru konstantní, směrnice charakteristiky motoru je pak $b_M = 0$ [Nm/rad].

Modální analýza silně nekonzervativního modelu je uvedena v kapitole 4.2. Na Obr. 35 až Obr. 39 je zobrazeno prvních 5 vlastních tvarů, představující velikosti absolutních hodnot vlastních vektorů, odpovídajícím seřazeným vlastním číslům pro $s_0 = 0,001$ a $v = 40$ [km/h]. Vlastní čísla jsou uvedena v Tab. 2. Vykreslení vlastních tvarů je na stejném principu jako u konzervativního modelu.

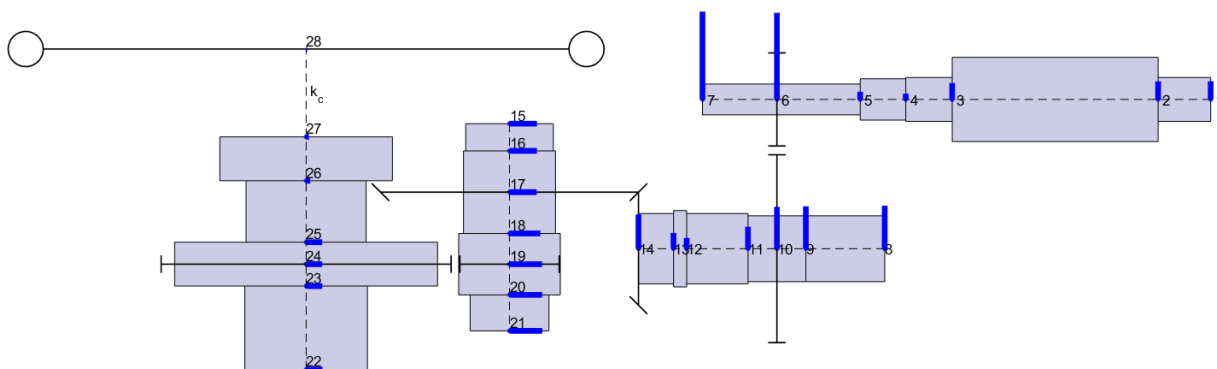
Poznamenejme, že při vykreslování vlastních tvarů kmitů u silně nekonzervativního modelu je výhodnější animace, jelikož při vykreslení velikosti absolutních hodnot vlastních vektorů nelze rozeznat, jestli systém kmitá ve fázi nebo v protifázi.



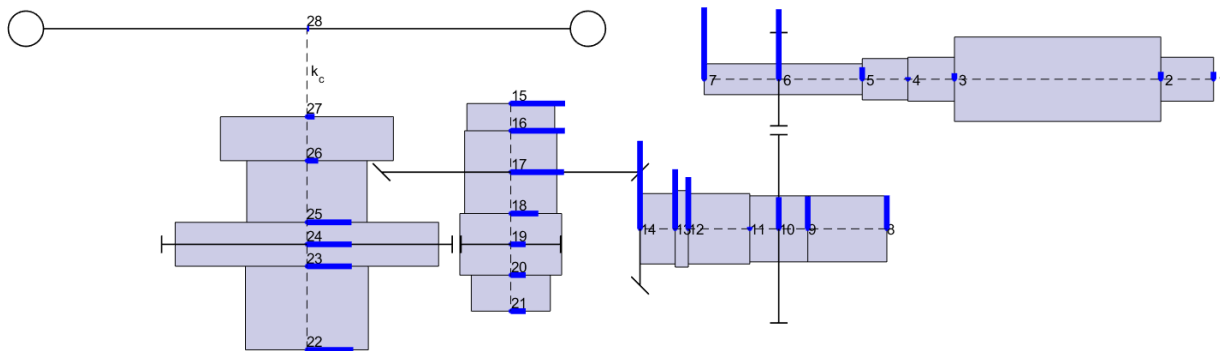
Obr. 35: První vlastní tvar



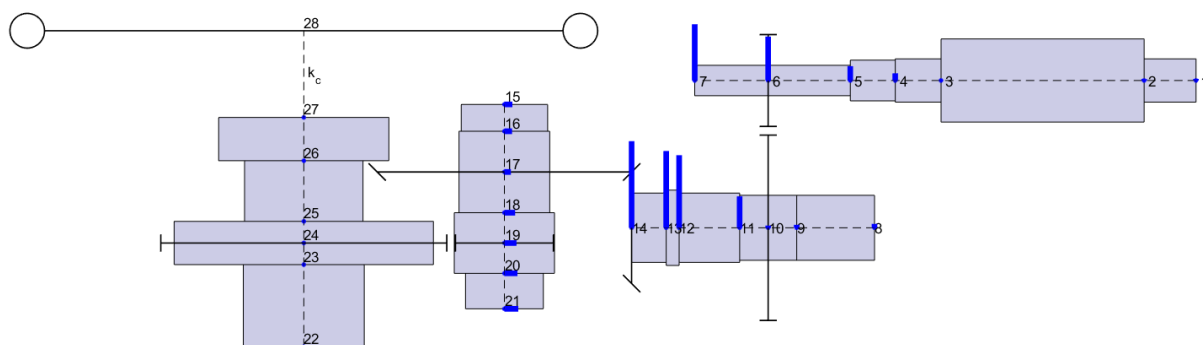
Obr. 36: Druhý vlastní tvar



Obr. 37: Třetí vlastní tvar



Obr. 38: Čtvrtý vlastní tvar



Obr. 39: Pátý vlastní tvar

ν	v [km/h]	$\lambda_\nu = \alpha_\nu \pm i\beta_\nu$ [Hz]		
		$s_0 = 0,001$	$s_0 = 0,005$	$s_0 = 0,01$
1	40	$-18,9 \pm i143,4$	$-43,6 \pm i333,6$	$6 \pm i336,3$
	80	$-38,2 \pm i142,4$	$-14,8 \pm i336$	$7,3 \pm i336,1$
	160	$-91,7 \pm i138,9$	$-1,9 \pm i336,3$	$6,4 \pm i336,3$
2	40	$-8,8 \pm i454,1$	$-17,3 \pm i475,4$	$-5,1 \pm i479,2$
	80	$-10,8 \pm i454,4$	$-10,8 \pm i478,9$	$-4,6 \pm i479,1$
	160	$-14,8 \pm i455,8$	$-7,3 \pm i479,4$	$-4,9 \pm i479,2$
3	40	$-41,9 \pm i985,9$	$-39,5 \pm i982,8$	$-35 \pm i983,3$
	80	$-46,8 \pm i963$	$-36,9 \pm i983,3$	$-34,9 \pm i983,3$
	160	$-49 \pm i972$	$-35,8 \pm i983,3$	$-35 \pm i983,3$
4	40	$-91,4 \pm i1335,5$	$-87,4 \pm i1353,5$	$-84,7 \pm i1353,6$
	80	$-95 \pm i1340,4$	$-85,8 \pm i1353,6$	$-84,7 \pm i1353,6$
	160	$-94,7 \pm i1347,7$	$-85,1 \pm i1353,6$	$-84,7 \pm i1353,6$
5	40	$-945,9 \pm i4006,7$	$-945,9 \pm i4006,7$	$-945,9 \pm i4006,7$
	80	$-945,9 \pm i4006,7$	$-945,9 \pm i4006,7$	$-945,9 \pm i4006,7$
	160	$-945,9 \pm i4006,7$	$-945,9 \pm i4006,7$	$-945,9 \pm i4006,7$

Tab. 2: Vlastní čísla

První vlastní tvar kmitu je charakterizován slabým kmitavým pohybem. Při druhém a třetím vlastním tvaru je dominantní kmitání hřídele motoru. Čtvrtý vlastní tvar představuje kmitání předlohového hřídele 2 a výstupního hřídele 4, kolo se však příliš torzně nevychyluje. U pátého vlastního tvaru dominuje kmitání předlohového hřídele 2.

