ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

Diplomová práce

Optimalizace lávky pro pěší a cyklisty s pochozí plochou 3 m a výškou zábradlí 1300 mm

Autor: Bc. Tereza Vaňková
Studijní program: N3955 / Počítačové modelování v inženýrství
Studijní obor: 3902T051 / Výpočty a design
Vedoucí práce: Ing. Tomáš Kroupa, Ph.D.
Akademický rok: 2018/2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem zadanou diplomovou práci zpracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 31. května 2019

Bc. Tereza Vaňková

Poděkování

Ráda bych poděkovala Ing. Tomáši Kroupovi, Ph.D., vedoucímu bakalářské práce, za cenné rady, trpělivost, příjemné prostředí při konzultacích a čas, který mi věnoval při tvorbě této práce. Poděkování patří i doc. Ing. Robertu Zemčíkovi, Ph.D., za věcné připomínky a rady. V neposlední řadě děkuji své rodině, která mi je oporou po celou dobu studia.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá návrhem a optimalizací kompozitní lávky pro pěší a cyklisty. Základním použitým materiálem je skelný kompozit tří různých forem. Práce navazuje na projekt KoMoKo, jehož závěry jsou uvedeny v první kapitole. Hlavními změnami oproti výše zmíněnému projektu jsou rozšíření pochozí plochy, snížení zábradlí a zahrnutí posuzovaní únosnosti lávky do optimalizace.

Posuzovanými stavy jsou, kromě únosnosti, použitelnost, stabilita konstrukce a modální analýza. Vyhodnocení všech stavů je provedeno na základě konečnoprvkové analýzy v softwaru Abaqus. Model je tvořen převážně ze skořepinových prvků a k jeho sestavení je využit skript v jazyce Python 2.7. Únosnost lávky je posouzena pomocí pevnostních kritérií, kterými jsou Hashinovo kritérium, kritérium maximálního napětí a pro případ izotropních materiálů je použita pevnostní hypotéza HMH.

Z důvodu rozšíření pochozí plochy a snížení zábradlí je nutné provést i další geometrické úpravy. Geometrie je měněna s ohledem na využitelnost již existujících výrobních forem. Optimalizace lávky je rozdělena do dvou etap, přičemž ve druhé etapě je lávka doplněna o výplně. V obou případech jsou proměnnými parametry tloušťka a skladba stěn. Výsledkem diplomové práce je optimalizovaný návrh lávky, který podle provedených simulací vyhovuje pro všechny posuzované stavy.

Klíčová slova: kompozitní lávka, modulární systém, optimalizace, konečnoprvkový model, použitelnost, stabilita, modální analýza, únosnost, Hashinovo kritérium, kritérium maximálního napětí, hypotéza HMH, příčná tuhost skořepiny

Abstract

The master thesis deals with the design and optimization of composite bridge for pedestrians and cyclists. The primary material for the construction is a glass composite in three different forms. The thesis is continuation of the project KoMoKo. The conclusions from this project are in the first chapter. The main differences from previous project are widening of the walkway area, lowering the railing and inclusion of the strength prediction of the bridge into the optimization.

Usability, stability, modal analysis and the above strength prediction are the states that are evaluated. Evaluation of all states is based on finite element analysis in Abaqus software. The model mostly consists of the shell elements. The script in Python 2.7 is used to build it. The strength prediction of the bridge is assessed by strength criteria, such as Hashin criterion, maximum stress criterion, and von Mises criterion.

Because of widening of the walkway area and lowering the railing, other geometrical adjustments are necessary. The adjustments are done with consideration to the usability of existing production forms. The optimization of the bridge is divided in two parts. The bridge is completed with fillings in the second part. The thickness and the composition of the walls are the variable parameters in both cases. The result of the thesis is the optimized design of the bridge that is suitable for all evaluated states according to the simulations.

Key words: composite bridge, modular system, optimization, finite element model, usability, stability, modal analysis, strength prediction, Hashin criterion, creation of maximum stress, von Mises criterion, transverse shear stiffness

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam značení

A	[m^2]	plocha průřezu
A_{ij}	[Nm^{-1}]	prvek matice tahové tuhosti
B_{ij}	[N]	prvek matice vazební tuhosti
B_{x0}, B_{y0}	[m^{-1}]	pomocná proměnná
B_{x1}, B_{y1}	[m^{-2}]	pomocná proměnná
B_{x2}, B_{y2}	[m^{-3}]	pomocná proměnná
$b(z)$	[m]	šířka průřezu
$\mathbf{C}$	[Pa]	matice tuhosti
$\mathbf{C}^{ts}$	[Nm^{-1}]	matici příčné tuhosti vrstvy
$c_i[j]$	[mm]	rozměr stěny
D_{ij}	[Nm]	prvek matice ohybové tuhosti
E	[Pa]	modul pružnosti izotropního materiálu
E_1	[Pa]	modul pružnosti v tahu ve směru 1
E_2	[Pa]	modul pružnosti v tahu ve směru 2
$\mathbf{F}$	[mN^{-1}]	matice příčné poddajnosti
F_i		index porušení
$\mathbf{F}^k$	[mN^{-1}]	matice příčné poddajností k-té vrstvy
f_p		koeficient geometrie skořepiny
f_1	[Hz]	první vlastní frekvence
G_{12}	[Pa]	smykový modul pružnosti v rovině 12
G_{13}	[Pa]	smykový modul pružnosti v rovině 13
G_{23}	[Pa]	smykový modul pružnosti v rovině 23
g	[ms^{-2}]	tíhové zrychlení
$\mathbf{H}$		matice poddajnosti laminátu
h	[m]	výška průřezu
h_k	[m]	vzdálenost k-té vrstvy od referenční roviny
h_l, h_r	[mm]	délka vertikální stěny obdélníkové buňky
J_{y}	[m^4]	kvadratický moment k ose y
$\mathbf{K}$	[Nm^{-1}]	matice příčné smykové tuhosti skořepiny
K_{ab}	[Nm^{-1}]	příčná smyková tuhost
k_E		koeficient ponížení modulů pružnosti
k_X		koeficient bezpečnosti
k_{st}		koeficient stability konstrukce
l	[mm]	délka lávky
$\mathbf{M}$	[N]	matice momentů vztažených na jednotku délky
$\mathbf{N}$	[Nm^{-1}]	matice výslednic sil vztažených na jednotku délky
n		počet vrstev laminátu
p_c	[mm]	délka přepony trojúhelníkové buňky
$\mathbf{Q}$	[Pa]	matice mimoosové tuhosti

$\mathbf{Q}^{ts}$	[Nm^{-1}]	matici mimoosové příčné tuhosti
q_p	[Pa]	zatížení lidmi
q_g	[Pa]	zatížení hmotností posypu na pochozí ploše
q_{wp}	[Pa]	zatížení způsobené tlakem větru
q_{ws}	[Pa]	zatížení způsobené sáním větru
$\mathbf{S}$	[Pa^{-1}]	matice poddajnosti
S_{ab}	[Nm^{-1}]	složka příčné tuhosti
$S(z)$	[m^3]	lineární moment plochy
S_{12}	[Pa]	smyková pevnost pro rovinu 12
S_{13}	[Pa]	smyková pevnost pro rovinu 13
S_{23}	[Pa]	smyková pevnost pro rovinu 23
T	[N]	smyková síla
$\mathbf{T}_\varepsilon$		transformační matice pro tenzor přetvoření
$\mathbf{T}_\sigma$		transformační matice pro tenzor napětí
$\mathbf{T}_\varepsilon^{ts}$		transformační matice pro příčné složky tenzoru přetvoření
$\mathbf{T}_\sigma^{ts}$		transformační matice pro příčné složky tenzoru napětí
t	[m]	tloušťka skořepiny
t_k	[m]	tloušťka k-té vrstvy laminátu
V_x, V_y	[Nm^{-1}]	příčná smyková síla vztažená na jednotku šířky
v_h	[mm]	horizontální průhyb
v_v	[mm]	vertikální průhyb
v_v^d	[mm]	vertikální průhyb pod diamantem
v_v^m	[mm]	maximální vertikální průhyb
w_b, w_t	[mm]	délka horizontální stěny obdélníkové buňky
w_1, w_2	[mm]	pomocná proměnná
w_{1c}, w_{2c}	[mm]	délka odvěsny trojúhelníkové buňky
X_C	[Pa]	pevnost v tlaku ve směru 1
X_T	[Pa]	pevnost v tahu ve směru 1
x, y, z		osa souřadnicového systému $O(x, y, z)$
Y_C	[Pa]	pevnost v tlaku ve směru 2
Y_T	[Pa]	pevnost v tahu ve směru 2
z_0	[m]	poloha referenční roviny
$1, 2, 3$		osa souřadnicového systému $O(1, 2, 3)$
γ_{12}		zkos v rovině 12
γ_{13}		zkos v rovině 13
γ_{23}		zkos v rovině 23
δ	[mN^{-1}]	příčná smyková poddajnost
$\boldsymbol{\varepsilon}$		tenzor přetvoření
$\boldsymbol{\varepsilon}^{ref}$		tenzor přetvoření referenční roviny
ε_1		poměrné prodloužení (deformace) ve směru 1
ε_2		poměrné prodloužení (deformace) ve směru 2
ε_3		poměrné prodloužení (deformace) ve směru 3
θ	[rad]	úhel natočení vrstvy
$\boldsymbol{\kappa}$	[m^{-1}]	vektor křivosti
ν		Poissonovo číslo izotropního materiálu
ν_{12}		Poissonovo číslo pro rovinu 12
ρ	[kgm^{-3}]	hustota
$\boldsymbol{\sigma}$	[Pa]	tenzor napětí
σ_{red}	[Pa]	redukované napětí podle hypotézy HMH

σ_S	[Pa]	mez pevnosti izotropního materiálu
σ_1	[Pa]	normálové napětí ve směru 1
σ_2	[Pa]	normálové napětí ve směru 2
σ_3	[Pa]	normálové napětí ve směru 3
τ_{12}	[Pa]	smykové napětí v rovině 12
τ_{13}	[Pa]	smykové napětí v rovině 13
τ_{23}	[Pa]	smykové napětí v rovině 23

Úvod

Tématem práce je úprava kompozitní lávky a jejího numerického modelu z projektu KoMoKo. Projekt KoMoKo se zabýval vývojem stavebnicového systému mostních konstrukcí z kompozitních materiálů [1]. Řešení projektu probíhalo v letech 2012 – 2015 a podíleli se na něm firmy 5M s.r.o., Výzkumný a zkušební letecký ústav a.s., IKP Consulting Engineers s.r.o. a Západočeská univerzita v Plzni (Fakulta aplikovaných věd – Katedra mechaniky). V rámci projektu byly navrženy lávky různé délky, z nichž jedna byla vyrobena a experimentálně ověřena. Uplatnění takovýchto lávek je možné na cyklostezkách, nadchodech nad komunikacemi, přechodech mezi budovami nebo jako provizorní mosty. Výhodou těchto konstrukcí je jejich nízká hmotnost, snadná údržba a zamezení korozi či hnilobě.

Cílem této práce je navrhnout lávku, která má šířku pochozí plochy 3 [m], což je běžně používaná šířka ve městech (dle informací z Magistrátu města Plzně). Lávky navržené ve výše uvedeném projektu jsou užší (2,32 [m]). Zároveň je požadováno, aby došlo ke snížení zábradlí na 1,3 [m]. Dříve navrhovaná výška zábradlí mostu o délce 18 [m] je 1,6 [m], což může chodcům bránit ve výhledu. Minimální výška zábradlí, které slouží jako ochrana proti pádu, je uvedena v tabulce 1 [2].

Tabulka 1: Závislost minimální výšky zábradlí na hloubce volného prostoru pod lávkou

Hloubka volného prostoru [m]	**Minimální výška zábradlí [mm]**
méně než 3	900
od 3 do 12	1000
od 12 do 30	1100
více než 30	1200

Z důvodu provedení výše zmíněných úprav je nutné změnit geometrii a některé další parametry lávky tak, aby vyhověla pro dané stavy. Zároveň je požadováno zachování modulárního systému dříve navržených mostů, díky čemuž je možné při výrobě použít již hotové formy. Oproti způsobu posouzení lávky v projektu KoMoKo je v této práci snaha o úpravu numerického modelu lávky tak, aby bylo možné provést současně optimalizaci pro všechny posuzované stavy.

Kapitola 1

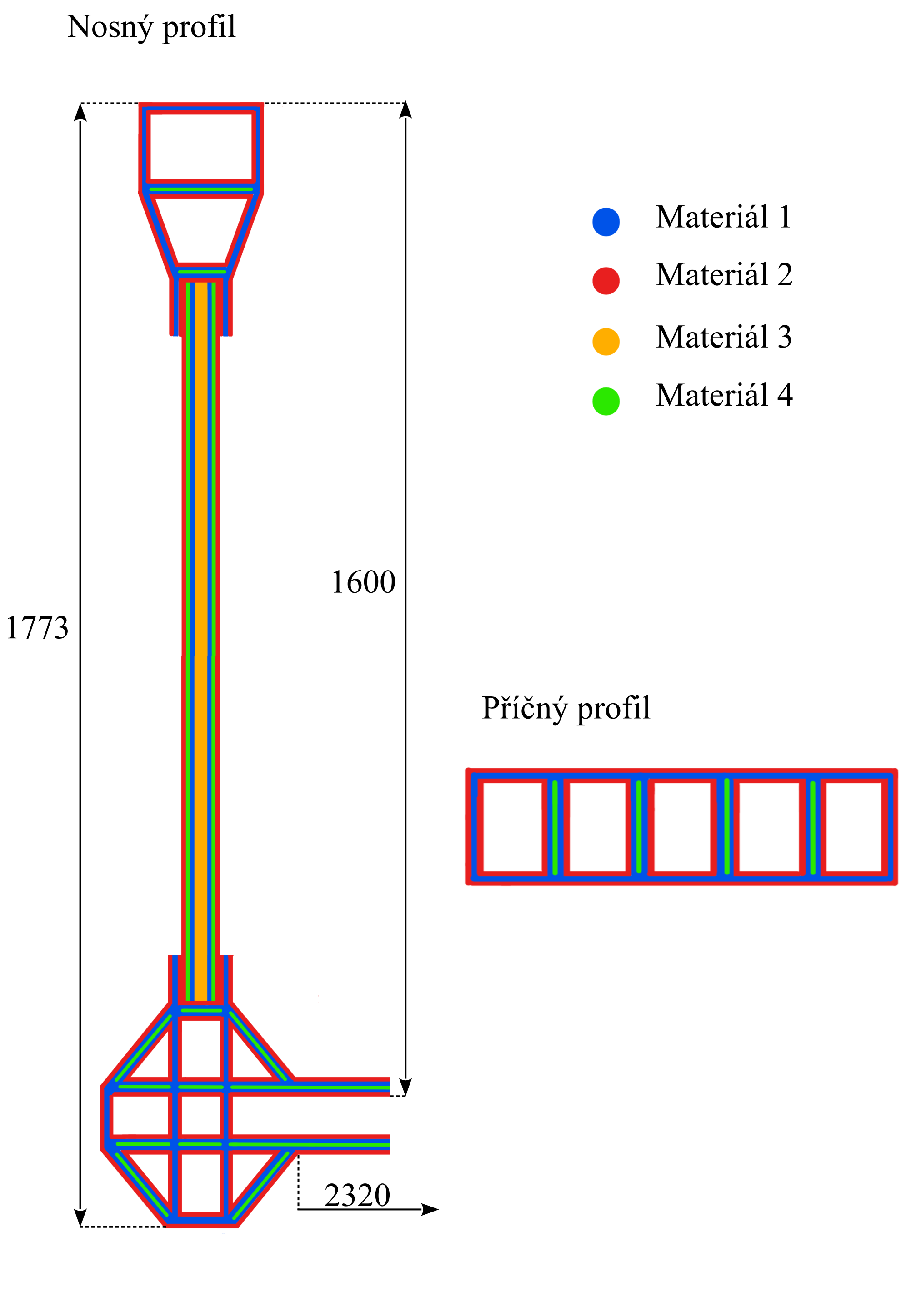
Lávky navržené v projektu KoMoKo

Ve výše zmiňovaném projektu byly navrženy lávky o různé délce a tomu odpovídající výšce zábradlí (čím delší, tím vyšší zábradlí). Lávka, jenž je předmětem práce, vychází z nejdelší varianty, proto je v této kapitole uveden popis nejdelší z dříve navrhovaných mostních konstrukcí [3].

1.1 Popis geometrie

Lávka navržená v projektu KoMoKo se skládá ze dvou zrcadlově otočených nosných profilů a třiceti šesti příčných profilů, které tvoří pochozí plochu mostu. Nosný profil lze dále rozdělit na tři hlavní části. Horní část nosného profilu je označována jako korunka. Do korunky zapadá sendvič a propojení sendviče s příčnými profily zajišťuje spodní část nosného profilu neboli diamant.

