CHYBNÉ PŘEDPOKLADY V GEOMETRICKÝCH DŮKAZECH
INCORRECT PREMISES IN GEOMETRIC PROOFS

Lukáš Honzík, Jan Frank

Abstrakt

Důkazy nejrůznějších matematických tvrzení jsou nedílnou součástí matematiky. S některými jednoduššími z nich přijdou do kontaktu již žáci na základních školách. Příkladem takového tvrzení je například geometrický (obrázkový) důkaz Pythagorovy věty. Při provádění geometrických důkazů, resp. provádění důkazů matematických důkazů geometrickou cestou, je však nutné dávat pozor na některá nepřesná zjednodušení a chybné předpoklady, které se při tomto postupu mohou objevit. Částečně lze některá z těchto nedopatření eliminovat vhodným využitím softwaru dynamické geometrie, který nabízí interaktivitu a práci s dynamickými figurami namísto statických náčrtků. V tomto příspěvku představujeme konkrétní chybné tvrzení a jeho důkaz doplněný o vysvětlení, kde se v posloupnosti logických úvah objevila chyba. Příklad je pak uveden na pravou míru provedením příslušné konstrukce v programu GeoGebra.

Klíčová slova: *GeoGebra, software dynamické geometrie, geometrický důkaz*

Abstract

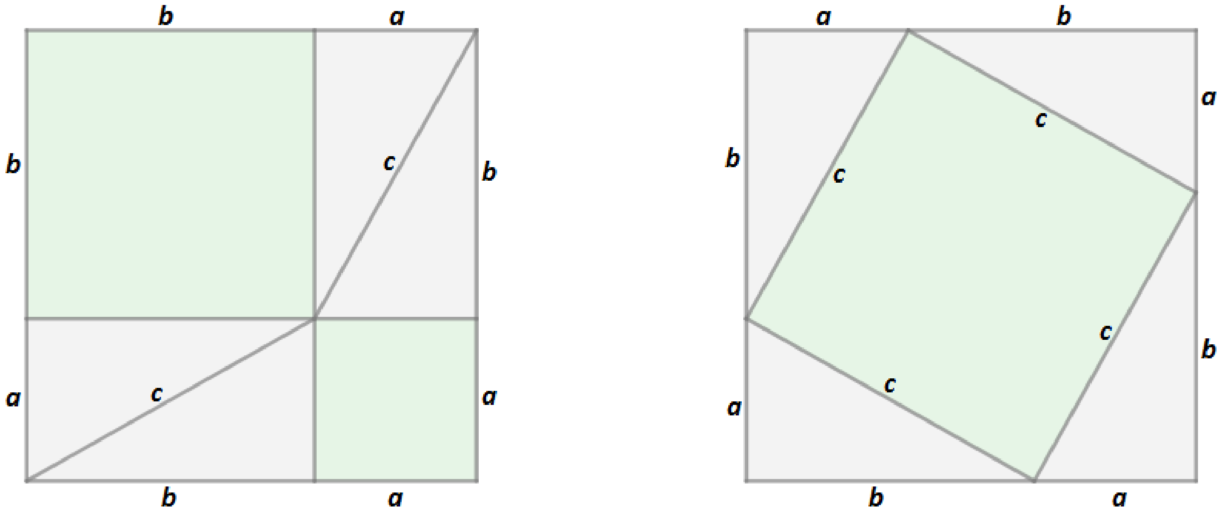
Various mathematical statements and their proofs are an integral part of mathematics. Even at elementary schools, pupils get acquainted with simpler ones. An example of such a statement is, for example, the geometric (image) proof of the Pythagorean theorem. However, when performing a geometric proof, respectively. performing a mathematical proof in a geometric way, it is necessary to pay attention to some inaccurate simplifications or erroneous assumptions that may arise in this procedure. Some of these inconveniences can be in part eliminated by appropriate use of dynamic geometry software that offers interactivity and work with dynamic figures instead of static sketches. In this paper, we present one such erroneous statement and its proof, supplemented by an explanation where an error occurred in the sequence of logical considerations. The examples is then made correct by performing the appropriate construction in GeoGebra.