V Tab. 2 je patrný skokový rozdíl mezi imaginárními částmi vlastního čísla λ_1 pro skluz $s_0 = 0,001$ a $s_0 = 0,005$ u všech uvedených rychlostí vozidla. To je způsobeno změnou hodnoty koeficientu (3.6.11) v matici (3.6.13) v důsledku rozdílného relativního skluzu s_0 (bod Taylorova rozvoje) v adhezní charakteristice (Obr. 22).

Na základě modální analýzy lze rozhodovat o stabilitě systému. Lze dokázat [4], že reálné části vlastních čísel rozhodují o stabilitě. Pokud alespoň jedno vlastní číslo nebo alespoň jeden pár komplexně sdružených vlastních čísel má kladnou reálnou část, soustava je nestabilní. V Tab. 2 jsou reálné části tučně zvýrazněny. Je patrné, že systém je pro všechny uvedené rychlosti nestabilní s relativním skluzem $s_0 = 0,01$.

5.3 Ustálená odezva na vnitřní buzení vlivem kinematické úchytky kol

5.3.1 Vnitřní vestavba

Mějme matematický model (5.1.6) s vektorem vnitřního buzení (3.5.11). Ustálené kmity vybuzené úchytkami převodového poměru budeme vyšetřovat kolem statické rovnovážné polohy dané jmenovitým statickým zatížením. Kinematické úchytky vyjádříme s využitím identity $\Delta_z(t) = \text{Re}\{\tilde{\Delta}_z(t)\}$ v komplexním tvaru

$$\tilde{\Delta}_z(t) = \sum_z \tilde{\Delta}_{z,k} e^{ik\omega_z t}, \quad \dot{\tilde{\Delta}}_z(t) = \sum_z \tilde{\Delta}_{z,k} ik\omega_z e^{ik\omega_z t}, \quad (5.3.1)$$

kde

$$\tilde{\Delta}_{z,k} = \Delta_{kc} - i\Delta_{ks}. \quad (5.3.2)$$

Ustálená odezva představuje partikulární řešení soustavy rovnic (5.1.6). Toto řešení hledíme metodou odhadu pravé strany ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \sum_z \sum_k \mathbf{q}_{z,k} e^{ik\omega_z t}, \quad (5.3.3)$$

kde $\mathbf{q}_{z,k} = [q_i^{z,k}]$ jsou vektory komplexních amplitud. Dosazením rovnic (5.3.1) a (5.3.3) do původní rovnice matematického modelu dostaneme vektory komplexních amplitud ve tvaru

$$\mathbf{q}_{z,k} = [-\mathbf{M}_p k^2 \omega_z^2 + ik\omega_z \mathbf{B}_p + \mathbf{K}_p]^{-1} (k_z + ik\omega_z b_z) \tilde{\Delta}_{z,k} \mathbf{c}_z. \quad (5.3.4)$$

Zubové frekvence ω_z je účelné vyjádřit pomocí převodů vzhledem k referenční frekvenci otáčení hřídele motoru ω_0 nebo otáček n

$$\omega_z = p_z \omega_0 = p_z \frac{\pi n}{30}, \quad (5.3.5)$$

kde

$$p_z = \frac{z_p \omega_p}{\omega_0} = \frac{z_k \omega_k}{\omega_0} \quad (5.3.6)$$

je zubový převod záběru z vztažený k hnacímu hřídeli. Úroveň kmitání hřídelové soustavy je vyjádřena horními odhady zobecněných souřadnic posuvů uzlů

$$\hat{q}_i(\omega_0) = \sqrt{\sum_z \sum_k |q_i^{z,k}|^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3.7)$$

Nyní se zaměříme na situaci, kdy dojde k rezonanci. Rezonanci je účelné vyjadřovat pomocí tzv. rezonančních otáček $n_{z,k,\nu}$. Jedná se o referenční otáčky hnacího hřídele, při nichž k -tá harmonická složka kinematické úchyly v zubovém záběru z rezonuje s ν -tou vlastní frekvencí Ω_ν . Rezonance tedy nastává v případě

$$\Omega_\nu = k\omega_z. \quad (5.3.8)$$

Po dosazení (5.3.5) do (5.3.8) dostaneme rezonanční otáčky ve tvaru

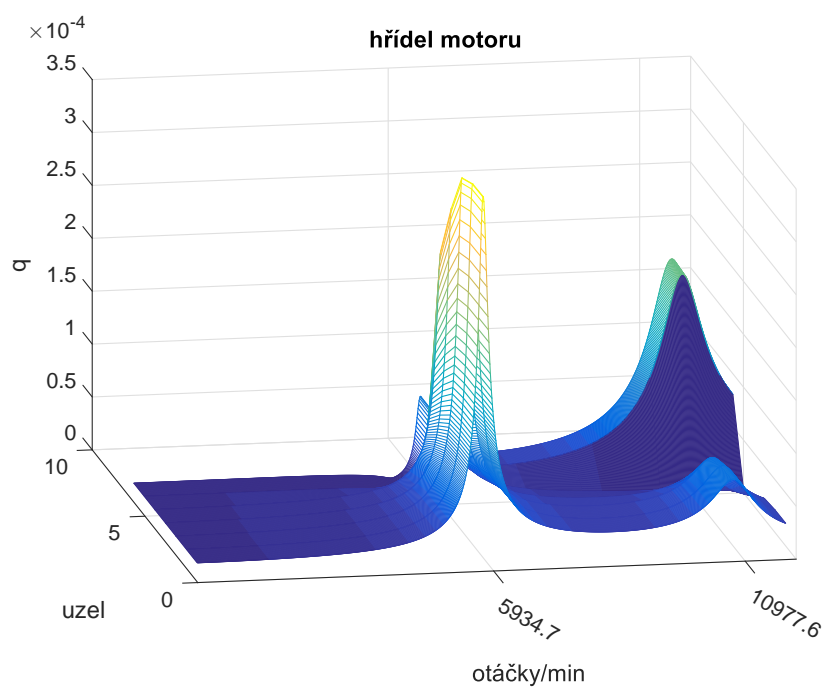
$$n_{z,k,\nu} = \frac{30\Omega_\nu}{\pi k p_z}. \quad (5.3.9)$$

Nechť jsou v případě modelované pohonné jednotky amplitudy kinematických úchylek všech kol vyjádřeny