Jednotlivé profily jsou vyrobeny ze skelných kompozitů ve třech odlišných formách. Jedná se o dlouhovláknové kompozity s vlákny uspořádanými do jednoho nebo dvou navzájem kolmých směrů. Uspořádání různých forem skelných kompozitů a pěny, která tvoří jádro sendviče, je na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Skladba profilů s vyznačenými základními rozměry

Základní rozměry lávky jsou uvedeny v tabulce 1.1 a v tabulce 1.2 jsou rozepsány hmotnosti jednotlivých částí mostu.

Tabulka 1.1: Základní rozměry lávky z projektu KoMoKo

Rozměr	**Hodnota v [mm]**
délka lávky	18000,00
pochozí šířka lávky	2320,00
výška zábradlí	1600,00
celková šířka lávky	2559,00
celková výška lávky	1773,15
šířka nosného profilu	179,50
výška nosného profilu	1773,15
šířka korunky nosného profilu	80,20
výška korunky nosného profilu	353,50
šířka sendviče nosného profilu	59,40
výška sendviče nosného profilu	1236,60
šířka diamantu nosného profilu	179,50
výška diamantu nosného profilu	303,05
délka příčného profilu	2368,60
šířka příčného profilu	490,00
výška příčného profilu	80,00

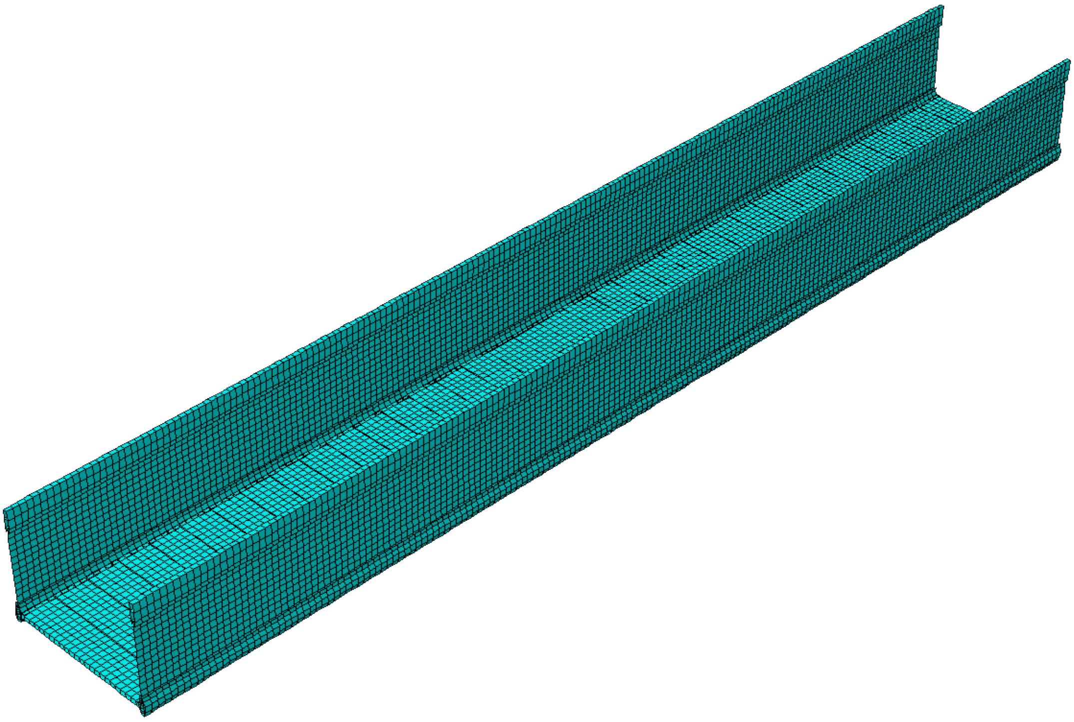
Tabulka 1.2: Hmotnost jednotlivých částí lávky z projektu KoMoKo

Část lávky	**Hmotnost [kg]**
příčný profil	33,27
korunka	279,18
sendvič	440,68
diamant	326,14
nosný profil	1045,99
příčné profily	1197,89
Celková hmotnost lávky	**3289,87**

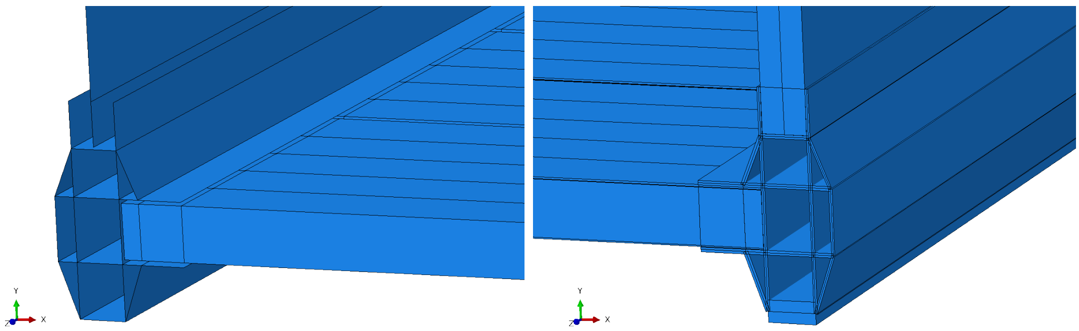
1.2 Popis modelu

V projektu KoMoKo byly sestaveny dva modely lávky. Prostorový model je tvořen z tzv. Brick prvků a druhý model se skládá ze skořepinových (neboli Shell) prvků. Většina posuzovaných stavů byla řešena na jednodušším skořepinovém modelu, proto byl zvolen jako výchozí pro řešení upravené verze mostu. Použitý model je vytvořen pro konečnoprvkové analýzy v softwaru Abaqus pomocí skriptu v jazyce Python 2.7.

Skořepinový model lávky je i s použitou konečnoprvkovou sítí znázorněn na obrázku 1.2. Z detailního pohledu na diamant nosného profilu (viz obrázek 1.3) je patrné, jak model vypadá (bez zobrazené tloušťky stěn) a co představuje (s zobrazenou tloušťkou stěn).

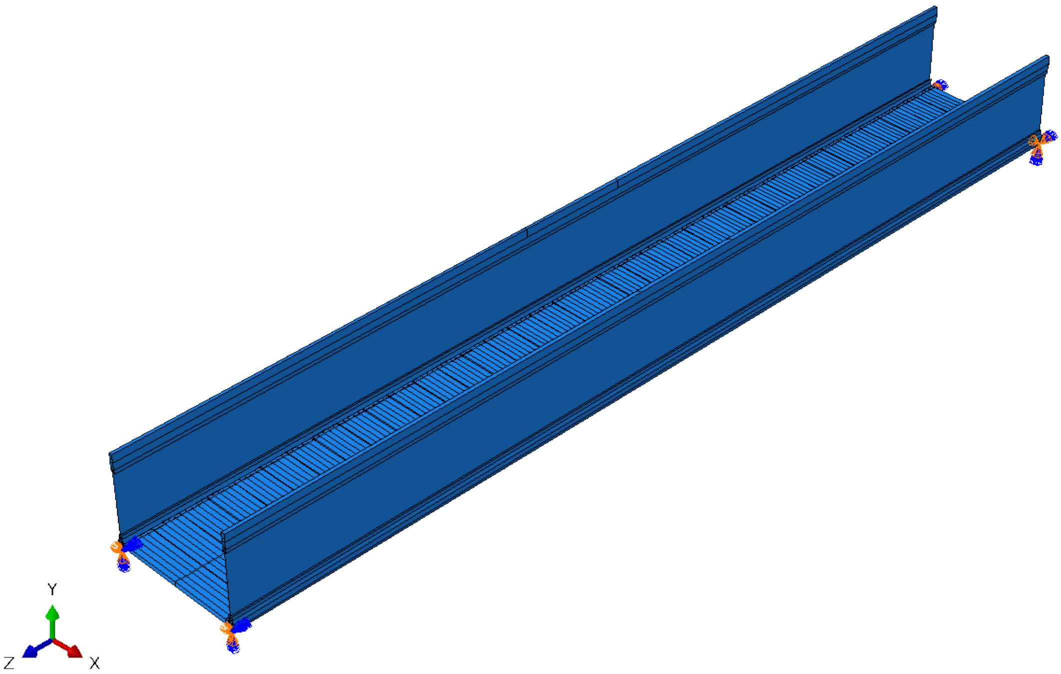


Obrázek 1.2: Konečnoprvková síť

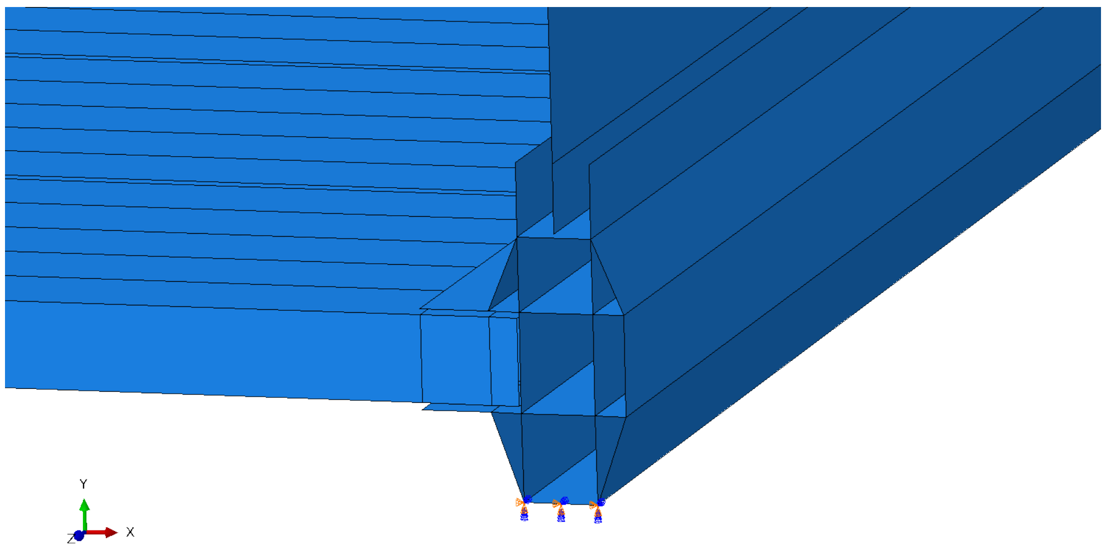


Obrázek 1.3: Detail modelu lávky (diamant) – bez (nalevo) a se zobrazenou tloušťkou stěn (napravo)

Most je uložen na čtyřech místech (viz obrázky 1.4 a 1.5). Na jedné straně mostu je povolena rotace kolem osy x, jenž simuluje natočení kolem čepu. Na opačné straně je kromě rotace kolem osy x povolen i posuv ve směru osy mostu (neboli osy z).



Obrázek 1.4: Uložení lávky



Obrázek 1.5: Detail uložení lávky

Kapitola 2

Použité materiály

Materiálové parametry jsou uvedeny ve zprávě [3]. Moduly pružnosti E_1, E_2 (směr 1 je rovnoběžný se směrem osy mostu a směr 2 je kolmý na směr 1 a jeho směrový vektor leží v rovině příslušné desky) jsou při některých výpočtech poníženy koeficientem $k_E = 1,2$. V ostatních případech je koeficient $k_E = 1$, tudíž jsou použity přímo hodnoty uvedené v tabulkách. Meze pevností jsou při posuzování pevnosti lávky zmenšeny na jednu třetinu uvedených hodnot neboli koeficient bezpečnosti $k_X = 3$.

2.1 Konstitutivní vztahy

Při výpočtech jsou použity konstitutivní vztahy, které jsou součástí použitého softwaru. Pouze v případě únosnosti jsou konstitutivní vztahy pro kompozitní materiály zadány pomocí subroutiny. Subroutina je použita z důvodu rychlejšího vyhodnocení pevnostními kritérii. Při použití subroutiny spolu se skořepinovými prvky vyžaduje software zadání tzv. příčných tuhostí, jejich stanovení je popsáno v příloze A.

Použité kompozitní materiály s vlákny kladenými v jednom směru jsou příčně izotropní neboli mají tři navzájem kolmé roviny symetrie elastických vlastností, z nichž jedna je rovinou izotropie [4], avšak kompozit ve formě biaxiální vazby je pouze ortotropní. Ostatní použité materiály lze považovat za izotropní materiál.

2.1.1 Ortotropní materiál

Vlivem vnějšího zatížení vzniká v tělese napjatost. Stav napjatosti lze v každém bodě tělesa popsat pomocí tzv. tenzoru napětí, který je možné zapsat ve formě vektoru

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou normálové složky napětí ve směrech 1, 2, 3 a $\tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}$ jsou smykové složky napětí v rovinách 23, 13 a 12. Při zatížení tělesa dochází k jeho deformaci, kterou je možné popsat pomocí tenzoru přetvoření. Vektorový tvar tohoto tenzoru je

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

kde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ jsou poměrná prodloužení ve směrech 1, 2, 3 a $\gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}$ jsou zkosy v rovinách 23, 13 a 12.

Vztah mezi přetvořením a napětím lze, za předpokladu lineárního elastického materiálu, vyjádřit pomocí zobecněného Hookeova zákona, jehož tvar pro ortotropní materiál je

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

což je možné přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.4}$$

kde $\mathbf{S}$ je matice poddajnosti. Tato matice je symetrická, tudíž obsahuje celkem 9 nezávislých prvků. Jelikož je navíc uvažována rovinná napjatost, má rovnice (2.3) tvar

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

neboli

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

a

$$\varepsilon_3 = -\nu_{13}/E_1\sigma_1 - \nu_{23}/E_2\sigma_2. \tag{2.7}$$

Inverzní tvar rovnice (2.6) je

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

kde C_{ij} jsou prvky matice tuhosti. Tyto prvky lze vyjádřit pomocí materiálových parametrů:

$$C_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \tag{2.9}$$

$$C_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \tag{2.10}$$

$$C_{12} = c_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \tag{2.11}$$

$$C_{66} = G_{12}, \tag{2.12}$$

kde pro ν_{21} platí

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}. \tag{2.13}$$

2.1.2 Příčně izotopní materiál

Matici tuhosti a matici poddajnosti příčně izotropního materiálu je možné stanovit z matic platných pro ortotropní materiál s přihlédnutím k následujícím rovnostem, které platí pro příčně izotropní materiál, kde rovina 23 je rovinou izotropie:

$$\begin{aligned} E_2 &= E_3, \\ \nu_{12} &= \nu_{13}, \\ G_{12} &= G_{13}, \\ G_{23} &= \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Matice tuhosti a matice poddajnosti příčně izotropního materiálu mají pak, při uvažování rovinné napjatosti, stejný tvar jako matice pro ortotropní materiál.

2.1.3 Izotopní materiál

Pro izotropní materiál platí:

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = E_3 &= E, \\ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} &= \nu, \\ G_{12} = G_{13} = G_{23} &= \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Matice poddajnosti $\mathbf{S}$ izotropního materiálu má tudíž tvar

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

kde prvky této matice lze určit pomocí materiálových parametrů jako:

$$
\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{E}, \\
S_{12} &= -\frac{\nu}{E}.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Matice tuhosti $\mathbf{C}$ je inverzní maticí k matici poddajnosti $\mathbf{S}$.

Při uvažování rovinné napjatosti lze matice tuhosti a poddajnosti psát ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}, \\
\mathbf{S} &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

kde prvky matice tuhosti lze určit pomocí materiálových parametrů jako:

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\
C_{12} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

2.2 Pevnostní podmínky

Pevnost lávky je posuzována pomocí Hashinova kritéria, které lze s menší úpravou použít pro všechny kompozitní materiály, z nichž se lávka skládá. Dalším použitým kritériem je kritérium maximálního napětí a pro izotropní materiál je použita pevnostní hypotéza HMH. Vyhodnocení pevnosti v daném místě je provedeno pomocí indexu porušení, jehož stanovení je uvedeno pro každé kritérium zvlášť. K porušení materiálu by podle daného kritéria nemělo dojít, je-li index porušení menší než jedna.

2.2.1 Hashinovo kritérium

Hashinovo pevnostní kritérium je jedním z nejjednodušších ze skupiny kritérií, jenž rozlišují více módů porušení, tzv. „direct mode“ kritérií. Přesněji řečeno rozlišuje čtyři módy a k porušení materiálu dojde podle tohoto kritéria v případě, že platí alespoň jedna z níže uvedených podmínek pro jednotlivé módy. Podmínky porušení jsou sestaveny pomocí vztahů a tvrzení uvedených v [5] a [6]. Index porušení je při optimalizaci chápán, jako největší hodnota z druhých odmocnin levých stran podmínek.

