

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra mechaniky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Modelování turbulentního proudění stlačitelných
tekutin pomocí vhodných RANS modelů turbulence

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2018/2019

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Tomáš LEVÝ**

Osobní číslo: **A16N0127P**

Studijní program: **N3955 Počítačové modelování v inženýrství**

Studijní obor: **Aplikovaná mechanika**

Název tématu: **Modelování turbulentního proudění stlačitelných tekutin pomocí vhodných RANS modelů turbulence**

Zadávací katedra: **Katedra mechaniky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Rešerše RANS modelů turbulence s ohledem na řešený typ zadaných problémů proudění.
2. Diskretizace výpočtové oblasti.
3. Vývoj vlastních algoritmů a implementace vybraných vhodných RANS turbulentních modelů pro numerické řešení zadaných úloh proudění.
4. Vyhodnocení a analýza získaných numerických výsledků.
5. Porovnání implementovaných RANS modelů turbulence, diskuse a formulace závěrů.

Rozsah grafických prací:

Rozsah kvalifikační práce: 40-60 stran A4 včetně příloh

Forma zpracování diplomové práce: tištěná

Seznam odborné literatury:

1. David C. Wilcox: Turbulence Modeling for CFD. Third edition, DCW Industries, Inc., 2006.
2. Klaus A. Hoffmann, Steve T. Chiang: Computational Fluid Dynamics. Vol. I-III, Fourth edition, Engineering Education System, Wichita, Kansas, 2000.
3. C. Hirsch: Numerical Computation of Internal and External Flows. Vol. 1, 2, John Wiley & Sons, New York, 1994.
4. F. R. Menter, M. Kuntz, R. Langtry: Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model. Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, Begell House, Inc., 2003.
5. P. R. Spalart, S. R. Allmaras: A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. La Recherche Aérospatiale 1: 5-21, 1994.
6. A. Hellsten: New Two-Equation Turbulence Model for Aerodynamics Applications. Dissertation for the degree of Doctor of Science in Technology, Helsinki University of Technology, Finland, 2004.

Vedoucí diplomové práce:

Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.

Katedra mechaniky

Datum zadání diplomové práce: 24. září 2018

Termín odevzdání diplomové práce: 31. května 2019

Radová

Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
děkanka



Jan Vimmr

Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 24. září 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a pramenů.

V Plzni dne 4. června 2019

.....
Tomáš Levý

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce doc. Ing. Janu Vimmrovi, Ph.D. za množství cenných rad, psychickou podporu a nemalé množství času, který mi během psaní této práce věnoval.

Rovněž děkuji Ing. Heleně Prausové za poskytnuté konzultace a předané zkušenosti v oblasti modelování turbulentního proudění.

V neposlední řadě děkuji také svým rodičům a přítelkyni Míše za jejich podporu a trpělivost nejen při psaní této práce, ale i během celého studia na Fakultě aplikovaných věd.

Anotace

Diplomová práce je zaměřena na vysoce aktuální téma v oblasti výpočtové dynamiky tekutin (CFD), kterým je numerické modelování turbulentního proudění stlačitelných tekutin s aplikacemi ve vnější aerodynamice. Matematický model představuje systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic podle Favra, který je uzavřen modelem turbulence. V této práci jsou uvažovány dva modely turbulence, a to jednorovnicový model Spalart-Allmaras a dvourovnicový model $k-\omega$ SST. Pro numerické řešení systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic s přidruženým modelem turbulence je použita metoda konečných objemů na strukturované čtyřúhelníkové síti. Nevazké numerické toky stěnami kontrolních objemů jsou aproximovány pomocí AUSM schématu, jehož první řád přesnosti v prostoru je zvýšen lineární rekonstrukcí řešení s minmod limiterem. Aproximace vazkých numerických toků je provedena centrálně na duálních buňkách. Integrace v čase je realizována pomocí explicitní dvoustupňové Rungeovy-Kuttovy metody. Všechny navržené algoritmy jsou implementovány v prostředí MATLAB a jejich verifikace je provedena na dvou vybraných testovacích příkladech turbulentního proudění stlačitelné tekutiny, a to na případu proudění v okolí rovné desky a zakřivené stěny, jejichž numerické výsledky jsou dostupné v databázi *NASA Turbulence Modeling Resource*.

Klíčová slova: aerodynamika, systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic dle Favra, turbulentní model Spalart-Allmaras, turbulentní model $k-\omega$ SST, metoda konečných objemů, AUSM schéma, lineární rekonstrukce, explicitní Rungeova-Kuttova metoda, obtékání rovné desky, obtékání zakřivené stěny

Annotation

Diploma thesis is focused on highly actual topic in the field of computational fluid dynamics (CFD), which is numerical modeling of turbulent compressible flow with applications in external aerodynamics. Mathematical model consists of the system of Favre averaged Navier-Stokes equations, which is closed by a turbulence model. One-equation model Spalart-Allmaras and two-equation model $k-\omega$ SST are considered in this thesis. The finite volume method on structured quadrilateral mesh is used for numerical solution of averaged system of Navier-Stokes equations coupled with turbulence model equations. Inviscid numerical fluxes through the control volume faces are approximated by the AUSM scheme whose first-order spatial accuracy is enhanced by linear reconstruction with minmod limiter. Approximation of viscous numerical fluxes is carried by central scheme on dual cells. Integration in time is realized by explicit two-stage Runge-Kutta method. All of proposed algorithms are implemented in MATLAB and their verification is performed on two selected test examples of turbulent compressible flow, namely on the test case of turbulent flat plate and bump in channel whose numerical results are available in NASA Turbulence Modeling Resource database.

Keywords: aerodynamics, system of Favre averaged Navier-Stokes equations, Spalart-Allmaras turbulence model, $k-\omega$ SST turbulence model, finite volume method, AUSM scheme, linear reconstruction, explicit Runge-Kutta method, turbulent flat plate, bump in channel

Obsah

Úvod	6
1 Matematický model turbulentního proudění stlačitelných tekutin	7
1.1 Středování systému Navierových-Stokesových rovnic	8
1.2 Uzavření systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic	10
1.3 Modely turbulence	12
1.3.1 Model Spalart-Allmaras	13
1.3.2 Model $k-\omega$ SST	15
1.3.3 Turbulentní mezní vrstva	18
2 Numerické řešení turbulentního proudění stlačitelných tekutin	20
2.1 Metoda konečných objemů	24
2.1.1 Aproximace nevazkého numerického toku	27
2.1.2 Zvýšení řádu přesnosti AUSM schématu	29
2.1.3 Aproximace vazkého numerického toku	30
2.1.4 Aproximace zdrojového členu	33
2.2 Metoda časové diskretizace	34
2.3 Okrajové podmínky	36
2.4 Úprava numerického schématu pro model $k-\omega$ SST	38
3 Verifikace implementovaných modelů turbulence	43
3.1 Turbulentní proudění okolo rovné desky	43
3.1.1 Diskretizace výpočtové oblasti	45
3.1.2 Model Spalart-Allmaras	48
3.1.3 Model $k-\omega$ SST	50
3.2 Turbulentní proudění okolo zakřivené stěny	54
3.2.1 Diskretizace výpočtové oblasti	55
3.2.2 Model Spalart-Allmaras	57
3.2.3 Model $k-\omega$ SST	58
3.3 Porovnání modelu Spalart-Allmaras a $k-\omega$ SST	61
Závěr	63
Literatura	64
A Model Spalart-Allmaras v bezrozměrném tvaru	66
B Model $k-\omega$ SST v bezrozměrném tvaru	67

Úvod

Motivací diplomové práce je detailně proniknout do způsobu modelování turbulentního proudění, které je stále aktuálním problémem. Turbulentní proudění se na rozdíl od laminárního vyznačuje svou náhodností v čase i prostoru, kdy se rychlost jednotlivých částic tekutiny nepravidelně mění a proudění tedy není obecně stacionární. S komplexitou turbulentního proudění se pojí i přístup k jeho modelování a následnému numerickému řešení. Modelování turbulence je klíčovou otázkou v oblasti výpočtové dynamiky tekutin (CFD, *Computational Fluid Dynamics*), jelikož velká většina inženýrských problémů proudění vykazuje turbulentní charakter.

Předkládaná diplomová práce se věnuje základnímu přístupu k matematickému modelování turbulentního proudění, kterým je popis pomocí středovaného systému Navierových-Stokesových rovnic. Cílem práce je popsat vybrané modely turbulence, navrhnout algoritmy pro jejich řešení, implementovat je do vlastního vyvíjeného softwaru pro řešení turbulentního proudění stlačitelné newtonovské tekutiny a následně provést numerické výpočty na zvolených testovacích úlohách, jejichž výsledky jsou dostupné v databázi *NASA Turbulence Modeling Resource*, a verifikovat tak správnost navržených algoritmů.

Diplomová práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole je uveden nelineární systém Navierových-Stokesových rovnic a stručně je naznačeno jeho středování podle Favra. Jelikož proces středování má za následek přítomnost nových členů v matematickém modelu, je zde uveden i způsob aproximace jednotlivých členů. Uzavření středovaného systému je dosaženo pomocí modelů turbulence, přičemž v této práci jsou uvažovány jednorovnicový model Spalart-Allmaras a dvourovnicový model $k-\omega$ SST. Oba zmíněné turbulentní modely jsou detailně popsány v závěru kapitoly.

Druhá kapitola se již věnuje samotnému numerickému řešení turbulentního proudění ve 2D. Je zde formulován výchozí tvar rovnic v bezrozměrném tvaru, přičemž zvláštní pozornost je věnována odvození bezrozměrného tvaru turbulentního modelu Spalart-Allmaras. Pro prostorovou diskretizaci systému rovnic byla zvolena metoda konečných objemů formulovaná pro strukturovanou čtyřúhelníkovou síť. Je zde popsáno AUSM schéma založené na myšlence štěpení toku, jehož pomocí je aproximován nevazký numerický tok hranicí kontrolního objemu, a způsob lineární rekonstrukce řešení užitý pro zvýšení prvního řádu přesnosti schématu v prostoru. Dále je uvedena aproximace vazkého numerického toku a zdrojového členu. Pro časovou diskretizaci je popsána běžně užívaná explicitní dvoustupňová Rungeova-Kuttova metoda druhého řádu přesnosti spolu s diskuzí možných úskalí této metody při řešení turbulentního proudění. Důležitou součástí je způsob implementace okrajových podmínek, který je zahrnutý v samostatné podkapitole. Na závěr kapitoly je uvedena úprava numerického schématu pro případ turbulentního modelu $k-\omega$ SST.

Předmětem čtvrté kapitoly je verifikace vlastního vyvinutého řešiče turbulentního proudění stlačitelné newtonovské tekutiny implementovaného v prostředí MATLAB. Jsou zde uvažovány dva testovací příklady z databáze *NASA Turbulence Modeling Resource*, a sice turbulentní proudění v okolí rovné desky a zakřivené stěny. Diplomová práce je doplněna dvěma přílohami, kde jsou přehledně uvedeny modely turbulence Spalart-Allmaras a $k-\omega$ SST v bezrozměrném tvaru.

Kapitola 1

Matematický model turbulentního proudění stlačitelných tekutin

K popisu proudění stlačitelné vazké newtonovské tekutiny užíváme systém Navierových-Stokesových rovnic. Ten sestává z nelineárních parciálních diferenciálních rovnic odvozených ze zákona zachování hmotnosti, hybnosti a celkové energie. Uvažujme nějakou omezenou oblast $\Omega \in \mathbb{R}^3$, která je pevná v prostoru. Při zanedbání objemových sil působících na tekutinu můžeme konzervativní systém Navierových-Stokesových rovnic v diferenciálním tvaru, popisující proudění stlačitelné vazké newtonovské tekutiny ve zvolené oblasti Ω , zapsat ve formě, [28],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho e u_j + p u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i + q_j), \quad (1.3)$$

kde $t \in (0, \infty)$ je čas, u_i , $i = 1, 2, 3$, je i -tá složka vektoru rychlosti \mathbf{u} odpovídající kartézské souřadnici x_i vektoru prostorových souřadnic $\mathbf{x} \in \Omega$, ρ je hustota tekutiny, p je tlak a δ_{ij} je Kroneckerovo delta. Celková měrná energie systému e je dána vztahem

$$e = \epsilon + \frac{1}{2} u_i u_i, \quad (1.4)$$

kde ϵ je měrná vnitřní energie. V rovnici (1.3) představuje q_j j -tou složku tepelného toku. Dle Fourierova zákona pro ni platí

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (1.5)$$

kde T je termodynamická teplota a λ je součinitel tepelné vodivosti tekutiny. Tenzor vazkých napětí lze pro newtonovskou tekutinu zapsat ve tvaru

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \quad (1.6)$$

Z kinetické teorie plynů vyplývá, že dynamická viskozita tekutiny μ je funkcí termodynamické teploty T . Tyto dvě veličiny dává do souvislosti Sutherlandův vztah, který bývá často využíván k určení dynamické vazkosti, [32],

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S}, \quad (1.7)$$

kde μ_0 je dynamická vazkost při referenční teplotě T_0 a T_S je tzv. efektivní teplota, nazývaná také Sutherlandova konstanta. Pro vzduch se uvádí $T_S = 110.4$ [K], $\mu_0 = 1.716 \cdot 10^{-5}$ [kg · m⁻¹ · s⁻¹] a $T_0 = 273.15$ [K]. Dále můžeme definovat kinematickou viskozitu ν , která je s dynamickou viskozitou vázána vztahem $\nu = \mu/\rho$.

Výše uvedený systém rovnic (1.1) - (1.3) představuje soustavu pěti rovnic pro šest neznámých, kterými jsou hustota ρ , složky vektoru rychlosti \mathbf{u} , tlak p a termodynamická teplota T . K systému rovnic je tedy nutné připojit vhodný konstitutivní vztah a tímto způsobem ho uzavřít. Protože stlačitelnou tekutinu lze považovat za termodynamický systém, doplníme tento systém rovnic o stavovou rovnici, která má obecně tvar $p = p(\rho, T)$ a definuje termodynamické vlastnosti uvažované tekutiny. V této práci budeme uvažovat stavovou rovnici ideálního plynu, která je dána vztahem

$$\frac{p}{\rho} = rT, \quad (1.8)$$

kde r je měrná plynová konstanta. Pro vzduch je $r = 287$ [J · kg⁻¹ · K⁻¹].

Systém Navierových-Stokesových rovnic (1.1) - (1.3) doplněný stavovou rovnicí (1.8) popisuje obecně laminární i turbulentní proudění stlačitelné vazké newtonovské tekutiny bez nutnosti dalších informací. Pro numerické řešení turbulentního proudění je ovšem použití systému v tomto tvaru značně limitováno. Přístup, který tohoto tvaru využívá, se nazývá přímá numerická simulace (DNS - *Direct Numerical Simulation*). Aby takto bylo možné zachytit i ty nejmenší změny veličin proudového pole, které jsou pro turbulentní proudění typické, je nutné výrazně redukovat jednak velikost časového kroku numerické metody, jelikož turbulence je ve své podstatě vždy nestacionárním jevem, a dále velikost buněk sítě, na které je výpočet prováděn. Tato metoda tedy zřejmě klade značné časové i paměťové nároky na výpočetní techniku, čímž je prozatím vyloučeno její běžné užívání pro komplexní průmyslové aplikace. Pro jednoduché problémy proudění lze ovšem DNS použít a na výsledky nahlížet jako na potencionální zdroj experimentálních dat, jež nejsou zatíženy chybou měření. Detailní popis přímé numerické simulace lze nalézt např. v [20].

Dalším přístupem, který se již používá v hojnější míře, je tzv. simulace velkých vírů (LES - *Large Eddy Simulation*). Zatímco velké víry jsou zde řešeny přímo, malé víry jsou modelovány tzv. *subgrid* modelem. Přehled LES modelů je uveden např. v práci [5].

Třetí a zatím stále nejpoužívanější možností je ryze statistický přístup. Ten je podle Reynoldse, [23], založen na rozložení okamžitých hodnot veličin proudového pole na střední a flukтуаční část s následným řešením systému rovnic formulovaným pro střední hodnoty veličin. Jak dále uvidíme, pro řešení středovaných Navierových-Stokesových rovnic (RANS *Reynolds Averaged Navier-Stokes equations* nebo FANS - *Favre Averaged Navier-Stokes equations*) je nutné formulovat ještě tzv. model turbulence. V této práci se budeme věnovat modelování turbulentního proudění stlačitelné newtonovské tekutiny právě pomocí středovaného systému Navierových-Stokesových rovnic.

Poznamenejme ještě, že kromě těchto tří základních přístupů se někdy užívají i tzv. hybridní modely, které jednotlivé přístupy kombinují. Jsou to nejčastěji DES (*Detached Eddy Simulation*), [25], nebo DDES (*Delayed Detached eddy Simulation*), [26], které propojují výhody RANS a LES.

1.1 Středování systému Navierových-Stokesových rovnic

Jelikož se turbulence skládá z náhodných fluktuací proudových veličin, nabízí se k jejímu popisu využití statistického přístupu. Uvažujme obecnou skalární funkci $f = f(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, která představuje libovolnou veličinu proudového pole. Dle Reynoldse, [23], je možné kteroukoli proměnnou proudového pole vyjádřit součtem

její střední a flukтуаční složky. Tedy pro funkci f můžeme psát

$$f(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{x}, t) + f'(\mathbf{x}, t), \quad (1.9)$$

přičemž střední hodnota \bar{f} na časovém úseku \mathcal{T} je definována vztahem

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_t^{t+\mathcal{T}} f(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Doba \mathcal{T} by měla být výrazně delší než je maximální perioda fluktuací \mathcal{T}_1 a zároveň značně kratší než doba \mathcal{T}_2 , během které se projevují nestacionarity proudu, jejichž původ nesouvisí přímo s turbulencí, tj. $\mathcal{T}_1 \ll \mathcal{T} \ll \mathcal{T}_2$, [31].

Při aplikaci tohoto středování na systém Navierových-Stokesových rovnic pro *stlačitelné* proudění se v rovnicích objevují korelace fluktuací hustoty a rychlosti, které značně komplikují jeho řešení, [22]. Například zákon zachování hmotnosti po středování dostává podobu

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j + \overline{\rho' u'_j}) = 0, \quad (1.11)$$

která jednak obsahuje člen, jenž má formálně stejný tvar jako odpovídající člen v původní rovnici kontinuity (1.1), a dále výraz $\overline{\rho' u'_j}$, který vyjadřuje vliv turbulence na proudění, již nemá analogii se členy v původní rovnici a je obtížné ho aproximovat.

Ze zmíněných důvodů zavedl Favre hmotnostně podmíněné středování, kdy střední hodnota \tilde{f} je definována vztahem

$$\tilde{f} = \frac{1}{\bar{\rho} \mathcal{T}} \int_t^{t+\mathcal{T}} \rho(\mathbf{x}, \tau) f(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (1.12)$$

a pro funkci f píšeme

$$f(\mathbf{x}, t) = \tilde{f}(\mathbf{x}, t) + f''(\mathbf{x}, t). \quad (1.13)$$

Tohoto středování se s výhodou využívá právě pro řešení stlačitelného proudění. Uvědomíme-li si, že definiční vztah (1.12) lze pro případ $f = u_i$ přepsat do tvaru

$$\bar{\rho} \tilde{u}_i = \overline{\rho u_i} \quad (1.14)$$

a že při Reynoldsově středování platí, [19],

$$\overline{\rho u_i} = \bar{\rho} \bar{u}_i + \overline{\rho' u'_i}, \quad (1.15)$$

dostaneme srovnáním s rovnicí (1.11) středovaný zákon zachování hmotnosti dle Favra ve tvaru

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0, \quad (1.16)$$

kde se již problematické korelace hustoty a rychlosti neobjevují a rovnice je formálně shodná s původní rovnicí kontinuity (1.1).

Pravidla středování podle Reynoldse i Favra byla podrobně rozebrána např. v pracích [31] a [19]. Zde uvedeme pouze finální tvar středovaného systému Navierových-Stokesových rovnic dle Favra v konzervativním tvaru. Poznamenejme, že při odvození se neuvažují fluktuace dynamické vazkosti μ , měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku c_p je považována za konstantu a veličiny ρ , p a q_j jsou středovány podle Reynoldse.

Středovaný zákon zachování hmotnosti je dán rovnicí (1.16). Středované rovnice zákona zachování hybnosti a celkové energie lze psát ve tvaru, [10],

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\sigma}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''} \right), \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{e}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{e} \tilde{u}_j + \bar{p} \tilde{u}_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{u}_i \tilde{\sigma}_{ij} + \overline{u_i'' \sigma_{ij}} \right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{q}_j + c_p \overline{\rho u_j'' T''} + \tilde{u}_i \overline{\rho u_i'' u_j''} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''} \right), \end{aligned} \quad (1.18)$$

které doplníme středovanou stavovou rovnicí pro ideální plyn

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = r \tilde{T}. \quad (1.19)$$

Pro střední hodnotu j -té složky tepelného toku \bar{q}_j lze s využitím bezrozměrného Prandtlova čísla $Pr = c_p \mu / \lambda$, které se obvykle volí $Pr = 0.72$, psát

$$\bar{q}_j = -\lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}. \quad (1.20)$$

Vidíme, že uvedený systém rovnic (1.16) - (1.19) je analogický k původnímu systému Navierových-Stokesových rovnic (1.1) - (1.3), ale navíc obsahuje různé korelační členy. Ty představují další neznámé, které je nutné v zájmu numerického řešení systému vhodně aproximovat či modelovat.