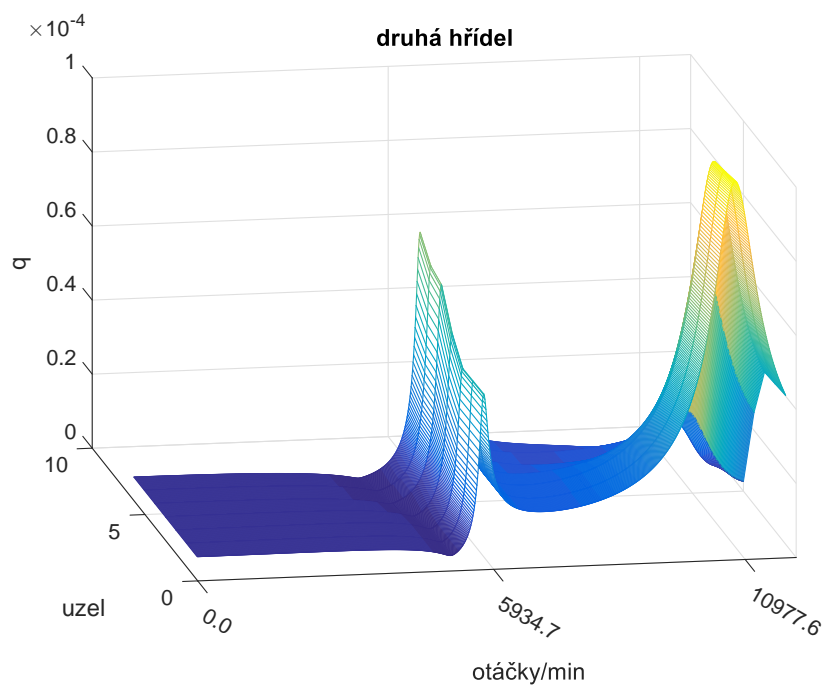
$$\Delta_{kc} = \frac{10^{-6}}{k} [\text{m}], \quad \Delta_{ks} = 0 [\text{m}], \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.3.10)$$

Uvažujme pouze $k = 1$, neboť hlavní harmonická složka má nejvýraznější vliv na chování systému.

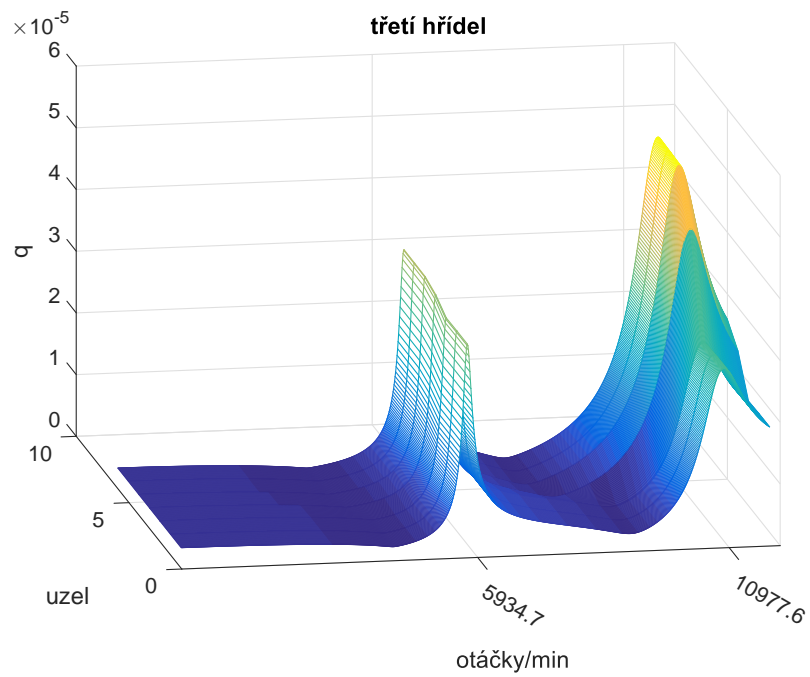
Na Obr. 40 až Obr. 43 jsou zobrazeny průběhy horních efektivních odhadů úhlu natočení v uzlech pro jednotlivé hřídele v závislosti na referenčních otáčkách hnacího hřídele v rozsahu $n = 200 \div 12000$ [ot/min]. Pro přehlednost jsou tyto odhady zobrazeny pro jednotlivé hřídele zvlášť. Uveďme pouze buzení kinematickou úchylnou zubové vazby z_3 , ostatní jsou uvedeny v příloze (A). Na ose zobrazující referenční otáčky jsou zvýrazněny rezonanční otáčky (5.3.9).



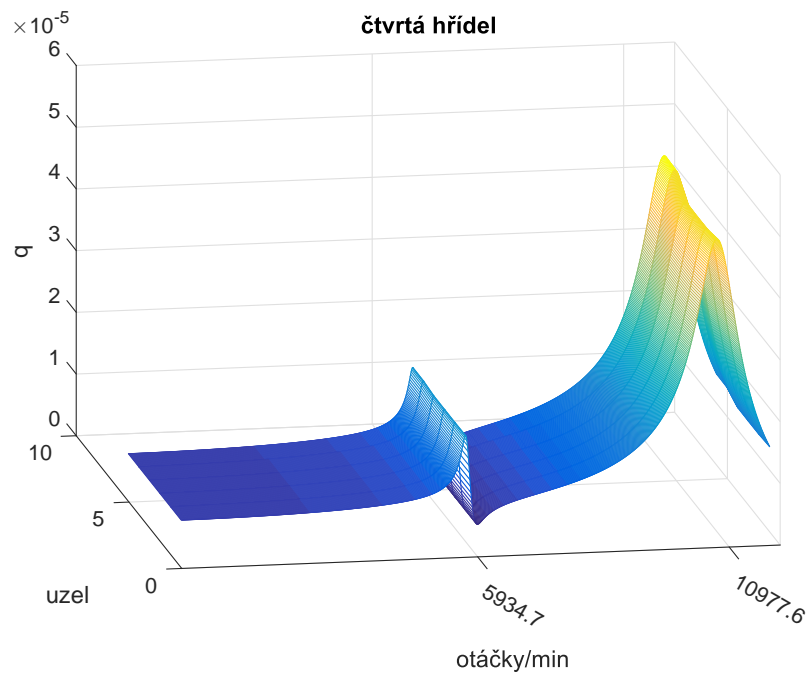
Obr. 40: Horní odhady zobecněných výchylek uzlů hřídele motoru



Obr. 41: Horní odhady zobecněných výchylek uzlů předlohového hřídele



Obr. 42: Horní odhady zobecněných výchylek uzlů hřídele 3



Obr. 43: Horní odhady zobecněných výchylek uzlů výstupního hřídele

Je zřejmé, že k rezonanci dojde při $n = 5934,7$ [ot/min] a $n = 10977,6$ [ot/min], což podle rezonanční rovnice (5.3.9) přísluší 2. a 3. vlastní frekvenci (Tab. 1). Tomu odpovídají i vybuzevané vlastní tvary kmitu (Obr. 31, Obr. 32).

Poznamenejme, že při uvažování 2. ($k = 2$) a 3. ($k = 3$) harmonické složky, dojde podle rezonanční rovnice (5.3.9) k rezonanci při nižších otáčkách referenčního hřídele, avšak amplitudy těchto výchylek jsou menší než amplitudy odpovídající hlavní harmonické složce.

5.3.2 Pohonná jednotka s kontaktem kolo-kolejnice a vlivem skříně vozidla

Matematický model pohonné jednotky s kontaktem kolo-kolejnice s vlivem skříně vozidla je stejný jako (5.2.2) s vektorem vnitřního buzení (3.5.11) ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0(s_0, v))\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_Z^l(t). \quad (5.3.11)$$

Stejným postupem jako v kapitole 5.3.1 dostaneme vektory komplexních amplitud

$$\mathbf{q}_{z,k} = [-\mathbf{M}k^2\omega_z^2 + ik\omega_z(\mathbf{B} + \mathbf{B}_0(s_0, v)) + \mathbf{K}]^{-1} (k_z + ik\omega_z b_z) \tilde{\Delta}_{z,k} \mathbf{c}_z, \quad (5.3.12)$$

s tím rozdílem, že nyní tyto vektory závisejí na relativním skluzu s_0 a rychlosti vozidla v . Podle závěrů uvedených v kapitole 4.3.2 dojde k rezonanci v případě

