

Západočeská Univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Disertační práce

2017

RNDr. Jana Vysoká

Západočeská Univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Matematické modelování ve výuce na střední škole

RNDr. Jana Vysoká

disertační práce

k získání akademického titulu doktor
v oboru Obecné otázky matematiky

Školitel: doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecné otázky matematiky

Plzeň 2017

University of West Bohemia in Plzeň
Faculty of Applied Sciences
Department of Mathematics

Mathematical modeling in teaching at high school

RNDr. Jana Vysoká
dissertation

Supervisor: doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.

Study program: Mathematics

Study branch: General questions of mathematics

Plzeň 2017

Poděkování.

Ráda bych chtěla na tomto místě poděkovat svému školiteli doc. Ing. Marku Brandnerovi, Ph.D. za podnětné rady a celkovou podporu při vytváření této dizertační práce.

Současně bych chtěla vyslovit poděkování Dominice Šulcové, která se podílela na grafickém návrhu a realizaci ilustrací.

Prohlášení autora.

Prohlašuji, že jsem tuto dizertační práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím uvedených pramenů.

V Českých Budějovicích, duben 2017

Podpis autora

Abstrakt

Hlavním záměrem práce bylo připravit návrh rozšiřujícího učebního materiálu určeného pro učitele studentů vysokých škol, kteří si zvolili vyšší matematiku jako volitelný předmět, či středoškolských studentů, kteří se matematice věnují nad rámec povinných osnov.

V úvodu práce jsou sepsány důvody, které motivovaly k výběru témat a je zde stručně provedena charakteristika jednotlivých kapitol. Na tuto část navazuje druhá kapitola, ve které připomeneme význam některých známých pojmů. Na vybraných středních školách a na vysokých školách, které mají do výuky zařazen základní kurz diferenciálního počtu, se studenti setkávají s pojmem derivace a její definicí pomocí limity. S využitím derivace a jejích aplikací jsou pak nejčastěji seznámeni při určování monotonie a extrémů funkce jedné reálné proměnné. Tyto příklady většinou nejsou spojeny s praxí. Při závěrečném průzkumu pak studenti uvádějí jako nejčastější odpověď na otázku nejproblematictějšího úseku probírané látky pojem limita. Základní definice derivace studenty pak odradí již v úvodu, protože jejím nástrojem je právě limita. Dalším cílem práce proto bude snaha zaměřit se na některé problematické pojmy jako je například posloupnost, Lipschitzova podmínka, limita, derivace, integrál a vhodnou formou přiblížit tyto pojmy tak, aby studenti pochopili podstatu problému a aby byli schopni aplikovat poznatky při vytváření jednoduchých matematických modelů např. při popisu pohybu vozidel na silnicích. V závěru se stručně zmíníme o parciálních derivacích, protože je budeme v 6. kapitole využívat.

Třetí kapitola je věnována výkladu o procesu vývoje a významu matematického modelování. Seznámíme se s numerickými problémy a úskalími, které matematické modelování provází. Současně představíme jednoduchý diagram popisující posloupnost kroků, které je nutné dodržet k tomu, aby mohl být model „úspěšný“.

Navazující část práce - čtvrtá kapitola si klade za cíl vytvořit modely jednoduchých reálných problémů. Z jistého úhlu pohledu na řešení těchto úloh se lze dostat k pojmům jako je např. pevný a přitahující bod, orbita či chaos. Výklad je veden takovým způsobem, aby student pochopil základní pojmy pomocí analýzy grafů souvisejících s uvedenými problémy. Tato tematika může být pro studenty přínosná také tím, že poznatky o nelineárních a chaotických procesech přináší kromě rozšíření matematických znalostí obohacení ve smyslu pohledu na jinou realitu, který není ve škole obvyklý.

Pátá kapitola v podstatě tematicky navazuje na předchozí kapitolu. Ukážeme, jak lze převést řešení spojitého problému na řešení diskrétního problému a za jakých podmínek jsou tyto modifikace úspěšné. Při této příležitosti se zaměříme na vybraná úskalí spojená s aktuálními tématy (analýza Lipschitzovy podmínky, volba počátečního přiblížení).

V následující části práce je pozornost soustředěna na snahu porovnat výsledky dvou zcela rozdílných přístupů k modelování dynamiky dopravního proudu. Způsob modelování dopravních systémů je ovlivněn mnoha faktory. Zásadní roli zde hraje dostupnost dat pro daný způsob modelování a samozřejmě i požadovaná úroveň detailu. Rozeznáváme proto tři základní skupiny modelů. První skupinu zastupují makromodely zaměřující se na celkové chování systému a

vyžadující globální vstupní data. Opakem jsou pak mikromodely specializující se na detailní popis chování jednotlivých elementů modelu. Mezi těmito dvěma přístupy pak můžeme najít skupinu tzv. mezoskopických modelů, které kombinují prvky makromodelů i mikromodelů.

V šesté kapitole budeme věnovat pozornost otázce modelování dopravního proudu z makroskopického úhlu pohledu. Nejdříve odvodíme matematický model v podobě parciální diferenciální rovnice a poté se zaměříme na řešení této rovnice pomocí metody charakteristik.

V případě, že je úloha pro modelování dopravního proudu zadána s nespojitými počátečními podmínkami, lze narazit na potíže spojené s řešením tohoto problému použitím makroskopického modelu. Pak může být velmi výhodné využít jiný přístup, tzv. multiagentní přístup, kdy se model skládá z velkého množství objektů s autonomním chováním - agentů, které právě tímto chováním a uplatněním svých vzájemných vazeb vytvářejí globální charakteristiku celku. S tímto mikroskopickým přístupem k řešení daného problému se setkáme v 7. kapitole. K pochopení souvislostí mezi dvěma odlišnými pohledy na vnímání popisu např. dopravního toku vozidel - mikroskopického a makroskopického lze úspěšně využít softwaru AnyLogic [2]. Snahou bude popsat danou problematiku takovým způsobem, aby zaměřená cílová skupina studentů porozuměla hlavním myšlenkám vedoucích k sestavení a řešení matematických modelů s tím, že výklad některých složitějších partií bude podán zjednodušenější formou.

Problematika numerického řešení jednoduchých problémů je obsahem 8. kapitoly. Stručnou formou je zde student seznámen s pojmem diferenční metody a jak lze těchto numerických metod využít k řešení jednoduché parciální diferenciální rovnice. Konečně v závěru se dotkneme také toho, za jakých podmínek je vybraná numerická metoda užitečná v souvislosti s termíny konvergence, konsistence a stabilita numerické metody. Při této příležitosti se zmíníme o některých problémech spojených s aktuálními tématy (Rankinova-Hugoniotova či Courantova-Friedrichsova-Lewyho podmínka).

Klíčová slova: derivace, pevný bod, orbita, chaos, hustota a tok vozidel, metoda charakteristik, simulační model, numerické metody

Abstract

The aim of this work is to suggest an expansion of preparation of learning materials designed for university teachers who work with students who have chosen advanced mathematics as an elective, or with high school students who are engaged in mathematics beyond compulsory curriculum. Students will work with a simple example of mathematical modeling in solving simple transport tasks.

At selected secondary schools and universities, where the basic course of differential calculus is included in, students encounter the concept of derivative and its definition using limits. They are most familiar with the use of derivatives and its applications in determining the monotony and extremes of functions of one variable. These examples are not usually associated with practice. In the final survey, students reported as the most common answer to the most problematic part of the subject matter concept of the limit. The basic definition of derivative discourages students already in the beginning, because the tool of the definition of the limit is the limit itself. Another aim therefore will be to focus on some of the problematic notions such as derivatives, limit sequence, integral and the appropriate form to introduce these concepts so that students understand the nature of the problem and are able to apply their knowledge in creating simple mathematical models e.g. to describe the movement of vehicles on the roads. The concept of derivation is mentioned in the second chapter of the work.

Chapter 3 is devoted to the interpretation of the development process and the importance of mathematical modeling. We meet with numerical problems and pitfalls that are joined with the mathematical modeling. At the same time we introduce a simple diagram describing the sequence of steps that must be followed in order to be able the model „successful“.

The following part of the work - the fourth chapter - aims to create models of simple but real problems. From a certain perspective on solving these tasks, we can get to concepts such as fixed points or an attracting orbit and even chaos. Lectures are conducted in such a way that students understand the basic concepts by analysis of graphs associated with these problems.

Chapter 5 follows the previous chapter. We will show how to convert the solving of continuous problem to the solving of the discrete problem and under what conditions these modifications are successful. On this occasion, we will focus on selected problems associated with current topics (importance of Lipschitz condition, choice of initial approach).

In Chapter 6 we derive a mathematical model in the form of partial differential equations. To apply the equation for an illustrative example of the practice it was necessary to introduce and understand some important concepts such as the traffic density, the traffic jam, the continuous and reduced traffic or the flow function. Then, we have focused on solving this equation using the method of characteristics. The theoretical part is complemented by several practical examples describing situations encountered in everyday traffic.

In the following part, we focus on trying to compare the results of two entirely different approaches to modeling the dynamics of traffic flow. We can distinguish three basic models.

The first group represented by macromodels is focused on the overall behavior of the system and requires global input data. The opposite is then micromodels specializing in the detailed description of the behavior of individual elements of the model. Between these two approaches, we can find another group called mesoscopic models that combine elements of both macromodel and micromodel.

In case the task of traffic flow modeling is defined with discontinuous initial conditions, we might encounter difficulties associated with resolving this problem using a macroscopic model. It might be useful to choose a different approach called multiagent approach where the model consists of many objects with autonomous behavior - agents that using this behavior and asserting their mutual relations form a global response unit. We introduce this microscopic approach in Chapter 7. To understand the relationship between these two different models in more detail - microscopic and macroscopic – we can use the AnyLogic software. We tried to describe given problem in a way so that a focused target group of students would understand the main points leading to building and solving mathematical models. We aimed to deliver the interpretation of certain parts in a more popular form.

The issue of the numerical solution of simple problems is the content of Chapter 8. Briefly, the student is introduced the concept of differential methods and how they can use numerical methods to solve simple partial differential equations. In the end, we also analyze the conditions under which the numerical methods are useful in connection with the terms of convergence, consistency and numerical stability. On this occasion, we will discuss about some of the pitfalls associated with current topics (Rankine-Hugoniot or Courant-Friedrichs-Lewy condition).

The part concerning the numerical modeling and numerical experiments could be beneficial for students. Students are during the actual formulation of initial conditions corresponding to the modeled reality delved into the solved problem and they are more easily able to understand the problems of comparison of discrete and continuous approach to solving problems related, for example, to modeling the traffic flow of vehicles (detailed calculation of slopes of characteristics may help to explain some contexts). The differences between these two ways i.e. where time does not go continuously but changes abruptly from one event to the other, and cases where a phenomenon is described as a continuous function of time, will be demonstrated on simple concrete examples so that the apparent advantages and disadvantages or common features of both approaches were understood. For comparison of results obtained by the procedures set out in Chapters 6, 7 and 8 on solving one particular model situation again, we chose a graphic way. The graphs in the paper were constructed using the graphical software Derive 6.

Keys words: derivative, fixed point, orbit, chaos, density and flow of vehicles, method of characteristics, simulation models, numerical methods

Obsah

1	Úvod	2
1.1	Motivace	2
1.2	Témata kapitol	4
2	Základní pojmy	6
2.1	Změna jako stěžejní pojem	6
2.2	Pojem posloupnosti a limity	7
2.3	Pojem derivace	10
2.4	Derivace a integrál	14
2.5	Pojem parciální derivace	17
3	Matematické modelování	19
3.1	Vývoj moderního modelování	19
3.2	Charakteristika modelů	19
4	Modelování a chaos	21
4.1	Příklady jednoduchých modelů	21
4.2	Základní vlastnosti	23
4.3	Co je to chaos?	33
4.4	Bifurkační diagram	35
5	Od spojitého problému k diskrétnímu problému	40
6	Modelování dopravního proudu	49
6.1	Hustota a tok vozidel	49
6.2	Charakteristika silničního provozu	50
6.3	Makroskopický model dopravního toku	54
6.4	Charakteristiky	55
6.5	Modelový příklad	67
6.6	Počáteční podmínky	69
6.7	Grafické výsledky	69
7	Simulační model	72
7.1	Popis modelu	72
7.2	Software AnyLogic	73
7.3	Grafické výsledky	73
8	Numerické řešení	75
8.1	Diference	75
8.2	Diferenční metody	78
8.3	Konvergence numerické metody	79
8.4	Grafické výsledky	80
9	Závěr	83

1 Úvod

1.1 Motivace

Hlavním cílem práce je připravit návrh rozšiřujícího učebního materiálu určeného pro učitele studentů vysokých škol, kteří si zvolili vyšší matematiku jako volitelný předmět, či středoškolských studentů, kteří se matematice věnují nad rámec povinných osnov.

Pokud se zaměříme na vysokoškolské učitele, pak nedílnou součástí jejich činnosti společně s výukou je jejich další sebevzdělávání. Ve většině případů je tato činnost spojena s vědeckovýzkumnými aktivitami v různých podobách a současně s formou postupného zvyšování vědecké kvalifikace. Střední školy ovšem nějaký konkrétní komplexní koncept sebevzdělávání učitelů dlouhodobě postrádaly. Tuto situaci by měla v blízké budoucnosti napravit novela zavádějící kariérní řád, jímž stanoví pro pedagogy tři kariérní stupně. Do prvního stupně učitel vstupuje automaticky a má za úkol se s podporou svého tzv. uvádějícího učitele profesně rozvíjet a dále sebevzdělávat po dobu dvou let. Postup do vyšších kariérních stupňů je pak učiteli umožněn na základě hodnotícího pohovoru před komisí. Škola rovněž definuje pro rozvoj pedagoga vlastní požadavky, které se pak spolu s předepsanými zkombinují a vytvářejí tak osobní plán profesního rozvoje zakládajícím se na pokračujícím sebevzdělávání.

Řada učitelů se věnuje dalšímu studiu matematiky z několika důvodů. Jedním z nejvýznamnějších cílů je pak rozšířit si své vědomosti proto, aby mohli přispět k zpestření výkladu povinné látky nebo zařadit některé moderní metody, aktuální novinky či postupy, které nejsou součástí obvyklých povinných školních osnov, a mohou přispět k popularizaci neoblíbené matematiky. Na základě těchto úvah se zrodila myšlenka zpracovat vybrané partie matematiky vztahující se k tématu matematické a numerické modelování do ucelené podoby tak, aby mohly napomoci učitelům k výše formulovaným cílům.

Matematické a numerické modelování je neustále se rozvíjející moderní obor, který je využíván v mnoha oblastech lidské činnosti. Modelování proniklo do různých disciplín např. technických, přírodních, ekonomických či sociálních. S matematickými modely se setkáváme denně na každém kroku, při předpovědi počasí, při modelování dopravních sítí, populace, řízení zásob, proudění podzemní vody, určení zátopových oblastí při povodních a v inženýrských dílech (konstrukce letadel, jaderných reaktorů, aut, rychlovlaků, mostů) atd. Modely se staly nedílnou součástí a nástrojem při předvídání vývoje různých dějů. Použití vhodného matematického modelu přináší mnoho výhod, usnadňuje pochopení složitějších jevů a procesů a souvislostí, umožňuje simulaci různých možných výsledků. Pojmy matematického a numerického modelování jsou v současnosti běžně používány i ve sdělovacích prostředcích, proto by si začlenění postupů a metod vztahujících se k modelování jednodušších jevů v rozumné míře do osnov vybraných škol zasloužovalo. Snahou některých škol je zařadit do výuky předmět seznamující studenty s využitím komerčních programů např. Matlab či Statistica k demonstraci probírané látky v různých předmětech jako jsou matematika, fyzika, biologie či chemie. Odtud pak již vede cesta k numerickému modelování. Modelování představuje celý proces včetně verifikace a validace na pomezí matematiky, příslušné disciplíny a informatiky.

Pozornost nebude zaměřena pouze na izolované metody, ale na modelování jako jistý přístup k řešení daného problému. Studenti se s pomocí vyučujícího seznámí s různými postupy v oblasti matematického modelování vybraných jevů, se kterými se lze setkat v reálném životě například při řešení jednoduchých dopravních úloh. Některé vybrané partie byly již cvičně zařazeny jako zpestření výuky v seminářích určených pro předmět Matematika 3 na Vysoké škole technické a ekonomické v Českých Budějovicích a studenty byly přijaty kladně.

Při podrobné analýze odborné či popularizační literatury určené pro středoškolské studenty na českém trhu se nepodařilo nalézt publikaci, která by se věnovala matematickému a numerickému modelování v tématech zahrnutých v této práci. Lze narazit na publikace věnující se popularizaci matematického modelování jmenovitě například sbírka řešených netradičních úloh s názvem Aplikací úlohy pro radost (viz [5]), která je určena zájemcům o matematické modelování reálných situací a je směřována nejen ke studentům posledních ročníků středních škol, ale také do řad učitelů. Lze vyhledat nesčetně odkazů na internetové kurzy, přednášky a konference, které se zabývají jistým úsekem vztahujícím se tematicky k modelování. Existují jednotlivé články publikované například v časopise Pokroky matematiky, fyziky a astronomie nebo v časopise Vesmír. Lze vyhledat řadu publikací například [14], některé bakalářské, diplomové a disertační práce, které se tématu matematického a numerického modelování věnují, ale většinou v jiném kontextu a jsou určeny především pro terciární vzdělávání. Velkým přínosem v této oblasti je pak činnost Školy matematického modelování (Škomam), kterou pořádá již od roku 2005 Katedra aplikované matematiky na Vysoké škole Báňské – Technické univerzitě v Ostravě v podobě každoročního třídního kurzu. Tato akce je určena především pro studenty posledních a předposledních ročníků středních škol, je zaměřena na matematické modelování a výpočetní techniku a je organizována prostřednictvím dopoledních sekcí přednášek a odpoledních počítačových cvičení.

Pokud provedeme podobný průzkum v zahraničí, narazíme opět na velmi početnou databázi různých produktů, které se pojí s matematickým a numerickým modelováním, a jsou určeny pro studenty různých úrovní. Za zmínku stojí uvést například skupinu ICTMA (Mezinárodní společenství učitelů matematického modelování a aplikací). Cílem této mezinárodní skupiny je popsat všechny aspekty týkající se vyučování a učení o matematickém modelování na sekundární a terciární úrovni, např. psychologické aspekty modelování a jeho učení, modelování kompetencí, příklady modelování a vzdělávacích kurzů pro učitele. Zaměření činnosti této skupiny vede převážně k didaktickému pohledu na uvedenou problematiku. Dále by stálo za pozornost zmínit aktivitu pracovníků na Chalmers University of Technology, kteří vyvinuli program s názvem Aplikovaná matematika: Body & Soul (viz [9]). Tento projekt představuje možnosti matematického modelování v oblasti matematiky, vědy a techniky a zahrnuje moderní verzi matematické analýzy, lineární algebry včetně numerických metod a aplikací určených pro bakalářské programy v oblasti technických disciplín. Další část této publikace je již věnována vysokoškolským tématům jako jsou například dynamické systémy, dynamika tekutin, mechanika těles atd.

1.2 Témata kapitol

Ve všech začleněných kapitolách nalezneme podrobný výklad vztahující se k danému tématu. Pro názornost je text doplněn řadou ilustrativních obrázků či grafů. V případě složitějších úvah vyžadujících získat detailnější a komplexní představu jsou uvedeny odkazy na vhodnou literaturu. Většina kapitol je uzavřena několika jednoduchými řešenými příklady. V závěru každé kapitoly je provedeno stručné shrnutí probraného úseku a připojena doporučení a odkazy k dalšímu studiu.

V úvodní část navazuje druhá kapitola, ve které připomeneme význam některých známých pojmů. Na vybraných středních školách a na vysokých školách, které mají do výuky zařazen základní kurz diferenciálního počtu, se studenti setkávají s pojmem derivace a její definicí pomocí limity. S využitím derivace a jejích aplikací jsou pak nejčastěji seznámeni při určování monotonie a extrémů funkce jedné reálné proměnné. Tyto příklady většinou nejsou spojeny s praxí. Při závěrečném průzkumu pak studenti uvádějí jako nejčastější odpověď na otázku nejproblematictějšího úseku probírané látky pojem limita. Základní definice derivace studenty pak odradí již v úvodu, protože jejím nástrojem je právě limita. Dalším cílem práce proto bude snaha zaměřit se na některé problematické pojmy jako je například posloupnost, Lipschitzova podmínka, limita, derivace, integrál a vhodnou formou přiblížit tyto pojmy tak, aby studenti pochopili podstatu problému a aby byli schopni aplikovat poznatky při vytváření jednoduchých matematických modelů např. při popisu pohybu vozidel na silnicích. V závěru se stručně zmíníme o parciálních derivacích, protože je budeme v 6. kapitole využívat.

Třetí kapitola je věnována výkladu o procesu vývoje a významu matematického modelování. Seznámíme se s numerickými problémy a úskalími, které matematické modelování provází. Současně představíme jednoduchý diagram popisující posloupnost kroků, které je nutné dodržet k tomu, aby mohl být model „úspěšný“.

Čtvrtá kapitola si klade za cíl vytvořit modely jednoduchých reálných problémů. Z jistého úhlu pohledu na řešení těchto úloh se lze dostat k pojmům jako je např. pevný a přitahující bod, orbita či chaos. Výklad je veden takovým způsobem, aby student pochopil základní pojmy pomocí analýzy grafů souvisejících s uvedenými problémy. Tato tematika může být pro studenty přínosná také tím, že poznatky o nelineárních a chaotických procesech přinášejí kromě rozšíření matematických znalostí obohacení ve smyslu pohledu na jinou realitu, který není ve škole obvyklý.

Pátá kapitola tematicky navazuje na předchozí kapitolu. Ukážeme, jak lze převést řešení spojitého problému na řešení diskrétního problému a za jakých podmínek jsou tyto modifikace úspěšné. Při této příležitosti se zaměříme na vybraná úskalí spojená s aktuálními tématy (analýza Lipschitzovy podmínky, volba počátečního přiblížení).

V následující části práce je pozornost soustředěna na snahu porovnat výsledky dvou zcela rozdílných přístupů k modelování dynamiky dopravního proudu. Způsob modelování dopravních systémů je ovlivněn mnoha faktory. Zásadní roli zde hraje dostupnost dat pro daný způsob modelování a samozřejmě i požadovaná úroveň detailu. Rozeznáváme proto tři základní skupiny

modelů. První skupinu zastupují makromodely zaměřující se na celkové chování systému a vyžadující globální vstupní data. Opakem jsou pak mikromodely specializující se na detailní popis chování jednotlivých elementů modelu. Mezi těmito dvěma přístupy pak můžeme najít skupinu tzv. mezoskopických modelů, které kombinují prvky makromodelů i mikromodelů.

V šesté kapitole se budeme věnovat tématu modelování dopravního proudu z makroskopického úhlu pohledu. Nejdříve odvodíme matematický model v podobě parciální diferenciální rovnice a poté se zaměříme na řešení této rovnice pomocí metody charakteristik.

V případě, že je úloha pro modelování dopravního proudu zadána s nespojitými počátečními podmínkami, lze narazit na potíže spojené s řešením tohoto problému použitím makroskopického modelu. Pak může být velmi výhodné využít jiný přístup, tzv. multiagentní přístup, kdy se model skládá z velkého množství objektů s autonomním chováním - agentů, které právě tímto chováním a uplatněním svých vzájemných vazeb vytvářejí globální charakteristiku celku. S tímto mikroskopickým přístupem k řešení daného problému se setkáme v 7. kapitole. K pochopení souvislostí mezi dvěma odlišnými pohledy na vnímání popisu např. dopravního toku vozidel - mikroskopického a makroskopického lze úspěšně využít softwaru AnyLogic [2]. Snahou bude popsat danou problematiku takovým způsobem, aby zaměřená cílová skupina studentů porozuměla hlavním myšlenkám vedoucím k sestavení a řešení matematických modelů s tím, že výklad některých složitějších partií bude podán zjednodušenější formou.

Problematika numerického řešení jednoduchých problémů je obsahem 8. kapitoly. Stručnou formou je zde student seznámen s pojmem diferenční metody a jak lze těchto numerických metod využít k řešení jednoduché parciální diferenciální rovnice. Konečně v závěru se dotkneme také toho, za jakých podmínek je vybraná numerická metoda užitečná v souvislosti s termíny konvergence, konsistence a stabilita numerické metody. Při této příležitosti se zmíníme o některých úskalích spojených s aktuálními tématy (Rankinova-Hugoniotova či Courantova-Friedrichsova-Lewyho podmínka).

2 Základní pojmy

Tato kapitola zahrnuje stručný přehled základních matematických pojmů a označení. Vybrané termíny jsou v hodinách matematiky na středních školách probírány a studenti by měli mít povědomí o jejich významu. Cílem této části je osvěžit souvislosti, v jakých jsou tyto pojmy propojeny, protože se s nimi v navazující části textu budeme setkávat.

2.1 Změna jako stěžejní pojem

Svět kolem nás se stále mění, tyto změny můžeme pozorovat v různých projevech a formách v biologii, fyzice, chemii či ekonomii. Příkladem mohou sloužit následující procesy jako změny za časovou jednotku:

- rychlost = změna dráhy
- zrychlení = změna rychlosti
- ochlazení, oteplení = změna teploty
- změna hustoty populace
- změna koncentrace látky
- změna barvy
- rozpad částic látky
- změna hustoty silničního provozu

Pozorujeme-li změnu jistého děje vlastníma očima, např. změnu barvy, let ptačího hejna či pohyb ryb, vnímáme tento jev díky našemu nedokonalému vidění jako souvislou, spojitou událost. Při jistém přiblížení za pomoci např. mikroskopu či dalekohledu se souvislý jev stává jevem diskrétním. Můžeme pak let ptačího hejna popsat jako pohyb skupiny jednotlivých ptáků – bodů dané množiny. Z praktického hlediska pak lze popsat trajektorii bodu – částice pomocí spojitě resp. po částech spojitě funkce než pomocí diskrétní množiny. Tento přechod s sebou nese jisté nevýhody v podobě nepřesností v "hluchých místech", tedy v místech, kde o poloze částic nemusíme mít informace (náhlá změna směru letu hejna). Podobným způsobem lze pozorovat proudění tekutiny, přenos tepla či sledovat dopravní tok vozidel na silnicích. Společným pojítkem uvedených příkladů je snaha o popis změny sledované za nějakou časovou jednotku či o předpověď jejího dalšího vývoje. Pohyb živých a neživých objektů má mnoho společných rysů, avšak částčky neživé hmoty se za konstantních podmínek pohybují stále stejným způsobem, ovšem pohyb živých tvorů je ovlivněn tím, že každý objekt se v daný moment může rozhodnout a reagovat jiným způsobem.

Veškeré snahy o popis přírodních jevů vedou k různým matematickým vztahům - k co možná nejstručnějšímu a přesnému popisu dějů kolem nás zapsaným matematickým jazykem.

Tyto vztahy mohou být odvozeny na základě logických úvah a zkušeností, ale často jsou výsledkem mnohaletého studia různých souvislostí a mohou být vyjádřeny například prostřednictvím rovnic. Rovnice vyjadřují vztah mezi proměnnými a popisují, jakým způsobem se tyto proměnné mění například v čase a prostoru. Proměnné veličiny jsou dány podle toho, jaký problém řešíme, mohou představovat polohu či hodnotu teploty, hustoty, rychlosti atd. K tomu, abychom mohli rovnice sestavit a následně řešit, potřebujeme vybudovat jistý matematický aparát a definovat základní matematické pojmy (viz např. [4]).

2.2 Pojem posloupnosti a limity

Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel, se nazývá nekonečná posloupnost. Nejčastěji je oborem hodnot této funkce množina reálných čísel a obvykle bývá značena symbolem $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Každou posloupnost lze charakterizovat dle mnoha hledisek např. monotónie či omezenosti a nejčastějším cílem jejího vyšetřování bývá otázka její konvergence respektive nalezení její limity a (v zápisu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$). S definicí limity posloupnosti se studenti mají možnost seznámit v této podobě:

Reálné číslo a se nazývá vlastní limita posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy, když pro každé $\epsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|x_n - a| < \epsilon$.

Pokud má tedy daná posloupnost konečnou limitu a , pak to dle definice znamená, že ať udáme libovolně malou vzdálenost od hodnoty a (přesnost s jakou se přiblížíme k a), pak vždy existuje člen dané posloupnosti, od kterého jsou již všechny následující členy obsaženy v intervalu daném krajními body a a hodnotou udávající přesnost.

V následujících kapitolách se budeme věnovat problému

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

pro $n = 1, \dots$, který bude jistým způsobem souviset s řešením jiné úlohy. Budeme postupně určovat členy posloupnosti $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ na základě výše uvedeného předpisu a budeme se zajímat o to, zda má daná posloupnost limitu. V kladném případě může být tato limita při splnění jistých podmínek pak řešením původní úlohy. Vztah $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ bývá také nazýván rekurentní formulí 1. řádu - předpisem pro výpočet členů posloupnosti pomocí předcházejícího členu. V případě, že formule zahrnuje k předcházejících členů posloupnosti, mluví se o rekurentní formulí k -tého řádu. Přibližnou hodnotu limity pak stanovujeme právě postupným určováním členů dané posloupnosti s tím, že jsme schopni ověřit, zda je daná posloupnost konvergentní resp. jak rychle konverguje (viz např. [9]). Nedílnou součástí tohoto procesu je pak stanovení odhadu chyby, které se v daném kroku rekurentního postupu dopustíme. Oblast numerické matematiky zabývající se odhadováním chyb při numerických výpočtech je velmi rozsáhlá, tato problematika nebude v textu detailně zmiňována. V praxi se objevují rekurentní výpočty spojené s mnoha problémy, ve středoškolské výuce není tomuto tématu bohužel věnováno mnoho pozornosti.

Při praktických výpočtech je pak na místě otázka: Bude-li hodnota rozdílu dvou sousedních hodnot dané posloupnosti $|x_{n+1} - x_n|$ pro $n \rightarrow \infty$ konvergovat k 0, bude pak daná posloupnost konvergentní? Zeptáme-li se obráceně, tedy v případě, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a , bude platit, že $|x_{n+1} - x_n|$ pro $n \rightarrow \infty$ bude konvergovat k 0? Odpověď na druhou otázku je kladná, protože platí nerovnost

$$|x_{n+1} - x_n| = |x_{n+1} - a + a - x_n| \leq |x_{n+1} - a| + |a - x_n|.$$

Součet $|x_{n+1} - a| + |a - x_n|$ konverguje pro $n \rightarrow \infty$ k 0, poněvadž posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a . V případě prvního dotazu nebude odpověď snadná. Pokud budeme mít konkrétnější informace o vlastnostech funkce $\varphi(x)$, může být pak tvrzení pravdivé. V dalším textu budeme předpokládat, že daná funkce $\varphi(x)$ je na sledovaném intervalu spojitá a splňuje následující podmínku. Existuje-li reálná konstanta q taková, že $0 < q < 1$ a pro každé x a y z intervalu I platí nerovnost

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|,$$

pak říkáme, že funkce $\varphi(x)$ splňuje na intervalu I podmínku *kontrakce*. Konstanta q , která v podmínce vystupuje, se nazývá *Lipschitzova konstanta* a funkce, které tuto podmínku (tzv. Lipschitzovu) splňují (i bez omezení ve tvaru $q < 1$), se nazývají *lipschitzovsky spojitě*. Platí-li, že krajní body intervalu I se zobrazí opět do I , pak je také zaručeno, že pokud $x \in I$, pak také $\varphi(x) \in I$ (viz také v kapitole 4. a 5.).

Předpokládejme tedy, že funkce $\varphi(x)$ splňuje na intervalu ohraničeném body a a x_n Lipschitzovu podmínku s konstantou q , kde $0 < q < 1$. Pak platí

$$|x_n - a| = |\varphi(x_{n-1}) - a| \leq q|x_{n-1} - a| \leq q|x_{n-1} - x_n| + q|x_n - a|,$$

tedy je splněno

$$|x_n - a| - q|x_n - a| \leq q|x_{n-1} - x_n|,$$

odtud plyne

$$(1 - q)|x_n - a| \leq q|x_{n-1} - x_n|$$

a konečně

$$|x_n - a| \leq \frac{q}{(1 - q)}|x_{n-1} - x_n|.$$

Z poslední nerovnosti vyplývá, že pokud bude rozdíl $|x_{n+1} - x_n|$ pro $n \rightarrow \infty$ konvergovat k 0, pak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a .

Na závěr je třeba poznamenat, že pokud daná posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje, pak buď osciluje nebo diverguje tj. má limitu rovnou $+\infty$ nebo $-\infty$. Termín nekonečna by si zasluhoval krátkou historickou poznámku.

Poznámka

Myšlenka nekonečna proniká celou matematikou a pojem nekonečna je bezpochyby jeden z jejích ústředních termínů. Jako jedno z prvních pojmenování nekonečna byl dlouhou dobu používán název tzv. *bludného nekonečna*: „Nekonečným nazýváme to, co nemá žádného východiska nebo hranic, ačkoliv by je podle své povahy míti mělo.“ K takovému nekonečnu lze přirovnat například pohyb po kružnici. Antické diskuze týkající se pojmu nekonečna pak sumarizoval Aristoteles odlišením pojmu *aktuálního nekonečna* od pojmu *potenciálního nekonečna*. Jako příklad pro vysvětlení potenciálního nekonečna může sloužit řada přirozených čísel, která není shora nijak omezena, ale v principu neexistuje žádné největší přirozené číslo. Nekonečno je tedy přístupno pouze potenciálně. Aktuální nekonečno souvisí s abstrakcí, která připouští existenci nekonečně mnoha prvků sloučených v jeden celek, a lze jej chápat jako uzavřený objekt nepodléhající dalšímu procesu zvětšování (úsečka jako množina bodů), ([25]).

