



Diplomová práce

Řešitelnost nelokálních
okrajových úloh

Plzeň, 2012

Yulia Tigay

Chtěla bych velmi poděkovat doc. Ing. Gabriele Holubové, Ph.D. za odborné vedení této práce, za předané zkušenosti a znalosti, trpělivost a věnovaný čas. Také chci vyjádřit své poděkování doc. Alexandru Lomtaticzovi, DrSc. za odborné konzultace, poskytnutou literaturu, velmi užitečné rady a připomínky. Moje velké děkuji rovněž patří mé milované rodině a blízkým.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím citovaných pramenů a za odborného vedení vedoucí diplomové práce.

V Plzni dne . . .

.....

Bc. Yulia Tigay

Předmluva

Tato práce se zabývá otázkami řešitelnosti nelokálních neboli vícebodových okrajových úloh (*angl.* multi-point boundary value problems). Konkrétně se v práci zkoumají tři úlohy: třibodová okrajová úloha, třibodová okrajová úloha s tlumením a čtyřbodová okrajová úloha.

V kapitole 1 formulujeme definici vícebodové úlohy v obecném případě a uvádíme motivaci vzniku úloh tohoto typu.

V kapitole 2 se zabýváme řešitelností obyčejné třibodové okrajové úlohy ve tvaru:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(\eta), \end{cases}$$

kde $t \in (0, \pi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta \in (0, \pi)$.

Analyticky počítáme systémy vlastních čísel úlohy a jim odpovídající systémy vlastních funkcí, jinými slovy hodnoty $\lambda = \lambda(\eta)$, pro které existuje netriviální řešení třibodové úlohy.

Dále ukazujeme, že daná třibodová úloha není díky nelokálním podmínkám standardní Sturmovou-Liouvilleovou okrajovou úlohou, příslušný operátor není samoadjungovaný, a tedy není zaručena ortogonalita příslušného systému vlastních funkcí.

V odstavci 2.1.1 zkoumáme strukturu vlastních dvojic a vlastních funkcí podrobněji. Graficky znázorňujeme oba systémy vlastních funkcí pro čtyři různé pevně zvolené hodnoty parametru η .

Rovněž se zajímáme o limitní případy, kdy parametr η necháváme nabývat hraničních hodnot intervalu $(0, \pi)$. Chceme tak ukázat, že pro obě dvě

hraniční hodnoty dochází k redukci třibodové úlohy na známou Dirichletovu okrajovou úlohu a Dirichletovu-Neumannovu okrajovou úlohu, pro něž vlastní čísla a vlastní funkce jsou dobře známé.

Na konci odstavce 2.1.1 graficky znázorňujeme množinu σ vlastních dvojic $(\eta, \lambda) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}$ a pozorujeme chování obou systémů vlastních čísel.

V kapitole 3 klasickou třibodovou úlohu rozšiřujeme o tlumící člen:

$$\begin{cases} u''(t) + 2bu'(t) + \lambda u(t) = 0, \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(\eta), \end{cases}$$

kde $t \in (0, \pi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta \in (0, \pi)$, $b > 0$.

Analogicky jako u třibodové úlohy hledáme vlastní čísla a jim odpovídající systémy vlastních funkcí. V podkapitole 3.1 se snažíme analyticky spočítat vlastní čísla, pro něž netriviální řešení okrajové úlohy existuje. Ukazujeme, že analytický předpis pro vlastní čísla není snadné nalézt. Hlubším zkoumáním se nám alespoň daří vymežit intervaly pro vlastní čísla λ , za kterých existuje netriviální řešení třibodové okrajové úlohy s tlumením.

V podkapitole 3.2 formulujeme třibodovou okrajovou úlohu s tlumením v obecném případě podle I. T. Kiguradzeho a A. G. Lomtadidzeho ([9]). Uvádíme důležitou větu, ze které vyplývají podmínky na existenci pouze triviálního řešení vícebodové okrajové úlohy.

V odstavci 3.2.2 aplikujeme větu na naše konkrétní nelokální okrajové úlohy. Následně formulujeme příslušné závěry pro existenci netriviálního řešení třibodové okrajové úlohy s tlumením a výsledek ilustrujeme na 3D grafu.

V odstavci 3.2.3 ukazujeme zajímavou myšlenku transformace vícebodové okrajové úlohy na jinou úlohu a na příkladě ukazujeme ekvivalenci použitých postupů. Obdržený výsledek porovnáváme s výsledkem, který jsme obdrželi v kapitole 2.

V odstavci 3.2.4 naznačujeme dvě další transformace vícebodové okrajové úlohy s tlumením na vícebodovou okrajovou úlohu bez tlumení. Ovšem zaplatíme za to tak, že buď obdržíme okrajovou úlohu s jinými koncovými body a nekonstantním koeficientem v rovnici, anebo dostaneme úlohu s jinou třibodovou podmínkou s nejednotkovým koeficientem.

V kapitole 4 této práce se zabýváme čtyřbodovou okrajovou úlohou ve tvaru:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, \\ u(0) = u(\xi), \\ u'(\pi) = u'(\eta), \end{cases}$$

kde $t \in (0, \pi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta \in (0, \pi)$, $\xi \in (0, \pi)$.

V podkapitole 4.1 opět hledáme systémy vlastních čísel úlohy a jim příslušné systémy vlastních funkcí. Obdržené výsledky analyzujeme a graficky znázorňujeme.

Dále se zabýváme limitními případy, kdy oba dva parametry „posíláme“ do hraničních hodnot uvažovaného intervalu. Podle očekávání dostáváme známé okrajové úlohy, pro něž vlastní čísla a vlastní funkce jsou dobře známé: periodická úloha, Dirichletova-Neumannova úloha, Dirichletova úloha, Neumannova úloha.

V odstavci 4.1.1 stejně jako u třibodové úlohy podrobněji zkoumáme strukturu vlastních trojic a vlastních funkcí. Množinu všech vlastních trojic $(\eta, \xi, \lambda) \in \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \times \mathbb{R}$ označujeme σ .

V kapitole 5 se zabýváme třibodovou okrajovou úlohou Fučíkova typu.

V podkapitole 5.1 hledáme tzv. Fučíkovo spektrum třibodové úlohy. Dále ukazujeme analytické předpisy Fučíkových větví a hledáme netriviální řešení úlohy pomocí prostředí *MATLAB*. Jinými slovy hledáme vlastní funkce příslušné úlohy. Veškeré výsledky pro různé hodnoty parametrů graficky znázorňujeme.

V podkapitole 5.2 naznačujeme problém čtyřbodové okrajové úlohy Fučíkova typu.

V závěrečné kapitole jsou shrnuty dosažené výsledky a naznačeny směry, kterými by se mohlo ubírat další studium nelokálních okrajových úloh.

Obsah

Předmluva	I
1 Úvod	1
1.1 Nelokální m -bodová okrajová úloha	1
2 Tříbodová okrajová úloha	3
2.1 Vlastní čísla a vlastní funkce tříbodové okrajové úlohy	3
2.1.1 Ortogonalita systému vlastních funkcí	7
2.1.2 Podrobnější struktura vlastních dvojic a vlastních funkcí	14
2.1.3 Limitní případy tříbodové úlohy	19
3 Tříbodová okrajová úloha s tlumením	25
3.1 Vlastní čísla a vlastní funkce tříbodové okrajové úlohy s tlumením	25
3.1.1 Konkrétní volba hodnoty parametru η	34
3.2 Tříbodová okrajová úloha s tlumením v obecném případě	37
3.2.1 Formulace problému a věta o jednoznačnosti	37
3.2.2 Aplikace věty 3.2 na úlohu (3.1)	38
3.2.3 Transformace okrajové úlohy	43
3.2.4 Dvě další transformace tříbodové okrajové úlohy s tlumením	44
4 Čtyřbodová okrajová úloha	49
4.1 Vlastní čísla a vlastní funkce čtyřbodové okrajové úlohy	49
4.1.1 Limitní případy čtyřbodové úlohy	60
4.1.2 Podrobnější struktura vlastních trojic a vlastních funkcí	65
5 Fučíkovo spektrum	71
5.1 Fučíkovo spektrum tříbodové okrajové úlohy	71
5.2 Fučíkovo spektrum čtyřbodové okrajové úlohy	79

Závěr	81
Literatura	83

Kapitola 1

Úvod

1.1 Nelokální m -bodová okrajová úloha

Necht' $f : \langle a, b \rangle \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce splňující Caratheodoryho podmínky, $e : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce z prostoru $L_1 \langle a, b \rangle$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $\xi_i \in (a, b)$, $i = 1, 2, \dots, m-2$, $a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < b$.

Potom definujeme *nelokální m -bodovou okrajovou úlohu* jako úlohu ve tvaru:

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) + e(t), & a < t < b, \\ u(a) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), \\ u(b) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u(\xi_i). \end{cases}$$

V této práci se zabýváme výhradně tříbodovou úlohou nebo čtyřbodovou úlohou, tj. $m = 3$ nebo $m = 4$.

Nelokální okrajové úlohy představují zajímavé zobecnění klasických okrajových úloh a zároveň se přirozeným způsobem objevují při konstrukci matematických modelů reálných procesů a jevů ve fyzice, v ekologii, v sociologii, v inženýrství apod.

V roce 1963 se objevila významná práce J. R. Cannona „The solution of the heat equation subject to the specification of energy“ ([3]), kde autor definuje následující nelokální okrajovou úlohu:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = \phi_1(t), \quad \int_0^1 u(x, t) dx = \phi_2(t), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

kde $\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot), u_0(\cdot)$ jsou zadané hladké funkce.

Tato vícebodová okrajová úloha započala nový směr ve zkoumání nelokálních okrajových úloh.

V roce 1969 byla publikována práce A. V. Bitsadzeho a A. A. Samarského „O jednom zobecnění lineárních eliptických okrajových úloh“ ([1]). Úloha byla formulována v obecném tvaru, avšak jednoznačnost řešení a její řešitelnost byly dokázány pro případ Laplaceovy rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad -l < x < l, \quad 0 < y < l, \quad l = \text{konst.} > 0,$$

s okrajovými podmínkami:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \phi_1(x), \quad u(x, l) = \phi_2(x), \quad -l \leq x \leq l, \\ u(-l, y) = \phi_3(y), \quad 0 \leq y \leq l, \quad u(0, y) = u(l, y), \quad 0 \leq y \leq l, \end{aligned}$$

kde $\phi_i, (i = 1, 2, 3)$ jsou zadané spojité funkce.

Intenzivní výzkum nelokálních okrajových úloh Bitsadzeho-Samarského a také jejich různá zobecnění se objevují již v 80-tých letech minulého století. Mezi významné řešitele nelokálních okrajových úloh dále patří dva ruští matematici V. A. Il'in a E. I. Moiseev (viz [7], [8]).

Kapitola 2

Třibodová okrajová úloha

2.1 Vlastní čísla a vlastní funkce třibodové okrajové úlohy

Výchozí třibodová okrajová úloha pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu s okrajovými třibodovými podmínkami má tvar:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(\eta), \end{cases} \quad (2.1)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\eta \in (0, \pi)$. Řešením úlohy (2.1) rozumíme takovou funkci $u(t)$, pro kterou je diferenciální rovnice v okrajové úloze (2.1) splněna pro každé $t \in (0, \pi)$ a která vyhovuje okrajovým podmínkám $u(0) = 0$ a $u(\pi) = u(\eta)$, $\eta \in (0, \pi)$.

Dvojici $(\eta, \lambda) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}$ nazveme *vlastní dvojicí*, jestliže úloha (2.1) má netriviální řešení $u(t)$, hodnotu $\lambda = \lambda(\eta)$ pak budeme standardně nazývat *vlastním číslem*. Příslušné nenulové násobky $u(t)$ nazýváme *vlastními funkcemi* okrajové úlohy.

Obecné řešení diferenciální rovnice v okrajové úloze (2.1) budeme hledat ve tvaru exponenciály, to znamená ve tvaru: $u = e^{\xi t}$, $\xi \in \mathbb{C}$. Po dosazení do rovnice v (2.1) obdržíme:

$$\xi^2 e^{\xi t} + \lambda e^{\xi t} = 0,$$

$$e^{\xi t}(\xi^2 + \lambda) = 0,$$

Dostáváme charakteristickou rovnici ve tvaru:

$$\xi^2 + \lambda = 0. \quad (2.2)$$

V závislosti na parametru λ získáme hledaná řešení charakteristické rovnice (2.2).

1. Pokud $\lambda < 0$, pak charakteristická rovnice (2.2) má řešení

$$\xi_1 = \sqrt{-\lambda}, \quad \xi_2 = -\sqrt{-\lambda}.$$

Obecné řešení rovnice naší okrajové úlohy můžeme tedy vyjádřit jako libovolnou lineární kombinaci prvků: $e^{\sqrt{-\lambda}t}$ a $e^{-\sqrt{-\lambda}t}$, které tvoří tzv. fundamentální systém. Obecné řešení má tedy tvar:

$$u(t) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}, \quad \text{kde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Upravíme-li obecné řešení, obdržíme:

$$u(t) = (C_1 + C_2) \frac{e^{\sqrt{-\lambda}t} + e^{-\sqrt{-\lambda}t}}{2} + (C_1 - C_2) \frac{e^{\sqrt{-\lambda}t} - e^{-\sqrt{-\lambda}t}}{2}.$$

Dostáváme tedy obecné řešení pro $\lambda < 0$ ve tvaru:

$$u(t) = \hat{C}_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}t) + \hat{C}_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}t), \quad \hat{C}_1, \hat{C}_2 \in \mathbb{R},$$

respektive pokud položíme $\hat{C}_1 = C_1$ a $\hat{C}_2 = C_2$, potom:

$$u(t) = C_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}t) + C_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení okrajových podmínek do obecného řešení z (2.1) obdržíme:

$$u(0) = C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0) = 0 \implies C_1 = 0.$$

$$u(\pi) = C_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}\pi) = C_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}\eta) = u(\eta).$$

$$C_2(\sinh(\sqrt{-\lambda}\pi) - \sinh(\sqrt{-\lambda}\eta)) = 0.$$

Víme ale, že

$$\sinh(\sqrt{-\lambda}\pi) \neq \sinh(\sqrt{-\lambda}\eta)$$

pro $\eta \neq \pi$. Tedy pro případ $\lambda < 0$ dostáváme pouze triviální řešení $u(t) \equiv 0$ pro libovolné $\eta \in (0, \pi)$.

2. Pokud $\lambda = 0$, pak rovnice (2.2) má jeden dvojnásobný nulový kořen, jinými slovy dostáváme:

$$\xi_{1,2} = 0.$$

Obecné řešení v tomto případě bude opět libovolná lineární kombinace prvků fundamentálního systému, který se v tomto případě skládá ze dvou prvků $\{1, t\}$, a tak máme:

$$u(t) = C_1 + C_2 t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení okrajových podmínek do obecného řešení z (2.1) obdržíme:

$$u(0) = C_1 = 0.$$

$$u(\pi) = C_2 \pi = C_2 \eta = u(\eta) \implies C_2 = 0,$$

znovu tak dostáváme pouze triviální řešení. A proto můžeme učinit závěr, že $\lambda = 0$ není vlastním číslem tříbodové okrajové úlohy (2.1).

3. Pokud $\lambda > 0$, pak rovnice (2.2) má dva komplexní kořeny:

$$\xi_1 = i\sqrt{\lambda}, \quad \xi_2 = -i\sqrt{\lambda}.$$

Z Eulerovy identity

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

plyne, že obecné řešení rovnice v okrajové úloze (2.1) bude libovolná lineární kombinací prvků $\{\cos(\sqrt{\lambda}t), \sin(\sqrt{\lambda}t)\}$, tedy:

$$u(t) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení okrajových podmínek do obecného řešení z (2.1) obdržíme:

$$u(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \implies C_1 = 0.$$

$$u(\pi) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\eta) = u(\eta),$$

$$C_2(\sin(\sqrt{\lambda}\pi) - \sin(\sqrt{\lambda}\eta)) = 0,$$

tj.

$$\text{bud' } C_2 = 0, \text{ anebo } (\sin(\sqrt{\lambda}\pi) - \sin(\sqrt{\lambda}\eta)) = 0.$$

Jelikož chceme získat netriviální řešení, požadujeme $C_2 \neq 0$. Užitím známých trigonometrických vzorců můžeme odvodit následující vztah:

$$2 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}(\pi - \eta)}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}(\eta + \pi)}{2}\right) = 0.$$

Proto platí bud'

$$2 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}(\pi - \eta)}{2}\right) = 0 \implies \left(\frac{\sqrt{\lambda}(\pi - \eta)}{2}\right) = n\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_{2n}} = \frac{2n\pi}{\pi - \eta},$$

tedy

$$\lambda_{2n} = \left(\frac{2n\pi}{\pi - \eta}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

anebo

$$\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}(\eta + \pi)}{2}\right) = 0 \implies \left(\frac{\sqrt{\lambda}(\eta + \pi)}{2}\right) = \pi k - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_{2k-1}} = \frac{(2k-1)\pi}{\eta + \pi},$$

tedy

$$\lambda_{2k-1} = \left(\frac{(2k-1)\pi}{\eta + \pi} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

Odpovídající vlastní funkce příslušné získaným vlastním číslům jsou:

$$u_{2n}(t) = \sin \left(\frac{2n\pi t}{\pi - \eta} \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.5)$$

nebo

$$u_{2k-1}(t) = \sin \left(\frac{(2k-1)\pi t}{\eta + \pi} \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

2.1.1 Ortogonalita systému vlastních funkcí

V tomto odstavci uvedeme definici tzv. *Sturmovy-Liouvilleovy úlohy*. Později ukážeme, že naše výchozí třibodová okrajová úloha není díky nelokálním okrajovým podmínkám standardní S.-L. úlohou.

Definice 2.1 (*Sturmova-Liouvilleova úloha [11]*) Okrajovou úlohu ve tvaru:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt} \left[p(t) \frac{du}{dt} \right] + q(t)u - \lambda \omega(t)u = 0, & t \in \langle a, b \rangle, \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, & \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

nazýváme *S.-L. úlohou*. Čísla λ , pro která existuje netriviální řešení úlohy (2.7) nazýváme *vlastní čísla* a jim odpovídající netriviální řešení nazýváme *vlastní funkce S.-L. úlohy*.

Pro vlastní čísla a vlastní funkce S.-L. úlohy platí několik podstatných vlastností, které uvedeme v následující větě.

Věta 2.1 (Vlastnosti vlastních čísel a vlastních funkcí S.-L. úlohy [11])

Vlastní čísla λ_n okrajové úlohy (2.7) jsou reálná, tvoří nekonečnou posloupnost, přičemž $\lambda_n \rightarrow +\infty$ pro $n \rightarrow +\infty$ a mají násobnost jedna.

Vlastní funkce $u_n(t), u_k(t)$ okrajové úlohy (2.7), které odpovídají různým vlastním číslům λ_n, λ_k , jsou navzájem ortogonální na intervalu $\langle a, b \rangle$ s váhovou funkcí $\omega(t)$, tj. platí:

$$\int_a^b u_n(t)u_k(t)\omega(t)dt = 0 \text{ pro } \lambda_n \neq \lambda_k.$$

Označme L lineární operátor příslušný úloze (2.1), $L : L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$, tj.:

$$Lu := -u'', \quad D(L) := \{u \in C^2(0, \pi) \cap C(\langle 0, \pi \rangle) : u(0) = 0, u(\pi) = u(\pi)\}.$$

Poznámka 2.1 Tříbodová úloha (2.1), není díky nelokálním okrajovým podmínkám standardní Sturmovou-Liouvilleovou úlohou, operátor L není samodjungovaný, tedy není zaručena ortogonalita příslušného systému vlastních funkcí.