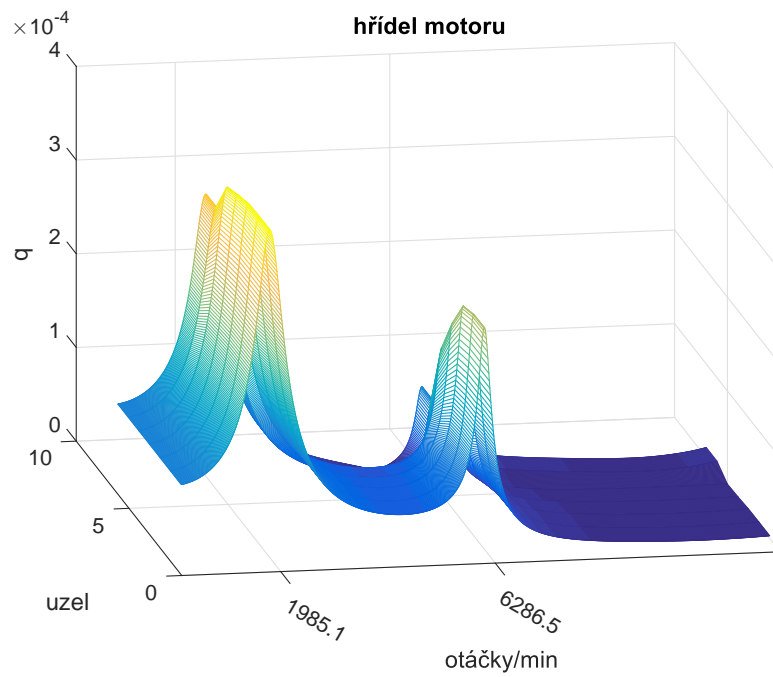
$$\beta_\nu = k\omega_z, \quad (5.3.13)$$

po dosazení zubové frekvence (5.3.5) do (5.3.13) dostaneme rezonanční otáčky

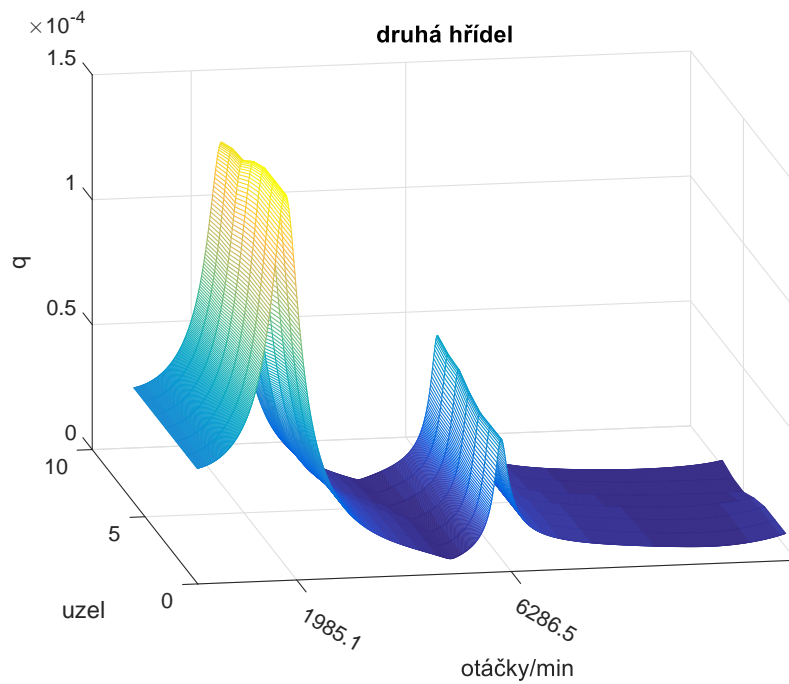
$$n_{z,k,\nu} = \frac{30\beta_\nu}{\pi k p_z}. \quad (5.3.14)$$

Uvažujme také pouze hlavní harmonickou složku, vnitřní buzení ve 3. zubové vazbě a stejný rozsah referenčních otáček hnacího hřídele. Hodnotu relativního skluzu uvažujme $s_0 = 0,001$ a rychlost vozidla $v = 40$ [km/h].

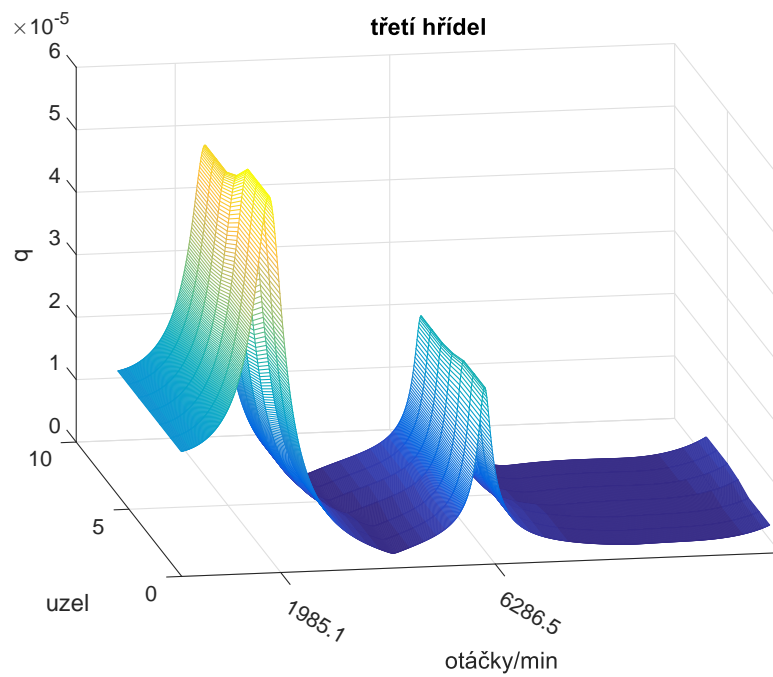
Na Obr. 44 až Obr. 47 jsou zobrazeny horní efektivní odhady úhlů natočení v uzlech pro jednotlivé hřídele zvlášť, poslední uzel čtvrtého hřídele představuje kolo. Je vykreslena pouze odezva na vnitřní buzení zubové vazby z_3 , odezva na vnitřní buzení v zubovém záběru z_1 a z_2 je uvedeno v příloze (A).



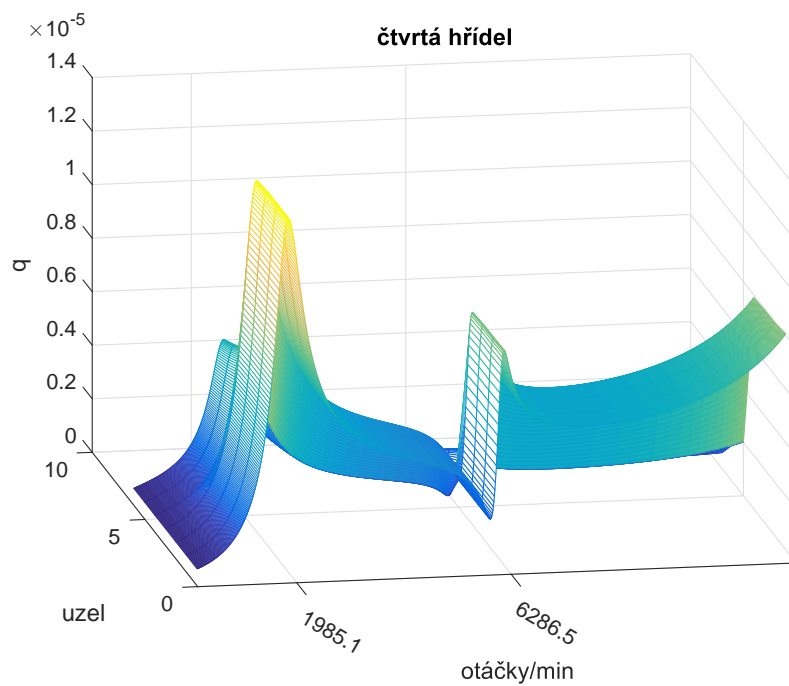
Obr. 44: Horní odhady zobecněných výchylek uzlů hřídele motoru



Obr. 45: Horní odhady zobecněných výchylek uzlů předlohového hřídele



Obr. 46: Horní odhady zobecněných výchylek uzlů hřídele 3



Obr. 47: Horní odhady zobecněných výchylek uzlů výstupního hřídel, uzel 7 představuje kolo

Je patrné, že k rezonanci dojde při $n = 1985,1$ [ot/min] a $n = 6286,5$ [ot/min] hnacího hřídele, což podle rezonanční rovnice (5.3.14) přísluší 1. a 2. vlastnímu číslu (Tab. 2). Tomu odpovídají i vybuzené vlastní tvary kmitu (Obr. 35, Obr. 36).