Snaha pochopit pojem nekonečna jako abstraktního pojmu se tak řadí stále k jedné z nejobtížnějších součástí matematiky a lidé jak už z dávné minulosti či současnosti si nekonečno nedokázali a stále nedokáží představit viz obr. 1.



Obrázek 1: Bludné nekonečno

2.3 Pojem derivace

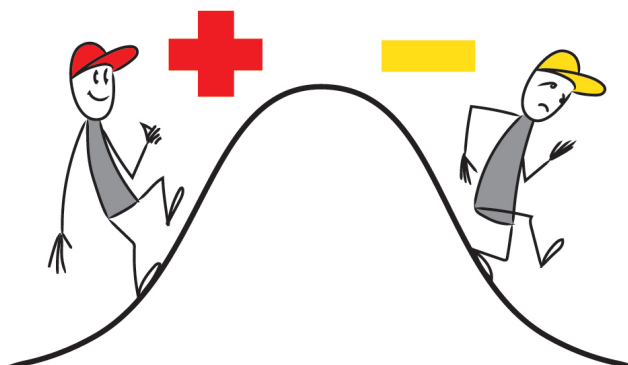
V této části práce budeme věnovat naši pozornost jednomu z nejdůležitějších nástrojů v matematice - derivaci funkce, pokusíme se k podstatě tohoto pojmu postupně dopracovat.

Při vyšetřování vlastností dané spojitě funkce definované na intervalu I - monotónie, určování lokálních extrémů či konvexity a konkávnosti je rozumné zaměřit se na popis směrnic tečen sestrojených k funkci $y = f(x)$ v každém bodě. Důvod je celkem logický, protože tečna je přímka, která má s funkcí $f(x)$ společný právě jeden bod a v jeho „velké blízkosti“ takřka kopíruje její graf (studenti na střední škole definici tečny takto vnímají). Lze dokázat (viz [9]), že optimální lineární aproximací funkce $f(x)$ v okolí bodu T je v určitém smyslu tečna sestrojená k funkci f v bodě T . Zvolme libovolně bod $T = [x_0, f(x_0)]$, kde x_0 náleží intervalu I , pak rovnice tečny sestrojené k dané funkci v bodě T má tvar

$$f(x) - f(x_0) = k(x - x_0).$$

Významným ukazatelem je pak hodnota její směrnice k , která udává, zda je tečna a tedy i funkce v daném bodě rostoucí, klesající či konstantní. Jednoduchou úvahou pak lze dospět k následujícím souvislostem viz obr. 2:

- $k > 0 \Rightarrow$ funkce je v jisté okolí bodu rostoucí
- $k < 0 \Rightarrow$ funkce je v jisté okolí bodu klesající
- $k = 0 \Rightarrow$ daný bod je bodem jisté změny, může být lokálním extrémem nebo inflexním bodem



Obrázek 2: Význam hodnoty derivace

Nabízí se tedy otázka: Pokud by se podařilo odvodit ke každé funkci jednoduchý způsob, jakým lze stanovit hodnoty směrnic tečen sestrojených v libovolném bodě definičního oboru dané funkce, pak bychom mohli snadno získat představu o jejím chování. Budeme této „odvozené“ funkci, která bude přiřazovat ke každému bodu x_0 směrnici tečny sestrojené v bodě

$T = [x_0, f(x_0)]$, říkat derivace funkce. Pojem derivace má patrně původ ve francouzském slově „dérivé“, který lze přeložit jako odvození. Pojem derivace byl poprvé zaveden v 18. století francouzským matematikem a astronomem italského původu Lagrangem a derivace funkce y byla označena symbolem y' (viz [10]). V případě jednoduchých funkcí lze tuto závislost hodnoty směrnice na předpisu funkce snadno odvodit.

Příklady

1. $f(x) = kx + q$

Platí $kx - kx_0 = k(x - x_0)$ tedy $(kx)' = k$. Pokud je funkce $f(x)$ konstantní, pak platí $q - q = 0 \cdot (x - x_0)$, tudíž $q' = 0$. Derivace funkce $f(x) = 2x - 15$ je tedy rovna 2.

2. $f(x) = x^2$

Rovnice tečny sestrojené ke grafu této funkce v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$ má tvar $x^2 - x_0^2 = k(x - x_0)$. Dále platí po úpravě $(x - x_0)(x + x_0) = k(x - x_0)$, tedy $k = x + x_0$. Směrnice tečny sestrojené v bodě T je rovna hodnotě $k = x_0 + x_0 = 2x_0$ a $(x^2)' = 2x$.

3. $f(x) = x^3$

Rovnice tečny sestrojené ke grafu této funkce v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$ má tvar $x^3 - x_0^3 = k(x - x_0)$. Podobně jako v předchozím příkladě platí:

$$x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + x_0x + x_0^2),$$

tedy pro $x = x_0$ je $k = 3x_0^2$ a $(x^3)' = 3x^2$.

Výpočet pro derivaci funkce x^n v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$, kde n je libovolné přirozené číslo, lze pak zobecnit dle

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x_0x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1})$$

na vztah $(x^n)' = nx^{n-1}$. Určení derivace polynomické funkce je tedy jednoduché, neboť podíl $\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$ lze algebraicky upravit.

Jakým způsobem budeme ovšem postupovat v případech určování derivace nealgebraických funkcí? Zvolme například $f(x) = \sin x$, bod $T = [x_0, f(x_0)]$ a pro snadnější úpravu vyjádřeme rozdíl $x - x_0 = h$. Potom lze hodnotu směrnici tečny k sestrojené v bodě $[x_0, f(x_0)]$ přepsat následovně:

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin(x + h) - \sin h}{h}.$$

Využijeme-li k úpravě čitatele vztahu $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, pak platí

$$k = \frac{\sin h \cos x}{h},$$

protože $x = x_0$ a tudíž $h = 0$. V tomto místě se objevuje jistý problém a to, jak stanovit hodnotu tohoto výrazu v bodě $h = 0$. Přichází čas na využití dalšího pomocníka v matematice - oblíbené limity. Podaří-li se pomocí vhodných operací upravit vyhodnocovaný výraz tak, abychom mohli určit jeho hodnotu v bodě $h = 0$, obdržíme hledanou funkci. Pojďme se pustit do úpravy:

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h \cos x}{h} = \cos x, \quad (1)$$

poněvadž $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. Uvedený vztah je známým výsledkem a studenti se s touto limitou setkávají již v úvodu kapitoly vztahující se k výpočtu limit. Tato část matematiky je studenty v drtivé většině hodnocena velmi negativně a hlavním důvodem této antipatie je fakt, že studenti nemají zažité návyky potřebné k úpravám algebraických výrazů, a proto se s výpočtem limity nevypořádávají úspěšně. Tato neznalost se potom odráží v dalších matematických disciplínách, poněvadž výpočet limit je svázán s mnoha matematickými problémy.

Poznámka

Na ověření výsledku (1) můžeme využít velmi jednoduchého pravidla nazývaného „l'Hospitalovým“ (čteme l'opitalovým). Toto pravidlo lze uplatnit v případě, kdy počítáme limitu z podílu dvou funkcí ve tvaru

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

kde a je reálné číslo takové, že jsou splněny podmínky $f(a) = 0$ a $g(a) = 0$ nebo $f(a) = \pm\infty$ a $g(a) = \pm\infty$ a navíc existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak lze dokázat, že platí

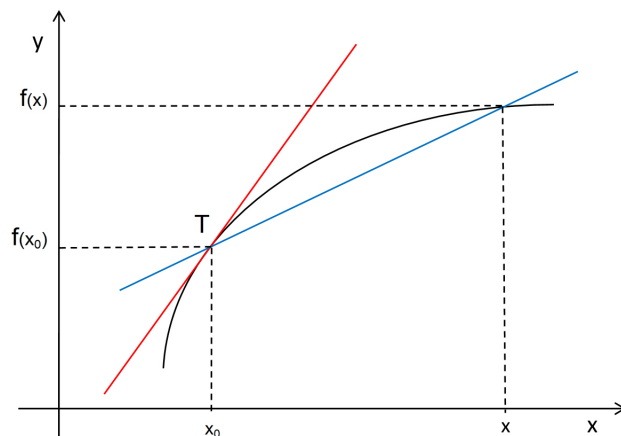
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tímto pravidlem si lze usnadnit algebraické úpravy zlomku $\frac{f(x)}{g(x)}$ do tvaru, ve kterém jsme již schopni po dosažení bodu a výraz vyhodnotit. Výsledek $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ je rovněž čitelný z grafického znázornění funkce $y = x$ a $y = \sin x$ ve velké blízkosti bodu $[0, 0]$, kde grafy zmiňovaných funkcí takřka splývají, a proto poměry jejich funkčních hodnot jsou velmi „blízké“ hodnotě rovné 1.

Při odvozování postupu při výpočtu derivace funkce pak lze využít limity a derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0 definovat následovně

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (2)$$

pokud tato limita existuje. Hodnota $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ představuje směrnicí sečny procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x, f(x)]$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je směrnicí tečny v bodě $[x_0, f(x_0)]$ viz obr. 3. Posune-li se x do bodu x_0 , pak se sečna stává tečnou.



Obrázek 3: Zobrazení tečny a sečny

Na tomto místě by bylo vhodné zmínit *Heineho větu*, kterou lze využít při formulování pojmu derivace. Důsledkem této věty je fakt, že určení limity posloupnosti lze převést na výpočet limity funkce. Tento postup může být výhodný, neboť pro stanovování limit funkcí existují silnější nástroje (především pak Věta o limitě složené funkce).

Poznámka

Heineho věta.

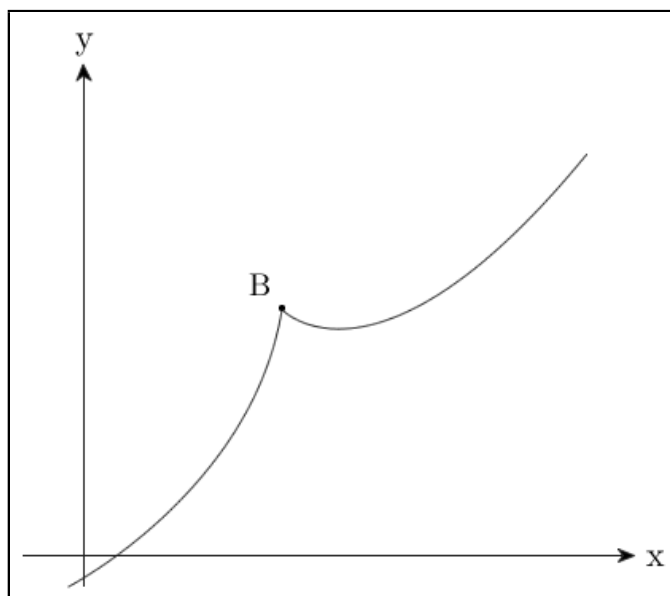
Funkce f definovaná v prstencovém okolí bodu a má v bodě a limitu L právě tehdy, když platí podmínka: Pro každou posloupnost čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z definičního oboru funkce f takovou, že $x_n \neq a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Důsledkem Heineho věty je pak následující tvrzení: Nechť má funkce f v bodě $+\infty$ limitu rovnou L . Potom také existuje limita posloupnosti $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

Budeme-li postupně sestřiovat sečny dle obr. 3 a stanovovat jejich směrnice, pak derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0 lze definovat jako limitu této posloupnosti směrnic sečen (pokud zmiňovaná limita existuje).

V případě, kdy derivace spojitě funkce v daném bodě neexistuje viz obr. 4, pak je při popisu vlastností funkce v okolí daného bodu nutné postupovat jiným způsobem (vyšetřovat monotónii funkce v okolí tohoto bodu).



Obrázek 4: V bodě B nelze stanovit hodnotu derivace funkce

Při určování derivací by nebylo příliš pohodlné pokaždé stanovovat příslušné limity, protože v případě komplikovanějších funkcí nemusí být jejich určení vždy snadnou záležitostí. Poněvadž lze pro všechny základní matematické funkce tyto limity nalézt a současně lze formulovat pravidla o derivování součinu či podílu funkcí a derivování složené funkce, je pak proces derivování jednoduchou a rutinní záležitostí. Předpokládejme dále v textu, že si student osvojil základní pravidla derivování a správně vnímá geometrický význam derivace, budeme této zkušenosti v řadě situací využívat.

2.4 Derivace a integrál

Studenti jsou seznamováni s praktickými úlohami, ve kterých je nutné pracovat s derivací dané funkce v souvislosti s určováním jejích extrémů eventuálně její monotónie. Ovšem v praxi jsme často postaveni před obrácený úkol. Známe funkční závislost popisující nějaký jev po jisté „změně“ - derivaci neznámé funkce podle dané proměnné a zajímáme se o to, jaký předpis měla funkce před „změnou“, například vztah pro závislost rychlosti v pohybu s rovnoměrným zrychlením a na čase t je dán známým vztahem ve tvaru $v = at$. Funkce at je derivací funkce $\frac{1}{2}at^2 + c$, kde c je libovolná reálná konstanta. Protože rychlost je definována jako změna dráhy s za časovou jednotku t (derivace funkce $\frac{1}{2}at^2 + c$ podle proměnné t), pak vztah $s = \frac{1}{2}at^2$ představuje závislost dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu na čase t .

Nastíněný problém lze formulovat následovně:

Je dána reálná funkce $f(t)$ definovaná na intervalu $I = \langle a, b \rangle$. Cílem je určit funkci $y(t)$ definovanou na I tak, aby byla na I splněna následující rovnost

$$y'(t) = f(t). \quad (3)$$

Uvedená rovnice patří do kategorie rovnic, které označujeme jako *diferenciální* rovnice a její řešení budeme nazývat *primitivní* funkcí k funkci f nebo (neurčitým) *integrálem* k funkci f podle proměnné t na intervalu I , symbolicky $\int f(t)dt$. Vzhledem k tomu, jaký řešíme problém v (3), lze řešení pojmenovat také *antiderivací* funkce f na daném intervalu. Je-li $y'(t) = f(t)$, pak také $(y(t) + c)' = f(t)$, kde c je reálná konstanta a nazývá se *integrační konstantou*. Rovnice (3) má tedy nekonečně mnoho řešení a pokud k řešení úloze (3) připojíme dodatečnou podmínku - *počáteční podmínku* například ve tvaru $y(a) = y_a$, získáme jediné řešení úlohy (3) procházející bodem $[a, y_a]$. Zaved' me označení $y(t) - y(a) = \int_a^t f(x)dx$, kde výraz $\int_a^t f(x)dx$ čteme jako určitý integrál funkce $f(x)$ v mezích od a do t podle proměnné x . K významu tohoto symbolu se dostaneme v následujícím textu.

Pokusíme se pomocí jednoduchého příkladu z praxe najít způsob, jak určit neznámou funkci $y(t)$ (viz [11]). Budeme řešit příklad, který tematicky souvisí s problematikou studovanou v 6. kapitole.

Představme si vozidlo pohybující se po vozovce v čase t , funkce $y(t)$ bude vyjadřovat vzdálenost vozidla překonanou za dobu t a funkce $f(t)$ bude reprezentovat okamžitou rychlost vozidla v čase t . Budeme sledovat vozidlo v časovém intervalu od $t = t_0 = 0$ do $t = t_N = 1$. Rozdělme časový interval na úseky $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = 1$, tímto způsobem pak získáme posloupnost vzdáleností $y(t_n)$ a jim odpovídajících okamžitých rychlostí $f(t_n)$. Nyní využijeme fakt známý ze základů fyziky a to, že ujetou vzdálenost lze spočítat jako součin průměrné rychlosti a délky časové jednotky od hodnoty t_{n-1} do doby t_n . Z tohoto důvodu lze $y(t_n)$ nahradit hodnotou takto

$$y(t_n) \approx y(t_{n-1}) + f(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) \quad (4)$$

nebo také tímto způsobem

$$y(t_n) \approx y(t_{n-1}) + f(t_n)(t_n - t_{n-1}), \quad (5)$$

kde jsme hodnotu průměrné rychlosti nahradili hodnotou okamžité rychlosti. Je-li například $y(t) = t^2$, pak platí

$$y(t_n) - y(t_{n-1}) = t_n^2 - t_{n-1}^2 = (t_n + t_{n-1})(t_n - t_{n-1}).$$

V případě volby aproximace ve tvaru (4) nebo (5) je $f(t_{n-1}) \approx 2t_{n-1}$ nebo $f(t_n) \approx 2t_n$ (tento výsledek již připomíná derivaci druhé mocniny t). Úpravou vztahu (5) obdržíme

$$f(t_n) \approx \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}. \quad (6)$$

Protože $y'(t) = f(t)$ a tedy $y'(t_{n-1}) = f(t_{n-1})$, lze pak derivaci $y'(t_{n-1})$ aproximovanou následovně

$$y'(t_{n-1}) \approx \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} \quad (7)$$

chápat jako průměrnou rychlost v časovém úseku od t_{n-1} do doby t_n . Rovnice $y'(t) = f(t)$ tedy popisuje, že derivace dráhy $y(t)$ podle času je rovna okamžité rychlosti $f(t)$ a vztah (7) říká, že okamžitá rychlost v čase t_{n-1} je přibližně rovna průměrné hodnotě rychlosti v intervalu $\langle t_{n-1}, t_n \rangle$. Nyní lze postup popsany vztahem (5) opakovat

$$y(t_{n-1}) \approx y(t_{n-2}) + f(t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})$$

a dále

$$y(t_n) \approx y(t_{n-2}) + f(t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2}) + y(t_{n-1}) + f(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}).$$

Protože $y(t_0) = y(0) = 0$, dostáváme

$$y(t_n) \approx f(t_0)(t_1 - t_0) + f(t_1)(t_2 - t_1) + \dots + f(t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2}) + f(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) \quad (8)$$

neboli celková vzdálenost ujetá za čas t_n je přibližně rovna součtu úseků překonaných v předchozích časových intervalech, jejichž hodnoty jsme nahradili součinem příslušné okamžité rychlosti a ujeté vzdálenosti. Položíme-li $n = N$, pak platí $y(1) = y(t_N)$ a vztah (8) lze přepsat následovně

$$y(1) \approx f(t_0)(t_1 - t_0) + \dots + f(t_{N-1})(t_N - t_{N-1}) = \sum_{n=1}^N f(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}). \quad (9)$$

Nahradíme-li v (9) symbol \approx symbolem $=$, rozdíl $t_n - t_{n-1}$ symbolem dt , pak lze hodnotu součtu všech uvedených členů zapsat přibližně pomocí určitého integrálu takto

$$y(1) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Termín integrace můžeme volně přeložit jako slučování či sčítání částí v celek. Hodnota určitého integrálu $\int_0^1 f(t) dt$ je rovna součtu součinů okamžitých rychlostí a velmi malého časového úseku, na němž se vozidlo pohybovalo odpovídající okamžitou rychlostí.

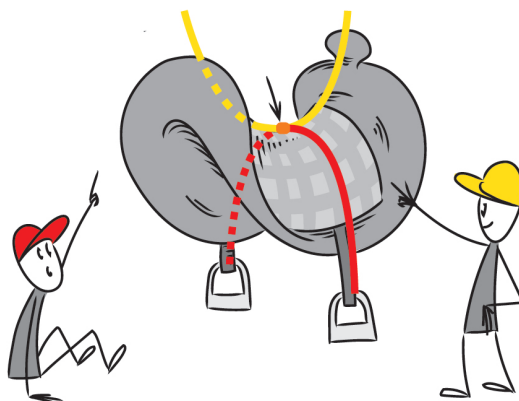
Poznámka

Integrál, k němuž jsme v předchozích úvahách dospěli, byl pojmenován po německém matematikovi Bernhardu Riemannovi jako *Riemannův určitý integrál*. Suma ve vztahu (9) se nazývá *Riemannova integrální suma* funkce f , která pak slouží jako pomocný nástroj pro definici jmenovaného integrálu. Geometrický význam tohoto integrálu spočívá v tom, že za předpokladu, že spojitá funkce $f(t)$ splňuje na uzavřeném intervalu $\langle t_0, t_N \rangle$ podmínku $|f(t)| < K$ (je ohraničená), je Riemannův integrál roven obsahu plochy omezené funkcí $f(t)$ a intervalem $\langle t_0, t_N \rangle$ (v případě, že daná funkce f je na intervalu nezáporná).

2.5 Pojem parciální derivace

Funkce více proměnných jsou přirozeným zobecněním funkcí jedné proměnné a popisované změny závisí většinou na měnícím se čase. Proměnné pak mohou zastupovat například teplotu, polohu či hustotu sledovaného objektu. Tím se dostáváme do problematiky teorie funkcí více proměnných, kdy problém hledání lokálních extrémů má stejný význam jako v případě funkce jedné proměnné - hledáme například čas a polohu, kde daná funkce dosahuje maximálních hodnot hustoty či teploty. Tato část teorie je velmi rozsáhlá a není nutné se této problematice zde podrobněji věnovat. Pro pochopení souvislostí uváděných dále v textu bude potřeba osvojit si pouze schopnost umět derivovat podle příslušných proměnných - derivovat *parciálně*. Geometrický význam derivace zůstává nezměněn, hledáme stále části definičního oboru, kde funkce roste či klesá resp. je konstantní.

Pokusme se problém přiblížit na příkladu představy trojrozměrné (reliéfní) mapy nějaké vybrané krajiny ve tvaru obdélníkového výřezu, kdy jedna hrana obdélníku bude představovat osu x a druhá hrana osu y . Nadmořská výška bude měřena na ose kolmé k rovině dané osami x a y $z = f(x, y)$. Nejnižší místa v údolích představují lokální minima a vrcholky lokální maxima. Postavíme-li se na hranu osy x a na ose y vybereme jeden konkrétní bod, pak vidíme profil sledované krajiny v předem určeném řezu, totéž můžeme provést obráceně a sledovat situaci z hrany osy y . Zjistíme, že vrcholek se nachází v místě, kde vidíme maximální výšku z obou směrů a totožné zjištění zaznamenáváme při určování nejnižších bodů. Jsou to místa, kde jsou obě derivace funkcí buď proměnné x nebo y nulové či v případě ostrých špiček nebo hrotů neexistují. Bohužel zde může nastat situace, která představuje jev, se kterým se v teorii funkce jedné proměnné nesetkáme. Jedná se o bod, který se z jedné strany pohledu jeví jako bod lokálního maxima a z druhé strany jako bod lokálního minima. Tento bod se nazývá *sedlovým bodem* (opravdu připomíná sedlo viz obr. 5) a má jistý význam v oblasti matematiky vztahující se například k optimalizačním procesům.



Obrázek 5: Původ názvu sedlového bodu

Z předchozí poznámky si můžeme odnést tuto zkušenost: derivovat podle vybrané proměnné neznamená nic jiného než vnímat ostatní proměnné jako konstanty a dále používat známá pravidla pro derivování beze změn. Je na místě zavést jednoduchá označení pro parciální derivaci funkce více proměnných. Je-li dána pro jednoduchost funkce dvou proměnných s předpisem $f(x, y)$, pak parciální derivaci funkce $f(x, y)$ dle proměnné x , (díváme se na reliéf krajiny z pohledu osy x), budeme značit f_x a obráceně parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle proměnné y (stojíme na hraně dané osou y) budeme charakterizovat symbolem f_y .

Příklady

$$1. f(x, y) = x^2y^3 - 6xy + 5, 2. f(x, y) = \frac{y \sin x}{1 - xy} \quad 3. f(x, y) = \sqrt{xy - x^3}$$

Řešení

$$1. f_x = 2xy^3 - 6y, f_y = 3y^2x^2 - 6x$$

$$2. f_x = \frac{y \cos x(1 - xy) - y \sin x(-y)}{(1 - xy)^2}, f_y = \frac{\sin x(1 - xy) - y \sin x(-x)}{(1 - xy)^2}$$

$$3. f_x = \frac{y - 3x^2}{2\sqrt{y - 3x^2}}, f_y = \frac{x}{2\sqrt{y - 3x^2}}$$

Shrnutí. V této kapitole jsme zopakovali důležitá témata vztahující se k pojmům posloupnost, konvergence, limita, Lipschitzovská podmínka, derivace, parciální derivace a integrál. Jsou to vesměs témata, se kterými se studenti na středních ale i vysokých školách potýkají často neúspěšně a nechápou některé souvislosti např. limita - derivace. Je třeba zdůraznit, že porozumění těmto pojmů je stěžejní pro pochopení výkladu v navazujících kapitolách. Pro prohloubení znalostí v této oblasti lze doporučit např. publikaci [9].

3 Matematické modelování

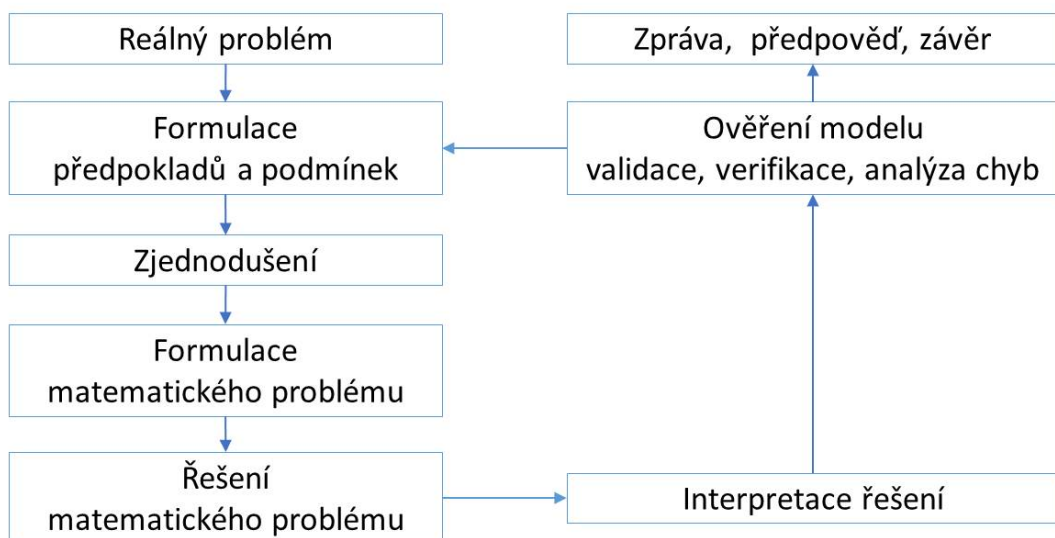
3.1 Vývoj moderního modelování

Rozvoj matematického modelování je neoddělitelně spojen s vývojem matematických věd. Významnou etapou v posunu matematiky se stalo období konce 16. století až do 18. století, kdy byly položeny základy matematické analýzy. Díky práci Newtona, Leibnize, Eulera, Gausse a dalších matematiků se podařilo dosáhnout zásadních výsledků v oblasti analýzy především vybudováním základních pilířů diferenciálního a integrálního počtu. Velkým rozmachem vědy spojeným dále ve 20. století například se jmény A. Einsteina, E. Schrödingera či J. van der Waalse atd. se postupně matematické modelování spojuje s využitím počítačů. Střetávají se různé části matematiky jak navzájem (geometrie, analýza, numerická matematika, algebra, diskrétní matematika), tak hlavně s jinými vědami, jako jsou fyzika, biologie, geologie, chemie a samozřejmě s aplikovanými disciplínami, jako jsou inženýrství různého zaměření nebo ekonomie. Teoretické poznatky postupně nashromážděné lidstvem za několik posledních tisíc let se zúročují v nových moderních disciplínách a s rozmachem vědy nabývají stále většího smyslu a využití. Matematické modelování se stává prostředkem poznání i relativně levnou technologií, pomáhá doplňovat výsledky experimentů nebo nahrazuje experimenty technicky, ekonomicky, či eticky nerealizovatelné v praxi, umožňuje výpočet a výběr optimálního řešení, vytváří predikce nebo naopak pohledy do dávné minulosti, zprostředkuje nebo doplňuje pohledy do nedosažitelných míst Země či dalekého Vesmíru, nebo naopak mikroskopických objektů či živých buněk. Některé významné státy vnímají matematické modelování i jako jeden z prostředků k udržení technologického náskoku pro strategickou obranu části civilizace, [23]. Matematické a numerické modelování je neustále se zdokonalující disciplína, její vývoj nekončí a s přibývajícimi úspěšnými aplikacemi matematického modelování se dále vynořují nové a stále obtížnější výzvy. Zárodky numerické matematiky lze sice najít již před nástupem éry počítačů, která tento obor posunula na dříve nepředstavitelnou úroveň, ale řešení nových problémů s sebou současně přineslo další otazníky například v podobě řešení nelineárních úloh. Kromě toho se numerická matematika vrací i k úlohám již vyřešeným a hledá cesty, jak je řešit rychleji, efektivněji, a tedy i levněji. Vylepšování modelů je nezbytné, ale je třeba počítat s tím, že nemusí vést ke spolehlivě správným výsledkům.

3.2 Charakteristika modelů

V reálném světě se prostřednictvím různých médií denně setkáváme s mnoha modely v různých oblastech lidské činnosti. Modely lze rozdělit do dvou skupin podle toho, zda zahrnujeme do modelu náhodné veličiny na deterministické a stochastické modely. Podle povahy problému se modely používají individuálně nebo v kombinacích. Dále lze tyto skupiny rozdělit dle vztahu k průběhu času na dynamické a statické nebo podle spojitosti na spojitě či diskrétní. Pro řešení známých problémů lze použít tzv. standardní modely, pro řešení zcela nových problémů je nutné zkonstruovat nové modely. Je možné rozlišit dva způsoby odvození řešení z modelu - analytické řešení, které je založeno na určení přesného řešení pomocí analytických matematických metod (řešení soustav rovnic) a numerické řešení, které se využívá při řešení modelů, u nichž nelze řešit problém analyticky, nebo v případech, kdy je analytické řešení složité (simulace na počítači). Při vytváření matematického modelu je třeba postupovat tak, aby model

opravdu kopíroval reálnou situaci a aby bylo možné v určitých fázích modelovacího procesu kontrolovat dosažené výsledky eventuálně mít možnost model upravit nebo zvolit jinou cestu. Současně je nutné mít v každé fázi procesu možnost odhadnout chyby, které se použitím modelu dopouštíme. Z toho vyplývá nutnost zabývat se takovými otázkami, jako je odhad chyby, podmíněnost úlohy či stabilita algoritmu. Navíc v souvislosti s matematickým modelováním dochází při vytváření matematického modelu i při jeho řešení k celé řadě dalších nepřesností. Jejich zdrojem mohou být i chyby, kterých se můžeme dopustit při měření dat. Matematický model je zjednodušením již zjednodušeného fyzikálního modelu a neodpovídá přesně realitě. Vzájemné srovnání reality a výsledného modelu může být také velmi netriviální záležitostí. Současně je třeba vzít v úvahu chyby vzniklé při zpracování úlohy na počítači. Dalším zdrojem kumulování chyb může být fakt, že úloha je špatně podmíněná a algoritmus je nestabilní. Řada zmiňovaných pojmů (podmíněnost, stabilita, počítačová aritmetika, validace či verifikace) není běžně součástí středoškolské matematiky a přitom jsou tyto pojmy zcela zásadní pro pochopení mnoha souvislostí při studiu přírodních nebo technických věd. Některých otázek se lehce dotkneme v 8. kapitole. Na obr. 6 jsou stručně popsány kroky, které mohou přispět k dosažení zdárného výsledku při vytváření modelu.



Obrázek 6: Diagram matematického modelování

4 Modelování a chaos

Matematické modelování proniklo do různých oborů technických, přírodních, ekonomických i sociálních věd a stalo se důležitým nástrojem při simulování systémů a analýzách a předvídání různých procesů či stavů společenstev. Významnou roli sehrál v minulém století v této oblasti rozvoj předpovídání počasí. Jedním z prvních zakladatelů numerického modelování předpovědi počasí byl Lewis Fry Richardson, který v roce 1922 sestavil první numerickou předpověď počasí. O další vývoj se velkou měrou zasloužil americký matematik a meteorolog Edward Lorenz. Lorenz dokázal, že chování složitých nelineárních dynamických systémů je silně závislé na vstupních podmínkách. V jeho výzkumu sehrála velkou roli náhoda. Lorenz chtěl opět využít jeden ze svých meteorologických modelů, ale použil počáteční hodnoty s menší přesností než poprvé – namísto zaokrouhlení na šest desetinných míst zadal stejné číslo zaokrouhlené pouze na tři desetinná místa. Tato zdánlivě malá zanedbatelná změna vstupních údajů zásadně změnila chování celku. Tento jev, kdy malé změny ve vstupních parametrech mohou způsobit velké rozdíly v konečném důsledku, dostal název *efekt motýlích křídel*, protože bývá přirovnáván k mávnutí křídel motýla, který může tímto činem vyvolat hurikán tisíce kilometrů od něj. Vnesl tak nový impuls do zkoumání teorie chaosu, která je mnohými považována za mimořádně perspektivní oblast matematiky a fyziky. Teorie chaosu doplněná Lorenzovými poznatky mimo jiné také naznačuje jeden z důvodů, proč dlouhodobé prognózy různých jevů vypracované specialisty za pomoci nejmodernější techniky často nedávají výrazně kvalitnější výsledky než intuitivní odhady přemýšlivých amatérů. Efekt motýlích křídel a teorie chaosu tak v mnohém svým významem připomínají převratný Einsteinův přínos v podobě teorie relativity.

