

2. prosince 2012

Posudek na disertační práci Mgr. Petra Vrány

Obsah předložené disertační práce spadá do oblasti matematiky zvané teorie grafů. Práce je tvořena souborem sedmi vědeckých článků, na nichž se Petr Vrána autorsky podílel. Šest článků obsahuje původní výsledky, jeden článek je přehledový. Všechny články jsou se spoluautory, což je ale velmi obvyklé v této části matematiky. Autorský kolektiv dvou z těchto článků nezahrnuje prof. Ryjáčka, školitele Petra Vrány. Soubor článků je doplněn komentovaným úvodem, které čtenáři představuje základní poznatky ze studované problematiky. Na tomto místě bych rád též uvedl, že Petr Vrána je spoluautorem několika článků, které již byly přijaty k publikaci, ale které nejsou zařazeny do souboru článků tvořících jeho disertační práci.

Problematikou studovanou v člancích je existence hamiltonovských kružnic v hranových grafech (line graphs) a obecněji v grafech, které neobsahují graf $K_{1,3}$ jako indukovaný podgraf. Hamiltonovské kružnice patří k nejstarším konceptům v teorii grafů, který se objevuje již v pracích na konci 19. století, tedy v době, kdy se teorie grafů začala utvářet. Také hranové grafy jsou klasickým konceptem v teorii grafů, který se systematicky studuje zhruba od poloviny 20. století. Hranové grafy neobsahují graf $K_{1,3}$ jako indukovaný podgraf a tedy tvoří podtřídu třídy grafů, které neobsahují $K_{1,3}$ jako indukovaný podgraf.

V současné době se výsledky, které se vztahují ke grafům bez indukovaného podgrafu $K_{1,3}$, těší značné pozornosti v souvislosti s konstruktivní charakterizací této třídy grafů Chudnovskou, která nedávno získala MacArthur fellowship přezdívané „genius grant“, a Seymourem. Oblast existence hamiltonovských kružnic v této třídě grafů je intenzivně studovaná a obsahuje několik těžkých otevřených problémů, zejména tzv. Barnetovu hypotézu a Thomassenovu hypotézu.

Jedním z nejdůležitějších výsledků v oblasti existence hamiltonovských kružnic v hranových grafech je tzv. Ryjáčkův uzávěr. Tato uzávěrová technika umožňuje z daného grafu, který neobsahuje $K_{1,3}$ jako indukovaný podgraf, sestavit jeho nadgraf, který také neobsahuje $K_{1,3}$ jako indukovaný podgraf a který má hamiltonovskou kružnici právě tehdy, když ji má původní graf. Značná část komentovaného úvodu a některé články zařazené do souboru, který tvoří disertační práce, se zabývají zobecněním této techniky na různé varianty existence hamiltonovské kružnice. Byť jsou tyto výsledky nové a zajímavé, domnívám se, že nejvýznamnějšími výsledky v člancích, které byly zařazeny do práce, jsou výsledky o Thomassenově hypotéze, které tyto poznatky využívají.

Thomassenova hypotéza říká, že každý 4-souvislý hranový graf je hamiltonovský. Je známo, že tato hypotéza je ekvivalentní několika dalším otevřeným problémům o existenci hamiltonovských kružnic nebo jiných struktur v různých třídách odvozených od hranových grafů. Pomocí nových uzávěrových operací našel autor této práce a jeho školitel, prof. Ryjáček, další tvrzení ekvivalentní Thomassenově hypotéze. Ve společné práci s dr. Kuželem a prof. Ryjáčkem pak uvádějí další ekvivalentní tvrzení a dokazují, že pravdivost hypotézy by implikovala polynomiální řešitelnost některých problémů, které dávají tuto hypotézu do vztahu se slavným problémem, zda platí $P=NP$.

Thomassenova hypotéza byla dokázána pro 8-souvislé grafy, které neobsahují graf $K_{1,3}$ jako indukovaný podgraf. Připomeňme, že tyto grafy tvoří nadtřídu hranových grafů. Ve svém společném článku s doc. Kaiserem dokazuje autor této práce, že každý 5-souvislý graf, který neobsahuje $K_{1,3}$ jako indukovaný podgraf a jehož minimální stupeň je šest, je hamiltonovský. Tedy speciálně, Thomassenova hypotéza platí pro 6-souvislé grafy. Tento výsledek se v současné době silou svého tvrzení jeví nejbližší k Thomassenově hypotéze.