Srovnáme-li výsledky buzení kinematickou úchytkou v třetí zubové vazbě u slabě nekonzervativního modelu vnitřní vestavby a silně nekonzervativního modelu s linearizovanou adhezní charakteristikou v kontaktu kolo-kolejnice, lze si všimnout, že rezonance u nekonzervativního modelu nastává při nižších otáčkách hnacího hřídele. Rozdíl lze zhruba odhadnout na 4000 [ot/min]. To je především způsobeno nižší hodnotou imaginární části vlastního čísla λ_1 silně nekonzervativní soustavy (závislá na relativním skluzu s_0 a rychlosti v) oproti hodnotě vlastní frekvence Ω_2 slabě nekonzervativní soustavy. Toto snížení je způsobeno vlivem hmotnosti kola a skříně vozidla uvažované u silně nekonzervativního modelu.

Poznamenejme, že při změně hodnoty relativního skluzu s_0 by se podle Tab. 2 měnila imaginární část vlastního čísla λ_1 a tím i rezonanční otáčky.

5.4 Simulace rozjezdu vozidla v časové oblasti

Matematický model a adhezní charakteristiku jsme odvodili v kapitole 3.6.3. V našem případě připojíme přes torzní spojku kolo s uvažováním kontaktu kolo-kolejnice na uzel 27. Uvažujme i vliv setrvačnosti skříně vozidla. Systém má pak 29 stupňů volnosti. Globální matematický model pak uvažujeme bez vnitřního buzení ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}^E(t), \quad (5.4.1)$$

kde jednotlivé matice jsou detailně uvedeny v kapitole 3.6.3. Rozjezd vozidla simulujeme pro nulové počáteční podmínky

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}. \quad (5.4.2)$$

Vektor vnějšího buzení má pak podle (3.6.24) tvar

$$\mathbf{f}^E(t) = [0, 0, M_M, 0, \dots, -r_k T, T - o(v)]^T \in \mathbb{R}^{29}, \quad (5.4.3)$$

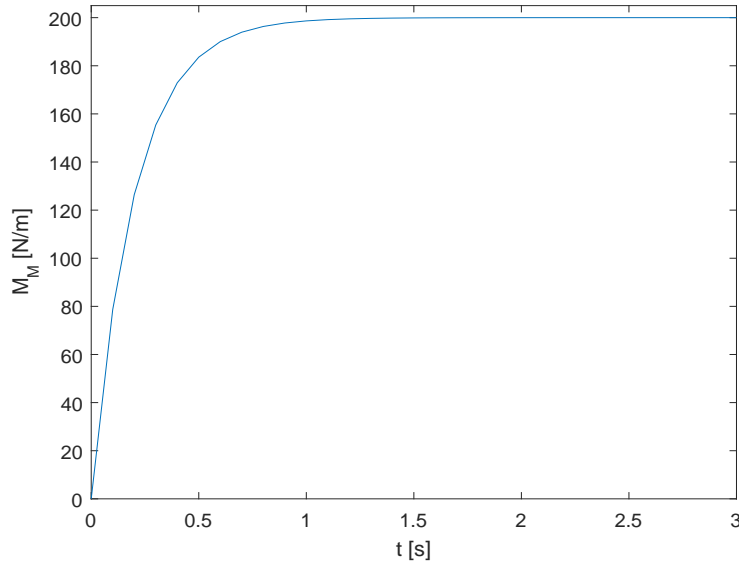
kde M_M je moment motoru umístěný na 3. uzlu hřídele motoru. Abychom se vyhnuli skokovému zatížení systému, budeme uvažovat postupné nabíhání momentu motoru obecně ve tvaru

$$M_M = M_0(1 - e^{-kt}), \quad (5.4.4)$$

kde M_0 je maximální hodnota a k je koeficient, který udává míru stoupání hodnoty momentu. Pro hodnoty $k = 5$ a $M_0 = 200$ [Nm] je na Obr. 48 znázorněn jeho průběh.

Zaměříme se nyní na vliv odporu prostředí $o(v)$. Tuto odporovou sílu závislou na rychlosti vozidla \dot{x}_v vyjádříme takto

$$o(v) = k_3 \dot{x}_v^2. \quad (5.4.5)$$



Obr. 48: Moment motoru

Uvažujme ustálený stav systému ve tvaru

$$\dot{x}_v = konst, \quad \dot{\varphi}_k = konst, \quad (5.4.6)$$

potom musí platit momentová podmínka rovnováhy na kole dle Obr. 25 a (5.4.4) ve tvaru

$$M_0 p = T r_k \rightarrow T = \frac{M_0 p}{r_k}. \quad (5.4.7)$$

Na skříní vozidla pak pro ustálený stav platí podle (3.6.21)

$$T = o(v) = k_3 \dot{x}_v^2. \quad (5.4.8)$$

Rovnici (5.4.7) dosadíme do (5.4.8) a ze znalosti momentu motoru a převodového poměru dostaneme maximální rychlost vozidla při uvažování vlivu odporu prostředí

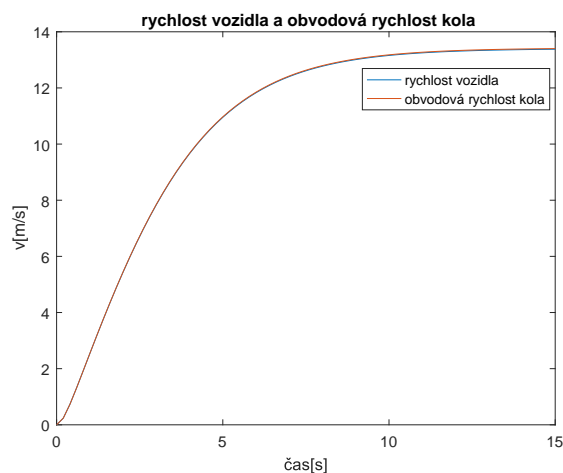
$$\dot{x}_v^{max} = \sqrt{\frac{M_0 p}{r_k k_3}}. \quad (5.4.9)$$

Předpokládejme silný vliv odporu prostředí pro $k_3 = 50$. Tak silný odpor prostředí nemůže v reálném případě nastat, proto takový rozjezd vozidla neodpovídá realitě, ale pouze tak testujeme funkčnost modelu, který může být dále verifikován.