Podmínky porušení dle Hashinova kritéria pro jednosměrový kompozit

- Porušení vláken v tahu ($\sigma_1 \geq 0$)

$$
\left(\frac{\sigma_1}{X_\mathrm{T}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1
\tag{2.20}
$$

- Porušení vláken v tlaku ($\sigma_1 < 0$)

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_\mathrm{C}}\right)^2 \geq 1 \tag{2.21}$$

- Porušení matrice v tahu ($\sigma_2 \geq 0$)

$$\left(\frac{\sigma_2}{Y_\mathrm{T}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \tag{2.22}$$

- Porušení matrice v tlaku ($\sigma_2 < 0$)

$$\left(\frac{\sigma_2}{2S_{23}}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y_\mathrm{C}}{2S_{23}}\right)^2 - 1\right]\frac{\sigma_2}{Y_\mathrm{C}} + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \tag{2.23}$$

Podmínky porušení dle Hashinova kritéria pro kompozit s biaxiální vazbou

- Porušení vláken v tahu ve směru 1 ($\sigma_1 \geq 0$)

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_\mathrm{T}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \tag{2.24}$$

- Porušení vláken v tlaku ve směru 1 ($\sigma_1 < 0$)

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_\mathrm{C}}\right)^2 \geq 1 \tag{2.25}$$

- Porušení vláken v tahu ve směru 2 ($\sigma_2 \geq 0$)

$$\left(\frac{\sigma_2}{Y_\mathrm{T}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \tag{2.26}$$

- Porušení vláken v tlaku ve směru 2 ($\sigma_2 < 0$)

$$\left(\frac{\sigma_2}{Y_\mathrm{C}}\right)^2 \geq 1 \tag{2.27}$$

2.2.2 Kritérium maximálního napětí

Jedná se o pevnostní kritérium, které vychází z rozšířených a upravených podmínek pevnosti pro homogenní lineární izotropní materiál [4]. O porušení materiálu rozhoduje velikost jednotlivých složek napětí. Nevýhodou tohoto kritéria je, že je neinteraktivní, což znamená, že neexistují žádné vazby mezi normálovými a smykovými složkami napětí. K porušení materiálu podle kritéria maximálního napětí dojde tehdy, není-li splněna některá z následujících dvanácti podmínek:

$$
\begin{aligned}
-X_\mathrm{C} &< \sigma_1 < X_\mathrm{T},\\
-Y_\mathrm{C} &< \sigma_2 < Y_\mathrm{T},\\
-Z_\mathrm{C} &< \sigma_3 < Z_\mathrm{T},\\
-S_{23} &< \tau_{23} < S_{23}.\\
-S_{13} &< \tau_{13} < S_{13},\\
-S_{12} &< \tau_{12} < S_{12}.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Index porušení je určen jako hodnota napětí podělená příslušnou mezí pevnosti.

2.2.3 Hypotéza HMH

Hypotéza HMH je odvozena pro houževnaté homogenní izotropní materiály. O pevnosti podle této hypotézy rozhoduje hustota deformační energie potřebné na změnu tvaru. Pevnostní podmínku lze psát ve tvaru

$$\sigma_S \geq \sigma_{red}, \tag{2.29}$$

kde σ_{red} je tzv. redukované napětí, jehož velikost je dána vztahem

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) + 3(\tau_{23}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{12}^2)}. \tag{2.30}$$

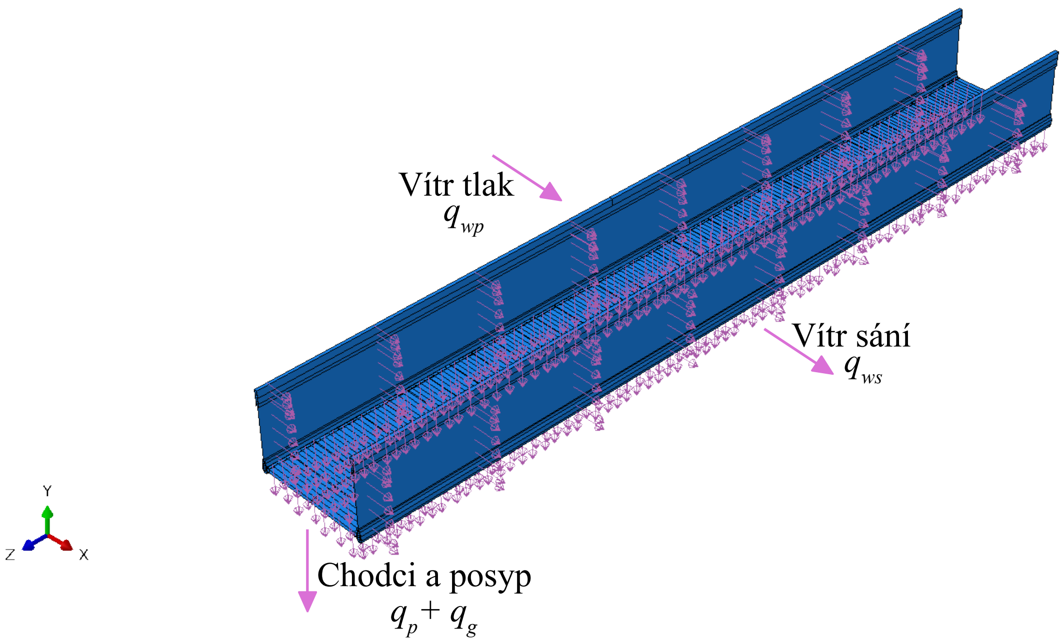
Také tato podmínka je upravena tak, aby bylo možné posoudit pevnost na základě indexu porušení, který je roven velikosti redukovaného napětí σ_{red} ku mezi pevnosti σ_S.

Kapitola 3

Posuzované stavy

Posouzení lávky bylo v projektu KoMoKo provedeno pro několik různých stavů a zatížení. Analyzovanými stavy jsou použitelnost, stabilita, modální analýza a únosnost. Posouzení mostu navrženého v této práci je provedeno pro výše uvedené čtyři stavy s uvažováním dalších omezení, která musí být splněna, aby lávka vyhověla [3].

Lávka je při výpočtech zatěžována vlastní tíhou, tíhou posypu, jenž je nanesen na pochozí ploše, zatížením představujícím chodce na mostě a působením větru (viz obrázek 3.1).



Obrázek 3.1: Zatížení lávky

Vlastní tíha je stanovena z hmotnosti (vypočítané ze zadané geometrie a hustot materiálů) a tíhového zrychlení $g = 9,81$ [ms^{-2}]. Tíha posypu je v modelu reprezentována rovnoměrným zatížením po celé ploše mostovky o velikosti $q_g = 50$ [Pa]. Stejně je aplikováno i zatížení chodci, ale jeho velikost je $q_p = 5$ [kPa]. Vítr na most působí zároveň dvěma způsoby tlakem na jedné straně a sáním na druhé. V modelu je toto zatížení rovnoměrně rozloženo na vertikální plochy nosných profilů a jeho velikost je v případě tlaku $q_{wp} = 237$ [Pa] a v případě sání $q_{ws} = 177$ [Pa]. Výše uvedená zatížení jsou pro jednotlivé posuzované stavy modifikována.

3.1 Použitelnost

Řešení vyhovující na použitelnost nesmí dosáhnout nepřípustných přetvoření. Odtud vycházejí podmínky, které musí být splněny. Mezi ně patří omezení vertikálního průhybu:

$$v_v \leq l/500 \quad \Longrightarrow \quad v_v \leq 36 \text{ [mm]}, \tag{3.1}$$

kde l je délka lávky (hodnota v_v by měla být vertikálním průhybem nosného profilu v_v^d, z důvodu větší bezpečnosti a jistoty, že také přetvoření příčných profilů nedosáhne nepřípustných hodnot, je při optimalizaci uvažován maximální vertikální průhyb v_v^m). Další omezenou hodnotou je horizontální průhyb

$$v_h \leq l/300 \quad \Longrightarrow \quad v_h \leq 60 \text{ [mm]}. \tag{3.2}$$

Zatížení lávky je při výpočtu použitelnosti uvažováno jako 1×vlastní tíha, $1\times q_p$, $1\times q_g$, $0{,}3\times q_{wp}$ a $0{,}3\times q_{ws}$. Koeficient ponížení modulů pružnosti je $k_E = 1,2$.

3.2 Stabilita

Podmínka stability konstrukce říká, že podíl zatížení při ztrátě stability a aplikovaného zatížení musí splňovat podmínku

$$k_{st} > 2. \tag{3.3}$$

Zatížení lávky je 1,147×vlastní tíha, $1{,}35\times q_p$, $1\times q_g$, $0{,}45\times q_{wp}$ a $0{,}45\times q_{ws}$. Koeficient ponížení modulů pružnosti je $k_E = 1$.

3.3 Modální analýza

Cílem modální analýzy je určit vlastní frekvence a k nim příslušející vlastní tvary. Nepřípustným případem je stav, kdy se budící frekvence rovná vlastní, a tím začne konstrukce rezonovat. Aby k rezonanci lávky nedošlo, musí být první vlastní frekvence vždy větší než budící. Proto musí platit podmínka

$$f_1 \geq 5,1 \text{ [Hz]}. \tag{3.4}$$

Modální analýza je provedena pro nezatíženou lávku a koeficient ponížení modulů pružnosti je $k_E = 1,2$.

3.4 Únosnost

Únosnost lávky je posuzována pro několik různých zátěžných stavů, z nichž je pro optimalizaci vybrán nejhorší. Vyhodnocení únosnosti je provedeno pomocí indexu porušení F_i, jehož stanovení je popsáno v kapitole 2.2. Zatížení lávky je uvažováno jako 1,147×vlastní tíha, 1,35×q_p, 1×q_g, 0,45×q_{wp} a 0,45×q_{ws}. Moduly pružnosti nejsou při výpočtu poníženy ($k_E = 1$), avšak pevnosti jsou zmenšeny ($k_X = 3$).

3.5 Další omezení

Mezi další omezení patří světlost buněk, která zaručuje vyrobitelnost formy. Světlost je omezena tak, že nejkratší stěna buňky musí být větší než 18,9 [mm]. Výpočet velikosti stěn závisí na tvaru buňky:

- **Obdélníková a kosodélníková buňka:** Velikosti stěn obdélníkové i kosodélníkové buňky jsou určeny pomocí rovnic

$$w_b = c_1[0] - \frac{c_2[1]}{2} - \frac{c_4[1]}{2}, \tag{3.5}$$

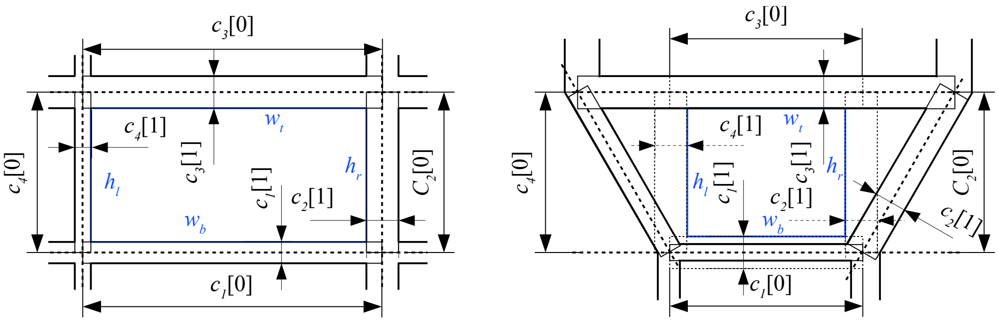
$$w_t = c_3[0] - \frac{c_2[1]}{2} - \frac{c_4[1]}{2}, \tag{3.6}$$

$$h_r = c_2[0] - \frac{c_1[1]}{2} - \frac{c_3[1]}{2}, \tag{3.7}$$

$$h_l = c_4[0] - \frac{c_1[1]}{2} - \frac{c_3[1]}{2}. \tag{3.8}$$

$$\tag{3.9}$$

  Co představují hodnoty $c_i[j]$, je znázorněno na obrázku 3.2. Podmínka světlosti pro obdélníkovou a kosodélníkovou buňku říká, že nejmenší z hodnot w_b, w_t, h_r, h_l nesmí byt menší než daná minimální hodnota.



Obrázek 3.2: Světlost obdélníkové a kosodélníkové buňky

- **Trojúhelníková buňka:** Velikosti stěn trojúhelníkové buňky jsou určeny pomocí rovnic

$$w_1 = c_1[0] + \frac{c_4[0] - c_2[1]}{2}, \tag{3.10}$$

$$w_2 = \sqrt{w_1^2 + c_2[0]^2}, \tag{3.11}$$

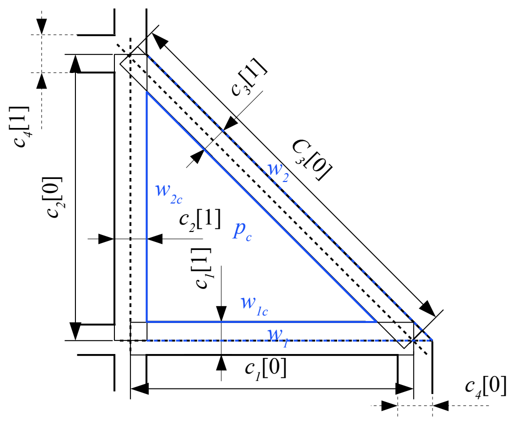
$$w_{1c} = w_1 - \frac{w_2 c_3[1]}{c_2[0]} - \frac{w_1 c_1[1]}{2c_2[0]}, \tag{3.12}$$

$$w_{2c} = c_2[0] - \frac{w_2 c_3[1]}{w_1} - (\frac{c_1[1]}{2}), \tag{3.13}$$

$$p_c = \sqrt{w_{1c}^2 + w_{2c}^2}. \tag{3.14}$$

$$\tag{3.15}$$

Co pro trojúhelníkovou buňku představují hodnoty $c_i[j]$, je znázorněno na obrázku 3.3. Podmínka světlosti pak říká, že nejmenší z hodnot w_{1c}, w_{2c}, p_c nesmí být menší než výše uvedená minimální hodnota.



Obrázek 3.3: Světlost trojúhelníkové buňky

Zřetel je při optimalizaci lávky brán i na stabilitu stěny profilu. Stěna profilu je stabilní, pokud její tloušťka není menší než jedna dvacetina délky (např. $c_1[1] \geq \frac{c_1[0]}{20}$).

Kapitola 4

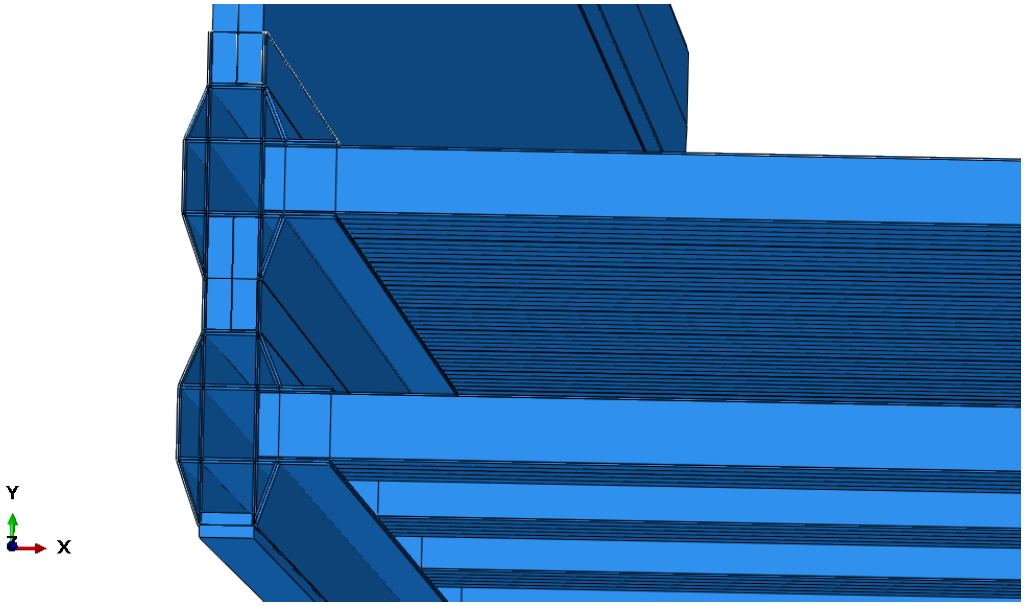
Navrhované úpravy

Z důvodu již existujících forem pro dříve navrhované profily je žádoucí sestavit geometrii ze stávajících profilů. S tímto omezením je vytvořeno několik variant geometrie lávky. Pod diamant nosného profilu je přidán druhý diamant, který je s horním diamantem spojen dalším sendvičem a mezi přidanými diamanty jsou dány spodní příčné profily. V rámci různých variant je modifikován horní diamant (odebíráním některých částí), počet a rozložení spodních příčných profilů a výška sendvičů. Výsledná varianta je vybrána na základě konečnoprvkové analýzy, jako varianta s minimální hmotností, která co možná nejlépe splňuje požadovaná omezení.