Kromě výsledků, které autor zařadil do své disertační práce, bych rád zmínil jeho konstrukci grafu, který není $\{4,5\}$ -pokrytelný. Graf G nazveme A -pokrytelný, kde A je podmnožina přirozených čísel, pokud G obsahuje podgraf se všemi vrcholy sudého stupně, který protíná každý hranový řez, jehož velikost leží v A . Thomassenova hypotéza je ekvivalentní tomu, že každý cyklicky 4-souvislý kubický graf G je $\{4,5,\dots\}$ -

pokrytelný. Kaiser a Škrekovski vyslovili hypotézu, že každý graf je $\{4,5,\dots\}$ -pokrytelný. Tuto hypotézu autor práce společně s Čadou, Chibou, Ozekim a Yoshimotem vyvrací.

Články, které tvoří disertační práci, byly přijaty k publikaci ve významných mezinárodních časopisech, např. *European Journal of Combinatorics* nebo *Journal of Graph Theory*. Jedná se o časopisy s velmi vysokými standarty publikací. Je tedy zjevné, že výsledky svou kvalitou jednoznačně splňují nároky kladené na nové poznatky, které by disertační práce měla obsahovat. Kromě těchto výsledků má její autor i další publikace, např. výše zmiňovaný článek obsahující konstrukci grafu, který není $\{4,5,\dots\}$ -pokrytelný, byl přijat k publikaci v *SIAM Journal on Discrete Mathematics*.

Komentovaný úvod je zpracován přehledně a stylem obvyklým v matematice. Chybělo mi však výraznější provázání Kapitoly 5 s předchozími kapitoly. Ocenil bych zejména uvedení více detailů, jak konkrétně jsou uzavěrové výsledky použity v důkazech výsledků souvisejících s Thomassenovou hypotézou. Tyto detaily lze ale nalézt v článcích, které jsou zařazeny do disertační práce. Osobně se mám smíšené pocity z ambiciózně napsaného prvního odstavce Kapitoly 6. Zpracování komentovaného úvodu bych také vytkl dále uvedené drobné nedostatky. Přejde mi matoucí, že se stejné tvrzení objevuje jako Věta 3.1 a zároveň jako Věta 3.8. Stylistické nedostatky zahrnují typograficky chybně použité úvozovky na str. 24, nejasně citovanou stranu 12 z práce [7] na str. 27, nebo na str. 39 chybně vyskloňované slovo „hypotéza“. Celkově však považuji komentovaný úvod za velmi kvalitně zpracovaný.

Předložená disertační práce je tvořena souborem článků, které podávají nové a zajímavé výsledky o existenci hamiltonovských kružnic v hranových grafech (kromě těchto výsledků má autor práce řadu dalších zajímavých a podstatných výsledků). Práce překračuje množstvím a kvalitou výsledků požadavky běžně kladené na disertační práce. Komentovaný úvod do problematiky svědčí o dobré orientaci jejího autora ve studované problematice. Proto jednoznačně doporučuji přijetí předložené práce jako práce disertační a udělení titulu doktor v oboru Aplikovaná matematika jejímu autorovi.

Daniel Král'

Prof. Daniel Král'

Mathematics Institute and
Department of Computer Science
The University of Warwick
Coventry CV4 7AL, United Kingdom
Telephone: +44 (0) 24 7615 0901
E-mail: D.Kral@warwick.ac.uk

**Oponentský posudok na dizertačnú prácu
Mgr. Petra Vrátu**

THOMASSENOVA HYPOTÉZA A SOUVISEJÍCÍ PROBLÉMY

Problémy súvisiace s existenciou hamiltonovskej kružnice v grafe patria historicky aj konceptuálne medzi najdôležitejšie v teórii grafov. Medzi nimi zaujíma významné miesto aj hypotéza, ktorú v polovici 80-tych rokov sformuloval Thomassen a ktorá tvrdí, že každý 4-súvislý hranový graf je hamiltonovský. Aj keď táto hypotéza ostáva naďalej otvorená, dlhodobý výskum okolo nej viedol k dokázaniu mnohých pozoruhodných výsledkov, zavedeniu dôležitých pojmov a techník a k odhaleniu mnohých nečakaných súvislostí. Do tejto matematicky závažnej, aktuálnej, ale zároveň veľmi ťažkej oblasti netriviálne prispieva aj predložená dizertačná práca.