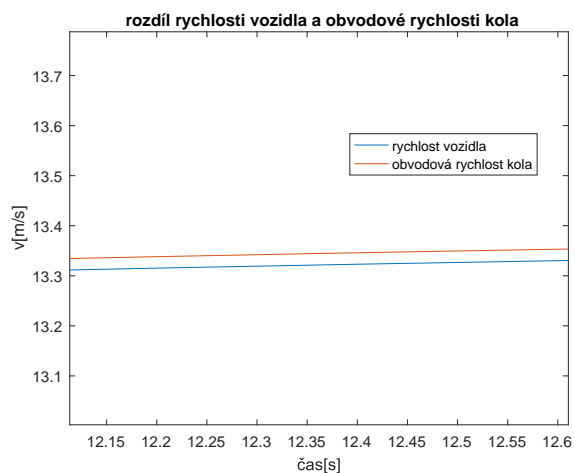
Budeme zkoumat 2 provozní stavy a to rozjezd bez prokluzu ve vazbě mezi kolem a kolejnicí a rozjezd vozidla s prokluzem. Prokluz lze vyvolat zvýšením zátěžného momentu. Podle rovnice (5.4.7) lze pro maximální hodnotu koeficientu adheze $\mu \doteq 0,5$ přibližně odhadnout velikost momentu motoru, při kterém dojde k prokluzu na hodnotu $M_0 \doteq 300$ [Nm].

5.4.1 Rozjezd bez prokluzu

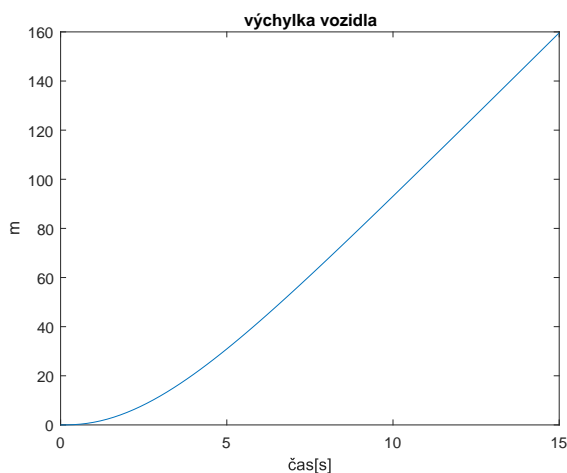
Na Obr. 49 až Obr. 52 jsou vykresleny veličiny získané simulací rozjezdu vozidla bez prokluzu kola. Systém je buzen z nulových počátečních podmínek momentem ve tvaru (5.4.4) s hodnotami $k = 5$ a $M_0 = 200$ [Nm].



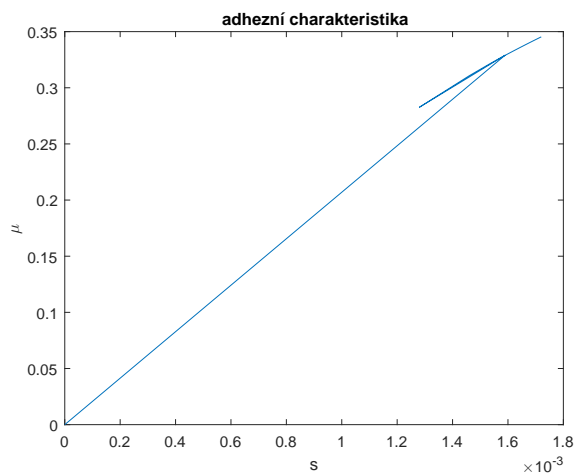
Obr. 49: Porovnání rychlostí



Obr. 50: Rozdíl rychlostí



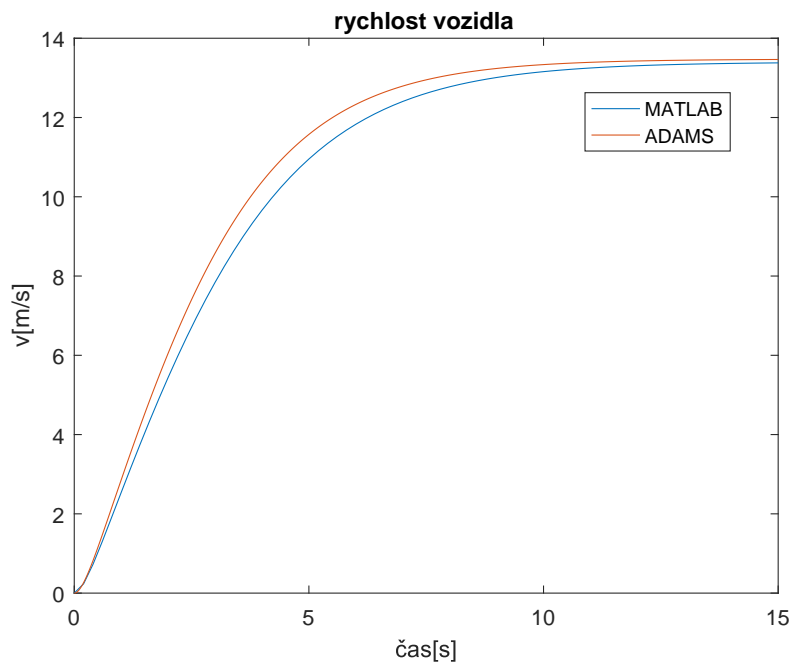
Obr. 51: Výchylka vozidla



Obr. 52: Využitá část adhezní charakteristiky

Na Obr. 49 je uvedeno porovnání rychlosti vozidla a obvodové rychlosti kola. Hodnota obvodové rychlosti kola je vlivem relativního skluzu nepatrně větší, tento rozdíl je zobrazen na Obr. 50. Na Obr. 51 je znázorněna výchylka vozidla. Z Obr. 52 je pak zřejmé, že se hodnota koeficientu adheze v adhezní charakteristice (Obr. 22) pohybovala ve stabilní oblasti, zároveň je podle Obr. 22 patrná změna sklonu grafu adhezní charakteristiky (Obr. 52), která je způsobena vlivem změny rychlosti vozidla.

Pro porovnání výsledků mezi MKP modelem a modelem v prostředí ADAMS je na Obr. 53 vykreslen rozjezd vozidla bez prokluzu kola na kolejnici.

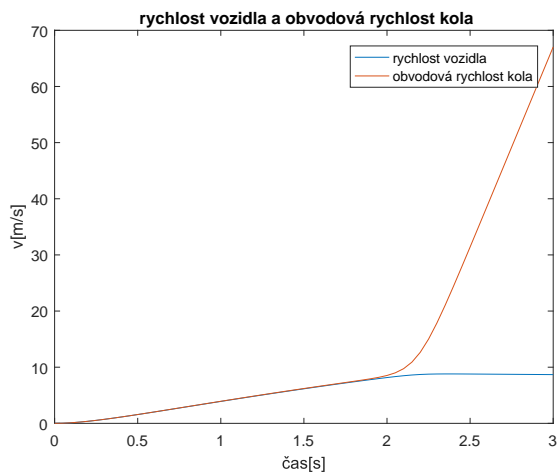


Obr. 53: Porovnání simulace rozjezdu vozidla

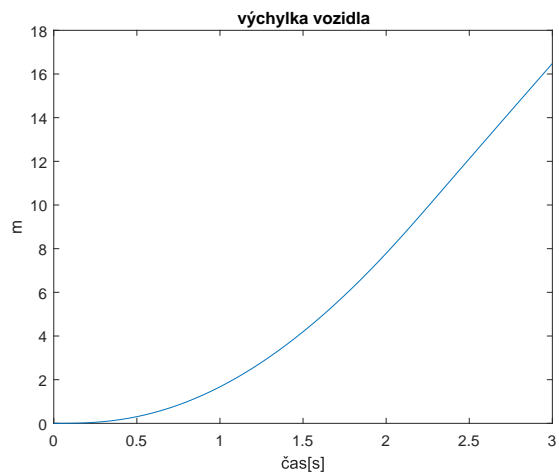
Rozdíly obou řešení mohou být způsobeny různými numerickými metodami nebo použitím reálných parametrů ozubení v prostředí ADAMS.