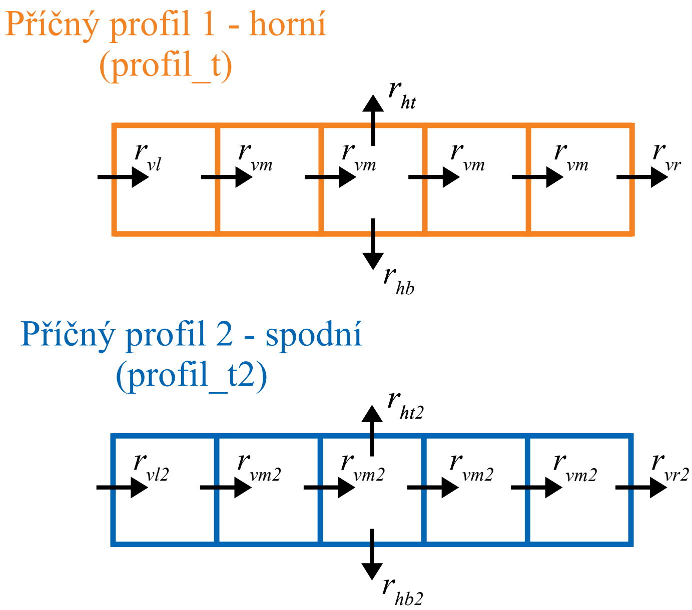
4.1 Popis vybrané varianty

Nalezené řešení obsahuje třináct spodních příčných profilů, které jsou totožné s horními příčnými profily. Na každé straně lávky je jeden z těchto profilů a zbývajících jedenáct je rovnoměrně rozmístěno po délce lávky. Uspořádání diamantů, sendvičů a příčných profilů je patrné na detailním obrázku z modelu (obrázek 4.1).

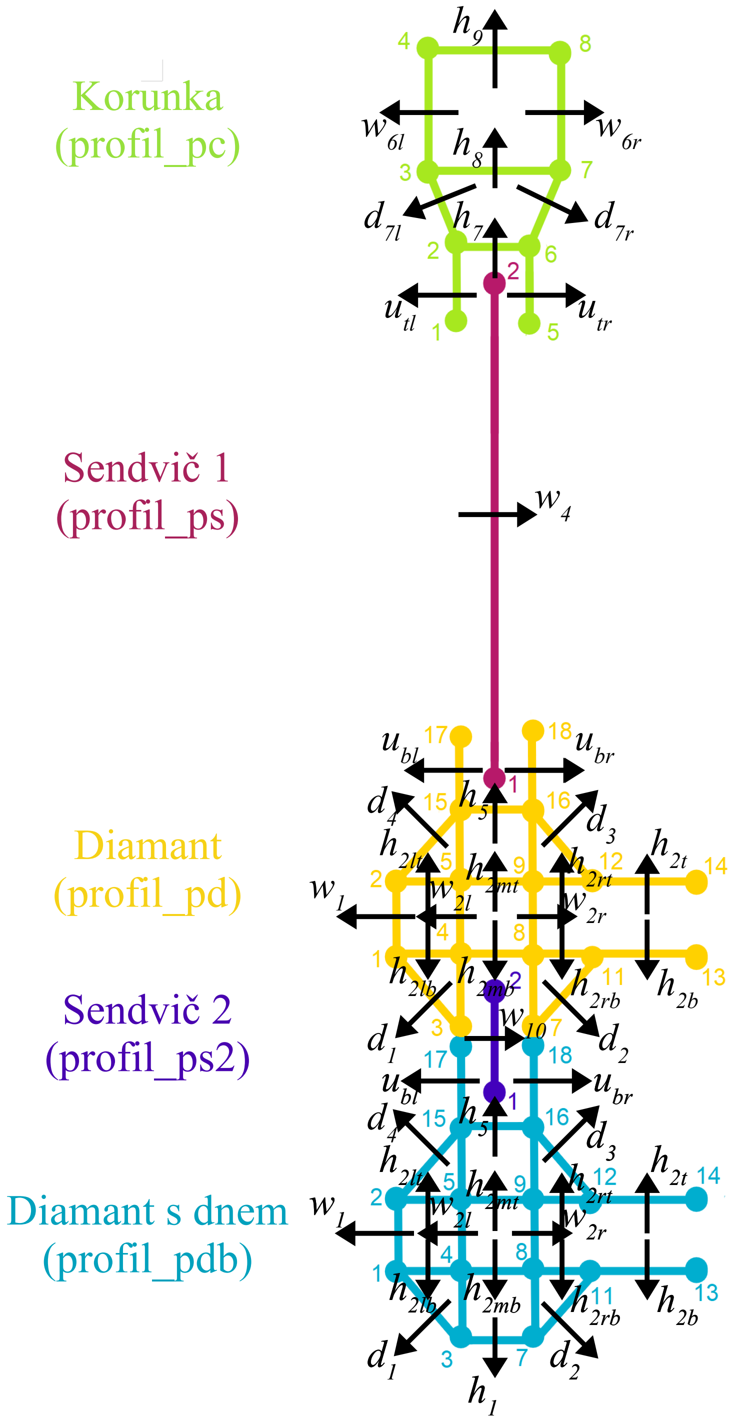
Na obrázcích 4.2 a 4.3 jsou zjednodušeně znázorněny jednotlivé profily a značení stran a bodů, které bylo použito.



Obrázek 4.1: Detail modelu (uspořádání profilů)

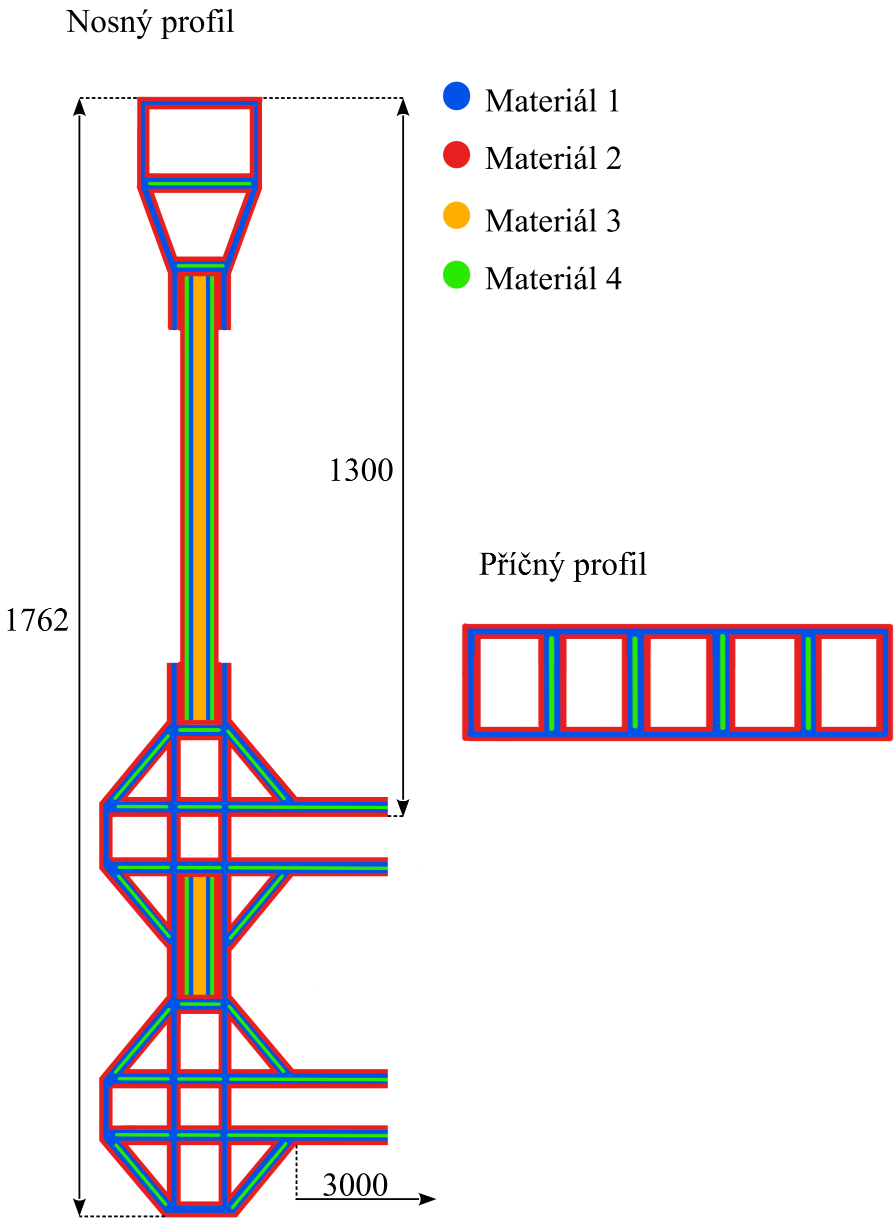


Obrázek 4.2: Značení stěn příčných profilů



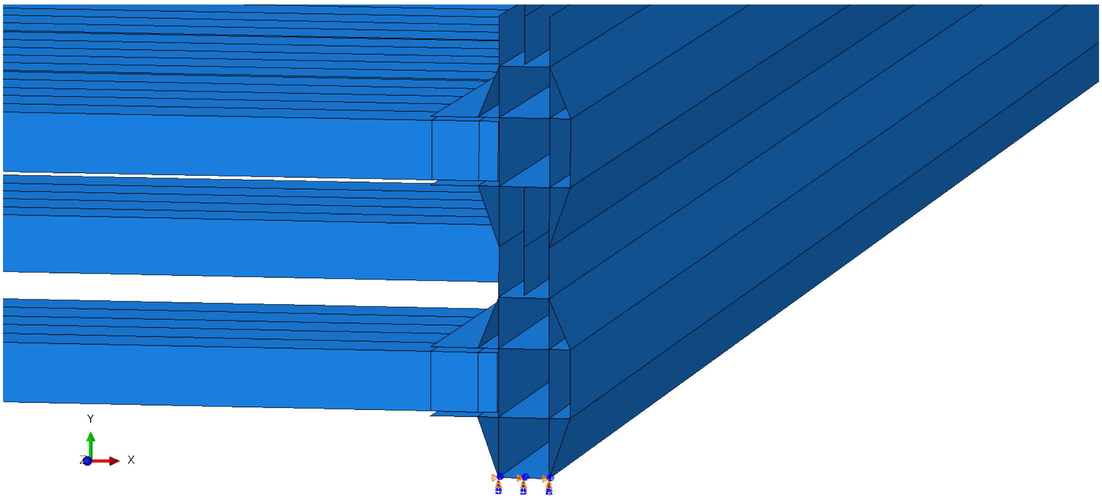
Obrázek 4.3: Značení stěn a bodů nosného profilu

Lávka je vytvořena ze stejných materiálů jako její předešlá verze. Uspořádání různých forem skelných kompozitů a pěny je na obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Skladba profilů s vyznačenými změněnými rozměry

Uložení lávky je ponecháno stejné jako v dříve navrhované verzi, jen je přesunuto na spodní diamant (neboli diamant s dnem), což je znázorněno na obrázku 4.5. Zároveň jsou o vybrané plochy tohoto diamantu rozšířena místa, na která je aplikováno zatížení představující vítr. Ostatní zatížení zůstávají beze změny.



Obrázek 4.5: Detail uložení lávky vybrané varianty

Kapitola 5

Optimalizace lávky bez úpravy v místě uložení

První optimalizace vybrané varianty lávky je provedena pomocí softwaru optiSLang. Při optimalizaci je zachována tloušťka všech stěn a mění se pouze skladba sendvičů. Proměnnými jsou tedy počty vrstev materiálů obsažených v sendvičích, které lze označit za diskrétní proměnné. Výsledné řešení je hledáno evolučním algoritmem jako nejlehčí z variant, pro které lávka vyhoví z hlediska použitelnosti, splní podmínku stability konstrukce a podmínku pro první vlastní frekvenci. Tato optimalizace ještě nezahrnuje únosnost lávky a jejím cílem je zjistit, zda je možné, aby existovalo řešení pro vybranou variantu úprav, pro které nebude nutné měnit formy.

Evoluční algoritmus je inspirován přírodou a založen na přežití nejschopnějších jedinců. Je vyvinut pro optimalizační problémy, kde nejsou k dispozici informace o gradientu, jako jsou případy s diskrétními proměnnými a je vhodný i pro velký počet proměnných [7]. Jedná se o stochastickou metodu (pro stejné zadání je různý postup optimalizace) spočívající ve výběru nejlepších řešení (rodičů) z dané množiny (populace), z nichž se pomocí mutace, kombinace a selekce jejich parametrů vytvoří populace nová, která buď zcela nahradí předchozí generaci, nebo doplní řady rodičů [8].

5.1 Nalezené řešení

Řešení získané první optimalizací má požadované rozměry (viz tabulka 5.1) a splňuje podmínky uvedené na začátku této kapitoly. Vyhovuje také z hlediska stability profilů a světlosti buněk, jelikož měněnými parametry nejsou rozměry stěn profilů, ale pouze skladba sendvičů. Lze tudíž předpokládat, že by řešení s výše navrženou geometrií mohlo vyhovět.

Tabulka 5.1: Základní rozměry lávky po první optimalizaci

Rozměr	**Hodnota v [mm]**
délka lávky	18000,00
pochozí šířka lávky	3000,00
výška zábradlí	1300,00
celková šířka lávky	3239,00
celková výška lávky	1761,60
šířka nosného profilu	179,50
výška nosného profilu	1761,60
šířka korunky nosného profilu	80,20
výška korunky nosného profilu	353,50
šířka sendviče 1 nosného profilu	59,40
výška sendviče 1 nosného profilu	936,60
šířka diamantu bez dna nosného profilu	179,50
výška diamantu bez dna nosného profilu	288,45
šířka sendviče 2 nosného profilu	59,40
výška sendviče 2 nosného profilu	132,60
šířka diamantu s dnem nosného profilu	179,50
výška diamantu s dnem nosného profilu	303,05
délka příčného profilu 1 (horního)	3048,60
šířka příčného profilu 1 (horního)	490,00
výška příčného profilu 1 (horního)	80,00
délka příčného profilu 2 (spodního)	3048,60
šířka příčného profilu 2 (spodního)	490,00
výška příčného profilu 2 (spodního)	80,00

5.1.1 Vypočítané hodnoty pro řešení z první optimalizace

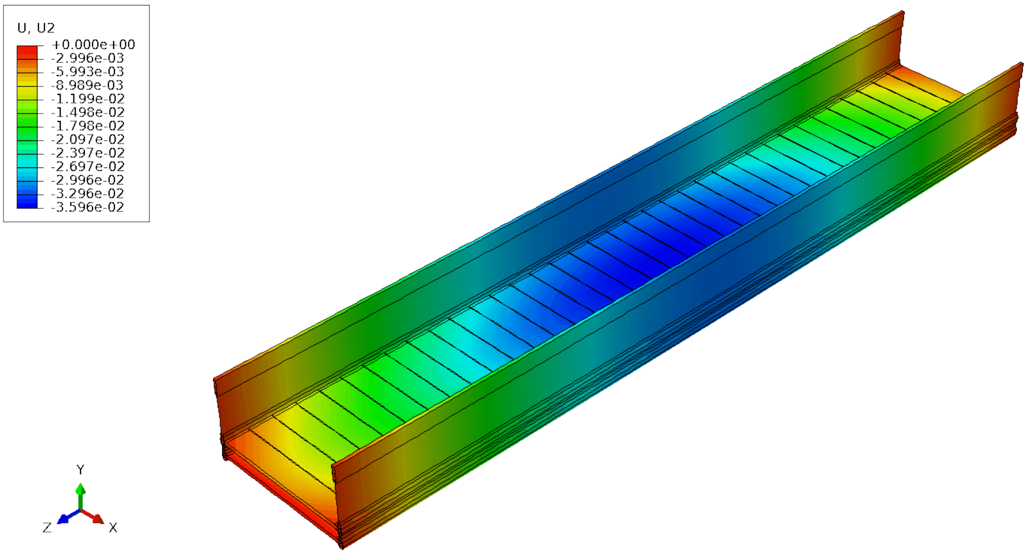
Jednou z hlavních hodnot určovaných při první optimalizaci je hmotnost lávky, která je spolu s detailnějším rozepsáním pro jednotlivé části uvedena v tabulce 5.2. Další základní hodnoty získané konečnoprvkovou analýzou konstrukce lze nalézt v tabulce 5.3, z níž je patrné, že lávka vyhověla požadavkům první optimalizace. Grafické znázornění výsledků z konečnoprvkové analýzy je na obrázcích 5.1, 5.2 a 5.3.