Případnou ortogonalitu systémů vlastních funkcí $\{u_{2n}\}, \{u_{2k-1}\}$ daných předpisy (2.5), (2.6) prověříme následujícím způsobem.

Necht' $u_m(t), u_l(t)$ jsou vlastní funkce, odpovídající vlastním číslům λ_m, λ_l , $\lambda_m \neq \lambda_l$. Potom jsou splněny následující rovnosti:

$$\lambda_m u_m = -u_m'' \tag{2.8}$$

$$\lambda_l u_l = -u_l'' \tag{2.9}$$

Dále vynásobíme rovnost (2.8) funkcí u_l a rovnost (2.9) funkcí u_m a potom je na intervalu $(0, \pi)$ zintegrujeme. Jinými slovy vynásobíme skalárně první rovnost funkcí u_l a druhou rovnost funkcí u_m . Dostáváme:

$$\lambda_m \int_0^\pi u_m(t)u_l(t)dt = - \int_0^\pi u_m''(t)u_l(t)dt,$$

$$\lambda_l \int_0^\pi u_l(t)u_m(t)dt = - \int_0^\pi u_l''(t)u_m(t)dt.$$

Po odečtení:

$$(\lambda_m - \lambda_l) \int_0^\pi u_m(t)u_l(t)dt = \int_0^\pi u_l''(t)u_m(t)dt - \int_0^\pi u_m''(t)u_l(t)dt. \quad (2.10)$$

Užitím per-partes dostáváme na pravé straně rovnosti (2.10) výraz:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi u_l''(t)u_m(t)dt - \int_0^\pi u_m''(t)u_l(t)dt = \\ & = [u_l'(t)u_m(t)]_0^\pi - [u_m'(t)u_l(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u_l'(t)u_m'(t)dt + \int_0^\pi u_l'(t)u_m'(t)dt = \\ & = u_l'(\pi)u_m(\pi) - u_m'(\pi)u_l(\pi). \end{aligned}$$

Zabýváme se otázkou ortogonality příslušného systému vlastních funkcí. Tedy ptáme se, kdy je integrál na levé straně vztahu (2.10) nulový vzhledem k podmínce $\lambda_m \neq \lambda_l$. Jinými slovy se ptáme, kdy platí rovnost:

$$u_l'(\pi)u_m(\pi) - u_m'(\pi)u_l(\pi) = 0. \quad (2.11)$$

Budeme rozlišovat tři různé případy:

- $u_m = u_{2n}, u_l = u_{2k}$ z (2.5),
- $u_m = u_{2n-1}, u_l = u_{2k-1}$ z (2.6),
- $u_m = u_{2n}$ z (2.5), $u_l = u_{2k-1}$ z (2.6).

1. Necht' u_{2n}, u_{2k} z (2.5). Potom:

$$u_{2n}(t) = \sin\left(\frac{2n\pi t}{\pi - \eta}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$u_{2k}(t) = \sin\left(\frac{2k\pi t}{\pi - \eta}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

A odpovídající derivace budou mít tvar:

$$u'_{2n}(t) = \frac{2n\pi}{\pi - \eta} \cos\left(\frac{2n\pi t}{\pi - \eta}\right),$$

$$u'_{2k}(t) = \frac{2k\pi}{\pi - \eta} \cos\left(\frac{2k\pi t}{\pi - \eta}\right).$$

Po dosazení do vztahu (2.11) dostáváme rovnost:

$$\frac{2k\pi}{\pi - \eta} \cos\left(\frac{2k\pi^2}{\pi - \eta}\right) \sin\left(\frac{2n\pi^2}{\pi - \eta}\right) - \frac{2n\pi}{\pi - \eta} \cos\left(\frac{2n\pi^2}{\pi - \eta}\right) \sin\left(\frac{2k\pi^2}{\pi - \eta}\right) = 0,$$

kde $k, n \in \mathbb{N}$, $k \neq n$, $\eta \in (0, \pi)$. Zavedeme-li následující substituce:

$$\alpha = \frac{2k\pi}{\pi - \eta}, \quad \beta = \alpha \frac{n}{k} = \frac{2n\pi}{\pi - \eta},$$

dostaneme:

$$\alpha \cos(\alpha\pi) \sin(\beta\pi) - \beta \cos(\beta\pi) \sin(\alpha\pi) = 0.$$

Upravíme-li předchozí vztah, obdržíme:

$$(\alpha - \beta) \sin(\alpha\pi + \beta\pi) - (\alpha + \beta) \sin(\alpha\pi - \beta\pi) = 0,$$

kde

$$(\alpha - \beta) = \frac{2\pi}{\pi - \eta}(k - n), \quad (\alpha + \beta) = \frac{2\pi}{\pi - \eta}(k + n).$$

Abychom mohli odpovědět na otázku, zda rovnost (2.11) může nabývat nuly pro $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $n \neq k$, musíme zjistit, kdy platí:

$$\frac{2\pi}{\pi - \eta} = l \in \mathbb{N}.$$

Jinými slovy požadujeme takové hodnoty $\eta \in (0, \pi)$, pro něž platí podmínka:

$$\eta = \frac{l - 2}{l} \pi,$$

přičemž $\eta \in (0, \pi)$. Jednoduchou upravou dostáváme, že požadovaná podmínka platí pro $\forall l \geq 3$.

Tak jsme dostali, že rovnost ve vztahu (2.11) pro případ u_{2n}, u_{2k} z (2.5) může být splněna pro speciálně zvolené parametry η , a to například pro takové, které splňují vztah:

$$\eta = \frac{l-2}{l}\pi, \quad l \geq 3, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Potom může platit ortogonalita příslušných vlastních funkcí: $\forall k, n \in \mathbb{N} : u_{2n} \perp u_{2k}$.

2. Necht' u_{2n-1}, u_{2k-1} z (2.6). Potom:

$$u_{2n-1}(t) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi t}{\pi + \eta}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$u_{2k-1}(t) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi t}{\pi + \eta}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

A odpovídající derivace mají tvar:

$$u'_{2n-1}(t) = \frac{(2n-1)\pi}{\pi + \eta} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi t}{\pi + \eta}\right),$$

$$u'_{2k-1}(t) = \frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi t}{\pi + \eta}\right).$$

Analogicky po dosazení do vztahu (2.11) dostáváme rovnost:

$$\begin{aligned} & \frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi^2}{\pi + \eta}\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi^2}{\pi + \eta}\right) - \\ & - \frac{(2n-1)\pi}{\pi + \eta} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi^2}{\pi + \eta}\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi^2}{\pi + \eta}\right) = 0. \end{aligned}$$

kde $k, n \in \mathbb{N}, k \neq n, \eta \in (0, \pi)$.

Zavedeme substituci:

$$\alpha = \frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta}, \quad \beta = \frac{(2n-1)\pi}{\pi + \eta}$$

potom dostaneme:

$$\alpha \cos(\alpha\pi) \sin(\beta\pi) - \beta \cos(\beta\pi) \sin(\alpha\pi) = 0.$$

Upravíme-li předchozí vztah, obdržíme:

$$(\alpha - \beta) \sin(\alpha\pi + \beta\pi) - (\alpha + \beta) \sin(\alpha\pi - \beta\pi) = 0,$$

kde

$$(\alpha - \beta) = \frac{2\pi}{\pi + \eta}(k - n), \quad (\alpha + \beta) = \frac{2\pi}{\pi + \eta}(k + n - 1).$$

Abychom mohli odpovědět na otázku, zda rovnost (2.11) může nabývat nuly pro libovolné $n, k \in \mathbb{N}$, $n \neq k$, musíme vyšetřit pro jaké hodnoty $\eta \in (0, \pi)$ platí vztahy:

$$\frac{2\pi}{\pi + \eta}(k - n) \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad \frac{2\pi}{\pi + \eta}(k + n - 1) \in \mathbb{N}.$$

Jinými slovy požadujeme, aby platilo:

$$\frac{2\pi}{\pi + \eta} = m \in \mathbb{N},$$

což platí právě tehdy, když

$$\eta = \frac{(2 - m)\pi}{m},$$

přičemž $\eta \in (0, \pi)$. Tedy pro $m = 1$, tj. $\eta = \frac{\pi}{2}$ může rovnost platit.

Proto rovnost ve vztahu (2.11) pro případ u_{2n-1}, u_{2k-1} z (2.6) může být splněna pro speciálně zvolený parametr $\eta = \frac{\pi}{2}$.

Potom může platit ortogonalita příslušných vlastních funkcí: $\forall k, n \in \mathbb{N}$ $u_{2n-1} \perp u_{2k-1}$.

3. Necht' u_{2n} je z (2.5) a u_{2k-1} je z (2.6). Potom:

$$u_{2n}(t) = \sin\left(\frac{2n\pi t}{\pi - \eta}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$u_{2k-1}(t) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi t}{\pi + \eta}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

A odpovídající derivace mají tvar:

$$u'_{2n}(t) = \frac{2n\pi}{\pi - \eta} \cos\left(\frac{2n\pi t}{\pi - \eta}\right),$$

$$u'_{2k-1}(t) = \frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi t}{\pi + \eta}\right).$$

Dosazením do (2.11) dostáváme:

$$\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi^2}{\pi + \eta}\right) \sin\left(\frac{2n\pi^2}{\pi - \eta}\right) - \frac{2n\pi}{\pi - \eta} \cos\left(\frac{2n\pi^2}{\pi - \eta}\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi^2}{\pi + \eta}\right) = 0,$$

kde $k, n \in \mathbb{N}$, $\eta \in (0, \pi)$.

Zavedeme opět substituci:

$$\alpha = \frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta}, \quad \beta = \frac{2n\pi}{\pi - \eta},$$

potom dostaneme rovnost:

$$\alpha \cos(\alpha\pi) \sin(\beta\pi) - \beta \cos(\beta\pi) \sin(\alpha\pi) = 0.$$

Upravíme-li předchozí trigonometrický vztah, dostaneme:

$$(\alpha - \beta) \sin(\alpha\pi + \beta\pi) - (\alpha + \beta) \sin(\alpha\pi - \beta\pi) = 0,$$

kde

$$(\alpha - \beta) = \frac{\pi^2(2k - 2n - 1) - \eta\pi(2k + 2n - 1)}{(\pi - \eta)(\pi + \eta)},$$

a

$$(\alpha + \beta) = \frac{\pi^2(2k + 2n - 1) + \eta\pi(2n - 2k + 1)}{(\pi - \eta)(\pi + \eta)}.$$

Abychom mohli odpovědět na otázku platnosti vztahu (2.11) pro případ u_{2n} z (2.5) a u_{2k-1} z (2.6), analogicky by bylo třeba stejným způsobem prozkoumat, kdy zároveň platí podmínky $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, tj.:

$$\frac{\pi}{\pi + \eta} = p_1 \in \mathbb{N} \wedge \frac{\pi}{\pi - \eta} = p_2 \in \mathbb{N}.$$

2.1.2 Podrobnější struktura vlastních dvojic a vlastních funkcí

Množinu všech vlastních dvojic $(\eta, \lambda) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}$ značíme σ . Jednoduchá struktura problému (2.1) umožňuje explicitně popsat, jak vypadá σ . Konkrétně dostáváme, že platí:

$$\sigma = C_{2n} \cup C_{2k-1}, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N},$$

kde

$$C_{2n} = \left\{ (\eta, \lambda) : \lambda = \left(\frac{2n\pi}{\pi - \eta} \right)^2 \right\},$$

$$C_{2k-1} = \left\{ (\eta, \lambda) : \lambda = \left(\frac{(2k-1)\pi}{\eta + \pi} \right)^2 \right\}.$$

Pokud dvojice $(\eta, \lambda) \in \sigma$, potom odpovídající netriviální řešení $u = u_{\eta, \lambda}$ okrajové úlohy (2.1) je, jak už víme, vlastní funkcí a je to libovolný nenulový násobek vlastní funkce:

$$\sin \sqrt{\lambda_{2n}} t = \sin \left(\frac{2n\pi t}{\pi - \eta} \right)$$

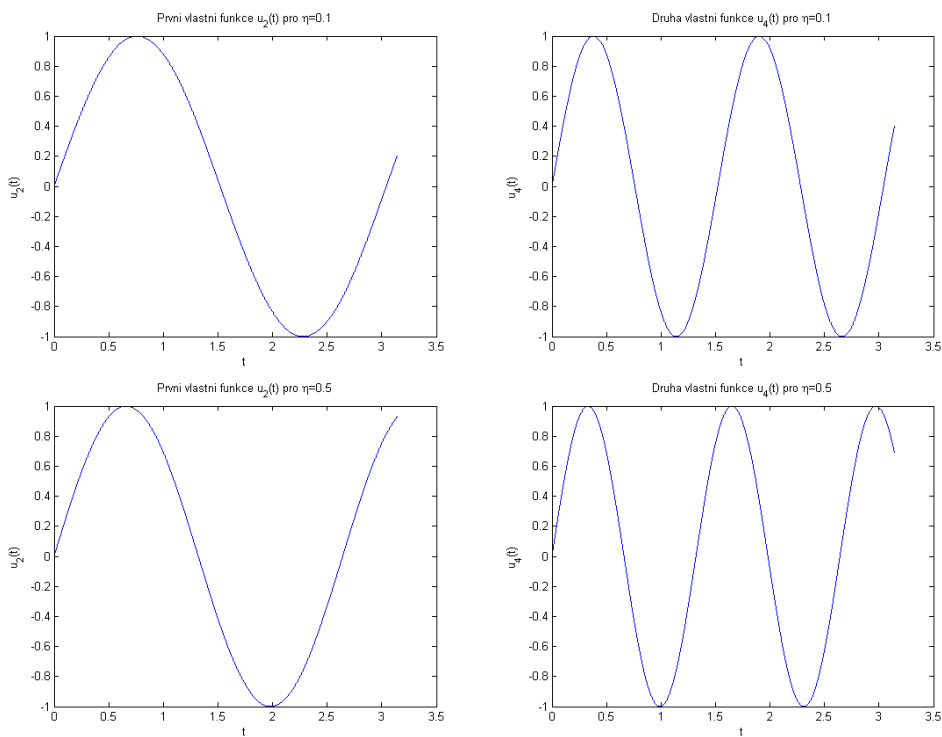
nebo

$$\sin \sqrt{\lambda_{2k-1}} t = \sin \left(\frac{(2k-1)\pi t}{\pi + \eta} \right).$$

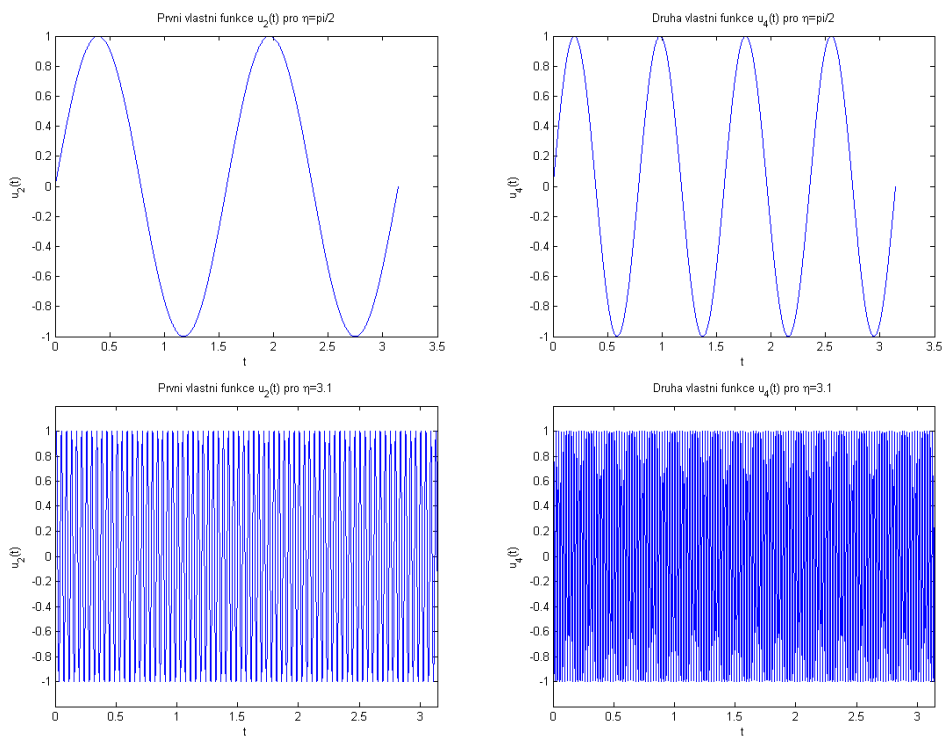
Na následující sérii obrázků si ukážeme, jak vypadají první dvě vlastní funkce pro vybrané hodnoty parametru η . Konkrétně jsme si zvolili 4 různé hodnoty:

$$\eta = 0.1, \quad \eta = 0.5, \quad \eta = 1.57, \quad \eta = 3.1.$$

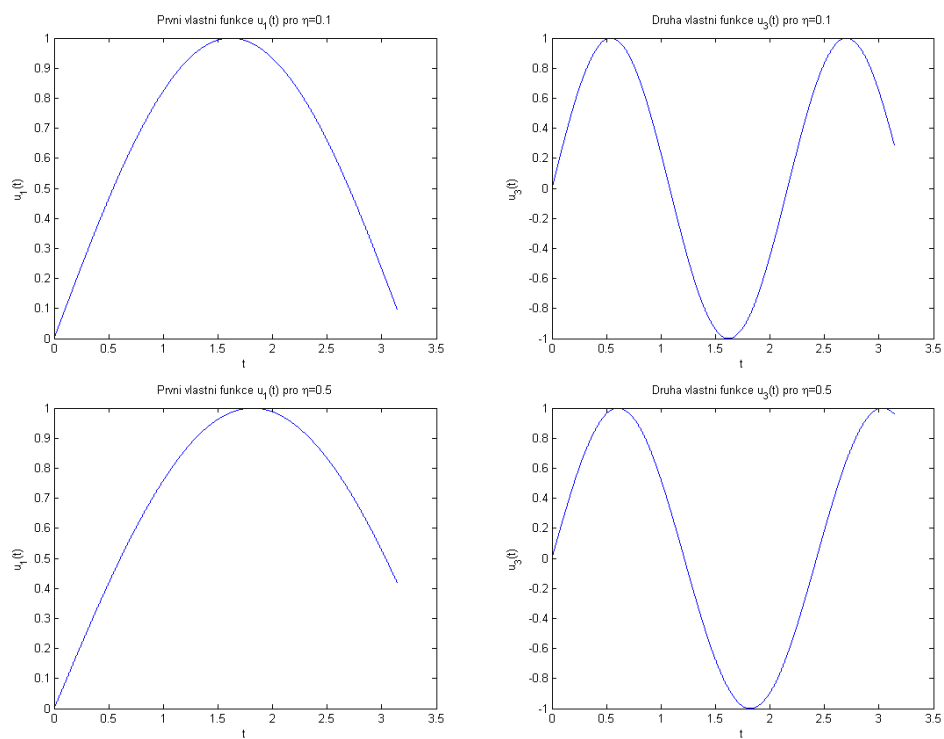
Nejdříve uvažujeme případ (2.3) (viz obr. 2.1 a 2.2). Na obrázku 2.3 a 2.4 znázorňujeme první dvě vlastní funkce pro stejné hodnoty parametru η , ale již pro případ (2.4).