5.4.2 Rozjezd s prokluzem

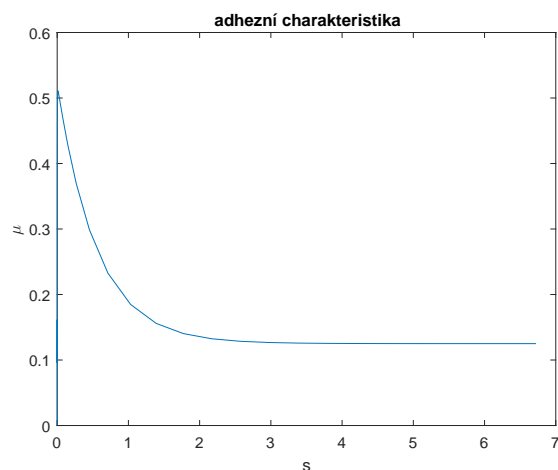
Na Obr. 54 až Obr. 56 je znázorněn průběh vybraných veličin získaných simulací rozjezdu vozidla s prokluzem kola. Systém je buzen z nulových počátečních podmínek momentem ve tvaru (5.4.4) s hodnotami $k = 5$ a $M_0 = 310$ [Nm].



Obr. 54: Porovnání rychlostí



Obr. 55: Výchylka vozidla



Obr. 56: Využitá část adhezní charakteristiky

Na Obr. 54 je uvedeno porovnání rychlosti vozidla a obvodové rychlosti kola. Je patrné, že v čase 2 [s] dojde k výraznému nárůstu obvodové rychlosti kola (prokluz) a k poklesu rychlosti vozidla vlivem odporu prostředí. Na Obr. 55 je znázorněna výchylka vozidla. Z Obr. 56 je pak zřejmé, že se hodnota koeficientu adheze v adhezní charakteristice (Obr. 22) pohybovala v nestabilní oblasti a došlo k poklesu koeficientu adheze.

6 Závěr

Tato bakalářská práce se zabývá dynamikou pohonů kolejových vozidel se zaměřením na torzní kmitání rotujících komponent. V kapitole 2 byla uvedena základní rešerše koncepcí pohonů kolejových vozidel, které lze podle způsobu pohonu dvojkolí rozdělit na centrální pohon spojnicový, individuální pohon dvojkolí a skupinový pohon. U jednotlivých koncepcí byl uveden základní popis.

V kapitole 3 byly odvozeny matematické modely torzního kmitání hřídelových soustav se zubovými vazbami metodou konečných prvků, včetně vnitřní dynamiky ozubených převodů. Byl zde dále uveden teoretický rozbor adhezních účinků působících v kontaktu kolo-kolejnice a matematický model hřídelové soustavy s respektováním kontaktu kola s kolejnici a vlivu setrvačnosti skříně vozidla.

V kapitole 4 byly uvedeny základní metody dynamické analýzy kmitajících soustav. Byla zde představena modální analýza a ustálená odezva harmonicky buzených slabě nekonzervativních i silně nekonzervativních soustav.

Vytvořená metodika matematického modelování byla aplikována na vnitřní rotující vestavbu vysokorychlostní pohonné jednotky vyvíjené na ZČU ve spolupráci s firmou Wikov MGI a.s. Implementace vytvořené metodiky modelování byla zpracována v programovém prostředí MATLAB. Byla provedena modální analýza, ustálená odezva na vnitřní buzení vlivem kinematické úchyvky kol a časová simulace rozjezdu. Simulovaný rozjezd však neodpovídá realitě, ale pouze testuje funkčnost daného výpočtového modelu.

Závěrem je možné konstatovat, že cíle formulované v zadání bakalářské práce byly splněny. Nad rámec práce byl v prostředí ADAMS sestaven model vnitřní vestavby s kontaktem kolo-kolejnice. Tento model byl vytvořen za stejných předpokladů. V prostředí ADAMS byl využit modul pro vytvoření zubových vazeb, kdy jsou modelovány reálné kontakty mezi boky zubů za předpokladu ideální geometrie ozubení. V porovnání s MKP modelem lze říci, že bylo dosaženo srovnatelných výsledků. V budoucnu je možné model vnitřní vestavby rozšířit o model zkušebního standu nebo o model motoru s permanentními magnety a sledovat tak elektro-mechanickou interakci při provozu. Na základě plánovaných experimentů pak bude prováděno ladění návrhových parametrů výpočtového modelu. Naladěný výpočtový model pak bude sloužit pro predikci chování soustavy v různých zátěžných režimech.

Literatura

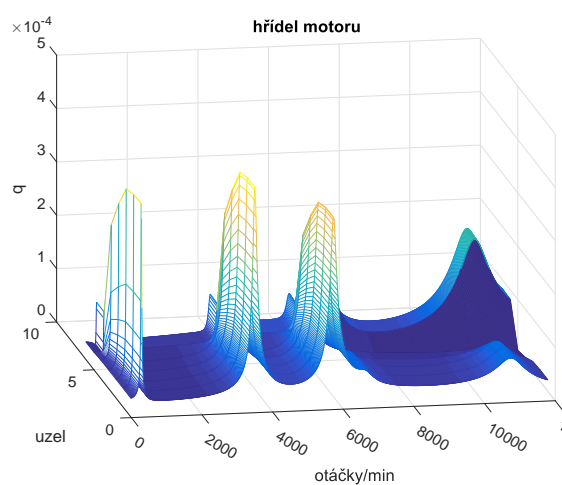
- [1] P. Heller, J. Dostál, *Kolejová vozidla II*, Vydavatelství ZČU v Plzni, 2009.
- [2] V. Zeman, Z. Hlaváč, *Kmitání mechanických soustav*, Vydavatelství ZČU v Plzni, 1999.
- [3] SKF group, *Railway technical handbook*, 2012.
- [4] V. Zeman, J. Slavík, V. Stejskal, *Základy dynamiky strojů*, Vydavatelství ČVUT v Praze, 1997.
- [5] V. Zeman, Z. Hlaváč, M. Byrtus, J. Švígler, *Modelování torzních kmitů pohonu kolejového vozidla dutým hřídelem*, Výzkumná zpráva č. H2-01/2005 Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, katedra mechaniky, 2005.
- [6] J. Čáp, *Některé aspekty jednotného výkladu mechanismu adheze*, Sborník prací VŠCHT Pardubice, 1993.
- [7] M. Lata, *Dynamické děje v pohonu elektrické lokomotivy při vzniku prokluzu dvojkolí*, Engineering Mechanics, Book of Extended Abstracts, Institut of Thermomechanics AS CR, 2004.
- [8] M. Byrtus, M. Hajžman, V. Zeman, *Dynamika rotujících soustav*, Vydavatelství ZČU v Plzni, 2010.
- [9] O. Polach, *Creep forces in simulations of traction vehicles running on adhesion limit*, Wear 258 (2005) 992-1000.
- [10] V. Zeman, *Dynamika mechanismů a strojů* (přednášky), Fakulta aplikovaných věd, Plzeň, ak. rok 2017/18.