4.1 Příklady jednoduchých modelů

Hlavní cíl této části práce směřuje k jednoduchému popisu základních pojmů teorie chaosu v dynamických systémech s podporou grafického prostředí. Jeden z podnětů k sepsání této části je postupné zjišťování faktu, že studenti jak středních, tak vysokých škol mají stále větší problém „číst z grafu“ a vůbec chápat spojení grafu s reálnou situací. Vybrali jsme tedy záměrně téma, které se běžně v osnovách škol neobjevuje a mohlo by být pro studenty zajímavé. Budeme se snažit na základě výběru vhodné posloupnosti grafů funkcí a pomocí jednoduchých úvah samostatně dopracovat k definicím základních pojmů a jednoduchým závěrům v úvodu do teorie chaosu v dynamických systémech. S pomocí vhodného matematického modelu lze dospět k formulacím jednoduchých úloh, k jejichž řešení není třeba budovat složitou teorii a postačí vycházet ze základů středoškolské matematiky. S pomocí vybraných modelů lze poukázat na některé důležité souvislosti, se kterými se studenti v hodinách matematiky na střední škole nasetkají a mohou si tak rozšířit své matematické znalosti.

K odvození základních pojmů teorie chaosu by mohla posloužit analýza vhodného matematického modelu. V úvodu se proto pro názornost zaměříme na jednoduché populační modely [1].

Model 1

Laboratorními testy bylo zjištěno, že množství bakterií téhož druhu se za stejných podmínek v průběhu jedné hodiny zdvojnásobí. Tuto závislost můžeme popsat pomocí funkce $f(x)$ následovně

$$f(x) = 2x,$$

kde x představuje počet bakterií a nahradit ji *iteračním modelem* - opakujícím se procesem ve tvaru

$$x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n,$$

kde $n = 1, \dots$, přičemž n -tá iterace (přiblížení) x_n představuje počet bakterií v čase n a x_1 je počáteční množství bakterií. Tedy celkové množství bakterií za dvě časové jednotky je dáno hodnotou $f(f(x_1)) = f(x_2) = x_3$ a jedná se zde o skládání totožných funkcí. Tento model by zřejmě nebylo možné uplatnit na lidskou populaci vzhledem k faktům, že na její vývoj má vliv mnoho faktorů a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty.$$

Poznámka

Na tomto místě by bylo vhodné zmínit se o přínosu anglického ekonoma Thomase Roberta Malthuse, významného představitele klasické školy politické ekonomie. Svým dílem reagoval na měnící se sociální a demografické poměry v Anglii přelomu 18. a 19. století, které se pokoušel vysvětlit pomocí vlastní populační teorie, jíž polemizoval s tehdy převažujícími osvícenskými představami o blížící se zlaté době lidstva. Byl přesvědčen, že samotné zákony přírody zabrání lidstvu dosáhnout stavu dokonalé společnosti a že je nevyhnutelné, aby součástí společnosti byly vrstvy obyvatelstva trvale žijícího na pokraji chudoby.

Použijeme-li místo předchozího modelu následující upravený model, pak bude možné popsat realitu „výstižněji“.

Model 2

Definujme funkci $g(x)$ následovně

$$g(x) = 2x(1 - x),$$

kde počet obyvatelstva x je zadán v milionech, tedy hodnota $x = 0,01$ odpovídá hodnotě deseti tisícům obyvatel. Pokud je populace nízká, je faktor $(1 - x)$ blízký jedné a tím se model přibližuje Modelu 1. Je-li populace vysoká, pak je hodnota $g(x)$ dána součinem $2x$ a zbytkového množství $(1 - x)$. Porovnáním obou modelů pro počáteční hodnotu $x = 0,01$, kdy čas měříme v letech, zjistíme zajímavý výsledek. Po dvanácti letech by podle Modelu 1 dosahovala populace počtu $f^{12}(0,01) \doteq 4096 \cdot 10^9$ a dle Modelu 2 získáme $g^{12}(0,01) \doteq 0,5 \doteq g^{13}(0,01) \doteq g^{14}(0,01)$ atd. Výpočtu každé hodnoty funkce f nebo g budeme říkat *iterace*. Snadno zaznaménáme, že pokud zvolíme libovolný počáteční stav $x \in (0, 1)$, pak se vždy po určitém počtu

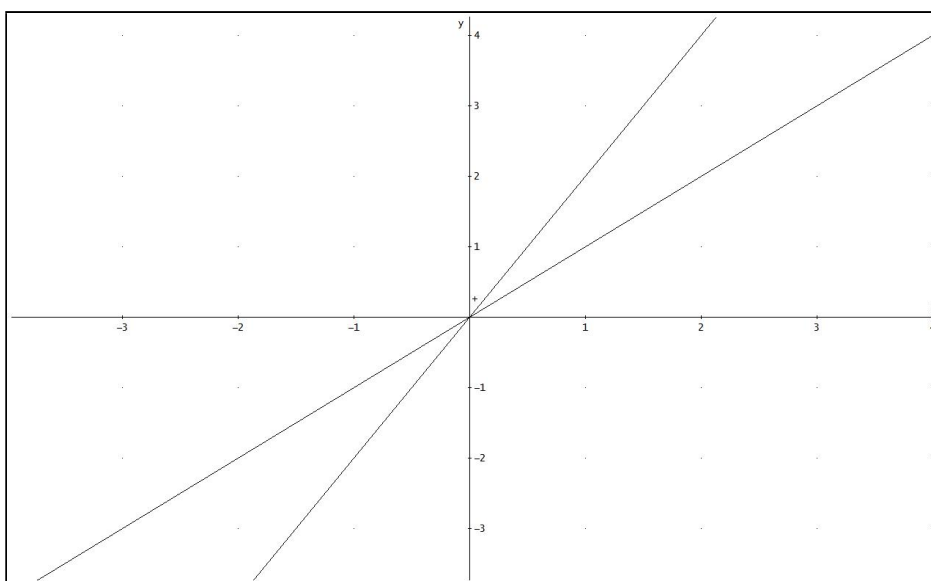
iterací dostaneme k bodu $x = 0,5$ s jistou přesností. Tento bod budeme nazývat *pevným bodem* funkce f a budeme jej označovat x^* . Pevný bod má v reálné praxi určitě svůj význam, protože jedním z cílů zkoumaného modelu bude otázka, zda a kdy se vývoj studovaného systému ustálí [1].

4.2 Základní vlastnosti

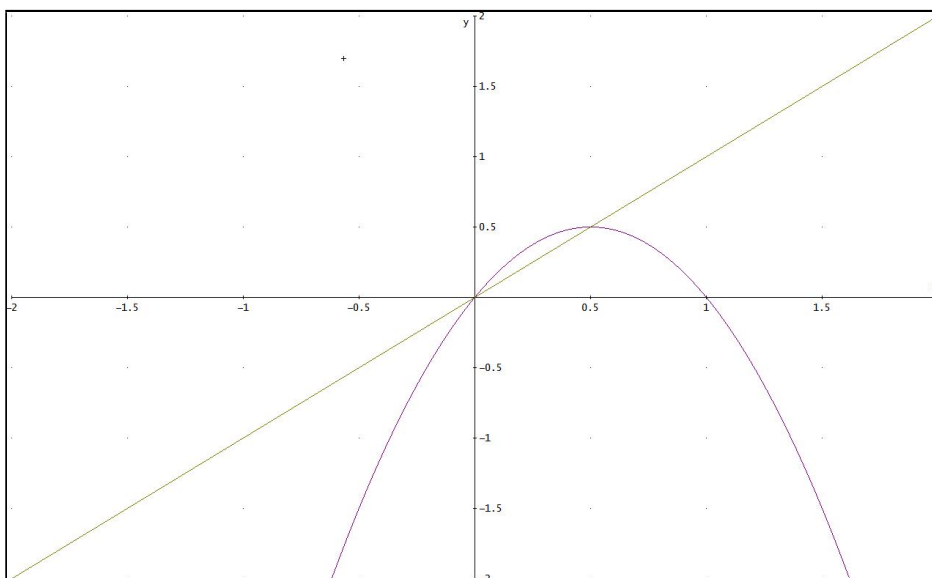
Hledání pevného bodu funkce $f(x) = 2x$ a $g(x) = 2x(x - 1)$ představuje řešení rovnic

$$x = 2x \quad \text{a} \quad x = 2x(x - 1). \quad (10)$$

Znázorníme si tento proces graficky viz obr. 7 a obr. 8.

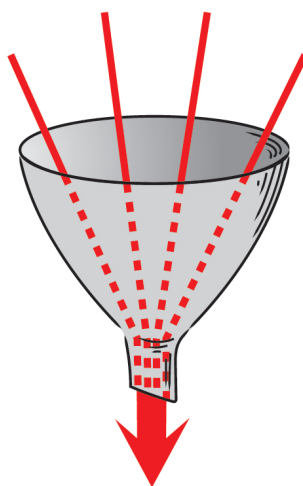


Obrázek 7: $2x = x$

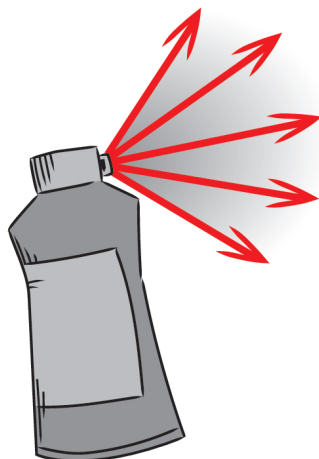


Obrázek 8: $2x(1 - x) = x$

Na obr. 7 je jediným průsečíkem funkce $f(x)$ a $y = x$ bod s x -ovou souřadnicí $x = 0$. Všechny body získané iteračním procesem $x_{n+1} = 2x_n$ se od tohoto průsečíku budou vzdalovat, můžeme tedy použít přirovnání, že jsou bodem s $x = 0$ odpuzovány. Na obr. 8 vidíme dva průsečíky obou grafů a to v bodech s x -ovou souřadnicí $x = 0$ a $x = 0.5$. Oba dva body jsou body pevnými, ale liší se podstatně jedinou vlastností. Jakoukoliv volbou počáteční iterace $x \in (0, 1)$ se další body získané iteračním procesem přibližují (jsou „přitahovány“) k bodu $x = 0.5$ a od bodu $x = 0$ jsou „odpuzovány“. Bude tedy nutné odlišovat *pevný bod přitahující* a *pevný bod odpuzující*, názorně viz obr. 9 a obr. 10.



Obrázek 9: Představa přitahujícího místa



Obrázek 10: Představa odpuzujícího místa

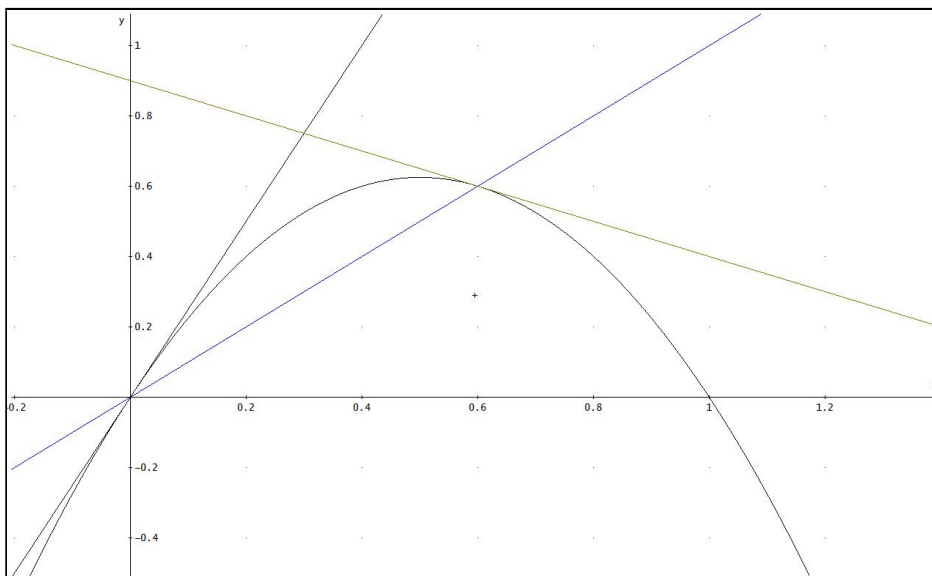
Jaké musí mít vlastnosti daná funkce, aby pevný bod byl přitahujícím či odpuzujícím bodem? S pomocí následujícího grafu lze poměrně snadno uhádnout odpověď. Pokud tečna sestavená ke grafu funkce v každém bodě iterace má směrnici menší než má přímka $y = x$ neboli

$$|g'(x)| < 1, \quad (11)$$

pak platí

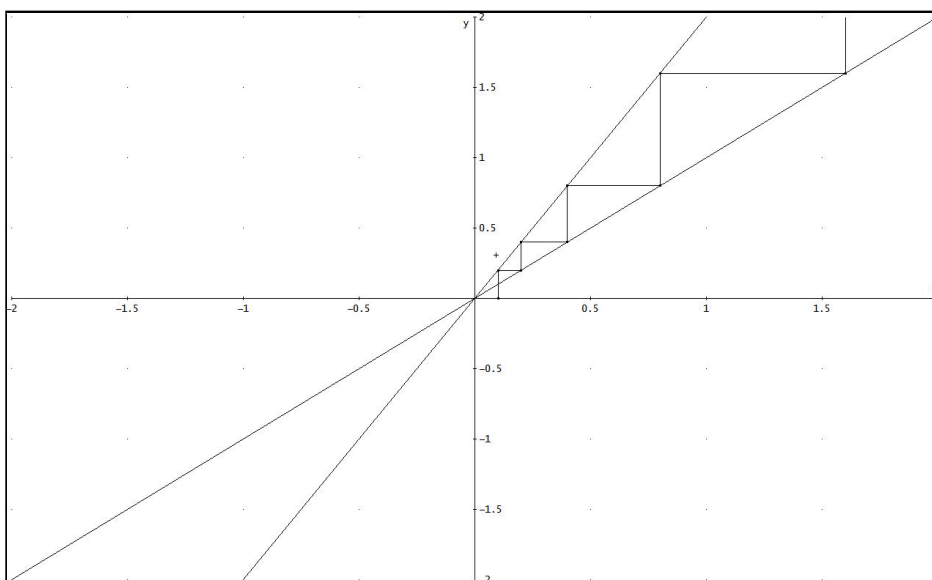
$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = x^*,$$

kde x_1 je vhodně zvoleno. Výběru počátečního přiblížení se budeme věnovat podrobněji v následujícím textu. Je-li splněna podmínka (11), pak bude pevný bod funkce $g(x)$ přitahujícím bodem, v opačném případě se bude jednat o pevný bod odpuzující viz obr. 11.

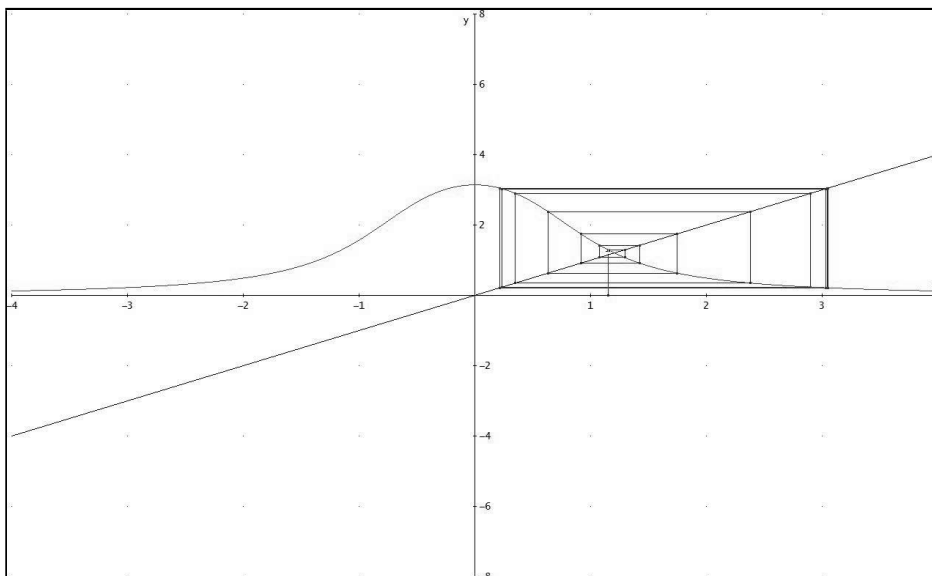


Obrázek 11: $|g'(x)| < 1$

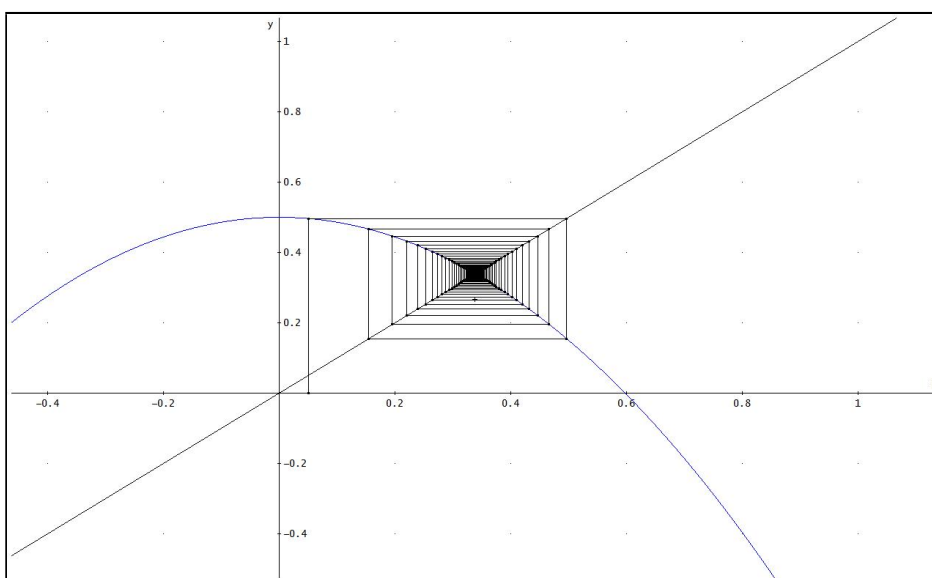
Posloupnost iterací $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ zkonstruovanou procesem $x_{n+1} = f(x_n)$ pro $n = 1, \dots$ budeme nazývat *orbitou* (příslušnou k funkci $f(x)$ a bodu x_1). Pro přehledné znázornění orbity můžeme použít lineární lomenou čáru spojující body $[x_1, 0]$, $[x_1, f(x_1)]$ a $[f(x_1), f(x_2)]$ atd. Pak jsou z grafu velmi snadno rozpoznatelné oba případy a to orbita s odpuzujícím pevným bodem viz obr. 12 a obr. 13 a přitahujícím pevným bodem viz obr. 14 a obr. 15.



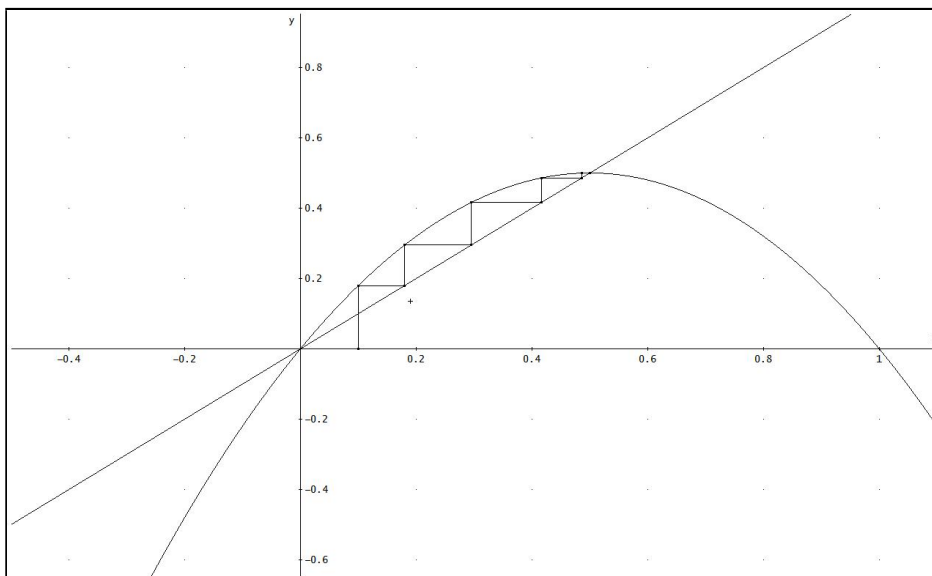
Obrázek 12: Odpuzující pevný bod



Obrázek 13: Odpuzující pevný bod

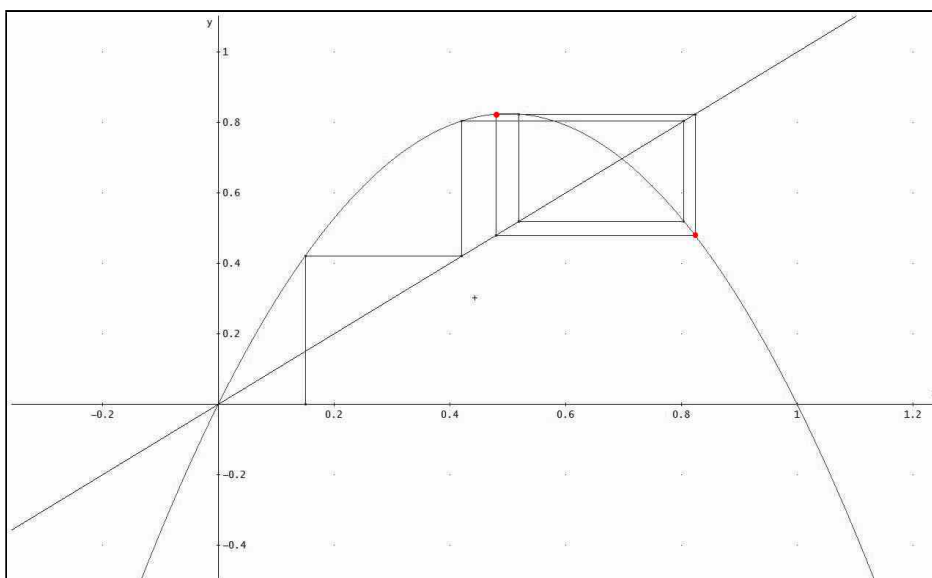


Obrázek 14: Přitahující pevný bod

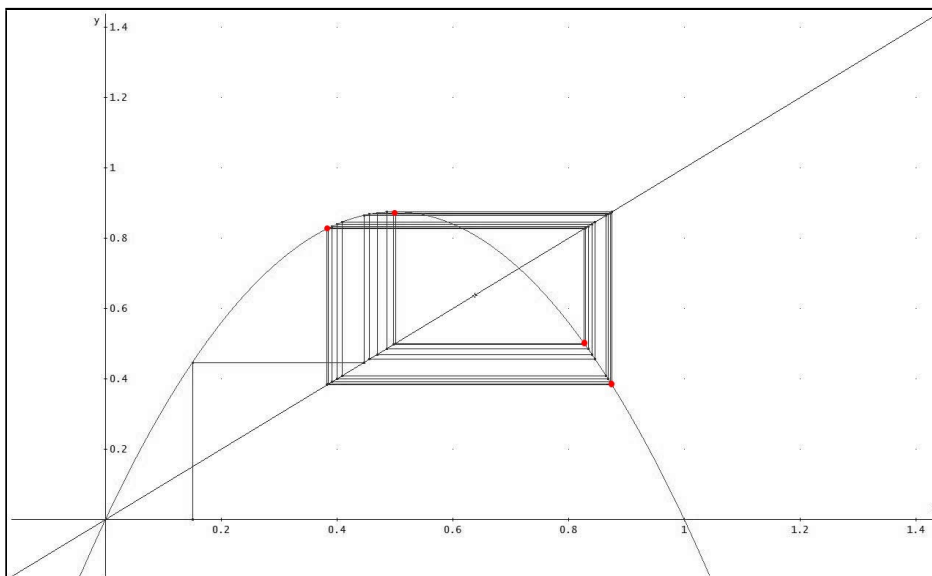


Obrázek 15: Přitahující pevný bod

Na následujících obrázcích je znázorněna situace, kdy se body orbity periodicky opakují, v případě obr. 16 se jedná o tzv. 2-periodickou přitahující orbitu funkce $f(x) = 3.3x(1 - x)$, kde $f(p_1) = p_2$, $f(p_2) = p_1$ a obr. 17 ukazuje 4-periodickou přitahující orbitu funkce $g(x) = 3.5x(1 - x)$, kde $g(p_1) = p_2$, $g(p_2) = p_3$, $g(p_3) = p_4$ a $g(p_4) = p_1$. Opakující se body příslušných orbit jsou označeny červenou barvou. Oba případy zastupují přitahující orbity a naznačují „ustálení stavu“.



Obrázek 16: $f(x) = 3.3x(1 - x)$



Obrázek 17: $f(x) = 3.5x(1 - x)$

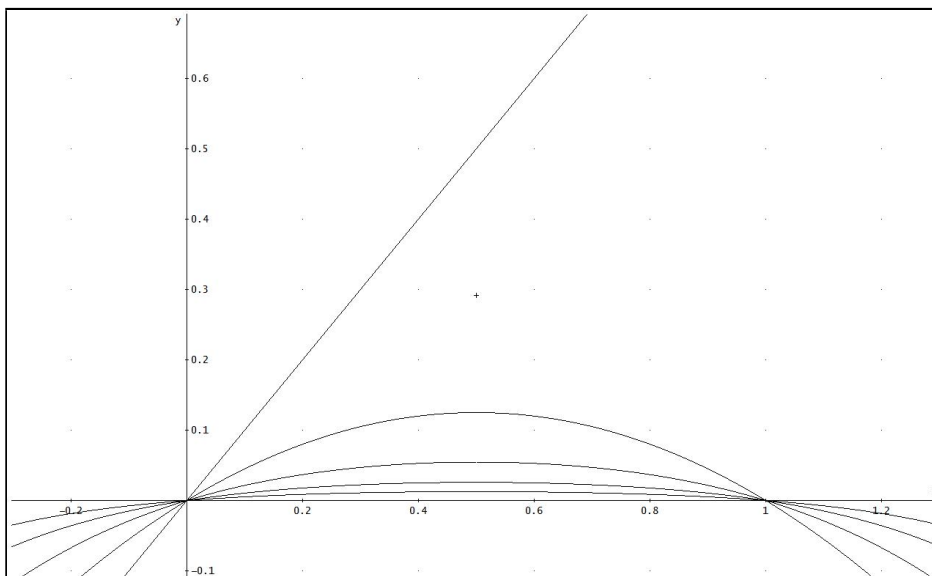
Následující grafy ukazují, že každá iterace $x_{n+1} = f(x_n)$ představuje ve skutečnosti opakované skládání funkce $f(x)$:

$$f(x_1) = x_2, f(f(x_1)) = x_3, \dots, f^n(x_1) = x_{n+1}.$$

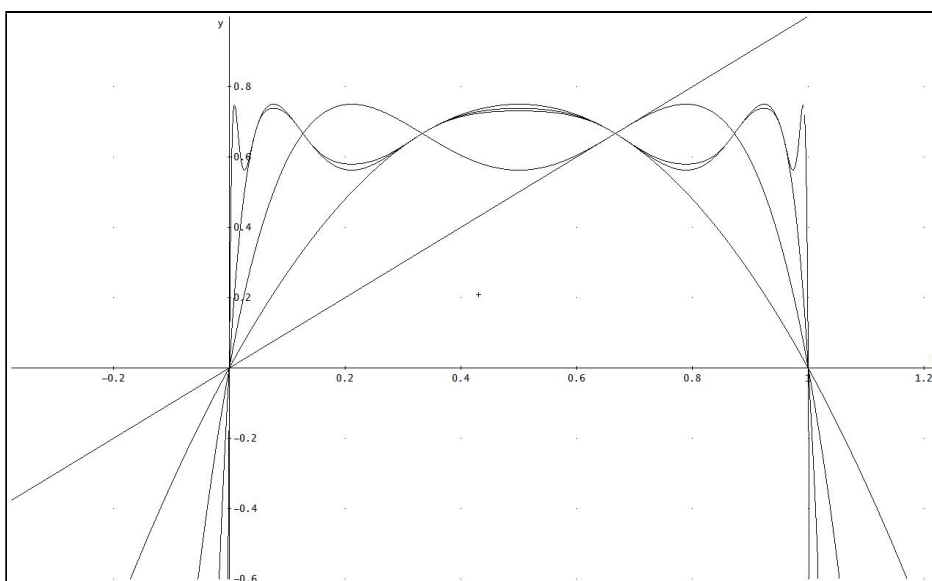
Jinak řečeno pevný bod funkce $f^{n-1}(x)$ je pevným bodem funkce $f^n(x)$. Na obr. 18, 19, 20 a 21 je postupně znázorněno opakované složení funkcí $0.5x(1 - x)$, $3x(1 - x)$, $3.3x(1 - x)$ a $4x(1 - x)$. Například v posledním uvedeném případě má první složení předpis funkce ve tvaru

$$f(f(x)) = 4[4x(1 - x)][1 - 4x(1 - x)] = -64x^4 + 128x^3 - 48x^2 + 16x.$$

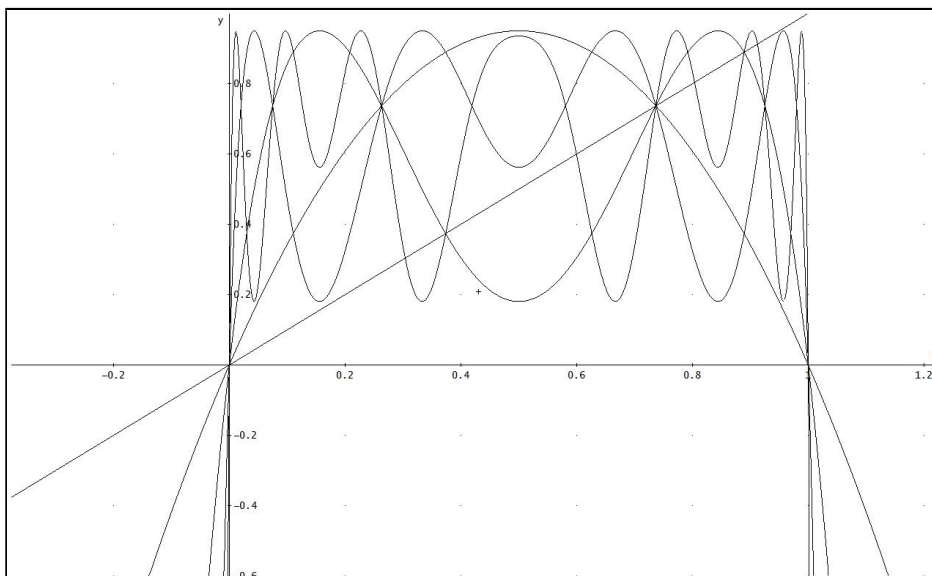
Je patrné, jak se postupně situace komplikuje a objevují se další pevné body v závislosti na hodnotě konstanty a v předpisu funkce $f(x) = ax(1 - x)$. Na obr. 18 a 19 je stav „ustálený“ a v případě obr. 20 a 21 je již velice nepřehledný.