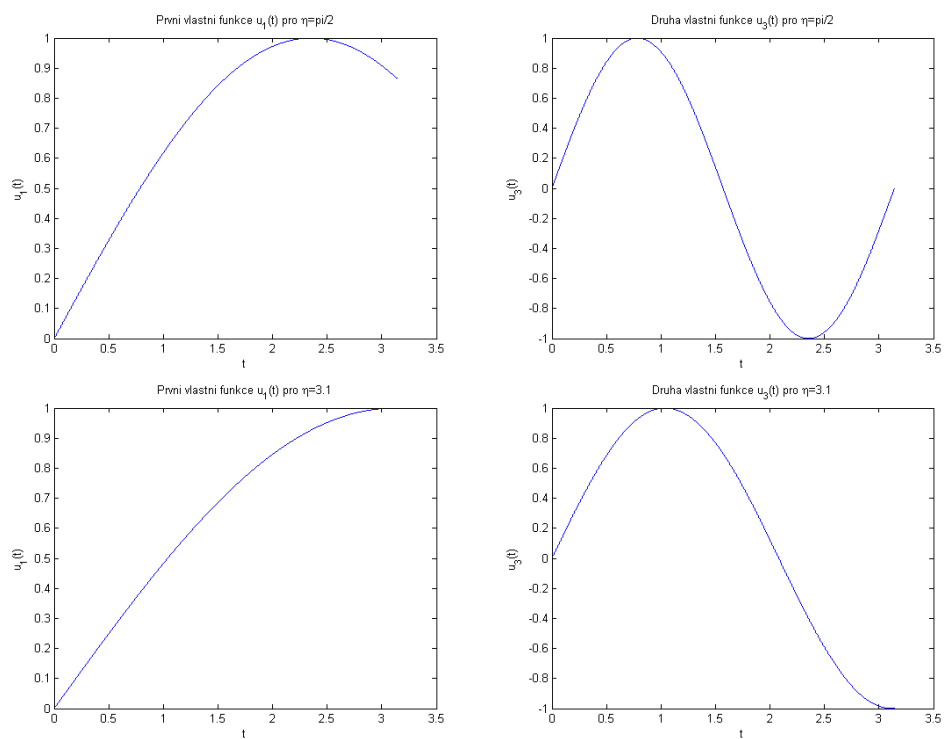
Obrázek 2.1: První dvě vl. funkce u_1, u_2 pro případ (2.3) a $\eta = 0.1, \eta = 0.5$.



Obrázek 2.2: První dvě vl. funkce u_1, u_2 pro případ (2.3) a $\eta = 1.57, \eta = 3.1$.



Obrázek 2.3: První dvě vl. funkce u_1, u_2 pro případ (2.4) a $\eta = 0.1, \eta = 0.5$.



Obrázek 2.4: První dvě vl. funkce u_1, u_2 pro případ (2.4) a $\eta = 1.57, \eta = 3.1$.

2.1.3 Limitní případy tříbodové úlohy

Dále se budeme zabývat limitními případy, kdy parametr η bude nabývat „hraničních hodnot“. Necht' tedy $\eta \rightarrow 0$. Potom naše okrajová úloha (2.1) bude ve tvaru:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(0) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Úloha (2.1) se tedy zredukuje na standardní Dirichletovu úlohu, pro niž jsou vlastní čísla a vlastní funkce známé a to následující:

$$\lambda_n = n^2, \quad u_n(t) = \sin nt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uvažujeme-li získané vztahy pro vlastní čísla (2.3) a (2.4) a jim odpovídající vztahy pro vlastní funkce s podmínkou $\eta \rightarrow 0$, potom po limitním přechodu dostáváme:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lambda_{2n} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{2n\pi}{\pi - \eta} \right)^2 = (2n)^2.$$

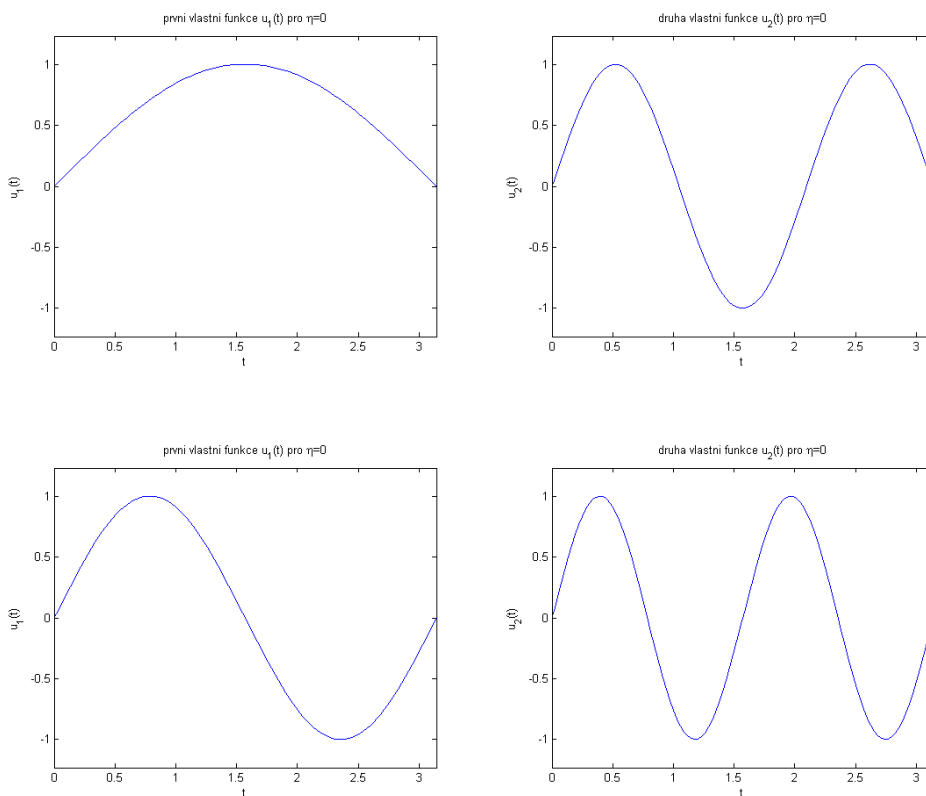
$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lambda_{2k-1} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta} \right)^2 = (2k-1)^2.$$

A příslušné vlastní funkce jsou:

$$u_{2n}(t) = \sin(2n)t, \quad u_{2k-1}(t) = \sin(2k-1)t, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Tedy skutečně dostáváme totéž, co je obecně známo.

Na obrázku 2.5 jsou znázorněny první čtyři vlastní funkce $u_n(t) = \sin nt$, $n = 1, \dots, 4$ Dirichletovy úlohy (2.12).



Obrázek 2.5: První čtyři vlastní funkce u_1, u_2, u_3, u_4 Dirichletovy úlohy (2.12) a $\eta \rightarrow 0$.

Druhým limitním případem pro parametr η je $\eta \rightarrow \pi$.

Díky Lagrangeově větě o střední hodnotě víme, že platí:

$$u \in C((0, \pi)) \cap C^1(0, \pi) \wedge u(\pi) = u(\eta) \implies \exists \xi \in (\eta, \pi) : u'(\xi) = 0.$$

Tedy v našem případě pro $\eta \rightarrow \pi$ získáváme podmínku $u'(\pi) = 0$ a původní okrajová tříbodová úloha se zredukuje na Dirichletovu-Neumannovu úlohu:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \\ u'(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Pro tuto úlohu jsou vlastní čísla a vlastní funkce rovněž známé a to následující:

$$\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2, \quad u_k(t) = \sin\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

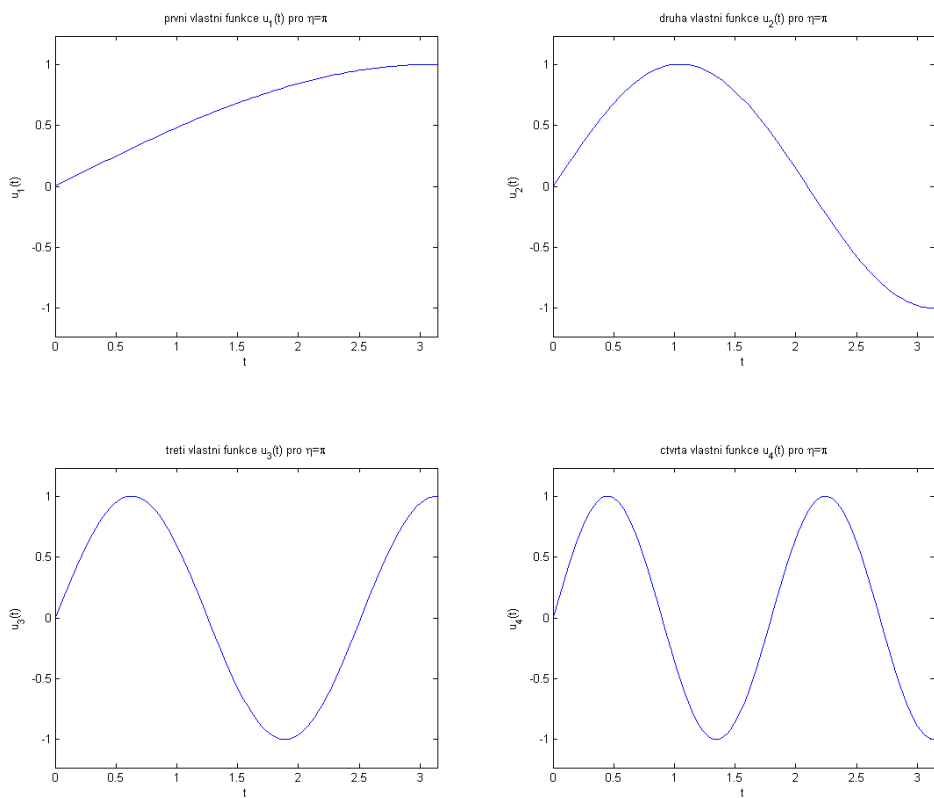
Uvažujeme-li získané vztahy pro vlastní čísla (2.3) a (2.4) a jim odpovídající vztahy pro vlastní funkce s podmínkou $\eta \rightarrow \pi$, potom po limitním přechodu dostáváme:

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \pi} \lambda_{2n} &= \lim_{\eta \rightarrow \pi} \left(\frac{2n\pi}{\pi - \eta}\right)^2 \rightarrow +\infty \\ \lim_{\eta \rightarrow \pi} \lambda_{2k-1} &= \lim_{\eta \rightarrow \pi} \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta}\right)^2 = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

A příslušné vlastní funkce jsou tedy:

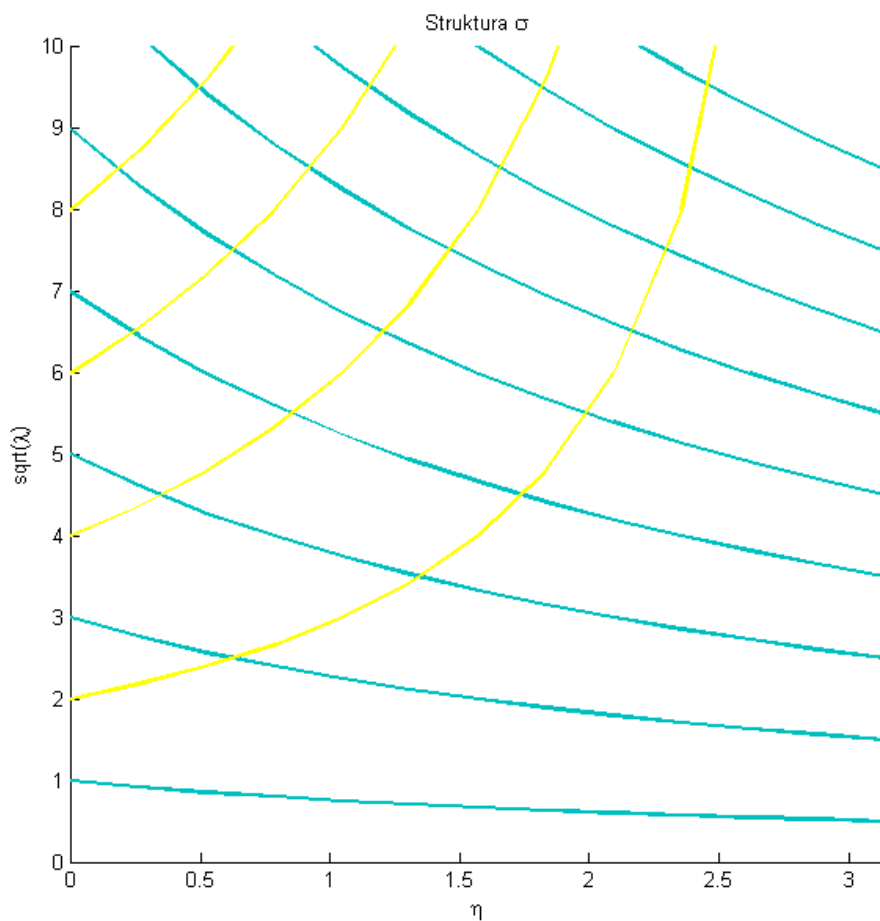
$$u_k(t) = \sin\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right).$$

První čtyři vlastní funkce u_k pro $\eta \rightarrow \pi$ jsou znázorněny na obrázku 2.6.



Obrázek 2.6: První čtyři vlastní funkce u_1, u_2, u_3, u_4 pro případ $\eta \rightarrow \pi$.

Na obrázku 2.7 uvádíme strukturu množiny σ , tj. množinu všech vlastních dvojic $(\eta, \lambda) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}$, ze které je dobře patrné chování vlastních čísel v obou limitních případech $\eta \rightarrow \pi$ a $\eta \rightarrow 0$.



Obrázek 2.7: Struktura množiny σ . Žlutě C_{2n} , modře C_{2k-1} .

Kapitola 3

Třibodová okrajová úloha s tlumením

3.1 Vlastní čísla a vlastní funkce třibodové okrajové úlohy s tlumením

Výchozí třibodová okrajová úloha s tlumením pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu s okrajovými třibodovými podmínkami bude mít tvar:

$$\begin{cases} u''(t) + 2bu'(t) + \lambda u(t) = 0, \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(\eta), \end{cases} \quad (3.1)$$

kde $t \in (0, \pi)$, $\eta \in (0, \pi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

Charakteristická rovnice v tomto případě je ve tvaru:

$$r^2 + 2br + \lambda = 0$$

A tak dostáváme dva kořeny rovnice:

$$r_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \lambda}.$$

Budeme rozlišovat tři případy.

1. $D > 0 \iff \lambda < b^2 \implies r_1 \neq r_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$

Dostáváme dva reálné kořeny, tj. obecné řešení okrajové úlohy bude lineární kombinací exponencií, resp. kombinace sinů a kosinů hyperbolických, jinými slovy platí vztah:

$$u(t) = e^{-bt} \left(C_1 \cosh(\sqrt{b^2 - \lambda}t) + C_2 \sinh(\sqrt{b^2 - \lambda}t) \right).$$

Dosadíme-li okrajové podmínky, dostaneme:

$$u(0) = e^0 (C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0)) = 0 \implies C_1 = 0.$$

Z toho vyplývá:

$$u(t) = e^{-bt} \left(C_2 \sinh(\sqrt{b^2 - \lambda}t) \right).$$

Potom máme:

$$u(\pi) = e^{-b\pi} C_2 \sinh(\sqrt{b^2 - \lambda}\pi) = e^{-b\eta} C_2 \sinh(\sqrt{b^2 - \lambda}\eta) = u(\eta).$$

$$C_2 \left(e^{-b\pi} \sinh(\sqrt{b^2 - \lambda}\pi) - e^{-b\eta} \sinh(\sqrt{b^2 - \lambda}\eta) \right) = 0.$$

Chceme-li dostat netriviální řešení, musíme předpokládat, že $C_2 \neq 0$. Tedy otázkou je, zda existuje řešení pro nějaké $b > 0$ následující rovnosti:

$$e^{-b\pi} \sinh(\sqrt{b^2 - \lambda}\pi) = e^{-b\eta} \sinh(\sqrt{b^2 - \lambda}\eta), \\ \lambda < b^2, \quad b > 0, \quad \eta \in (0, \pi).$$

Označíme-li:

$$\omega := \sqrt{b^2 - \lambda},$$

dostaneme:

$$e^{-b\pi} \sinh(\omega\pi) = e^{-b\eta} \sinh(\omega\eta),$$

kde $b > 0$, $\eta \in (0, \pi)$.

Nyní budeme zkoumat závislost zavedené hodnoty ω na tlumení b . Rozlišujeme opět tři případy:

- $\omega \geq b \implies \sqrt{b^2 - \lambda} \geq b \implies \lambda \leq 0$.

Zajímáme se o chování funkce $f(x)$ definované předpisem:

$$f(x) = e^{-bx} \sinh\left(\sqrt{b^2 - \lambda}x\right) = e^{-bx} \sinh(\omega x).$$

A ptáme se, zda existuje takové η , takové λ a taková kladná hodnota tlumící konstanty b , aby byla splněna druhá okrajová podmínka tříbodové úlohy (3.1), tj. podmínka:

$$f(\eta) = f(\pi).$$

Nejdříve si ukážeme, že funkce $f(x)$ je ostře rostoucí, tj. ukážeme, že její derivace je kladná. Derivace funkce f bude mít tvar:

$$f'(x) = \left[e^{-bx} \sinh(\omega x) \right]' = -be^{-bx} \sinh(\omega x) + e^{-bx} \omega \cosh(\omega x).$$

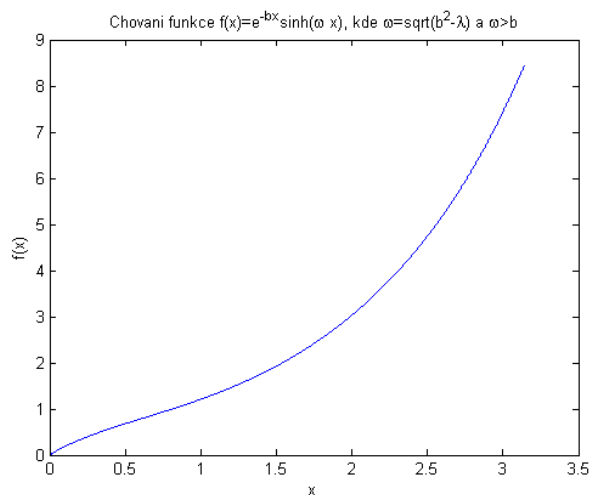
Platí následující věta matematické analýzy.