Dizertácia je spracovaná formou kompletu siedmich vedeckých štúdií vybavených podrobným sprievodným textom, ktorý jednotlivé články spája do logického celku s výrazne monotematickým charakterom. Sprievodný text je podaný v českom jazyku a je napísaný starostlivo, jasne a zrozumiteľne. Delí sa na šesť kapitol, z ktorých prvé štyri pripravujú pojmový a technický priestor pre kapitolu piatu, venovanú samotnej Thomassenovej hypotéze, pričom záverečná kapitola sumarizuje dosiahnuté výsledky. Piata kapitola teda predstavuje jadro sprievodného textu. Podrobne sa tu analyzujú jednotlivé aspekty Thomassenovej hypotézy, jej súvislosti, ekvivalentné formulácie ako aj súvisiace nepravdivé hypotézy, ktoré by Thomassenovu hypotézu implikovali. Tiež sa tu naznačujú perspektívy ďalšieho výskumu smerujúceho k jej možnému dokázaniu.

Zo siedmich štúdií tvoriacich súčasť dizertačnej práce päť už vyšlo, a to v kvalitných medzinárodných časopisoch, akými sú J. Graph Theory, European J. Combinatorics, alebo Discrete Mathematics. Dve práce sa nachádzajú v recenznom pokračovaní. Všetky uvedené práce vznikli v spoluautorstve, čo však vnímam veľmi pozitívne, keďže dizertant sa môže pochváliť kvalitnými a medzinárodne uznávanými spoluautormi z domova aj zo zahraničia. O podstatnom podiele autora na prezentovanom výskume nemám nijaké pochybnosti.

Najstaršia z priložených prác je štúdia č.1 (2008), kde sa okrem iného dokazuje ekvivalentnosť Thomassenovej hypotézy s hypotézami o existencii dominujúcej kružnice v cyklicky 4-súvislých kubických grafoch a v snarkoch. Ďalšie práce vyšli alebo vznikli až v rokoch 2011-2012. Pozoruhodný výsledok predstavuje napr. práca č.4, kde sa dokazuje, že z platnosti Thomassenovej hypotézy by vyplývala polynomialita tak 1-hamiltonovskej súvislosti ako aj 2-hranovej hamiltonovskej súvislosti v hranových grafoch. Taktiež by som chcel vyzdvihnúť dôležitý príspevok k pochopeniu Thomassenovej hypotézy, ktorý predstavuje práca č.5. V nej sa dokazuje, že každý 5-súvislý hranový graf s minimálnym stupňom aspoň 6 je hamiltonovský. Tým sa podstatne vylepšuje starší výsledok, ktorý nezávisle dokázali Zhan a Jackson (1991).

Štúdiami zaradenými do dizertačnej práce sa však vedecká aktivita dizertanta nevyčerpáva. Autor sa môže pochváliť jedenástimi prácami publikovanými alebo prijatými na publikáciu, rovnakým počtom citácií v publikovaných článkoch a ďalšími v nepublikovaných. To všetko naznačuje, ako hlboko prenikol do skúmanej problematiky a akou tvorivou invenciou disponuje.

V práci som našiel len málo nedostatkov a chýb. Napr. na str. 14, vo vete 4.2 má asi byť „hamiltonovsky súvislý“ namiesto „hamiltonovský“. V časti 4.3 spôsobuje isté problémy nejasná hranica medzi grafmi a multigrafmi, osobitne vypuklo napr. vo vete 4.11, ktorá hovorí o grafoch, ale odvoláva sa na multigrafy na obr. 4.1. Zopár ďalších preklepov sa nájde napr. na str. 38 hore. Chyby sú však málo početné a málo významné.

Bez zveličovania môžem teda konštatovať, že predložená práca je vynikajúca po stránke obsahovej aj formálnej a že predstavuje významný príspevok k pochopeniu Thomassenovej hypotézy a jej súvislostí. Preto odporúčam, aby na základe tejto dizertačnej práce a po jej úspešnej obhajobe bol Mgr. Petrovi Vránovi priznaný akademický titul **doktor** v odbore Aplikovaná matematika.

V Bratislave 14. decembra 2012.



Prof. RNDr. Martin Škoviera, Ph.D.
FMFI UK, Bratislava