Key words: *GeoGebra, dynamic geometry software, geometric proof*

1 ÚVOD

Matematické důkazy bývají v některých případech, zvláště pak na základních školách, vcelku často opomíjeny. Přiznejme však, že jejich role je nezastupitelná – mimo jiné pomáhají tříbit logické myšlení a správně podány přispívají k lepšímu pochopení problematiky. Nižší věk žáků přitom vůbec nemusí být na závadu, řada důkazů matematických tvrzení je přístupná již žákům základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií. Příkladem může být známá demonstrace platnosti Pythagorovy věty, s níž se během svých studií setkal snad každý.

Připomeňme, že důkaz (na tomto místě popravdě přiznejme, že nejde o důkaz obecně platného tvrzení *Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami*, ale spíše o názornou demonstraci na jednom konkrétně zvoleném pravoúhlém trojúhelníku, což ale v nižším věku žáků není problematické) tohoto tvrzení se opírá o obrázek obsahující dvojici shodných čtverců s délkou strany $a + b$.



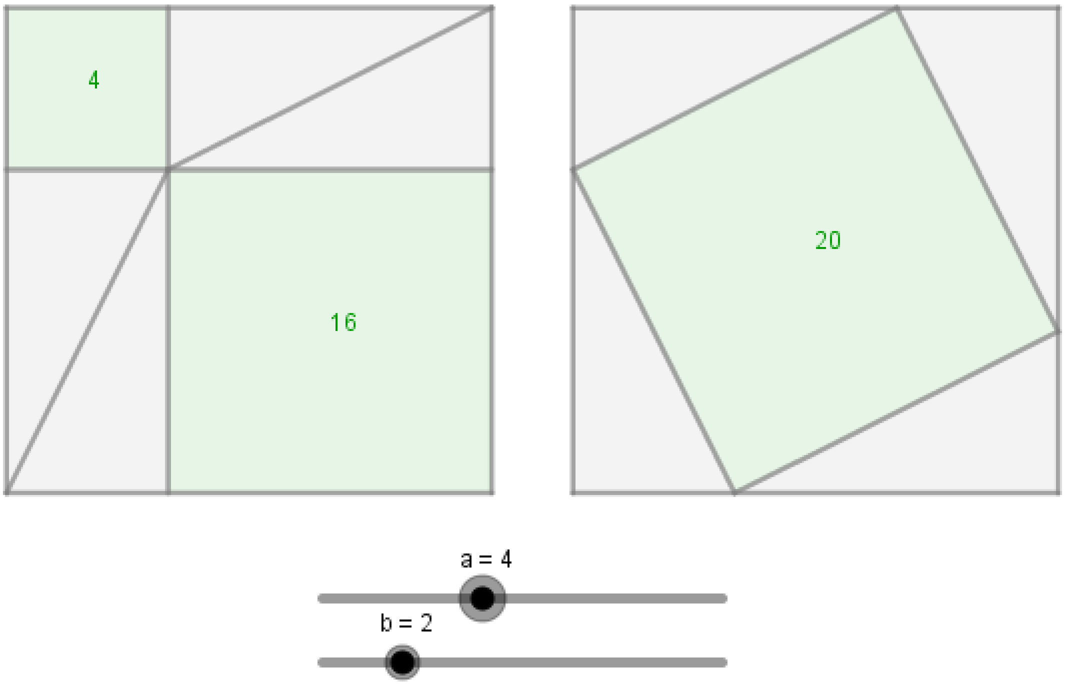
Obr. 1. Grafický důkaz Pythagorovy věty

V jednom čtverci jsou vepsány dva menší čtverce, jeden o délce strany a, druhý s délkou strany b, zbylá plocha je vyplněna čtveřicí shodných pravoúhlých trojúhelníků. Ve druhém čtverci jsou zmíněné trojúhelníky přeuspořádány, zbytek velkého čtverce vyplňuje menší čtverec o délce strany c.