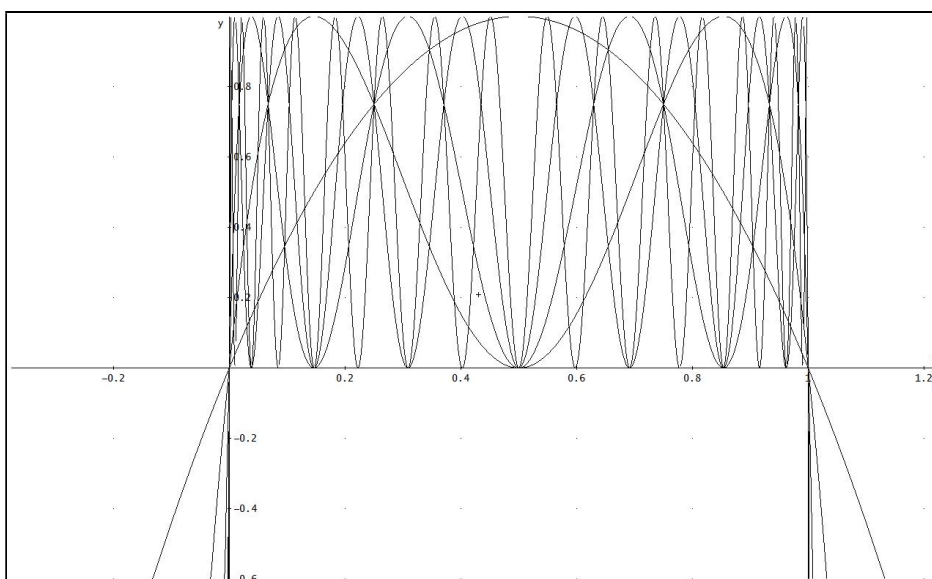
Obrázek 18: $f(x) = 0.5x(1 - x)$



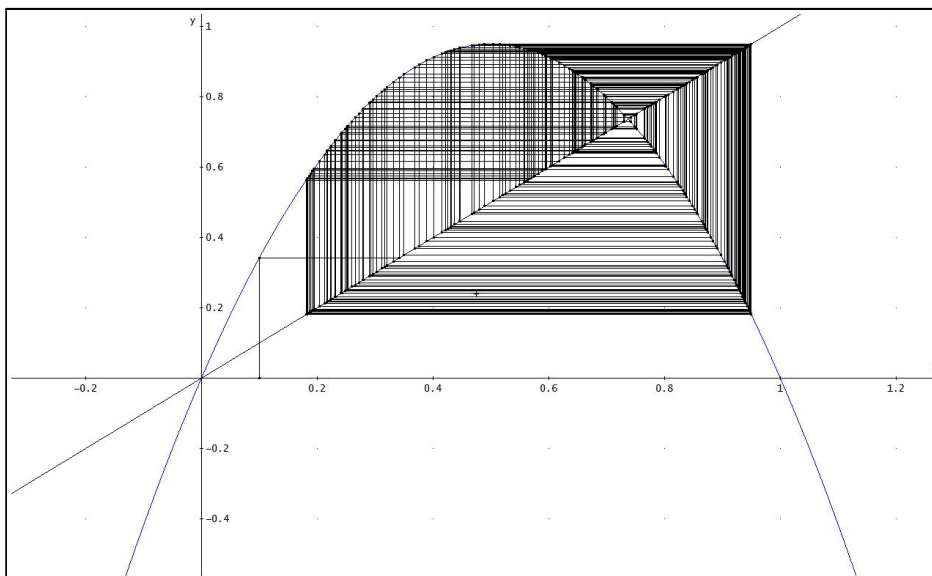
Obrázek 19: $f(x) = 3x(1 - x)$



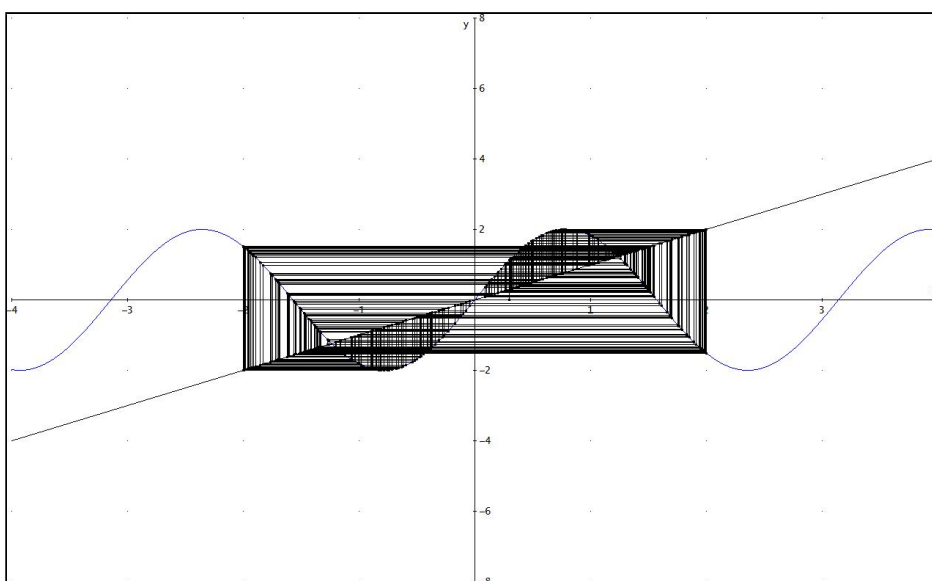
Obrázek 20: $f(x) = 3.3x(1 - x)$



Obrázek 21: $f(x) = 4x(1 - x)$



Obrázek 22: $f(x) = 4x(1 - x)$



Obrázek 23: $f(x) = \sin x$

Obrázky 22 a 23 znázorňují nekonečnou omezenou orbitu funkce. Zřejmě zde funkce nemá žádný přitahující pevný bod ani přitahující periodickou orbitu. Z vlastnosti derivace složené funkce pak pro každou k -periodickou orbitu $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ platí

$$f^{(k)}(p_1) = f'(p_1) f'(p_2) \dots f'(p_k), \quad (12)$$

kde $f^{(k)}$ označuje k -tou derivaci funkce f . Pak na základě zobecnění vlastnosti (11) můžeme vyslovit hypotézu, že pokud je splněna podmínka

$$|f'(p_1)| |f'(p_2)| \dots |f'(p_k)| < 1, \quad (13)$$

pak bude k -periodická orbita $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ přitahující orbitou. Je-li možno dokázat, že prvky omezené orbity nekonvergují v nekonečno k nějaké k -periodické přitahující orbitě, pak odtud již vede jen několik kroků k formulaci definice pojmu *chaos* (z řečtiny neuspořádanost, zmatek).

4.3 Co je to chaos?

Uvažujme diskrétní dynamický systém popsany pomocí vztahu

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

pro $n = 1, \dots$, kde funkce $f(x)$ je nelineární funkce. Předpoklad nelinearity je podstatný, protože v případě, kdy je funkce lineární tj. platí $kf(x) = f(kx)$ pro nenulovou reálnou konstantu k a $f(x+y) = f(x) + f(y)$, jsou systémy konečné dimenze poměrně detailně popsány a posloupnost získaná předpisem $x_{n+1} = f(x_n)$ nevykazuje chaotické chování. Hlavním rysem systémů, které mají chaotický charakter, je velká citlivost na počáteční podmínky. Zvolíme-li dva velmi blízké body, které budou reprezentovat počáteční podmínky systému, pak pokud se tyto dva body budou od sebe při daném procesu výrazně (exponenciálně) vzdalovat, nebude možné budoucí stav systému žádným způsobem předpovědět.

Zvolme dva body x_1 a $x_1 + \Delta x_1$ tak, aby byly velmi blízko od sebe. Pak lze vzdálenost těchto bodů po jedné iteraci vyjádřit následovně

$$\Delta x_2 = f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1) \approx \Delta x_1 f'(x_1).$$

Aproximace hodnoty $\ln |f'(x_1)|$ označená symbolem λ_1 byla nazvána lokálním *Ljapunovovým exponentem* (příslušným k funkci f a bodu x_1). Jeho hodnota představuje míru rozpínání systému v bodě x_1 - bude-li jeho hodnota záporná, pak se budou body po iteraci přibližovat, v případě kladné hodnoty se budou rozbíhat. Globální *Ljapunovův exponent* pak lze definovat jako střední hodnotu lokálních exponentů pro dostatečně velký počet iterací ve tvaru

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1/k) (\ln |f'(x_1)| + \ln |f'(x_2)| + \dots + \ln |f'(x_k)|).$$

Jinými slovy: Globální Ljapunovův exponent je reálné číslo charakterizující průměrnou změnu vývoje celého systému. Ljapunovův exponent je tak velmi užitečný nástroj k odlišení nestabilního, chaotického chování systému od chování, které je stabilní a předpověditelné. Jestliže je hodnota Ljapunovova exponentu záporná, potom je chování systému stabilní. Čím je hodnota Ljapunovova exponentu větší kladné číslo, tím citlivější je závislost na daných počátečních podmínkách (souvisí se znaménkem hodnoty logaritmu v intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$, vztahem (13) a definicí Ljapunovova exponentu).

Další důležitá nedílná vlastnost chaotického systému spočívá v tom, aby se při generování množiny bodů $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ zkonstruovanou procesem $x_{n+1} = f(x_n)$ pro $n = 1, \dots$ nestalo

to, že se tato posloupnost bodů dostane do stavu, kdy se jistá konečná podmnožina bodů při zobrazení „zacyklí“ (bude možné vysledovat jistou pravidelnost - existenci přitahující orbity). Tedy chaotický systém musí mít alespoň jeden Ljapunovův exponent kladný.

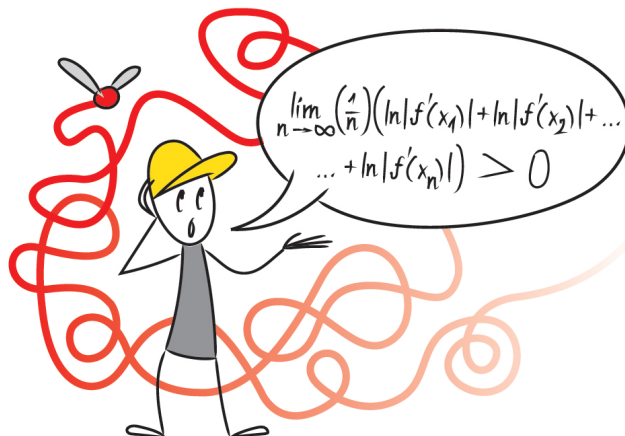
Na základě předchozích úvah pak má smysl vyslovit následující definici (viz [1]).

Definice: Nechť $f(x)$ je reálná funkce a nechť $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ je omezená orbita funkce $f(x)$. Pak orbita $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ je *chaotická*, jestliže není konvergentní k žádné periodické orbitě příslušné funkci $f(x)$ a bodu x_1 pro $k \rightarrow \infty$ a platí

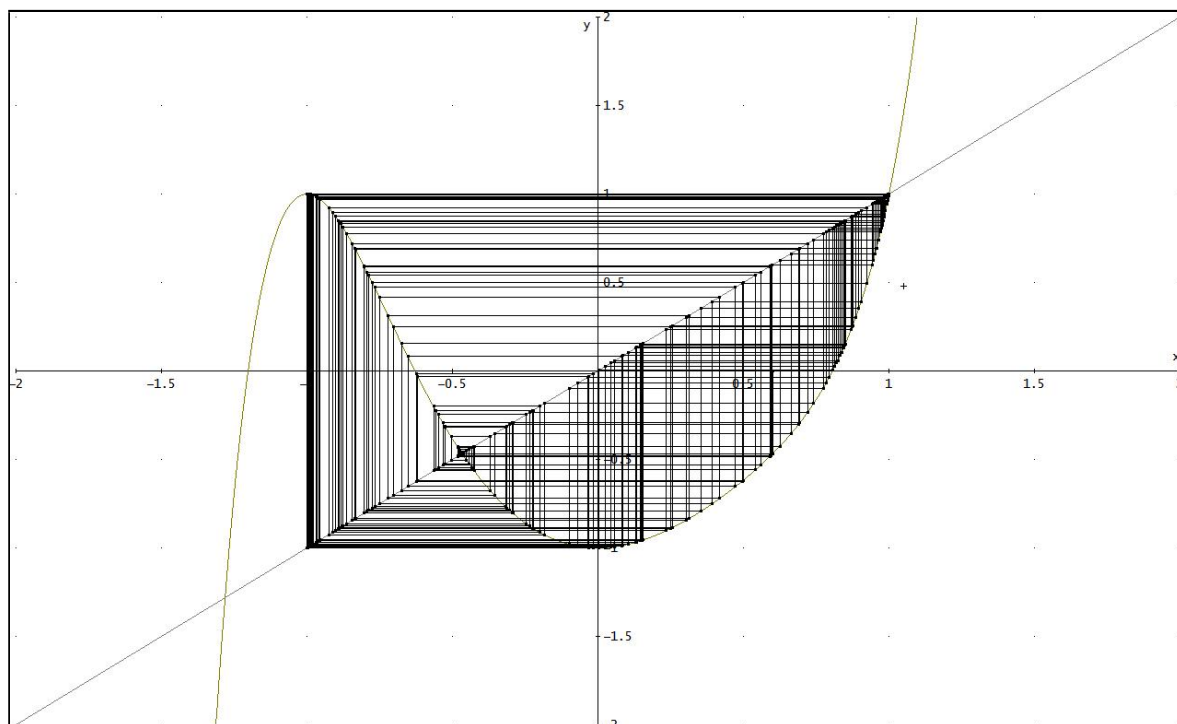
$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1/k)(\ln|f'(x_1)| + \ln|f'(x_2)| + \dots + \ln|f'(x_k)|) > 0, \quad (14)$$

pokud uvedená limita existuje [1].

Představa pojmu chaos již tedy začíná nabírat zřetelnějších obrysů viz obr. 24 a obr. 25.



Obrázek 24: Toto je chaos

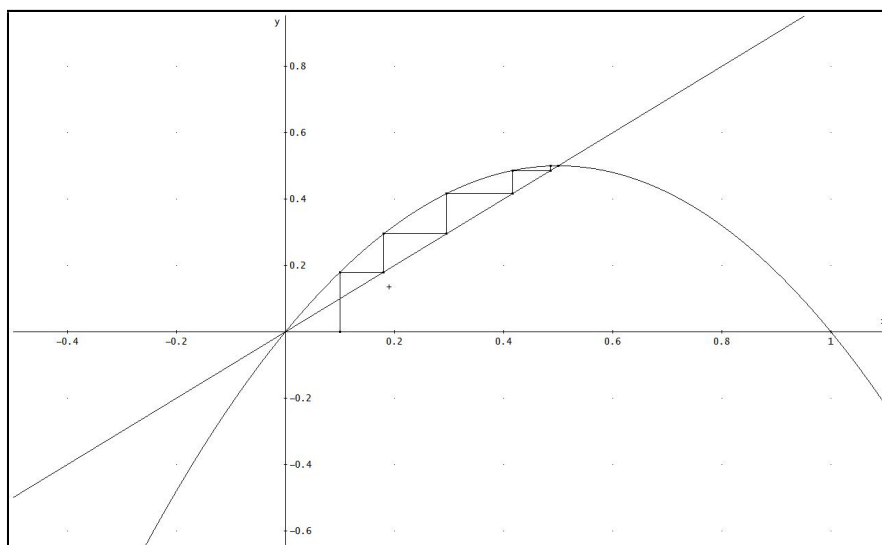


Obrázek 25: Chaos jinak

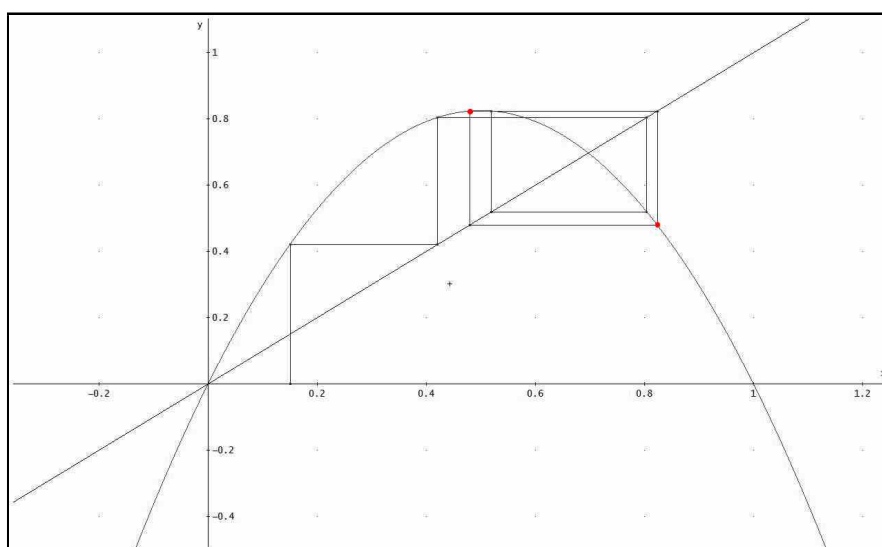
4.4 Bifurkační diagram

Termínem bifurkace se označuje jev, při kterém dochází k výrazným změnám vnitřního stavu sledovaného systému v situaci, kdy se nepatrně změní vstupní parametry. U některých systémů k bifurkacím nedochází, protože se s postupným zvyšováním či snižováním hodnot vstupních parametrů (například teploty při chemických reakcích) systém mění pouze nevýznamně. Existují však systémy, u nichž po docílení jistých - kritických hodnot vstupních dat dochází k prudké změně vnitřního stavu. Může se například jednat o náhlý vznik turbulence v potrubí při dosažení určité rychlosti proudění kapaliny, o fázový přechod látky při změně teploty atd. Jedná se tedy o rozdělení stavu neboli nestabilitu systému, kdy jedna situace má dvě vzdalující se řešení.

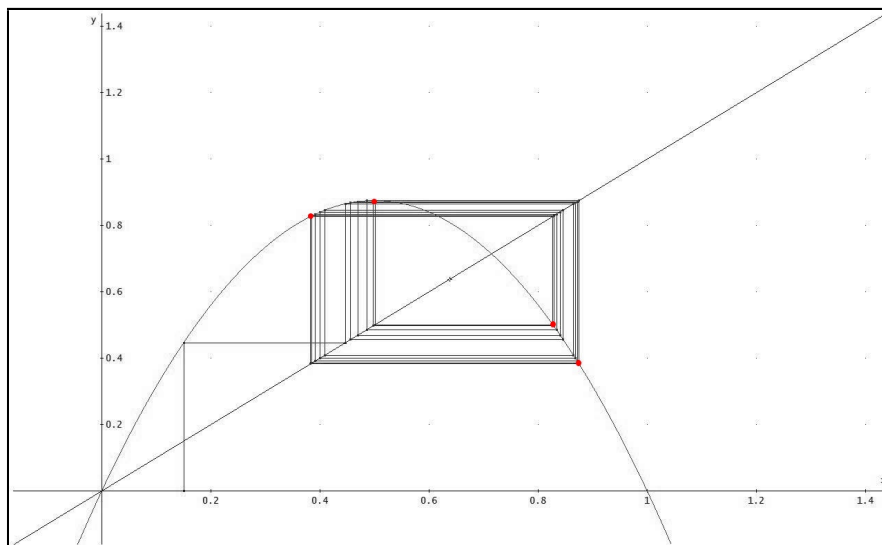
Demonstrujme popsany jev pomocí jednoduchého příkladu. Uvažujme nyní opět funkci ve tvaru $f(x) = ax(1 - x)$, kde a je prvkem intervalu $\langle 1, 4 \rangle$. Budeme postupně měnit hodnoty parametru a a znázorňovat všechny pevné body funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ pro měnící se hodnoty parametru a . Graf, který znázorňuje všechny pevné body, se nazývá *bifurkačním diagramem* (viz [1]). Z tohoto diagramu lze velmi přehledně sledovat, pro které hodnoty parametru a je stav ustálený či chaotický, kde má funkce periodické orbity a kde je pevný bod jediný. Situace znázorněná na obr. 26, 27, 28 a 29 odpovídá informacím, které pak zřetelně vyčteme z bifurkačního diagramu viz obr. 30.



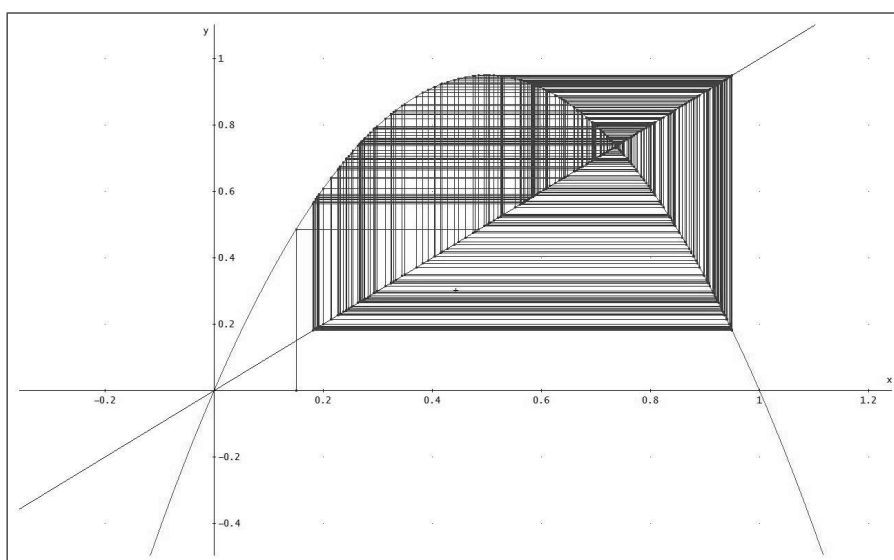
Obrázek 26: $f(x) = 2x(1 - x)$



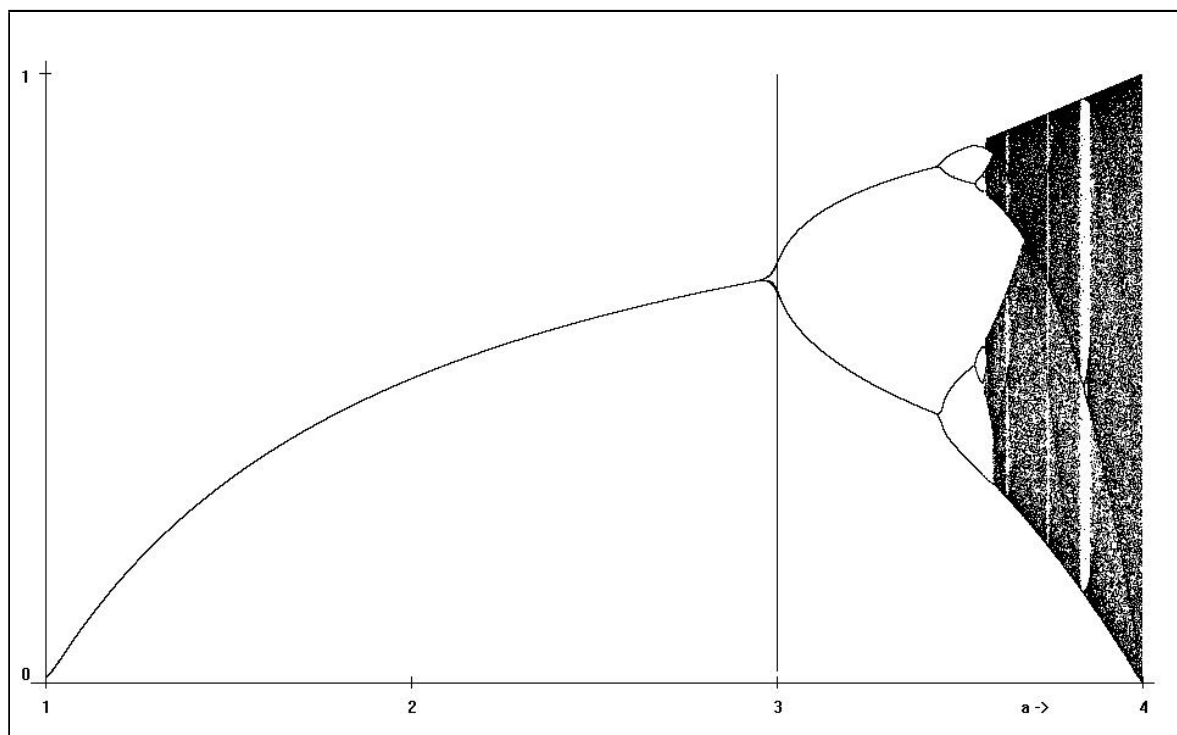
Obrázek 27: $f(x) = 3.3x(1 - x)$



Obrázek 28: $f(x) = 3.5x(1 - x)$



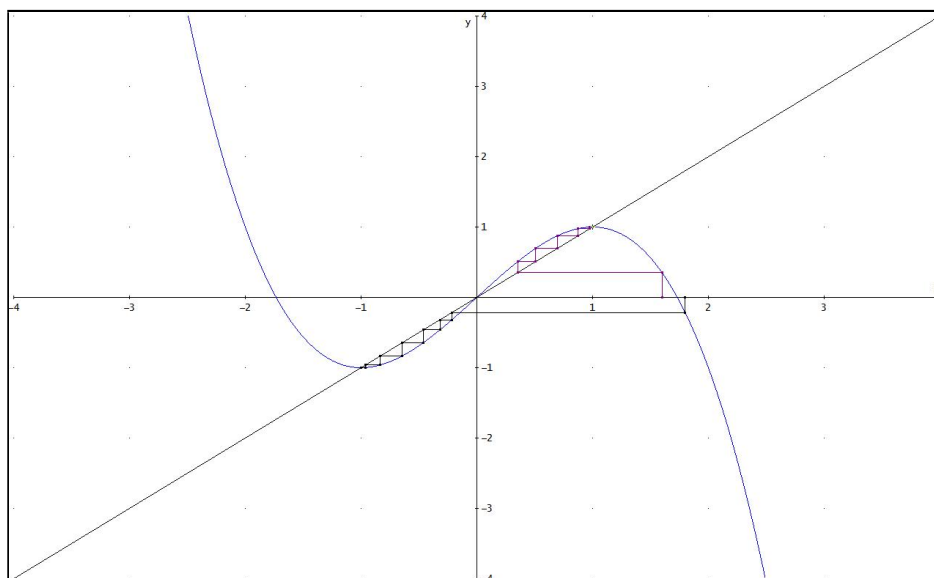
Obrázek 29: $f(x) = 3.8x(1 - x)$



Obrázek 30: Bifurkační diagram

Název bifurkačního diagramu je odvozen z anglického slova „bifurcation“, což v překladu znamená rozdvojení a z obr. 30 je zřejmé proč. Levá část diagramu odpovídající hodnotám a z intervalu $(1,3)$ viz obr. 26 a představuje ustálený stav systému, po prvním rozdvojení se pak systém pohybuje mezi dvěma stavy viz. obr. 27, dále následuje interval, ve kterém má funkce 4-periodickou orbitu viz. obr. 28. V pravé části diagramu se střídají úseky chaosu a k -periodických stavů. „Bílé“ oblasti bývají nazývány *okny bifurkace* [1].

V celém textu jsme se záměrně vyhýbali problematice volby počáteční iterace, její analýza by vyžadovala mnohem větší prostor, informace k této otázce lze nalézt například v [1]. Na posledním zařazeném obrázku obr. 31 je patrné, jak je volba počátečního bodu důležitá. Při dvou různých volbách bodu x_1 má funkce jiný pevný přitahující bod. Navíc může dojít k případu, kdy počáteční přiblížení zadáme s malou přesností, což může mít za následek to, že výsledkem daného iteračního procesu bude chybné řešení. Tento problém souvisí s jevem popisovaným v úvodu této kapitoly, kdy se během řešení praktických úloh při zanedbatelné změně vstupních dat obdrží obrovské chyby ve výsledcích. Takové úlohy nazýváme špatně podmíněné a jsou velmi problematicky řešitelné, pokud jsou jejich vstupní data zatíženy chybami jako jsou chyby měření, chyby měřících zařízení nebo zaokrouhlovací chyby. Naopak dobře podmíněná úloha je taková úloha, kdy malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení. K tomuto problému se vrátíme v následující kapitole.



Obrázek 31: Volba počátečního bodu

Příklady

Pokuste se pomocí vhodného dosažitelného grafického software dosáhnout obdobných výsledků, které ukazují obr. 26, 27, 28 či 29. Zvolte funkci $g(x) = x$, $f(x) = ax(1 - x)$ a hodnotu parametru a postupně obměňujte. Zvolte vhodně počáteční bod x_1 a počítejte postupně hodnoty bodů $f(x_1) = x_2$, $f(f(x_1)) = x_3$, Body o souřadnicích $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$, $[x_3, f(x_3)]$, ... spojte úsečkami, ve výsledku pak obdržíte lomenou čáru. Tímto způsobem získáte pestrou škálu různých typů orbit.

Shrnutí. V této kapitole jsou zpracována následující témata. Pomocí výběru vhodné posloupnosti grafů funkcí jsme dospěli k formulacím základních pojmů úvodu do teorie chaosu v dynamických systémech. Z grafů je patrné, kdy je pevný bod přitahující a kdy odpuzující, kdy se orbita stává k -periodickou. Znázorněním skládání funkcí jsme přiblížili pojem iterace z jiného úhlu pohledu. V závěru jsme pomocí bifurkačního diagramu ověřili vlastnosti studovaných funkcí. Grafy byly zpracovány pomocí softwaru Derive 6 [18]. Uvedené téma může být vhodné jako motivační téma na cvičeních, kde se studenti seznamují s některým matematickým softwarem. Zařazené příklady jednoduchých populačních modelů mohou být rozšířeny na komplikovanější modely, kdy do děje vstupují další faktory ovlivňující růst populace nebo známé modely např. model dravec - kořist či modely samočištění jezera. Příklady těchto modelů a jejich analýzy lze nalézt například v [14]. Téma chaosu by mohlo být pro studenty přínosným zpestřením vyučování, protože nabízí pohled do zcela nové a moderní části matematiky.

5 Od spojitého problému k diskrétnímu problému

Na problém řešený v předchozí kapitole se můžeme podívat také z jiného úhlu pohledu. V úvodu představíme jednoduchý příklad. Budeme hledat nulové body spojitě funkce $f(x)$, tedy řešit rovnici $f(x) = 0$, ale ne zcela tradičním způsobem. Nechť je dána rovnice například ve tvaru

$$5x - 3 = 0. \quad (15)$$

Vztah (15) přepíšeme následovně

$$5x = 3 \quad (16)$$

a dále bychom mohli prostou algebraickou úpravou rovnicí vyřešit a řešení vyjádřit ve tvaru $x = \frac{3}{5}$ nebo $x = 0,6$. Místo toho ovšem rovnicí (16) uvedeme do tvaru

$$4x + x = 3, \quad (17)$$

odtud

$$x = 3 - 4x. \quad (18)$$

Je zřejmé, že rovnici (16) můžeme podobným způsobem přepsat v nekonečně mnoha podobách obecně do tvaru

$$x = \varphi(x), \quad (19)$$

kde $\varphi(x)$ je nějaká spojitá funkce, například $2x = 3 + 8x$ nebo $x = \frac{1}{4}(3 - x)$. Zvolme x_0 z jistého intervalu (možnost konkrétní volby vysvětlíme později) a položíme $\varphi(x_0) = x_1$. Pokud budeme tento postup opakovat, obdržíme následující proces

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad (20)$$

kde $n = 0, \dots$ je celé číslo a x_0 je vhodně zvolené první počáteční přiblížení, stane se z popisovaného spojitého děje děj diskrétní. Postupným dosazováním vypočítaných hodnot do rekurentního vztahu (20) obdržíme posloupnost reálných čísel $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ (posloupnost iterací - jinak také orbitu příslušnou bodu x_0) a tím se dostáváme k problému zmiňovanému v předchozí kapitole. Převod reálného problému pomocí matematického modelu s využitím iteračního postupu představuje velmi významnou část numerické matematiky, tímto postupem lze řešit celou řadu úloh jmenovitě například soustavy lineárních i nelineárních rovnic. Dalším středem zájmu je pak studium vlastností posloupnosti získané pomocí rekurentních formulí, především zda daná posloupnost vůbec konverguje k hledanému řešení, s jakou přesností a při jaké volbě počátečního přiblížení. V této souvislosti je možné zmínit vlastnosti posloupností jako je například omezenost, monotónie, nezápornost, konvergence či chaotické chování. Studium těchto vlastností je zahrnuto do středoškolských osnov pouze částečně. V předchozí kapitole jsme poukázali na význam možnosti určit chaotické chování posloupnosti dat pro modelování. V této kapitole se pokusíme upozornit na další aspekty při řešení problému (20).

Bude-li platit

$$\varphi(x_{n+1}) = \varphi(x_n), \quad (21)$$

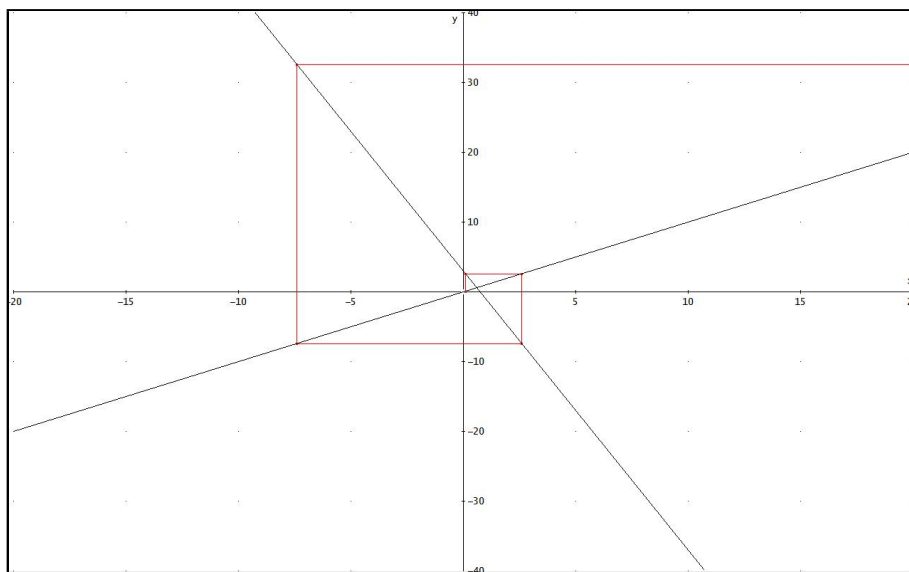
pro nějaké n s předem udanou přesností, bude bod x_n řešením úlohy (20) s uvedenou přesností. Na základě vztahu (18) lze sestavit rekurentní formuli ve tvaru

$$x_{n+1} = 3 - 4x_n. \quad (22)$$

Nabízí se hned několik otázek:

- Jakou souvislost bude mít získaná posloupnost s naším problémem, bude konvergovat k řešení rovnice?
- Při jaké volbě varianty funkce $\varphi(x)$ bude problém řešitelný?
- Bude volba počátečního přiblížení ovlivňovat výsledek?
- Bude mít úloha vždy jediné řešení?

Při libovolné volbě počátečního přiblížení nemusíme získat vždy posloupnost, která k přesnému řešení konverguje. V následujícím grafu jsou znázorněny funkce $y = x$ a $y = 3 - 4x$ a úsečkami jsou spojeny jednotlivé body iterace $\{0.1, 2.6, -7.4, 32.6, -127.4, 512.6, \dots\}$ viz obr. 32.