1.2 Uzavření systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic

Podíváme-li se na středovaný zákon zachování hybnosti (1.17), pak s výjimkou nahrazení okamžitých veličin jejich střednými hodnotami se liší od původní rovnice (1.2) pouze přítomností členu $-\overline{\rho u_i'' u_j''}$. Tento člen představuje časově středovaný přenos hybnosti v tekutině vlivem turbulence a označuje se jako tenzor Reynoldsových napětí. Dále ho budeme označovat

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i'' u_j''}. \quad (1.21)$$

Tenzor druhého řádu τ_{ij} je symetrický a má tedy šest vzájemně nezávislých prvků. Procesem středování jsme tak počet neznámých vystupujících v zákonu zachování hybnosti navýšili o šest veličin, kterými jsou jednotlivá Reynoldsova napětí. Současně jsme ovšem neobdrželi rovnice, kterými by bylo možné systém rovnic doplnit a tím ho uzavřít.

Ačkoliv je možné pro každé Reynoldsovo napětí odvodit exaktní diferenciální rovnici, např. [31], nelze tyto rovnice přímo použít, jelikož se v nich objevují další neznámé korelace veličin proudového pole. Možným způsobem, jak uzavřít daný systém rovnic, je užití tzv. Boussinesqovy hypotézy, [22]. Ta je založená na analogii mezi molekulárním a turbulentním přenosem hybnosti. Tenzor vazkých napětí vyjádřený prostřednictvím středních hodnot složek rychlosti můžeme psát ve tvaru

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \quad (1.22)$$

Definujeme-li turbulentní kinetickou energii k vztahem

$$k = \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho u_k'' u_k''}}{\bar{\rho}}, \quad (1.23)$$

pak na základě analogie s rovnicí (1.22) vyjádříme tenzor Reynoldsových turbulentních napětí předpisem

$$\tau_{ij} = \mu_T \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_T \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}, \quad (1.24)$$

kde μ_T je turbulentní dynamická vazkost. V porovnání s molekulární viskozitou, μ , která je vlastností tekutiny, je turbulentní viskozita vlastností samotného proudění. Poslední člen na pravé straně rovnice (1.24) se často zanedbává v případě subsonického proudění. Uvědomme si, že samotné zavedení turbulentní vazkosti neřeší problém uzavření soustavy rovnic, ale slouží pouze k nahrazení neznámých složek tenzoru turbulentního napětí jinou neznámou veličinou, kterou je ovšem skalár. Dále uvidíme, že pro určení turbulentní viskozity je nutné k systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic připojit jistý model turbulence, kterým je buď algebraický vztah nebo jedna či více parciálních diferenciálních rovnic.

Ve středovaném zákonu zachování celkové energie (1.18) se kromě Reynoldsova napětí dále objevují členy $\overline{u_i'' \sigma_{ij}}$, $c_p \overline{\rho u_j'' T''}$ a $1/2 \overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''}$. Výraz $c_p \overline{\rho u_j'' T''}$ představuje turbulentní tepelný tok a nejčastěji se analogicky k molekulárnímu tepelnému toku (1.20) aproximuje prostřednictvím

$$\overline{c_p \rho u_j'' T''} = - \frac{c_p \mu_T}{\text{Pr}_T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}, \quad (1.25)$$

kde Pr_T je turbulentní Prandtlovo číslo, pro které se obvykle používá konstantní hodnota. Konkrétně pro vzduch se uvádí $\text{Pr}_T = 0.90$, [10]. Další dva výrazy $\overline{u_i'' \sigma_{ij}}$ a $1/2 \overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''}$, jež odpovídají molekulární difúzi a turbulentnímu přenosu turbulentní kinetické energie, se u subsonického proudění opět často zanedbávají. Lze je ovšem aproximovat vztahem

$$\overline{u_i'' \sigma_{ij}} - \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''} = \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (1.26)$$

kde σ_k je konstanta.

Pomocí výše uvedených aproximací přepíšeme systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic dle Favra do tvaru

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\sigma}_{ij} - \tau_{ij}), \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{e}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{e} \tilde{u}_j + \bar{p} \tilde{u}_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{u}_i (\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}) + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.29)$$

kde γ je Poissonova adiabatická konstanta, která má pro vzduch hodnotu $\gamma = 1.4$. Zde jsme upravili výrazy se střední hodnotou termodynamické teploty, jelikož s využitím Mayerova vztahu a středované stavové rovnice (1.19) platí, [28],

$$c_p \tilde{T} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}. \quad (1.30)$$

Vzhledem k tomu, že střední hodnota celkové měrné energie \tilde{e} je dána předpisem, [31],

$$\tilde{e} = \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i + k \quad (1.31)$$

a pro střední měrnou vnitřní energii $\tilde{\epsilon}$ platí, [28],

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \quad (1.32)$$

lze středovanou stavovou rovnicí přepsat do tvaru

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \left(\bar{\rho} \tilde{\epsilon} - \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i - \bar{\rho} k \right). \quad (1.33)$$

Jak dále uvidíme, jedná se o tvar, který lze s výhodou využít při numerickém řešení. Často se obdobně jako u výrazů (1.24) a (1.26) zanedbává člen obsahující turbulentní kinetickou energii za předpokladu, že platí

$$k \ll \tilde{\epsilon} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i. \quad (1.34)$$

Jedinou veličinou v rovnicích (1.27) - (1.29), jejíž specifikace ještě nebyla uvedena, je nyní jen turbulentní dynamická vazkost μ_T . Tu je nutné určit na základě jednoho z turbulentních modelů, o kterých pojednávají následující odstavce.

1.3 Modely turbulence

Turbulentní model představuje soubor vztahů a rovnic, které dávají do souvislosti střední hodnoty veličin proudového pole s korelacemi jejich fluktuací a tím uzavírají systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic. V modelech turbulence se vyskytuje řada konstant či funkcí, které vyplývají z experimentů na jednoduchých problémech proudění nebo mají částečně empirický charakter. Z tohoto důvodu je použití daného modelu turbulence značně limitováno konkrétním typem úlohy a nelze tedy každý model považovat za univerzální.

Účelem turbulentních modelů je určit Reynoldsova napětí (1.21), což může být provedeno v zásadě třemi způsoby. Nejjednodušším přístupem je již zmíněná Boussinesquova hypotéza, přičemž jsou Reynoldsova napětí analogicky k vazkým napětím dána vztahem (1.24) a problém je převeden na určení turbulentní viskozity μ_T . Modely turbulence poté dále dělíme v závislosti na tom, kolik parciálních diferenciálních rovnic vystupuje v konkrétním modelu. Modely, ve kterých je turbulentní vazkost určována pouze ze středních hodnot veličin proudového pole, se označují jako algebraické či nularovnicové. V důsledku své jednoduchosti nejsou schopné postihnout historii turbulence a při použití na komplexních oblastech jsou značně nepřesné. Na druhou stranu mohou být užitečné pro jednoduché problémy proudění nebo v počáteční fázi výpočtu, kdy použití složitějšího modelu může vést k potížím se stabilitou výpočtu. Nejznámějšími zástupci této skupiny jsou modely Cebeci-Smith či Baldwin-Lomax, [19].

Jednorovnicové a dvourovnicové modely jsou kromě algebraických vztahů tvořeny příslušným počtem transportních rovnic pro veličiny, pomocí nichž je definována μ_T . V případě dvourovnicových modelů bývá touto veličinou nejčastěji turbulentní kinetická energie k spolu s turbulentní disipací ϵ (modely $k-\epsilon$) nebo měrnou rychlostí disipace ω (modely $k-\omega$). Přednosti modelů $k-\epsilon$, které dávají dobré výsledky ve volném proudě, a $k-\omega$, vyznačující se přesností v blízkosti stěny, byly skloubeny Menterem, [17, 18], při formulaci modelu $k-\omega$ SST (*Shear Stress Transport*), který se stal v inženýrských aplikacích velmi oblíbeným. Klasickým představitelem jednorovnicových modelů je model Spalart-Allmaras. V této práci se podrobněji zaměříme právě na poslední dva jmenované.

Všimněme si, že vztah pro Reynoldsova napětí (1.24) je lineární vzhledem k tenzoru rychlosti deformace $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$. Dalším způsobem, jak vyjádřit Reynoldsova napětí, je užití nelineárního vztahu, který lze obecně zapsat ve tvaru

$$\tau_{ij} = 2\mu_T \mathcal{F}(\dot{\epsilon}_{ij}, S_{ij}, \dots), \quad (1.35)$$

kde \mathcal{F} nelineární funkce vzhledem k tenzoru rychlosti deformace \dot{e}_{ij} , tenzoru vířivosti $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$ nebo dalším turbulentním veličinám. Metody využívající tohoto vztahu v kombinaci s některým dvourovnicovým modelem se označují jako ARSM nebo EARSM - (*Explicit Algebraic Reynolds Stress*, [30], a představují zjednodušení třetího nejkompaktnějšího přístupu, kterým je model RSM (*Reynolds Stress Model*), jenž spočívá v řešení transportních rovnic přímo pro jednotlivé složky tenzoru Reynoldsových napětí doplněných zpravidla transportní rovnicí pro specifickou rychlost disipace ω , [22].

1.3.1 Model Spalart-Allmaras

Model Spalarta a Allmarase, [27], je jednorovnicový model vytvořený zejména pro použití v aerodynamice např. pro obtékání profilů lopatek nebo obecně pro proudění v okolí stěn, kde dochází k tvorbě mezních vrstev. Naopak není příliš vhodný pro korektní zachycení volných smykových vrstev či odtržení mezní vrstvy, [31].

Modelování turbulence je zajištěno transportní rovnicí pro veličinu $\tilde{\nu}$, představující modifikovanou turbulentní viskozitu, která je svázána s dynamickou turbulentní viskozitou vztahem

$$\mu_T = \bar{\rho} \tilde{\nu} f_{v1}. \quad (1.36)$$

Modelová transportní rovnice se ve standardní verzi, [21], uvádí v následujícím nekonzervativním tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} - \left[c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \\ + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right], \end{aligned} \quad (1.37)$$

přičemž veličina \tilde{S} představuje modifikovanou velikost tenzoru vířivosti, která je definována vztahem

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad (1.38)$$

kde d je vzdálenost k nejbližšímu povrchu stěny a S je velikost tenzoru vířivosti, pro niž ve dvourozměrném proudění platí

$$S = \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right|. \quad (1.39)$$

Rovnice (1.37) připomíná svou strukturou rovnice středního proudu tím, že se v ní rovněž vyskytují členy představující lokální změnu, konvekci a difúzi. Navíc zde ovšem figurují zdrojové členy - první člen na pravé straně představuje produkci a druhý člen destrukci modifikované turbulentní vazkosti. Poslední člen na pravé straně je nekonzervativní výraz, jehož přítomnost nemá analytický původ, ale pochází z dvourovnicových modelů, kde mají obdobné výrazy pozitivní vliv na přesnost řešení, [27].

Funkce

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad \text{a} \quad f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}}, \quad (1.40)$$

kde

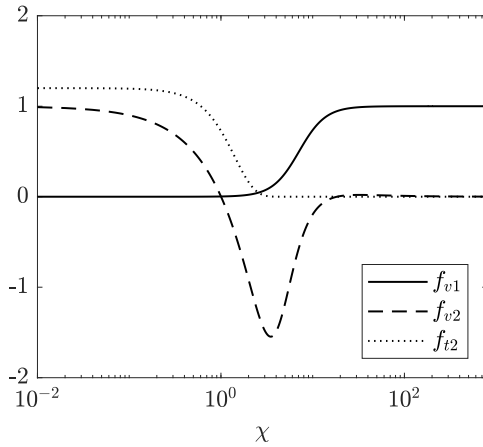
$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}, \quad (1.41)$$

zaručují správné chování modelu v různých částech mezní vrstvy. Pro vysoké hodnoty r je f_w konstantní, proto se často hodnota r shora omezuje např. konstantou 10, [27]. Funkce f_{t2} je dána předpisem

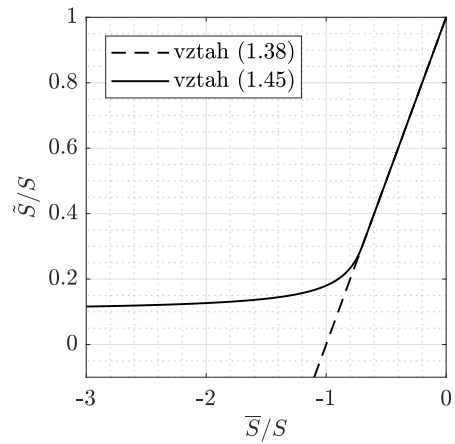
$$f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2) \quad (1.42)$$

a ve standardní verzi modelu bývá často zanedbávána s tím, že její přítomnost nemá vliv na řešení, [21]. Funkce f_{t2} má totiž spojitost s tzv. *trip* členem $f_{t1}\Delta U^2$, který se v základní verzi modelu objevuje na pravé straně rovnice (1.37). S těmito členy je model Spalart-Allmaras schopen modelovat přechod z laminárního do turbulentního proudění. Praktické využití tohoto modelu je však omezené, jelikož ΔU představuje rozdíl mezi rychlostí v příslušném bodě proudového pole a rychlostí v poloze přechodu, která ale není apriori známá, [27]. Průběhy jednotlivých funkcí modelu v závislosti na parametru χ jsou zobrazeny na obr. 1. Konstanty vystupující v modelu mají následující hodnoty

$$\begin{aligned} c_{b1} &= 0.1355, & c_{b2} &= 0.622, & c_{w2} &= 0.3, & c_{w3} &= 2, & c_{v1} &= 7.1, \\ c_{t3} &= 1.2, & c_{t4} &= 0.5, & \sigma &= \frac{2}{3}, & \kappa &= 0.41, & c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.43)$$



Obr. 1: Průběh funkcí f_{v1} , f_{v2} a f_{t2}



Obr. 2: Původní a upravená definice \tilde{S}

Ve fyzikálně přípustných situacích by modifikovaná velikost tenzoru vířivosti \tilde{S} měla být vždy kladná a neklesnout pod hodnotu $0.3S$. Toto omezení ale nemusí být pro \tilde{S} definovanou rovnicí (1.38) vždy splněno. Uvedená definice připouští nekladné hodnoty \tilde{S} i pro nenulové S , jelikož sama funkce f_{v2} je na určitém intervalu χ záporná, obr. 1. Záporná hodnota \tilde{S} by narušovala průběh ostatních modelových funkcí, proto Allmaras, Spalart a Johnson představili v [1] upravenou definici \tilde{S} , která je identická s (1.38) pro $\tilde{S} > 0.3S$, ale zůstává kladná pro všechny hodnoty velikosti tenzoru vířivosti S . Nejprve definujeme

$$\bar{S} = \frac{\tilde{v}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad (1.44)$$

a poté určíme \tilde{S} na základě vztahu

$$\tilde{S} = \begin{cases} S + \bar{S} & \text{pro } \bar{S} \geq -c_{v2}S, \\ S + \frac{S(c_{v2}^2 S + c_{v3}\bar{S})}{(c_{v3} - 2c_{v2})S - \bar{S}} & \text{jinak,} \end{cases} \quad (1.45)$$

kde $c_{v2} = 0.7$ a $c_{v3} = 0.9$. Původní a upravený průběh \tilde{S} v závislosti na \bar{S} je v poměru k velikosti tenzoru vířivosti S vyneseno na obr. 2.

Allmaras a kol. dále uvádějí, [1], že model v nekonzervativním tvaru (1.37) je obecně platný jak pro stlačitelné, tak pro nestlačitelné proudění a měl by být uvažován jako standardní. Vzhledem k tomu, že středovaný systém Navierových-Stokesových rovnic jsme zde

uváděli v konzervativním tvaru, což dále využijeme při výběru vhodné numerické metody pro řešení, je výhodné přeformulovat rovněž model Spalart-Allmaras do konzervativního tvaru a k řešení transportní rovnice pro $\tilde{\nu}$ poté použít stejný přístup jako v případě rovnic středního proudu. Pro převedení rovnice (1.37) do konzervativního tvaru sečteme transportní rovnici pro $\tilde{\nu}$ vynásobenou $\bar{\rho}$ a středovaný zákon zachování hmotnosti (1.16) vynásobený $\tilde{\nu}$,

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} + \tilde{\nu} \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) \right) &= \bar{\rho} c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} - \\ - \bar{\rho} \left[c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{\bar{\rho}}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Levou stranu této rovnice lze díky pravidlu o derivaci součinu funkcí přepsat do tvaru

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \tilde{\nu} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} + \tilde{\nu} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{\nu} \tilde{u}_j). \quad (1.47)$$

Stejným způsobem můžeme rozepsat výraz

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) = \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j}, \quad (1.48)$$

přičemž první člen na pravé straně rovnice se vyskytuje i v rovnici (1.46). Na základě dvou předchozích vztahů upravíme (1.46) do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{\nu} \tilde{u}_j) &= c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \bar{\rho} \tilde{\nu} - \bar{\rho} \left[c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \\ + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + \bar{\rho} c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} - (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \right], \end{aligned} \quad (1.49)$$

což je transportní rovnice modelu Spalart-Allmaras v konzervativním tvaru, kterou s výhodou využijeme při numerickém řešení.

Okrajová podmínka pro modifikovanou turbulentní vazkost se ve volném proudu volí $\tilde{\nu}_\infty = (3 \div 5) \nu_\infty$, kde symbol ∞ značí hodnotu ve volném proudu. Na pevné nepropustné stěně se předepisuje podmínka $\tilde{\nu} = 0$, [1].

1.3.2 Model k - ω SST

Dvourovnicové modely nejčastěji představují transportní rovnici pro turbulentní kinetickou energii k [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$] a veličinu, která vyjadřuje turbulentní délkové měřítko. Zvolíme-li za tuto veličinu turbulentní disipaci ε [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$], která představuje rychlost změny turbulentní kinetické energie na tepelnou energii, dostáváme model k - ε . Takový model je v základní verzi použitelný pouze v dostatečné vzdálenosti od obtékané stěny, kde je vysoký poměr turbulentní a molekulární vazkosti μ_T/μ . V těsné blízkosti stěny jsou více tlumeny fluktuace rychlosti ve směru normály ke stěně a z tohoto důvodu zde nemá turbulence izotropní charakter, a sice ani v nejmenších vírech, kde probíhá disipace turbulentní energie, což je v rozporu s odvozením konstant vystupujících v rovnici pro ε , [22]. Pro řešení tohoto problému existuje několik přístupů, kterým je například úprava pro nízká Reynoldsova čísla, kde se zavádí tlumící funkce a přídatné členy do definice turbulentní vazkosti a transportních rovnic pro k a ε , [19].

Wilcox, [31], ze zmíněných důvodů použil pro určení turbulentního délkového měřítko specifickou rychlost disipace $\omega = \varepsilon/k$ [s^{-1}], jejíž průběh v blízkosti stěny odstraňuje nevýhody modelu k - ε . Základní verze modelu k - ω tak může být integrována až k povrchu

stěny bez dalších úprav. Menter dále v práci [16] ukázal, že model $k-\omega$ vykazuje značnou citlivost na zadání okrajové podmínky pro ω ve volném proudu, na základě čehož navrhl dva dvouvrstvé modely, [17, 18], které kombinují přednosti modelu $k-\omega$ u stěny (zachování přesnosti a robustnosti) a $k-\varepsilon$ ve volném proudu (nezávislost modelu na volném proudu vně mezní vrstvy).

Menter transformoval standardní model $k-\varepsilon$ do formulace $k-\omega$ a představil přechodovou funkci F_1 , která je rovna jedné ve vnitřní části mezní vrstvy a v blízkosti její hranice postupně klesá k nulové hodnotě. Sloučení obou modelů je dosaženo právě pomocí přechodové funkce, kdy transportní rovnice Wilcoxova modelu $k-\omega$ jsou násobeny přímo funkcí F_1 a rovnice standardního $k-\varepsilon$ modelu funkcí $(1 - F_1)$. Po sečtení takto upravených rovnic dostáváme transportní rovnice pro k a ω v konzervativním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}k\tilde{u}_j) = P - \beta^* \bar{\rho}\omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}\omega\tilde{u}_j) &= \frac{\gamma_\omega}{\nu_T} P - \beta \bar{\rho}\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \\ &+ 2(1 - F_1) \frac{\bar{\rho}\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

kde P je produkční člen, pro který platí

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.52)$$

a τ_{ij} je tenzor Reynoldsových napětí daný rovnicí (1.24). Tento exaktní tvar produkčního členu bývá někdy z důvodu snazší implementace nahrazován aproximací

$$P = \mu_T S^2 - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}, \quad (1.53)$$

kde vystupuje velikost tenzoru vířivosti (1.39), [16]. Produkční člen s velikostí tenzoru vířivosti navíc u jednoduchých problémů proudění dosahuje takřka stejných hodnot jako exaktní produkční člen, [21]. Pro stlačitelné proudění při nízkých rychlostech je druhý člen na pravé straně rovnice (1.53) řádově menší než člen první a lze jej tedy v těchto případech zanedbat. Poznamenejme, že aproximace $\mu_T S^2$ je obdobou modifikace Kato-Lauder, [12], která se užívá u modelů $k-\varepsilon$ a kdy je produkční člen rovnice pro k aproximován výrazem $\mu_T \dot{\epsilon} S$, kde $\dot{\epsilon}$ je velikost tenzoru rychlosti deformace. Obecně se doporučuje, [17], užívat pro produkční člen v transportní rovnici pro k limiter v následujícím tvaru

$$\tilde{P}_k = \min(P, 20\beta^* \bar{\rho}\omega k), \quad (1.54)$$

který zabraňuje nárůstu turbulentní kinetické energie v okolí stagnačních bodů omezením na dvacetinásobek její destrukce.