Tabulka 5.2: Vypočítaná hmotnost jednotlivých částí lávky

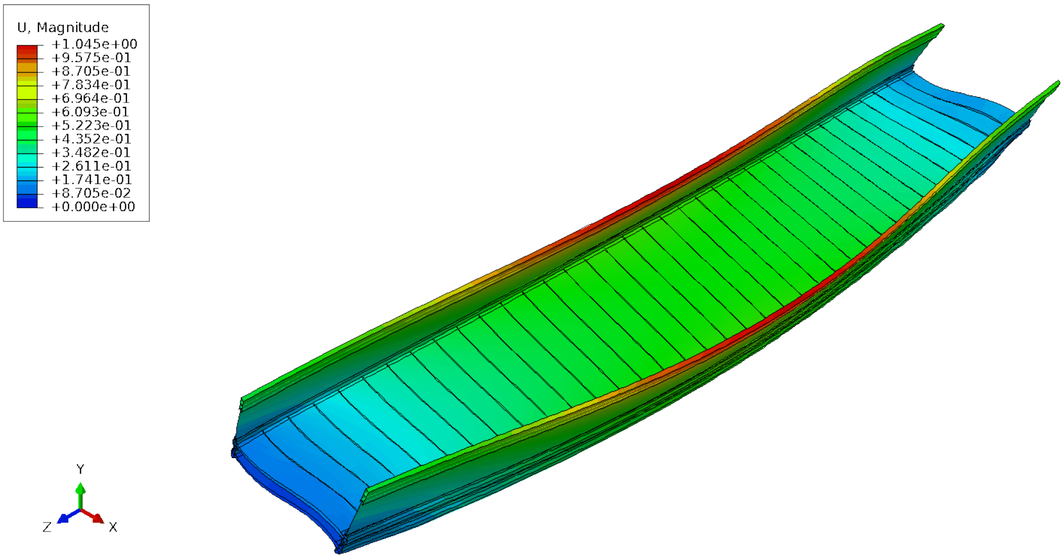
Část lávky	**Hmotnost [kg]**
Příčný profil	42,83
Korunka	279,18
Sendvič 1	869,05
Diamant (bez stěny h_1)	256,17
Sendvič 2 (spodní)	123,04
Diamant s dnem (se stěnou h_1)	326,14
Nosný profil	1853,57
Pochozí (horní) příčné profily	1541,78
Spodní příčné profily	556,75
Celková hmotnost lávky	**5805,67**

Tabulka 5.3: Základní vypočítané hodnoty pro řešení z první optimalizace

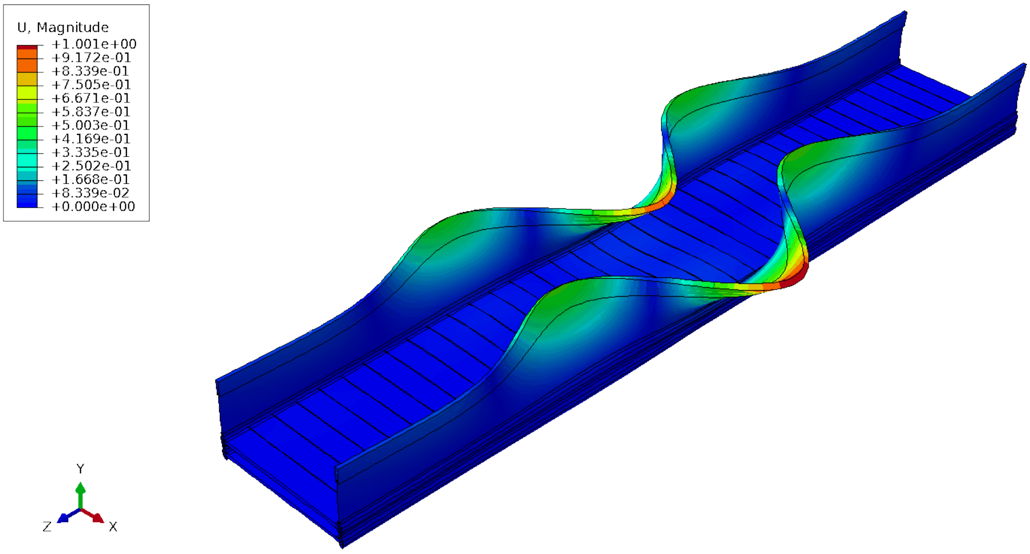
	Vertikální průhyb (maximální) v_v^m **[mm]**	**Vertikální průhyb** (pod diamantem) v_v^d **[mm]**	**Horizontální průhyb** (maximální) v_h **[mm]**	**První vlastní frekvence** f_1 **[Hz]**	**Koeficient stability** k_{st} [–]
Hodnota	35,96	31,94	3,11	6,46	3,36
Podmínka	≤ 36	≤ 36	≤ 60	$\geq 5{,}1$	> 2



Obrázek 5.1: Rozložení posuvů ve směru y (vertikální průhyb lávky z první optimalizace)



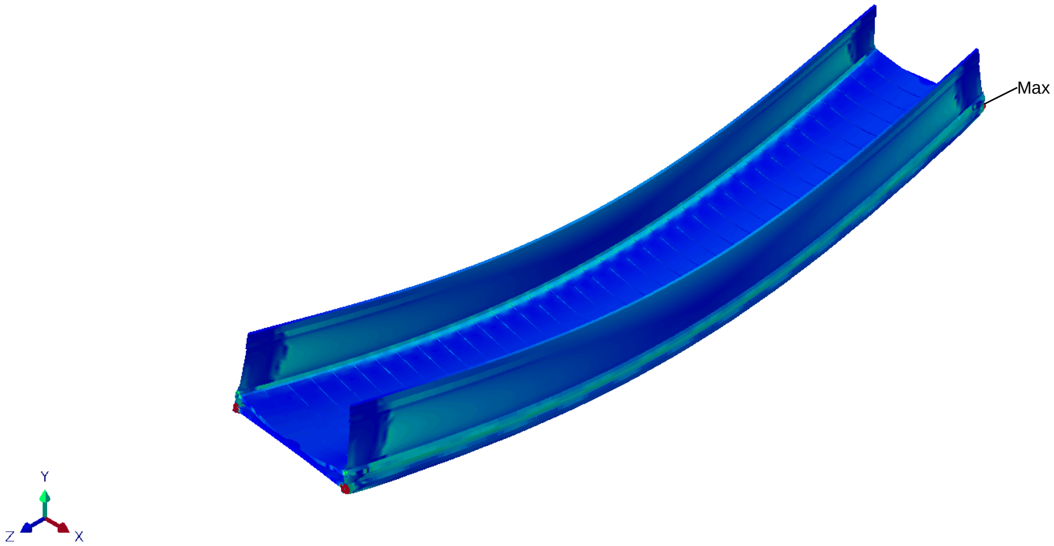
Obrázek 5.2: Vlastní tvar kmitu lávky z první optimalizace příslušející první vlastní frekvenci



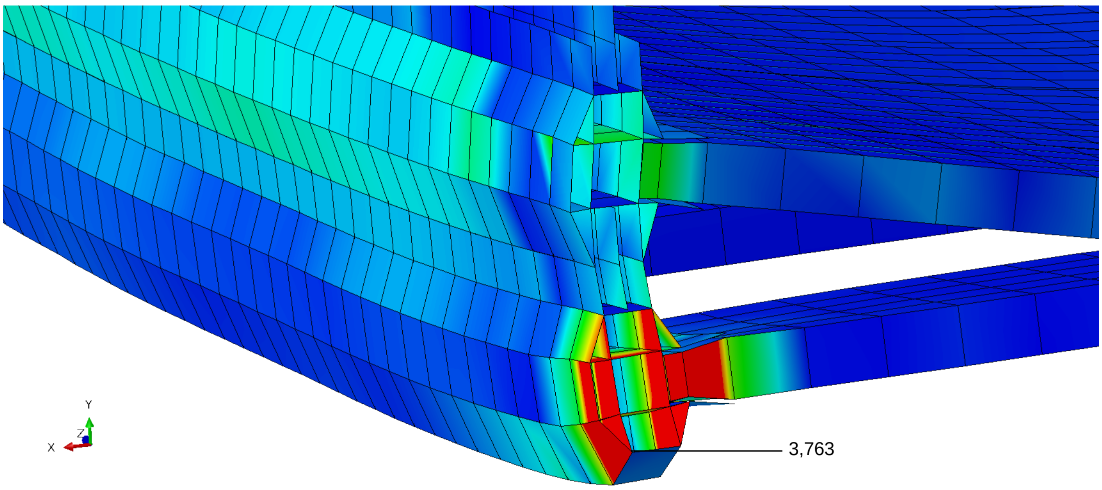
Obrázek 5.3: Vlastní tvar lávky z první optimalizace při ztrátě stability

5.2 Posouzení únosnosti lávky po první optimalizaci

Únosnost mostu je posuzována pomocí hodnot indexu porušení v integračních bodech modelu stanovených s využitím Hashinova kritéria. Rozložení indexu porušení je znázorněno na obrázcích (5.4) a (5.5), kde červená barva představuje místa s indexem větším než jedna a modrá s indexem blízkým nule. V obrázcích je zobrazeno maximum přes všechny vrstvy. Největší hodnota indexu porušení v integračních bodech je $F_i = 3,76$, tudíž by podle Hashinova kritéria mělo dojít k porušení. Aby bylo možné shledat lávku vyhovující z hlediska únosnosti, je třeba ji upravit.



Obrázek 5.4: Rozložení indexu porušení pro konstrukci z první optimalizace



Obrázek 5.5: Detail rozložení indexu porušení pro konstrukci z první optimalizace

Kapitola 6

Optimalizace lávky s úpravou v místě uložení

Konstrukce lávky vzešlá z první optimalizace nevyhovuje z hlediska únosnosti, proto je před další optimalizací upravena přidáním výplní v místech s nejvyšším indexem porušení. Výplň představuje částečné vyplnění otvorů spodního diamantu pryskyřicí. Způsob zahrnutí výplně do modelu je zvolen na základě provedených simulací (viz příloha B).

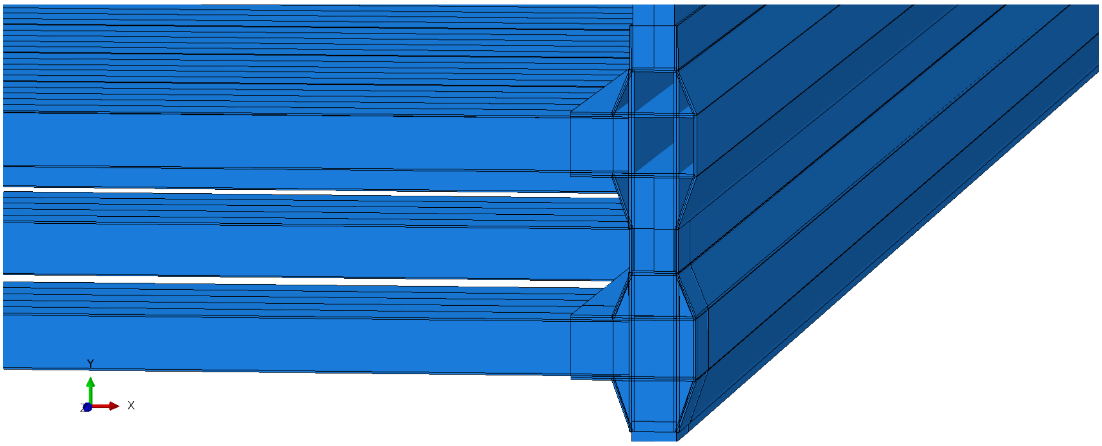
Optimalizace takto upravené lávky je provedena s využitím softwaru Isight. Stejně jako při první optimalizaci je k nalezení řešení použit evoluční algoritmus a je hledána lávka s co možná nejmenší hmotností. Proměnnými parametry jsou v první řadě délka výplní, skladba sendviče a skladba vybraných stěn diamantu.

Jsou-li zachovány všechny rozměry profilů a skladba sendvičů je u obou schodná, pak nejlepší nalezené řešení splňuje všechny požadavky kromě únosnosti (maximální index porušení je 1,163) a hmotnost tohoto řešení je 5827,77 [kg]. V případě, že je skladba sendvičů odlišná, jsou vypočítané hodnoty nejlepší varianty jen málo odlišné od předchozího řešení. Hmotnost je sice o trochu nižší (5787,33 [kg]) a index porušení je 1,160, avšak i tato hodnota je větší než 1, tudíž konstrukce nevyhovuje z hlediska únosnosti.

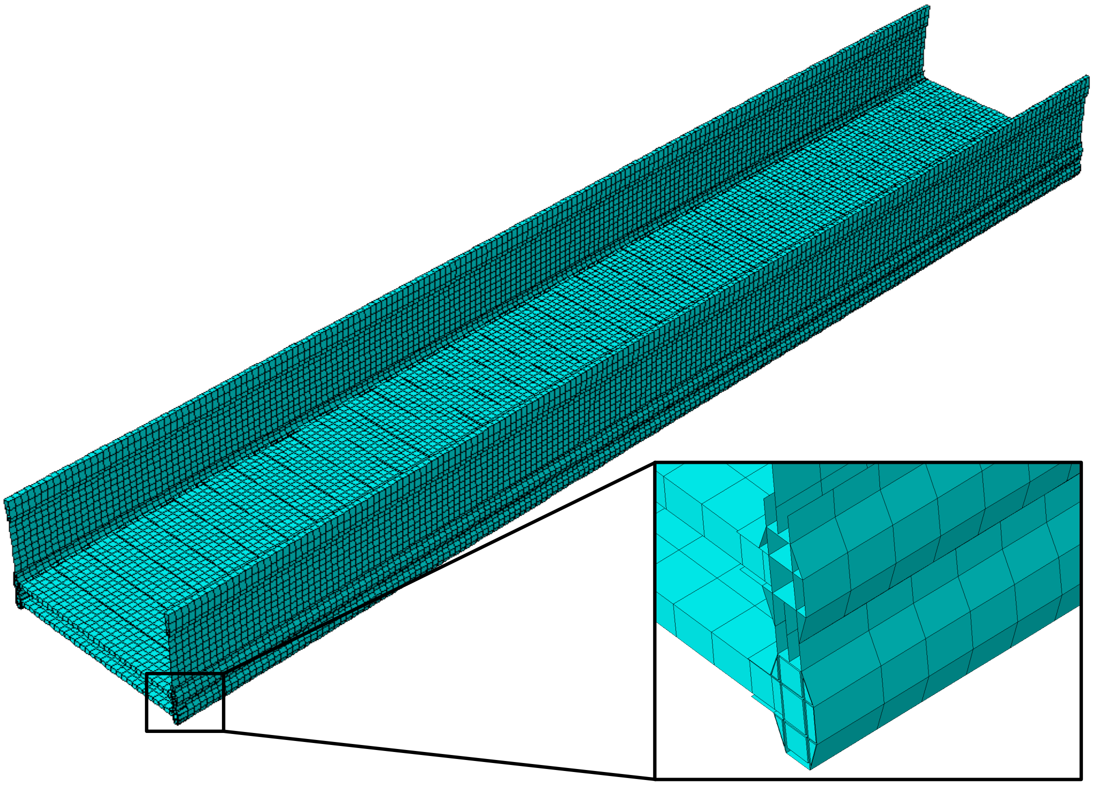
Aby lávka vyhověla, je nutné změnit i některé její rozměry, čímž musí dojít i ke změně formy. Za nejjednodušší variantu je považována změna tloušťky vybraných stěn diamantů tak, že jeho vnější rozměry jsou z většiny zachovány. Tím je umožněno použití stávajících forem jen s minimální úpravou a výměnou vnitřních trnů formy diamantu. Zahrnutím této možnosti do optimalizace již lze nalézt řešení, které zároveň vyhoví všem podmínkám uvedeným v kapitole 3. Mostní konstrukce, jenž je výsledkem této optimalizace, je popsána níže.

6.1 Popis výsledné optimalizované lávky

Optimalizovaná lávka má výplně spodních diamantů dlouhé 15 [cm] (viz obrázek 6.1). Přidáním výplní došlo i k drobné změně konečnoprvkové sítě modelu, jenž je znázorněna na obrázku 6.2. Na obrázku 6.1 je patrná i změna tloušťky některých stran diamantu, jenž zapřičiňuje nutnost zúžení spojovacího sendviče.



Obrázek 6.1: Detail geometrie výsledné lávky



Obrázek 6.2: Konečnoprvková síť výsledné lávky

Z důvodu změny tloušťky stěn diamantů je zapotřebí brát zřetel na stabilitu profilů a světlost buněk. Nejhorší stěnou z hlediska stability profilu je stěna w_1, jejíž tloušťka je 4,4 [mm] a délka 85,95 [mm] (jedna dvacetina délky je 4,2975 $\leq$ 4,4), tudíž stěna splňuje požadovaný limit. Dodržena je i světlost buňek. Ta je nejhorší u horní trojúhelníkové buňky, jenž je blíže pochozí ploše. Nejmenší hodnotou této buňky je $w_{1c} = 19,2 \geq 18,9$ [mm].

6.2 Vypočítané hodnoty pro výslednou lávku

Hmotnosti jednotlivých částí výsledné lávky vypočítané konečnoprvkovou analýzou jsou uvedeny v tabulce 6.1. Porovnáním tabulky 6.1 s tabulkou 5.2 je zřejmé, že výsledné řešení je dokonce lehčí než lávka z první optimalizace. Malá změna v hmotnosti příčného profilu je způsobena zkrácením profilu v důsledku rozšíření stěn diamantů, mezi kterými jsou příčné profily umístěny. Snížení hmotnosti sendvičů je umožněné díky vyztužení diamantů, proto nedochází k velkému nárůstu vertikálního průhybu, který by samotné odlehčení sendvičů způsobilo.