Nakonec již stačí jen ze stejného obsahu velkých čtverců a stejného obsahu čtveřice pravoúhlých trojúhelníků odvodit, že součet obsahů čtverců se stranami délek a a b je roven obsahu čtverce s délkou stany c. Tím se dostáváme k všeobecně známému vzorci reprezentujícímu Pythagorovu větu ve tvaru

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Jak již bylo řečeno, nejedná se v tomto případě o důkaz jako takový, ale o grafickou interpretaci jedné konkrétní situace. Pokud bychom se chtěli zmíněného nedostatku zbavit a alespoň o krok se přiblížit obecnější verzi důkazu, můžeme využít některý z programů dynamické geometrie, například programu GeoGebra. V těchto programech je možné užitím posuvníků přejít od statického obrázku k dynamické figuře, na níž pak lze experimentálně ověřit platnost tvrzení v podstatě pro libovolné hodnoty a, b a c, jak je ukázáno na obrázku 2.



Obr. 2. Dynamická figura důkazu Pythagorovy věty

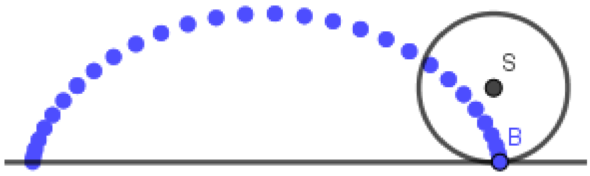
Je zřejmé, že užití softwaru dynamické geometrie přinášející prvek interakce a dynamiky posouvá geometrické důkazy (či obecněji matematické důkazy prováděné geometrickou cestou) na jinou úroveň. Zároveň lze doufat, že geometrické programy v některých případech mohou eliminovat jistá nedopatření, jichž se v úsudku může řešitel dopustit, má-li provádět důkaz pouze pomocí úvahy a statického náčrtku. Samozřejmě musíme zároveň na tomto místě podoktnout, že při konstrukci figury v programech dynamické geometrie je nutné oproti statickému náčrtku na papíře uvažovat chování jednotlivých objektů a vztahy mezi nimi, abychom se vyvarovali případných chyb vyplývajících z dynamiky celé konstrukce.

V následujících odstavcích uveďme konkrétní příklad chybného předpokladu v geometrickém důkazu. Důkaz jsou doplněny o komentáře objasňující, kde se v důkazu nachází chyba, a též o náhled na daný problém prostřednictvím dynamické geometrie.

2 KRUŽNICE SE STEJNOU DÉLKOU

Tvrzení: Všechny kružnice mají stejnou délku. [1]

Důkaz: K důkazu tvrzení použijme jeden z častých způsob zjištění délky kružnice, resp. určení obvodu kola, který je užíván z důvodu své praktičnosti. Je jím totiž možné změřit například obvod kola bicyklu, jenž je pak zadán do cyklopočítače. Postup spočívá ve zvolení jednoho konkrétního bodu na obvodu kola, například ventilku, zakreslení značky na silnici, po níž se kolo pohybuje, v místě, kdy se ventilek nachází dole a tedy nejblíže silnici, a jeho následného odvalování. Tam, kde se ventilek při odvalování opět nejvíce přiblíží k silnici, uděláme druhou značku. Změřením vzdálenosti mezi značkami obdržíme obvod kola.



Obr. 3. Odvalování kola

Takovýto experiment je znázorněn na obrázku 3. Zároveň je zde zvýrazněna i dráha vybraného bodu *B* na obvodu kola. Křivka, kterou bod při odvalování opíše, je cykloida popsaná parametrickými rovnicemi

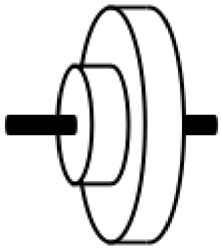
$$x = r \cdot (t - \sin t)$$

$$y = r \cdot (1 - \cos t),$$

kde *r* je poloměr kola a *t* je reálný parametr.