Modelové konstanty jsou určovány analogicky k odvození transportních rovnic ze vztahu

$$[\sigma_k \quad \sigma_\omega \quad \beta]^\top = F_1 [\sigma_k \quad \sigma_\omega \quad \beta]_1^\top + (1 - F_1) [\sigma_k \quad \sigma_\omega \quad \beta]_2^\top, \quad (1.55)$$

kde dolní index 1, resp. 2, označuje konstanty ve Wilcoxově modelu $k-\omega$

$$\sigma_{k1} = 0.5, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075, \quad (1.56)$$

resp. v transformovaném modelu $k-\varepsilon$

$$\sigma_{k2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828. \quad (1.57)$$

Koeficienty κ , resp. β^* , mají konstantní hodnoty 0.41, resp. 0.09, a γ_ω je definováno pomocí

$$\gamma_\omega = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma_\omega \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}. \quad (1.58)$$

Poslední člen v transportní rovnici pro ω (1.51) pochází z transformované rovnice pro ε a označuje se jako příčná difúze. Přítomnost tohoto členu způsobuje, že model není citlivý na hodnoty ω ve volném proudu, [6]. Přechodová funkce je dána vztahem

$$F_1 = \text{tgh}(\Gamma_1^4), \quad \text{kde} \quad \Gamma_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{\omega d^2} \right), \frac{4\bar{\rho}\sigma_\omega 2k}{\text{CD}_{k\omega} d^2} \right]. \quad (1.59)$$

Veličina $\text{CD}_{k\omega}$ v definici Γ_1 představuje kladnou část členu příčné difúze

$$\text{CD}_{k\omega} = \max \left(2\bar{\rho}\sigma_\omega 2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (1.60)$$

a d je minimální vzdálenost k nejbližšímu povrchu stěny.

Jak již bylo řečeno, navrženy byly dva dvouvrstvé modely. Oba modely jsou si velice podobné. Zásadním rozdílem je však definice turbulentní vazkosti. V základním modelu k - ω BSL (*Baseline*) je turbulentní vazkost určována na základě klasického vztahu $\mu_T = \bar{\rho}k/\omega$. Menter dále na základě BSL modelu formuloval model k - ω SST (*Shear Stress Transport*). Dle Bradshawova předpokladu je turbulentní smykové napětí v převážné části mezní vrstvy úměrné turbulentní kinetické energii, tj.

$$\tau = -\rho \overline{u''v''} = a_1 \rho k, \quad (1.61)$$

kde $a_1 = 0.31$. Klasické formulace turbulentní vazkosti však tuto vazbu nerespektují, smykové napětí je v konvenčních dvourovnicových modelech určováno na základě vztahu $\tau = \mu_T S$ a tedy neberou v úvahu vliv transportu turbulentního smykového napětí, [22]. Dochází tak k nadhodnocení μ_T , a to zejména při proudění s nepříznivým tlakovým gradientem, [6, 16]. Podstatou SST modelu je omezení nadměrných hodnot turbulentního smykového napětí pomocí upravené formulace turbulentní vazkosti ve tvaru

$$\mu_T = \frac{\bar{\rho} a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} = \min \left(\frac{\bar{\rho} k}{\omega}, \frac{a_1 \bar{\rho} k}{SF_2} \right). \quad (1.62)$$

Funkce F_2 slouží k zabránění aktivace SST limiteru ve volných smykových vrstvách, jelikož její průběh je podobný funkci F_1 s tím rozdílem, že F_2 začíná klesat k nule ve větší vzdálenosti od stěny než F_1 . Je definována vztahem

$$F_2 = \text{tgh}(\Gamma_2^2), \quad \text{kde} \quad \Gamma_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{\omega d^2} \right). \quad (1.63)$$

Modelové konstanty jsou v případě SST modelu stejné jako u BSL s výjimkou σ_{k1} , která zde má hodnotu 0.85.

Menter, [18], navrhuje ve volném proudu okrajové podmínky pro k a ω ve tvaru

$$\omega_\infty = (1 \div 10) \frac{u_\infty}{L}, \quad k_\infty = 10^{-(2 \div 5)} \nu_\infty \omega_\infty, \quad (1.64)$$

kde L je přibližná délka výpočetní oblasti. Definice okrajových podmínek ve volném proudu se ale často různí. Např. Hellsten v práci [6] uvažuje L jako charakteristickou délku. Mnohdy se také hodnoty k_∞ a ω_∞ předepisují pomocí intenzity turbulence I , [3], následovně

$$k_\infty = \frac{3}{2} (u_\infty I)^2, \quad \omega_\infty = (\beta^*)^{-\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{k_\infty}}{L}. \quad (1.65)$$

Na pevné nepropustné stěně se všechny turbulentní veličiny kromě ω nastavují na nulovou hodnotu. Wilcox, [31], ukázal, že ω vyhovuje v blízkosti stěny vztahu

$$\omega \rightarrow \frac{6\nu}{\beta_1 d^2} \quad \text{pro} \quad d \rightarrow 0, \quad (1.66)$$

přičemž d je vzdálenost od stěny. Je tedy možné namísto klasické okrajové podmínky předepisovat tuto hodnotu na několika prvních bodech sítě u stěny. V práci [16] Menter představil okrajovou podmínku pro ω přímo na stěně ve tvaru

$$\omega = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 (\Delta d)^2}, \quad (1.67)$$

kteřá přináší dostatečně přesné výsledky a lze ji snáze implementovat. Symbol Δd označuje vzdálenost od stěny k nejbližšímu bodu sítě.

1.3.3 Turbulentní mezní vrstva

Měření ukazují, že v blízkosti stěny se střední rychlost mění se vzdáleností od stěny logaritmicky. Tato vlastnost se označuje jako zákon stěny (*Law of the Wall*), [31], a na základě rozměrové analýzy lze mezi bezrozměrnou vzdáleností od stěny y^+ a bezrozměrnou rychlostí u^+ , které jsou definovány vztahy

$$y^+ \equiv \frac{u_\tau y}{\nu} \quad \text{a} \quad u^+ \equiv \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \quad (1.68)$$

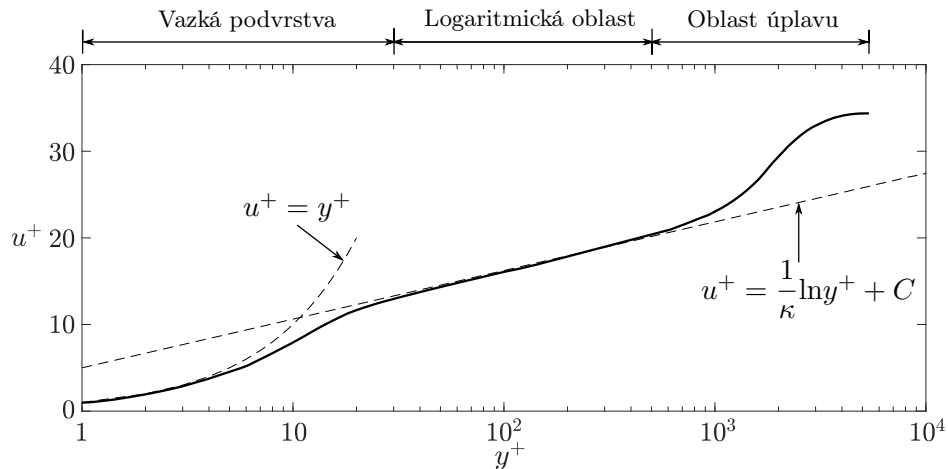
odvodit pro případ nestlačitelného proudění relaci

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C, \quad (1.69)$$

kde $\kappa = 0.41$ je Von Kármánova konstanta, která vystupuje i v uvedených modelech turbulence, C je integrační konstanta, která se pro hladké stěny volí $C = 5$, \bar{u} je rychlost rovnoběžná se stěnou a u_τ je tzv. třecí rychlost, kterou lze definovat pomocí smykového tření na stěně τ_w vztahem

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (1.70)$$

Skutečný profil rychlosti odpovídá zákonu stěny při překročení $y^+ \approx 30$, obr. 3. Tuto oblast překryvu, jež tvoří přechod mezi vnitřní a vnější částí turbulentní mezní vrstvy,



Obr. 3: Typický průběh rychlosti v turbulentní mezní vrstvě

nazýváme logaritmickou oblastí. V těsné blízkosti stěny ($y^+ < 5$) má proudění zcela laminární charakter, kde můžeme uvažovat $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ a mezi y^+ a u^+ poté platí lineární závislost $u^+ = y^+$.

Při numerickém řešení turbulentního proudění se nezávisle na volbě modelu turbulence požaduje v zájmu korektního zachycení tenké laminární vrstvy, aby vzdálenost prvního bodu sítě od stěny y_1 splňovala $y_1^+ < 1$. Pro proudění s rázovými vlnami se uvádí $y_1^+ < 0.3$, [31].

Tato podmínka poté vede na vysoce zahuštěnou síť v blízkosti povrchu stěny, čímž je navýšen počet elementů sítě a tedy i délka samotného numerického výpočtu. Je zde proto snaha počet prvků u stěny redukovat, a sice se za tímto účelem používají tzv. stěnové funkce (*wall functions*), které vycházejí ze zákona stěny a korektního průběhu rychlosti dosahují i pro $30 < y_1^+ < 200$ prostřednictvím úpravy okrajových podmínek pro turbulentní veličiny a rychlost na stěně. Tento přístup ovšem může vést k nesprávnému řešení, jelikož se apriori předpokládá přítomnost logaritmické oblasti, což zvláště při proudění s odtržením mezní vrstvy splněno není. Z tohoto důvodu se užívání stěnových funkcí obecně nedoporučuje a v této práci se tomuto přístupu dále věnovat nebudeme. Odvození a implementace stěnových funkcí pro námi uvažované turbulentní modely bylo popsáno např. v práci [11].

Kapitola 2

Numerické řešení turbulentního proudění stlačitelných tekutin

Pro popis turbulentního proudění stlačitelné newtonovské tekutiny jsme v první kapitole uvedli středovaný systém Navierových-Stokesových rovnic podle Favra ve tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j + p \delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} - \tau_{ij}), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e u_j + p u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_i (\sigma_{ij} + \tau_{ij}) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{p}{\rho} \right) \right], \quad (2.3)$$

který jsme doplnili modelem turbulence. Podrobně popíšeme realizaci numerického řešení pouze pro model Spalart-Allmaras, jehož transportní rovnice má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tilde{\nu} u_j) &= c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\nu} - \rho \left[c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + \rho c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} - (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde

$$\sigma_{ij} + \tau_{ij} = (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\mu + \mu_T) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (2.5)$$

dynamická viskozita μ je určována ze Sutherlandova vztahu

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S} \quad (2.6)$$

a předpis pro turbulentní vazkost má tvar $\mu_T = \rho \tilde{\nu} f_{v1}$. Rozdíly v implementaci modelu $k-\omega$ SST uvedeme v samostatné podkapitole, jelikož se principiálně jedná o řešení systému rovnic se stejnou strukturou. V uvedených rovnicích již veličiny proudového pole neoznačujeme čarou, resp. tildou z důvodu zjednodušení zápisu. Máme přitom na paměti, že se stále jedná o střední hodnoty příslušných veličin.

V této kapitole uvedeme možný způsob numerického řešení systému rovnic (2.1) - (2.4), přičemž budeme uvažovat dvourozměrné proudění. Středované Navierovy-Stokesovy rovnice budeme spolu s transportní rovnicí modelu Spalart-Allmaras řešit stejnou numerickou metodou a za tímto účelem turbulentní model přidružíme k systému rovnic popisujících

proudění, [15]. Často se ale volí právě opačný přístup, kdy rovnice středního proudu a turbulentního modelu jsou řešeny postupně a pro řešení je tedy možné využít odlišné numerické metody. Obecně lze říci, že řešení sduženého systému rovnic vede na rychleji konvergentní numerické schéma co se týče počtu iterací ale ne nutně pokud jde o čas CPU, [31].

V kartézské souřadnicové soustavě, kde $\mathbf{x} = [x, y]^T$ je vektor prostorových souřadnic, lze konzervativní systém vyjádřit v kompaktní vektorové formě

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^I(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^I(\mathbf{w})}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{f}^V(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^V(\mathbf{w})}{\partial y} + \mathbf{s}(\mathbf{w}), \quad (2.7)$$

kde vektor konzervativních proměnných $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$, kartézské složky nevazkého $\mathbf{f}^I(\mathbf{w})$, $\mathbf{g}^I(\mathbf{w})$ a vazkého $\mathbf{f}^V(\mathbf{w})$, $\mathbf{g}^V(\mathbf{w})$ konzervativního toku a zdrojový člen $\mathbf{s}(\mathbf{w})$ mají tvar

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \\ \rho \tilde{\nu} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^I(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \\ \rho \tilde{\nu} u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}^I(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \\ \rho \tilde{\nu} v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_5 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{f}^V(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} + \tau_{xx} \\ \sigma_{xy} + \tau_{xy} \\ (\sigma_{xx} + \tau_{xx})u + (\sigma_{xy} + \tau_{xy})v + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) \\ \frac{1}{\sigma} \rho (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{g}^V(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{yx} + \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} + \tau_{yy} \\ (\sigma_{yx} + \tau_{yx})u + (\sigma_{yy} + \tau_{yy})v + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) \\ \frac{1}{\sigma} \rho (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

přičemž nenulová složka vektoru zdrojových členů je dána jako

$$s_5 = c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\nu} - \rho \left[c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{\rho}{\sigma} c_{b2} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} \right) - \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (2.11)$$

a pro součet složek tenzoru vazkých a turbulentních napětí platí

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \tau_{xx} &= (\mu + \mu_T) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_{xy} + \tau_{xy} &= \sigma_{yx} + \tau_{yx} = (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \sigma_{yy} + \tau_{yy} &= (\mu + \mu_T) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Systém rovnic (2.7) budeme dále transformovat do bezrozměrného tvaru tak, že původní rozměrové veličiny vztáhneme k nějaké vhodné zvolené referenční hodnotě stejného

rozměru. Zvolme referenční hustotu $\rho_{\text{ref}} > 0$, referenční délku $\ell_{\text{ref}} > 0$, referenční rychlost $u_{\text{ref}} > 0$ a referenční dynamickou vazkost $\mu_{\text{ref}} > 0$. Bezrozměrné veličiny zavedeme následovně

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}}, \quad x^* = \frac{x}{\ell_{\text{ref}}}, \quad y^* = \frac{y}{\ell_{\text{ref}}}, \quad u^* = \frac{u}{u_{\text{ref}}}, \quad v^* = \frac{v}{u_{\text{ref}}}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}. \quad (2.13)$$

Turbulentní veličiny μ_T a $\tilde{\nu}$ a vzdálenost k nejbližší stěně d transformujeme do bezrozměrného tvaru zavedením

$$\mu_T^* = \frac{\mu_T}{\mu_{\text{ref}}}, \quad \tilde{\nu}^* = \frac{\tilde{\nu}}{\nu_{\text{ref}}} = \frac{\rho_{\text{ref}} \tilde{\nu}}{\mu_{\text{ref}}}, \quad d^* = \frac{d}{\ell_{\text{ref}}}, \quad (2.14)$$

kde ν_{ref} je referenční hodnota kinematické vazkosti. Ostatní bezrozměrné veličiny jsou definovány pomocí, [28],

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{p}{p_{\text{ref}}} = \frac{p}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}, & e^* &= \frac{e}{e_{\text{ref}}} = \frac{e}{u_{\text{ref}}^2}, \\ T^* &= \frac{T}{T_{\text{ref}}} = \frac{T r_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}}^2}, & t^* &= \frac{t}{t_{\text{ref}}} = \frac{u_{\text{ref}} t}{\ell_{\text{ref}}}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

kde r_{ref} je referenční hodnota měrné plynové konstanty, kterou bez újmy na obecnosti můžeme pro případ ideálního plynu zvolit jako $r_{\text{ref}} \equiv r = 287 \text{ [J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$.

Postup transformace do bezrozměrného tvaru ukážeme podrobně pouze pro rovnici modelu turbulence (2.4), jelikož se v dostupné literatuře často neuvádí. Nejprve transformujeme do bezrozměrného tvaru všechny vztahy a funkce, které vystupují v modelu. Převod provádíme prostým dosazením z definic bezrozměrných veličin v (2.13) - (2.15) za rozměrové veličiny v příslušném vztahu. Pro velikost tenzoru vířivosti S danou rovnicí (1.39) platí

$$S = \left| \frac{\partial(u_{\text{ref}} v^*)}{\partial(\ell_{\text{ref}} y^*)} - \frac{\partial(u_{\text{ref}} u^*)}{\partial(\ell_{\text{ref}} x^*)} \right| = \frac{u_{\text{ref}}}{\ell_{\text{ref}}} \left| \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right| \equiv \frac{u_{\text{ref}}}{\ell_{\text{ref}}} S^*. \quad (2.16)$$

Parametr χ zůstává po transformaci do bezrozměrného tvaru formálně shodný s původní definicí a stejně tak modelové funkce f_{v1} , f_{v2} a f_{t2} , jelikož závisí pouze na tomto parametru. Platí

$$\chi = \frac{\nu_{\text{ref}} \tilde{\nu}^*}{\nu_{\text{ref}} \nu^*} = \frac{\tilde{\nu}^*}{\nu^*} \equiv \chi^*. \quad (2.17)$$

Dosazením do vztahu pro modifikovanou velikost tenzoru vířivosti (1.38) obdržíme

$$\tilde{S} = \frac{u_{\text{ref}}}{\ell_{\text{ref}}} S^* + \frac{\nu_{\text{ref}} \tilde{\nu}^*}{\ell_{\text{ref}}^2 \kappa^2 d^{*2}} f_{v2}^* = \frac{u_{\text{ref}}}{\ell_{\text{ref}}} \left(S^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\tilde{\nu}^*}{\kappa^2 d^{*2}} f_{v2}^* \right) \equiv \frac{u_{\text{ref}}}{\ell_{\text{ref}}} \tilde{S}^*, \quad (2.18)$$

kde jsme zavedli referenční Reynoldsovo číslo, které je definováno vztahem.

$$\text{Re} = \frac{u_{\text{ref}} \ell_{\text{ref}}}{\nu_{\text{ref}}} = \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}} \ell_{\text{ref}}}{\mu_{\text{ref}}}. \quad (2.19)$$

Upravený vztah (1.45) pro zajištění pozitivitu \tilde{S} se formálně nezmění, jelikož v něm vystupují pouze veličiny S a \tilde{S} , resp. S^* a \tilde{S}^* , a bude tedy v bezrozměrném tvaru za předpokladu, že definujeme

$$\bar{S}^* = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\tilde{\nu}^*}{\kappa^2 d^{*2}} f_{v2}^* \quad (2.20)$$

Pro parametr r definující modelovou funkci g , resp. f_w , lze psát

$$r = \frac{\nu_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}} \ell_{\text{ref}}} \frac{\tilde{\nu}^*}{\tilde{S}^* \kappa^2 d^{*2}} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\tilde{\nu}^*}{\tilde{S}^* \kappa^2 d^{*2}} \equiv r^* \quad (2.21)$$

a samotné funkce g a f_w zůstávají opět formálně beze změny, jelikož závisí pouze na r . A konečně, transportní rovnici (2.4) přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{u_{\text{ref}} \rho_{\text{ref}} \nu_{\text{ref}}}{\ell_{\text{ref}}} \left[\frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* \tilde{\nu}^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\rho^* \tilde{\nu}^* u_j^*) \right] = \\
= \frac{u_{\text{ref}} \rho_{\text{ref}} \nu_{\text{ref}}}{\ell_{\text{ref}}} c_{b1} (1 - f_{t2}^*) \tilde{S}^* \rho^* \tilde{\nu}^* - \\
- \frac{\rho_{\text{ref}} \nu_{\text{ref}}^2}{\ell_{\text{ref}}^2} \left\{ \rho^* \left[c_{w1} f_w^* - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2}^* \right] \left(\frac{\tilde{\nu}^*}{d^*} \right)^2 + \right. \\
+ \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\rho^* (\nu^* + \tilde{\nu}^*) \frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial x_j^*} \right) + \rho^* c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial x_i^*} \frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial x_i^*} \right] - \\
\left. - \frac{1}{\sigma} (\nu^* + \tilde{\nu}^*) \frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial x_i^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial x_i^*} \right\}, \tag{2.22}
\end{aligned}$$

odkud po jednoduché úpravě obdržíme rovnici modelu Spalart-Allmaras vyjádřenou v bezrozměrném konzervativním tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* \tilde{\nu}^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\rho^* \tilde{\nu}^* u_j^*) = c_{b1} (1 - f_{t2}^*) \tilde{S}^* \rho^* \tilde{\nu}^* - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \rho^* \left[c_{w1} f_w^* - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2}^* \right] \left(\frac{\tilde{\nu}^*}{d^*} \right)^2 \right. \\
\left. + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\rho^* (\nu^* + \tilde{\nu}^*) \frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial x_j^*} \right) + \rho^* c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial x_i^*} \frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial x_i^*} - (\nu^* + \tilde{\nu}^*) \frac{\partial \tilde{\nu}^*}{\partial x_i^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial x_i^*} \right] \right\}. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Pro turbulentní viskozitu danou rovnicí (1.36) můžeme psát

$$\mu_T = \rho_{\text{ref}} \nu_{\text{ref}} \rho^* \tilde{\nu}^* f_{v1}^* \equiv \mu_{\text{ref}} \mu_T^*, \tag{2.24}$$

což je přímo definiční vztah (2.14) pro bezrozměrnou turbulentní vazkost. Obdobně můžeme pro bezrozměrnou hodnotu tlaku p^* psát

$$p^* = (\gamma - 1) \left[\rho^* e^* - \frac{1}{2} \rho^* (u^{*2} + v^{*2}) \right], \tag{2.25}$$

kde jsme zároveň zanedbali poslední člen na pravé straně rovnice (1.33) obsahující turbulentní kinetickou energii k , jelikož uvažujeme platnost vztahu (1.34).