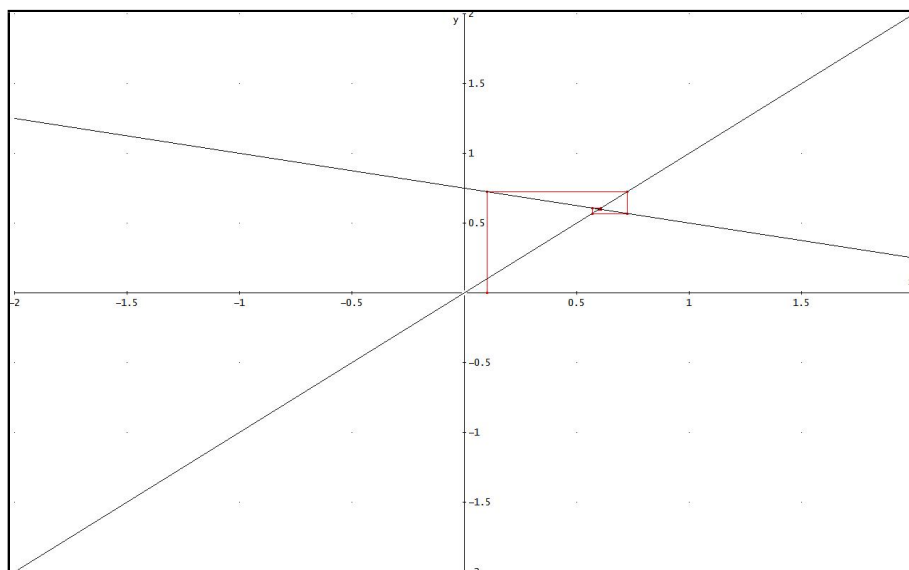


Obrázek 32: $x = 3 - 4x$

Přepíšeme-li rovnici (16) do tvaru $4x = 3 - x$, pak obdržíme funkci $\varphi(x)$ ve tvaru

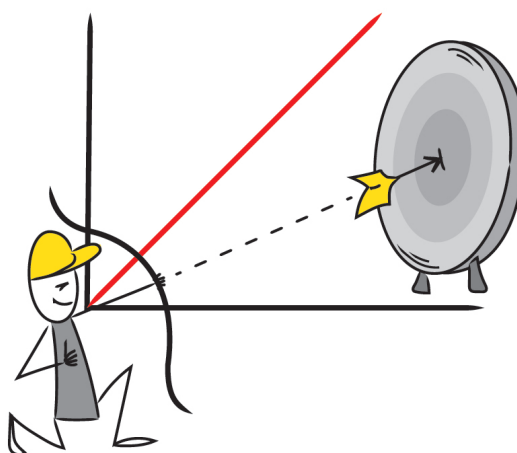
$$\varphi(x) = \frac{1}{4}(3 - x). \quad (23)$$

V tomto případě získáme pro libovolnou volbu počátečního přiblížení posloupnost konvergentní $\{0.1, 0.725, 0.5687, 0.6078, \dots\}$ viz obr. 33.

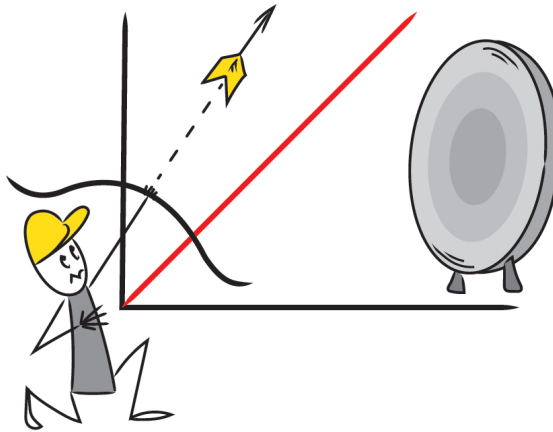


Obrázek 33: $x = \frac{1}{4}(3 - x)$

Jestliže bude koeficient u x v předpisu funkce $\varphi(x)$ v absolutní hodnotě větší než jedna, získaná posloupnost nebude konvergentní, bude-li koeficient v absolutní hodnotě menší než jedna, pak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bude konvergovat k řešení dané úlohy. Koeficient u x udává směrnici dané přímky a její hodnota určuje, jak bude přímka sklopena vzhledem k ose x . Směrnici přímky lze stanovit pomocí derivace. Můžeme vyslovit hypotézu, že pokud se podaří zvolit funkci $\varphi(x)$ tak, že její derivace bude ve sledovaném intervalu v absolutní hodnotě menší než jedna, posloupnost získaná postupem uvedeným v (20) bude konvergovat k nulovému bodu funkce $f(x)$ viz obr. 34 a 35. Tyto úvahy lze propojit s výsledky, ke kterých jsme dospěli ve 2. a 3. kapitole, kde jsme se dostali k řešení podobného problému z jiného úhlu pohledu.



Obrázek 34: Derivace funkce $\varphi(x)$ je menší než 1



Obrázek 35: Derivace funkce $\varphi(x)$ je větší než 1

Toto tvrzení lze velmi snadno obhájit, protože platí: Je-li α kořenem funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) a je-li všude v (a, b) splněna podmínka $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, pak

$$|\alpha - x_n| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1})| = |(\alpha - x_{n-1})\varphi'(c)| \leq |\alpha - x_{n-1}|,$$

kde bod c je prvkem intervalu (a, b) . Existence tohoto bodu a platnost předchozího vztahu je zaručena Větou o střední hodnotě v případě, že je funkce $\varphi(x)$ na daném intervalu spojitá a má v každém jeho bodě derivaci.

Poznámka

Věta o střední hodnotě říká, že pokud jsou splněny podmínky uvedené v předchozím odstavci, pak existuje bod c z intervalu $\langle a, b \rangle$ takový, že tečna sestrojená v bodě $[c, \varphi(c)]$ ke grafu funkce $\varphi(x)$, má totožnou směrnici jako spojnice bodů $[a, \varphi(a)]$ a $[b, \varphi(b)]$ viz obr. 36. Tato věta patří k základním kamenům diferenciálního počtu a využívá se v různých modifikacích například jako pomůcka při dokazování některých matematických tvrzení.

Na základě uvedených faktů pak po několikanásobném použití předchozího vztahu platí

$$|\alpha - x_{n-1}||\varphi'(c)| \leq q|\alpha - x_{n-1}| \leq q^2|\alpha - x_{n-2}| \leq \dots \leq q^n|\alpha - x_0|.$$

Protože $q < 1$, pak $q^n < 1$ a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu α . Jinými slovy, pro velmi velké n je bod x_n velmi blízko bodu α .

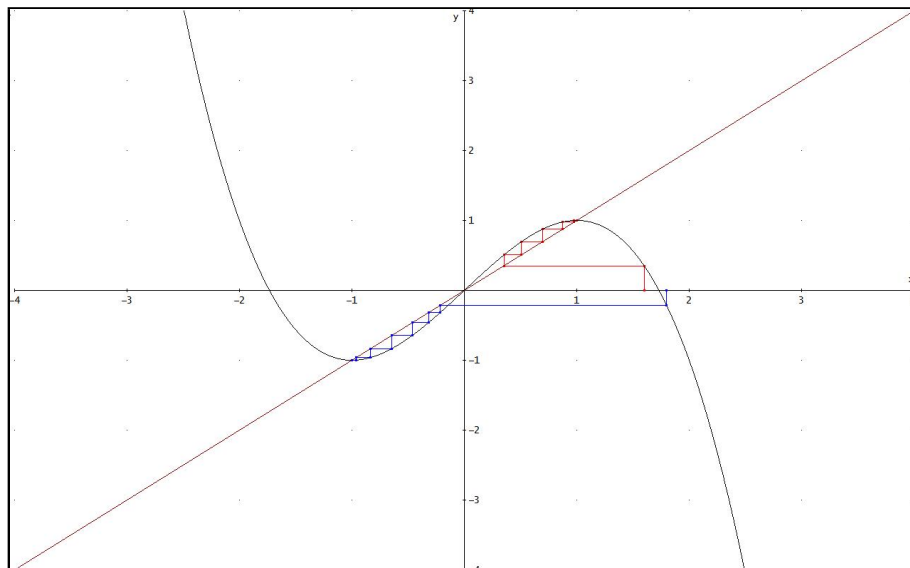


Obrázek 36: Věta o střední hodnotě v realitě

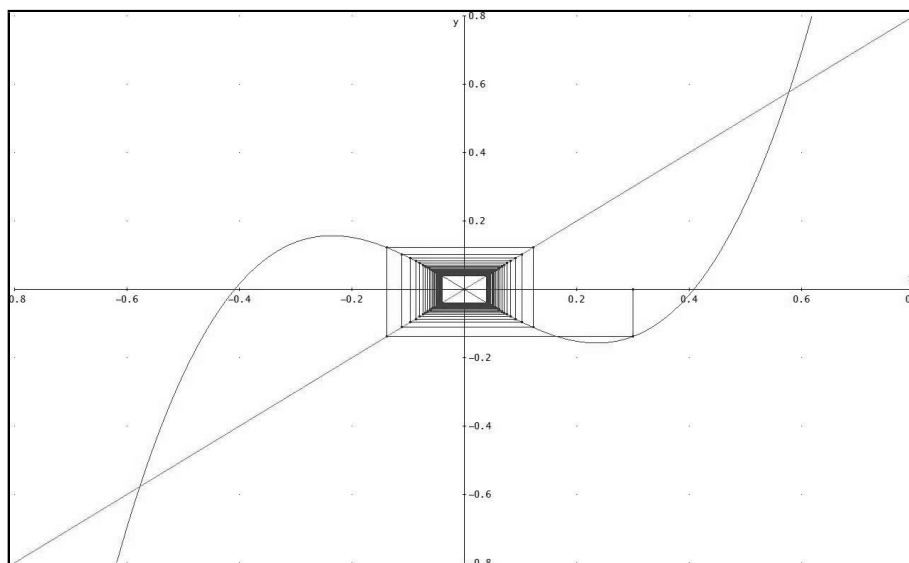
Při řešení této jednoduché úlohy neovlivňovala volba počátečního přiblížení x_0 konečný výsledek. Funkce $\varphi(x)$ měla pouze jediný společný bod s přímkou $y = x$. Pokud budeme řešit problém, kdy rovnici přepíšeme do takového tvaru, že funkce $\varphi(x)$ bude mít s přímkou $y = x$ dva průsečíky, narazíme na jistý problém. Zvolme například

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(3x - x^3). \quad (24)$$

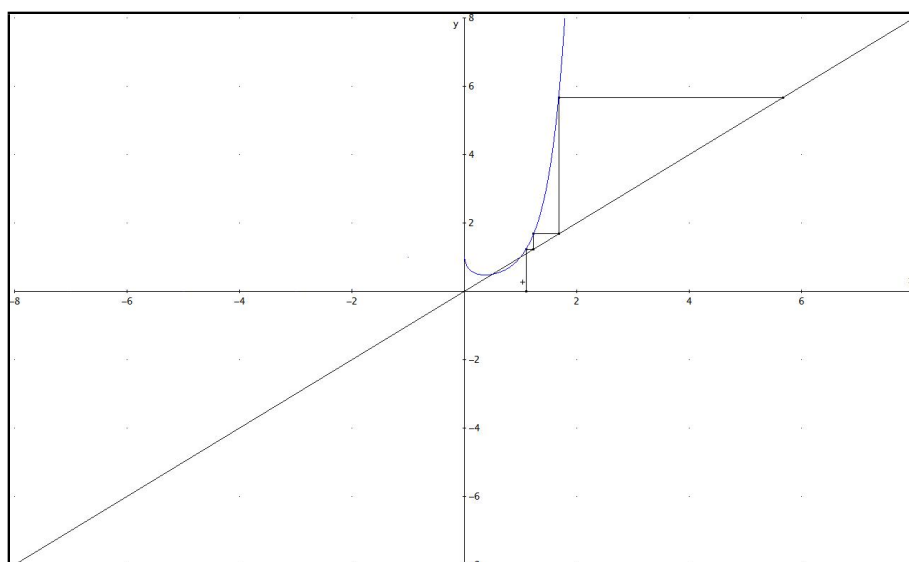
Tímto přepisem lze řešit rovnici $x^3 - x = 0$. Obrázky 37 - 40 dokládají, jaké potíže se mohou při různých volbách počátečního přiblížení objevit. Posloupnost konverguje, ale k různým řešením v závislosti na volbě počátečního přiblížení x_0 .



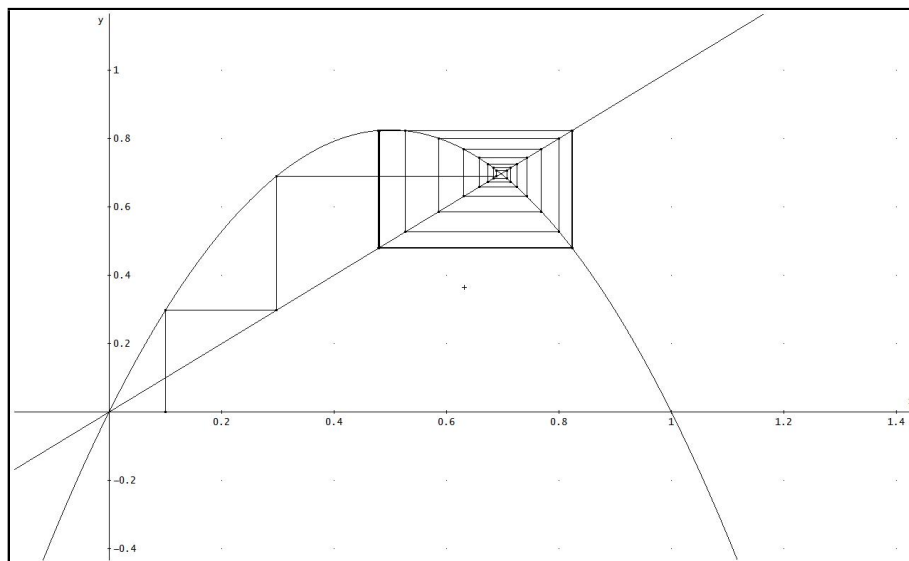
Obrázek 37: Dva průsečíky



Obrázek 38: Volba počátečního přiblížení může ovlivnit výsledek



Obrázek 39: Další ukázka důležitosti volby počátečního přiblížení



Obrázek 40: $y = 3.3x(1 - x)$

Jak tedy zajistit, aby při dané volbě počátečního přiblížení x_0 posloupnost získaná procesem (20) konvergovala k řešení ležícím v předem daném intervalu?

Nejpřínosnější bude, vysvětlíme-li tento problém na konkrétním příkladě. Bude užitečné postupovat následujícím sledem kroků:

- Zvolme $\varphi(x)$
- Odhadněme interval, kde leží průsečík grafů funkcí $\varphi(x)$ a $y = x$ (existuje mnoho způsobů, jak tento interval analyticky nalézt, především, když funkce $\varphi(x)$ je polynomičká, ale v našem krátkém úseku se omezíme pouze na určení odhadu intervalu z grafického náčrtku).
- Platí, že funkce $\varphi(x)$ zobrazuje interval $\langle a, b \rangle$ opět do intervalu $\langle a, b \rangle$?
- Je všude v intervalu $\langle a, b \rangle$ splněna podmínka $|\varphi'(x)| < 1$?
- Zvolme libovolně x_0 z intervalu $\langle a, b \rangle$ a počítejme dle předpisu

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \tag{25}$$

tak dlouho, až nalezneme řešení s předem udanou přesností.

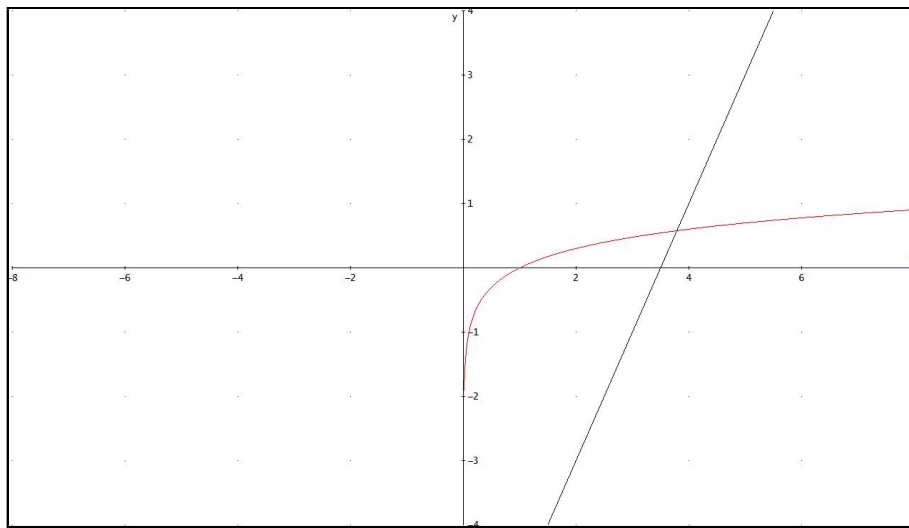
Vyzkoušejme si ověřování předchozích podmínek na konkrétním případě. Máme za úkol nalézt řešení rovnice

$$2x - 7 - \log x = 0. \quad (26)$$

Nabízí se velmi jednoduchý přepis rovnice (26) do tvaru

$$2x - 7 = \log x,$$

který bude vhodný pro nalezení odhadu intervalu, ve kterém leží všechny průsečíky grafů funkcí $y = 2x - 7$ a $y = \log x$. Na obr. 41 je vidět, že se jedná o dva intervaly: $(0, 1)$, (bod 0 není prvkem definičního oboru funkce $\log x$) a interval $\langle 3, 4 \rangle$.



Obrázek 41: Odhad intervalů, kde leží průsečíky funkcí $y = \log x$ a $y = 2x - 7$

Zvolme funkci $\varphi(x)$ například ve tvaru

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(7 + \log x). \quad (27)$$

Ověříme splnění všech podmínek:

$\varphi(3) \doteq 3,73856$ a $\varphi(4) \doteq 3,8010$, tedy platí, že $\varphi(x)$ zobrazuje interval $\langle 3, 4 \rangle$ opět do intervalu $\langle 3, 4 \rangle$, protože daná funkce je zde spojitá a monotónní, proto musí nabývat funkčních hodnot mezi těmito dvěma hodnotami. Máme tedy zaručeno, že posloupnost „nevyběhne“ z intervalu ven. Tento problém souvisí s tématy, která jsme řešili v rámci kapitoly 2.2. Dále je splněno:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2x \ln 10}, \quad (28)$$

což je spojitá funkce na intervalu $\langle 3, 4 \rangle$, vždy kladná, klesající a s hodnotami menšími než jedna. Tento fakt lze ověřit pouhým dosazením bodů $x = 3$ a $x = 4$, protože funkce daná předpisem

(27) nabývá hodnot mezi těmito funkčními hodnotami. Zvolme nyní libovolný bod z intervalu $\langle 3, 4 \rangle$ nejlépe mezi body 3,73856 a 3,8010 například $x = 3,8$ a pak použitím předpisu

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{2}(7 + \log x_n),$$

získáme hodnotu řešení $\alpha = 3,7892$ s přesností na čtyři desetinná místa.

Budeme-li postupovat obdobně v případě druhého intervalu $(0, 1)$, narazíme záhy na problém. Funkce $\varphi(x)$ zobrazuje hodnoty z intervalu $(0, 1)$ do intervalu $\langle 3, 4 \rangle$ a tudíž by posloupnost získaná procesem $x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{2}(7 + \log x_n)$ konvergovala k prvnímu nalezenému kořenu.

Příklady

1. Nalezněte řešení rovnice $x^2 - \cos x = 0$ v intervalu $(0, 1)$ s přesností na čtyři desetinná místa.
2. Nalezněte řešení rovnice $x^2 - 3^x = 0$ s přesností na pět desetinných míst.
3. Nalezněte řešení rovnice $x^3 + x - 1000 = 0$ v intervalu $(9, 10)$ s přesností na čtyři desetinná místa.

Řešení

1. Funkce $\varphi(x) = \sqrt{\cos x}$ zobrazuje interval $(0, 1)$ do intervalu $(0, 1)$, řešení $\alpha \doteq 0,8241$.
2. Funkce $\varphi(x) = -\sqrt{3^x}$ zobrazuje interval $(-1, 0)$ do intervalu $(-1, 0)$, řešení $\alpha \doteq -0,68603$.
3. Funkce $\varphi(x) = (1000 - x)^{1/3}$ zobrazuje interval $(9, 10)$ do intervalu $(9, 10)$, řešení $\alpha \doteq 9,9666$.

Poznámka

Pokud bychom volili funkci $\varphi(x)$ ve tvaru $\varphi(x) = f(x)g(x) + x$, pak bychom získali například v případě volby $g(x) = -1/f'(x)$ metodu známou jako *Newtonovu* nebo také *Metodu tečen*.

Shrnutí. Tato kapitola velmi úzce navazuje na kapitoly 2. a 4. Vlastnosti posloupností a funkcí uvedené ve 2. kapitole jsme využili při řešení jednoduchých úloh pomocí iterační metody, což je pro studenty zcela nové téma. Poznatky získané v předchozí kapitole lze využít při řešení uvedených úloh. Studovaná problematika je současně vhodná k využití při přípravě výuky do hodin informatiky. Studenti pak snadno mohou pochopit význam termínů jako jsou iterace, přesnost, chyba či konvergence. Informace o tomto tématu lze nalézt například v [22].

6 Modelování dopravního proudu

Modelování dopravy pomocí výpočetní techniky představuje poměrně novou oborovou disciplínu, která se do povědomí širší odborné veřejnosti u nás dostala teprve v 80. letech 20. století. Dopravní modelování a simulace se využívá především v dopravním inženýrství a dopravním plánování. Základem dopravních modelů je pro dané účely co nejuvěrněji modelovat pohyby vozidel a jejich vzájemné ovlivňování. Nelze však vytvořit jeden univerzální model, který by byl použitelný pro modelování všech situací. Hlavními kritérii jsou rozsah modelované sítě, míra přiblížení se reálnému stavu a zobrazení detailu. Při vytváření dopravního modelu je třeba vzít v úvahu mnoho faktorů, které ovlivňují realitu jako například řidiči a jejich chování, samotná vozidla a jejich chování, dopravní síť, prvky a systémy řízení dopravy nebo okolní prostředí. Na základě těchto elementů, které vstupují do modelovacího procesu, může pak model zahrnovat řadu prvků vztahujících se ke složitějším modelům jako například předpovídání počasí.

Modelování dopravního proudu má mnoho společných rysů s předpovídáním počasí, jedná se o komplexní děje, které mají nelineární dynamický charakter. Prognózy počasí jsou založeny na matematickém modelu a obecně platí, že větší množství vstupních dat a vyšší výpočetní výkon může mít za následek také vyšší přesnost dosaženého výsledku. Závislost mezi množstvím zpracovaných údajů a kvalitou výsledku však není v žádném případě lineární a je známou skutečností, že nelineární dynamické systémy závislé na více parametrech jsou nepředvídatelné dokonce i co se týče modelování dopravního toku (viz [24]). Libovolně malá změna vstupních údajů totiž může vést k naprosto odlišnému výsledku (viz 4. kapitola). Mezi dopravním modelováním a předpověďmi počasí lze však postřehnout jeden velký rozdíl, který spočívá v tradici těchto činností. Zájem o předpověď počasí provází lidstvo po celou historii, ale historie dopravního modelování je samozřejmě kratší, vozidla se vyrábějí až od začátku dvacátého století, a teprve komplikace s jejich množstvím na silnicích společně s budováním složitých dopravních sítí vedly ke snaze o studium dějů v dopravním proudu (viz [3]). Matematické modelování dopravy se začalo výrazně rozvíjet po druhé světové válce a svoji úlohu tu sehrál také rozmach výpočetní techniky. Byly vytvořeny různé typy modelů od mikroskopické úrovně, přes úroveň mezoskopickou až po úroveň makroskopickou, pro větší informovanost lze odkázat například na publikaci [12].

6.1 Hustota a tok vozidel

Pohyb vozidel na dálnici můžeme popsat na základě analogie s pohybem tekutiny - pohybem částic tekutiny. Tok vozidel na dálnici lze z jistého úhlu pohledu a za daných podmínek chápat jako tok částic tekutiny (např. při pohledu na silnici z letadla). Je tedy nutné odlišovat pojem makroskopické rychlosti jako rychlosti toku vozidel a mikroskopické rychlosti jako rychlosti jednotlivých vozidel. Pohyb částic tekutiny je ovlivňován pohybem okolních částic, ovšem jízda řidiče závisí i na jiných faktorech. Řidič přizpůsobuje jízdu podle rozumové úvahy situaci před sebou či za sebou a vnímá další faktory, které mohou rozhodnout o změně jeho jízdy či rychlosti jeho jízdy. Částice tekutiny se může při svém pohybu srazit s jinou částicí, řidič vozidla se srážce s jiným vozidlem samozřejmě vyhýbá. Protože vozidla budou v našem modelu představovat jednotky, budeme předpokládat, že mají totožnou délku. Dále předpokládáme pro

zjednodušení, že provoz vozidel budeme sledovat pouze jedním směrem. Pro určení počtu vozidel na měřeném úseku za danou časovou jednotku musíme vzít v úvahu jednak celkovou hustotu vozidel a jejich rychlost [20]. Hustota vozidel na sledovaném úseku je pojem, který by si zasluhoval podrobnějšího rozboru. Hustotu vozidel budeme definovat jako poměr počtu vozidel k jednotkové délce vozovky a budeme ji označovat symbolem ρ :

$$\text{hustota vozidel} = \frac{\text{počet vozidel}}{\text{jednotková délka silnice}}.$$

Je-li například sledovaný úsek silnice dlouhý 1000 m a nachází-li se na celém úseku 35 vozidel, je hustota vozidel rovna hodnotě $\rho = 0,035$. V případě, že $\rho = 0$, je měřený úsek silnice prázdný. Je-li $\rho = 1$, bude se na silnici vyskytovat zácpa. Hustotu vozidel budeme určovat v daném místě x a v daném čase t , budeme ji zapisovat jako funkci dvou reálných proměnných ve tvaru $\rho = \rho(x, t) = \rho(x(t))$, kde proměnná x je závislá na proměnné t .

Dalším důležitým pojmem určujícím charakter silničního provozu je *tok vozidel* (v daném bodě)

$$\text{tok vozidel} = \frac{\text{počet vozidel}}{\text{čas}}.$$

Je-li dána rychlost proudu vozidel, tedy rychlost, s jakou se posouvá místo s určitou hustotou provozu (je nutné odlišit od rychlosti jízdy jednotlivých vozidel), pak lze definovat pojem toku vozidel jako součin hustoty vozidel a této rychlosti. Pokud zavedeme v textu jednotné označení pro rychlost proudu vozidel symbolem v a pro tok vozidel symbolem φ , bude platit

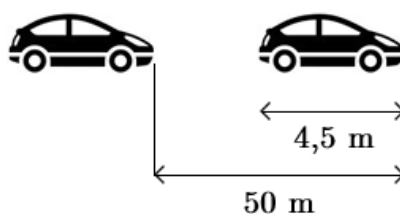
$$\varphi(\rho) = v\rho. \quad (29)$$

V případě, že se ve sledovaném úseku bude rychlost proudu vozidel měnit v závislosti na podmínkách na silnici například při dopravní nehodě či na základě příkazu omezené rychlosti či změny pohybu vozidel ovlivněného světelnou signalizací, nemusí být toková funkce lineární funkcí ve tvaru (29) a může záviset i na jiných faktorech.

6.2 Charakteristika silničního provozu

Co v praxi znamená plynulý provoz, omezený provoz či dopravní zácpa?

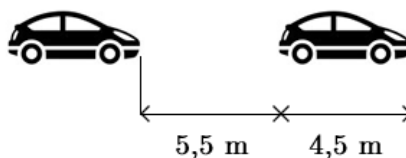
Popišme, v jakých souvislostech se tyto pojmy odlišují. Předpokládejme, že každé vozidlo má délku 4,5 m a při jízdě za sebou dodržují řidiči bezpečnostní vzdálenost, tedy časový odstup dvě sekundy. Pravidlo dvou sekund představuje tuto situaci: Jakmile se při jízdě vozidlem zaměříme na jistý pevný bod u vozovky např. strom či patník a od okamžiku, kdy tento bod mine vozidlo před vámi, odpočítáme dvě sekundy. Pokud ke stejnému bodu dorazíme dříve než za dvě sekundy, není řízené vozidlo v bezpečné vzdálenosti od vozidla před ním. V případě, že vozidla jedou rychlostí 90 km/h, jedná se o vzdálenost přibližně 50 m viz obr. 42. Na úseku dlouhém 1000 m se tedy v daném čase vyskytuje maximálně 18 vozidel.



Obrázek 42: Plynulý provoz

Můžeme pak rozeznávat následující situace:

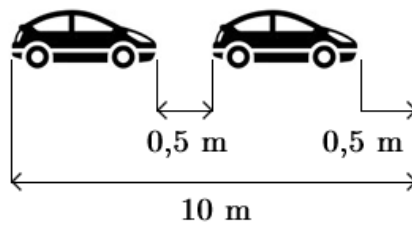
- Počítáme-li, že mezi vozidly je vzdálenost 50 m, pak se na úseku silnice dlouhém 1000 m může neomezeně pohybovat 0 - 18 vozidel. Velikost toku vozidel bude maximální, jestliže se vozidla v jízdě navzájem neomezují. Maximální tok vozidel tedy bude představovat 1620 vozidel za 1 hodinu. Čím je v tomto případě hustota větší, tím je tok větší. V praxi se pak mluví o *plynulém provozu*.
- Pokud se na stejném úseku silnice bude pohybovat větší množství vozidel tj. v rozmezí 19 až 100 vozidel, pak se každé vozidlo nachází na volném úseku dlouhém minimálně 10 m viz obr. 43. V tomto případě již musí řidiči věnovat pozornost situaci před a za řízeným vozidlem a adekvátně reagovat na případné změny. Rychlost vozidel se bude v jistých úsecích silnice měnit a provoz se může střídavě zhušťovat či zředit. Čím je pak hustota provozu větší, tím je tok vozidel menší. Dopravní provoz pak bývá charakterizován jako *omezený*.



Obrázek 43: Omezený provoz

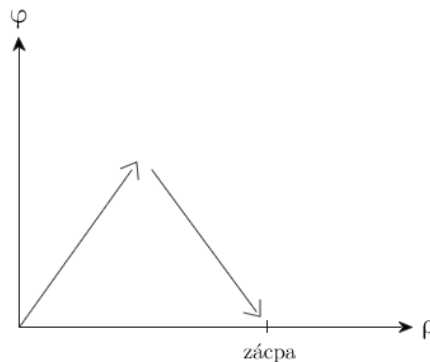
- Je-li na sledovaném úseku vozovky více než 100 vozidel, pak je řidič nucen popojíždět a zastavovat a dochází k lokální zácpě. Pokud je na vozovce rozmístěno již přibližně 200 vozidel, dochází ke globální zácpě, na daném úseku všechna vozidla stojí a tok vozidel je nulový viz obr. 44.

Na tomto místě má smysl zmínit pojem kapacity silnice, který představuje maximální možné množství stojících vozidel za sebou (počet pětimetrových úseků celkové délky silnice).



Obrázek 44: Zácpa

Závislost toku silničního provozu na hustotě vozidel pak lze graficky znázornit zjednodušeně tímto způsobem viz obr. 45.



Obrázek 45: Závislost toku vozidel na hustotě vozidel

Na základě zkušeností můžeme shrnout fakta týkající se vlastností funkce toku vozidel

- žádné vozidlo na vozovce představuje nulový tok vozidel
- tok vozidel je funkce s nezápornými hodnotami a je omezená
- existuje hustota vozidel taková, že se tok vozidel zastaví
- existuje hustota taková, že je pro ni tok vozidel maximální, označme ji ρ_{max}

Abychom mohli uvést názorné příklady z praxe, bylo by vhodné rozumně definovat konkrétní podobu funkce toku vozidel. Předpokládejme, že maximální rychlost je pro všechna vozidla shodná, označme ji v_{max} . Budeme vynechávat úvahy o některých psychologických aspektech při jízdě v řadě například má-li před sebou řidič vozidlo daleko, začne zrychlovat jízdu [7]. Na základě empirických zkušeností z praxe lze předpokládat, že pokud je vozovka prázdná, tedy $\rho = 0$, pak se může vozidlo pohybovat maximální rychlostí $v = v_{max}$. Je-li naopak vozovka plná, dochází k dopravní zácpe ($\rho = \rho_{max}$) a vozidla se zastaví, tedy $v = 0$. Tyto vlastnosti má například funkce ve tvaru

$$v(\rho) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right). \quad (30)$$

Potom tokovou funkci můžeme představit v podobě

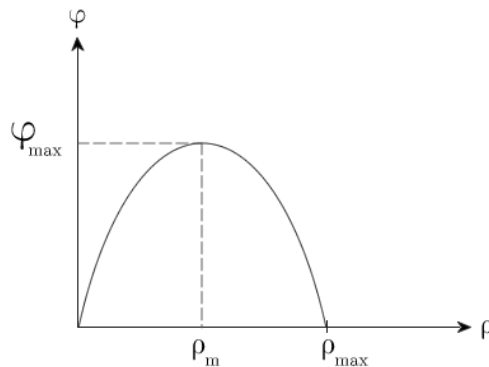
$$\varphi(\rho) = \rho v(\rho) = \rho v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) = \rho v_{max} - \rho^2 \frac{v_{max}}{\rho_{max}}. \quad (31)$$

Stanovíme-li derivaci funkce $\varphi(\rho)$, pak budeme schopni určit hodnotu maximálního toku [13].

Platí:

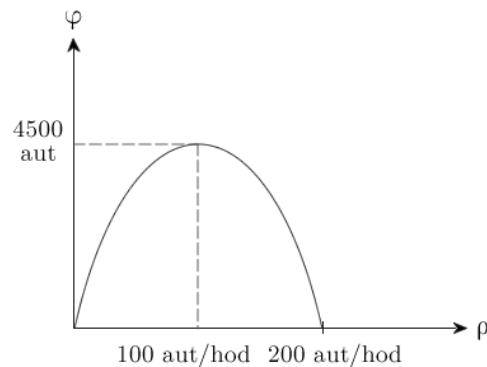
$$\varphi'(\rho) = v_{max} - \frac{2\rho v_{max}}{\rho_{max}}. \quad (32)$$

Tato funkce má nulový bod v bodě $\rho = \frac{\rho_{max}}{2}$, který označuje hodnotu maximálního toku viz obr. 46.