Tabulka 6.1: Vypočítaná hmotnost jednotlivých částí výsledné lávky

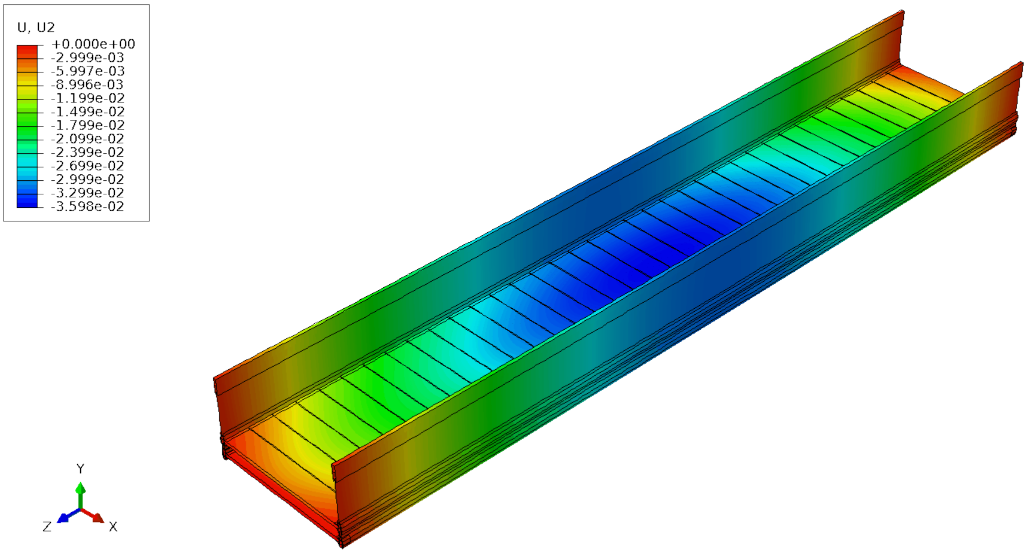
Část lávky	**Hmotnost [kg]**
Příčný profil	42,79
Korunka	279,18
Sendvič 1	747,38
Diamant (bez stěny h_1)	288,62
Sendvič 2 (spodní)	105,05
Diamant s dnem (se stěnou h_1)	358,10
Výplně u jedné podpěry	2,77
Nosný profil	1783,87
Pochozí (horní) příčné profily	1540,26
Spodní příčné profily	556,21
Celková hmotnost lávky	**5664,20**

Z tabulky 6.2 je zřejmé, že výsledná mostní konstrukce vyhovuje na použitelnost, splňuje podmínku stability konstrukce a podmínku pro první vlastní frekvenci, zároveň vyhovuje i z hlediska únosnosti. Grafické znázornění výsledků použitých při optimalizaci je na obrázcích 6.3 – 6.10. Pro zobrazení rozložení indexu porušení platí princip popsaný v části 5.2. Maximální index porušení se nachází v okolí uložení mostu, jiná část s vyšším indexem porušení je na horním příčném profilu v místech, kde na něj dosedá diamant.

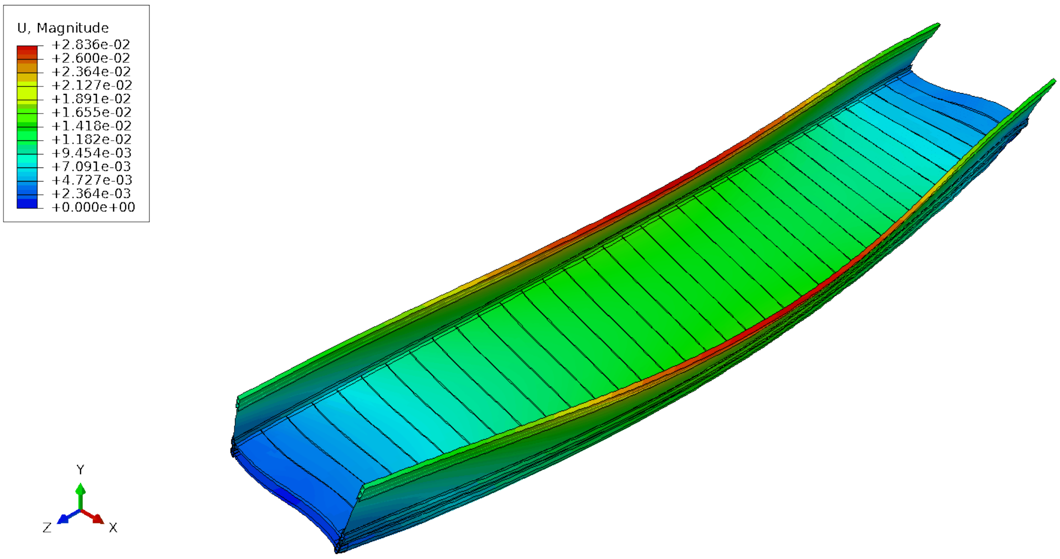
Tabulka 6.2: Základní vypočítané hodnoty pro optimalizovanou lávku

	Vertikální průhyb (maximální) v_v^m [mm]	**Vertikální průhyb** (pod diamantem) v_v^d [mm]	**Horizontální průhyb** (maximální) v_h [mm]	**První vlastní frekvence** f_1 [Hz]
Hodnota	35,98	31,82	2,99	6,84
Podmínka	≤ 36	≤ 36	≤ 60	$\geq 5{,}1$

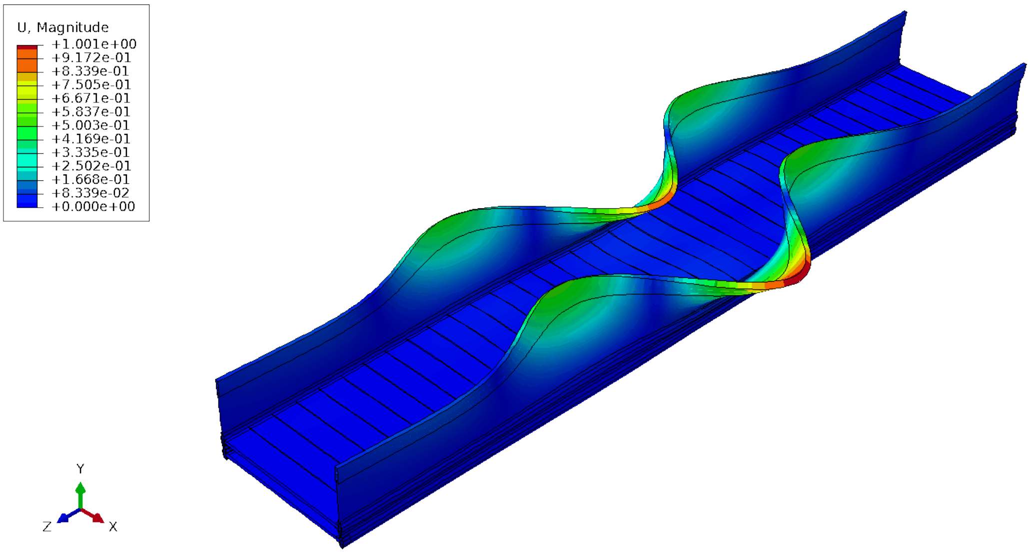
	Koeficient stability k_{st} [–]	**Index porušení** (maximální) F_i[–]
Hodnota	3,25	0,89
Podmínka	> 2	< 1



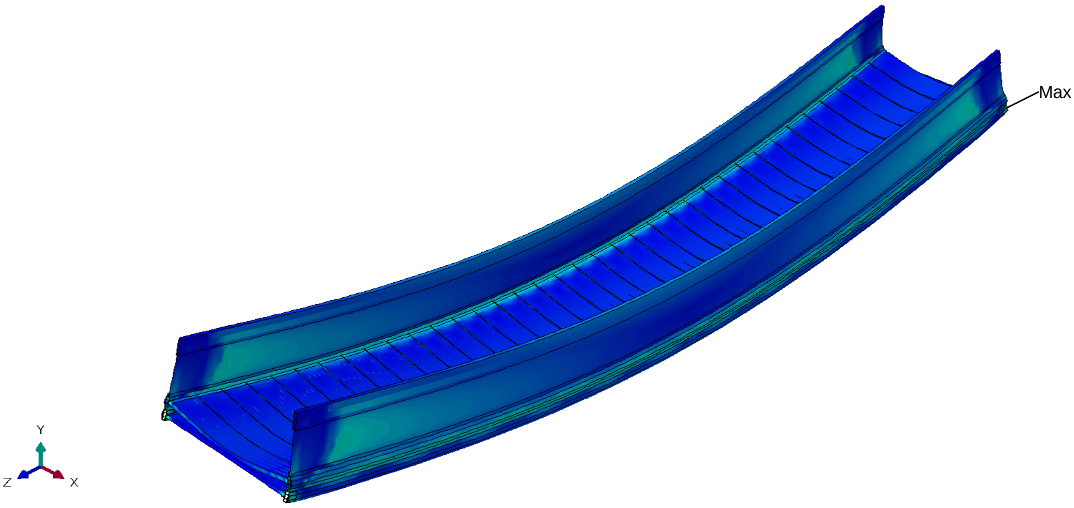
Obrázek 6.3: Rozložení posuvů ve směru y (vertikální průhyb výsledné lávky)



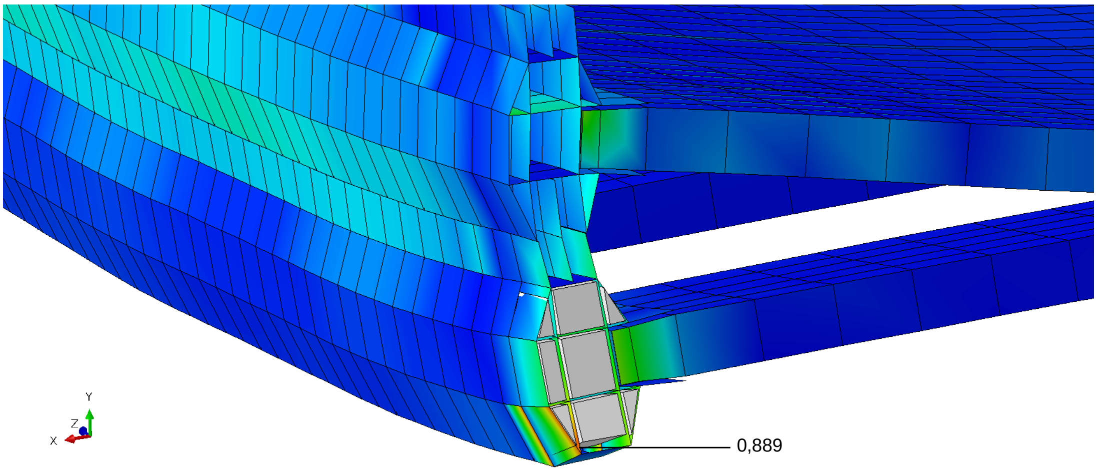
Obrázek 6.4: Vlastní tvar kmitu výsledné lávky příslušející první vlastní frekvenci



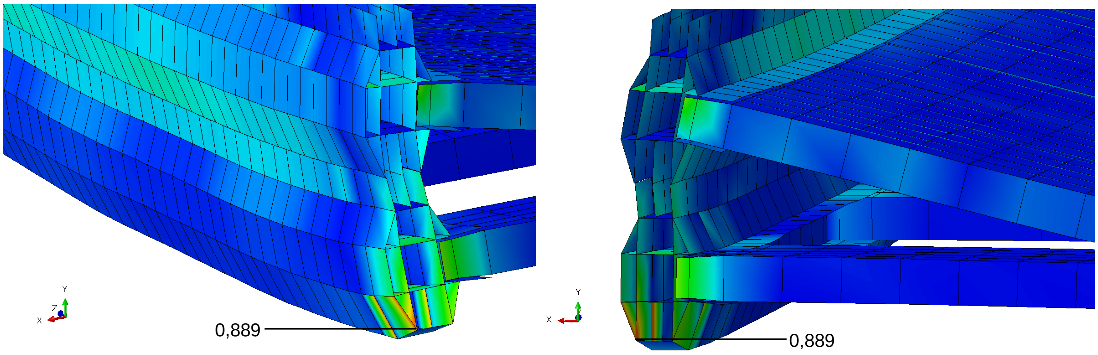
Obrázek 6.5: Vlastní tvar výsledné lávky při ztrátě stability



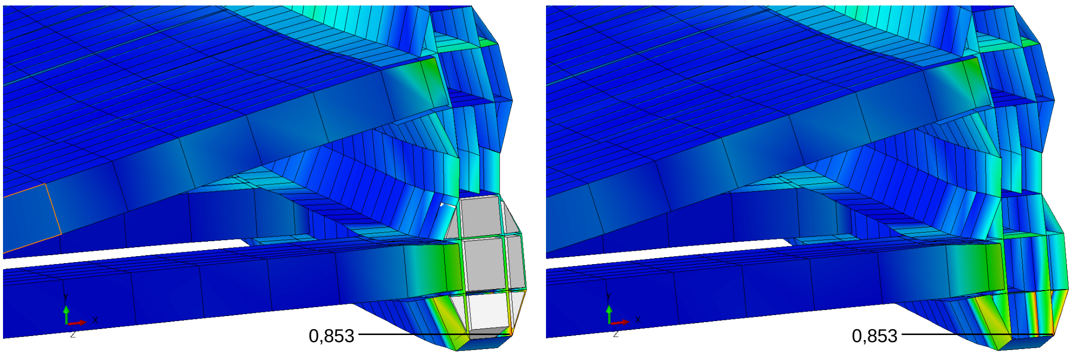
Obrázek 6.6: Rozložení indexu porušení pro výslednou lávku



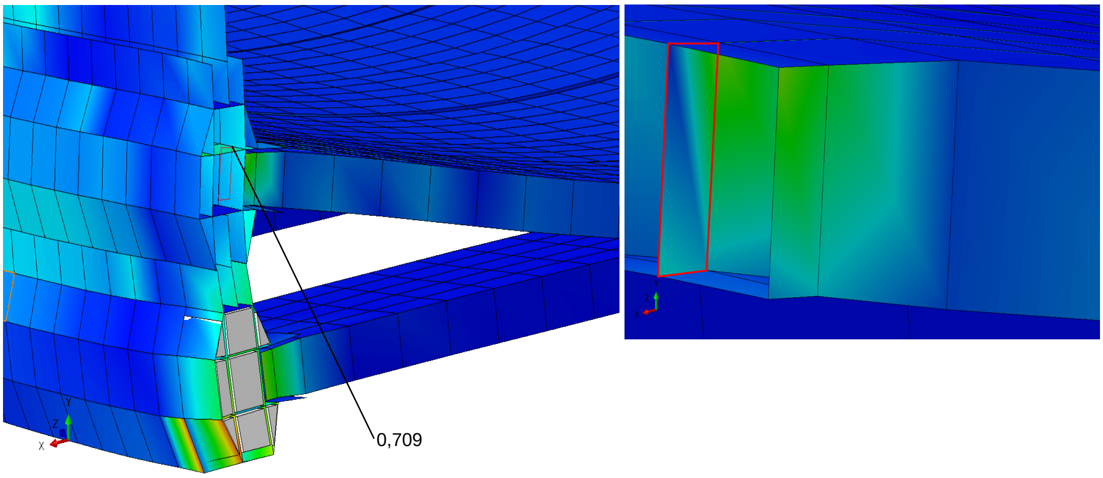
Obrázek 6.7: Rozložení indexu porušení pro výslednou lávku v místech s maximem



Obrázek 6.8: Rozložení indexu porušení pro výslednou lávku v místech s maximem (zobrazeno bez výplní, pohled zleva a zprava)

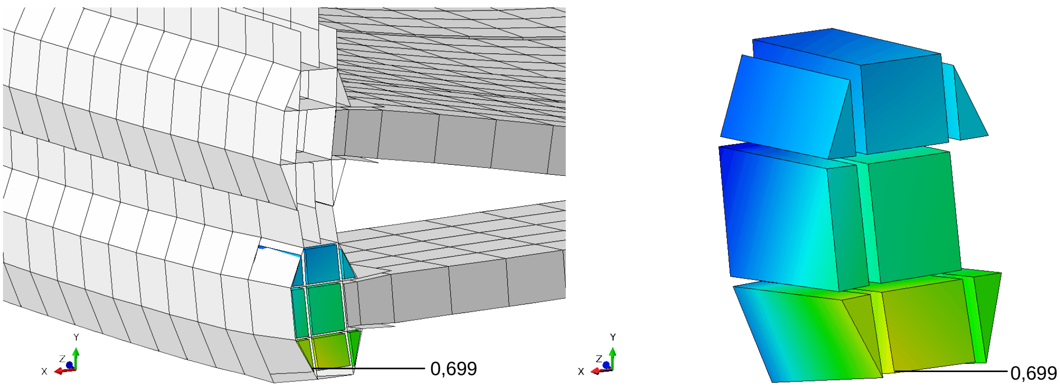


Obrázek 6.9: Rozložení indexu porušení pro výslednou lávku v místech s druhou nejvyšší hodnotou (napravo zobrazeno bez výplní)