V případě Sutherlandova vzorce (2.6), který udává vztah mezi dynamickou viskozitou a termodynamickou teplotou, dochází po převedení do bezrozměrného tvaru ke značnému zjednodušení, jelikož pro vyčíslení bezrozměrné dynamické vazkosti není nutná znalost konstant T_0 a μ_0 . Referenční dynamickou vazkost μ_{ref} při referenční teplotě T_{ref} můžeme zapsat pomocí Sutherlandova vztahu ve tvaru

$$\mu_{\text{ref}} = \mu_0 \left(\frac{T_{\text{ref}}}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + T_S}{T_{\text{ref}} + T_S}. \tag{2.26}$$

Bezrozměrnou dynamickou vazkost poté upravíme následovně

$$\begin{aligned}
\mu^* &= \frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}} = \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{\mu_0}{\mu_{\text{ref}}} = \\
&= \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S} \cdot \left(\frac{T_0}{T_{\text{ref}}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{\text{ref}} + T_S}{T_0 + T_S} = \\
&= \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{\text{ref}} + T_S}{T + T_S} = \\
&= (T^*)^{\frac{3}{2}} \frac{1 + T_S^*}{T^* + T_S^*}, \tag{2.27}
\end{aligned}$$

čímž jsme převedli Sutherlandův vzorec do bezrozměrného tvaru, kde se již konstanty T_0 a μ_0 nevyskytují, a současně jsme zavedli $T_S^* = \frac{T_S}{T_{\text{ref}}}$.

Model Spalart Allmaras je v bezrozměrném tvaru souhrnně zapsán v příloze A. Transformace středovaných Navierových-Stokesových rovnic (2.1) - (2.3) se provádí ekvivalentním způsobem a pro případ laminárního proudění, kdy systém rovnic nabývá formálně shodného tvaru, byla podrobněji popsána např. v práci [29], proto ji zde uvádět nebudeme.

V dalším textu této kapitoly, nebude-li výslovně uvedeno jinak, budeme pracovat výhradně s bezrozměrnými veličinami. Z důvodu jednoduššího zápisu proto již dále nebudeme bezrozměrné veličiny označovat hvězdičkou.

Systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic v bezrozměrném tvaru zapíšeme v kompaktní vektorové formě následovně

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^I(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^I(\mathbf{w})}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial \mathbf{f}^V(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^V(\mathbf{w})}{\partial y} \right] + \mathbf{s}(\mathbf{w}), \quad (2.28)$$

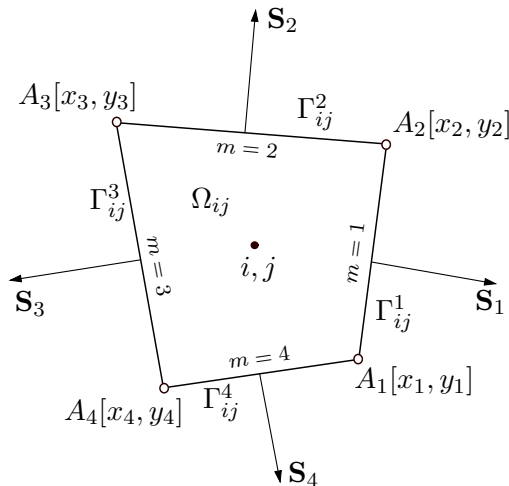
přičemž vektor konzervativních proměnných \mathbf{w} , kartézské složky nevazkého $\mathbf{f}^I(\mathbf{w})$, $\mathbf{g}^I(\mathbf{w})$ a vazkého $\mathbf{f}^V(\mathbf{w})$, $\mathbf{g}^V(\mathbf{w})$ konzervativního toku a zdrojový člen $\mathbf{s}(\mathbf{w})$ mají formálně shodný tvar s (2.8) - (2.10). Pátý člen vektoru zdrojových členů je v bezrozměrném tvaru dán jako

$$s_5 = c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\nu} - \frac{1}{\text{Re}} \rho \left[c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\rho}{\sigma} c_{b2} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right). \quad (2.29)$$

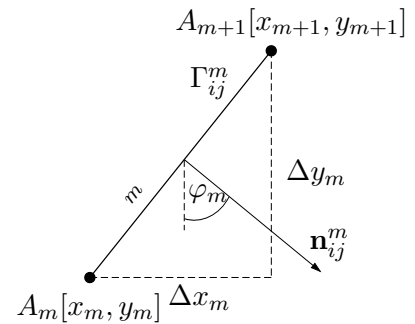
Pro řešení systému rovnic (2.28) jsme v této práci zvolili tzv. *cell-centered* metodu konečných objemů pro prostorovou diskretizaci středovaných Navierových-Stokesových rovnic s připojeným modelem turbulence na strukturované čtyřúhelníkové síti ve 2D a dvoustupňovou Rungeovu-Kuttovu metodu druhého řádu přesnosti pro diskretizaci v čase.

2.1 Metoda konečných objemů

Ohraničenou výpočtovou oblast $\Omega \in \mathbb{R}^2$, na které budeme řešit uvažovaný systém rovnic rozdělíme na konečný počet navzájem disjunktních podoblastí Ω_n , $n = 1, \dots, N$ takových, že $\Omega_h = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n$, kde Ω_h je aproximace výpočtové oblasti Ω pomocí uzavřených konvex-



Obr. 4: Kontrolní objem Ω_{ij} strukturované čtyřúhelníkové sítě \mathcal{S}



Obr. 5: Strana $\Gamma_{ij} = \overline{A_m A_{m+1}}$ čtyřúhelníkové buňky Ω_{ij}

ních čtyřúhelníků Ω_n . Tím dostáváme čtyřúhelníkovou síť $\mathcal{S} = \{\Omega_n\}_{n=1}^N$ na Ω_h . Vytvořená síť bude strukturovaná, pokud se v každém uzlu sítě budou stýkat právě čtyři elementy $\Omega_n \in \mathcal{S}$. Lze tedy zavést dvě množiny indexů $\mathcal{I} = \{1, \dots, N_{\mathcal{I}}\}$ a $\mathcal{J} = \{1, \dots, N_{\mathcal{J}}\}$ tak, že při označení $\Omega_n \equiv \Omega_{ij}$, $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{J}$ platí $N = N_{\mathcal{I}} \times N_{\mathcal{J}}$. Čtyřúhelníkový element Ω_{ij} sítě \mathcal{S} budeme nazývat kontrolní objem nebo buňka sítě. Potom N udává celkový počet buněk sítě \mathcal{S} na Ω_h .

Na obr. 4 je znázorněn kontrolní objem $\Omega_{ij} = A_1 A_2 A_3 A_4$, $A_m = [x_m, y_m]$, $m = 1, \dots, 4$ s hranicí $\partial\Omega_{ij} = \bigcup_{m=1}^4 \Gamma_{ij}^m$. Symbolem $\Gamma_{ij}^m = \overline{A_m A_{m+1}}$ značíme m -tou stranu čtyřúhelníkové buňky Ω_{ij} , obr. 5, kde $A_{m+1} \equiv A_1$ pro $m = 4$.

Pro určení vektoru konzervativních proměnných v síťových bodech (i, j) , tj. ve středech buněk Ω_{ij} strukturované čtyřúhelníkové sítě, využijeme metodu konečných objemů (*Finite Volume Method*), [29]. Vektorovou rovnici (2.28) integrujeme přes každý kontrolní objem Ω_{ij} ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{ij}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} dS + \int_{\Omega_{ij}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^I(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^I(\mathbf{w})}{\partial y} \right) dS &= \\ &= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega_{ij}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^V(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^V(\mathbf{w})}{\partial y} \right) dS + \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{s}(\mathbf{w}) dS. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Řešení $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ systému rovnic (2.28) aproximujeme na každé buňce Ω_{ij} konstantní funkcí $\mathbf{w}_{ij}(t)$, která je rovna integrálnímu průměru z hledaného řešení $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ přes kontrolní objem Ω_{ij} ,

$$\mathbf{w}_{ij}(t) = \frac{1}{|\Omega_{ij}|} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) dS, \quad (2.31)$$

kde $|\Omega_{ij}|$ je obsah čtyřúhelníkové buňky Ω_{ij} . Poté pomocí vztahu (2.31) můžeme upravit první integrál na levé straně rovnice (2.30) do tvaru

$$\int_{\Omega_{ij}} \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) dS = \frac{d\mathbf{w}_{ij}(t)}{dt} |\Omega_{ij}|, \quad (2.32)$$

kde první rovnost platí, jelikož kontrolní objem Ω_{ij} zůstává s měnícím se časem t konstantní. Obdobně jako řešení $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ budeme na buňce Ω_{ij} aproximovat i zdrojový člen $\mathbf{s}(\mathbf{w})$ konstantní funkcí \mathbf{s}_{ij} , kterou opět určíme jako integrální průměr z funkce $\mathbf{s}(\mathbf{w})$ přes buňku Ω_{ij} , tj.

$$\mathbf{s}_{ij} = \frac{1}{|\Omega_{ij}|} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{s}(\mathbf{w}) dS. \quad (2.33)$$

Dosazením vztahů (2.32) a (2.33) a aplikací Greenovy věty, pomocí které převedeme plošné integrály nevazkých a vazkých toků přes oblast Ω_{ij} na integrály křivkové podél její hranice $\partial\Omega_{ij}$, do integrální rovnice (2.31) získáme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{w}_{ij}(t)}{dt} |\Omega_{ij}| + \oint_{\partial\Omega_{ij}} [\mathbf{f}^I(\mathbf{w})^x n_{ij} + \mathbf{g}^I(\mathbf{w})^y n_{ij}] d\ell &= \\ &= \frac{1}{\text{Re}} \oint_{\partial\Omega_{ij}} [\mathbf{f}^V(\mathbf{w})^x n_{ij} + \mathbf{g}^V(\mathbf{w})^y n_{ij}] d\ell + \mathbf{s}_{ij} |\Omega_{ij}|, \end{aligned} \quad (2.34)$$

kde $x_{n_{ij}}$ a $y_{n_{ij}}$ jsou kartézské složky jednotkového vektoru vnější normály $\mathbf{n}_{ij} = [x_{n_{ij}}, y_{n_{ij}}]^T$ k hranici $\partial\Omega_{ij}$ kontrolního objemu Ω_{ij} . Nahradíme-li v rovnici (2.34) křivkové integrály

vyjadřující celkový ne vazký a vazký tok veličiny \mathbf{w} hranicí $\partial\Omega_{ij}$ buňky Ω_{ij} v čase t součtem integrálů přes jednotlivé strany Γ_{ij}^m , $m = 1, \dots, 4$ čtyřúhelníkového kontrolního objemu Ω_{ij} tvořící hranici $\partial\Omega_{ij}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{w}_{ij}(t)}{dt} |\Omega_{ij}| + \sum_{m=1}^4 \int_{\Gamma_{ij}^m} [\mathbf{f}_m^I(\mathbf{w})^x n_{ij}^m + \mathbf{g}_m^I(\mathbf{w})^y n_{ij}^m] d\ell = \\ = \sum_{m=1}^4 \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_{ij}^m} [\mathbf{f}_m^V(\mathbf{w})^x n_{ij}^m + \mathbf{g}_m^V(\mathbf{w})^y n_{ij}^m] d\ell + \mathbf{s}_{ij} |\Omega_{ij}|, \end{aligned} \quad (2.35)$$

kde $\mathbf{n}_{ij}^m = [x n_{ij}^m, y n_{ij}^m]^\top$ je jednotkový vektor vnější normály ke straně Γ_{ij}^m , pro který dle obr. 5 platí

$$\mathbf{n}_{ij}^m = [x n_{ij}^m, y n_{ij}^m]^\top \equiv [\sin \varphi_m, -\cos \varphi_m]^\top = \left[\frac{\Delta y_m}{|\Gamma_{ij}^m|}, -\frac{\Delta x_m}{|\Gamma_{ij}^m|} \right]^\top. \quad (2.36)$$

Délka m -té strany Γ_{ij}^m buňky Ω_{ij} je určena vztahem

$$|\Gamma_{ij}^m| = \sqrt{\Delta x_m^2 + \Delta y_m^2}, \quad (2.37)$$

kde Δx_m a Δy_m jsou velikosti průmětů m -té strany Γ_{ij}^m do kartézských souřadnicových os a platí pro ně

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_m &= x_{m+1} - x_m \\ \Delta y_m &= y_{m+1} - y_m \end{aligned} \right\} \text{ pro } m = 4 \text{ je } x_{m+1} = x_1, y_{m+1} = y_1. \quad (2.38)$$

Dále můžeme definovat normálový vektor $\mathbf{S}_m = [S_m^x, S_m^y]^\top$ ke straně Γ_{ij}^m kontrolního objemu Ω_{ij} , jenž má směr jednotkového vektoru normály \mathbf{n}_{ij}^m , vztahem

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{n}_{ij}^m |\Gamma_{ij}^m| = [\Delta y_m, -\Delta x_m]^\top. \quad (2.39)$$

Nevazký tok $\mathbf{f}_m^I(\mathbf{w})^x n_{ij}^m + \mathbf{g}_m^I(\mathbf{w})^y n_{ij}^m$, resp. vazký tok $\mathbf{f}_m^V(\mathbf{w})^x n_{ij}^m + \mathbf{g}_m^V(\mathbf{w})^y n_{ij}^m$, stranou Γ_{ij}^m ve směru jednotkového vektoru vnější normály \mathbf{n}_{ij}^m aproximujeme konstantní funkcí, tj. nevazkým numerickým tokem

$$\mathbf{F}_m^I \equiv \mathbf{f}_m^I x n_{ij}^m + \mathbf{g}_m^I y n_{ij}^m \approx \frac{1}{|\Gamma_{ij}^m|} \int_{\Gamma_{ij}^m} [\mathbf{f}_m^I(\mathbf{w})^x n_{ij}^m + \mathbf{g}_m^I(\mathbf{w})^y n_{ij}^m] d\ell, \quad (2.40)$$

resp. vazkým numerickým tokem

$$\mathbf{F}_m^V \equiv \mathbf{f}_m^V x n_{ij}^m + \mathbf{g}_m^V y n_{ij}^m \approx \frac{1}{|\Gamma_{ij}^m|} \int_{\Gamma_{ij}^m} [\mathbf{f}_m^V(\mathbf{w})^x n_{ij}^m + \mathbf{g}_m^V(\mathbf{w})^y n_{ij}^m] d\ell. \quad (2.41)$$

stranou Γ_{ij}^m ve směru \mathbf{n}_{ij}^m . Dosazením těchto aproximací do rovnice (2.35) dostáváme po jednoduché úpravě

$$\frac{d\mathbf{w}_{ij}(t)}{dt} = -\frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 \left(\mathbf{F}_m^I - \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{F}_m^V \right) |\Gamma_{ij}^m| + \mathbf{s}_{ij}, \quad (2.42)$$

což je soustava obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pro neznámou funkci $\mathbf{w}_{ij}(t)$ představující prostorově diskretizovanou soustavu parciálních diferenciálních rovnic (2.28), kde zbývá specifikovat aproximaci nevazkého \mathbf{F}_m^I a vazkého \mathbf{F}_m^V numerického toku a zdrojového členu \mathbf{s}_{ij} .

2.1.1 Aproximace nevazkého numerického toku

Aproximaci nevazkého numerického toku \mathbf{F}_m^I m -tou stranou kontrolního objemu Ω_{ij} , jenž vystupuje v soustavě (2.42), budeme v této práci provádět pomocí AUSM schématu (*Advection Upstream Splitting Method*), [14]. AUSM schéma je založené na myšlence štěpení toku (*flux splitting*) a patří do skupiny tzv. *upwind* schémat, která lze charakterizovat tím, že při numerickém řešení zohledňují základní fyzikální vlastnosti proudění tekutin vyplývající z teorie hyperbolických systémů parciálních diferenciálních rovnic, [29].

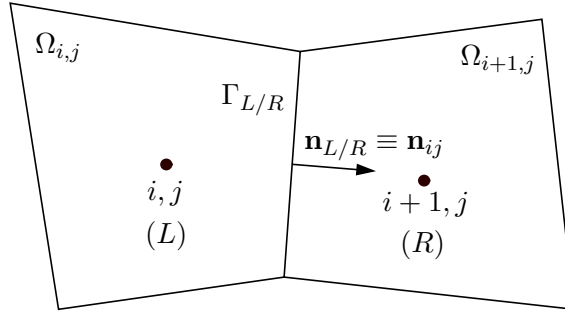
Nevazký numerický tok $\mathbf{F}^I = \mathbf{f}^I x_{n_{ij}} + \mathbf{g}^I y_{n_{ij}}$ libovolnou stranou kontrolního objemu Ω_{ij} můžeme rozdělit na dvě fyzikálně odlišné části, a sice konvektivní část $\mathbf{F}^{(c)}$ a tlakovou část $\mathbf{F}^{(p)}$ numerického toku,

$$\mathbf{F}^I \equiv \frac{U}{a} \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho u a \\ \rho v a \\ \rho h a \\ \rho \tilde{v} a \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 0 \\ x_{n_{ij}} \\ y_{n_{ij}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \text{Ma}_n \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho u a \\ \rho v a \\ \rho h a \\ \rho \tilde{v} a \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 0 \\ x_{n_{ij}} \\ y_{n_{ij}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{(c)} + \mathbf{F}^{(p)}, \quad (2.43)$$

kde $U = u \cdot x_{n_{ij}} + v \cdot y_{n_{ij}} = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{n}_{ij}$ je konvektivní normálová rychlost mající směr jednotkového vektoru vnější normály \mathbf{n}_{ij} k odpovídající straně Γ_{ij} čtyřúhelníkové buňky Ω_{ij} , a je lokální rychlost zvuku, kterou můžeme definovat vztahem

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad (2.44)$$

$\text{Ma}_n = U/a$ je normálové Machovo číslo a $h = e + p/\rho$ je měrná entalpie.



Obr. 6: Označení dvou sousedních buněk se společnou stranou $\Gamma_{L/R}$

Uvažujme obecně dvě sousední buňky strukturované čtyřúhelníkové sítě \mathcal{S} dle obr. 6 se společnou stranou $\Gamma_{L/R}$. Označíme-li "L" kontrolní objem nalevo od společné strany $\Gamma_{L/R}$ a "R" kontrolní objem napravo od společné strany $\Gamma_{L/R}$, potom pro každé dva sousední kontrolní objemy definujeme normálová Machova čísla ve tvaru

$$\text{Ma}_n^L = \frac{\mathbf{u}_L^T \cdot \mathbf{n}_{L/R}}{a_L} = \frac{U_L}{a_L}, \quad \text{Ma}_n^R = \frac{\mathbf{u}_R^T \cdot \mathbf{n}_{L/R}}{a_R} = \frac{U_R}{a_R}, \quad (2.45)$$

kde a_L a a_R jsou hodnoty lokální rychlosti zvuku dané vztahem (2.44) v levé a pravé buňce a U_L a U_R jsou konvektivní normálové rychlosti v těchto buňkách mající směr jednotkového vektoru normály $\mathbf{n}_{L/R}$ k jejich společné straně $\Gamma_{L/R}$.