Přílohy

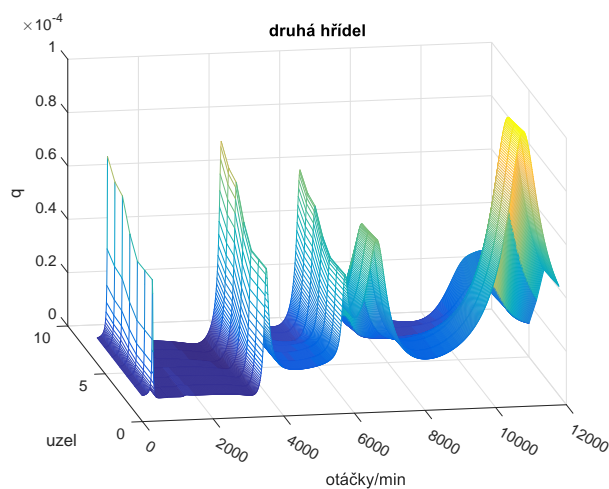
A Ustálená odezva na buzení kinematickou úchylkou

Na Obr. 57 až Obr. 60 jsou vykresleny horní efektivní odhady úhlů natočení v uzlech pro jednotlivé hřídele zvlášť u modelu vnitřní vestavby, na Obr. 61 až Obr. 64 jsou pak tyto odhady vykresleny u modelu pohonné jednotky s linearizovanou adhezní charakteristikou v kontaktu kolo-kolejnice. Jedná se o vnitřní buzení v zubových záběrech z_1 a z_2 .

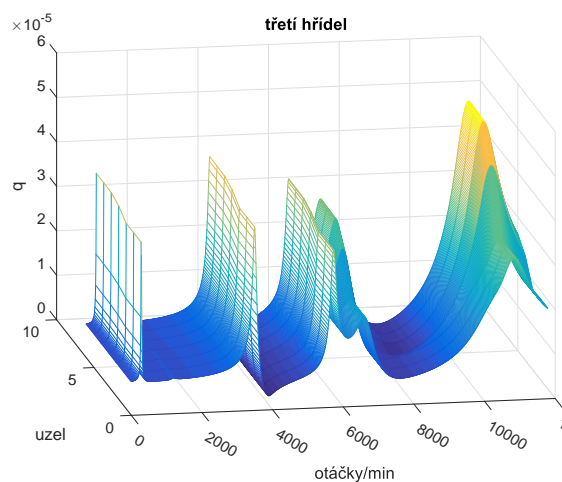
Vnitřní vestavba pohonné jednotky



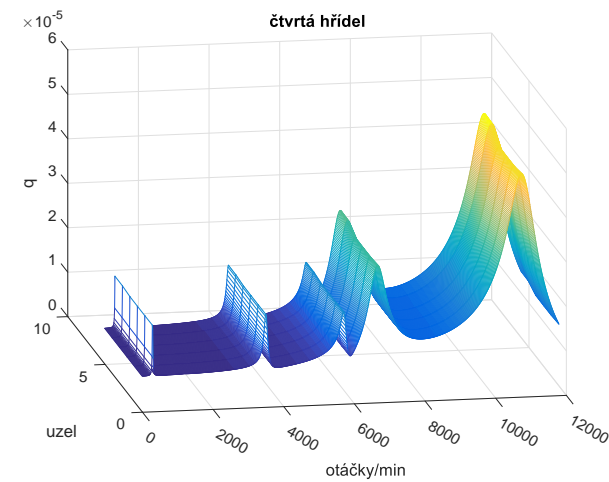
Obr. 57: Hřídel motoru



Obr. 58: Předlohová hřídel 2

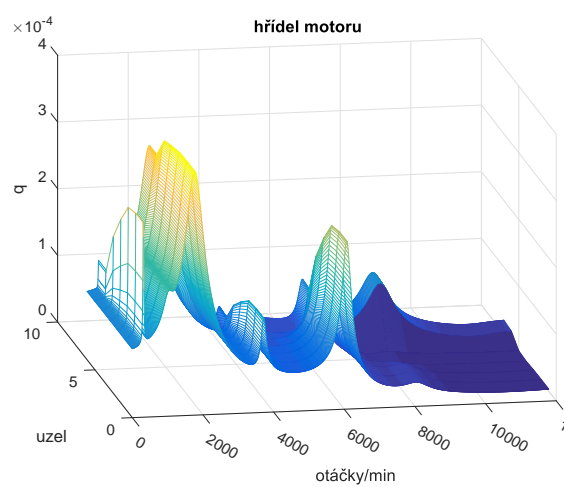


Obr. 59: Hřídel 3

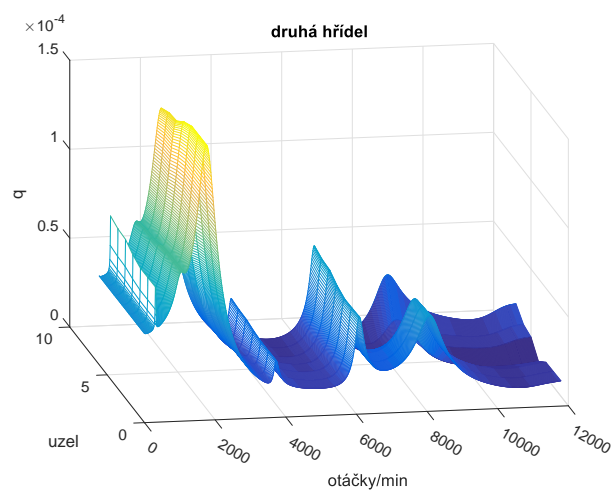


Obr. 60: Výstupní hřídel 4

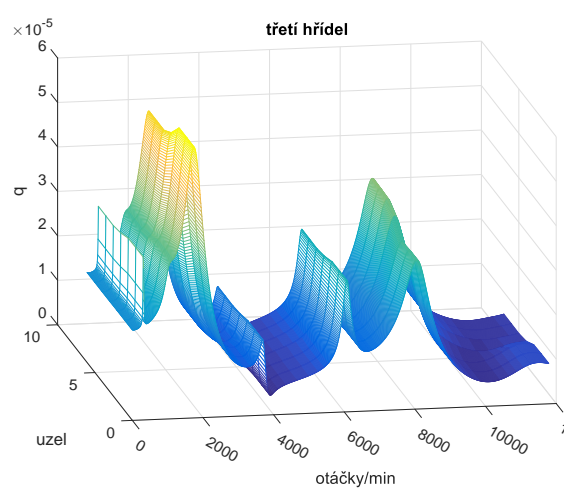
Pohonná jednotka s kontaktem kolo - kolejnice



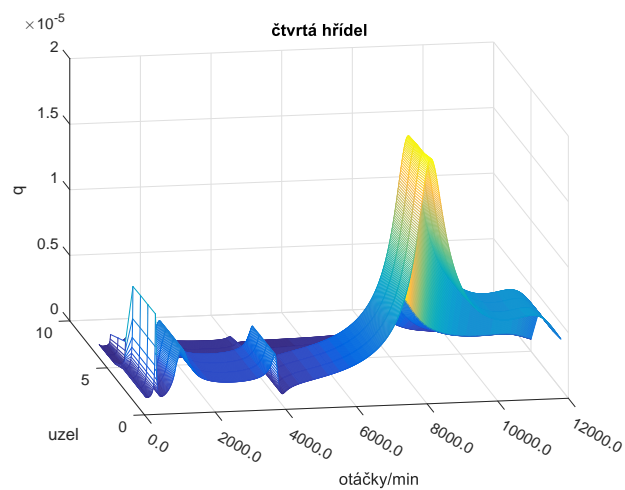
Obr. 61: Hřídel motoru



Obr. 62: Předlohová hřídel 2



Obr. 63: Hřídel 3



Obr. 64: Výstupní hřídel 4