Obrázek 46: Maximum tokové funkce

Jestliže tento výsledek aplikujeme na předchozí příklad, bude mít toková funkce maximální hodnotu při hustotě rovné 100 aut na 1 km, pak začne její hodnota klesat až se dosáhne stavu zácpy pro hodnotu hustoty vozidel rovné 200 vozidel na 1 km viz obr. 47.



Obrázek 47: Maximum tokové funkce

Pokud bychom zadání původního příkladu obměnili a zvolili model pohybu vozidel po dálnici, pak při volbě $v_{max} = 130$ km/h by maximální hodnota toku vozidel nastala pro hodnotu $\rho = 110$ vozidel na 1 km a 220 vozidel na 1 km dálnice by představoval stav zácpy.

6.3 Makroskopický model dopravního toku

Sledujme v daném časovém intervalu úsek silnice, na které se pohybují vozidla konstantní rychlostí v . Hustota vozidel ρ je v daném úseku a čase zadána. Základní úvaha se bude opírat o fakt, že změna počtu vozidel na měřeném úseku za udanou časovou jednotku odpovídá rozdílu mezi počtem vozů, které do uvažovaného úseku vjedou a vyjedou. Určíme počet vozidel v čase $t = 0$ a v čase $t = t_0$, jejich rozdíl bude představovat změnu hustoty vozidel zjištěnou v čase t_0 a spočteme vozidla, která za čas t_0 do měřeného úseku rychlostí v vjedou a současně z něj vyjedou.

Příklad

Budeme uvažovat úsek dálnice dlouhý 10 km a předpokládejme, že se vozidla v tomto úseku pohybují konstantní rychlostí 100 km/h a že na počátku pozorování se na dálnici vyskytuje 100 vozidel. Za 1 minutu vjede do sledovaného úseku 10 vozidel a vyjede 20 vozidel. Hustota vozidel se tedy musí o 10 vozidel snížit. Změna počtu vozidel za 1 minutu na sledovaném úseku je rovna 10. Poněvadž rychlost vozidel je konstantní, stačí místo změny tokové funkce v daném úseku uvažovat změnu hustoty vynásobenou rychlostí v .

Označíme-li změnu hustoty v uvažovaném čase $\Delta_t \rho$ a změnu tokové funkce v daném úseku $v \Delta_x \rho$, kde x bude představovat proměnnou popisující polohu vozidla na dálnici, pak dle předchozí úvahy platí

$$\Delta_t \rho + v \Delta_x \rho = 0.$$

Tuto závislost lze za jistých předpokladů přepsat do podoby parciální diferenciální rovnice 1. řádu [19] ve tvaru

$$\rho_t + v \rho_x = 0 \tag{33}$$

Rovnici (33) lze zjednodušeně slovně vysvětlit takto: Pokud je dán jistý časový interval a jistý úsek vozovky, pak změna hustoty vozidel vzhledem k danému časovému rozmezí je totožná se změnou tokové funkce měřené na uvažovaném úseku - neboli s rozdílem toků na konci a začátku úseku. V případě, že toková funkce $\varphi = \varphi(\rho)$ není zadána v lineárním tvaru, přechází rovnice (33) do tvaru

$$\rho_t + \varphi_x = 0. \tag{34}$$

Poznámka

Toto je známá obecnější formulace odvozená Lighthillem, Whithamem a Richardsem [7] z integrální podoby zákona zachování ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \right] = \varphi(x_1, t) - \varphi(x_2, t). \quad (35)$$

Rovnice (35) vyjadřuje vztah mezi změnou hodnoty hustoty vozidel v úseku měřeném od místa x_1 do místa x_2 za časovou jednotku t a rozdílem tokové funkce změřené v místě x_1 a x_2 (opět rozdíl mezi počtem vozidel, které do měřeného úseku vjedou a vyjedou v čase t).

Rovnici (35) pak můžeme za jistých předpokladů přepsat následovně

$$\rho_t + [\varphi(\rho)]_x = 0. \quad (36)$$

Integrální formulace (35) je obecnější než formulace pomocí diferenciální rovnice (36) a vychází z ní tzv. metoda konečných objemů. Tato metoda umožňuje řešit problém (36) i pro vstupní data, která mohou být zadána v obecnějším tvaru. Podrobnější výklad nalezneme např. v [7], [8], [19].

Konkrétní řešení dané úlohy budeme moci určit, jakmile budeme znát rozložení hustoty vozidel v jistém místě a čase. Nejčastější a nejpřirozenější volbou podmínek bývá počáteční rozložení hustoty vozidel, tedy popis situace na začátku sledovaného děje, označme tuto funkci zápisem $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$.

Úloha ve tvaru

$$\begin{aligned} \rho_t + [\varphi(\rho)]_x &= 0 \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x) \end{aligned}$$

se nazývá *počáteční úloha (Cauchyho úloha)*.

6.4 Charakteristiky

Jedním ze způsobů popisu řešení úlohy je cesta grafického znázornění pomocí tzv. *charakteristik* [13]. Rovnice (33) s počáteční podmínkou $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ má jednoduchý tvar, a proto lze její řešení snadno stanovit. Hledaná funkce ρ proměnné x a $t > 0$ má tvar

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - vt). \quad (37)$$

Toto tvrzení lze jednoduše ověřit dosazením:

$$[\rho_0(x - vt)]_t + v[\rho_0(x - vt)]_x = -v\rho_0'(x - vt) + v\rho_0'(x - vt) = 0.$$

Body na přímkách se směrnicí rovnou v ve tvaru

$$x - vt = konst$$

mají společnou vlastnost. Funkce ρ je v bodech všech přímek se směrnicí v konstantní. Jinými slovy hodnota hustoty zadané počáteční podmínkou je v čase přenášena po přímkách se směrnicí

rovnou v . Předpokládejme, že průsečík této přímky s osou t označíme t_0 . Tyto přímky, na nichž je hodnota hustoty konstantní, se nazývají *charakteristické přímky* nebo *charakteristiky* příslušné k dané úloze. Zakreslit charakteristiky je celkem snadné a pomocí výsledného grafického znázornění pak můžeme získat představu o řešení dané úlohy v předem určeném čase a místě. Jestliže je potřeba z jistého důvodu znázornit charakteristiky v (x, t) -rovině, pak stačí sestavit k původním přímkám jejich inverzní funkce. Charakteristiky pak budou mít směrnice rovné reciproké hodnotě původní směrnice $\frac{1}{v}$ (funkce $x = kt$ má inverzní funkci s předpisem $x = t/k$ a grafy těchto přímek jsou souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu). Tento obojí postup při znázorňování charakteristik budeme využívat, důvod objasníme později v textu.

Význam charakteristik zůstává nezměněn i v případě, kdy řešíme nelineární úlohu (36). Charakteristiku pak definujeme jako přímku se směrnici rovnou $\varphi'(\rho_0)$, je nutné tedy pro každou charakteristiku směrnici stanovit pomocí počáteční podmínky. Charakteristická přímka se směrnici rovnou hodnotě $\varphi'(\rho_0)$ pak protíná osu t v bodě $t = t_0$ a má rovnici

$$x = t_0 + \varphi'(\rho_0)t. \quad (38)$$

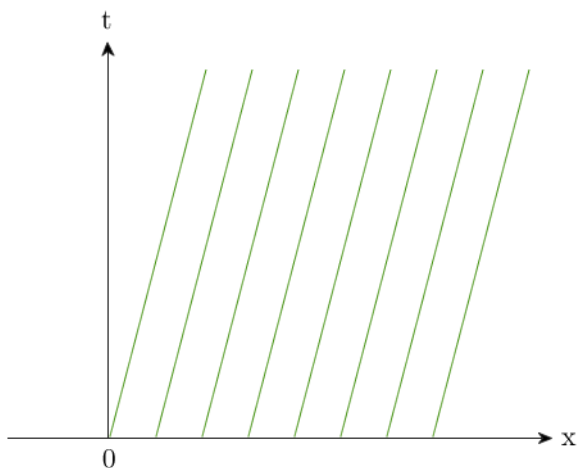
Dosazením lze jednoduše ověřit, že funkce ve tvaru

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - \varphi'(\rho)t)$$

splňuje rovnici (38). Na této přímce je hodnota řešení $\rho(x, t)$ rovná odpovídající hodnotě počáteční podmínky $\rho(x, 0)$. Bude-li potřeba znázornit situaci v (x, t) -rovině, charakteristiky budou mít směrnice rovné hodnotě $\frac{1}{\varphi'(\rho_0)}$.

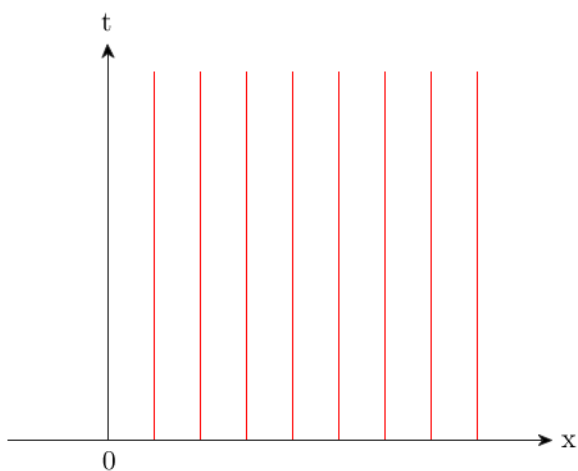
Uveď me příklady některých jednoduchých situací [4]:

1. Vozidla se rovnoměrně přemisťují stálou rychlostí, hustota provozu se nemění viz obr. 48.



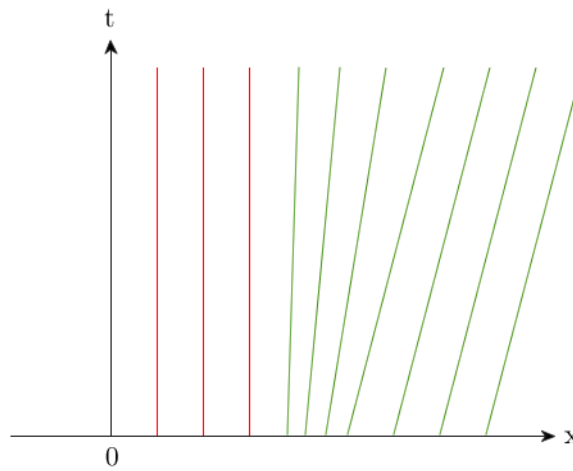
Obrázek 48: Konstantní hustota provozu

2. Vozidla se nepohybují, stojí v koloně, jedná se o příklad znázorňující zácpu viz obr. 49.



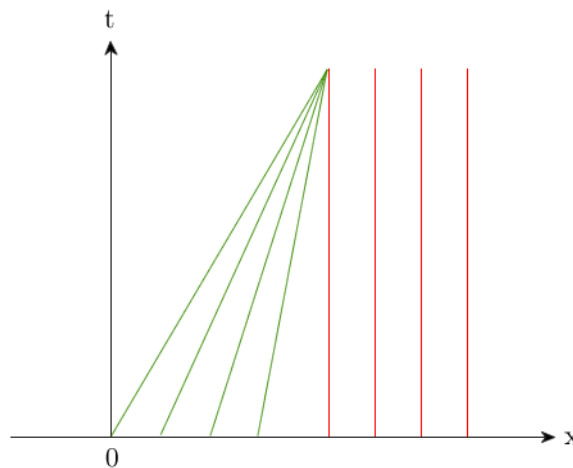
Obrázek 49: Zácpa

3. Vozidla se postupně rozjíždějí, jejich hustota se snižuje (hodnoty směrnic charakteristik se zmenšují) viz obr. 50.



Obrázek 50: Vozidla se rozjíždějí

4. Vozidla postupně zpomalují, zvětšuje se jejich hustota (hodnoty směrnic charakteristik se zvětšují) až dojde k zácpe viz obr. 51.



Obrázek 51: Vozidla se zpomalují

Kombinací všech uvedených příkladů je pak možné popisovat komplikovanější situace jako provoz na světelných křižovatkách či provoz na úsecích s omezenými rychlostmi. Abychom mohli řešit případy se složitějšími počátečními podmínkami, bylo by vhodné zastavit se u případů uvedených v příkladech 3. a 4.

Nechť je dána nelineární úloha ve tvaru

$$\begin{aligned}\rho_t + [v\rho]_x &= 0 \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x)\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou ve tvaru skoku

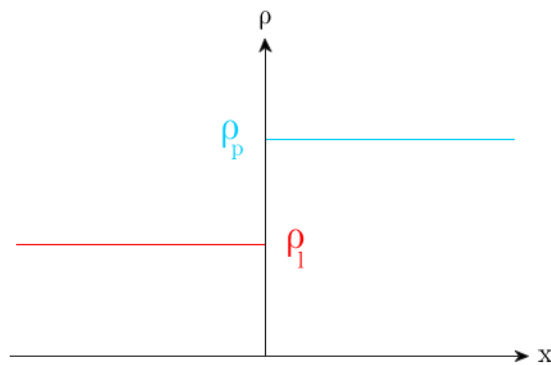
$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_p, & x \geq 0 \\ \rho_l, & x < 0 \end{cases}$$

kde ρ_p a ρ_l jsou daná nezáporná čísla a rychlost v nemusí být konstantní. Výše popsaná úloha se nazývá *Riemannův problém*. V této části budeme tedy připouštět i možnost existence nespojitých řešení.

Mohou nastat dvě rozdílné situace:

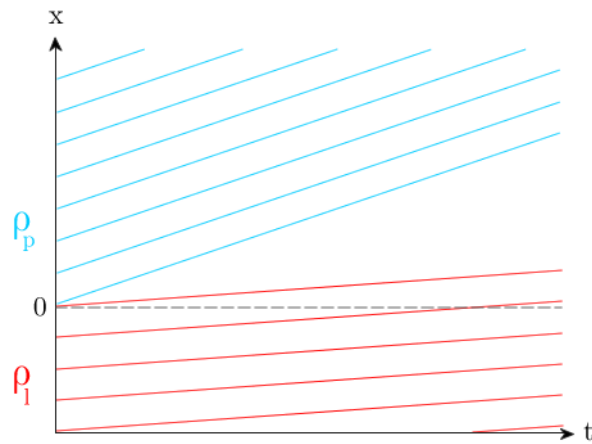
1. případ $\rho_l < \rho_p$

Závislost hustoty na poloze je pak znázorněna na obr. 52.

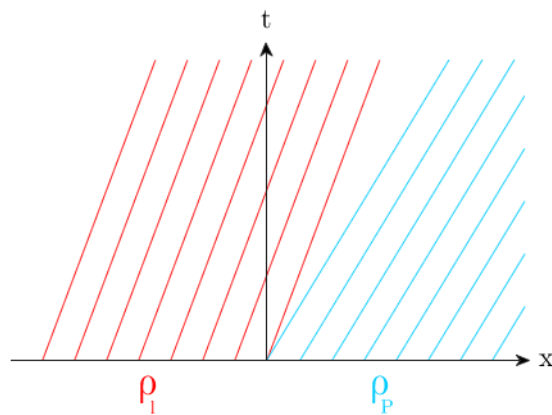


Obrázek 52: $\rho_l < \rho_p$

Charakteristiky pro hodnotu ρ_l znázorníme červenou barvou a charakteristiky pro hodnotu ρ_p zakreslíme modrou barvou viz obr. 53 a obr. 54.

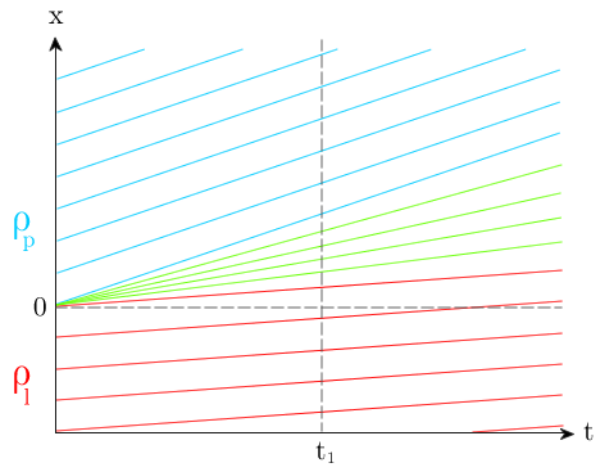


Obrázek 53: $\rho_l < \rho_p$

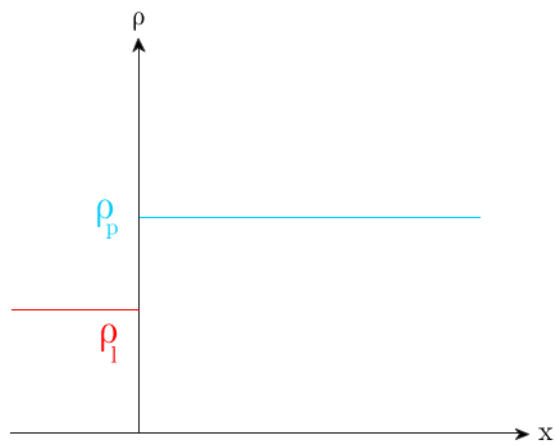


Obrázek 54: $\rho_l < \rho_p$

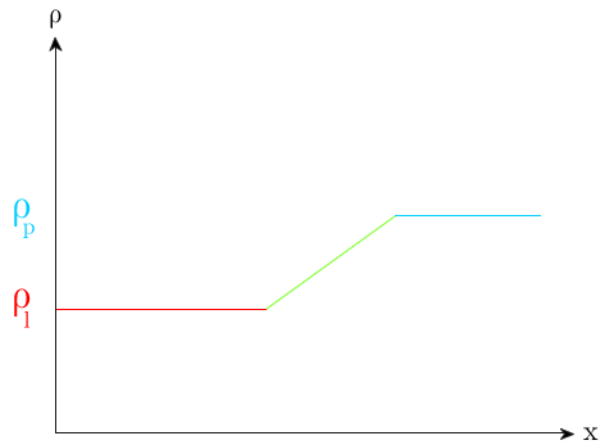
Z obrázků je patrné, že v úseku mezi červenou a modrou oblastí tedy oblastí definovanou nerovností $\rho_l t < x < \rho_p t$ charakteristiky "chybí". Dokreslíme-li do prázdného klínu přímky (kvůli odlišení zelenou barvou) se směrnici s hodnotami mezi ρ_l a ρ_p , podaří se pak tímto způsobem spojitě doplnit informaci o přenášené hodnotě hustoty v oblasti skoku viz obr. 55. Funkce $\rho(x, t) = \rho_0(x - \varphi'(\rho)t)$ s takto určenými charakteristikami také splňuje diferenciální rovnici (7). Řešení odpovídá přirozené představě, že dochází k postupnému rozjíždění vozidel a zředování přechodové vlny (výjezd vozidel z parkoviště, rozjíždění kolony). Na obr. 56 a 57 je znázorněna závislost hustoty vozidel na místě v čase $t = 0$ a v čase $t = t_1$.



Obrázek 55: Doplnění charakteristik



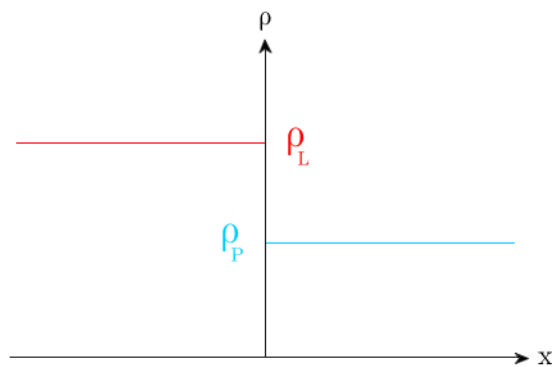
Obrázek 56: Závislost hustoty na místě v čase $t = 0$



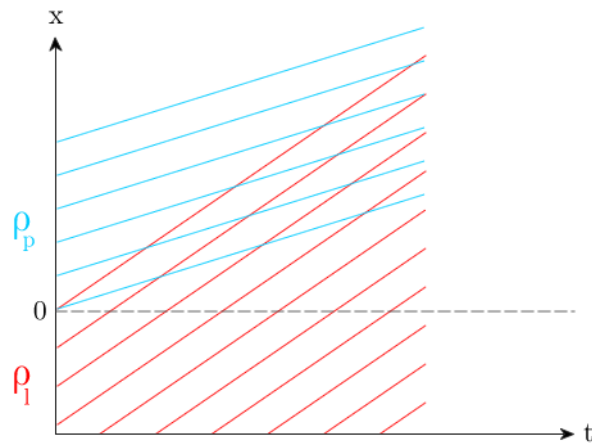
Obrázek 57: Závislost hustoty na místě v čase $t = t_1$

2. případ $\rho_l > \rho_p$

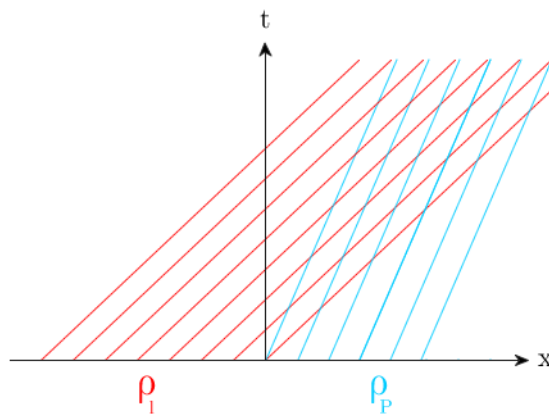
Závislost hustoty na místě je pak zakreslena na na obr. 58. Situaci znázorníme obdobným způsobem viz obr. 59 a 60.



Obrázek 58: $\rho_l > \rho_p$



Obrázek 59: $\rho_l > \rho_p$



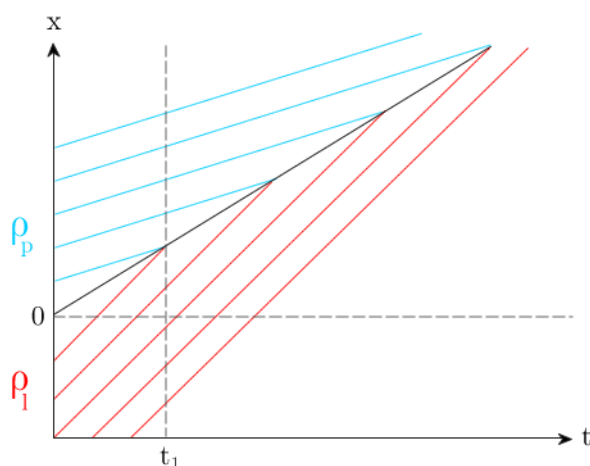
Obrázek 60: $\rho_l > \rho_p$

Z obrázků je snadno rozpoznatelné, že se charakteristiky kříží, což znamená, že v libovolném čase $t > 0$ nejsme schopni určit jednoznačnou hodnotu hustoty. V tomto případě dojde ke vzniku *rázové vlny* - vlny šíření nespojitosti. Rázová vlna je fyzikální jev, při němž se daným prostředím šíří vzruch v podobě skokové změny fyzikálních veličin popisujících stav prostředí. Nosičem rázové vlny může být hmotné prostředí (tuhé, kapalné nebo plynné), nebo například elektromagnetické pole. Pro bližší představu o významu tohoto pojmu lze zmínit např. tlakovou rázovou vlnu, která vzniká při explozivních dějích: při elektrickém výboji v kapalině, výbuchu apod. Zdrojem tlakové rázové vlny jsou dále objekty překonávající maximální rychlost šíření vzruchu v daném prostředí například při nadzvukové rychlosti pohybu letadla nebo konce biče. Průchod dostatečně silné rázové vlny může dokonce změnit vlastnosti samotného prostředí - měnit skupenství nebo strukturu materiálu, jímž vlna prochází. Rázová vlna může také vyvolat chemické reakce v daném médiu. V dopravním provozu lze sledovat rázovou vlnu například v případě, kdy vozidla dojíždějí danou konstantní rychlostí kolonu stojících vozidel.

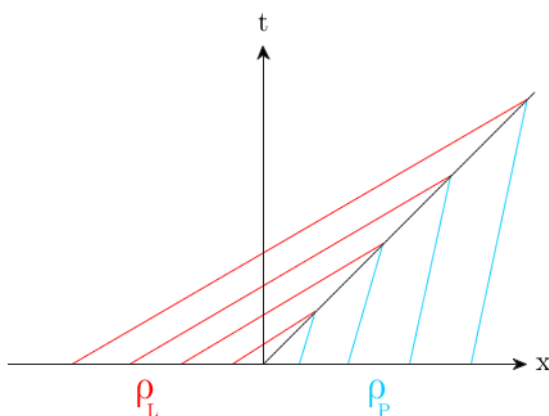
Velmi důležitou informací při popisu jevů v dopravě je pak rychlost šíření rázové vlny, která je dána tzv. *Rankinovou-Hugoniotovou podmínkou* ve tvaru

$$s = \frac{\varphi(\rho_l) - \varphi(\rho_p)}{\rho_l - \rho_p}. \quad (39)$$

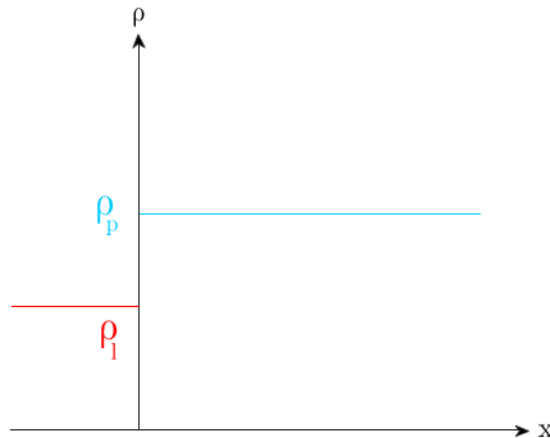
Odvození této podmínky přesahuje rámec tohoto textu, ale pokud by se student zajímal o tuto problematiku, lze doporučit nalistovat příslušné stránky například v [8], [19]. Je zde nutné připomenout rozdíl mezi rychlostí, jímž se na úseku pohybuje skupina vozidel a rychlostí vlny, rázová vlna nemusí souviset se zácpanou na vozovce nebo náhlým rozjezdem nebo zastavením vozidel, jde o nespojitost v hustotě provozu.



Obrázek 61: Rychlost šíření rázové vlny



Obrázek 62: Rychlost šíření rázové vlny



Obrázek 63: Skok v čase $t = t_1$

Na obrázcích 61 a 62 je znázorněna přechodová linie a na obr. 63 je zakreslena poloha skoku v čase $t = t_1$. Grafické znázornění problému se bude samozřejmě lišit v závislosti na volbě tvaru tokové funkce.

Příklady

Znázorněte graficky pomocí charakteristik následující situace. Sledovaný úsek měří 1 km, v prvním měřeném úseku je zjištěna hustota vozidel v hodnotě ρ_1 a ve druhém úseku, který je měřen od bodu B, má hustota vozidel hodnotu ρ_2 . Načrtněte řešení dané situace v (x, t) -systému souřadnic a bod B umístěte ve vzdálenosti 100 m v kladné části osy x .

1. $\rho_1 = 0,021$, $\rho_2 = 0,2$, $v_{max} = 14m/s$
2. $\rho_1 = 0,021$, $v_{max} = 14m/s$ $\rho_2 = 0,046$, $v_{max} = 8,3m/s$
3. $\rho_1 = 0,2$, $\rho_2 = 0,046$, $v_{max} = 8,3m/s$

Řešení

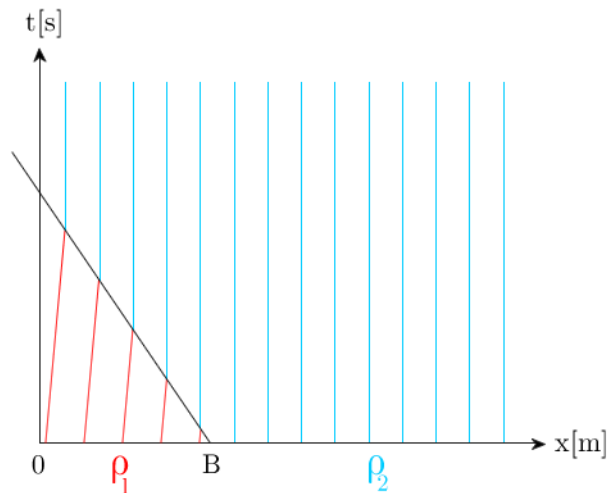
1. Hustota $\rho_1 = 0,021$ představuje 21 vozidel na 1 km a vozidla se pohybují zadanou rychlostí $v_{max} = 14m/s$, což je $50km/h$. Hustota $\rho_2 = 0,2$ znamená 200 vozidel na 1 km nebo-li zácpu, vozidla mají nulovou rychlost. Jedná se tedy o 1. popisovaný případ, kdy $\rho_l < \rho_p$ viz obr. 51. Je třeba spočítat hodnoty směrnic charakteristik odpovídajícím zadaným hustotám ρ_1 a ρ_2 , což představuje dle (38) určit hodnoty $\varphi'(\rho_1)$ a $\varphi'(\rho_2)$. Dosadíme zadané hodnoty do vztahu (32):

$$\varphi'(\rho) = v_{max} - \frac{2\rho v_{max}}{\rho_{max}} = 14 - \frac{2 \cdot 0,021 \cdot 14}{0,2} \doteq 11. \quad (40)$$

Vypočteme rychlost šíření rázové vlny:

$$s = \frac{\varphi(\rho_2) - \varphi(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{0 - 0,26}{0,2 - 0,021} \doteq -1,47,$$

Výsledný grafický záznam charakteristik ukazuje obrázek 64.

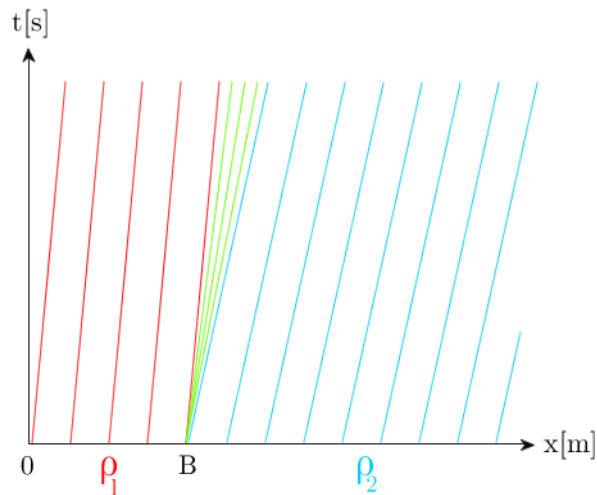


Obrázek 64: Charakteristiky pro příklad 1.

2. Druhý příklad je podobný prvnímu, ale rychlost ve druhém úseku činí $8,3\text{m/s} = 30\text{km/h}$. Ve druhé části úseku budou mít charakteristiky směrnice rovné hodnotě

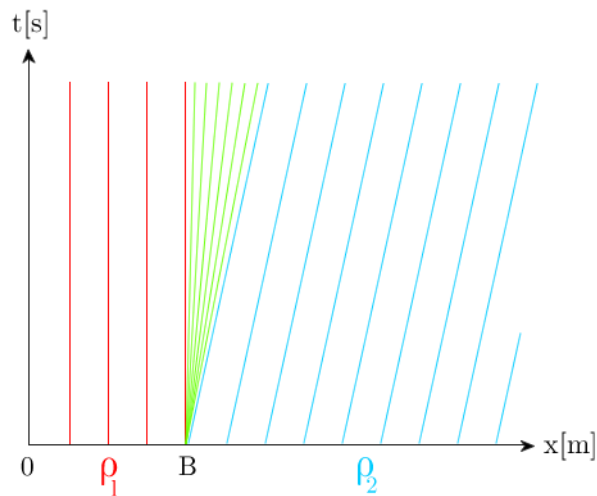
$$\varphi'(\rho) = v_{max} - \frac{2\rho v_{max}}{\rho_{max}} = 8,3 - \frac{2 \cdot 0,046 \cdot 8,3}{0,2} \doteq 4,5. \quad (41)$$

Směrnice charakteristik, které doplníme do klínu jako zelené přímky viz obr. 55, budou mít hodnoty postupně mezi hodnotami od 11 do 4,5. Hodnoty směrnice charakteristik v (t, x) - systému souřadnic mají převrácené hodnoty vypočítaných směrnice, tedy $1/11 \doteq 0,09$ a $1/4,5 \doteq 0,22$. Výsledek grafického znázornění charakteristik by nebyl příliš čitelný, proto zakreslíme opět charakteristiky do (x, t) - systému souřadnic viz obr. 65. Toto je důvod, proč představujeme znázornění charakteristik v obou souřadnicových systémech (t, x) a (x, t) .



Obrázek 65: Charakteristiky pro příklad 2.

3. V posledním příkladě se jedná o případ, kdy se vozidla ze zácpy rozjíždějí na maximální rychlost rovnou $8,3m/s = 30km/h$, tedy druhou popisovanou alternativu $\rho_l > \rho_p$ viz obr. 50. Situaci znázorníme s využitím předchozích výpočtů již snadno viz obr. 66.

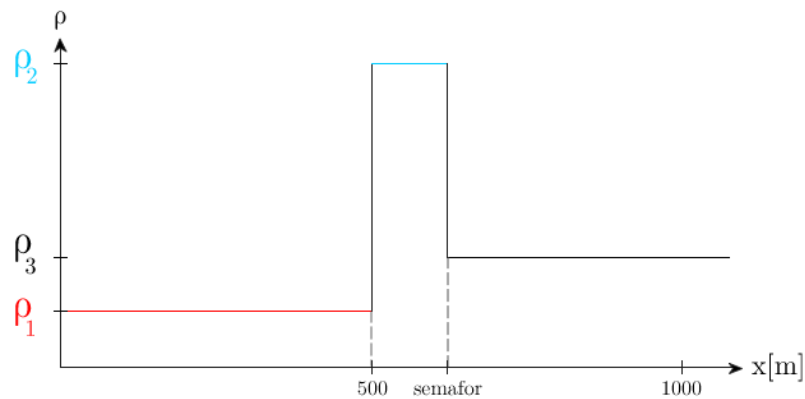


Obrázek 66: Charakteristiky pro příklad 3.