Věta 3.1 (*Postačující podmínka ostré monotonie [4]*) *Jestliže funkce $f(x)$ je diferencovatelná na intervalu (a, b) a pro libovolné $x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), potom $f(x)$ je ostře rostoucí (resp. ostře klesající) na intervalu (a, b) .*

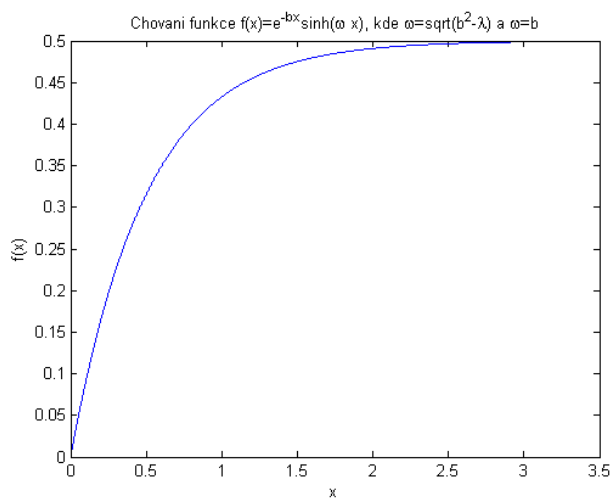
Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $(0, \pi)$ a $f'(x) > 0$ pro libovolné $x \in (0, \pi)$. Podrobněji ukážeme platnost nerovnosti na kladnou derivaci.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[e^{-bx} \sinh(\omega x) \right]' = -be^{-bx} \sinh(\omega x) + e^{-bx} \omega \cosh(\omega x) = \\ &= \underbrace{e^{-bx}}_{>0} \left(\underbrace{\omega}_{\geq b} \underbrace{\cosh(\omega x)}_{>\sinh(\omega x)} - b \sinh(\omega x) \right) > 0. \end{aligned}$$

Tedy díky postačující podmínce na ostrou monotonii funkce (viz věta 3.1), můžeme učinit závěr, že funkce $f(x)$ je ostře rostoucí. Názorně si také ukážeme graf funkce $f(x)$ s podmínkou $\lambda \leq 0$ (viz obrázek 3.1 a 3.2).



Obrázek 3.1: Chování funkce $f(x)$ s podmínkou $\omega > b \implies \lambda < 0$.



Obrázek 3.2: Chování funkce $f(x)$ s podmínkou $\omega = b \implies \lambda = 0$.

Jelikož funkce $f(x)$ je ostře rostoucí, tedy neexistuje žádné takové η , aby hodnota v tomto bodě byla stejná jako na konci uvažovaného intervalu, tedy funkční hodnota v bodě π .

To znamená, že neexistuje záporné ani nulové vlastní číslo úlohy (3.1).

- $\omega < b$

$$\implies \sqrt{b^2 - \lambda} < b \implies 0 < \lambda < b^2.$$

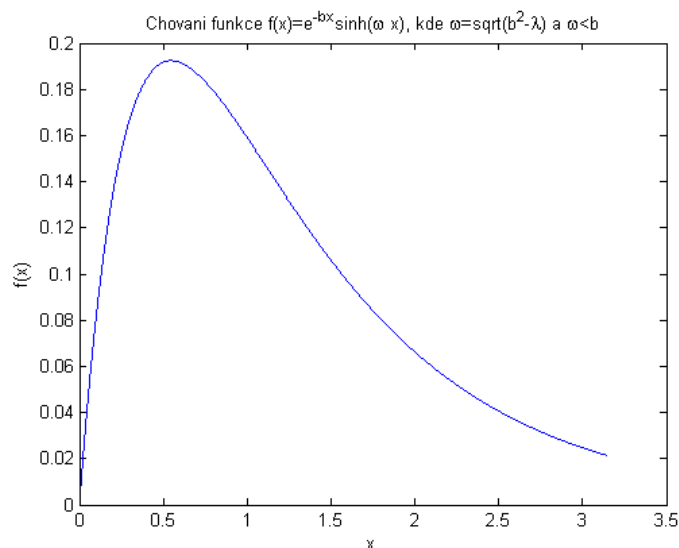
Opět budeme zkoumat funkci $f(x)$, která je definována předpisem:

$$f(x) = e^{-bx} \sinh(\sqrt{b^2 - \lambda}x) = e^{-bx} \sinh(\omega x).$$

Ptáme se, zda existuje kladná hodnota tlumící konstanty b taková, aby byla splněna druhá okrajová podmínka tříbodové úlohy (3.1):

$$f(\eta) = f(\pi).$$

Ukážeme si, jak vypadá graf funkce f s ohledem na podmínku $\omega < b$.



Obrázek 3.3: Chování funkce $f(x)$ s podmínkou $\omega < b \implies 0 < \lambda < b^2$.

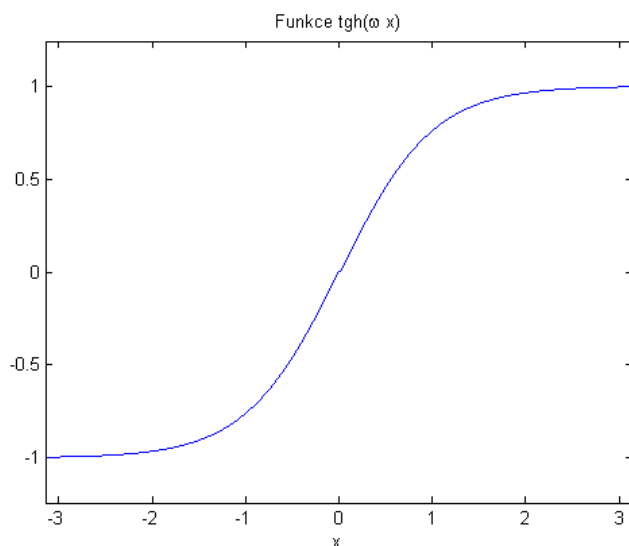
Lze ukázat, že funkce f má právě jeden stacionární bod. Pro její derivaci platí:

$$f'(x) = e^{-bx} (\omega \cosh(\omega x) - b \sinh(\omega x)) = 0,$$

odtud dostáváme:

$$\operatorname{tgh}(\omega x) = \underbrace{\frac{\omega}{b}}_{<1}. \quad (3.2)$$

Na obrázku 3.4 je znázorněna funkce $\operatorname{tgh}(\omega x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$.



Obrázek 3.4: Chování funkce $f(x) = \operatorname{tgh}(\omega x)$.

Je zřejmé, že pro $\omega < b$ má rovnice (3.2) právě jedno řešení, tj. funkce $f(x)$ má právě jeden stacionární bod.

Můžeme tedy učinit závěr, že pro pevně volené $\eta \in (0, \pi)$ lze nalézt nejvýše jednu hodnotu $\lambda > 0$ takovou, že je splněna podmínka:

$$f(\eta) = f(\pi),$$

tj. λ je vlastní číslo úlohy (3.1).

2. $D = 0 \iff \lambda = b^2 \implies r_1 = r_2 = -b$.

Dostáváme tak dva stejné násobné charakteristické kořeny a obecné řešení rovnice z (3.1) má potom tvar:

$$u(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-bt}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení okrajových podmínek do obecného řešení dostáváme:

$$u(0) = (C_1 + C_2 0)e^0 = 0 \implies C_1 = 0.$$

Z toho plyne:

$$u(t) = C_2 t e^{-bt}.$$

Potom

$$\begin{aligned} u(\pi) &= C_2 \pi e^{-b\pi} = C_2 \eta e^{-b\eta} = u(\eta), \\ C_2(\pi e^{-b\pi} - \eta e^{-b\eta}) &= 0. \end{aligned}$$

Zajímáme se o netriviální řešení, proto předpokládáme, že $C_2 \neq 0$. Tedy otázkou je, jestli může platit rovnost:

$$\left(\pi e^{-b\pi} - \eta e^{-b\eta}\right) = 0,$$

respektive rovnost:

$$\pi e^{-b\pi} = \eta e^{-b\eta}.$$

Opět analogicky budeme uvažovat funkci $f(x)$, která má předpis:

$$f(x) = x e^{-bx}.$$

Ptáme se, zda existuje kladná hodnota tlumící konstanty b taková, aby byla splněna druhá okrajová podmínka tříbodové úlohy (3.1):

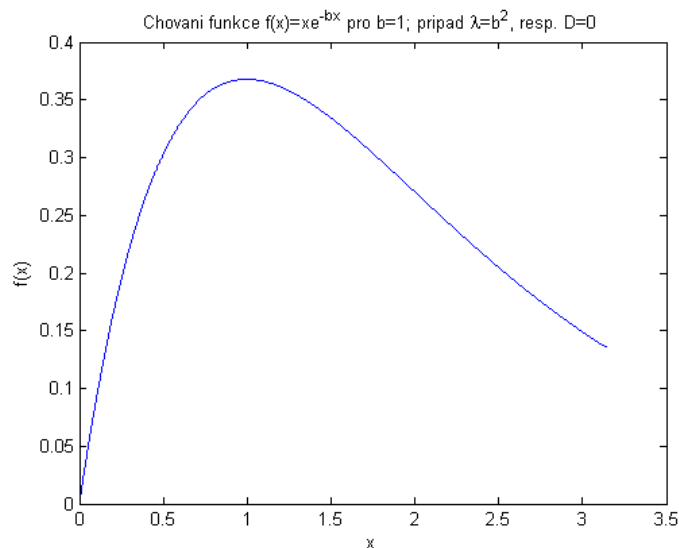
$$f(\eta) = f(\pi).$$

Funkce f podle stejných úvah jako v případě 2. má právě jeden stacionární bod:

$$f'(x) = e^{-bx}(1 - bx) = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{b}.$$

Pro $b > \frac{1}{\pi}$ existuje pouze jedna hodnota $\eta \in (0, \pi)$, pro kterou je $\lambda = b^2$ vlastní číslo.

Ukážeme si, jak se funkce $f(x)$ chová graficky na uvažovaném intervalu.



Obrázek 3.5: Chování funkce $f(x)$ s podmínkou $\omega = b \implies \lambda = b^2$.

Lze tedy učinit závěr, že i pro případ, kdy $\omega = b$, resp. $\lambda = b^2$ může být pro speciální hodnotu η požadovaná rovnost $f(\eta) = f(\pi)$ splněna, tj. $\lambda = b^2$ může být vlastní číslo úlohy (3.1).

3. $D < 0 \iff \lambda > b^2 \implies r_1 \neq r_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{C}$.

Dostáváme tak dva komplexně sdružené charakteristické kořeny a obecné řešení je:

$$u(t) = e^{-bt}(C_1 \cos \sqrt{\lambda - b^2}t + C_2 \sin \sqrt{\lambda - b^2}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení okrajových podmínek do obecného řešení dostáváme:

$$u(0) = e^0(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) = 0 \implies C_1 = 0.$$

Z toho vyplývá:

$$u(t) = e^{-bt} C_2 \sin \sqrt{\lambda - b^2} t.$$

Potom máme:

$$u(\pi) = e^{-b\pi} C_2 \sin \sqrt{\lambda - b^2} \pi = e^{-b\eta} C_2 \sin \sqrt{\lambda - b^2} \eta = u(\eta),$$

neboli

$$C_2 \left(e^{-b\pi} \sin \sqrt{\lambda - b^2} \pi - e^{-b\eta} \sin \sqrt{\lambda - b^2} \eta \right) = 0.$$

Potřebujeme opět netriviální řešení úlohy (3.1), proto položíme $C_2 \neq 0$. Potom ale musí platit:

$$\left(e^{-b\pi} \sin \sqrt{\lambda - b^2} \pi - e^{-b\eta} \sin \sqrt{\lambda - b^2} \eta \right) = 0,$$

respektive

$$e^{-b\pi} \sin \sqrt{\lambda - b^2} \pi = e^{-b\eta} \sin \sqrt{\lambda - b^2} \eta.$$

Označíme-li:

$$\omega := \sqrt{\lambda - b^2},$$

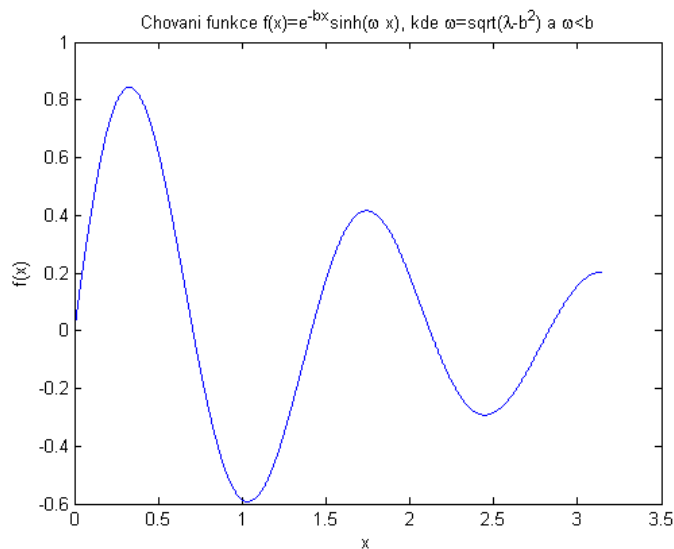
dostaneme:

$$e^{-b\pi} \sin \omega \pi = e^{-b\eta} \sin \omega \eta,$$

kde $b > 0$, $\eta \in (0, \pi)$.

Dále zavedeme novou funkci $f(x)$, která bude mít předpis:

$$f(x) = e^{-bx} \sin(\omega x).$$



Obrázek 3.6: Chování funkce $f(x)$ s podmínkou $\lambda > b^2$.

a odpovídající graf funkce je znázorněn na následujícím obrázku 3.6.

Tedy je možné i v tomto případě říci, že funkční hodnota na konci uvažovaného intervalu v bodě π , tj. $u(\pi)$ může být stejná jako libovolná hodnota $x \in (0, \pi)$. To znamená, že existuje kladné vlastní číslo úlohy (3.1).

Jednoduchou analýzou se nám povedlo ukázat, že pro hodnoty $\lambda \leq 0$ existuje pouze triviální řešení tříbodové úlohy s tlumením (3.1). Případná vlastní čísla λ má smysl hledat pouze na množině \mathbb{R}^+ .

3.1.1 Konkrétní volba hodnoty parametru η

V tomto odstavci se pokusíme zabývat následující okrajovou úlohou:

$$\begin{cases} u''(t) + 2bu'(t) + \lambda u(t) = 0, \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(\frac{\pi}{2}), \end{cases}$$

kde $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedy volíme konkrétní hodnotu parametru $\eta = \frac{\pi}{2}$. Užitím již nalezených vztahů v předchozím odstavci 3.1, dospějeme k následující rovnosti:

$$e^{-b\pi} \sin \omega \pi = e^{-b\frac{\pi}{2}} \sin \omega \frac{\pi}{2} \quad / \cdot e^{-b\frac{\pi}{2}},$$

$$\sin \omega \frac{\pi}{2} \left(\underbrace{2e^{-b\frac{\pi}{2}} \cos \omega \frac{\pi}{2}}_{\leq 1} - 1 \right) = 0. \quad (3.3)$$

Odtud plyne, že pro

$$b > \frac{2}{\pi} \ln 2 \implies e^{b\frac{\pi}{2}} > 2,$$

je

$$\left(2e^{-b\frac{\pi}{2}} \cos \omega \frac{\pi}{2} - 1 \right) \neq 0.$$

Aby tedy platila rovnost (3.3), musí být splněna rovnost:

$$\sin \omega \frac{\pi}{2} = 0,$$

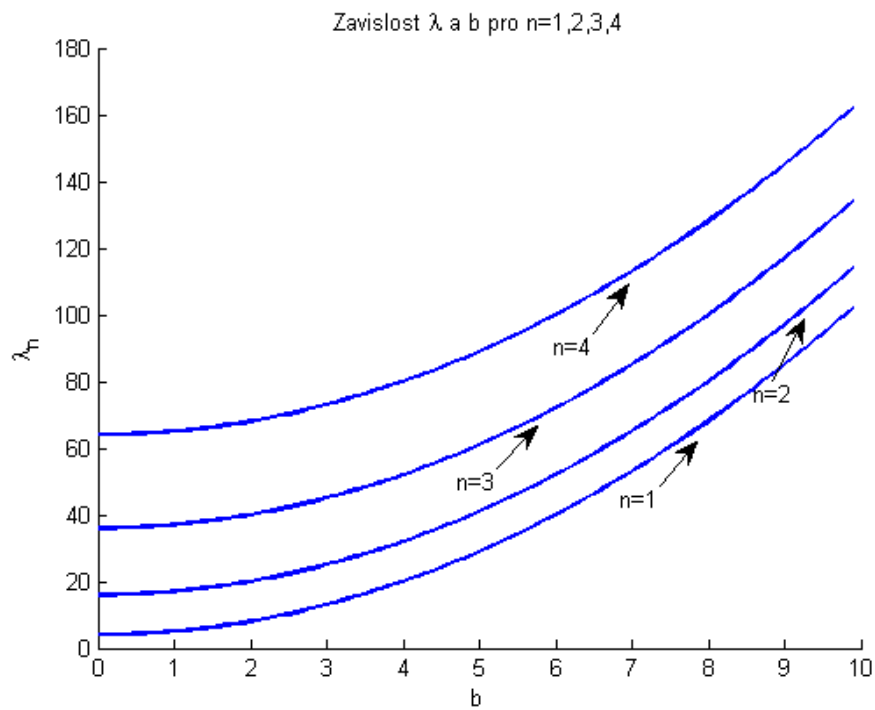
kde $\omega = \sqrt{\lambda - b^2}$, potom:

$$\lambda_n = 4n^2 + b^2, \quad b > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Tedy příslušný systém vlastních funkcí bude ve tvaru:

$$u_n(t) = e^{-bt} \sin 2nt, \quad b > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Na následujícím obrázku znázorníme funkci $\lambda_n = \lambda_n(b)$, $n \in \mathbb{N}$.



Obrázek 3.7: Závislost λ_n a b .

3.2 Třibodová okrajová úloha s tlumením v obecném případě

3.2.1 Formulace problému a věta o jednoznačnosti

Pro další zkoumání využijeme výsledek I. T. Kiguradzeho a A. G. Lomtadzeho, který se týká následující obecné nelokální úlohy s tlumením:

$$u'' = p_1(t)u + p_2(t)u', \quad (3.4)$$

$$u(a+) = 0, \quad u(b-) = u(t_0), \quad (3.5)$$

kde $-\infty < a < t_0 < b < +\infty$, $p_k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, 2$) jsou lokálně integrovatelné koeficienty.

Definujme operátor $\sigma : L_{\text{loc}}((a, b)) \rightarrow L_{\text{loc}}((a, b))^1$ následujícím způsobem:

$$\sigma(p)(t) = \exp \left[\int_{\frac{a+b}{2}}^t p(\tau) d\tau \right]. \quad (3.6)$$

Pokud $\sigma(p) \in L_{\text{loc}}([a, b])$, potom:

$$\sigma_a(p)(t) = \frac{1}{\sigma(p)(t)} \int_a^t \sigma(p)(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

a pokud $\sigma(p) \in L([a, b])$, potom:

$$\sigma_{ab}(p)(t) = \frac{1}{\sigma(p)(t)} \int_a^t \sigma(p)(\tau) d\tau \int_t^b \sigma(p)(\tau) d\tau. \quad (3.8)$$

Řešením rovnice (3.4) rozumíme funkci $u \in C_{\text{loc}}^1((a, b))^2$ která splňuje rovnici skoro všude na intervalu (a, b) .

¹Prostor $L_{\text{loc}}((a, b))$ je množina funkcí $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, které jsou Lebesgueovskými integrovatelnými na $(a + \epsilon, b - \epsilon)$ pro libovolně malé $\epsilon > 0$.