Machovo číslo na společné straně $\Gamma_{L/R}$ určíme kombinací příspěvků z buňky "L" a "R" pomocí tzv. *splitting* funkcí \mathcal{M}^\pm ,

$$\text{Ma}_{L/R} = \mathcal{M}^+(\text{Ma}_n^L) + \mathcal{M}^-(\text{Ma}_n^R). \quad (2.46)$$

Tyto funkce lze definovat různými způsoby. V této práci budeme uvažovat funkce $\mathcal{M}^\pm(M)$ ve tvaru, [29],

$$\mathcal{M}^\pm(M) = \begin{cases} \frac{1}{2} (M \pm |M|) & \text{pro } |M| > 1, \\ \pm \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8} (M^2 - 1)^2 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.47)$$

Obdobným způsobem lze na společné straně $\Gamma_{L/R}$ dvou sousedních kontrolních objemů pomocí *splitting* funkcí \mathcal{P}^\pm určit tlak,

$$p_{L/R} = p_L \mathcal{P}^+(\text{Ma}_n^L) + p_R \mathcal{P}^-(\text{Ma}_n^R), \quad (2.48)$$

kde p_L a p_R jsou hodnoty tlaku v levé a pravé buňce. *Splitting* funkce pro tlak zvolíme v této práci ve tvaru, [14],

$$\mathcal{P}^\pm(M) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(M \pm |M|)}{M} & \text{pro } |M| > 1, \\ \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 (2 \mp M) & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.49)$$

Pro konvektivní část nevazkého numerického toku $\mathbf{F}_{L/R}^{(c)}$ společnou stranou $\Gamma_{L/R}$ dvou sousedních buněk poté platí, [14],

$$\mathbf{F}_{L/R}^{(c)} = \begin{cases} \text{Ma}_{L/R} [\rho a, \rho u a, \rho v a, \rho h a, \rho \tilde{v} a]_L^\top & \text{pro } \text{Ma}_{L/R} \leq 0, \\ \text{Ma}_{L/R} [\rho a, \rho u a, \rho v a, \rho h a, \rho \tilde{v} a]_R^\top & \text{pro } \text{Ma}_{L/R} > 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Celkový nevazký numerický tok m -tou stranou $\Gamma_{ij}^m \equiv \Gamma_{L/R}$ kontrolního objemu Ω_{ij} lze pak psát ve tvaru

$$\mathbf{F}_m^I \equiv \mathbf{F}_{L/R}^{\text{AUSM}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R, \mathbf{n}_{ij}^m) = \mathbf{F}_{L/R}^{(c)} + p_{L/R} \begin{bmatrix} 0 \\ x n_{ij}^m \\ y n_{ij}^m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

kde \mathbf{w}_L a \mathbf{w}_R jsou hodnoty vektoru konzervativních proměnných v levé a pravé buňce a konkrétně pro případ zobrazený na obr. 6 platí $\mathbf{w}_L = \mathbf{w}_{ij}$, $\mathbf{w}_R = \mathbf{w}_{i+1j}$. Poznamenejme, že vztah (2.51) je možné z důvodu snazší algoritmicizace přepsat do následujícího tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{L/R}^{\text{AUSM}} = & \frac{1}{2} \text{Ma}_{L/R} \left(\begin{bmatrix} \rho a \\ \rho u a \\ \rho v a \\ \rho h a \\ \rho \tilde{v} a \end{bmatrix}_L + \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho u a \\ \rho v a \\ \rho h a \\ \rho \tilde{v} a \end{bmatrix}_R \right) - \\ & - \frac{1}{2} |\text{Ma}_{L/R}| \left(\begin{bmatrix} \rho a \\ \rho u a \\ \rho v a \\ \rho h a \\ \rho \tilde{v} a \end{bmatrix}_R - \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho u a \\ \rho v a \\ \rho h a \\ \rho \tilde{v} a \end{bmatrix}_L \right) + p_{L/R} \begin{bmatrix} 0 \\ x n_{ij} \\ y n_{ij} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.1.2 Zvýšení řádu přesnosti AUSM schématu

Upwind schémata, mezi která patří i AUSM schéma, jsou obecně pouze první řádu přesnosti v prostorové proměnné. V uvedené *cell-centered* metodě konečných objemů je řešení ve formě vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ aproximováno v bodech (i, j) , tj. ve středech konečných objemů Ω_{ij} , konstantní funkcí $\mathbf{w}_{ij}(t)$ danou integrálním průměrem (2.31). Řád přesnosti uvažovaného AUSM schématu můžeme formálně zvýšit tak, že konstantní funkce $\mathbf{w}_{ij}(t)$ při výpočtu nevazkého numerického toku nahradíme na každé čtyřúhelníkové buňce Ω_{ij} funkcemi lineárními. Hovoříme pak o tzv. lineární rekonstrukci řešení na jednotlivých stranách kontrolního objemu Ω_{ij} , [29].

Lineární rekonstrukci provádíme zvlášť ve směru přírůstku indexu i a j . Pro každou složku w_s , $s = 1, \dots, 5$ vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ vypočítáme následující diferencní podíly

$$(\sigma_s)_{\mathcal{I}}^{\text{upwind}} = \frac{(w_s)_{ij} - (w_s)_{i-1j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}j}}, \quad (\sigma_s)_{\mathcal{I}}^{\text{downwind}} = \frac{(w_s)_{i+1j} - (w_s)_{ij}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}j}}, \quad (2.53)$$

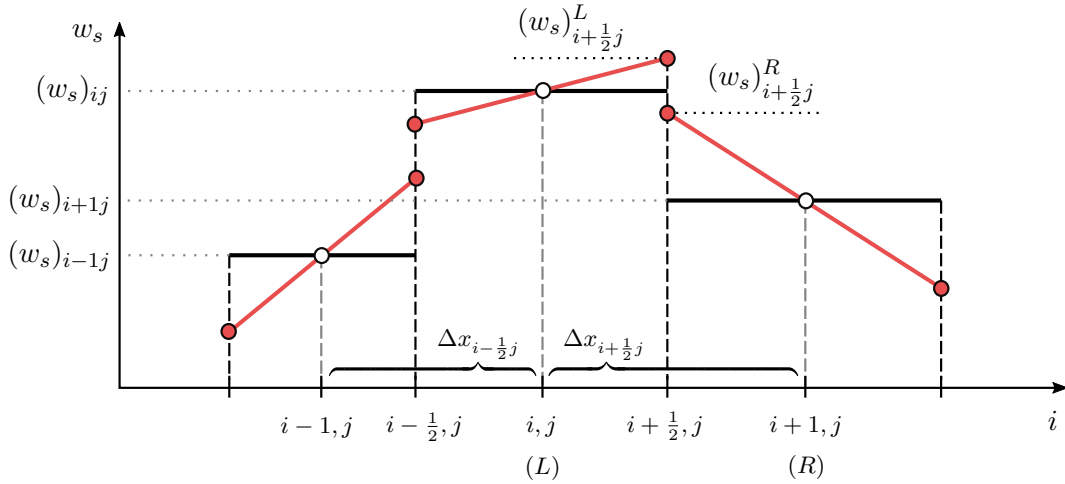
$$(\sigma_s)_{\mathcal{J}}^{\text{upwind}} = \frac{(w_s)_{ij} - (w_s)_{ij-1}}{\Delta y_{ij-\frac{1}{2}}}, \quad (\sigma_s)_{\mathcal{J}}^{\text{downwind}} = \frac{(w_s)_{ij+1} - (w_s)_{ij}}{\Delta y_{ij+\frac{1}{2}}}, \quad (2.54)$$

kde dle obr. 7 je

$$\Delta x_{i-\frac{1}{2}j} = x_{ij} - x_{i-1j}, \quad \Delta x_{i+\frac{1}{2}j} = x_{i+1j} - x_{ij} \quad (2.55)$$

a analogicky v druhém směru platí

$$\Delta y_{i-\frac{1}{2}j} = y_{ij} - y_{ij-1}, \quad \Delta y_{i+\frac{1}{2}j} = y_{ij+1} - y_{ij}. \quad (2.56)$$



Obr. 7: Lineární rekonstrukce hodnot s -té složky vektoru \mathbf{w}_{ij} ve směru růstu indexu i

Schématu druhého řádu přesnosti se vyznačují možným výskytem oscilací v řešení, které mohou vést až ke ztrátě stability numerického výpočtu. Pro zamezení vzniku nových extrémů v řešení se používají tzv. *limitery*. V této práci použijeme *minmod* limiter, který aplikujeme na diferencní podíly zvlášť v každém směru, čímž dostáváme

$$\begin{aligned} (\sigma_s)_{\mathcal{I}}^{\text{minmod}} &= \text{minmod} \left((\sigma_s)_{\mathcal{I}}^{\text{upwind}}, (\sigma_s)_{\mathcal{I}}^{\text{downwind}} \right), \\ (\sigma_s)_{\mathcal{J}}^{\text{minmod}} &= \text{minmod} \left((\sigma_s)_{\mathcal{J}}^{\text{upwind}}, (\sigma_s)_{\mathcal{J}}^{\text{downwind}} \right), \end{aligned} \quad (2.57)$$

kde minmod je funkce dvou proměnných ve tvaru, [13],

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{pro } |a| < |b| \text{ a } ab > 0, \\ b & \text{pro } |b| < |a| \text{ a } ab > 0, \\ 0 & \text{pro } ab \leq 0, \end{cases} \quad (2.58)$$

tj. pokud mají argumenty a a b stejná znaménka, pak funkce minmod vybere ten, který je menší v absolutní hodnotě, v opačném případě je vybrána nula.

Pomocí vztahů (2.57) již můžeme rekonstruovat hodnoty numerického řešení \mathbf{w}_{ij} na jednotlivých stranách kontrolního objemu Ω_{ij} následovně

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j} &= \mathbf{w}_{ij} + \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}j}}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{I}}^{\text{minmod}}, & \mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}j} &= \mathbf{w}_{ij} - \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}j}}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{I}}^{\text{minmod}}, \\ \mathbf{w}_{ij+\frac{1}{2}} &= \mathbf{w}_{ij} + \frac{\Delta y_{ij+\frac{1}{2}}}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{J}}^{\text{minmod}}, & \mathbf{w}_{ij-\frac{1}{2}} &= \mathbf{w}_{ij} - \frac{\Delta y_{ij-\frac{1}{2}}}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{J}}^{\text{minmod}}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{I}}^{\text{minmod}}$, resp. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{J}}^{\text{minmod}}$, je sloupcový vektor o složkách $(\sigma_s)_{\mathcal{I}}^{\text{minmod}}$, resp. $(\sigma_s)_{\mathcal{J}}^{\text{minmod}}$.

Poté pro zpřesnění AUSM schématu při výpočtu nevazkého toku m -tou stranou $\Gamma_{L/R}$ společnou pro levou buňku Ω_{ij} a pravou buňku Ω_{i+1j} v souladu s obr. 6 položíme ve vztahu (2.51) $\mathbf{w}_L = \mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j}^L$ a $\mathbf{w}_R = \mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j}^R$, přičemž $\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j}^L$, resp. $\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j}^R$, je rekonstruovaný vektor konzervativních proměnných na straně $\Gamma_{L/R}$ vypočtený z hodnot v levém kontrolním objemu Ω_{ij} , resp. z hodnot v pravém kontrolním objemu Ω_{i+1j} , tedy

$$\mathbf{F}_m^I \equiv \mathbf{F}_{L/R}^{\text{AUSM}} \left(\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j}^L, \mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j}^R, \mathbf{n}_{ij}^m \right). \quad (2.60)$$

2.1.3 Aproximace vazkého numerického toku

Vazký numerický tok \mathbf{F}_m^I m -tou stranou kontrolního objemu Ω_{ij} aproximujeme centrálně s druhým řádem přesnosti. Uvažujme situaci znázorněnou na obr. 8. Pro aproximaci vazkého numerického toku stranou $\Gamma_{ij}^1 = \overline{A_1 A_2}$ je nutné určit v bodě $(i + \frac{1}{2}, j)$ kartézské složky složky vektoru rychlosti u a v , molekulární a turbulentní dynamickou vazkost μ a μ_T a modifikovanou turbulentní vazkost $\tilde{\nu}$. Tyto veličiny určíme v bodě $(i + \frac{1}{2}, j)$ pomocí aritmetického průměru z hodnot v buňkách Ω_{ij} a Ω_{i+1j} , tj. např. pro složky vektoru rychlosti můžeme psát

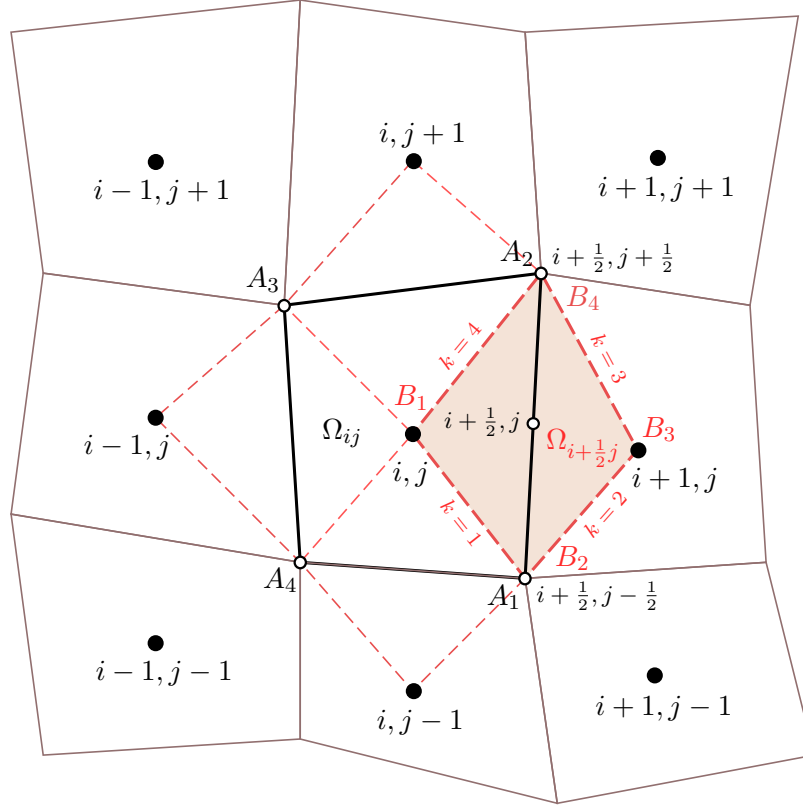
$$u_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{i+1j}), \quad v_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{1}{2} (v_{ij} + v_{i+1j}). \quad (2.61)$$

Dále je nutné v bodě $(i + \frac{1}{2}, j)$ vyčíslit derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$ vystupující ve složkách tenzoru vazkých a turbulentních napětí, $\frac{\partial}{\partial x}(p/\rho)$ a $\frac{\partial}{\partial y}(p/\rho)$, které jsou obsaženy ve složkách tepelného toku, a $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y}$ dané vazkými toky v modelu turbulence. Pro výpočet derivací na straně Γ_{ij}^1 , která není součástí hranice výpočtové oblasti Ω_h , můžeme zavést tzv. duální čtyřúhelníkovou buňku $\Omega_{i+\frac{1}{2}j} \equiv B_1 B_2 B_3 B_4$ s hranicí $\partial \Omega_{i+\frac{1}{2}j} = \bigcup_{k=1}^4 \overline{B_k B_{k+1}}$, kde pro $k = 4$ je $B_{k+1} = B_k$, [29].

Derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}$ aproximujeme pomocí věty o střední hodnotě na duální buňce $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$ a následnou aplikací Greenovy věty, [8],

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}j} \approx \frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2}j}} \frac{\partial u}{\partial x} dS = \frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|} \oint_{\partial \Omega_{i+\frac{1}{2}j}} u^x n_{i+\frac{1}{2}j} dl, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2}j} \approx \frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2}j}} \frac{\partial u}{\partial y} dS = \frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|} \oint_{\partial \Omega_{i+\frac{1}{2}j}} u^y n_{i+\frac{1}{2}j} dl, \quad (2.63)$$



Obr. 8: Duální čtyřúhelníková buňka $\Omega_{i+\frac{1}{2}j} \equiv B_1B_2B_3B_4$
pro výpočet derivací v bodě $(i + \frac{1}{2}, j)$

kde $|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|$ je obsah duální čtyřúhelníkové buňky $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$ a $\mathbf{n}_{i+\frac{1}{2}j} = [x n_{ij}, y n_{ij}]^\top$ je jednotkový vektor vnější normály k hranici $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$. Nahradíme-li křivkový integrál v rovnicích (2.62) a (2.63) součtem integrálů přes jednotlivé strany $\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k = \overline{B_kB_{k+1}}$, $k = 1, \dots, 4$ hranice $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$ dostáváme

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}j} \approx \frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|} \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k} u_k x n_{i+\frac{1}{2}j}^k dl, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2}j} \approx \frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|} \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k} u_k y n_{i+\frac{1}{2}j}^k dl, \quad (2.65)$$

kde $\mathbf{n}_{i+\frac{1}{2}j}^k = [x n_{ij}^k, y n_{ij}^k]^\top$ je jednotkový vektor vnější normály ke k -té straně $\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k$ duální buňky $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$. Integrály ve vztazích (2.64) a (2.65) můžeme dále aproximovat takto

$$\int_{\partial\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k} u x n_{i+\frac{1}{2}j}^k dl \approx \bar{u}_k y n_{i+\frac{1}{2}j}^k |\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k|, \quad (2.66)$$

$$\int_{\partial\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k} u y n_{i+\frac{1}{2}j}^k dl \approx \bar{u}_k x n_{i+\frac{1}{2}j}^k |\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k|, \quad (2.67)$$

kde \bar{u}_k je střední hodnota kartézské složky vektoru rychlosti u na k -té straně $\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k$ duální buňky $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$ a $|\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k|$ je délka této strany. Analogicky jako v případě primárních buněk, kde jsme zavedli normálový vektor \mathbf{S}_m k m -té straně Γ_{ij}^m primární buňky Ω_{ij} vztahem (2.39), zavedeme i zde normálový vektor $\hat{\mathbf{S}}_k$ ke k -té straně Γ_{ij}^k duální buňky $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$, který má směr jednotkového vektoru vnější normály $\mathbf{n}_{i+\frac{1}{2}j}^k$ vztahem

$$\hat{\mathbf{S}}_k = \mathbf{n}_{i+\frac{1}{2}j}^k |\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k| = [\Delta y_k, -\Delta x_k]^\top, \quad (2.68)$$

kde pro Δx_k a Δy_k můžeme dle obr. 8 psát

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_k &= x_{k+1} - x_k \\ \Delta y_k &= y_{k+1} - y_k \end{aligned} \right\} \text{ pro } k = 4 \text{ je } x_{k+1} = x_1, y_{k+1} = y_1, \quad (2.69)$$

přičemž x_k a y_k jsou souřadnice vrcholů duální buňky $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$. Po dosazení složek normálového vektoru $\hat{\mathbf{S}}_k$ do aproximací integrálů (2.66) a (2.67) a následným dosazením aproximací do (2.64) a (2.65) získáme finální vztahy pro výpočet derivací v místě $(i + \frac{1}{2}, j)$ ve tvaru

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2}j} \approx \frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|} \sum_{k=1}^4 \bar{u}_k \Delta y_k, \quad (2.70)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2}j} \approx -\frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|} \sum_{k=1}^4 \bar{u}_k \Delta x_k. \quad (2.71)$$

Střední hodnotu \bar{u}_k kartézské složky rychlosti u na k -té straně $\Gamma_{i+\frac{1}{2}j}^k$ duální buňky $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$ určíme jako aritmetický průměr

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}), & \bar{u}_2 &= \frac{1}{2} (u_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} + u_{i+1j}), \\ \bar{u}_3 &= \frac{1}{2} (u_{i+1j} + u_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}), & \bar{u}_4 &= \frac{1}{2} (u_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + u_{ij}), \end{aligned} \quad (2.72)$$

přičemž složku rychlosti u v bodech $(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$ a $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ určíme na základě průměrů ze čtyřech sousedních kontrolních objemů, tj.

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} (u_{ij} + u_{ij-1} + u_{i+1j-1} + u_{i+1j}), \\ u_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} (u_{ij} + u_{i+1j} + u_{i+1j+1} + u_{ij+1}). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ve speciálním případě, kdy je strana Γ_{ij}^1 kontrolního objemu Ω_{ij} součástí hranice výpočtové oblasti Ω_h , určíme derivace v bodě $(i + \frac{1}{2}, j)$ s využitím poloviny duální čtyřúhelníkové buňky $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$, která je dle obr. 8 dána trojúhelníkem $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}^\Delta = B_1 B_2 B_4$ s hranicí $\partial \Omega_{i+\frac{1}{2}j}^\Delta = \overline{B_1 B_2} \cup \overline{B_2 B_4} \cup \overline{B_4 B_1}$. Potom analogicky dle (2.70) a (2.71) jsou derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}$ v místě $(i + \frac{1}{2}, j)$ aproximovány vztahy

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2}j} \approx \frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}^\Delta|} (\bar{u}_1 \Delta y_1 + \bar{u}_{B_2 B_4} \Delta y_{B_2 B_4} + \bar{u}_3 \Delta y_4), \quad (2.74)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2}j} \approx -\frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}^\Delta|} (\bar{u}_1 \Delta x_1 + \bar{u}_{B_2 B_4} \Delta x_{B_2 B_4} + \bar{u}_3 \Delta x_4), \quad (2.75)$$

kde $|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}^\Delta|$ je obsah duální trojúhelníkové buňky $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}^\Delta$ a dále platí

$$\Delta x_{B_2B_4} = x_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}, \quad \Delta y_{B_2B_4} = y_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}, \quad (2.76)$$

$$\bar{u}_{B_2B_4} = \frac{1}{2} \left(u_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.77)$$

přičemž Δx_1 , Δx_4 , Δy_1 a Δy_4 jsou určeny vztahy (2.69) a \bar{u}_1 a \bar{u}_4 jsou dány rovnicemi (2.72).

Pro výpočet derivací $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x}(p/\rho)$, $\frac{\partial}{\partial y}(p/\rho)$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$ a $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$ v bodě $(i+\frac{1}{2}, j)$ uijeme analogii vztahů (2.70) a (2.71) či (2.74) a (2.75), kde zaměníme u za příslušnou veličinu.