6.5 Modelový příklad

Počáteční podmínka může být zadána ve složitějším tvaru, kde se mohou vyskytnout kombinace všech popisovaných událostí. Provedme podrobnou analýzu jedné z nejčastějších situací na našich silnicích [21]. Uvažujme část vozovky, která se v čase $t = 0$ skládá z několika úseků. V úvodním úseku vozovky dlouhém 500 m je zadána počáteční hustota vozidel hodnotou ρ_1 (červená čára), dále následuje stometrový úsek zakončený *semaforem*, kde je hustota ρ_2 vozidel výrazně větší a je zakreslena modrou barvou. V tomto úseku již stojí kolona vozidel a čeká před

semaforem, kde svítí červená barva. V čase $t = 0$ se v místě polohy na semaforu rozsvítí zelené světlo a vozidla se začnou plynule rozjíždět, jejich provoz se postupně ustálí a je omezen pouze maximální danou hranicí rychlosti s hustotou rovnou ρ_3 viz obr. 67.



Obrázek 67: Počáteční podmínka

Znázorníme-li vybranou skupinu odpovídajících charakteristik a určíme pomocí Rankinovy-Hugoniotovy podmínky přímky, po nichž se šíří jednotlivé nespojitosti, získáme podrobný přehled o situaci na sledované vozovce v závislosti na měnícím se čase. Nejdříve znázorníme charakteristiky se směrnicemi rovnými $\varphi'(\rho_1)$ červenou barvou. Přímky musí mít kladnou směrnicí, protože funkce toku je konkávní a $\rho_1 < \rho_s$, a proto platí $\varphi'(\rho_1) > 0$. Modré charakteristiky budou mít naopak záporné směrnicí, protože tok vozidel se v této části musí snižovat čili $\varphi'(\rho_2) < 0$. Dochází ke vzniku rázové vlny, a proto je třeba určit rychlost jejího šíření, který je s pomocí Rankinovy-Hugoniotovy podmínky dán následovně

$$s = \frac{\varphi(\rho_2) - \varphi(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1},$$

což je vždy záporné číslo. Vlna brzdících vozidel přijíždějících k zóně začínající místem $x_{\text{zelená}}$, bude postupovat směrem zpět. V době, kdy se rozsvítí zelené světlo v místě *semafor*, se kolona vozidel začne rozjíždět. Protože $\rho_s < \rho_3$, doplníme v prázdném úseku charakteristiky se směrnicemi mezi hodnotami $\varphi'(\rho_2)$ a $\varphi'(\rho_3) > 0$. Nyní je nutné postupně určit směry, kterými se bude skok hustoty mezi červenou a zelenou oblastí šířit. Opět lze použít Rankinovy-Hugoniotovy podmínky a dostáváme

$$s = \frac{\varphi(\rho_{\text{zelená}}) - \varphi(\rho_1)}{\rho_{\text{zelená}} - \rho_1},$$

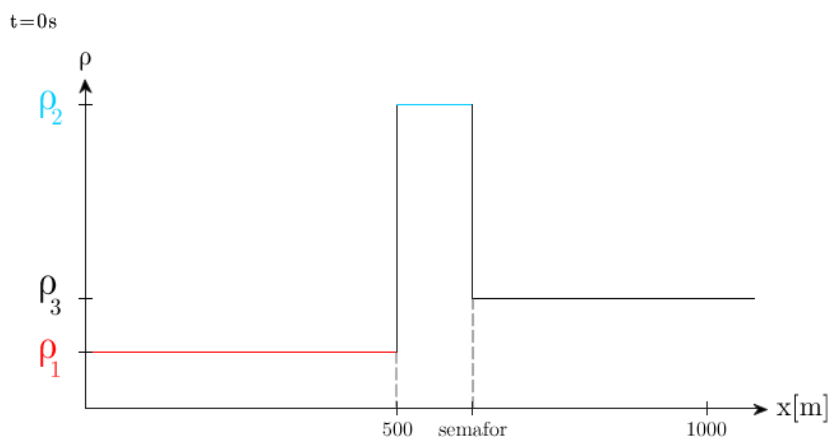
kde $\rho_{\text{zelená}}$ je hodnota hustot přenášených zelenými charakteristikami. Očekáváme, že přechodová funkce bude chvíli ze začátku klesat, protože než se signál rozjezdu dostane k posledním řidičům, uběhne jistý časový úsek. Po nějakém časovém momentu se bude hodnota tokové funkce zvyšovat a hustota se bude snižovat. Tento trend bude pokračovat i po dosažení místa, kde vozidla nabírají danou maximální rychlost a jejich provoz již není omezen. Rychlost šíření nespojitosti je dán vztahem

$$s = \frac{\varphi(\rho_3) - \varphi(\rho_1)}{\rho_3 - \rho_1},$$

kde s musí mít kladnou hodnotu, protože díky zadaným podmínkám je čítec i jmenovatel zlomku kladný.

6.6 Počáteční podmínky

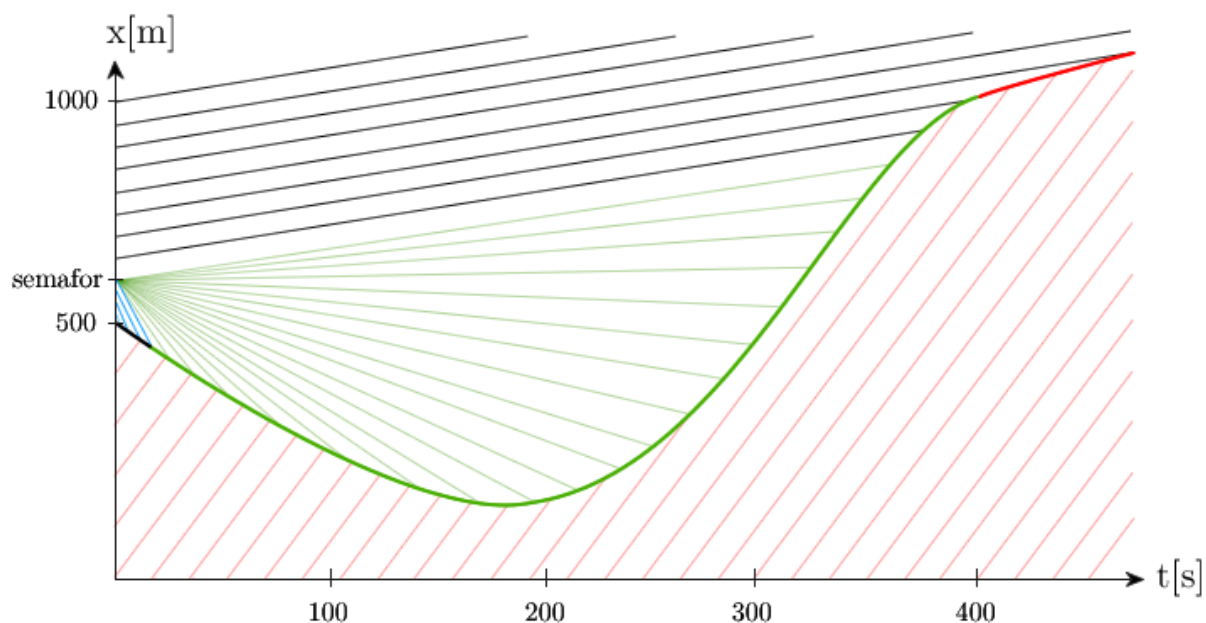
Sledovaný úsek komunikace o délce 1000 m je rozdělen na tři části: 0 m – 500 m s maximální rychlostí 50 km/h, vozidla zde dodržují bezpečnostní vzdálenost 2 s, 500 m – 600 m s maximální hustotou vozidel simulující kolonu před semaforem (maximální rychlost 0 km/h) a úsek 600 m – 1000 m s maximální rychlostí 30 km/h. Počáteční podmínka je zadána v 1. úseku hodnotou $\rho_1 = 0,021$ vozidel/m (červená barva), ve 2. úseku $\rho_2 = 0,2$ vozidel/m (modrá barva) a v posledním úseku je počáteční hodnota hustoty dána hodnotou $\rho_3 = 0,046$ vozidel/m (černá barva) viz obr. 68. V čase $t = 0$ s se na semaforu rozsvítí zelená barva a vozidla se začnou rozjíždět. Pro formulaci tohoto problému jsme záměrně využili data z předchozích příkladů.



Obrázek 68: Počáteční podmínka

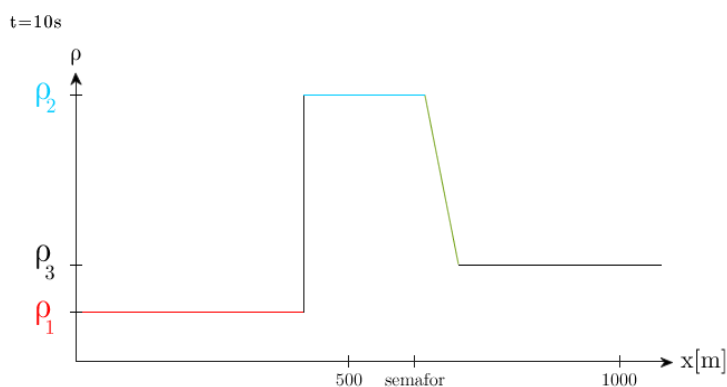
6.7 Grafické výsledky

V první části vyřešíme danou počáteční úlohu pomocí charakteristik, tedy z makroskopického úhlu pohledu. Zpracujeme veškeré informace dané počátečními podmínkami dle postupu uvedeného v předchozí části. Zakreslíme-li všechny odpovídající charakteristiky a určíme-li pomocí Rankine-Hugoniotovy podmínky rychlosti, jimiž se šíří jednotlivé nespojitosti, pak získáme podrobný přehled o situaci na sledované vozovce v závislosti na měnícím se čase viz obr. 69. Způsob výpočtu a hodnoty směrnic charakteristik budeme kopírovat z příkladů uvedených výše.

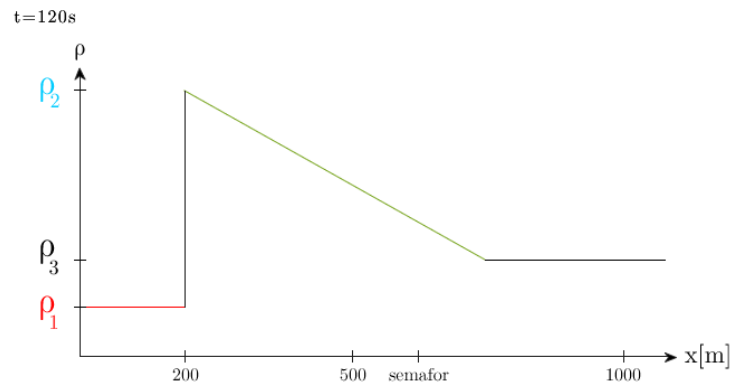


Obrázek 69: Výsledné znázornění charakteristik

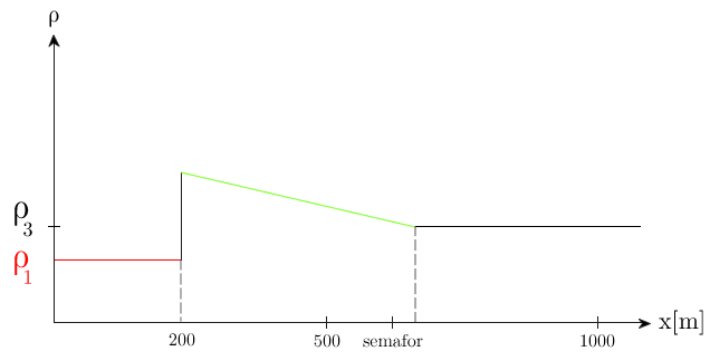
Z grafu lze určit přibližné hodnoty času a místa, ve kterém dochází ke změnám v toku dopravního proudu. V místě, kde se protíná červená charakteristika se zelenou charakteristikou přenášející v součtu hodnotu hustoty přibližně rovnou 0,2 vozidel/m, je směrnice přechodové linie rovná nule (k tomuto stavu dochází přibližně v čase 180 s v místě přibližně 160 m od startu). V čase zhruba 360 s již vozidla nejsou omezoována a mohou volně projíždět kolem semaforu. Mapu všech charakteristik danou grafem na obr. 69 bylo nutné stáhnout ve své šířce, protože by ji nebylo možné ve vhodném měřítku umístit do textu. Proto sklony charakteristik zcela přesně neodpovídají realitě, ale vystihují podstatu problému. Na následujících grafech obr. 70, 71, 72 a 73 je znázorněna závislost hustoty na místě ve vybraných časových okamžicích, grafy přehledně ukazují, jak se situace na vozovce v průběhu daného časového okamžiku mění.



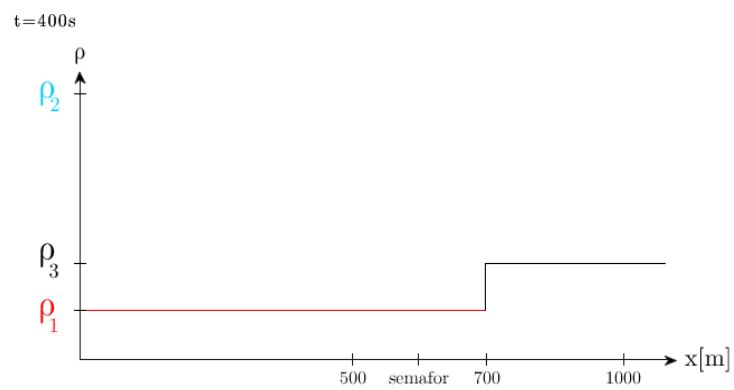
Obrázek 70: $t = 10s$



Obrázek 71: $t = 120s$



Obrázek 72: $t = 200s$



Obrázek 73: $t = 400s$

Shrnutí. Tato kapitola prezentuje studentům zcela nové téma. V úvodu se připomínají pojmy známé z běžného života jako jsou plynulý provoz, dopravní zácpa, toková funkce atd., které

jsou potřebné k tomu, aby bylo možné charakterizovat dopravní provoz. Použití makroskopického přístupu k modelování dané dopravní situace se může stát novou a přínosnou součástí výuky. Dále jsou studenti seznámeni s postupem, jak popsat závislost hustoty dopravního provozu na čase pomocí parciální diferenciální rovnice a jak lze tuto rovnici řešit. Je zde velmi podrobně popsána metoda charakteristik s využitím řady konkrétních příkladů. Všechna jmenovaná témata jsou pro studenty velkou novinkou a současně se zde nabízí způsob, jak spojit teorii s praxí. K dalšímu studiu lze doporučit např. [13] nebo [20].

7 Simulační model

7.1 Popis modelu

Druhý zkoumaný a užitý přístup k návrhu modelu dopravního toku a řešení parciální diferenciální rovnice má multiagentní charakter [15], [16]. Chování skupiny vozidel bude modelováno jako agregace - celkový souhrn chování jednotlivých vozidel. I zde je nutné využít určitá data popisující systém jako celek, je však možné individuálně modelovat chování každého vozidla. Při modelování pohybu jednotlivých vozidel nebude pro popis systému nutná znalost výše studovaných parciálních diferenciálních rovnic a práce s nimi. Globálními parametry jsou v tomto případě povolená rychlost v jednotlivých úsecích a frekvence výskytu vozidel, která byla nastavena na pevnou hodnotu 1 vozidlo za 3 s. Dalším globálním parametrem je pak délka vozidla stanovená na 4,5 m a minimální vzdálenost od vozidla bezprostředně před vozidlem zkoumaným stanovená na 0,5 m. Výše uvedená frekvence výskytu vozidel tak odpovídá hustotě 0,021 vozidel/m při maximální rychlosti 50 km/h. Tyto počáteční podmínky byly zvoleny tak, aby odpovídaly počátečním podmínkám spojených s předchozí řešenou úlohou, abychom mohli získané výsledky v závěru porovnat a vyhodnotit.

Konceptuální model úlohy vychází z modelování vozidla jako samostatného agenta - jednotlivce s vlastními daty a chováním a jeho umístění do prostředí sledovaného úseku komunikace. Po svém vstupu do prostředí je agent inicializován a umístěn na pozici danou buď vstupními podmínkami nebo (pro čas $t > 0$) na počátek modelovaného úseku ($x = 0$ m). Agent si také při své inicializaci ukládá informaci o agentovi bezprostředně před ním, aby jej mohl kontaktovat při zjišťování vzájemné polohy a vzdálenosti mezi vozidly. Při inicializaci je také nastaven cílový bod, do kterého se agent má dostat, tedy konec modelovaného úseku. Další chování agenta je modelováno pomocí stavových diagramů a jeho hlavní činností je pohyb po modelovaném úseku komunikace, přičemž v pravidelných intervalech (v modelu je použito 0,05 s modelového času) agent kontroluje svou vzdálenost od vozidla (agenta) před ním. Při této kontrole je zásadní, zda tato vzdálenost není menší, než vzdálenost bezpečná pro danou rychlost, která (vyjádřená v čase) činí 2 s. Pokud je vzdálenost menší, agent na tento stav reaguje úpravou své rychlosti tak, aby vzdálenost bylo možné považovat opět za bezpečnou. Pokud je vzdálenost mezi vozidly dostatečná, agent nastaví svou rychlost na maximální povolenou hodnotu v daném úseku. V případě, že na semaforu naskočí červená, je bod na trase, kde se semafor nachází, považován za překážku. Reakce na tuto překážku je shodná s reakcí na vpředu jedoucí vozidlo s nulovou rychlostí. Důsledkem je opět postupné snižování rychlosti ve výše popsaných krocích až k její nulové hodnotě.

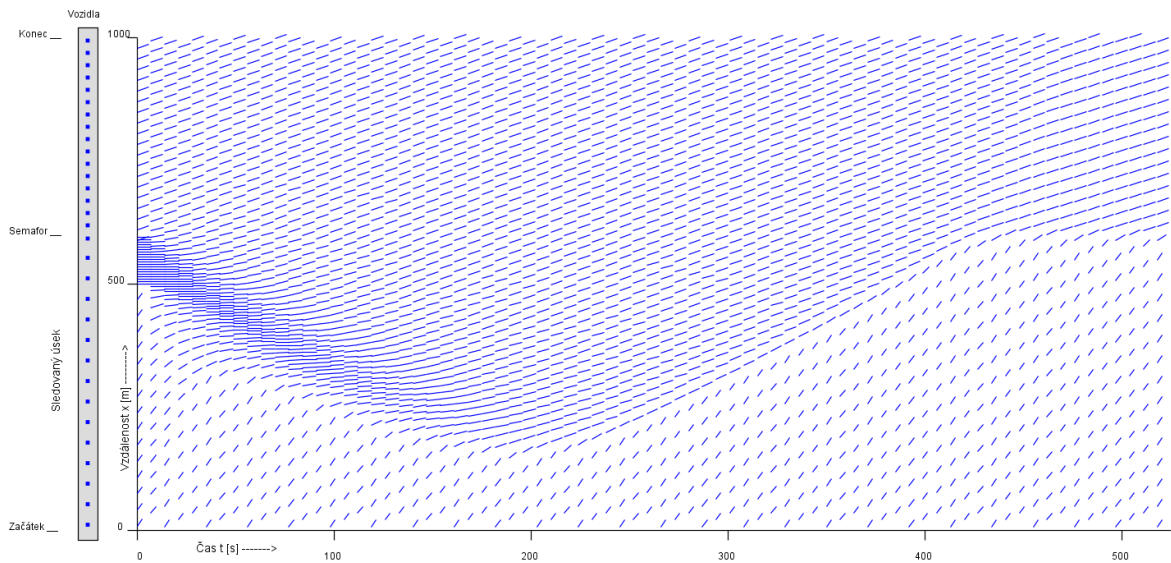
7.2 Software AnyLogic

Pro zpracování dat a vyřešení nastavené úlohy byl vybrán software AnyLogic (viz [2]), který byl vypracován a v současnosti je neustále rozvíjen pro aplikaci v mnoha oblastech lidské činnosti. Společnost AnyLogic Company poskytuje simulační nástroje, technologie a konzultační služby pro podnikové aplikace. Jazyk AnyLogic má velkou flexibilitu a umožňuje zachytit složitost a různorodost ve vývoji rozličných dynamických systémů. Práce s tímto produktem je pro uživatele po krátkém seznámení s jeho ovládáním poměrně jednoduchá a konečný výstup výsledků je velmi názorný. Software AnyLogic je snadno dosažitelný, přístupná verze se označuje jako PLE - personal learning edition. Je určena jen pro osobní potřebu či výuku a tímto způsobem je také nutné výstupy interpretovat. Multiagentní simulaci lze využít v mnoha oblastech jako například

- biologie - populační dynamika, chování společenství hmyzu či zvířecích komunit, chování buněk
- ekonomie - logistika, výrobní procesy, spotřební trh, pojišťovnictví, finanční trhy, obchodní strategie
- infrastruktura - dopravní provoz a světelná signalizace na křižovatkách
- společenské vědy - modely šíření informací, organizační sítě
- armáda

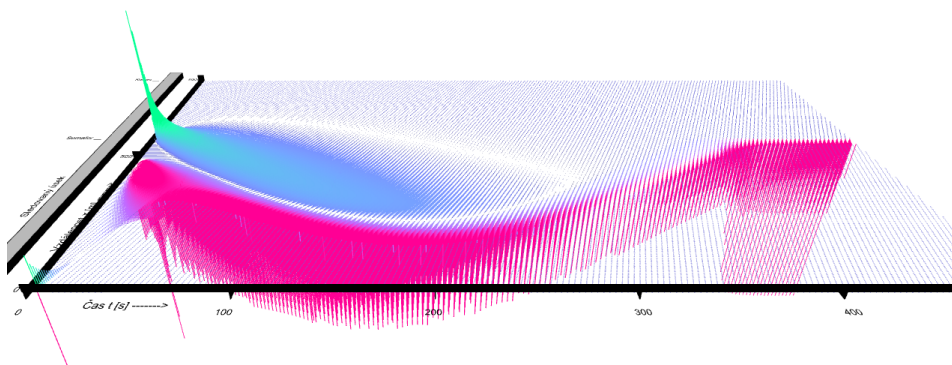
7.3 Grafické výsledky

V případě druhého multiagentního přístupu se výsledný graf konstruoval následovně. Počáteční podmínka byla nastavena tak, že ve všech třech úsecích bylo vygenerováno a rozmístěno právě tolik agentů, kolik by odpovídalo maximální rychlosti v úseku. Čas $t_0 = 0$ modelového času byl nastaven pro okamžik, kdy na semaforu umístěném v místě vzdáleném 600 m od počátku (před kolonou ve druhém úseku komunikace) naskočí zelená. Výsledky provedené simulace byly vizualizovány ve dvou rovinách. Prvním výstupem je tak graf v systému souřadnic (t, x) , ukazující polohu každého z agentů v konkrétním čase (obr. 74) a jeho aktuální rychlost (směrnice úsečky v daném bodě). Na tomto grafu je velmi dobře viditelný přechodový děj, který proběhne při rozjezdu kolony ve druhém úseku. Hustota čar ve svislém směru zde ukazuje na hustotu vozidel na celé komunikaci v zadaném čase, ve vodorovném směru pak můžeme sledovat časový vývoj děje v konkrétním místě (vývoj rychlosti vozidel v tomto místě). Graf byl aktualizován s frekvencí 7 s. V levé části obrázku je pro názornost zobrazena schematicky celá trasa s polohou vozidel. Z grafu je možné odečíst několik klíčových hodnot. Předně je možné sledovat proces rozjíždění kolony stojící před semaforem. Z grafu lze odhadnout, že poslední vozidla se rozjela teprve přibližně 120 s po změně barvy semaforu na zelenou. Zpomalení vozidel však pokračovalo i nadále a nejhorší situace nastala v čase $t = 200$ s, kdy se začátek omezení rychlosti vozidel posunul do místa $x = 165$ m od počátku sledovaného úseku. Přechodový děj pak odezněl v čase $t = 432$ s, přičemž nadále se již projevila pouze snížená rychlost v posledním úseku sledované trasy [17].



Obrázek 74: Poloha vozidel a jejich aktuální rychlost

Pro větší názornost uvedeného děje byl vytvořen také 3D graf uvedený na obr. 75. Ten znázorňuje vývoj změny rychlosti v čase pro každé vozidlo. Záporné hodnoty difference rychlosti (zpomalení) jsou uvedeny červeně se sytostí odpovídající intenzitě uvedeného jevu, naopak při zrychlení jsou použity odstíny zelené. Okamžiky a místa s malou změnou rychlosti jsou v odstínech modré. Z grafu je dobře patrné i trvalé snížení rychlosti na začátku posledního úseku sledované trasy po odeznění přechodového děje.



Obrázek 75: 3D graf

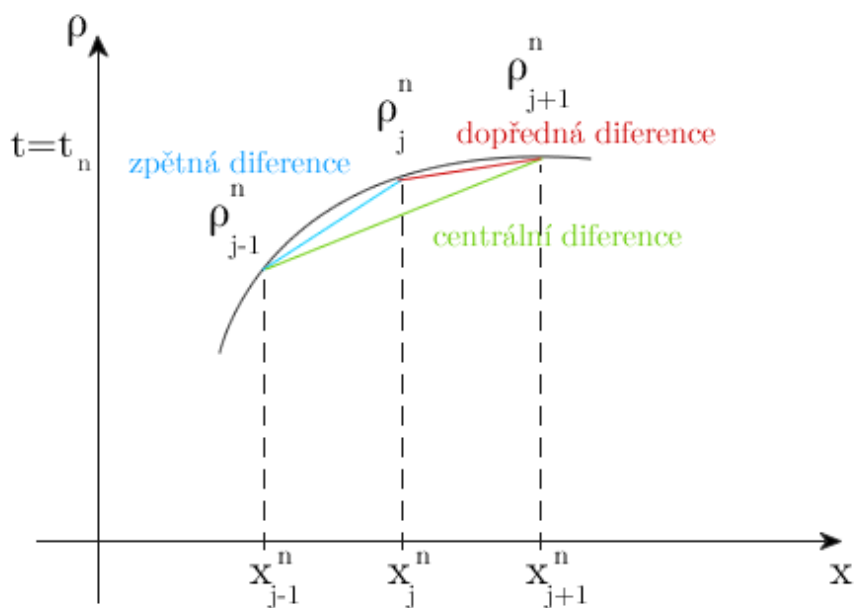
Shrnutí. Tato kapitola nabízí další pohled na modelování dopravního provozu z mikroskopického úhlu pohledu. Modelování je zde představeno pomocí simulačního programu AnyLogic, který je pro potřeby výuky volně dostupný a práce s tímto softwarem je zajímavá a zábavná. Je fakt, že naučit se s tímto produktem vyžaduje v úvodu jisté úsilí a čas, ale pak je možné simulovat řadu různorodých procesů např. dopravních nebo logistických. Grafický výstup je velmi názorný a pro studenty, kteří se chtějí věnovat programování, může být také přínosným. Závěrečné srovnání výsledků obou metod - makroskopické a mikroskopické při řešení totožné úlohy pak přináší studentům další poznatky.

8 Numerické řešení

V této části práce budeme věnovat pozornost řešení parciální diferenciální rovnice (33) s počáteční podmínkou ve tvaru $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ pomocí numerických metod. Jedná se o rozdílný přístup k řešení daného problému, řešení budeme konstruovat na jiné bázi, než tomu bylo v předcházejících dvou kapitolách. Část numerické matematiky, která se touto problematikou zabývá, je velmi rozsáhlá, proto se zaměříme pouze na některé vybrané úseky.

8.1 Diference

Diferenční metody jsou založeny na tom, že k aproximacím derivací vyskytujících se v řešené rovnici využívají tzv. „diferencí“. Tento přístup v úvodu předpokládá, že interval, na kterém hledáme řešení, rozdělíme na daný počet N podintervalů. Budeme zde uvažovat, že všechny podintervaly mají totožné délky. Označme $(j + 1)$ -ní bod dělení symbolem x_j , $j = 1, \dots, N$ a vzdálenost mezi sousedními uzly symbolem Δx , pak platí $x_j = j\Delta x$. Obdobným způsobem zavedeme konstantní dělení časového intervalu s časovým krokem $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, kde n je celé číslo a platí $t_n = n\Delta t$. Budeme předpokládat, že hodnota $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ je konstantní. Aproximaci přesného řešení $\rho(x_j, t^n)$ v bodě x_j a v čase t_n označenou symbolem ρ_j^n budeme zapisovat pomocí symbolu R_j^n . Znázorníme-li trojici sousedních bodů x_{j-1} , x_j a x_{j+1} jako na obr. 76,



Obrázek 76: Typy diferencí

pak lze popsat hlavní myšlenku aproximace hledaného řešení pomocí diference třemi různými způsoby. K aproximaci derivace funkce ρ_j^n můžeme použít dvojici sousedních bodů těmito cestami:

$$(\rho_j^n)_x \approx \frac{\rho_j^n - \rho_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (42)$$

$$(\rho_j^n)_x \approx \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_j^n}{\Delta x} \quad (43)$$

$$(\rho_j^n)_x \approx \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (44)$$

Vztah (42) se nazývá *zpětná diference*, vzorec (43) *dopředná diference*. Odečtením vztahů (43) od (42) získáme vzorec (44) tzv. *centrální diference* [6]. Jak je patrné z obr. 76, jedná se o to, že funkční hodnoty funkce $\rho(x, t^n)$ například v intervalu $\langle x_{j-1}^n, x_{j+1}^n \rangle$ nahradíme hodnotami na spojnici bodů ρ_{j-1}^n a ρ_j^n (na obr. 76 body úsečky zakreslené modrou barvou). Jedná se o aproximaci derivace ve smyslu úvah popsanych v části 2.3 opírajících se o Heineho větu. Přesná hodnota se od aproximované hodnoty liší o chybu, kterou lze určit na základě postupu využívající *Taylorovy věty*.

Poznámka

Nechť je dána spojitá funkce $f(x)$. Za jistých předpokladů o funkci $f(x)$ platných v okolí bodu a lze tuto funkci vyjádřit ve tvaru mocninné řady. Toto vyjádření funkce prostřednictvím mocninné řady se nazývá *Taylorův rozvoj* funkce $f(x)$ v bodě a a mocninná řada je známá pod názvem *Taylorova řada*. Pro přibližné vyjádření hodnot funkce není nutné vyjadřovat všechny členy Taylorovy řady, ale můžeme zanedbat členy s vyššími derivacemi. Získáme tím tzv. *Taylorův polynom*. Taylorův polynom tedy aproximuje hodnoty funkce, která má v daném bodě derivaci, pomocí polynomu, jehož koeficienty závisí na derivacích funkce v tomto bodě. V případě existence všech konečných derivací funkce $f(x)$ v bodě a lze Taylorovu řadu zapsat jako

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Rozvoj funkce $f(x)$, která má v okolí bodu a konečné derivace do $(n+1)$ -ního řádu, lze v okolí bodu a vyjádřit tímto způsobem

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + Q_{n+1}^{f,a}(x),$$

kde $Q_{n+1}^{f,a}(x)$ je funkce, pro kterou platí

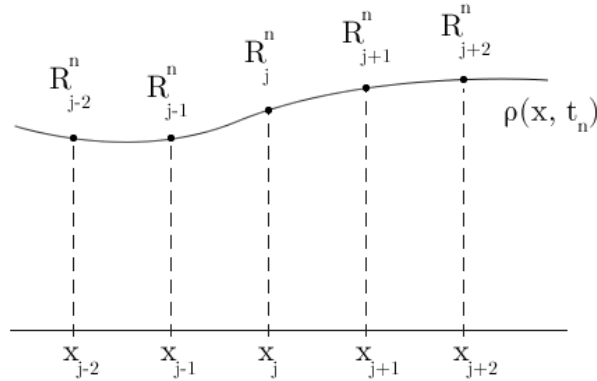
$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n+1}^{f,a}(x) = 0.$$

Jinými slovy: Chyba, které se dopustíme, jestliže funkci $f(x)$ za daných předpokladů nahradíme funkcí $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, má po vydělení funkcí x^{n+1} limitu pro $n \rightarrow \infty$ rovnou 0. Funkce $Q_{n+1}^{f,a}(x)$ představuje chybu, které se nahrazením funkce f Taylorovým polynomem dopustíme a lze ji vyjádřit např. ve tvaru

$$Q_{n+1}^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde c je bod z okolí bodu a . Taylorovu větu lze využít jako nástroj na konstrukci různých poměrných diferencí a také ke studiu toho, jak aproximují příslušnou derivaci.

Dále definujme vektor R^n jako vektor se složkami R_j^n , $j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ viz obr. 77.



Obrázek 77: Diskretizace hledané funkce

Stejným způsobem lze nahradit i derivace funkce ρ_j^n podle proměnné t . S využitím kombinací uvedených typů aproximací derivací - diferencí lze získat celou řadu numerických schémat. Abychom ale skutečně získali proces, který povede k vytčenému cíli, je potřeba kontrolovat některé kroky, aby byla konkrétní numerická metoda efektivně použitelná. K těmto důležitým částem kontrolní činnosti patří i následující proces.