²Prostor $C_{\text{loc}}^1((a, b))$ je množina funkcí $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, které mají absolutně spojitou první derivaci na $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ pro libovolně malé $\epsilon > 0$.

V článku [9] je dokázáno následující tvrzení.

Věta 3.2 *Necht'*

$$\sigma(p_2) \in L(\langle a, b \rangle), \quad \sigma_{ab}(p_2)p_1 \in L(\langle a, b \rangle),$$

a necht' existují čísla $\lambda_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $l_i \in \langle 0, +\infty \rangle$ ($i = 1, 2$) a $c \in (t_0, b)$ taková, že

$$\frac{(c-a)^{1-\lambda_1}}{1-\lambda_1} - \frac{(b-c)^{1-\lambda_2}}{1-\lambda_2} \geq \frac{(t_0-a)^{1-\lambda_1}}{1-\lambda_1}, \quad (3.9)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{l_1 + l_2 s + s^2} \geq \frac{(c-a)^{1-\lambda_1}}{1-\lambda_1} \quad (3.10)$$

a

$$\begin{aligned} (t-a)^{2\lambda_1} p_1(t) &\geq -l_1, & (t-a)^{\lambda_1} \left[p_2(t) + \frac{\lambda_1}{t-a} \right] &\geq -l_2, & \text{pro } a < t < c, \\ (b-t)^{2\lambda_2} p_1(t) &\geq -l_1, & (b-t)^{\lambda_2} \left[p_2(t) + \frac{\lambda_2}{b-t} \right] &\leq l_2, & \text{pro } c < t < b, \end{aligned} \quad (3.11)$$

kde alespoň jedna z nerovností (3.11) je ostrá na množině kladné míry. Potom úloha (3.4), (3.5) má pouze triviální řešení.

3.2.2 Aplikace věty 3.2 na úlohu (3.1)

Vrátíme se opět k naší tříbodové okrajové úloze (3.1) s tlumícím členem, tedy budeme opět uvažovat úlohu:

$$\begin{cases} u''(t) + 2bu'(t) + \lambda u(t) = 0, \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(\eta), \end{cases}$$

kde $\eta \in (0, \pi)$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

V tomto odstavci se pokusíme aplikovat větu 3.2 na naši úlohu (3.1), což nám umožní stanovit podmínky na parametry λ a b , za kterých existuje pouze triviální řešení. V našem případě platí:

$$p_1(t) = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$p_2(t) = -2b, \quad b > 0.$$

Nejprve musíme splnit podmínky podle předpisů (3.6) a (3.8):

$$\sigma(p_2) \in L(\langle 0, \pi \rangle) \quad \sigma_{ab}(p_2)p_1 \in L(\langle 0, \pi \rangle),$$

což je v našem případě automaticky splněno. Dále předpokládejme, že existují taková čísla $\lambda_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $l_i \in \langle 0, \pi \rangle$ a $c \in (\eta, \pi)$, že platí nerovnosti: (3.9), (3.10), (3.11), přičemž je alespoň jedna z nerovností (3.11) ostrá. Potom můžeme tvrdit, že úloha (3.1) má pouze triviální řešení.

Zvolíme následující hodnoty čísel λ_i , l_i a c :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad l_1 = |\lambda|, \quad l_2 = 2b, \quad c = \frac{\pi + \eta}{2}.$$

Potom podmínka (3.9) bude mít tvar:

$$\frac{\pi + \eta}{2} - \left(\pi - \frac{\pi + \eta}{2} \right) = \eta \geq \eta.$$

Podmínka (3.10) bude mít tvar:

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + 2bs + |\lambda|} \geq \frac{\pi + \eta}{2}.$$

A poslední podmínka (3.11):

$$p_1(t) = -\lambda \geq -l_1 = -|\lambda|, \quad p_2(t) = -2b \geq -l_2 = -2b,$$

pro $t \in \left(0, \frac{\pi + \eta}{2}\right)$,

$$p_1(t) = -\lambda \geq -l_1 = -|\lambda|, \quad p_2(t) = -2b \leq l_2 = 2b,$$

pro $t \in \left(\frac{\pi + \eta}{2}, \pi\right)$.

Podmínky (3.9), (3.11) jsou triviálně splněny pro $b > 0$, přičemž poslední nerovnost je ostrá.

Zbývá vyšetřit podmínku (3.10).

Dostáváme tak následující integrální nerovnost:

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + 2bs + |\lambda|} \geq \frac{\pi + \eta}{2}.$$

Integrál na levé straně lze spočítat explicitně.

- Jestliže $|\lambda| > b^2$, dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + 2bs + |\lambda|} &= \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+b)^2 + |\lambda| - b^2} = \frac{1}{\sqrt{|\lambda| - b^2}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{s+b}{\sqrt{|\lambda| - b^2}} \right) \right]_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\lambda| - b^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{\sqrt{|\lambda| - b^2}} \right) \right) \geq \frac{\pi + \eta}{2}. \end{aligned}$$

Označme:

$$f_1(\lambda, b) := \frac{1}{\sqrt{|\lambda| - b^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{\sqrt{|\lambda| - b^2}} \right) \right) - \left(\frac{\pi + \eta}{2} \right).$$

- Jestliže $|\lambda| = b^2$, dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + 2bs + |\lambda|} &= \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+b)^2 + |\lambda| - b^2} = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+b)^2} = \\ &= \left[-\frac{1}{b+s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Označme:

$$f_2(\lambda, b) := \frac{1}{b} - \left(\frac{\pi + \eta}{2} \right).$$

- Jestliže $0 \leq |\lambda| < b^2$, potom $(b^2 - \lambda) > 0$. Užitím rozkladu na parciální zlomky dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + 2bs + |\lambda|} &= \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+b)^2 + |\lambda| - b^2} = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+b)^2 - (b^2 - |\lambda|)} = \\ &= \frac{1}{\left((s+b) - \sqrt{b^2 - |\lambda|} \right) \left((s+b) + \sqrt{b^2 - |\lambda|} \right)} = \\ &= \frac{A}{\left((s+b) - \sqrt{b^2 - |\lambda|} \right)} + \frac{B}{\left((s+b) + \sqrt{b^2 - |\lambda|} \right)}. \end{aligned}$$

Obdržíme dvě rovnosti:

$$\begin{cases} A = -B, \\ b(A+B) + \sqrt{b^2 - |\lambda|}(A-B) = 1, \end{cases}$$

dosazením dostáváme:

$$(-2B)\sqrt{b^2 - |\lambda|} = 1,$$

$$B = -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - |\lambda|}}, \quad A = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - |\lambda|}}.$$

Integrujeme tedy následující rozdíl integrálů:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{b^2 - |\lambda|}} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+b) - \sqrt{b^2 - |\lambda|}} - \frac{1}{2\sqrt{b^2 - |\lambda|}} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+b) + \sqrt{b^2 - |\lambda|}} = \\ & = -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - |\lambda|}} \ln \left(1 - \frac{2\sqrt{b^2 - |\lambda|}}{\sqrt{b^2 - |\lambda|} + b} \right). \end{aligned}$$

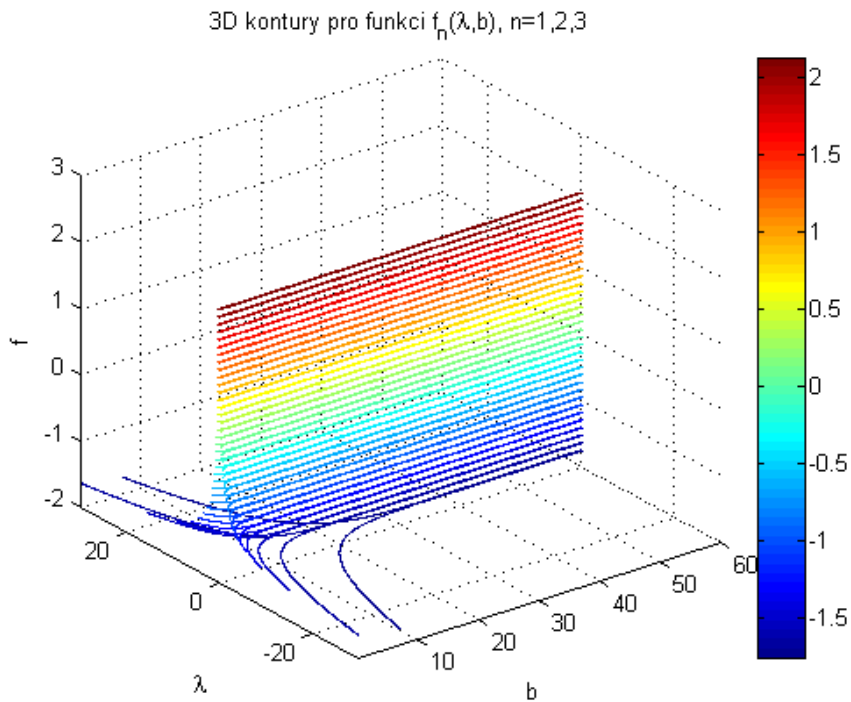
Označme:

$$f_3(\lambda, b) := -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - |\lambda|}} \ln \left(1 - \frac{2\sqrt{b^2 - |\lambda|}}{\sqrt{b^2 - |\lambda|} + b} \right) - \left(\frac{\pi + \eta}{2} \right).$$

Abychom mohli odpovědět na otázku existence buď netriviálního řešení, anebo pouze triviálního řešení za pomoci věty 3.2, musíme vyšetřit, zda $f(\lambda, b) \geq 0$, kde

$$f(\lambda, b) = \begin{cases} f_1(\lambda, b), & |\lambda| > b^2, \\ f_2(\lambda, b), & |\lambda| = b^2, \\ f_3(\lambda, b), & 0 \leq |\lambda| < b^2. \end{cases}$$

Na následujícím obrázku si graficky znázorníme 3D graf, na kterém ukážeme, jak funkce $f(\lambda, b)$ vypadá.



Obrázek 3.8: Graf funkce $f_n(\lambda, b)$, $n = 1, 2, 3$.

Podmínka (3.10) z věty 3.2 v našem konkrétním případě platí právě tehdy, když platí nerovnost:

$$f(\lambda, b) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + 2bs + |\lambda|} - \frac{\pi + \eta}{2} \geq 0.$$

Jak můžeme z obrázku 3.8 pozorovat, funkce $f(\lambda, b)$ nabývá kladných i záporných hodnot. Nalezení dvojic (λ, b) , pro které $f(\lambda, b) \geq 0$, by vyžadovalo detailnější zkoumání.

3.2.3 Transformace okrajové úlohy

V článku [9] autoři používají rovněž následující úvahu.

Uvažujeme okrajovou úlohu (3.4), (3.5). Budeme-li předpokládat, že existuje netriviální řešení úlohy (3.4), (3.5), tj. $\exists u(t) \neq 0$, můžeme zavést transformaci:

$$f(t) = \frac{u'(t)}{u(t)}.$$

Z (3.4) dostáváme:

$$f'(t) = p_1(t) + p_2(t)f(t) - f^2(t).$$

Zabývejme se dále pouze naší úlohou (3.1) s konstantními koeficienty, tj. uvažujme úlohu (3.4), (3.5) s volbou $p_1(t) \equiv -\lambda$, $p_2(t) \equiv -2b$, $\langle a, b \rangle = \langle 0, \pi \rangle$, $t_0 = \eta$.

Upravíme-li předchozí vztah, dostaneme:

$$-\frac{f'(t)}{\lambda + 2bf(t) - f^2(t)} = 1.$$

Integrovaním na intervalu $\langle a, t \rangle$, získáme:

$$-\int_a^t \frac{f'(t)dt}{\lambda + 2bf(t) - f^2(t)} = \int_a^t 1dt.$$

Položme $f(t) \equiv x$, potom $f'(t)dt = dx$, tedy

$$-\int_{f(a)}^{f(t)} \frac{dx}{\lambda + 2bx + x^2} = t - a,$$

respektive

$$\int_{f(t)}^{+\infty} \frac{dx}{\lambda + 2bx + x^2} = t - a. \quad (3.12)$$

Volíme-li speciálně $t = \frac{\pi + \eta}{2}$, potom dostáváme:

$$\int_{f(\frac{\pi+\eta}{2})}^{+\infty} \frac{dx}{\lambda + 2bx + x^2} = \frac{(\pi + \eta)}{2} - 0 = \frac{\pi + \eta}{2}. \quad (3.13)$$

Příklad 2.3

Uvažujme okrajovou třibodovou úlohu bez tlumení, tj. položme $l_2 = 0$, resp. $b = 0$:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\eta), \\ u(\pi) = u(\eta), \end{cases} \quad (3.14)$$

kde $\eta \in (0, \pi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Uvažujme $\lambda > 0$ a $t = \frac{\pi + \eta}{2}$ takový bod, že

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = f(t) = 0.$$

Díky integrální nerovnosti (3.13) dostáváme:

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\lambda + s^2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} \frac{d\frac{s}{\sqrt{\lambda}}}{1 + \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arctg} \left[\frac{s}{\sqrt{\lambda}} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi + \eta}{2}.$$

Dostáváme tak podmínku:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi + \eta}{2}.$$

Tedy

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{\pi + \eta} \right)^2. \quad (3.15)$$

Všimněme si, že vztah (3.15) představuje vztah pro první vlastní číslo úlohy (3.14), který jsme získali v kapitole 2.1 jiným způsobem (viz vztah (2.4)).

3.2.4 Dvě další transformace třibodové okrajové úlohy s tlumením

Pro zajímavost uvedeme další dvě transformace, které převedou původní třibodovou okrajovou úlohu s tlumením na úlohu bez tlumení. Studovat je však dále nebudeme.

1. Nová závislá proměnná: $u(t) \rightarrow \omega(t)$

Budeme vycházet z okrajové úlohy (3.1).

Vynásobíme-li diferenciální rovnici z této úlohy členem e^{bt} , potom dostaneme:

$$u'' e^{bt} + 2be^{bt}u' + \lambda e^{bt}u = 0.$$

Dále zavedeme nové označení $e^{bt}u =: \omega$. Potom:

$$\omega' = be^{bt}u + e^{bt}u'$$

a

$$\omega'' = b^2e^{bt}u + 2be^{bt}u' + e^{bt}u'',$$

tedy obdržíme následující transformovanou diferenciální rovnici:

$$\omega'' + (\lambda - b^2)\omega = 0.$$

Také potřebujeme transformovat okrajové podmínky. Víme, že platí:

$$u(0) = 0 \implies \omega(0) = 0.$$

Také platí:

$$u(\eta) = u(\pi),$$

z čehož plyne:

$$\omega(\pi) = e^{b\pi}u(\pi) = e^{b\pi}u(\eta) = \frac{e^{b\pi}}{e^{b\eta}}\omega(\eta).$$

Tak jsme získali novou tříbodovou okrajovou úlohu bez tlumení ve tvaru:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega''(t) + (\lambda - b^2)\omega(t) = 0, \quad t \in (0, \pi), \\ \omega(0) = 0, \\ \omega(\pi) = \frac{e^{b\pi}}{e^{b\eta}}\omega(\eta), \end{array} \right. \quad (3.16)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta \in (0, \pi)$.

Jak můžeme vidět, obdrželi jsme úlohu se stejnými koncovými body, ale máme jinou tříbodovou podmínku s nejednotkovým koeficientem!

2. Nová nezávislá proměnná: $u(t) \rightarrow u(x)$

Budeme opět vycházet z tříbodové okrajové úlohy (3.1). Zavedeme novou nezávislou proměnnou ve tvaru:

$$x = \int_0^t e^{\int_{\pi/2}^s (-2b)d\xi} ds = \int_0^t e^{-2b(s-\frac{\pi}{2})} ds = -\frac{1}{2b} \left(e^{-2b(t-\frac{\pi}{2})} - e^{b\pi} \right).$$

Zavedeme nové označení $e^{\int_{\pi/2}^s (-2b)d\xi} =: \sigma(s)$, potom platí:

$$\sigma(s) = e^{-2b(s-\frac{\pi}{2})}$$

a odpovídající derivace:

$$\sigma'(s) = -2be^{-2b(s-\frac{\pi}{2})}.$$

Dále položíme:

$$V(x) = u(t),$$

potom pro první a druhou derivaci platí:

$$u'(t) = \frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV(x)}{dx} \sigma(t) = \frac{dV(x)}{dx} e^{-2b(t-\frac{\pi}{2})},$$

$$u''(t) = \frac{d^2V(x)}{dx^2} \sigma^2(t) + (-2b) \frac{dV}{dx} e^{-2b(t-\frac{\pi}{2})}.$$

Dosazením do rovnice v úloze (3.1) dostáváme:

$$u''(t) = \frac{d^2V(x)}{dx^2} \sigma^2(t) + (-2b) \frac{dV}{dx} e^{-2b(t-\frac{\pi}{2})} = -\lambda V(x) + (-2b) \frac{dV(x)}{dx} e^{-2b(t-\frac{\pi}{2})},$$

a tedy:

$$V''(x) = -\frac{\lambda}{e^{-4b(t-\frac{\pi}{2})}}V(x) = -\lambda e^{4b(t-\frac{\pi}{2})}V(x).$$

V předchozí diferenciální rovnici nám zbývá vyjádřit člen $e^{4b(t-\frac{\pi}{2})}$ pomocí nové nezávislé proměnné x . Platí totiž:

$$-2bx = e^{-2b(t-\frac{\pi}{2})} - e^{b\pi},$$

potom

$$e^{b\pi} - 2bx = e^{-2b(t-\frac{\pi}{2})},$$

tedy

$$\left(e^{b\pi} - 2bx\right)^2 = e^{-4b(t-\frac{\pi}{2})}.$$

Tak dostáváme diferenciální rovnici druhého řádu s novou nezávislou proměnnou x :

$$V''(x) = \frac{-\lambda}{(e^{b\pi} - 2bx)^2}V(x).$$

Jako poslední nám zbývá analogicky transformovat okrajové podmínky.

Určitě platí:

$$u(0) = 0 \implies V(0) = 0.$$

Také víme, že platí:

$$u(\pi) = u(\eta),$$

potom:

$$V(\bar{\pi}) = V(\bar{\eta}),$$

kde

$$\bar{\pi} = \int_0^\pi \sigma(s)ds, \quad \bar{\eta} = \int_0^\eta \sigma(s)ds.$$

Tak jsme získali novou tříbodovou okrajovou úlohu bez tlumení ve tvaru:

$$\begin{cases} V''(x) + \frac{-\lambda}{(e^{bx} - 2bx)^2} V(x) = 0, & t \in (0, \pi), \\ V(0) = 0, \\ V(\bar{\pi}) = V(\bar{\eta}), \end{cases} \quad (3.17)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\eta \in (0, \pi)$, $\bar{\pi} = \int_0^\pi \sigma(s) ds$, $\bar{\eta} = \int_0^\eta \sigma(s) ds$.

Jak můžeme pozorovat, obdrželi jsme netlumenou úlohu se stejnými tříbodovými podmínkami, ale s jinými koncovými body a nekonztantním koeficientem v rovnici!