2.1.4 Aproximace zdrojového členu

Vztahem (2.33) jsme pomocí integrálního průměru ze zdrojových členů $\mathbf{s}(\mathbf{w})$ na kontrolním objemu Ω_{ij} zavedli konstantní funkci \mathbf{s}_{ij} . Aproximace \mathbf{s}_{ij} je funkcí vektoru konzervativních proměnných \mathbf{w}_{ij} , a tedy pro její vyčíslení v buňce Ω_{ij} lze použít přímo složky vektoru \mathbf{w}_{ij} . Dále ve zdrojovém členu modelu Spalart-Allmaras (2.29) vystupují derivace $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$, $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ a $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ spolu s $\frac{\partial v}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$, na jejichž základě je určována velikost tenzoru vířivosti daná rovnicí (1.39). Pro výpočet derivací v bodě (i, j) můžeme využít obdobného přístupu, kterým jsme aproximovali derivace obsažené ve vazkách tocích.

Např. derivace $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$ a $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$ aproximujeme opět pomocí věty o střední hodnotě, tentokrát však na primární buňce Ω_{ij} , a následnou aplikací Greenovy věty. Po nahrazení křivkového integrálu podél hranice $\partial\Omega_{ij}$ součtem integrálů přes jednotlivé strany Γ_{ij}^m , $m = 1, \dots, 4$, čtyřúhelníkové buňky Ω_{ij} obdržíme

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right|_{ij} \approx \frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 \int_{\Gamma_{ij}^m} \bar{v}_m x n_{ij}^m dl \approx \frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 \bar{v}_m y n_{ij}^m |\Gamma_{ij}^m|, \quad (2.78)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right|_{ij} \approx \frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 \int_{\Gamma_{ij}^m} \bar{v}_m y n_{ij}^m dl \approx \frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 \bar{v}_m x n_{ij}^m |\Gamma_{ij}^m|, \quad (2.79)$$

kde jsme zároveň aproximovali integrály přes jednotlivé strany Γ_{ij}^m , přičemž \bar{v}_m je střední hodnota modifikované vířivosti \bar{v} na m -té straně Γ_{ij}^m buňky Ω_{ij} a $|\Gamma_{ij}^m|$ je délka této strany. S ohledem na zavedení normálového vektoru \mathbf{S}_m k m -té straně Γ_{ij}^m , jež má směr jednotkového vektoru normály \mathbf{n}_{ij}^m k této straně, vztahem (2.39) můžeme pro derivace na kontrolním objemu Ω_{ij} psát

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right|_{ij} \approx \frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 \bar{v}_m \Delta y_m, \quad (2.80)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right|_{ij} \approx -\frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 \bar{v}_m \Delta x_m, \quad (2.81)$$

kde Δx_m a Δy_m jsou určeny vztahy (2.38).

Střední hodnotu \bar{v}_m modifikované vířivosti \bar{v} můžeme na m -té straně Γ_{ij}^m buňky Ω_{ij} určit jako aritmetický průměr z hodnot ve dvou buňkách, které mají společnou stranu Γ_{ij}^m , tj. s ohledem na situaci na obr. 4 a obr. 8 lze psát

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \frac{1}{2} (\tilde{v}_{ij} + \tilde{v}_{i+1j}), & \bar{v}_2 &= \frac{1}{2} (\tilde{v}_{ij} + \tilde{v}_{ij+1}), \\ \bar{v}_3 &= \frac{1}{2} (\tilde{v}_{ij} + \tilde{v}_{i-1j}), & \bar{v}_4 &= \frac{1}{2} (\tilde{v}_{ij} + \tilde{v}_{ij-1}). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Pro výpočet derivací $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ a $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ na kontrolním objemu Ω_{ij} uijeme analogii vztahů (2.80) a (2.81), kde zaměníme \tilde{v} za příslušnou veličinu.

2.2 Metoda časové diskretizace

Vraťme se nyní k soustavě obyčejných diferenciálních rovnic (2.42) a definujme operátor prostorové diskretizace předpisem

$$\mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}(t)) := -\frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 \left(\mathbf{F}_m^{\text{I}} - \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{F}_m^{\text{V}} \right) |\Gamma_{ij}^m| + \mathbf{s}_{ij}. \quad (2.83)$$

Potom soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (2.42) zapíšeme ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{w}_{ij}(t)}{dt} = \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}(t)) \quad (2.84)$$

a doplníme ji počáteční podmínkou

$$\mathbf{w}_{ij}^0 \equiv \mathbf{w}_{ij}(0) = \left[\rho_{ij}^0 \quad (\rho u)_{ij}^0 \quad (\rho v)_{ij}^0 \quad (\rho e)_{ij}^0 \quad (\rho \tilde{v})_{ij}^0 \right]^{\text{T}}, \quad (2.85)$$

kde \mathbf{w}_{ij}^0 představuje hodnotu vektoru konzervativních proměnných v čase $t_0 = 0$ ve středech kontrolních objemů Ω_{ij} . Nechtě $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots \mathcal{T}$ je dělení časového intervalu $(0, \mathcal{T})$ a $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ je časový krok mezi časovými hladinami t_n a t_{n+1} . Označme \mathbf{w}_{ij}^n aproximaci funkce $\mathbf{w}_{ij}(t)$ v čase t_n . Pro numerické řešení počáteční úlohy (2.84) a (2.85) aplikujeme v této práci explicitní dvoustupňovou Rungeovu-Kuttovu metodu druhého řádu přesnosti v její modifikované formě, [9], ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{ij}^{(1)} &= \mathbf{w}_{ij}^n, \\ \mathbf{w}_{ij}^{(2)} &= \mathbf{w}_{ij}^{(1)} + \alpha_1 \Delta t \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^{(1)}), \\ \mathbf{w}_{ij}^{n+1} &= \mathbf{w}_{ij}^{(1)} + \alpha_2 \Delta t \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^{(2)}), \end{aligned} \quad (2.86)$$

kde $\alpha_1 = 1/2$ a $\alpha_2 = 1$. Uvedené explicitní schéma Rungeovy-Kuttovy metody je podmíněně stabilní s tzv. CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*) podmínkou stability, která má dle [2] tvar

$$\Delta t \leq \min_{ij} \left\{ \frac{\text{CFL} |\Omega_{ij}|}{\varrho(\mathbf{A}_{\mathcal{I}}^{\text{I}})_{ij} + \varrho(\mathbf{A}_{\mathcal{J}}^{\text{I}})_{ij} + C [\varrho(\mathbf{A}_{\mathcal{I}}^{\text{V}})_{ij} + \varrho(\mathbf{A}_{\mathcal{J}}^{\text{V}})_{ij}]} \right\}, \quad (2.87)$$

kde $\text{CFL} \in (0, 1)$. Spektrální poloměr Jacobiho matice nevazkých toků $\varrho(\mathbf{A}_{\mathcal{I}}^{\text{I}})_{ij}$ a $\varrho(\mathbf{A}_{\mathcal{J}}^{\text{I}})_{ij}$ v buňce Ω_{ij} je vyčíslený zvlášť ve dvou nezávislých směrech odpovídajících směrům přírůstku indexu i a j následovně

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{A}_{\mathcal{I}}^{\text{I}})_{ij} &= \left(\left| \mathbf{u}_{ij}^{\text{I}} \cdot \mathbf{n}_{ij}^{\mathcal{I}} \right| + a_{ij} \right) |\Gamma_{ij}^{\mathcal{I}}|, \\ \varrho(\mathbf{A}_{\mathcal{J}}^{\text{I}})_{ij} &= \left(\left| \mathbf{u}_{ij}^{\text{I}} \cdot \mathbf{n}_{ij}^{\mathcal{J}} \right| + a_{ij} \right) |\Gamma_{ij}^{\mathcal{J}}|, \end{aligned} \quad (2.88)$$

kde \mathbf{u}_{ij} je vektor rychlosti a a_{ij} je rychlost zvuku v kontrolním objemu Ω_{ij} . Normálový vektor $\mathbf{n}_{ij}^{\mathcal{I}}$, resp. $\mathbf{n}_{ij}^{\mathcal{J}}$, a délky stran $|\Gamma_{ij}^{\mathcal{I}}|$, resp. $|\Gamma_{ij}^{\mathcal{J}}|$, jsou určeny jako průměr z příslušných hodnot na protilehlých stranách buňky Ω_{ij} , tj. dle obr. 4 a obr. 5 platí

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{ij}^{\mathcal{I}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{n}_{ij}^1 - \mathbf{n}_{ij}^3), & \mathbf{n}_{ij}^{\mathcal{J}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{n}_{ij}^2 - \mathbf{n}_{ij}^4), \\ |\Gamma_{ij}^{\mathcal{I}}| &= \frac{1}{2} (|\Gamma_{ij}^1| + |\Gamma_{ij}^3|), & |\Gamma_{ij}^{\mathcal{J}}| &= \frac{1}{2} (|\Gamma_{ij}^2| + |\Gamma_{ij}^4|). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Spektrální poloměr Jacobiho matice vazkých toků $\varrho(\mathbf{A}_{\mathcal{I}}^V)_{ij}$ má v buňce Ω_{ij} a směru indexu i tvar

$$\varrho(\mathbf{A}_{\mathcal{I}}^V)_{ij} = \frac{1}{\text{Re}} \max \left(\frac{4}{3\rho_{ij}}, \frac{\gamma}{\rho_{ij}} \right) \left(\frac{\mu_{ij}}{\text{Pr}} + \frac{\mu_{Tij}}{\text{Pr}_T} \right) \frac{|\Gamma_{ij}^{\mathcal{I}}|^2}{|\Omega_{ij}|}. \quad (2.90)$$

Ve směru indexu j je poté $\varrho(\mathbf{A}_{\mathcal{J}}^V)_{ij}$ vyjádřeno analogicky a konstanta C , kterou jsou v podmínce (2.87) násobeny spektrální poloměry vazkých toků, se obvykle volí $C = 4$, [2].

Poznamenejme, že Jacobiho matice nevazkých a vazkých toků lze obecně zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^I &= \frac{\partial \mathbf{F}^I}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left(\mathbf{f}^I(\mathbf{w})\omega_x + \mathbf{g}^I(\mathbf{w})\omega_y \right), \\ \mathbf{A}^V &= \frac{\partial \mathbf{F}^V}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left(\mathbf{f}^V(\mathbf{w})\omega_x + \mathbf{g}^V(\mathbf{w})\omega_y \right), \end{aligned} \quad (2.91)$$

přičemž $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y]^\top$ je libovolný směrový vektor.

Všimněme si, že v CFL podmínce (2.87) není explicitně zahrnutý vliv zdrojového členu. V případě řešení systémů parciálních diferenciálních rovnic se zdrojovými členy se v jistých případech může stát, že zdrojové členy budou dominantní. Silné zdrojové členy mohou rapidně ovlivňovat proudové veličiny jak v prostoru, tak v čase. Změny, které způsobují zdrojové členy, se ale dějí na mnohem menším časovém měřítku než je časové měřítko změn způsobených nevazkými a vazkými toky. Popisované systémy rovnic se označují jako *stiff* systémy a je o nich pojednáno např. v práci [13].

Uvedená vlastnost zdrojových členů zřejmě může vést až k situaci, kdy námi určený časový krok Δt daný CFL podmínkou nemusí zaručit stabilitu explicitního schématu a v těchto případech je nutné časový krok dále snížit. I tak ale není zajištěno, že explicitním schématem bude možné nalézt korektní řešení, [2]. Možným opatřením je řešení zdrojového členu implicitní metodou. Uvažujme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (2.84) a pro nastínění zmíněného přístupu ji diskretizujme v čase pomocí klasické Eulerovy metody následovně

$$\frac{\mathbf{w}_{ij}^{n+1} - \mathbf{w}_{ij}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 \left[(\mathbf{F}_m^I)^n - \frac{1}{\text{Re}} (\mathbf{F}_m^V)^n \right] |\Gamma_{ij}^m| + \mathbf{s}_{ij}^{n+1}, \quad (2.92)$$

kde zdrojový člen je na rozdíl od nevazkého a vazkého toku vyčíslen v časové hladině t^{n+1} . Jelikož hodnota \mathbf{s}_{ij} v čase t^{n+1} je neznámá, aproximujeme ji pomocí Taylorova rozvoje na časové hladině t^n , přičemž vezmeme v úvahu pouze první dva členy rozvoje, tj.

$$\mathbf{s}_{ij}^{n+1} \approx \mathbf{s}_{ij}^n + \left. \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{ij}^n \left(\mathbf{w}_{ij}^{n+1} - \mathbf{w}_{ij}^n \right). \quad (2.93)$$

Pokud tuto aproximaci dosadíme do rovnice (2.92) a upravíme ji, dostáváme vztah

$$\left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{I} - \left. \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{ij}^n \right] \left(\mathbf{w}_{ij}^{n+1} - \mathbf{w}_{ij}^n \right) = \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^n), \quad (2.94)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice. Uvedené schéma se nazývá bodově implicitní, jelikož matice v hranatých závorkách závisí pouze na hodnotách v kontrolním objemu Ω_{ij} . Toto schéma můžeme uplatnit i v případě vícestupňové Rungeovy-Kuttovy metody, kdy na základě analogie lze pro k -tý stupeň, $k > 1$, psát

$$\mathbf{w}_{ij}^{(k)} = \mathbf{w}_{ij}^{(1)} + \alpha_{k-1} \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{I} - \left. \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{ij}^{(k-1)} \right]^{-1} \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^{(k-1)}). \quad (2.95)$$

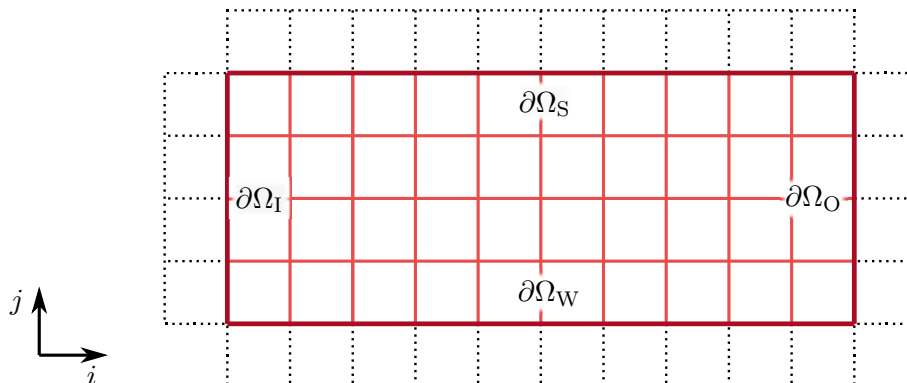
Touto operací je vliv časového měřítka zdrojového členu zmírněn, ale navíc je nutné určit Jacobiho matici zdrojového členu $\frac{\partial s}{\partial \mathbf{w}}$ a zároveň v každém kroku schématu invertovat matici v hranaté závorce. Je zřejmé, že výpočet Jacobiho matice může být značně komplikovaný, pokud se v turbulentním modelu vyskytují různé přechodové či přepínací funkce. Namísto exaktní Jacobiho matice lze ale uvažovat její vhodnou aproximaci, [22].

V testovacích výpočtech, které byly prováděny v rámci této práce, se nicméně vliv zdrojových členů neprojevil natolik, aby došlo ke ztrátě stability numerického schématu, a proto byla užívána pouze Rungeova-Kuttova metoda v původním tvaru (2.86).

2.3 Okrajové podmínky

Aby výchozí systém rovnic popisující turbulentní proudění stlačitelné newtonovské tekutiny s připojeným modelem turbulence (2.28) byl řešitelný, je nutné na hranici na výpočtové oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$ předepsat příslušné okrajové podmínky. V této kapitole popíšeme vlastní implementaci okrajových podmínek, přičemž využijeme konceptu tzv. fiktivních buněk.

Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat, že na obr. 4 je pro $i = 1$ např. strana Γ_{1j}^3 kontrolního objemu Ω_{1j} součástí hranice $\partial\Omega_h$ aproximované výpočtové oblasti Ω_h . Pro výpočet nevazkého toku, vazkého toku a zdrojového členu na libovolné buňce Ω_{ij} je nutné znát hodnoty vektoru konzervativních proměnných v buňkách sousedních v předchozí časové vrstvě či předchozím kroku explicitní Rungeovy-Kuttovy metody, tedy i ve fiktivní buňce Ω_{0j} . Princip fiktivních buněk spočívá v přiřazení vrstvy myšlených kontrolních objemů hranici $\partial\Omega_h$ tak, jak je zobrazeno na obr. 9. Geometrické charakteristiky fiktivní buňky se uvažují shodné se sousedním kontrolním objemem, který leží fyzicky uvnitř oblasti Ω_h .



Obr. 9: Vrstva fiktivních buněk okolo obecné výpočtové oblasti Ω_h s hranicí $\partial\Omega_h = \partial\Omega_I \cup \partial\Omega_W \cup \partial\Omega_O \cup \partial\Omega_S$

Uvedeným přístupem se tak zjednoduší implementace výpočtu toků či derivací na hranici výpočtové oblasti $\partial\Omega_h$, jelikož vztahy uvedené v předchozích kapitolách zůstávají beze změny v platnosti i pro hraniční buňky. Dále se budeme věnovat stanovení vektoru konzervativních proměnných ve fiktivních buňkách na základě příslušných okrajových podmínek, přičemž budeme vycházet z prací [28] a [29].

Zatímco v případě nevazkého systému rovnic, tj. v případě Eulerových rovnic, se počet předepisovaných okrajových podmínek řídí počtem záporných vlastních čísel Jacobiovy matice nevazkých toků na dané hranici, v případě vazkého systému dosud není teoreticky podloženo, jaký počet a typ okrajových podmínek je nutné na této hranici předepsat. Na základě praktických zkušeností a numerických experimentů se však ukazuje, že pro řešení Navierových-Stokesových rovnic je obecně nutné předepsat větší počet okrajo-

vých podmínek než pro Eulerovy rovnice, [28]. Nejinak je tomu i v případě středovaného systému Navierových-Stokesových rovnic s připojeným modelem turbulence popisujícího turbulentní proudění.

V této práci budeme rozlišovat čtyři základní typy okrajových podmínek, které jsou na obr. 9 předepsány na hranici $\partial\Omega_h = \partial\Omega_I \cup \partial\Omega_W \cup \partial\Omega_O \cup \partial\Omega_S$ obecné výpočtové oblasti Ω_h , kde $\partial\Omega_I$ představuje vstup (*inlet*), tj. část hranice, kterou proud tekutiny vstupuje do výpočtové oblasti, $\partial\Omega_O$ je výstup (*outlet*), tj. část hranice, kterou proud tekutiny opouští výpočtovou oblast, $\partial\Omega_W$ reprezentuje pevnou adiabatickou stěnu (*wall*) a $\partial\Omega_S$ tvoří hranici, kde předepisujeme okrajové podmínky symetrie (*symmetry*). Z fyzikálního hlediska tak v konkrétním případě na obr. 9 modelujeme pouze polovinu kanálu, který vznikne přidáním výpočtové oblasti Ω_h symetricky nahoru dle osy danou hranicí $\partial\Omega_S$.