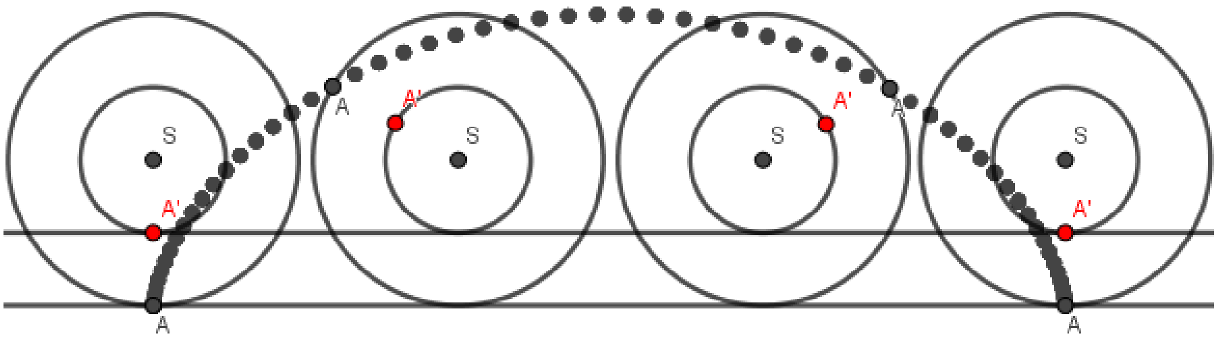
Vzdálenost mezi dvěma místy, kde se bod *B* dotkl vodorovné přímky, určuje obvod kola (neboli délku kružnice, která je pro kolo hraniční křivkou).

Uvažujme situaci, kdy na jedné hřídeli jsou umístěna dvě kola různého poloměru, jak je znázorněno na obrázku 4. Kola jsou na hřídeli umístěna napevno, tzn. obě kola si při otáčení hřídele zachovávají svou vzájemnou polohu.



Obr 4. Dvě kola na stejné hřídeli

Místo silnice z předchozího popisu použijme nyní jako podklad dvojici rovnoběžných kolejnic. Každé z kol se bude odvalovat po jedné z nich. Tento pohyb je rozfázován na obrázku 5, z nějž lze jasně vyčíst dráhu bodu *A* na větším kole i obvod tohoto kola. Za povšimnutí pak ale stojí hlavně jednotlivé pozice bodu *A*'. Jak je vidět, vzdálenost mezi dvěma místy, v nichž se bod *A*' dotkne příslušné kolejnice, je shodná se vzdáleností mezi dvěma dotyky bodu *A*. Z toho vyplývá, že obě kola musí mít stejný obvod.