Kapitola 4

Čtyřbodová okrajová úloha

4.1 Vlastní čísla a vlastní funkce čtyřbodové okrajové úlohy

Výchozí čtyřbodová okrajová úloha pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu s okrajovými čtyřbodovými podmínkami má tvar:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\xi), \\ u'(\pi) = u'(\eta), \end{cases} \quad (4.1)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in (0, \pi)$, $\eta \in (0, \pi)$. Řešením úlohy (4.1) budeme opět rozumět takovou funkci $u(t)$, pro kterou je diferenciální rovnice v okrajové úloze (4.1) splněna pro každé $t \in (0, \pi)$ a která vyhovuje okrajovým podmínkám $u(0) = u(\xi)$ a $u'(\pi) = u'(\eta)$, $\eta, \xi \in (0, \pi)$.

Trojici $(\xi, \eta, \lambda) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times \mathbb{R}$ nazveme *vlastní trojicí*, jestliže úloha (4.1) má netriviální řešení $u(t)$. Hodnoty $\lambda = \lambda(\xi, \eta)$, pak budeme standardně nazývat *vlastním číslem*. Příslušné nenulové násobky $u(t)$ nazýváme *vlastními funkcemi* okrajové úlohy.

Budeme rozlišovat tři různé případy v závislosti na hodnotě λ .

1. Jestliže $\lambda < 0$, potom obecné řešení je lineární kombinací hyperbolických funkcí, tedy:

$$u(t) = C_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}t) + C_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Po dosazení okrajových podmínek z (4.1) do obecného řešení (4.2) dostáváme:

$$C_1 = C_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + C_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi).$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-\lambda}C_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\pi) + \sqrt{-\lambda}C_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\pi) &= \\ = \sqrt{-\lambda}C_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\eta) + \sqrt{-\lambda}C_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\eta). \end{aligned}$$

neboli v maticovém zápisu:

$$\begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) - 1 & \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \\ (\sinh(\sqrt{-\lambda}\pi) - \sinh(\sqrt{-\lambda}\eta)) & (\cosh(\sqrt{-\lambda}\pi) - \cosh(\sqrt{-\lambda}\eta)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Má-li mít tato soustava netriviální řešení, musí být determinant soustavy roven nule, což díky předpokladu $\lambda < 0$ není možné.

Tedy hodnoty $\lambda < 0$ nemohou být vlastními čísly.

2. Jestliže $\lambda = 0$, známe tvar obecného řešení rovnice:

$$u(t) = C_1 + C_2 t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Po dosazení okrajových podmínek do obecného řešení (4.3) dostáváme:

$$u(0) = C_1 + 0 = u(\xi) = C_1 + C_2 \xi \implies C_2 \xi = 0 \wedge \xi \neq 0 \implies C_2 = 0.$$

$$u'(t) = C_2 = 0.$$

Z toho plyne:

$$u(t) = C_1.$$

Tedy pro případ $\lambda = 0$ existuje konstantní řešení okrajové úlohy (4.1) $u(t) \equiv 1$.

3. Jestliže $\lambda > 0$, potom víme, že obecné řešení má tvar:

$$u(t) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Po dosazení okrajových podmínek z (4.1) do obecného řešení (4.4) dostáváme:

$$C_1 = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\xi + C_2 \sin \sqrt{\lambda}\xi.$$

$$\begin{aligned} -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\pi + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\pi &= \\ = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\eta + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\eta. \end{aligned}$$

Tedy dostáváme následující soustavu:

$$\begin{cases} C_1(1 - \cos(\sqrt{\lambda}\xi)) - C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\xi) = 0, \\ C_1(\sin(\sqrt{\lambda}\pi) - \sin(\sqrt{\lambda}\eta)) - C_2(\cos(\sqrt{\lambda}\pi) - \cos(\sqrt{\lambda}\eta)) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Užitím trigonometrických úprav dojdeme k ekvivalentním rovnostem a obdržíme dvě rovnosti. První z nich označíme (A):

$$\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) - C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) \right) = 0,$$

a druhou rovnost značme (B):

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi - \eta}{2}\right) \left(C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi + \eta}{2}\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi + \eta}{2}\right) \right) = 0.$$

Je třeba prozkoumat několik možných případů zvlášť.

(a) $\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) = 0 \wedge \sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi - \eta}{2}\right) = 0$, což platí právě tehdy, když:

$$\lambda = \left(\frac{2l\pi}{\xi}\right)^2 = \left(\frac{2n\pi}{\pi - \eta}\right)^2.$$

potom z obou dvou rovností (A) a (B) vyplývá, že konstanty C_1, C_2 mohou být libovolné reálné. Tak dostáváme vlastní číslo λ násobnosti 2 a obecné řešení pro tento případ můžeme psát ve tvaru:

$$u(t) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Jedná se o dvě lineárně nezávislé vlastní funkce $\sin(\sqrt{\lambda}t)$ a $\cos(\sqrt{\lambda}t)$. Jde o případ, kdy řešení je periodické na intervalu $(0, \xi)$ i na $(0, \pi)$.

(b) $\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) = 0 \wedge \sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi-\eta}{2}\right) \neq 0$, což platí právě tehdy, když

$$\lambda_{2l} = \left(\frac{2\pi l}{\xi}\right)^2, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (4.6)$$

potom z rovnosti (B) vyplývá:

$$C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi+\eta}{2}\right) = -C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi+\eta}{2}\right).$$

Dosadíme-li tuto rovnost do obecného řešení (4.4), potom obdržíme řešení $u_{2l}(t)$ ve tvaru:

$$u_{2l}(t) = D \sin \sqrt{\lambda_{2l}} \left(t - \frac{\pi + \eta}{2}\right),$$

kde $D \in \mathbb{R}$, $\eta \in (0, \pi)$.

Bez újmy na obecnosti lze položit $D = 1$ a řešení pro tento případ lze psát ve tvaru:

$$u_{2l}(t) = \sin \sqrt{\lambda_{2l}} \left(t - \frac{\pi + \eta}{2}\right).$$

Obdržené řešení je periodické na $(0, \xi)$ a splňuje $u\left(\frac{\pi + \eta}{2}\right) = 0$.

(c) $\sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi-\eta}{2}\right) = 0 \wedge \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) \neq 0$, což platí právě tehdy, když

$$\lambda_{2n} = \left(\frac{2\pi n}{\pi-\eta}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.7)$$

potom z rovnosti (A) vyplývá:

$$C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) = C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right).$$

Dosadíme-li výše nalezený vztah do obecného řešení (4.4), zjistíme, že řešení $u_{2n}(t)$ pro tento případ můžeme psát ve tvaru:

$$u_{2n}(t) = E \cos \sqrt{\lambda_{2n}} \left(t - \frac{\xi}{2}\right),$$

kde $E \in \mathbb{R}$, $\xi \in (0, \pi)$.

Bez újmy na obecnosti lze položit $E = 1$ a řešení pro tento případ lze psát ve tvaru

$$u_{2n}(t) = \cos \sqrt{\lambda_{2n}} \left(t - \frac{\xi}{2}\right).$$

Obdržené řešení je periodické na (η, π) a splňuje $u'\left(\frac{\xi}{2}\right) = 0$.

(d) $\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) \neq 0 \wedge \sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi-\eta}{2}\right) \neq 0$.

Za těchto předpokladů lze obě dvě rovnosti (A) a (B) vhodně upravit. Potom dostaneme vztah:

$$C_1 \left(\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi+\eta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi+\eta}{2}\right) \right) = 0.$$

Hledáme netriviální řešení úlohy, proto požadujeme, aby $C_1 \neq 0$. Jinak řečeno chceme, aby platilo:

$$\cos\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi+\eta}{2} - \frac{\sqrt{\lambda}\xi}{2}\right) = 0,$$

což platí právě tehdy, když

$$\lambda_{2k-1} = \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi - \xi + \eta} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Tedy řešení $u_{2k-1}(t)$ můžeme psát ve tvaru:

$$u_{2k-1}(t) = F \cos \sqrt{\lambda_{2k-1}} \left(t - \frac{\xi}{2} \right),$$

kde $F \in \mathbb{R}$, $\xi \in (0, \pi)$.

Bez újmy na obecnosti lze položit $F = 1$ a řešení pro tento případ lze psát ve tvaru

$$u_{2k-1}(t) = \cos \sqrt{\lambda_{2k-1}} \left(t - \frac{\xi}{2} \right).$$

Pro obdržené řešení platí: $u' \left(\frac{\xi}{2} \right) = 0$ a $u \left(\frac{\pi + \eta}{2} \right) = 0$.

Shrneme naše výsledky v následující tabulce.

	vlastní čísla	vlastní funkce
(1)	$\lambda_0 = 0$	$u_0(t) = 1$
(2)	$\lambda_{2n} = \left(\frac{2\pi n}{\pi - \eta}\right)^2$	$u_{2n}(t) = \cos \sqrt{\lambda_{2n}} \left(t - \frac{\xi}{2}\right)$
(3)	$\lambda_{2l} = \left(\frac{2\pi l}{\xi}\right)^2$	$u_{2l}(t) = \sin \sqrt{\lambda_{2l}} \left(t - \frac{\pi + \eta}{2}\right)$
(4)	$\lambda_{2k-1} = \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta - \xi}\right)^2$	$u_{2k-1}(t) = \cos \sqrt{\lambda_{2k-1}} \left(t - \frac{\xi}{2}\right)$

Tabulka 4.1: Systém vlastních čísel a jim odpovídajících vlastních funkcí čtyřbodové úlohy (4.1).

Našli jsme tak všechna vlastní čísla a všechny vlastní funkce čtyřbodové okrajové úlohy (4.1).

Na následující sérii obrázků si ukážeme, jak vypadají první dvě vlastní funkce pro vybrané hodnoty parametrů η a ξ .

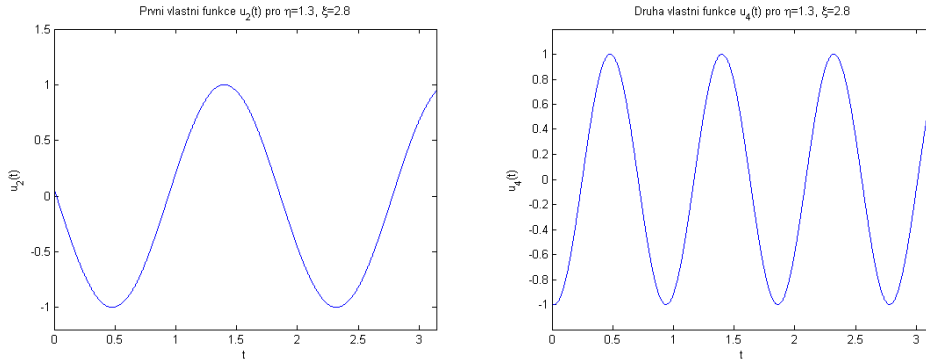
Nejdříve budeme uvažovat případ (1) tabulky 4.1. Vlastním číslem je nula a odpovídající vlastní funkcí je funkce konstantní, tedy například konstantní jednička.

Pro případ (2) tabulky 4.1. budeme uvažovat vybrané hodnoty parametrů a to následující:

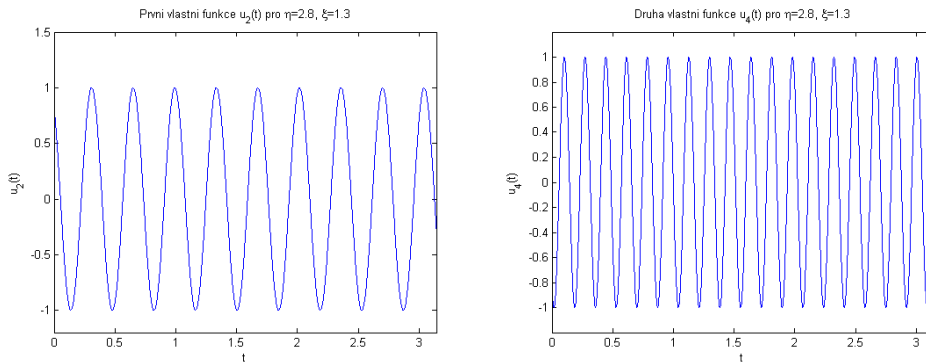
$$\eta = 1.3 < \xi = 2.8,$$

$$\xi = 1.3 < \eta = 2.8,$$

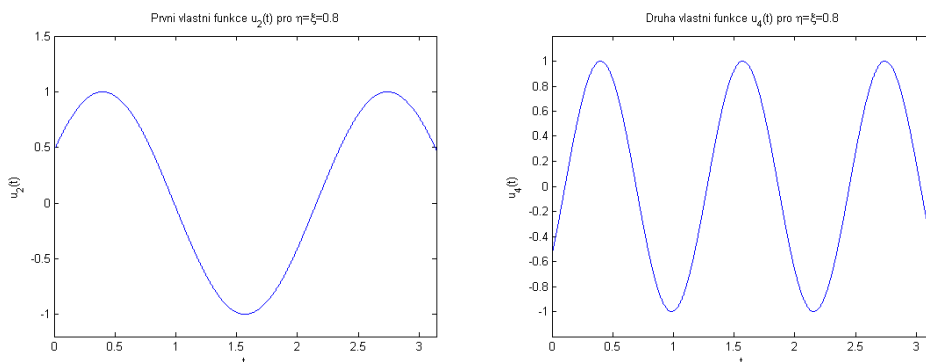
$$\eta = \xi = 0.8.$$



Obrázek 4.1: První dvě vlastní funkce u_1, u_2 pro případ (4.7) a $\eta = 1.3$, $\xi = 2.8$.



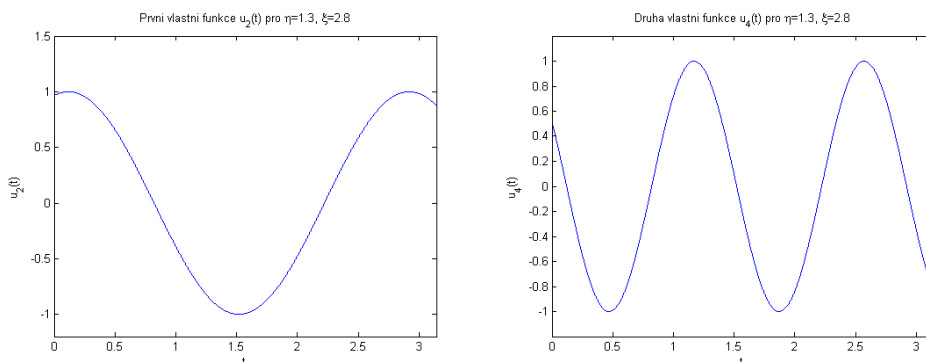
Obrázek 4.2: První dvě vlastní funkce u_1, u_2 pro případ (4.7) a $\eta = 2.8$, $\xi = 1.3$.



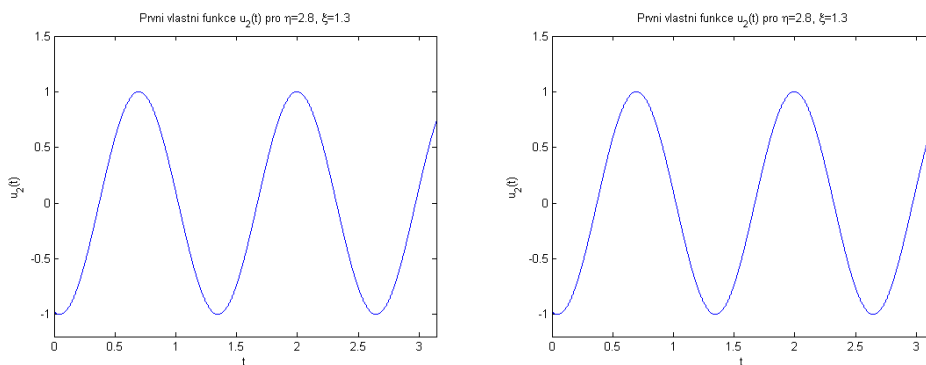
Obrázek 4.3: První dvě vlastní funkce u_1, u_2 pro případ (4.7) a $\eta = 0.8 = \xi$.

Dále budeme uvažovat případ (3) tabulky 4.1. Pro tento případ ukážeme graficky vlastní funkce pro stejné hodnoty parametrů η, ξ , tedy:

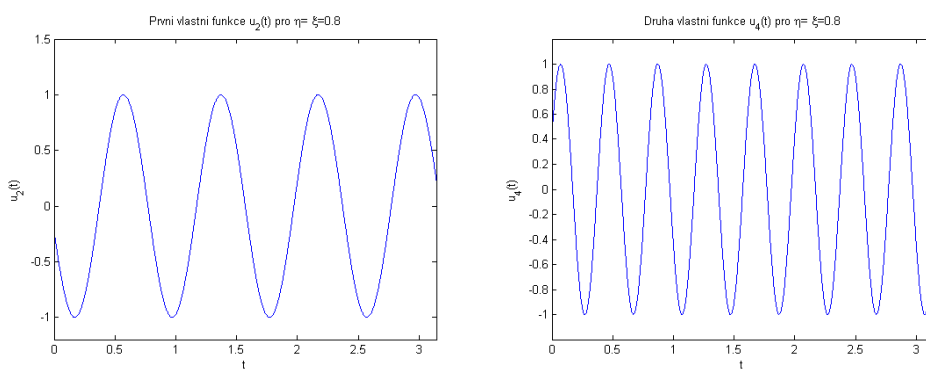
$$\eta = 1.3 < \xi = 2.8; \quad \xi = 1.3 < \eta = 2.8; \quad \eta = \xi = 0.8.$$



Obrázek 4.4: První dvě vlastní funkce u_1, u_2 pro případ (4.6) a $\eta = 1.3$, $\xi = 2.8$.



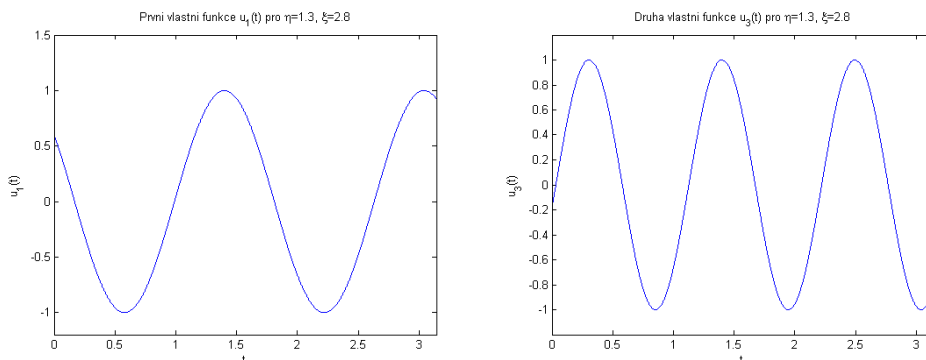
Obrázek 4.5: První dvě vlastní funkce u_1, u_2 pro případ (4.6) a $\eta = 2.8$, $\xi = 1.3$.



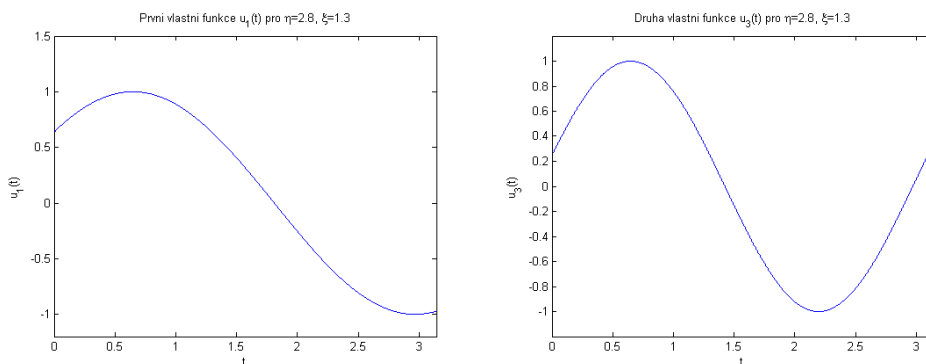
Obrázek 4.6: První dvě vlastní funkce u_1, u_2 pro případ (4.6) a $\eta = 0.8 = \xi$.