Dále se omezíme na případ *subsonického* vstupu, kdy budeme předepisovat celkový tlak p_t , celkovou termodynamickou teplotu T_t a úhel náběhu proudu α . Pro stanovení vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w}_{\text{inlet}} \equiv \mathbf{w}_{0j}$ na vstupu do výpočtové oblasti, obr. 9, nejprve extrapolujeme hodnotu statického tlaku p_{inlet} z proudového pole, tj. z vektoru $\mathbf{w}_{1j} = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5]_{1j}^\top$ na kontrolním objemu Ω_{1j} , užitím stavové rovnice ve tvaru (2.25)

$$p_{\text{inlet}} = (\gamma - 1) \left(w_4 - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right). \quad (2.96)$$

Na základě termodynamických vztahů mezi statickými a celkovými veličinami, [28], můžeme na vstupu vypočítat Machovo číslo

$$\text{Ma}_{\text{inlet}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_t}{p_{\text{inlet}}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \quad (2.97)$$

a statickou termodynamickou teplotu

$$T_{\text{inlet}} = T_t \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}_{\text{inlet}}^2 \right)^{-1}. \quad (2.98)$$

Hodnotu hustoty dopočítáme ze stavové rovnice v bezrozměrném tvaru jako

$$\rho_{\text{inlet}} = \frac{p_{\text{inlet}}}{T_{\text{inlet}}}, \quad (2.99)$$

jelikož jsme zvolili referenční hodnotu měrné plynové konstanty $r_{\text{ref}} = 287 \text{ [J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$. Stanovíme-li na vstupu velikost vektoru rychlosti $\|\mathbf{u}_{\text{inlet}}\|$ pomocí vztahu (2.44) a jednotlivé složky vektoru rychlosti $\mathbf{u}_{\text{inlet}} = [u_{\text{inlet}}, v_{\text{inlet}}]^\top$ následovně

$$\|\mathbf{u}_{\text{inlet}}\| = \text{Ma}_{\text{inlet}} \sqrt{\frac{\gamma p_{\text{inlet}}}{\rho_{\text{inlet}}}}, \quad u_{\text{inlet}} = \|\mathbf{u}_{\text{inlet}}\| \cos \alpha, \quad v_{\text{inlet}} = \|\mathbf{u}_{\text{inlet}}\| \sin \alpha, \quad (2.100)$$

pak lze z rovnice (2.25) vyjádřit celkovou měrnou energii ve tvaru

$$e_{\text{inlet}} = \frac{p_{\text{inlet}}}{\rho_{\text{inlet}} (\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{\text{inlet}}\|^2. \quad (2.101)$$

Pomocí Sutherlandova vztahu (2.27) a statické teploty na vstupu vypočítáme hodnotu dynamické vazkosti na vstupu,

$$\mu_{\text{inlet}} = (T_{\text{inlet}})^{\frac{3}{2}} \frac{1 + T_S}{T_{\text{inlet}} + T_S}. \quad (2.102)$$

Dle [27] se ve volném proudu, tj. na vstupu do výpočetní oblasti, pro bezrozměrnou modifikovanou turbulentní vazkost předepisuje $\tilde{\nu}_{\text{inlet}} = (3 \div 5)\nu_{\text{inlet}}$, přičemž uijeme hodnotu 3 a dále platí $\nu_{\text{inlet}} = \mu_{\text{inlet}}/\rho_{\text{inlet}}$. A konečně vektor konzervativních proměnných na vstupu můžeme na základě uvedených hodnot vstupních veličin psát ve tvaru

$$\mathbf{w}_{\text{inlet}} = [\rho_{\text{inlet}}, \rho_{\text{inlet}}u_{\text{inlet}}, \rho_{\text{inlet}}v_{\text{inlet}}, \rho_{\text{inlet}}e_{\text{inlet}}, \rho_{\text{inlet}}\tilde{\nu}_{\text{inlet}}]^\top. \quad (2.103)$$

V případě *subsonického* výstupu předepisujeme pouze hodnotu statického tlaku p_{outlet} a pro stanovení vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w}_{\text{outlet}} \equiv \mathbf{w}_{N_{\mathcal{I}}+1j}$ ve fiktivních buňkách $\Omega_{N_{\mathcal{I}}+1j}$, obr. 9, ostatní veličiny extrapolujeme s prvním řádem přesnosti z proudového pole, tj. z vektoru $\mathbf{w}_{N_{\mathcal{I}}j} = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5]_{N_{\mathcal{I}}j}^\top$. Vyjádříme-li celkovou měrnou energii na výstupu ve tvaru

$$e_{\text{outlet}} = \frac{p_{\text{outlet}}}{w_1(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{w_2}{w_1} \right)^2 + \left(\frac{w_3}{w_1} \right)^2 \right], \quad (2.104)$$

pak vektor konzervativních proměnných na výstupu zapíšeme jako

$$\mathbf{w}_{\text{outlet}} = [w_1, w_2, w_3, w_1e_{\text{outlet}}, w_5]^\top. \quad (2.105)$$

Pro případ symetrie je nutné na hranici $\partial\Omega_S$ splnit podmínku nulové normálové složky rychlosti

$$U = \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{n} = un_x + vn_y = 0. \quad (2.106)$$

Vzhledem k tomu, že v této práci budeme hranici $\partial\Omega_S$ uvažovat výhradně rovnoběžnou s osou x nebo y kartézského souřadnicového systému, můžeme vektor konzervativních proměnných $\mathbf{w}_{\text{symmetry}} \equiv \mathbf{w}_{iN_{\mathcal{J}}+1}$ ve fiktivních buňkách $\Omega_{iN_{\mathcal{J}}+1}$, obr. 9, odvodit na základě vektoru $\mathbf{w}_{iN_{\mathcal{J}}} = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5]_{iN_{\mathcal{J}}}^\top$ ve tvaru

$$\mathbf{w}_{\text{symmetry}} = \begin{cases} [w_1, w_2, -w_3, w_4, w_5]^\top & \text{pro } \partial\Omega_S \parallel x, \\ [w_1, -w_2, w_3, w_4, w_5]^\top & \text{pro } \partial\Omega_S \parallel y. \end{cases} \quad (2.107)$$

Pro vstup, výstup i symetrii budeme navíc uvažovat homogenní Neumannovu okrajovou podmínku pro statickou teplotu $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$ a modifikovanou turbulentní vazkost $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \mathbf{n}} = 0$ a nulové vazké a turbulentní napětí ve směru normály \mathbf{n} k hranici $\partial\Omega_I$, $\partial\Omega_O$ a $\partial\Omega_S$, tj. $(\sigma_{ij} + \tau_{ij})n_j = 0$, $i = 1, 2$. Tyto okrajové podmínky pak vedou na nulový vektor vazkého numerického toku na hranici $\partial\Omega_I$, $\partial\Omega_O$ a $\partial\Omega_S$.

Na pevné stěně předepisujeme neskluzovou okrajovou podmínku pro rychlost, tj. nulové složky rychlosti $u = 0$ a $v = 0$, a nulovou hodnotu turbulentní vazkosti $\mu_T = 0$, resp. modifikované turbulentní vazkosti $\tilde{\nu} = 0$. V případě implementace těchto okrajových podmínek pak ve fiktivních buňkách Ω_{i0} , obr. 9, určíme vektor konzervativních proměnných $\mathbf{w}_{\text{wall}} \equiv \mathbf{w}_{i0}$ pomocí vektoru $\mathbf{w}_{i1} = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5]_{i1}^\top$ následovně

$$\mathbf{w}_{\text{wall}} = [w_1, -w_2, -w_3, w_4, -w_5]^\top. \quad (2.108)$$

Pro případ, kdy je stěna adiabatická, je nutné předepsat $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$, tj. nulový tepelný tok hranicí $\partial\Omega_W$.

2.4 Úprava numerického schématu pro model $k-\omega$ SST

Uvedená prostorová i časová diskretizace zůstává v platnosti i při použití modelu $k-\omega$ SST, jelikož konzervativní systém rovnic můžeme rovněž zapsat v kompaktní vektorové formě,

přičemž transportní rovnice pro k a ω přidružíme k systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic stejným způsobem jako transportní rovnici pro \tilde{v} modelu Spalart-Allmaras. Středovaný systém Navierových-Stokesových rovnic dle Favra (2.1) - (2.3) spolu s rovnicemi modelu k - ω SST v *rozměrovém* tvaru,

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k u_j)}{\partial x_j} = \min(\mu_T S^2, 20\beta^* \rho \omega k) - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \omega u_j)}{\partial x_j} &= \gamma_\omega \rho S^2 - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \\ &+ 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (2.110)$$

zapišeme ve formálně stejné vektorové formě jako u modelu Spalart-Allmaras

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^I(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^I(\mathbf{w})}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{f}^V(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^V(\mathbf{w})}{\partial y} + \mathbf{s}(\mathbf{w}), \quad (2.111)$$

kde však nyní vektor konzervativních proměnných $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^6$, kartézské složky nevazkého $\mathbf{f}^I(\mathbf{w})$, $\mathbf{g}^I(\mathbf{w})$ a vazkého $\mathbf{f}^V(\mathbf{w})$, $\mathbf{g}^V(\mathbf{w})$ konzervativního toku a zdrojový člen $\mathbf{s}(\mathbf{w})$ mají tvar

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \\ \rho k \\ \rho \omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^I(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \\ \rho ku \\ \rho \omega u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}^I(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \\ \rho kv \\ \rho \omega v \end{bmatrix}, \quad (2.112)$$

$$\mathbf{f}^V(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} + \tau_{xx} \\ \sigma_{xy} + \tau_{xy} \\ (\sigma_{xx} + \tau_{xx})u + (\sigma_{xy} + \tau_{xy})v + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) \\ (\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x} \\ (\mu + \sigma_\omega \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.113)$$

$$\mathbf{g}^V(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{yx} + \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} + \tau_{yy} \\ (\sigma_{yx} + \tau_{yx})u + (\sigma_{yy} + \tau_{yy})v + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) \\ (\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial k}{\partial y} \\ (\mu + \sigma_\omega \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.114)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \min(\mu_T S^2, 20\beta^* \rho \omega k) - \beta^* \rho \omega k \\ \gamma_\omega \rho S^2 - \beta \rho \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \left(\frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \end{bmatrix}, \quad (2.115)$$

Ukažeme nyní transformaci systému rovnic (2.111) do bezrozměrného tvaru. Bezrozměrné turbulentní veličiny k a ω zavedeme pomocí vztahů

$$k^* = \frac{k}{u_{\text{ref}}^2} \quad \text{a} \quad \omega^* = \frac{\mu_{\text{ref}} \omega}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}. \quad (2.116)$$

Pro ostatní veličiny nadále platí transformační vztahy (2.13) - (2.15) a také již víme, že bezrozměrná velikost tenzoru vířivosti je dána předpisem $S^* = S \ell_{\text{ref}}/u_{\text{ref}}$. Nejprve převedeme do bezrozměrného tvaru funkci F_1 (1.59). Pro kladnou část členu příčné difúze (1.60) můžeme po dosazení z definic pro bezrozměrné veličiny psát

$$\begin{aligned} \text{CD}_{k\omega} &= \max \left(\frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}{\ell_{\text{ref}}^2} 2\rho^* \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega^*} \frac{\partial k^*}{\partial x_j^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial x_j^*}, 10^{-20} \right) \approx \\ &\approx \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}{\ell_{\text{ref}}^2} \max \left(2\rho^* \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega^*} \frac{\partial k^*}{\partial x_j^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial x_j^*}, 10^{-20} \right) \equiv \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}{\ell_{\text{ref}}^2} \text{CD}_{k\omega}^*, \end{aligned} \quad (2.117)$$

kde jsme zanedbali vliv referenčních hodnot veličin na konstantu 10^{-20} , která pouze zajišťuje, že je splněno $\text{CD}_{k\omega} > 0$. Argumenty vystupující v Γ_1 (1.59) transformujeme do bezrozměrného tvaru následovně

$$\bullet \quad \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d} = \frac{\mu_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}} \ell_{\text{ref}}} \frac{\sqrt{k^*}}{\beta^* \omega^* d^*} \equiv \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sqrt{k^*}}{\beta^* \omega^* d^*}, \quad (2.118)$$

$$\bullet \quad \frac{500\nu}{\omega d^2} = \frac{\nu_{\text{ref}} \mu_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2 \ell_{\text{ref}}} \frac{500\nu^*}{\omega^* d^{*2}} \equiv \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{500\nu^*}{\omega^* d^{*2}}, \quad (2.119)$$

$$\bullet \quad \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{\text{CD}_{k\omega}d^2} \equiv \frac{4\rho^*\sigma_{\omega 2}k^*}{\text{CD}_{k\omega}^*d^{*2}}. \quad (2.120)$$

Argumenty v Γ_2 , na základě které je určována funkce F_2 (1.63), se liší od argumentů v Γ_1 jen konstantou. Rovnou lze tedy psát

$$\Gamma_2^* = \max \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{2\sqrt{k^*}}{\beta^* \omega^* d^*}, \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{500\nu^*}{\omega^* d^{*2}} \right). \quad (2.121)$$

Pro bezrozměrnou turbulentní vazkost platí

$$\begin{aligned} \mu_T &= \min \left(\mu_{\text{ref}} \frac{\rho^* k^*}{\omega^*}, \rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}} \ell_{\text{ref}} \frac{a_1 \rho^* k^*}{S^* F_2^*} \right) = \\ &= \mu_{\text{ref}} \min \left(\frac{\rho^* k^*}{\omega^*}, \text{Re} \frac{a_1 \rho^* k^*}{S^* F_2^*} \right) \equiv \mu_{\text{ref}} \mu_T^*, \end{aligned} \quad (2.122)$$

což je přímo definiční vztah (2.14). Transportní rovnici pro turbulentní kinetickou energii k (2.109) přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^3}{\ell_{\text{ref}}} \left[\frac{\partial(\rho^* k^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* k^* u_j^*)}{\partial x_j^*} \right] &= \min \left(\frac{\mu_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}{\ell_{\text{ref}}^2} \mu_T^* S^{*2}, \frac{\rho_{\text{ref}}^2 u_{\text{ref}}^4}{\mu_{\text{ref}}} 20\beta^* \rho^* \omega^* k^* \right) - \\ &- \frac{\rho_{\text{ref}}^2 u_{\text{ref}}^4}{\mu_{\text{ref}}} \beta^* \rho^* \omega^* k^* + \frac{\mu_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}{\ell_{\text{ref}}^2} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[(\mu^* + \sigma_k \mu_T^*) \frac{\partial k^*}{\partial x_j^*} \right], \end{aligned} \quad (2.123)$$

odkud jednoduchou úpravou dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho^*k^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^*k^*u_j^*)}{\partial x_j^*} &= \min\left(\frac{1}{\text{Re}}\mu_T^*S^{*2}, \text{Re}20\beta^*\rho^*\omega^*k^*\right) - \\ &- \text{Re}\beta^*\rho^*\omega^*k^* + \frac{1}{\text{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left[(\mu^* + \sigma_k\mu_T^*)\frac{\partial k^*}{\partial x_j^*}\right]. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Obdobně pro specifickou rychlost disipace ω (2.110) nabývá bezrozměrná transportní rovnice tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{\text{ref}}^2 u_{\text{ref}}^3}{\mu_{\text{ref}} \ell_{\text{ref}}} \left[\frac{\partial(\rho^*\omega^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^*\omega^*u_j^*)}{\partial x_j^*} \right] &= \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}{\ell_{\text{ref}}^2} \gamma_\omega \rho^* S^{*2} - \frac{\rho_{\text{ref}}^3 u_{\text{ref}}^4}{\mu_{\text{ref}}^2} \beta \rho^* \omega^{*2} + \\ &+ \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}{\ell_{\text{ref}}^2} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[(\mu^* + \sigma_\omega \mu_T^*) \frac{\partial \omega^*}{\partial x_j^*} \right] + \\ &+ \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}{\ell_{\text{ref}}^2} 2(1 - F_1^*) \frac{\rho^* \sigma_{\omega 2}}{\omega^*} \frac{\partial k^*}{\partial x_j^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial x_j^*}, \end{aligned} \quad (2.125)$$

kterou upravíme následovně

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho^*\omega^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^*\omega^*u_j^*)}{\partial x_j^*} &= \frac{1}{\text{Re}} \gamma_\omega \rho^* S^{*2} - \text{Re} \beta \rho^* \omega^{*2} + \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[(\mu^* + \sigma_\omega \mu_T^*) \frac{\partial \omega^*}{\partial x_j^*} \right] + \frac{1}{\text{Re}} 2(1 - F_1^*) \frac{\rho^* \sigma_{\omega 2}}{\omega^*} \frac{\partial k^*}{\partial x_j^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial x_j^*}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Model k - ω SST je v bezrozměrném tvaru přehledně zapsán v příloze B. Transformované rovnice zapíšeme spolu se systémem středovaných Navierových-Stokesových rovnic v bezrozměrném tvaru v kompaktní vektorové formě

$$\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \mathbf{f}^{*I}(\mathbf{w}^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial \mathbf{g}^{*I}(\mathbf{w}^*)}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial \mathbf{f}^{*V}(\mathbf{w}^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial \mathbf{g}^{*V}(\mathbf{w}^*)}{\partial y^*} \right] + \mathbf{s}^*(\mathbf{w}^*), \quad (2.127)$$

přičemž vektor konzervativních proměnných \mathbf{w}^* , kartézské složky nevazkého $\mathbf{f}^{*I}(\mathbf{w}^*)$, $\mathbf{g}^{*I}(\mathbf{w}^*)$ a vazkého $\mathbf{f}^{*V}(\mathbf{w}^*)$, $\mathbf{g}^{*V}(\mathbf{w}^*)$ konzervativního toku mají formálně shodný tvar s (2.112) - (2.114). Zdrojový člen $\mathbf{s}^*(\mathbf{w}^*)$ je v bezrozměrném tvaru dán předpisem

$$\mathbf{s}^*(\mathbf{w}^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \min\left(\frac{1}{\text{Re}}\mu_T^*S^{*2}, \text{Re}20\beta^*\rho^*\omega^*k^*\right) - \text{Re}\beta^*\rho^*\omega^*k^* \\ \frac{1}{\text{Re}}\gamma_\omega\rho^*S^{*2} - \text{Re}\beta\rho^*\omega^{*2} + \frac{1}{\text{Re}}2(1-F_1)\frac{\rho^*\sigma_{\omega 2}}{\omega^*}\left(\frac{\partial k^*}{\partial x^*}\frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} + \frac{\partial k^*}{\partial y^*}\frac{\partial \omega^*}{\partial y^*}\right) \end{bmatrix}. \quad (2.128)$$

Uvedený systém rovnic je možné diskretizovat v prostoru i čase pomocí *cell-centered* metody konečných objemů a dvoustupňové Rungeovy-Kuttovy metody ekvivalentním způsobem jako v kapitole 2.1 a 2.2. Poznamenejme, že ani zde se pro případ testovacích výpočtů neprojevil negativní vliv zdrojových členů na stabilitu numerického výpočtu.

Typ a způsob implementace okrajových podmínek na hranicích $\partial\Omega_I$, $\partial\Omega_O$ a $\partial\Omega_S$ zůstává oproti modelu Spalart-Allmaras formálně nezměněn. Předepisujeme zde $\frac{\partial k^*}{\partial n} = 0$ a $\frac{\partial \omega^*}{\partial n} = 0$. Pro bezrozměrné k^* a ω^* na vstupu dle (1.64) dále platí

$$\frac{\omega_{\text{inlet}}^* \rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}{\mu_{\text{ref}}} = (1 \div 10) \frac{u_{\text{inlet}}^* u_{\text{ref}}}{\ell_{\text{ref}}} \Rightarrow \omega_{\text{inlet}}^* = (1 \div 10) \frac{u_{\text{inlet}}^*}{\text{Re}}, \quad (2.129)$$

$$k_{\text{inlet}}^* u_{\text{ref}}^2 = 10^{-(2\div 5)} \nu_{\text{inlet}}^* \omega_{\text{inlet}}^* u_{\text{ref}}^2 \Rightarrow k_{\text{inlet}}^* = 10^{-(2\div 5)} \nu_{\text{inlet}}^* \omega_{\text{inlet}}^*. \quad (2.130)$$

Vektor konzervativních proměnných na vstupu můžeme ekvivalentním způsobem jako v (2.103) zapsat výrazem

$$\mathbf{w}_{\text{inlet}}^* = \begin{bmatrix} \rho_{\text{inlet}}^* \\ \rho_{\text{inlet}}^* u_{\text{inlet}}^* \\ \rho_{\text{inlet}}^* v_{\text{inlet}}^* \\ \rho_{\text{inlet}}^* e_{\text{inlet}}^* \\ \rho_{\text{inlet}}^* k_{\text{inlet}}^* \\ \rho_{\text{inlet}}^* \omega_{\text{inlet}}^* \end{bmatrix}, \quad (2.131)$$

přičemž hodnotu konstanty ve vztahu pro k_{inlet}^* , resp. ve vztahu pro ω_{inlet}^* , zvolíme v této práci 2, resp. 10.

Okrajová podmínka na stěně je pro turbulentní kinetickou energii k^* stejně jako v případě modelu Spalart-Allmaras pro modifikovanou turbulentní vazkost $\tilde{\nu}^*$ triviální, tj. $k_{\text{wall}}^* = 0$. Specifická rychlost disipace ω^* je však na stěně nenulová a její hodnotu (1.67) převedeme do bezrozměrného tvaru následovně

$$\frac{\omega_{\text{wall}}^* \rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}{\mu_{\text{ref}}} = 10 \frac{6\nu^* \nu_{\text{ref}}}{\beta_1 (\Delta d^*)^2 \ell_{\text{ref}}^2} \Rightarrow \omega_{\text{wall}}^* = 10 \frac{6\nu^*}{\text{Re}^2 \beta_1 (\Delta d^*)^2}. \quad (2.132)$$

Chceme-li pak vyjádřit vektor konzervativních proměnných $\mathbf{w}_{\text{wall}}^*$ ve fiktivních buňkách obměnou vztahu (2.108), určíme zde hodnotu ω^* pomocí lineární extrapolace z hodnot v buňce Ω_{i1} a na stěně, tj.

$$\mathbf{w}_{\text{wall}}^* = \begin{bmatrix} w_1^* \\ -w_2^* \\ -w_3^* \\ w_4^* \\ -w_5^* \\ 2w_1^* \omega_{\text{wall}}^* - w_6^* \end{bmatrix}. \quad (2.133)$$

Kapitola 3

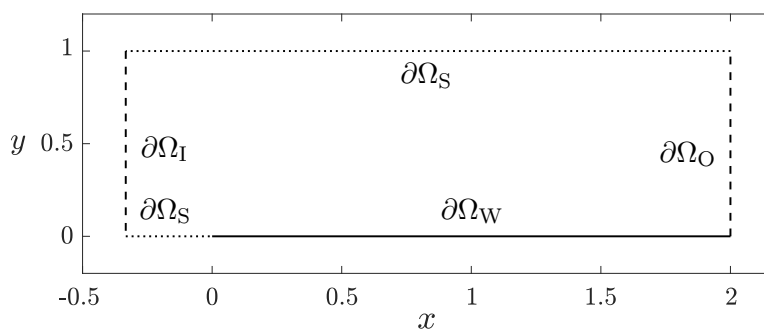
Verifikace implementovaných modelů turbulence

Pro ověření správnosti implementace numerického schématu pro řešení středovaných Navierových-Stokesových rovnic s připojenými modely turbulence Spalart-Allmaras a $k-\omega$ SST provedeme výpočet na dvou vybraných testovacích případech. Jedná se o turbulentní proudění v okolí rovné desky a zakřivené stěny, jenž jsou součástí databáze *NASA Turbulence Modeling Resource* (NASA TMR), [21], sloužící zejména pro účely verifikace implementovaných turbulentních modelů.