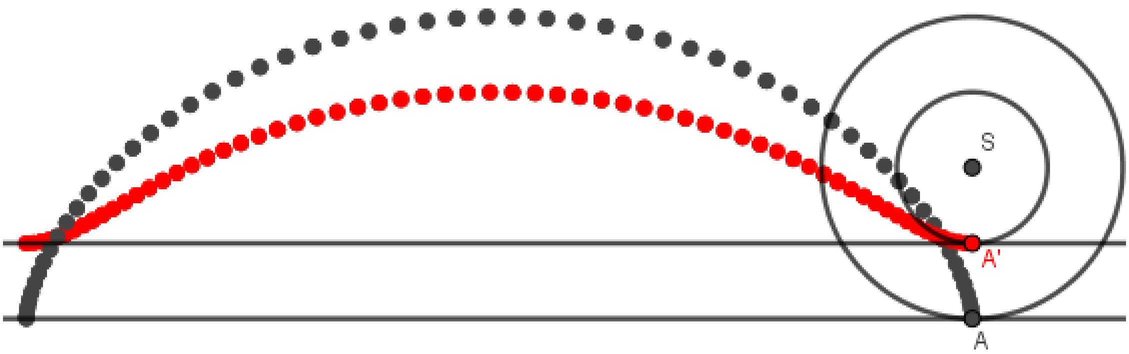
Obr. 5. Odvalování kol po kolejnicích

Na konec můžeme předchozí tvrzení zobecnit a převést zpět do geometrické roviny. Lze tedy tvrdit, že délka kružnice je dána bez ohledu na poloměr kružnice. Nebo jinými slovy, dvě libovolně zvolené kružnice o různých poloměrech mají vždy stejnou délku. [1]

Uvedené tvrzení je samozřejmě chybné, což každý pozorovatel ví již ze zkušenosti. K vyvrácení tvrzení stačí nalézt problematickou pasáž v řetězci provedených úvah. Přitom poznamenejme, že celý problém je spíše kinematickou záležitostí a nikoliv geometrickou. I přesto je možné provést geometrickou konstrukci dynamické figury v programu GeoGebra a jejím prostřednictvím onu chybu odhalit.

Pro tento záměr sestrojíme dvojici rovnoběžných přímek znázorňujících obě kolejnice, dvě soustředné kružnice (v našem případě má větší kružnice dvojnásobný poloměr, z nichž na každou umístíme po jednom bodu *A* a *A*', a zároveň užijeme posuvník. Jeho pomocí řídíme jednak pohyb kružnic ve směru přímek, za druhé jej používáme k pohybu bodů. Ten sestává z posunu ve směru přímek a současně z rotace kolem středu obou kružnic. Takto zkonstruovaná situace pak odpovídá výše popsaným úvahám, z nichž jsme vyvodili tvrzení o stejné délce obou kružnic.

Nyní využijme funkci dovolující zobrazit stopu pohybujícího se objektu. Bude nás zajímat stopa po pohybu obou bodů *A* a *A*'. Již při letmém pohledu na obrázek 6 je vidět, že zatímco bod *A* při pohybu zanechává stopu odpovídající cykloidě, bod *A*' vykresluje stopu odlišnou.



Obr. 6. Stopy bodů při odvalování

Jedná se o tak zvanou zkrácenou cykloidu, jejíž parametrické vyjádření je dáno dvojicí rovnic

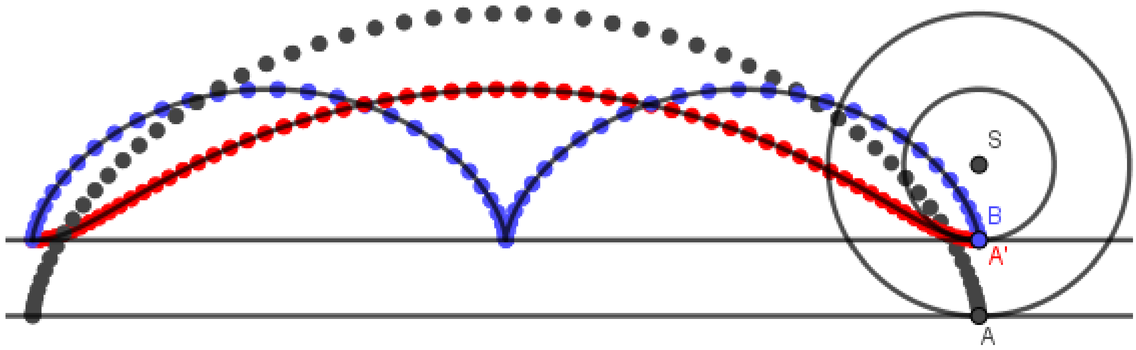
$$x = r \cdot t - a \cdot \sin t$$

$$y = r \cdot 1 - a \cdot \cos t,$$

kde $r = |SA|$ (tj. poloměr větší kružnice) a $a = |SA'|$ (tj. poloměr menší kružnice), platí tedy nerovnost $a < r$.