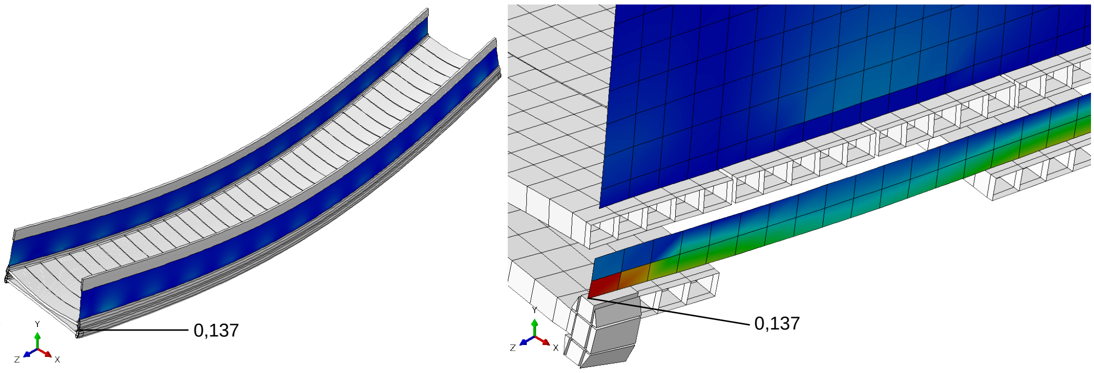
Obrázek 6.10: Rozložení indexu porušení pro výslednou lávku v místech s nejvyšší hodnotou mimo uložení (element s nejvyšší hodnotou je červeně ohraničen a přiblížen v detailu)

Na závěr je k posouzení únosnosti přidáno ověření pevnosti pěny v sendvičích a výplní u uložení. Index porušení je pro výplně určen pomocí redukovaného napětí podle hypotézy HMH a jeho maximální vypočítaná hodnota je 0,699 (viz 6.11). Pevnost pěny v sendvičích je dána velikostí příčných smykových napětí τ_{13} a τ_{23}[1]. Hodnoty τ_{13} a τ_{23} jsou posouzeny s využitím jim příslušejících podmínek z kritéria maximálního napětí. Největší index porušení ($F_i = 0.137$) pěny byl nalezen pro smyk v rovině 23 u uložení na spodním sendviči (6.12). Z uvedených maximálních hodnot indexů porušení je zřejmé, že by k porušení výplní a pěny v sendviči nemělo podle použitých kritérií dojít.



Obrázek 6.11: Rozložení indexu porušení pro výplně výsledné lávky na straně s nejvyšší hodnotou

[1]Výpočet těchto napětí nelze provést na modelu se subroutinou, proto je pevnost pěny posouzena na stejném modelu, ale bez subroutiny.



Obrázek 6.12: Rozložení indexu porušení pro pěnu v sendvičích výsledné lávky pro smyk v rovině 23 (z důvodu názornosti obrázku jsou červeně vyznačena místa s $F_i > 0.125$)

Kapitola 7

Porovnání lávky z projektu KoMoKo s optimalizovanou lávkou

Porovnáním výsledné konstrukce s lávkou z projektu KoMoKo je zřejmé, že vlivem provedených úprav v geometrii (základní rozměry obou lávek jsou uvedeny v tabulce 7.2) dochází k zvýšení celkové vypočítané hmotnosti mostu o cca 2,4 [t] (viz tabulka 7.1). Další základní hodnoty získané konečnoprvkovou analýzou lze porovnat pomocí tabulky 7.3.

Grafické znázornění výsledků pro lávku z projektu KoMoKo je na obrázcích 7.1 – 7.3 (ústřední motiv). Jedná se o výsledky ze skořepinového modelu, kde nebyla řešena únosnost lávky. Posouzení únosnosti bylo provedeno jiným způsobem, než v této práci, ale místa s největším indexem porušení jsou shodně u uložení. Z porovnání na obrázcích 7.1 – 7.3 je patrné, že se vlastní tvary lávky při ztrátě stability liší. Drobný rozdíl je i ve vlastních tvarech příslušejících první vlastní frekvenci, kde je u optimalizované lávky výraznější prohnutí ve směru osy mostu. Vertikální průhyb lávky je pro obě konstrukce obdobný.

Tabulka 7.1: Porovnání hmotnosti jednotlivých částí lávky

Část lávky	**Optimalizovaná lávka Hmotnost [kg]**	**Původní lávka Hmotnost [kg]**
Příčný profil	42,79	33,27
Korunka	279,18	279,18
Sendvič (Sendvič 1)	747,38	440,68
Diamant (bez stěny h_1)	288,62	–
Sendvič 2 (spodní)	105,05	–
Diamant s dnem (se stěnou h_1)	358,10	326,14
Výplně u jedné podpěry	2,77	–
Nosný profil	1783,87	1045,99
Pochozí (horní) příčné profily	1540,26	1197,89
Spodní příčné profily	556,21	–
Celková hmotnost lávky	**5664,20**	**3289,87**

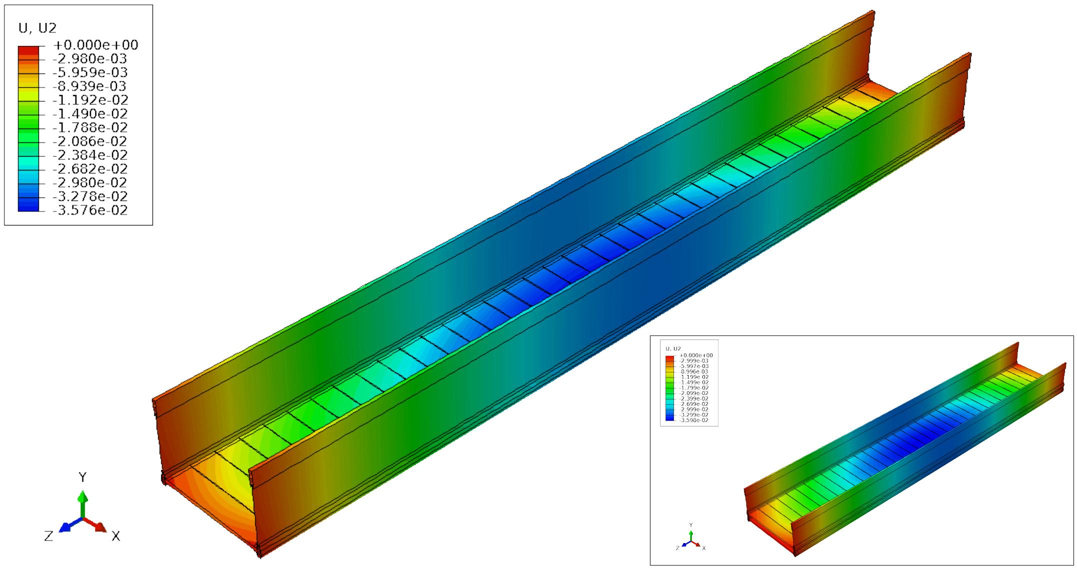
Tabulka 7.2: Porovnání základních rozměrů lávky

Rozměr	**Optimalizovaná lávka Hodnota v [mm]**	**Původní lávka Hodnota v [mm]**
délka lávky	18000,00	18000,00
pochozí šířka lávky	3000,00	2320,00
výška zábradlí	1300,00	1600,00
celková šířka lávky	3239,00	2559,00
celková výška lávky	1761,60	1773,15
šířka nosného profilu	179,50	179,50
výška nosného profilu	1761,60	1773,15
šířka korunky nosného profilu	80,20	80,20
výška korunky nosného profilu	353,50	353,50
šířka sendviče 1 nosného profilu	59,40	59,40
výška sendviče 1 nosného profilu	936,60	1236,60
šířka diamantu bez dna nosného profilu	179,50	–
výška diamantu bez dna nosného profilu	288,45	–
šířka sendviče 2 nosného profilu	56,20	–
výška sendviče 2 nosného profilu	132,60	–
šířka diamantu s dnem nosného profilu	179,50	179,50
výška diamantu s dnem nosného profilu	303,05	303,05
délka příčného profilu 1 (horního)	3045,60	2368,60
šířka příčného profilu 1 (horního)	490,00	490,00
výška příčného profilu 1 (horního)	80,00	80,00
délka příčného profilu 2 (spodního)	3045,60	–
šířka příčného profilu 2 (spodního)	490,00	–
výška příčného profilu 2 (spodního)	80,00	–

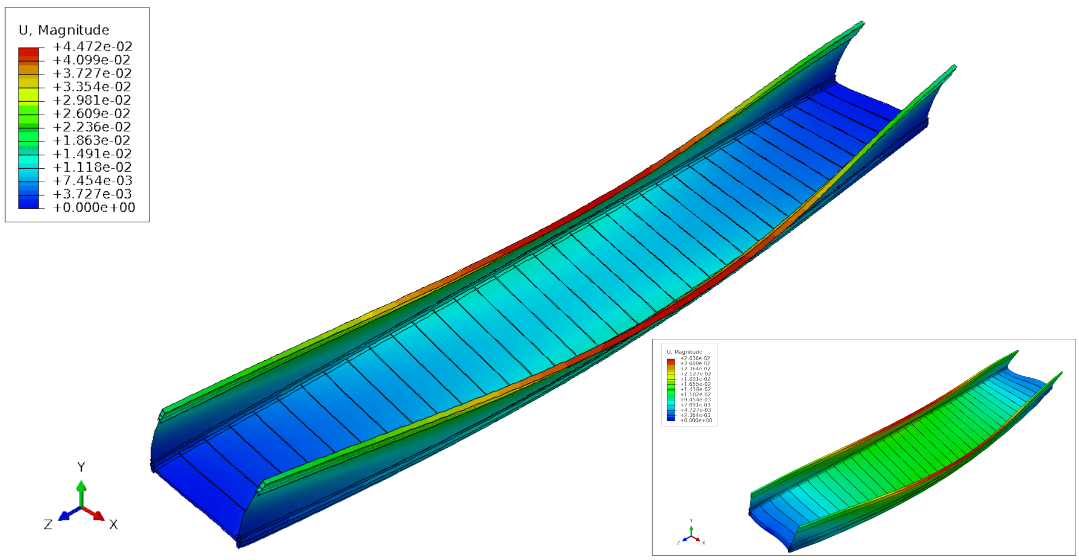
Tabulka 7.3: Porovnání základních vypočítaných hodnot

	Vertikální průhyb (maximální) v_v^m **[mm]**	**Vertikální průhyb** (pod diamantem) v_v^d **[mm]**	**Horizontální průhyb** (maximální) v_h **[mm]**	**První vlastní frekvence** f_1 **[Hz]**
Optimalizovaná lávka	35,98	31,82	2,99	6,84
Původní lávka	35,76	31,34	12,15	6,09

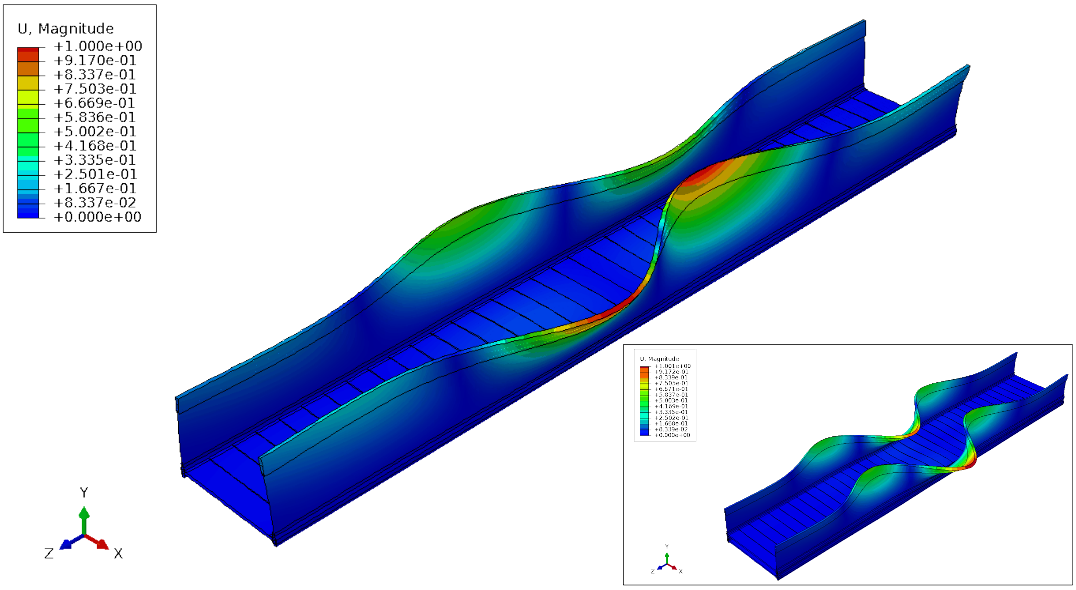
	Koeficient stability k_{st} [–]	**Index porušení** (maximální) F_i[–]
Optimalizovaná lávka	3,25	0,89
Původní lávka	2,26	–



Obrázek 7.1: Rozložení posuvů ve směru y neboli vertikální průhyb lávky z projektu KoMoKo (ústřední motiv) a výsledné lávky (vpravo dole)



Obrázek 7.2: Vlastní tvar kmitu lávky z projektu KoMoKo příslušející první vlastní frekvenci (ústřední motiv) a výsledné lávky (vpravo dole)



Obrázek 7.3: Vlastní tvar lávky z projektu KoMoKo při ztrátě stability (ústřední motiv) a výsledné lávky (vpravo dole)

Závěr

Diplomová práce se zabývá návrhem kompozitní lávky pro pěší a cyklisty a navazuje na projekt KoMoKo. Optimalizovaná mostní konstrukce, jenž je výsledkem této práce, má nižší zábradlí a širší pochozí plochu, jak bylo požadováno. Z konečnoprvkové analýzy této konstrukce vyplývá že existuje lávka, která vyhovuje ve všech posuzovaných stavech.

Model použitý při numerických výpočtech je idealizovaný, aby více odpovídal reálnému stavu, bylo by nutné použít prostorový model. V práci je dána přednost skořepinovému modelu z důvodu časové náročnosti výpočtu a složitosti stavby modelu. Vypočítaná hmotnost výsledné konstrukce je 5,7 [t]. Váha skutečné lávky bude vyšší, jelikož v reálném případě lávka přesahuje za ukotvení a je tedy o kousek delší. Zároveň do vypočítané hmotnosti není zahrnuta hmotnost nátěru a lepidla. Přibližná hmotnost skutečného mostu je tudíž 6 [t].

V dalším kroku, který již není předmětem této práce, by bylo vhodné provést citlivostní a spolehlivostní analýzu výsledné lávky.

Příloha A

Příčná smyková tuhost skořepiny

V softwaru Abaqus je příčná smyková tuhost skořepiny definována jako smyková odezva při ohybu skořepiny kolem jedné z os. Ve většině případů je potřebná hodnota vypočtena softwarem a není třeba ji určovat (ale je možné ji změnit). Její zadání je nutné například v případě, kdy je materiál definován pomocí uživatelské subroutiny UMAT, UHYPEL, UHYPER nebo VUMAT.

Příčná tuhost skořepinového prvku je v Abaqusu definována jako [9]

$$S_{ab} = f_p K_{ab}, \tag{A.1}$$

kde S_{ab} jsou složky příčné tuhosti, f_p je bezrozměrný koeficient daný velikostí prvku a tloušťkou skořepiny a K_{ab} jsou skutečné příčné smykové tuhosti (hodnoty, které je možné zadat).

A.1 Stanovení příčné smykové tuhosti pro homogenní skořepinu

Hodnoty příčné smykové tuhosti jsou pro homogenní skořepinu dány vztahy

$$K_{11} = \frac{5}{6} G_{13} t, \quad K_{22} = \frac{5}{6} G_{23} t, \quad K_{12} = 0, \tag{A.2}$$

kde G_{13} a G_{23} jsou moduly pružnosti ve smyku v příčných směrech a t je tloušťka skořepiny. Konstanta $\frac{5}{6}$ je korekčním koeficientem příčné tuhosti.