A pro poslední případ tabulky 4.1 - (4) analogickým způsobem ukážeme, jak vypadají vlastní funkce pro konkrétně zvolené kombinace parametrů η, ξ . Budeme tedy uvažovat hodnoty parametrů následující

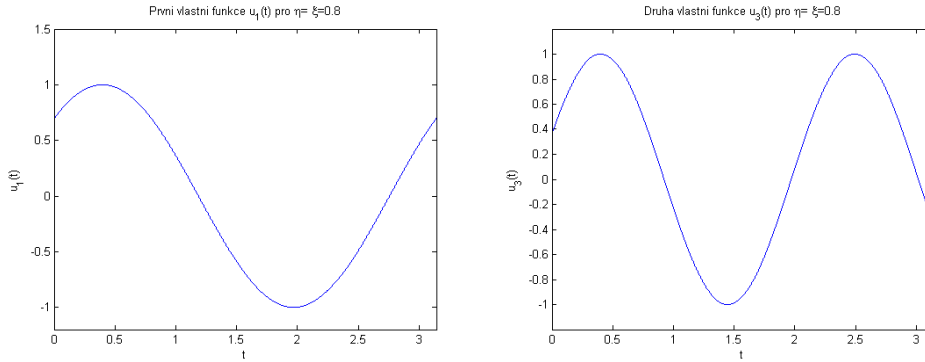
$$\eta = 1.3 < \xi = 2.8; \quad \xi = 1.3 < \eta = 2.8; \quad \eta = \xi = 0.8.$$



Obrázek 4.7: První dvě vlastní funkce u_1, u_2 pro případ (4.8) a $\eta = 1.3$, $\xi = 2.8$.



Obrázek 4.8: První dvě vlastní funkce u_1, u_2 pro případ (4.8) a $\eta = 2.8$, $\xi = 1.3$.



Obrázek 4.9: První dvě vlastní funkce u_1, u_2 pro případ (4.8) a $\eta = 0.8 = \xi$.

4.1.1 Limitní případy čtyřbodové úlohy

Analogicky jako u třibodové úlohy mohou být pro nás zajímavými tzv. limitní případy, tj. kdy parametry se budou blížit k hraničním hodnotám. Budeme tedy muset rozebírat čtyři různé případy.

Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě plyne

$$u \in C(\langle 0, \pi \rangle) \cap C^1(0, \pi) \wedge u(0) = u(\xi) \implies \exists \mu = 0 : u'(\mu) = 0.$$

Pro $\xi \rightarrow 0$ tedy dostaneme podmínku $u'(0) = 0$.

Podobně dostáváme:

$$u'(\eta) = u'(\pi) \implies \exists \nu = 0 : u''(\nu) = 0.$$

$$\eta \rightarrow \pi \implies u''(\pi) = 0,$$

Potom z rovnice úlohy (4.1) plyne:

$$\lambda u(\pi) = 0 \implies u(\pi) = 0.$$

1) $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$. V tomto případě okrajová úloha (4.1) bude mít tvar:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u'(0) = u'(\pi) = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Dostáváme tak Neumannovu úlohu, pro kterou jsou vlastní čísla známá a to:

$$\lambda_n = n^2, \quad u_n(t) = \cos nt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) $\xi \rightarrow \pi, \eta \rightarrow 0$. Tedy okrajová úloha (4.1) bude mít tvar:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi), \\ u'(\pi) = u'(0). \end{cases} \quad (4.10)$$

Dostáváme tak periodickou úlohu, pro kterou jsou vlastní čísla známá a mají předpis:

$$\lambda_n = 4n^2, \quad u_n(t) = \cos 2nt, \quad v_n(t) = \sin 2nt, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

3) $\xi \rightarrow \pi, \eta \rightarrow \pi$. Tedy okrajová úloha (4.1) bude ve tvaru:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Dostáváme tedy Dirichletovu úlohu, pro kterou jsou vlastní čísla také známá a mají předpis:

$$\lambda_n = n^2, \quad u_n(t) = \sin nt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4) $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow \pi$. Tedy okrajová úloha (4.1) bude:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u'(0) = 0, \\ u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Dostáváme tak Neumannovu-Dirichletovu úlohu, pro kterou jsou vlastní čísla také známá a mají předpis:

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2, \quad u_n(t) = \cos\left(\frac{2n-1}{2}t\right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Uvažujeme-li vztahy (4.7), (4.8), (4.6), potom očekáváme, že vlastní čísla a vlastní funkce v limitních případech splynou s předpisy výše.

Spočítáme tedy příslušné limity. Uvažujeme nejdříve vztah (4.7). Potom dostáváme:

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow 0}} \lambda_{2n} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi n}{\pi - \eta} \right)^2 = (2n)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pro vztah (4.8) obdržíme:

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow 0}} \lambda_{2k-1} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow 0}} \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta - \xi} \right)^2 = (2k-1)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pro (4.6) dostáváme:

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow 0}} \lambda_{2l} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi l}{\xi} \right)^2 \rightarrow +\infty.$$

Analogickým způsobem spočítáme příslušné limity vztahů (4.7), (4.8), (4.6) pro zbývající hraniční hodnoty parametrů η, ξ

Uvažujme případ $(\eta, \xi) \rightarrow (0, \pi)$.

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow \pi}} \lambda_{2n} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow \pi}} \left(\frac{2\pi n}{\pi - \eta} \right)^2 = (2n)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow \pi}} \lambda_{2k-1} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow \pi}} \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta - \xi} \right)^2 \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow \pi}} \lambda_{2l} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow \pi}} \left(\frac{2\pi l}{\xi} \right)^2 \rightarrow +\infty.$$

Dále se podíváme na případ $(\eta, \xi) \rightarrow (\pi, \pi)$.

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow \pi}} \lambda_{2n} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow \pi}} \left(\frac{2\pi n}{\pi - \eta} \right)^2 \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow \pi}} \lambda_{2k-1} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow \pi}} \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta - \xi} \right)^2 = (2k-1)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow \pi}} \lambda_{2l} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow \pi}} \left(\frac{2\pi l}{\xi} \right)^2 = (2l)^2 \quad l \in \mathbb{N}.$$

Poslední případ, který prozkoumáme, bude $(\eta, \xi) \rightarrow (\pi, 0)$.

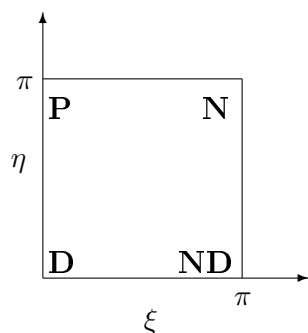
$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow 0}} \lambda_{2n} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi n}{\pi - \eta} \right)^2 \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow 0}} \lambda_{2k-1} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow 0}} \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta - \xi} \right)^2 = \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow 0}} \lambda_{2l} = \lim_{\substack{\eta \rightarrow \pi \\ \xi \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi l}{\xi} \right)^2 \rightarrow +\infty.$$

Tedy dostáváme, že skutečně po dosazení limitních hodnot do obecných obdržených vztahů (4.7), (4.8), (4.6) dostáváme vztahy pro vlastní čísla obecně známých okrajových úloh.

Celou výše prozkoumanou situaci lze znázornit na následujícím obrázku.



Obrázek 4.10: Oblast parametrů ξ a η .

Shrneme dosažené poznatky. Vyšetřujeme-li čtyřbodové okrajové podmínky:

$$u(0) = u(\xi), \quad u'(\pi) = u'(\xi),$$

potom se na body $\xi \in (0, \pi)$ a $\eta \in (0, \pi)$ můžeme dívat jako na parametry, jež spojují čtyři standardní homogenní okrajové úlohy pro diferenciální rovnici 2. řádu:

- Neumannova úloha (**N**) ($\xi \rightarrow 0+, \eta \rightarrow 0+$),
 - Periodická úloha (**P**) ($\xi \rightarrow \pi-, \eta \rightarrow 0+$),
 - Dirichletova úloha (**D**) ($\xi \rightarrow \pi-, \eta \rightarrow \pi-$),
 - Neumannova-Dirichletova úloha (**ND**) ($\xi \rightarrow 0+, \eta \rightarrow \pi-$).
-

4.1.2 Podrobnější struktura vlastních trojic a vlastních funkcí

Připomeňme si, že trojici $(\eta, \xi, \lambda) \in \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \times \mathbb{R}$ nazýváme vlastní trojicí, pokud úloha (4.1) má netriviální řešení. Množinu všech vlastních trojic budeme opět značit σ .

$$\sigma = C_{2n} \cup C_{2k-1} \cup C_{2l}, \quad n, k, l \in \mathbb{N},$$

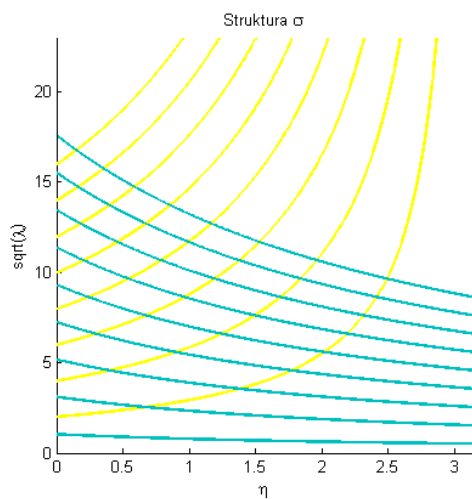
kde

$$C_{2n} = \left\{ (\xi, \eta, \lambda) : \lambda = \left(\frac{2n\pi}{\pi - \eta} \right)^2 \right\},$$

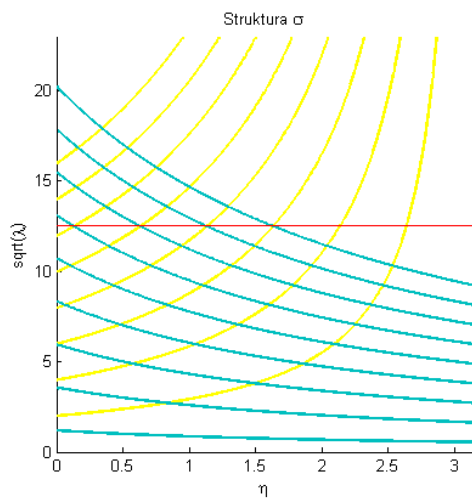
$$C_{2k-1} = \left\{ (\xi, \eta, \lambda) : \lambda = \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta - \xi} \right)^2 \right\},$$

$$C_{2l} = \left\{ (\xi, \eta, \lambda) : \lambda = \left(\frac{2l\pi}{\xi} \right)^2 \right\}.$$

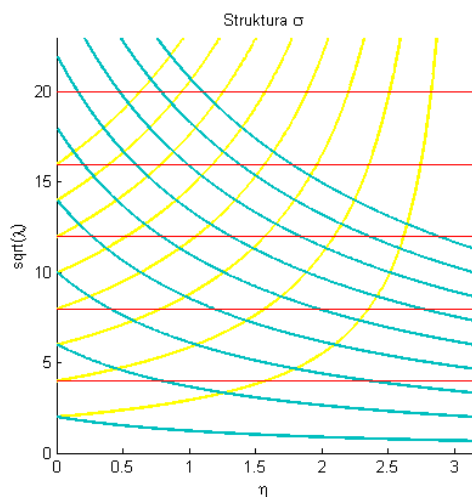
1) Pro pevné $\xi = 0.1$, $\xi = 0.5$, $\xi = 1.57$, $\xi = 3.1$ ukážeme, jak vypadá struktura množiny σ .



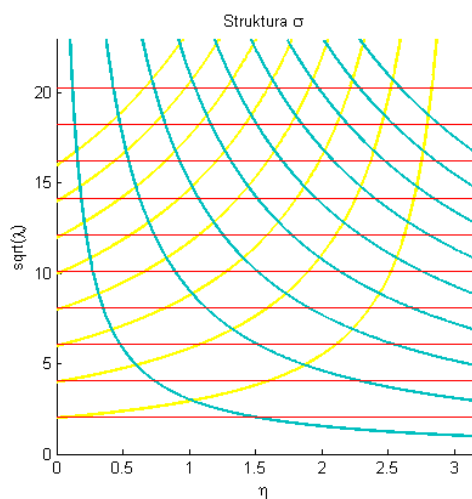
Obrázek 4.11: Struktura σ pro $\xi = 0.1$. Žlutě C_{2n} , modře C_{2k-1} .



Obrázek 4.12: σ pro $\xi = 0.5$. Žlutě C_{2n} , modře C_{2k-1} , červeně C_{2l} .

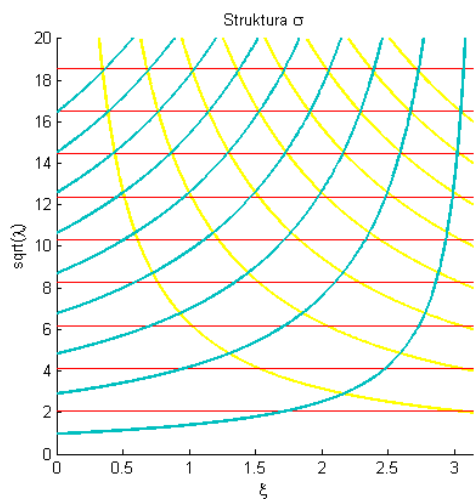


Obrázek 4.13: Struktura σ pro $\xi = 1.57$. Žlutě C_{2n} , modře C_{2k-1} , červeně C_{2l} .

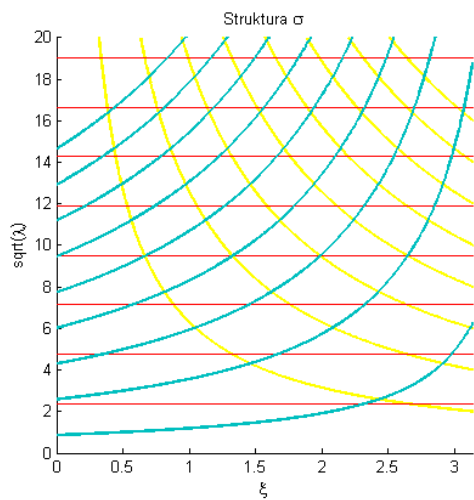


Obrázek 4.14: Struktura σ pro $\xi = 3.1$. Žlutě C_{2n} , modře C_{2k-1} , červeně C_{2l} .

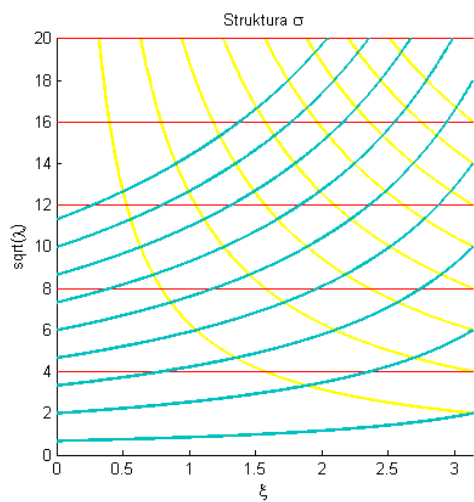
2) Pro pevné $\eta = 0.1$, $\eta = 0.5$, $\eta = 1.57$, $\eta = 3.1$ ukážeme, jak vypadá struktura množiny σ .



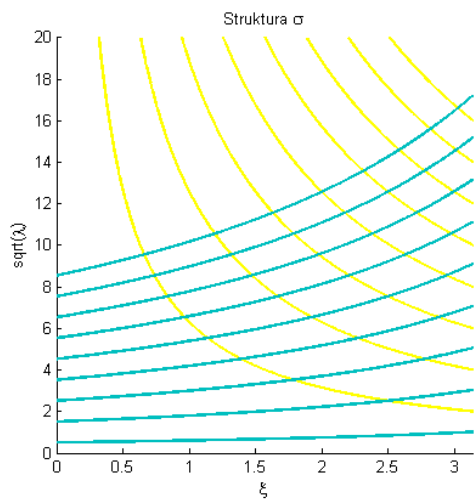
Obrázek 4.15: σ pro $\eta = 0.1$. Žlutě C_{2l} , modře C_{2k-1} , červeně C_{2n} .



Obrázek 4.16: Struktura σ pro $\eta = 0.5$. Žlutě C_{2l} , modře C_{2k-1} , červeně C_{2n} .



Obrázek 4.17: Struktura σ pro $\eta = 1.57$. Žlutě C_{2l} , modře C_{2k-1} , červeně C_{2n} .



Obrázek 4.18: Struktura σ pro $\eta = 3.1$. Žlutě C_{2l} , modře C_{2k-1} .

Poznámka 4.1 *Analogicky jako u tříbodové úlohy se i tady nejedná o samoadjungovaný operátor. Vlastní funkce tedy obecně nemusí být navzájem ortogonální.*

Kapitola 5

Fučíkovo spektrum

5.1 Fučíkovo spektrum tříbodové okrajové úlohy

Výchozí tříbodová okrajová úloha pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu s okrajovými tříbodovými podmínkami měla tvar:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(\eta), & \eta \in (0, \pi), \end{cases} \quad (5.1)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Kdybychom libovolné řešení $u(t)$ úlohy (5.1) rozdělili na kladnou část $u^+(t) = \max\{u(t), 0\}$ a na zápornou část $u^-(t) = \max\{-u(t), 0\}$, potom bychom mohli přepsat naši rovnici jako součet těchto dvou částí, konkrétně bychom dostali:

$$u''(t) + \lambda u^+(t) - \lambda u^-(t) = 0, \quad t \in (0, \pi).$$

Pokud ještě navíc nahradíme parametr λ dvojicí parametrů (α, β) , potom dostaneme „novou“ okrajovou úlohu pro nelineární rovnici 2. řádu:

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(\eta), & \eta \in (0, \pi), \end{cases} \quad (5.2)$$

kde $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Řešením této okrajové úlohy budeme rozumět funkci $u \in C^2(0, \pi) \cap C(\{0, \pi\})$, pro niž je rovnice v úloze (5.2) splněna pro každé $t \in (0, \pi)$ a splňuje příslušné okrajové podmínky. Bod, o který se zajímáme

a pro který existuje netriviální řešení $u(t)$ úlohy (5.2), je tedy $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ a nazýváme jej *Fučíkovo vlastní číslo*. Odpovídající netriviální řešení $u(t)$ a všechny jeho kladné násobky nazýváme *Fučíkovy vlastní funkce* dané okrajové úlohy. Obvykle se množina všech Fučíkových vlastních čísel značí jako:

$$\Sigma := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{úloha (5.2) má netriviální řešení}\}.$$

Fučíkovo spektrum a jeho podstatné vlastnosti byly poprvé prozkoumány Fučíkem¹ a Dancerem². Jak tedy vidíme, souvisí úzce pojem Fučíkova spektra s pojmem vlastního čísla. Pokud λ je vlastním číslem tříbodové okrajové úlohy (2.1), potom dvojice $(\lambda, \lambda) \in \Sigma$.