Jak jsme nastínili výše, naším cílem bude konstruovat aproximaci řešení zadané úlohy tím způsobem, že využijeme znalostí informací z předchozích kroků a z hodnot ve dvou sousedních bodech budeme „skládat“ jistým postupem cílovou funkci tak, aby splňovala rovnici $\rho_t + v\rho_x = 0$ s počáteční podmínkou $\rho(x, t) = \rho_0(x - vt)$. Hledáme lineární kombinaci hodnot uzlů ρ_j^n a ρ_{j-1}^n tak, aby platilo

$$\rho_j^{n+1} = k_1\rho_j^n + k_2\rho_{j-1}^n, \quad (45)$$

kde k_1 a k_2 jsou reálné konstanty, které budou svou volbou určovat typ konkrétní metody. Navíc budou tyto konstanty nezáporné, aby byla získaná aproximace výsledkem operací se skutečnými daty. Představme si, že hledané řešení může být i konstantní funkcí, tudíž $\rho(x, t) = \rho$. Pak je splněna rovnost ve tvaru

$$\rho = k_1\rho + k_2\rho,$$

odtud na základě předchozích úvah plyne

$$\rho = (k_1 + k_2)\rho \Rightarrow k_1 + k_2 = 1.$$

Zvolme $k_1 = \alpha$ a $k_2 = 1 - \alpha$, kde α je reálné číslo, pro které platí $\alpha \leq 1$. Tato podmínka na zvolený parametr α bude mít při formulaci konkrétní numerické metody velký význam. Zmíněná lineární kombinace dvou bodů bývá označována termínem *konvexní*, (pokud do úvahy zahrneme krajní body úsečky ρ_j^n a ρ_{j-1}^n , budeme počítat i s vnitřními body této úsečky).

8.2 Diferenční metody

Nechť je dán interval $\langle a, b \rangle$ a jeho rozdělení tak, jak jsme popsali v úvodu, kdy $x_j, j = 0, \dots, N$, přičemž $x_0 = a, x_N = b$. Dále položíme $x_j = j\Delta x$. Obdobným způsobem zavedeme konstantní dělení časového intervalu s časovým krokem $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, kde n je celé číslo a platí $t_n = n\Delta t$ pro t . Předpokládejme, že hodnota $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ je konstantní. Připomínáme, že řešíme úlohu

$$\rho_t + \varphi_x = 0,$$

kde $\varphi_x = v\rho_x, v > 0$, s počáteční podmínkou ve tvaru

$$\rho_x(0) = \rho_0.$$

Aproximace přesného řešení v bodě x_j a v čase t_n označenou symbolem ρ_j^n budeme zapisovat pomocí symbolu R_j^n . Přepišme parciální diferenciální rovnici tím, že nahradíme příslušné parciální derivace vybranými diferencemi takto:

$$\frac{R_j^{n+1} - R_j^n}{\Delta t} + v \frac{R_j^n - R_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (46)$$

Upravme vztah (46) do následující podoby

$$R_j^{n+1} = R_j^n - v \frac{\Delta t}{\Delta x} (R_j^n - R_{j-1}^n). \quad (47)$$

Výše popsaná numerická metoda se nazývá *metoda upwind*. Název tohoto typu aproximace odpovídá způsobu, jakým je prostorová diskretizace volena a to tak, že se pro výpočet berou v úvahu hodnoty proti směru pohybu (v případě $v > 0$). Hodnotu R_j^{n+1} jsme získali jako lineární kombinaci hodnot R_j^n a R_{j-1}^n a aby metoda pracovala ve smyslu naší úvahy v předchozím odstavci, musí být splněna podmínka

$$v \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (48)$$

Poněvadž hodnota konstanty v je pevně dána a rozdělení intervalu pomocí dělicího kroku Δx rovněž, bude nutné volit velikost časového kroku Δt tak, aby byla podmínka (48) splněna. Tato podmínka získala pojmenování *Courantova-Friedrichsova-Lewyho podmínka* (zkráceně CFL podmínka) a bude hrát jistou roli při posuzování vlastností metody.

Pokud nahradíme hodnotu ρ_j^n kombinací sousedních hodnot ve tvaru $\frac{R_{j+1}^n - R_{j-1}^n}{2\Delta x}$, pak můžeme přepsat parciální diferenciální rovnici $\rho_t + \varphi_x = 0$ takto

$$\frac{R_j^{n+1} - \frac{1}{2}(R_{j-1}^n + R_{j+1}^n - R_{j-1}^n)}{\Delta t} + v \frac{R_{j+1}^n - R_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (49)$$

Po úpravě tohoto vztahu lze definovat další typ numerické metody nazvané *Laxova-Friedrichsova metoda* následovně

$$R_j^{n+1} = \frac{1}{2}(R_{j-1}^n + R_{j+1}^n) - v \frac{\Delta t}{2\Delta x}(R_{j+1}^n - R_{j-1}^n). \quad (50)$$

Metodu Laxovu-Friedrichsonovu pro řešení nelineární úlohy (34) lze definovat pak tímto způsobem

$$R_j^{n+1} = \frac{1}{2}(R_{j-1}^n + R_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\varphi(R_{j+1}^n) - \varphi(R_{j-1}^n)). \quad (51)$$

Ukážeme, jak lze využít této metody pro řešení našeho konkrétního modelového příkladu zadaného v části 4.6. Zvolíme-li tokovou funkci φ ve tvaru

$$\varphi(\rho) = v_{max}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right),$$

pak lze algoritmus (51) přepsat následovně

$$R_j^{n+1} = \frac{1}{2}(R_{j-1}^n + R_{j+1}^n) - \frac{v_{max}\Delta t}{2\Delta x}\left(R_{j+1}^n\left(1 - \frac{R_{j+1}^n}{\rho_{max}}\right) - R_{j-1}^n\left(1 - \frac{R_{j-1}^n}{\rho_{max}}\right)\right). \quad (52)$$

Základní ideu, na které jsou postaveny postupy v (47) nebo (51) lze obecně popsat následovně. Označíme-li symbolem ρ_{j-1}^n resp. ρ_j^n aproximaci hodnoty přesného řešení v bodě x_{j-1} resp. v bodě x_j v čase t_n představenou symbolem ρ_{j-1}^n resp. ρ_j^n , pak $\rho_{j-1}^n\Delta x$ je hustota vozidel v $(j-1)$ -ním úseku, $\rho_j^n\Delta x$ je hustota vozidel v j -tém úseku a konečně $\rho_j^{n+1}\Delta x$ představuje změnu hustoty vozidel za čas Δt . Potom dle úvah viz (36) platí

$$\rho_j^{n+1}\Delta x = \rho_j^n\Delta x - \Delta t(v\rho_j^n - v\rho_{j-1}^n),$$

kde $v\rho_j^n - v\rho_{j-1}^n$ je příslušný rozdíl hodnot tokových funkcí. Téma věnované aproximacím dané funkce a jejích derivací výrazně přesahuje rámec plánovaného obsahu práce a vyžadovalo by podrobnější analýzy.

8.3 Konvergence numerické metody

Úspěšnost použití popsané metody zaručuje *Laxova věta*, která tvrdí, že každá konzistentní lineární metoda je konvergentní právě tehdy, když je stabilní [2]. Stabilita metody zaručuje, že chyby, které můžou provázet vstupní data úlohy, jsou během výpočtu omezené. Stabilita může být důsledkem splnění *Courant-Friedrichs-Lewyho (CFL)* podmínky a to je tehdy, když platí

$$\frac{v\Delta t}{2\Delta x} \leq 1,$$

v případě nelineární úlohy má CFL podmínka tvar

$$|\varphi'(R_j^n)| \frac{\Delta t}{2\Delta x} \leq 1.$$

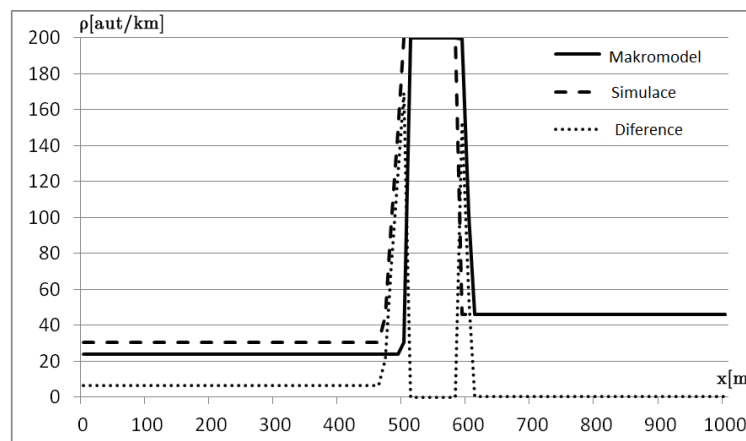
Tato podmínka je v sestrojeném algoritmu testem kontrolována. Konzistence metody s danou diferenciální rovnicí charakterizuje vlastnost, kdy příslušné diferenční schéma je v případě $\Delta t \rightarrow 0$ totožné s danou diferenciální rovnicí. Pojem konvergence přibližného řešení k přesnému

řešení pro $\Delta t \rightarrow 0$ a pro $\Delta x \rightarrow 0$ představuje tu vlastnost, že získané řešení lze libovolně zpřesňovat tím, že zmenšíme velikost časového kroku [6].

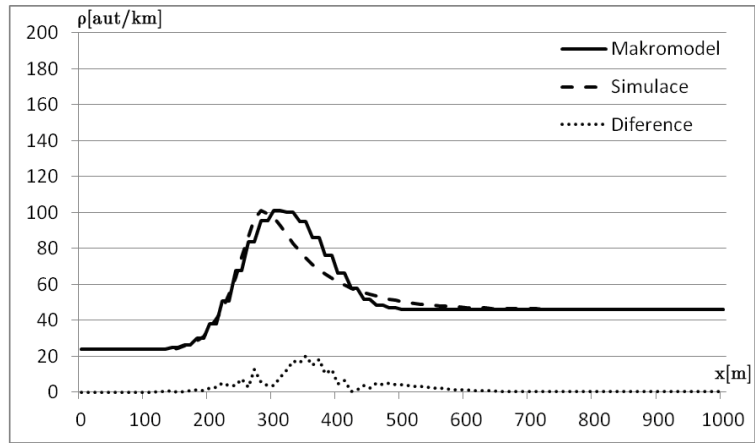
8.4 Grafické výsledky

Následující obrázky ukazují závislost hustoty vozidel přepočtenou na 1 km vozovky v předem vybraných časech, data jsme získali s použitím Laxovy-Friedrichsovy metody. Maximální rychlost v_{max} byla modelovou situací dána hodnotou 14 m/s a maximální hustota $\rho_{max} = 0,2$ vozidel na 1 m vozovky.

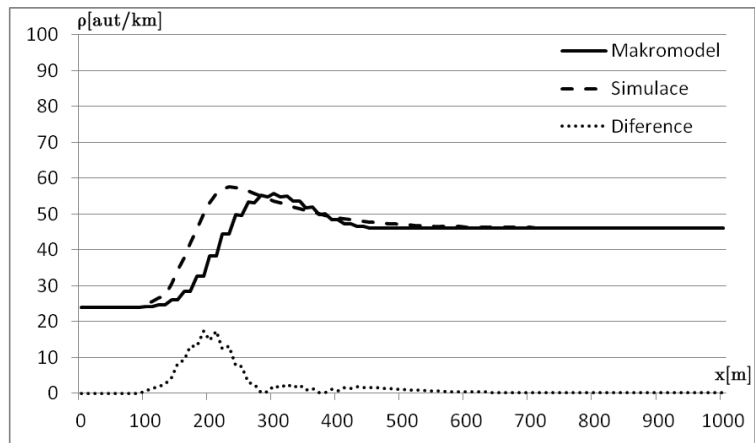
Ilustrativní průběh hustoty podél celého sledovaného úseku v konkrétních časových okamžicích lze znázornit i z druhého úhlu pohledu - mikroskopického opět s využitím programu AnyLogic [16]. Hodnota hustoty je v simulačním multiagentním modelu zjišťována ze vzdálenosti vozidel mezi sebou. Ta je následně přepočtena na počet vozidel na jednotku vzdálenosti a je přiřazeno místo na trase, ve kterém se nachází zadní z vozidel, mezi kterými byla změřena příslušná vzdálenost. Řešený přechodový jev je možné pozorovat i v rovině (x, ρ) , tedy sledováním hodnot hustoty vozidel v prostoru a konkrétním čase. Ilustrativní průběhy této hustoty podél celého sledovaného úseku v konkrétních časových okamžicích jsou na obr. 78, 79, 80, 81, 82. V obrázcích je rovněž vynesena křivka absolutních hodnot diferencí mezi hodnotami zjištěnými makromodelem a simulací. Nevýhoda této metodiky výpočtu je patrná na průběhu hustoty pro čas $t = 432$ s, kde jejím vlivem dochází k deformaci průběhu. Na zmíněných grafech vidíme průběh hustoty vozidel v několika zvolených okamžicích. Prvním je čas $t = 0$ s, kdy se v podstatě jedná o zobrazení vstupní podmínky a naskakuje zelená na semaforu. Dále je zaznamenán stav v čase $t = 120$ s, kdy přechodový jev již probíhá. Další snímek hustoty byl pořízen pro modelový čas $t = 200$ s, kdy přechodový jev vrcholí. Následuje snímek pro $t = 326$ s, kdy jev již začíná ustupovat a poslední snímek je pro čas $t = 432$ s, kdy přechodový jev již odezněl.



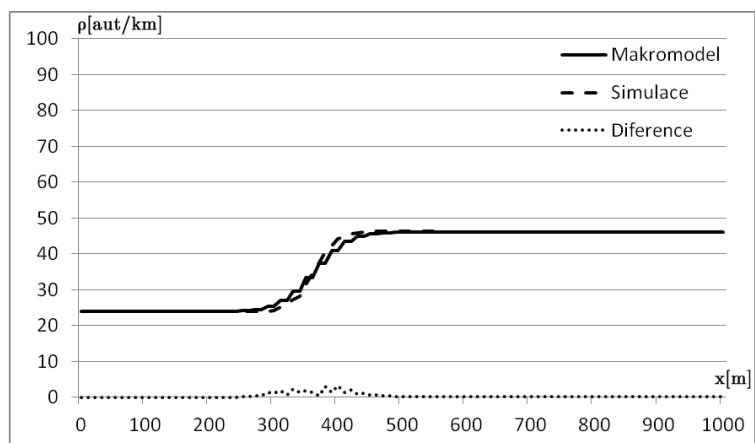
Obrázek 78: $t = 0s$



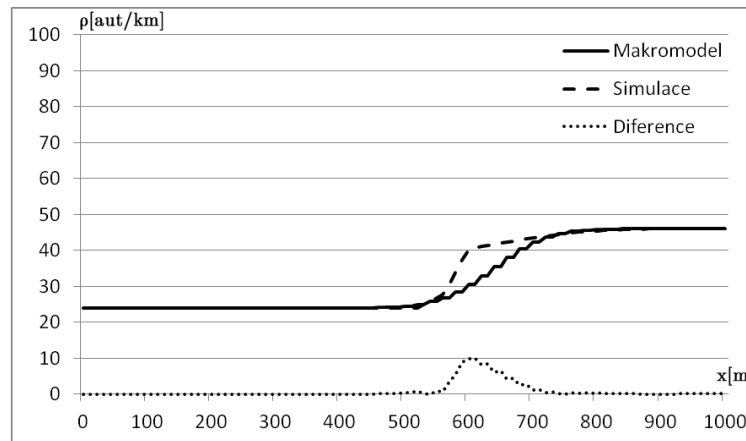
Obrázek 79: $t = 120s$



Obrázek 80: $t = 200s$



Obrázek 81: $t = 326s$



Obrázek 82: $t = 432s$

Hlavním cílem této části práce bylo porovnání dvou přístupů k popisu dynamiky dopravního toku při daných počátečních podmínkách. Výstupy jsou pak prezentovány v grafické podobě. Závěrem bylo provedeno porovnání absolutních odchylek hodnot hustoty získané s využitím obou modelů vynesené do grafů pro konkrétní okamžiky modelového času. Z údajů plyne, že největší rozdíly byly shledány v časech $t = 0$ s a $t = 432$ s, což je dáno především použitou metodou simulace a výpočtem hustoty vozidel v mikromodelu. Závěrem lze tedy formulovat, že oba modely popsaly zvolený přechodový děj minimálně se lišícími kvantitativními hodnotami. Při porovnání experimentálních výsledků je nutné mít na paměti i různý charakter obou modelů (makroskopický a mikroskopický). Numerický makroskopický model nemá možnost zachytit přechodový jev v takové míře detailu a je zde nutné řešit problém nespojitosti počáteční podmínky. Pro detailní zkoumání přechodového jevu je evidentně vhodnější model mikroskopický (simulační), který je však výpočetně náročnější. Grafické srovnání výsledků přináší v tomto případě poměrně uspokojivé výsledky, které „naznačují“, že modely odpovídají reálné situaci. V tomto úsudku je však potřeba opatrnosti a na základě algoritmu viz obr. 6 pečlivě ověřit úspěšnost použití daného modelu.

Shrnutí. V poslední kapitole jsme se věnovali řešení problému uvedeného v předchozích dvou kapitolách pomocí numerických metod, přičemž jsme se zaměřili pouze na některé vybrané úseky, protože je toto téma velmi rozsáhlé. V úvodu jsme se seznámili s pojmem diference a diferenční metody. Je zde popsán postup, jak lze numericky hledat řešení dané parciální diferenciální rovnice a je zde provedena stručná diskuze týkající se pojmů konvergence, stabilita a konsistence numerické metody, CFL podmínka. V závěru byly vypracovány grafy závislosti hustoty provozu na čase pro danou úlohu, které demonstrují výsledky řešení úlohy pomocí metod tří různých typů a současně bylo provedeno jejich porovnání. Pro prohloubení znalostí v této oblasti lze doporučit například publikace [6] nebo [13].

9 Závěr

Cílem této práce bylo vybrat a zpracovat vhodný studijní a učební materiál určený pro učitele pracující se studenty středních škol s rozšířenou výukou matematiky nebo pro vysokoškolské učitele, kteří vyučují studenty v oborech, kde matematika není předmětem hlavního studia. Partie uvedené v této práci byly záměrně voleny tak, aby nebyly součástí osnov na uvedených školách, ale aby využívaly znalostí studentů získaných v rámci obvyklého studia. Hlavní motivací bylo nabídnout učitelům možnost, jak si zvýšit vlastní nadhled a jak seznámit studenty s některými oblastmi matematiky a probudit v nich eventuální zájem. Bohužel v současnosti se stále více začíná projevovat fakt, že si studenti nedokáží spojit předmět matematiky s praxí, což má za následek velkou neoblubu matematiky jako takové.

Výše zmiňované postřehy vedly k výběru tématu disertační práce - sjednotit vybrané úseky matematiky do celku věnujícímu se problematice matematického a numerického modelování. Matematické modelování je v současnosti nedílnou součástí mnoha disciplín různého zaměření, s matematickými modely se setkáváme každodenně, ačkoliv si to často ani neuvědomujeme. Největší přínos přináší seznámení se s modelováním ovšem v tom, že při vytváření jistého konkrétního modelu je nutné propojit teorii s praxí a tím detailně pochopit řadu souvislostí a vztahů. Samotný proces modelování představuje pro studenty zcela nový pohled na řešení praktických problémů, rozvíjí jejich logické myšlení a propojuje několik předmětů zastoupených v učebních osnovách - matematiku, fyziku, výpočetní techniku, biologii, chemii, ekonomii atd. Z tohoto důvodu lze považovat matematické modelování za výjimečný způsob jak studenty zaujmout, podnítit ke studiu a třeba i nasměrovat ve výběru dalšího studia. Dále je třeba zdůraznit, že celá řada úloh, které se vyskytují v matematice, není analyticky řešitelná nebo je nalezení přesného řešení příliš obtížné. A právě numerická matematika, která se neustále ve svém vývoji posunuje, je velmi pestrým a moderním oborem, který se v těchto případech zaměřuje na nalezení přibližného řešení. Studenti mají možnost se prostřednictvím matematického a numerického modelování seznámit se základy numerické matematiky, o kterou se při modelování opíráme.

Při přípravě práce byla zaměřena pozornost na podrobné rozpracování textu do detailů tak, aby studenti pochopili hlavní myšlenku při modelování některých jevů, týkajících se například dopravního toku a podrobného popisu toho, jak se konstruovala množina charakteristik, jak lze využít iterační metody nebo jaký význam má Lipschitzova podmínka. K porozumění souvislostí mezi dvěma pohledy na problém - mikro a makroskopický, se zde nabízí využití softwaru Any-Logic, který je pro výuku dostupný zdarma. V současnosti je také velmi rozšířeným nástrojem v praxi například pro tvorbu jednotlivých simulací v rámci podnikových procesů. Práce s tímto produktem může být přínosná jednak pro učitele a jednak i pro studenty, pro které může mít i velký význam při rozhodování se o svém dalším zaměření. Kapitola, ve které se postupně v závěru dostaneme k termínům jako je chaos či bifurkace, by mohla studenty zaujmout, navíc se zde nabízí možnost výklad rozšířit a dotknout se zajímavých pojmů jako je namátkou fraktál.

V poslední části práce bylo obtížné se rozhodnout, jak podrobně a jakým tématům se věnovat. Proto tato kapitola představuje spíše stručný soubor vybraných postupů a termínů a sama o sobě by si zasloužila být rozšířena na samostatnou práci.

Práce obsahuje velmi početné množství grafů a obrázků, které byly až na jednotlivé ilustrace vypracovány samostatně. Současně byla vytvořena řada programů většinou v programovacím jazyce Microsoft Excel a Derive 6 například program pro znázornění bifurkačního diagramu viz obr. 30, programy pro grafické výstupy metody Upwind či Laxovy-Friedrichsovy metody.

V závěru je třeba zdůraznit hlavní záměr, který vedl k sepsání tohoto textu jako prostředku k pochopení již známých souvislostí a propojení s novými tématy, která jsou v současnosti součástí moderní vědy. Tento studijní materiál může být přijat vyučujícím individuálně a záleží na každém, jakým způsobem k výkladu látky přistoupí tak, aby studentům zpestřil a obohatil hodiny matematiky, fyziky, informatiky či historie. Výběr témat v této práci byl subjektivní, nabízí se velká škála možností, jak se k matematickému modelování postavit a zvolit příklady vhodné pro prezentaci modelů např. v ekonomii, fyzice či biologii. Cílem této práce bylo především upozornit na možnost zařazení tématu matematického modelování do současných učebních osnov na středních školách ve vhodném rozsahu a s rozumně voleným přístupem.

Reference

- [1] Alligood, K. T., Sauer, T. D., Yorke, J. A. *Chaos, An introduction to dynamical systems*, Springer, 2000, ISBN 0-387-94677-2
- [2] AnyLogic Company, 1992-2012. AnyLogic. [Online] Available at: <http://www.anylogic.com> [Accessed 2. 11. 2012]
- [3] Apeltauer, T., Holcner, P., Macur, J. *Ověření některých modelů dopravního proudu*, KONSTRUKCE Media, Ostrava, 2009
- [4] Bais, S. *Rovnice Symboly poznání* Amsterdam University Press, 2009. ISBN 978-80-7363-228-1
- [5] Beremlijski, P., Sadowská, M. *Aplikační úlohy pro radost*, 2015
- [6] Brandner, M., Egermaier, J., Kopincová, H. *Numerické modelování v hydrologii*, Plzeň, 2010
- [7] Brandner, M., Tuma, J., *Modelování dopravního proudu—složitý příběh jednoho typu matematických modelů*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Jednota českých matematiků a fyziků, 2011
- [8] Drábek, P., Holubová, G. *Elements of Partial Differential Equations*, Berlin : Walter de Gruyter, 2007, ISBN 978-3-11-019124-0
- [9] Eriksson, K., Estep, D., Johnson, C. *Applied Mathematics: Body and Soul*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004, ISBN 978-3-540-00891-0
- [10] Hairer, E., Wanner, G. *Analysis by Its History*, Springer, 2008. ISBN 978-0-387-77031-4
- [11] Hoffman, J., Johnson, C., Logg, A. *Calculus, Perspectives on Mathematics Education*, 2004
- [12] Hoogendoorn, S. P., Bovy, P. H. L. *State of the art of vehicular traffic flow modelling*, Journal of Systems and Control Engineering 215, 2001
- [13] Hokr, M. *Transportní procesy. Učební text*, Technická univerzita v Liberci, 2005
- [14] Hřebíček, J., Pospíšil Z., Urbánek J. *Úvod do matematického modelování s využitím Maple*, 2010. ISBN 978-80-7204-691-1
- [15] Jelínek, J., Vysoká, J. *Modelování dynamiky dopravního proudu*, Silnice Železnice, Ostrava - Vítkovice: Konstrukce Media, s.r.o., 2013, roč. 8, č. 2, s. 73-76. ISSN 1801-822X
- [16] Jelínek, J., Vysoká, J. *Porovnání modelů pro výpočet hustoty dopravního toku*, Silnice Železnice, Ostrava - Vítkovice: Konstrukce Media, s.r.o., 2013, roč. 8, č. 5, s. 110-112. ISSN 1801-822X

- [17] Jelínek, J., Vysoká, J. *O podchodach v modelirovanii transportnoj dinamiki*, Vestnik Astrachanskogo gosudarstvennogo techničeskogo universiteta, Astrachan': Astrachanskij gosudarstvennyj techničeskij universitet, 2014, roč. 2014, č. 1, s. 121-129. ISSN 2072-9502
- [18] Kutzler, B., Kokol-Voljc, V. *Úvod do Derive 6*, OEG, Austria, 2003
- [19] LeVeque R. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press 2002, pp. 203-213. ISBN 0521009243
- [20] LeVeque R. *Some Traffic Flow Models Illustrating Interesting Hyperbolic Behavior*, 2001
- [21] Lustri, Ch. *Continuum Modelling traffic Flow*, <http://people.maths.ox.ac.uk/lustri/Traffic.pdf>
- [22] Ralston, A. *Základy numerické matematiky*, 2. české vyd. Praha, Academia, 1978.
- [23] Roubíček, T. *Zářné ztřky matematického modelování?*, Vesmír 91, 484, 2012/9
- [24] Shih-Ching, L., Hsun-Jung, Ch. *Chaos and control of discrete dynamic traffic model*, Journal of the Franklin Institute 342, 2005
- [25] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií*, Nakladatelství Panorama, 1989. ISBN 80-7038-031-4

Seznam obrázků

1	Bludné nekonečno	9
2	Význam hodnoty derivace	10
3	Zobrazení tečny a sečny	13
4	V bodě B nelze stanovit hodnotu derivace funkce	14
5	Původ názvu sedlového bodu	18
6	Diagram matematického modelování	20
7	$2x = x$	23
8	$2x(1 - x) = x$	24
9	Představa přitahujícího místa	24
10	Představa odpuzujícího místa	25
11	$ g'(x) < 1$	26
12	Odpuzující pevný bod	26
13	Odpuzující pevný bod	27
14	Přitahující pevný bod	27
15	Přitahující pevný bod	28
16	$f(x) = 3.3x(1 - x)$	28
17	$f(x) = 3.5x(1 - x)$	29
18	$f(x) = 0.5x(1 - x)$	30
19	$f(x) = 3x(1 - x)$	30
20	$f(x) = 3.3x(1 - x)$	31
21	$f(x) = 4x(1 - x)$	31
22	$f(x) = 4x(1 - x)$	32
23	$f(x) = \sin x$	32
24	Toto je chaos	34
25	Chaos jinak	35
26	$f(x) = 2x(1 - x)$	36
27	$f(x) = 3.3x(1 - x)$	36
28	$f(x) = 3.5x(1 - x)$	37
29	$f(x) = 3.8x(1 - x)$	37
30	Bifurkační diagram	38
31	Volba počátečního bodu	39
32	$x = 3 - 4x$	41
33	$x = \frac{1}{4}(3 - x)$	42
34	Derivace funkce $\varphi(x)$ je menší než 1	42
35	Derivace funkce $\varphi(x)$ je větší než 1	43
36	Věta o střední hodnotě v realitě	44
37	Dva průsečíky	44
38	Volba počátečního přiblížení může ovlivnit výsledek	45
39	Další ukázka důležitosti volby počátečního přiblížení	45
40	$y = 3.3x(1 - x)$	46
41	Odhad intervalů, kde leží průsečíky funkcí $y = \log x$ a $y = 2x - 7$	47
42	Plynulý provoz	51
43	Omezený provoz	51

44	Zácpa	52
45	Závislost toku vozidel na hustotě vozidel	52
46	Maximum tokové funkce	53
47	Maximum tokové funkce	53
48	Konstantní hustota provozu	57
49	Zácpa	57
50	Vozidla se rozjíždějí	58
51	Vozidla se zpomalují	58
52	$\rho_l < \rho_p$	59
53	$\rho_l < \rho_p$	60
54	$\rho_l < \rho_p$	60
55	Doplnění charakteristik	61
56	Závislost hustoty na místě v čase $t = 0$	61
57	Závislost hustoty na místě v čase $t = t_1$	62
58	$\rho_l > \rho_p$	62
59	$\rho_l > \rho_p$	63
60	$\rho_l > \rho_p$	63
61	Rychlost šíření rázové vlny	64
62	Rychlost šíření rázové vlny	64
63	Skok v čase $t = t_1$	65
64	Charakteristiky pro příklad 1.	66
65	Charakteristiky pro příklad 2.	67
66	Charakteristiky pro příklad 3.	67
67	Počáteční podmínka	68
68	Počáteční podmínka	69
69	Výsledné znázornění charakteristik	70
70	$t = 10s$	70
71	$t = 120s$	71
72	$t = 200s$	71
73	$t = 400s$	71
74	Poloha vozidel a jejich aktuální rychlost	74
75	3D graf	74
76	Typy diferencí	75
77	Diskretizace hledané funkce	77
78	$t = 0s$	80
79	$t = 120s$	81
80	$t = 200s$	81
81	$t = 326s$	81
82	$t = 432s$	82

Seznam výběru publikovaných prací

Vysoká, J. *Example of Mathematical Modeling in High Schools*. APLIMAT 2017, 16th Conference on Applied Mathematics. Bratislava, 2017. ISBN 978-80-227-4650-2

Plachý, J., Vysoká, J., Vejmelka R., Horský, J., Vacek, V. *Changes in Adhesion of Bitumen Sheet to Primary Layer over the Course of time in Multilayer Waterproofing during Shear Testing*. Journal IOP Material Science and Engineering, Symposium WMCAUS 2017

Plachý, J., Vysoká, J., Vejmelka, R. *Suggestion of Limit Value of Flow Resistance for Reinforced Bitumen Sheets at Elevated Temperatures in Terms of Type of coating* In 17th International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2017. Sofia, Bulgaria

Vysoká, J., Smetanová, D. *Analysis of Attitude of Students Towards Mathematics and Physics*. APLIMAT 2016, 15th Conference on Applied Mathematics. Bratislava, 2016. ISBN 978-80-227-4531-4

Vysoká, J. *Using Simple Mathematics in The Sailing Problem*. Nase More, Dubrovnik: University of Dubrovnik, 2016, roč. 63, č. 3, s. 237-240. ISSN 0469-625

Plachý, J., Vysoká, J., Vejmelka, R. *Proposal of Limit Value of Flow Resistance for Reinforced Bitumen Sheets at Elevated Temperatures*. In 16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2016. Sofia, Bulgaria: STEF92 Technology Ltd., 2016. ISBN 978-619-7105-69-8

Smetanová, D., Vysoká, J. *Jak studenti vysokých škol vnímají využití matematiky v praktickém životě*. In Moderní matematické metody v inženýrství: sborník příspěvků. 1. vyd. Ostrava: Jednota slov. matematiků a fyziků, VSB-TU Ostrava, 2015. ISBN 978-80-248-3843-4

Jelínek, J., Vysoká, J. *O podchodach v modelirovanii transportnoj dinamiki*, Vestnik Astrachanskogo gosudarstvennogo techničeskogo universiteta, Astrachan': Astrachanskij gosudarstvennyj techničeskij universitet, 2014, roč. 2014, č. 1, s. 121-129. ISSN 2072-9502

Jelínek, J., Vysoká, J. *Porovnání modelů pro výpočet hustoty dopravního toku*, Silnice Železnice, Ostrava - Vítkovice: Konstrukce Media, s.r.o., 2013, roč. 8, č. 5, s. 110-112. ISSN 1801-822X

Plachý, J., Vysoká, J., Vejmelka, R., Petránek, V., Petříček, T., Kalousek, L., Bednářová, P. *The Statistical Evaluation of Thermal Resistance and Price of Bitumen Waterproofing Sheets*. In International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014, ICNAAM 2014. 1. vyd. Melville (New York): American Institute of Physics Publishing LLC, 2015. ISBN 978-0-7354-1287-3

Plachý, J., Vysoká, J., Vejmelka, R., Čaha, Z. *Correlation of Water Absorption Values of Bitumen Waterproofing Sheets Obtained according to CSN EN 14223 and CSN 503602*. COMMUNICATIONS, Žilina: University of Zilina, 2014, vol. 16, č. 4. ISSN 1335-4205

Jelínek, J., Vysoká, J. *Modelování dynamiky dopravního proudu*, Silnice Železnice, Ostrava - Vítkovice: Konstrukce Media, s.r.o., 2013, roč. 8, č. 2, s. 73-76. ISSN 1801-822X

Plachý, J., Petránek, V., Šuhajda, K., Vysoká, J., Petříček, T., Bednářová, P., Sidibe, K. *Bulk Density of Bitumen Sheets*. In ICMSE 2013 : Advanced Materials Research ICMSE 2013. Switzerland: Trans Tech Publications, 2013. ISBN 978-3-03785-724-3

Vysoká, Jana. *Chaos s podporou grafů*. In Sborník příspěvků 4. konference. České Budějovice: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích, 2009. ISBN 978-80-7394-186-4