Vztahy (A.2) vychází z energetické bilance [10]

$$\frac{1}{2} T^2 \delta = \frac{1}{2} \int_{(z)} \int_{(A)} \frac{\tau_{13}^2}{G_{13}} \mathrm{d}A \mathrm{d}z, \tag{A.3}$$

kde T je smyková síla působící v průřezu A a τ_{13} je smykové napětí. Napětí τ_{13} lze určit pomocí tzv. Žuravského vztahu [11]

$$\tau_{13} = \frac{T S(z)}{J_y b(z)}, \tag{A.4}$$

kde $S(z)$ je lineární moment plochy A_z vymezené rovnoběžkou s osou y ve vzdálenosti z od neutrální osy y, $b(z)$ je šířka průřezu a J_y je kvadratický moment celého průřezu k ose y. Šířka průřezu je konstantní a je rovna t. Kvadratický moment J_y pro obdélníkový průřez o rozměrech h a t je

$$J_y = \frac{1}{12} t h^3 \tag{A.5}$$

a lineární moment S_z je dán vztahem

$$S_z = \frac{t}{2} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) \tag{A.6}$$

Dosazením (A.4) – (A.6) do (A.3) vznikne rovnice

$$\frac{1}{2} T^2 \delta = \frac{1}{2} \frac{T^2}{G_{13}} \int_{(z)} \int_{(A)} \frac{\frac{t^2}{4}((\frac{h}{2})^2 - z^2)^2}{\frac{1}{144} t h^3 t^2} \mathrm{d}A \mathrm{d}z. \tag{A.7}$$

Po integraci lze vztah (A.7) upravit do tvaru

$$\delta = \frac{1}{G_{13}} \frac{6}{5t}, \tag{A.8}$$

kde δ je převrácenou hodnotou hledané tuhosti K_{11}.

A.2 Stanovení příčné smykové tuhosti pro kompozitní skořepinu

Pro kompozitní skořepinu jsou korekční koeficienty jiné než pro homogenní a hodnota K_{12} nemusí být rovna nule. Ke stanovení hledané tuhosti je zapotřebí určit rozložení smykového napětí po tloušťce skořepiny, pro případ jednoosého ohybu [12]. Napětí v libovolné k-té vrstvě lze vyjádřit pomocí vztahu

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{A.9}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}]^{\mathrm{T}}$ (při uvažování rovinné napjatosti), $\mathbf{Q}$ je matice mimoosové tuhosti a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je tenzor přetvoření $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}]^{\mathrm{T}}$.

Matici mimoosové tuhosti dané vrstvy lze určit pomocí transformačních matic z matice tuhosti dané vrstvy v referenčním souřadnicovém systému $\mathbf{C}$, jako [4]

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_{\sigma}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T}_{\varepsilon}. \tag{A.10}$$

$\mathbf{T}_{\sigma}$ je transformační matice pro tenzor napětí

$$\mathbf{T}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{A.11}$$

kde θ je úhel natočení vrstvy. $\mathbf{T}_{\varepsilon}$ je transformační matice pro tenzor přetvoření

$$\mathbf{T}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{A.12}$$

Prvky matice $\mathbf{C}$ jsou dány vztahy 2.9 – 2.12.

Tenzor přetvoření $\boldsymbol{\varepsilon}$ je, za předpokladu, že se posunutí v příčném směru mění lineárně, dán vztahem

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{ref} - (z - z_0)\boldsymbol{\kappa}, \tag{A.13}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}^{ref} = [\varepsilon_{11}^{ref}, \varepsilon_{22}^{ref}, \gamma_{12}^{ref}]^{\mathrm{T}}$ je tenzor přetvoření referenční roviny $z = z_0$ a $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}]^{\mathrm{T}}$ je vektor křivosti. Zvolením polohy referenční roviny $z_0 = 0$, lze vztah (A.13) zjednodušit na

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{ref} - z\boldsymbol{\kappa}. \tag{A.14}$$

Výraz (A.9) je tudíž možné přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\varepsilon}^{ref} - z\boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}^{ref} - z\mathbf{Q}\boldsymbol{\kappa}. \tag{A.15}$$

Integrací přes tloušťku k-té vrstvy lze získat závislost sil a momentů na přetvořeních a křivostech:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int_{h_k}^{h_{k+1}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}z = \int_{h_k}^{h_{k+1}} \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}^{ref} \mathrm{d}z - \int_{h_k}^{h_{k+1}} z\mathbf{Q}\boldsymbol{\kappa} \mathrm{d}z, \\ \mathbf{M} &= \int_{h_k}^{h_{k+1}} z\boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}z = \int_{h_k}^{h_{k+1}} z\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}^{ref} \mathrm{d}z - \int_{h_k}^{h_{k+1}} z^2\mathbf{Q}\boldsymbol{\kappa} \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Pro celý laminát (s n vrstvami) potom platí

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\varepsilon}^{ref} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\kappa} \int_{h_k}^{h_{k+1}} z \mathrm{d}z, \\ \mathbf{M} &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\varepsilon}^{ref} \int_{h_k}^{h_{k+1}} z \mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\kappa} \int_{h_k}^{h_{k+1}} z^2 \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{A.17}$$

Výrazy (A.17) je možné zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{ref} \\ \varepsilon_{22}^{ref} \\ \varepsilon_{12}^{ref} \\ -\kappa_{11} \\ -\kappa_{22} \\ -\kappa_{12} \end{bmatrix}, \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (Q_{ij})_k (h_{k+1} - h_k), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (Q_{ij})_k (h_{k+1}^2 - h_k^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} (Q_{ij})_k (h_{k+1}^3 - h_k^3). \end{aligned}$$

Vrstva k je od h_k do h_{k+1}, tudíž tloušťka k-té vrstvy je $t_k = h_{k+1} - h_k$. Inverzní tvar rovnice (A.18) je možné psát ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{ref} \\ -\boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}, \tag{A.19}$$

Je-li uvažováno pouze ohýbání skořepiny ve směru 1 takové, že $\tau_{12} = 0$, $\sigma_{22} = 0$ a $N_{11} = N_{22} = N_{12} = M_{22} = M_{12} = 0$, pak pro přetvoření a křivosti platí

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{ref} &= H_{14} M_{11}, & -\kappa_{11} &= H_{44} M_{11}, \\ \varepsilon_{22}^{ref} &= H_{24} M_{11}, & -\kappa_{22} &= H_{54} M_{11}, \\ \gamma_{12}^{ref} &= H_{34} M_{11}, & -\kappa_{12} &= H_{64} M_{11}. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Po dosazení (A.20) do (A.15) je napětí σ_{11} dáno vztahem

$$\sigma_{11} = (B_{x1} + z B_{x2}) M_{11}, \tag{A.21}$$

kde

$$B_{x1} = Q_{11} H_{14} + Q_{12} H_{24} + Q_{13} H_{34} \tag{A.22}$$

a

$$B_{x2} = Q_{11} H_{44} + Q_{12} H_{54} + Q_{13} H_{64}. \tag{A.23}$$

Složková podmínka rovnováhy ve směru 1 má tvar

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} = 0. \tag{A.24}$$

Z momentové podmínky rovnováhy kolem osy y vyplývá

$$V_x + \frac{\partial M_{11}}{\partial x} = 0, \tag{A.25}$$

kde V_x je příčná smyková síla vztažená na jednotku šířky. Kombinací (A.21) s (A.24) a (A.25) vznikne vztah popisující změnu příčného smykového napětí τ_{13} po tloušťce

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} = (B_{x1} + z B_{x2}) V_x. \tag{A.26}$$

Integrací (A.26) přes tloušťku skořepiny lze získat příčné smykové napětí v k-té vrstvě jako

$$\tau_{13}^k = \left[B_{x1}^k (z - h_k) + \left(\frac{1}{2} (z^2 - h_k^2) \right) B_{x2}^k + B_{x0}^k \right] V_x, \tag{A.27}$$

kde

$$B_{x0}^k = \sum_{m=1}^{i-1} t_m \left[B_{x1}^m + \left(\frac{1}{2} (h_{m+1} + h_m) \right) B_{x2}^m \right]. \tag{A.28}$$

Příčné smykové napětí τ_{23} skořepiny je možné stanovit obdobným způsobem, založeným na čistém ohýbání ve směru 2.

Příčnou poddajnost skořepiny lze definovat porovnáním deformační energie získané integrací hustoty deformační energie s deformační energií danou příčným smykovým napětím

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} V_x & V_y \end{bmatrix} \mathbf{F} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{bmatrix} \tau_{13} & \tau_{23} \end{bmatrix} \mathbf{F}^k \begin{bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} \mathrm{d}z. \tag{A.29}$$

Matice $\mathbf{F}$ je matice příčných poddajností skořepiny a matice $\mathbf{F}^k$ je matice příčných poddajností k-té vrstvy. Matice $\mathbf{F}^k$ je inverzní k matici mimoosové příčné tuhosti $\mathbf{Q}^{ts}$, která je dána vztahem

$$\mathbf{Q}^{ts} = (\mathbf{T}^{ts}_{\sigma})^{-1}\mathbf{C}^{ts}\mathbf{T}^{ts}_{\varepsilon}, \tag{A.30}$$

kde

$$\mathbf{T}^{ts}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{A.31}$$

$$\mathbf{T}^{ts}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{A.32}$$

a $\mathbf{C}^{ts}$ je matice příčné tuhosti vrstvy. Pro ortotropní laminu platí

$$\mathbf{C}^{ts} = \begin{bmatrix} G_{23} & 0 \\ 0 & G_{13} \end{bmatrix}, \tag{A.33}$$

kde G_{13} a G_{23} jsou moduly pružnosti ve smyku v rovinách 13 a 23.

Dosazením vztahů pro τ_{13} a τ_{23} do (A.29) a integrací výrazu lze získat matici $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix}, \tag{A.34}$$

kde

$$\begin{aligned} F_{11} = &\sum_{i=1}^{N} F^k_{11} t_k \left[(B^k_{x0})^2 + t_k B^k_{x0}(B^k_{x1} + h_k B^k_{x2}) + \frac{1}{3} t^2_k ((B^k_{x1} + h_k B^k_{x2})^2 + B^k_{x0} B^k_{x2}) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} t^3_k B^k_{x2}(B^k_{x1} + h_k B^k_{x2}) + \frac{1}{20} t^4_k (B^k_{x2})^2 \right], \end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned} F_{22} = &\sum_{i=1}^{N} F^k_{22} t_k \left[(B^k_{y0})^2 + t_k B^k_{y0}(B^k_{y1} + h_k B^k_{y2}) + \frac{1}{3} t^2_k ((B^k_{y1} + h_k B^k_{y2})^2 + B^k_{y0} B^k_{y2}) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} t^3_k B^k_{y2}(B^k_{y1} + h_k B^k_{y2}) + \frac{1}{20} t^4_k (B^k_{y2})^2 \right], \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned} F_{12} = &\sum_{i=1}^{N} F^k_{12} t_k \left[B^k_{x0} B^k_{y0} + \frac{1}{2} t_k (B^k_{x0}(B^k_{y1} + h_k B^k_{y2}) + B^k_{y0}(B^k_{x1} + h_k B^k_{x2})) + \right. \\ &+ \frac{1}{6} t^2_k (2(B^k_{x1} + h_k B^k_{x2})(B^k_{y1} + h_k B^k_{y2}) + (B^k_{x0} B^k_{y2} + B^k_{y0} B^k_{x2})) + \\ &\left. + \frac{1}{8} t^3_k (B^k_{x2}(B^k_{y1} + h_k B^k_{y2}) + B^k_{y2}(B^k_{x1} + h_k B^k_{x2}) + \frac{1}{20} t^4_k B^k_{x2} B^k_{y2} \right]. \end{aligned} \tag{A.37}$$

Hledané příčné smykové tuhosti skořepiny jsou pak dány jako[1]

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}. \tag{A.38}$$

[1] Při zadávání do Abaqusu je za K_{11} (resp. K_{22}) dosazováno K_{22} (resp. K_{11}) stanovené podle výše uvedeného postupu.

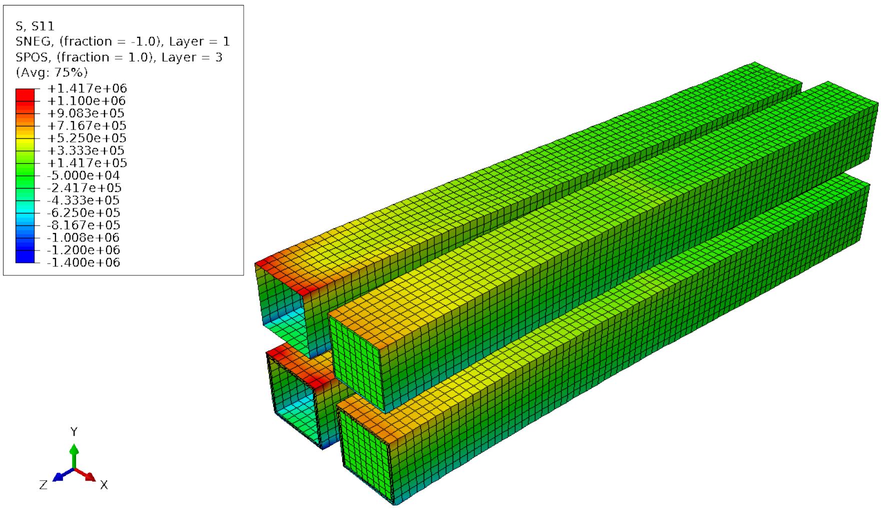
Příloha B

Simulace výplně

Simulaci výplně v skořepinovém modelu lze provést různými způsoby. Testování vhodnosti zvoleného způsobu je provedeno na dutém nosníku z třívrstvého laminátu čtvercového průřezu. Nosník je na jedné straně vetknutý a zatížený tlakem na horní stěnu.

Pro porovnání jsou sestaveny čtyři různé modely (viz obrázek B.1): skořepinový model dutého nosníku (vlevo nahoře), 3D model dutého nosníku (vlevo dole), 3D model nosníku s výplní do poloviny své délky (vpravo dole) a skořepinový model nosníku s výplní do poloviny své délky (vpravo nahoře). První dva zmíněné modely jsou vytvořeny z důvodu kontroly, zda výsledky získané v 3D modelu odpovídají výsledkům ze skořepinového modelu, což se potvrdilo. Díky tomu lze třetí model považovat za korektní model nosníku s výplní a jeho porovnáním s posledním modelem rozhodnout o způsobu simulace výplně v skořepinovém modelu.

Porovnávanými vypočítanými hodnotami jsou napětí a posuvy (např. viz obrázek B.1). Nejlepším způsobem, jak modelovat výplň ve skořepinovém modelu, se ukázalo použití 3D prvků, ze kterých je vytvořena výplň o rozměrech, jenž odpovídají reálné velikosti výplně. Spojení těchto prvků se skořepinovými je provedeno pomocí constraintu typu tie.



Obrázek B.1: Simulace výplně – Rozložení napětí σ_{11}

Literatura

[1] Výzkumný a zkušební letecký ústav a.s., Projekt KoMoKo (A2), 2015.
https://www.vzlu.cz/cs/projekt-komoko-a2-c355.html

[2] Barták, K., ASB-portal.cz, Odborný stavební portál, 2012.
https://www.asb-portal.cz/stavebnictvi/stavebni-technika/bezpecna-docasna-a-trvala-zabradli

[3] Kroupa, T., Kottner, R., Laš, V.: Posouzení použitelnosti lávek 12 m, 15 m a 18 m a únosnosti lávky o délce 18 m se zapracovanými požadavky technologů. Plzeň, 2014.

[4] Laš, V.: Mechanika kompozitních materiálů. Západočeská Univerzita, Plzeň, 2008.

[5] Hashin, Z.: Failure Criteria for Unidirectional Fibre Composites. ASME Journal of Applied Mechanics, 1980, Vol. 47 (2), p. 329-334.

[6] Krystek, J.: Pevnostni kriteria pro kompozitni materialy. Zapadočeska univerzita, Plzeň, 2012.

[7] Dynardo – dynamic software and engineering, Robust Design Optimization Workshop, 2011.
https://www.dynardo.de/fileadmin/Material_Dynardo/bibliothek/WOST_India_01/01_Dr_Will_DoE_MDO_Part1.pdf

[8] Jeník, I.: Identifikace parametrů elasto-plastických modelů materiálu z experimentálních dat. Diplomová práce, Vysoké učení technické v Brně, 2015.

[9] Abaqus 6.12, Abaqus analysis user's manual – Shell section behavior, 18.7.2018.
http://xn--90ajn.xn--p1ai/library/abaqus_doc/Documentation/docs/v6.12/books/usb/default.htm?startat=pt01ch01s03aus03.html

[10] Gruttmann, F., Wagner, W.: Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross–sections. Computational mechanics, 2001, p. 199-207.

[11] Plánička, F., Zajíček, M., Adámek, V.: Ohyb (napjatost) – Shrnutí základních poznatků, 2007.
https://www.kme.zcu.cz/kmet/pp/ohyb-a-napjatost/shrnuti.pdf

[12] Abaqus 6.12, Abaqus theory manual –Transverse shear stiffness in composite shells and offsets from the midsurface, 22.7.2018.
http://xn--90ajn.xn--p1ai/library/abaqus_doc/Documentation/docs/v6.12/books/stm/default.htm?startat=ch03s06ath86.html#stm-elm-transshearshells