Vzhledem k tomu, že bod *A*' při svém pohybu neopsal očekávanou cykloidu, ale zkrácenou cykloidu, můžeme si dovolit domněnku, že právě zde nastává hledaný problém. Pohyb bodu *A*' tak, jak je modelován v dynamické figuře, neodpovídá tomu, jak by měl ve skutečnosti vypadat.

Když nyní předpokládáme, že jsme nalezli chybu, a zároveň víme, jaký výstup (stopu cykloidy) hledáme, byli bychom při troše další práce schopni doplnit figuru o bod *B*. Ten již při zapnutí stopy vykreslí opět cykloidu, ovšem s poloviční periodou oproti cykloidě dané bodem *A*. Výsledkem je tedy úspěšné vyvrácení chybného důkazu, neboť délka jedné kružnice s polovičním poloměrem vůči poloměru druhé kružnice, je také poloviční.



Obr. 7. Stopy bodů při odvalování s korekcí

Na konec se ještě vraťme od geometrie ke kinematice a upřesněme, v čem spočívala chyba z fyzikálního hlediska. Tu je potřeba hledat v pevném umístění obou kol na téže hřídeli, kdy vůči sobě obě kola při otáčení zachovávají vzájemnou polohu. Při odvalování po kolejnicích potom u jednoho z kol dochází k prokluzu. Konkrétně v případě odvalování většího kola bez prokluzování jde o záporný prokluz menšího kola, čímž se prodlužuje vzdálenost mezi dvěma značkami na příslušné kolejnici. V opačném případě odvalování menšího kola bez prokluzování by se jednalo o kladný prokluz většího kola, kterým by byla naopak vzdálenost mezi značkami zkracována.

3 ZÁVĚR

V tomto článku jsme se pokusili představit jeden geometrický důkaz, které se na první pohled může snad i zdát korektní, avšak vede k naprosto mylným závěrům. Ve vyvrácení chybně vyvozených závěrů jsme se kromě svých logických úvah spolehli především na software dynamické geometrie GeoGebra, který se ukázal být zdatným pomocníkem. A to i přesto, že není primárně určen pro dokazování geometrických vět. I přesto jej lze, jak ukazuje předchozí příklad, zdárně využít i v této oblasti, kdy díky interaktivitě a možnostem dynamické manipulace s geometrickými objekty dovoluje uživateli provádět názorné demonstrace a experimenty, které jdou často nad rámec čisté matematiky a přesahují do jiných vědních oborů. Takovéto demonstrace a experimenty pak mohou dostatečně jasně pomoci vyvarovat se unáhlených a chybných závěrů, k nimž žáci a studenti mohou dospět.

References

1. DUBNOV, Jakov Semenovič. *Chyby v geometrických důkazech*. Přeložil Milan ULRICH. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1954. Populární přednášky o matematice, sv. 10.
2. GARDNER, Martin. *Zábavné matematické hádanky*. Ilustroval Anthony RAVIELLI, přeložil Jana HOUSEROVÁ, přeložil Pavel HOUSER. Praha: Dokořán, 2018. ISBN 9788073638849.
3. THIELE, Rüdiger. *Matematické důkazy*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1985. Polytechnická knižnice (SNTL).
4. Wikipedia contributors. Missing square puzzle. Wikipedia, The Free Encyclopedia; 2018 Oct 6, 23:38 UTC [cited 2019 Mar 19]. Available from: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Missing_square_puzzle&oldid=862828195

Contacts

PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.
Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická
Klatovská tř. 51, 306 14 Plzeň
Tel: +420 377 636 285
E-mail: honzikl@kmt.zcu.cz

Mgr. Jan Frank
Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická
Klatovská tř. 51, 306 14 Plzeň
Tel: +420 377 636 452
E-mail: frankjan@kmt.zcu.cz