Jednou z nejdůležitějších vlastností Fučíkova spektra je tzv. osová souměrnost podle diagonaly $\alpha = \beta$. Jinak řečeno platí, že pokud trojice (α, β, u) řeší okrajovou úlohu (5.2), potom trojice $(\beta, \alpha, -u)$ řeší tuto úlohu také. Toto tvrzení lze jednoduše dokázat.

Důkaz Označme pomocí nové proměnné naše řešení okrajové úlohy s opačným znaménkem $v := -u$. Potom ale platí, že

$$v^- = u^+, \quad v^+ = u^-.$$

Po přepsání naší rovnice, dostáváme

$$-v'' + \alpha v^- - \beta v^+ = 0.$$

Z čehož jednoduše vyplývá, že trojice (β, α, v) , resp. $(\beta, \alpha, -u)$ řeší okrajovou úlohu (5.2) taktéž jako trojice (α, β, u) .

Fučíkovo spektrum je tvořeno systémem křivek, jež nazýváme Fučíkovy větve. Netriviální řešení úlohy (5.2), které odpovídá příslušným Fučíkovým větším, se skládá z kladných a záporných půlvln. Kladná půlvlna, resp. záporná půlvlna, je řešením rovnice v (5.1) pro $\lambda = \alpha$, resp. $\lambda = \beta$.

Nyní se pokusíme malézt konkrétní předpisy Fučíkových větví podle počtu kladných a záporných půlvln na intervalu $(0, \pi)$ s ohledem na splnění tříbodových okrajových podmínek.

Definujme následující operátory:

$$Lu := L^{P\eta}u := L^{DN}u := -u'',$$

¹Svatopluk Fučík, Československý matematik (1944-1979)

²Edward Norman Dancer, profesor matematiky, Queensland, Australia

kde $\eta \in (0, \pi)$ a platí:

$$D(L) := \{u \in C^2(0, \pi) \cap C(\langle 0, \pi \rangle) : u(0) = 0, u(\pi) = u(\eta)\},$$

$$D(L^{P\eta}) := \{u \in C^2(0, \pi) \cap C(\langle 0, \pi \rangle) : u(\pi) = u(\eta), u'(\pi) = u'(\eta)\},$$

$$D(L^{DN}) := \left\{ u \in C^2(0, \pi) \cap C(\langle 0, \pi \rangle) : u(0) = 0, u'\left(\frac{\pi + \eta}{2}\right) = 0 \right\}.$$

Operátor L tedy odpovídá třibodové okrajové úloze (5.2) a $L^{P\eta}$, resp. L^{DN} jsou pomocné operátory odpovídající okrajové periodické úloze na intervalu (η, π) , resp. okrajové Dirichletově-Neumannově úloze na intervalu $(0, \frac{\pi + \eta}{2})$.

Podíváme se nejdříve na operátor $L^{P\eta}$ na intervalu (η, π) . Řešení bude periodické na intervalu (η, π) , pokud na něm bude mít stejný počet kladných a záporných půlvln:

$$\frac{k}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{\sqrt{\beta}} = \frac{\pi - \eta}{\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Řešení, které je periodické na (η, π) můžeme libovolně posunout, abychom zajistili splnění podmínky na začátku intervalu $u(0) = 0$.

Zkoumejme dále operátor L^{DN} na intervalu $(0, \frac{\pi + \eta}{2})$. Postupujeme obdobným způsobem. Chceme-li splnit příslušné okrajové podmínky, potom dostaneme konkrétní čtyři předpisy pro Fučikovy větve:

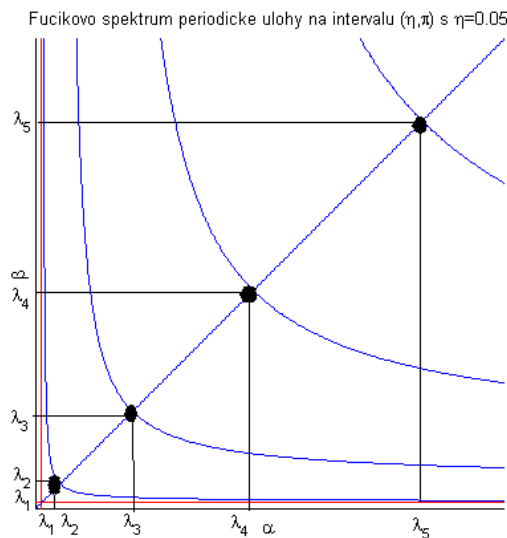
- $\frac{k}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi + \eta}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$
 což jinými slovy znamená, že začínáme kladnou půlvlnou a končíme polovinou kladné půlvlny.
- $\frac{k}{\sqrt{\alpha}} + \frac{(k+1)}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi + \eta}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$
 což znamená, že začínáme zápornou půlvlnou a končíme polovinou kladné půlvlny.

- $\frac{(k+1)}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{2\sqrt{\beta}} = \frac{\pi + \eta}{2\pi}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
 což značí, že začínáme kladnou půlvlnou a končíme polovinou záporné půlvlny.
- $\frac{k}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{2\sqrt{\beta}} = \frac{\pi + \eta}{2\pi}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
 což jinak znamená, že začínáme zápornou půlvlnou a končíme polovinou záporné půlvlny.

Pomocí technik použitých v [5] lze ukázat platnost následujícího vztahu:

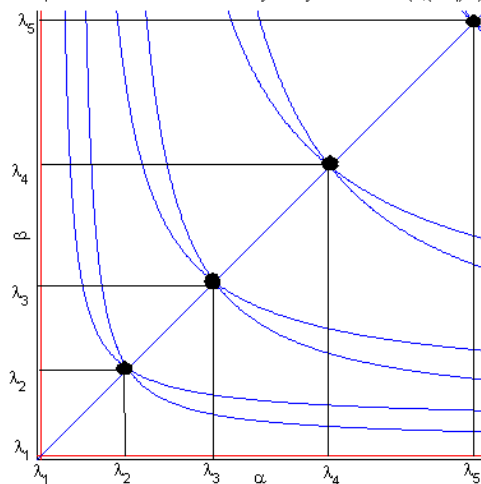
$$\Sigma(L) = \Sigma(L^{P\eta}) \cup \Sigma(L^{DN}).$$

Na následujících obrázcích si ukážeme, jak jednotlivé Fučíkovy větve pro různé operátory vypadají.



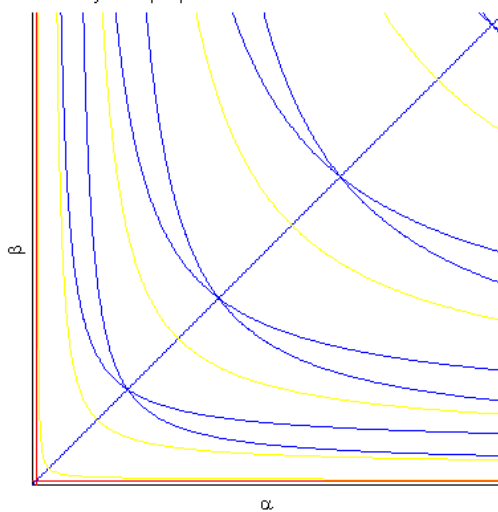
Obrázek 5.1: Fučíkovo spektrum periodické úlohy v souřadnicích (α, β) .

Fučikovo spektrum Dirichlet-Neumannovy úlohy na intervalu $(0, (\pi+\eta)/2)$ s $\eta=0.05$



Obrázek 5.2: Fučíkovo spektrum Dirichletovy-Neumannovy úlohy v souřadnicích (α, β) .

Fučikovy vetve pro periodickou a Dirichlet-Neumannovu úlohu



Obrázek 5.3: Fučíkovo spektrum obou tříbodových okrajových úloh v souřadnicích (α, β) .

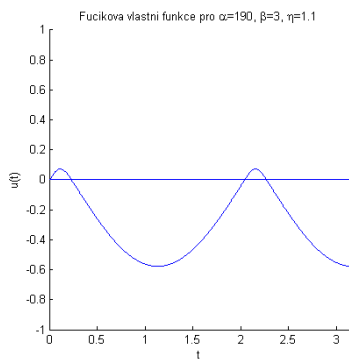
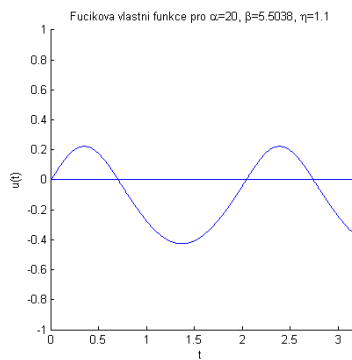
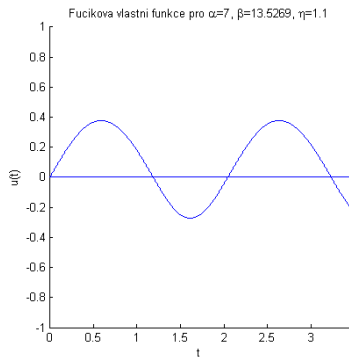
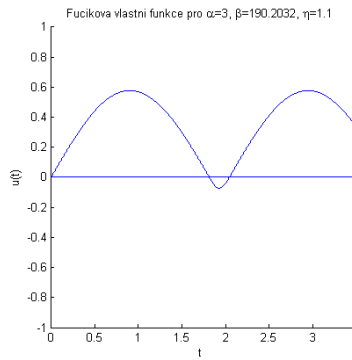
Nyní se budeme zabývat netriviálními řešeními úlohy (5.2) v případě periodické okrajové úlohy, tj. uvažujeme interval (η, π) . Při výběru vlastního čísla (α, β) se omezíme na takovou větev Fučíkova spektra, která je dána analytickým předpisem:

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi - \eta. \quad (5.3)$$

Této větvi odpovídají řešení úlohy (5.2), která se na intervalu (η, π) skládají z jedné kladné půlvlny a jedné záporné půlvlny. Vyjádříme-li z (5.3) závislost β na α , dostaneme:

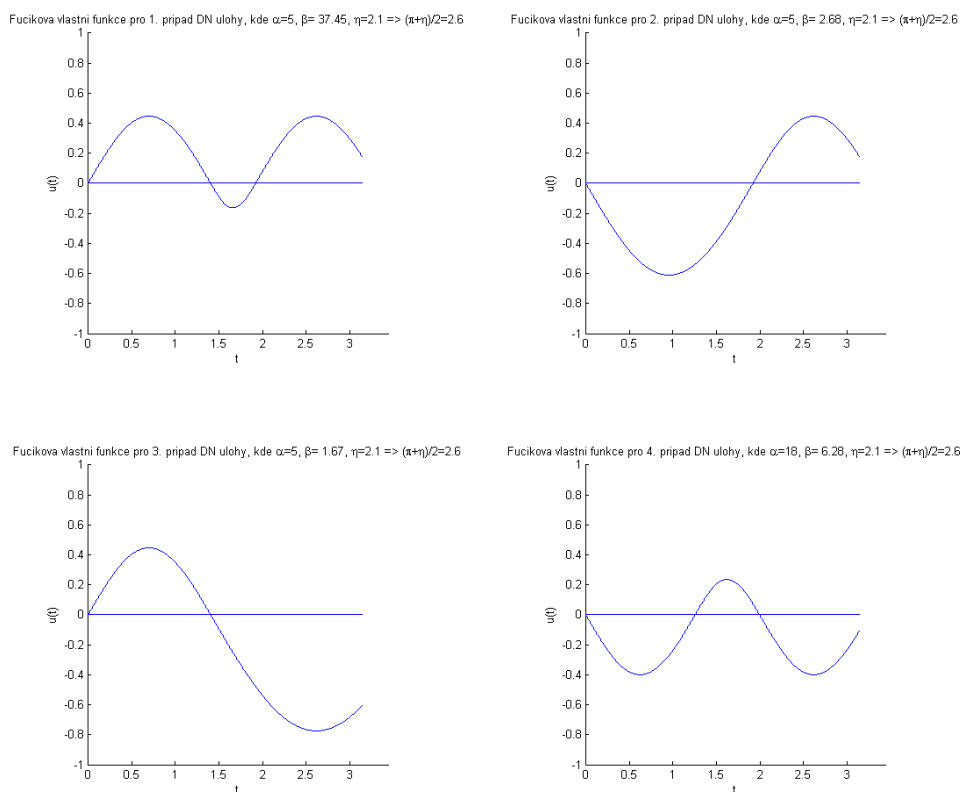
$$\beta = \left(\frac{\pi}{\pi - \eta - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}} \right)^2.$$

Dále si můžeme zvolit počáteční podmínky $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ a příslušnou vlastní funkci získáme pomocí řešiče *ODE45* v prostředí *MATLAB*. Na obrázku 5.4 ukazujeme několik Fučíkových vlastních funkcí pro různé hodnoty parametrů. Můžeme také pozorovat, že se snižováním parametru β , resp. zvyšováním parametru α , se nám zvětšuje záporná půlvlna, resp. se nám zmenšuje vlna kladná.



Obrázek 5.4: Fučíkovy vlastní funkce periodické tříbodové úlohy na (η, π) .

Zbývá nám prozkoumat poslední případ tříbodové úlohy a to Dirichletovu-Neumannovu úlohu na intervalu $(0, \frac{\eta+\pi}{2})$. Opět podobným způsobem jako v předchozím případě budeme uvažovat jednotlivé předpisy, jež popisují Fučíkovo spektrum Dirichletovy-Neumannovy úlohy, ze kterých vyjádříme jednotlivé závislosti parametrů. Pomocí řešiče *ODE45* s odpovídajícími počátečními podmínkami nalezneme jednotlivé Fučíkovy vlastní funkce. Na obrázku 5.5 ukazujeme všechny čtyři možnosti, jež mohou v tomto případě nastat.



Obrázek 5.5: Fučíkovy vlastní funkce Dirichletovy-Neumannovy tříbodové úlohy na $(0, \frac{\eta+\pi}{2})$.

5.2 Fučikovo spektrum čtyřbodové okrajové úlohy

V této podkapitole jenom nastíníme, jak by mohla čtyřbodová úloha Fučíkova typu vypadat. Pokud stejným způsobem jako v případě tříbodové úlohy parametr λ rozdělíme na dva parametry α, β a odpovídající řešení také rozdělíme na kladnou a zápornou část, potom obdržíme čtyřbodovou úlohu Fučíkova typu:

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\xi), & \xi \in (0, \pi), \\ u'(\pi) = u'(\eta), & \eta \in (0, \pi), \end{cases} \quad (5.4)$$

kde $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Řešením této okrajové úlohy budeme opět rozumět funkci $u \in C^2(0, \pi) \cap C^1(\langle 0, \pi \rangle)$, pro niž je rovnice v úloze (5.2) splněna pro každé $t \in (0, \pi)$ a která splňuje příslušné okrajové podmínky. Výsledky zkoumání této úlohy lze najít v článku [5].

Závěr

Hlavním cílem této diplomové práce bylo prozkoumat otázku řešitelnosti nelokálních neboli vícebodových okrajových úloh. V práci jsme se zabývali pouze tříbodovou a čtyřbodovou okrajovou úlohou. Zkoumali jsme otázku existence netriviálního řešení. Povedlo se nám nalézt předpisy pro vlastní čísla a jim odpovídající předpisy pro vlastní funkce obou dvou okrajových úloh.

Dále jsme tříbodovou úlohu modifikovali přidáním tlumícího členu. Opět jsme hledali předpisy pro vlastní čísla a vlastní funkce této okrajové úlohy. Analytické počítání předpisů na vlastní čísla se ukázalo jako hodně komplikované. Proto jsme museli použít jiné metody matematické analýzy. Povedlo se nám vymežit intervaly pro vlastní čísla, na kterých může existovat netriviální řešení okrajové úlohy s tlumením.

Dále jsme na základě článků I. T. Kiguradzeho a A. G. Lomtadzeho formulovali okrajovou úlohu s tlumením v obecném případě s větou o jednoznačnosti. Dále jsme větu aplikovali na naše konkrétní okrajové úlohy a dokázali jsme, že dostáváme podle očekávání stejné výsledky. Také jsme ukázali dvě různé transformace, které naznačují, jak se dá tlumící člen eliminovat. Transformace však vedly buď na komplikovanější diferenciální rovnici, anebo na komplikované vícebodové podmínky s nejednotkovým koeficientem.

Nakonec jsme zkusili řešit tříbodovou úlohu Fučíkova typu, kde jsme ukázali analytické předpisy pro Fučíkovy větve a názorně jsme ukázali příslušné vlastní funkce. Problém čtyřbodové úlohy Fučíkova typu jsme jenom naznačili s odkazem na literaturu.

U zkoumaných úloh stále zůstává řada otázek nezodpovězených. Náplní další

práce by určitě mohla být čtyřbodová okrajová úloha Fučikova typu, dále nelineární vícebodová úloha s netriviální pravou stranou, nebo dokonce nelineární nelokální úloha s singularitami.

Literatura

- [1] A. V. Bitsadze, A. A. Samarski: *Ob Odnom Prostom Obobshenii Linejnykh Ellipticheskikh Zadach.* DAN AN SSSR 185 (1969), 739-774.
- [2] G. Bognár, J. Čepička, P. Drábek, P. Nečesal, E. Rozgonyi: *Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of Solution to Three-Point BVP.* Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 69 (2008), 2984-2995.
- [3] J. R. Cannon: *The Solution of the Heat Equation Subject to the Specification of Energy.* Quarterly of Applied Mathematics: 21(3) (1963), 155-160.
- [4] P. Drábek, S. Míka: *Matematická analýza 1*, Západočeská univerzita, fakulta aplikovaných věd, Plzeň (1998).
- [5] G. Holubová, P. Nečesal: *Nontrivial Fučík Spectrum of One Non-Selfadjoint Operator.* Nonlinear Analysis 69 (2008), 2930-2941.
- [6] G. Holubová, P. Nečesal: *Nonlinear Four-Point Problem: Non-Resonance with Respect to the Fučík Spectrum.* Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 71 (2009), 4559-4567.
- [7] V. A. Il'in, E. I. Moiseev: *Nonlocal Boundary Value Problem of the First Kind for a Sturm-Liouville Operator in Its Differential and Finite Difference Aspects.* Differential equations 23(7) (1987), 803-810.
- [8] V. A. Il'in, E. I. Moiseev: *Nonlocal Boundary Value Problem of the Second Kind for a Sturm-Liouville Operator.* Differential equations 23(8) (1987), 979-987.
- [9] I. T. Kiguradze, A. G. Lomtadze: *On Certain Boundary Value Problems for Second-Order Linear Ordinary Differential Equations with*

Singularities. Journal of mathematical analysis and applications 101(2) (1984), 325-347.

- [10] A. Kufner, P. Drábek: *Úvod do funkcionální analýzy*, Západočeská univerzita, fakulta aplikovaných věd, Plzeň (1993).
- [11] A. Kufner, S. Míka: *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL (1981).
- [12] A. G. Lomtatidze: *On Certain Boundary Singular Three-Point Boundary Value Problem*. Trudy IPM Tbilisi 17 (1986), 122-134.
- [13] N. Sergejeva: *Fučík Spectrum for the Second Order BVP with Nonlocal Boundary Condition*. Nonlinear Analysis, Model. Control 12 (2007), 419-429.