Vlastní numerické výsledky budeme porovnávat s výsledky uváděnými NASA TMR, a sice s výsledky řešiče CFL3D, což je implicitní řešič založený na *cell-centered* metodě konečných objemů formulované pro strukturované sítě s aproximací nevazkých toků pomocí Roeova schématu, [4].

3.1 Turbulentní proudění okolo rovné desky

Prvním testovacím případem je turbulentní proudění v okolí rovné desky, který se v [21] uvádí pod označením *Turbulent Flat Plate*. Geometrie oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ve tvaru obdélníku s hranicí $\partial\Omega \equiv \partial\Omega_I \cup \partial\Omega_S \cup \partial\Omega_W \cup \partial\Omega_O$ je zobrazena na obr. 10. Značení jednotlivých částí hranice odpovídá typu okrajových podmínek zavedených v kap. 2.3. Zavedeme-li jednotkovou referenční délku $\ell_{\text{ref}} = 1$ [m], pak část hranice $\partial\Omega_W$ představující povrch rovné desky je dlouhá $2\ell_{\text{ref}}$ a vstup do výpočetní oblasti $\partial\Omega_I$ je umístěn ve vzdálenosti $0.33\ell_{\text{ref}}$ od náběžné hrany desky. Na horní části hranice $\partial\Omega_S$, která je vzdálena ℓ_{ref} od pevné stěny, budeme předepisovat okrajovou podmínku symetrie, ačkoliv v [21] je uvažována okrajová podmínka typu *farfield*. Toto zjednodušení je motivováno skutečností, že tloušťka



Obr. 10: Oblast $\Omega \in \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega \equiv \partial\Omega_I \cup \partial\Omega_S \cup \partial\Omega_W \cup \partial\Omega_O$

turbulentní mezní vrstvy je pro tento konkrétní případ přibližně $0.03\ell_{\text{ref}}$, a tedy záměna těchto okrajových podmínek ve výšce ℓ_{ref} by neměla způsobit výrazné rozdílnosti v řešení.

Vzhledem ke zvolené referenční délce $\ell_{\text{ref}} = 1$ [m] jsou kartézské souřadnice x a y a jejich bezrozměrné ekvivalenty zaměnitelné. Často tak budeme uvádět délkové rozměry bez jednotky [m].

Na části hranice $\partial\Omega_I$ předepisujeme celkový tlak $p_t = 104190.5$ [Pa], celkovou teplotu $T_t = 302.4$ [K] a nulový úhel náběhu $\alpha = 0^\circ$. Vstupní Machovo číslo dosahuje $\text{Ma}_\infty = 0.2$ a proudění je dále charakterizováno Reynoldsovým číslem $\text{Re}_\infty = 5$ mil. Na výstupu uvažujeme atmosférický tlak $p_{\text{outlet}} = 101325$ [Pa].

Reynoldsovo číslo Re_∞ , které je definováno vztahem

$$\text{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty \ell_{\text{ref}}}{\mu_\infty}, \quad (3.1)$$

však obecně nemusí odpovídat referenčnímu Reynoldsovu číslu Re (2.19), které vystupuje v rovnicích (2.28) a (2.127), jelikož referenční hodnoty veličin se nutně nemusí shodovat s hodnotami na vstupu s indexem ∞ . V této práci předepisujeme na vstupu celkový tlak a nabízí se tedy volba $p_{\text{ref}} \equiv p_t$. Pak na základě zavedených bezrozměrných veličin (2.15) zřejmě platí $u_{\text{ref}} = \sqrt{\frac{p_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}}}} \neq u_\infty$. Toto tvrzení můžeme ověřit přímým výpočtem.

Využijeme-li vztahu z termodynamiky, [28],

$$\frac{p_t}{p} = \left(\frac{T_t}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\text{Ma}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (3.2)$$

pak lze statickou teplotu a statický tlak na vstupu do výpočetní oblasti vyjádřit ve tvaru

$$T_\infty = \frac{T_t}{1 + \frac{\gamma-1}{2}\text{Ma}_\infty^2} = 300 \text{ [K]}, \quad \text{a} \quad p_\infty = p_t \left(\frac{T_t}{T_\infty}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 101324.9 \text{ [Pa]}. \quad (3.3)$$

Hustotu a velikost vektoru rychlosti na vstupu určíme na základě stavové rovnice a definice rychlosti zvuku jako

$$\rho_\infty = \frac{p_\infty}{rT_\infty} = 1.177 \text{ [kg} \cdot \text{m}^{-3}] \quad \text{a} \quad u_\infty = \text{Ma}_\infty \sqrt{\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}} = 69.44 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]. \quad (3.4)$$

Pro dynamickou vazkost na vstupu pak lze psát

$$\mu_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty \ell_{\text{ref}}}{\text{Re}_\infty} = 1.634 \cdot 10^{-5} \text{ [Pa} \cdot \text{s]}. \quad (3.5)$$

Zvolme nyní referenční hodnoty pro tlak $p_{\text{ref}} \equiv p_t$, teplotu $T_{\text{ref}} \equiv T_t$ a dynamickou vazkost $\mu_{\text{ref}} \equiv \mu_\infty$. Ze stavové rovnice formulované pro referenční veličiny a z definice bezrozměrné teploty (2.15) získáváme

$$\rho_{\text{ref}} = \frac{p_{\text{ref}}}{T_{\text{ref}} r_{\text{ref}}} = 1.20 \text{ [kg} \cdot \text{m}^{-3}] \quad \text{a} \quad u_{\text{ref}} = \sqrt{r_{\text{ref}} T_{\text{ref}}} = 294.6 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]. \quad (3.6)$$

Zřejmě tedy platí $u_{\text{ref}} \neq u_\infty$ a $\rho_{\text{ref}} \neq \rho_\infty$, z čehož vyplývá $\text{Re}_\infty \neq \text{Re}$. Pomocí uvedených referenčních hodnot veličin můžeme vypočítat Reynoldsovo číslo Re , které vystupuje v rovnicích (2.28) a (2.127) a je tedy přímo vstupem do numerického výpočtu,

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}} \ell_{\text{ref}}}{\mu_{\text{ref}}} \approx 21.6 \text{ mil}. \quad (3.7)$$

Referenční hodnoty zbylých veličin jsou již dopočítány přímo z definic (2.13) - (2.15).

3.1.1 Diskretizace výpočtové oblasti

V kap. 1.3.3 bylo zmíněno, že pro správné zachycení turbulentní mezní vrstvy je nutné, aby pro první buňku u stěny platilo $y^+ < 1$. Vzhledem k výrazným změnám průběhu veličin v blízkosti stěny však není možné bezrozměrnou vzdálenost od stěny určit apriori, a proto je při diskretizaci oblasti nutné výšku první buňky u stěny, kterou zde označíme symbolem y_1 , vhodným způsobem odhadnout.

V obecném případě se pro odhad y_1 vychází ze známých výsledků právě pro případ turbulentního proudění v okolí rovné desky. Definujme tzv. součinitel tření na stěně C_f jako podíl smykového napětí na stěně τ_w a dynamického tlaku na vstupu, tj.

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2}. \quad (3.8)$$

V literatuře se uvádí řada aproximací průběhu C_f podél rovné desky, přičemž v této práci budeme uvažovat vztah dle [24],

$$C_f = 0.0592 \text{Re}_x^{-\frac{1}{5}}, \quad (3.9)$$

kde Re_x je Reynoldsovo číslo definované pomocí hodnot veličin na vstupu ρ_∞ , u_∞ a μ_∞ a vzdálenosti od náběžné hrany desky x . Z rovnice (3.8) můžeme nyní vyjádřit smykové napětí na stěně τ_w a následně hodnotu třecí rychlosti u_τ z obecné definice (1.70), kde můžeme

zaměnit ρ za hustotu plynu na vstupu ρ_∞ , tj.

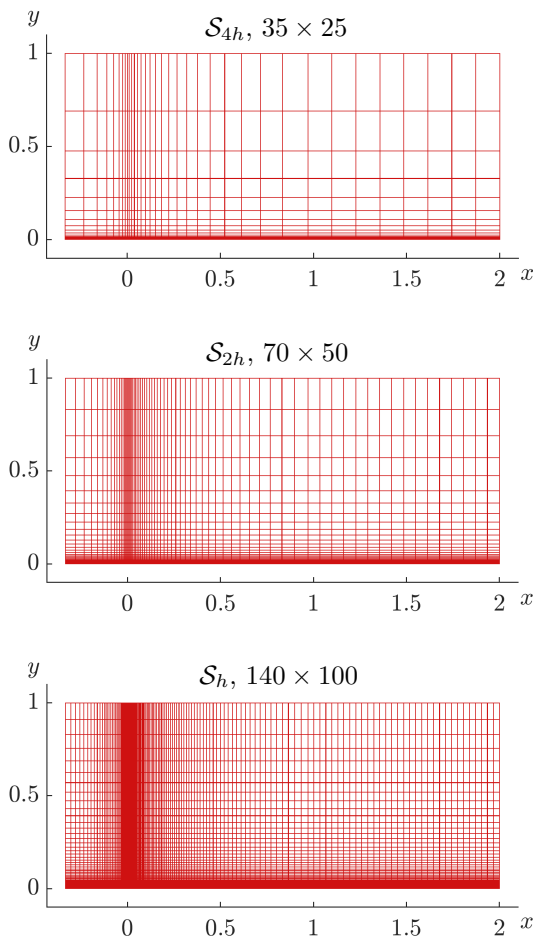
$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_\infty}} = \sqrt{\frac{1}{2}C_f u_\infty^2}. \quad (3.10)$$

Z definice bezrozměrné vzdálenosti (1.68) poté obdržíme aproximaci výšky první buňky od stěny vyjádřenou pomocí hodnot na vstupu a požadované hodnoty y^+ ,

$$y_1 = \frac{y_1^+ \mu_\infty}{\rho_\infty u_\tau}. \quad (3.11)$$

přičemž po dosazení s uvážením délky mezní vrstvy $x = 2$ [m] a $y_1^+ = 0.9$ je pro uvažovaný případ výška prvního kontrolního objemu $y_1 \approx 5.2 \cdot 10^{-6}$ [m].

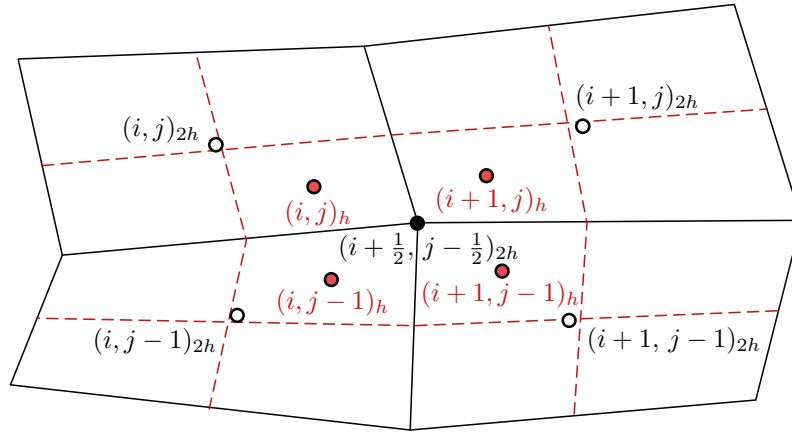
Stacionární řešení systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic s připojeným modelem turbulence (2.28) nebo (2.127) budeme hledat pomocí metody ustalování, kdy při výše uvedených stacionárních okrajových podmínkách dosahujeme ustáleného stavu pro $t \rightarrow \infty$. Jako počáteční podmínky můžeme na celé oblasti Ω předsat hodnoty vektoru konzervativních proměnných na vstupu (2.103) nebo (2.131). Vraťme se nyní k CFL podmínce (2.87), kterou je omezen časový krok Δt . Velikost časového kroku je zřejmě značně



Obr. 11: Výpočetní oblast diskretizovaná pomocí strukturovaných čtyřúhelníkových sítí o 35×25 , 70×50 a 140×100 buňkách

ovlivněna rychlostí proudění a rozměry kontrolních objemů. Vzhledem k tomu, že uvažujeme subsonické proudění při $Ma_\infty = 0.2$ a navíc požadujeme $y_1^+ < 1$, lze očekávat, že časový krok bude dosahovat nízkých hodnot a rychlost konvergence explicitního schématu bude rovněž nízká.

Pro urychlení konvergence k ustálenému stavu byly během výpočtu použity tři strukturované čtyřúhelníkové sítě s postupně narůstajícím počtem buněk, které označíme \mathcal{S}_{4h} , \mathcal{S}_{2h} a \mathcal{S}_h , obr. 11. První síť \mathcal{S}_{4h} čítá 35×25 kontrolních objemů a je zahuštěna v blízkosti náběžné hrany desky a u stěny tak, že první buňka u stěny splňuje $y_1^+ \approx 4$. Po provedení výpočtu na této síti byly výsledky interpolovány na síť \mathcal{S}_{2h} o 70×50 buňkách a $y_1^+ \approx 2$, která vznikla dělením kontrolních objemů původní sítě \mathcal{S}_{4h} na polovinu v obou směrech. Interpolované výsledky slouží jako počáteční podmínka pro výpočet na síti \mathcal{S}_{2h} , čímž dochází k redukci počtu iterací iteračního procesu. Druhým faktorem, který má za následek zkrácení numerického výpočtu, je kromě samotného počtu elementů sítě právě hodnota y_1^+ , jelikož zřejmě z nutné podmínky stability (2.87) musí za stejných podmínek platit $\Delta t_{4h} > \Delta t_{2h}$, a tedy ustáleného stavu na síti \mathcal{S}_{4h} je teoreticky dosaženo během nižšího počtu iterací než na síti \mathcal{S}_{2h} . Obdobný postup byl aplikován i na třetí síť \mathcal{S}_h s 140×100 buňkami a $y_1^+ \approx 1$, která již vyhovuje požadované výšce y_1 první buňky od stěny.



Obr. 12: Síť \mathcal{S}_{2h} (černě) a síť \mathcal{S}_h (červeně)

Samotná interpolace byla provedena následovně. Uvažujme situaci na obr. 12 a označme symbolem ξ_{ij}^{2h} řešení ve středu kontrolního objemu Ω_{ij} čtyřúhelníkové sítě \mathcal{S}_{2h} , kterým mohou být složky vektoru konzervativních proměnných, turbulentní vazkost či další veličiny. Nejprve interpolujeme řešení do uzlových bodů sítě pomocí plochou váženého průměru z hodnot v okolních buňkách, obr. 12,

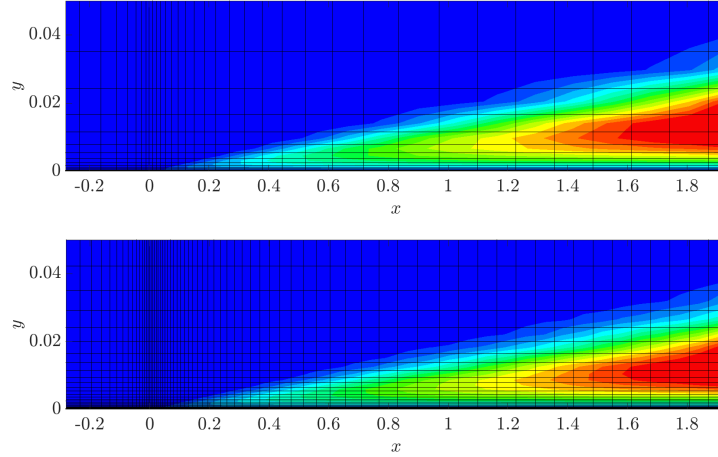
$$\xi_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{2h} = \frac{\sum_{r \in \mathcal{N}} |\Omega_r^{2h}| \xi_r^{2h}}{\sum_{r \in \mathcal{N}} |\Omega_r^{2h}|}, \quad (3.12)$$

kde $\mathcal{N} = \{ij, i+1j, i+1j+1, ij-1\}$ je množina indexů kontrolních objemů sousedících s uzlem $(i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2})$. Řešení ξ_{ij}^h poté určíme jako aritmetický průměr

$$\xi_{ij}^h = \frac{1}{2} \left(\xi_{ij}^{2h} + \xi_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{2h} \right). \quad (3.13)$$

Na obr. 13 jsou zobrazeny kontury turbulentní vazkosti modelu Spalart-Allmaras získané numerickým řešením systému rovnic (2.28) na síti \mathcal{S}_{4h} a kontury interpolované turbulentní vazkosti na síti \mathcal{S}_{2h} . Je zřejmé, že výsledky se kvalitativně příliš neliší, a jedná se tedy o vhodnou aproximaci počáteční podmínky pro výpočet na síti \mathcal{S}_{2h} .

Poznamenejme, že vzhledem k vysoké časové náročnosti byly výpočty prováděny na síti s nejvýše 140×100 buňkami a $y_1^+ \approx 1$, ačkoliv numerické výsledky NASA TMR, se kterými budeme srovnávat vlastní numerické řešení, byly realizovány na strukturované čtyřúhelníkové síti o 544×384 buňkách s $y_1^+ \approx 0.1$. Tento rozdíl může vést k jistým odchylkám v řešení, ale jak uvidíme dále, na základě samotných numerických výsledků lze usuzovat, že použitá síť aproximuje oblast $\Omega \in \mathbb{R}^2$ při uvážení daných modelů turbulence dostatečně přesně a hlavní jevy vyskytující se v řešení byly na síti 140×100 zachyceny.

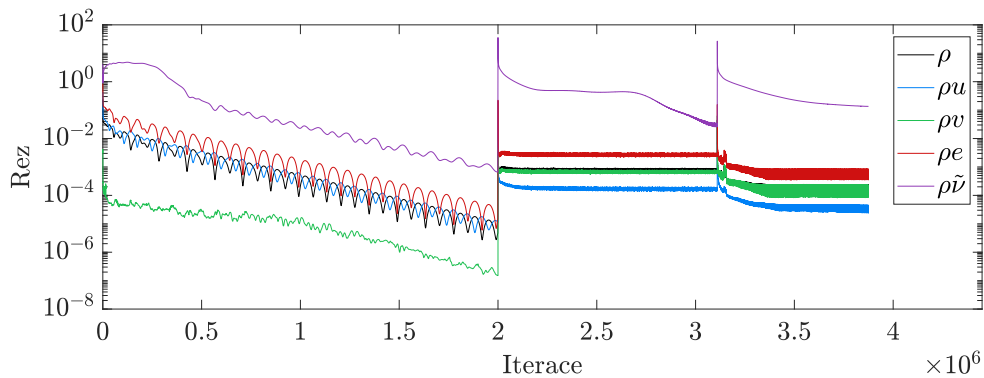


Obr. 13: Ukázka řešení na síti \mathcal{S}_{4h} (nahore) a interpolovaného řešení na síti \mathcal{S}_{2h} (dole)

Konstantu CFL vystupující v podmínce stability (2.87) jsme v tomto případě zvolili $CFL = 0.9$. Konvergenci použité numerické metody budeme v této práci měřit hodnotou rezidua, které zavedeme jako diskrétní L_2 normu z časové derivace s -té složky vektoru konzervativních proměnných dle vztahu

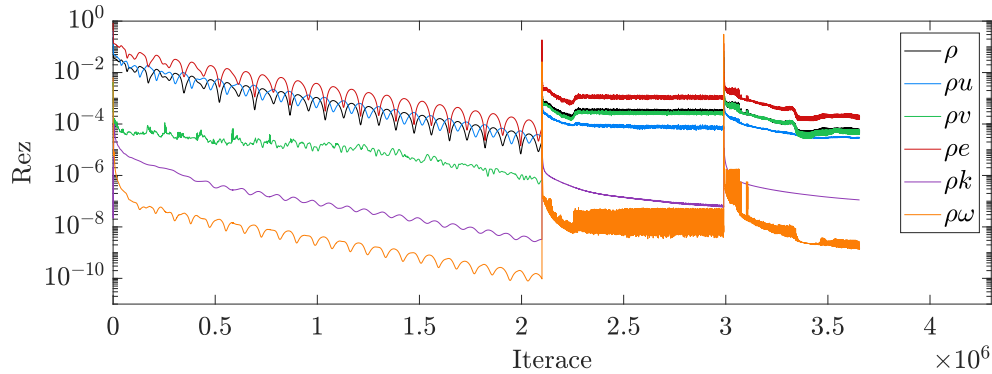
$$\text{Rez}(w_s) = \sqrt{\frac{\sum_{ij} |\Omega_{ij}| \left[\frac{(w_s)_{ij}^{n+1} - (w_s)_{ij}^n}{\Delta t} \right]^2}{\sum_{ij} |\Omega_{ij}|}}. \quad (3.14)$$

Řešení poté považujeme za ustálené pokud hodnota $\text{Rez}(w_s)$ dosáhla dostatečně nízké hodnoty a dále se již nemění.



Obr. 14: Průběh konvergence výpočtu s použitím modelu Spalart-Allmaras

Na obr. 14 a 15 jsou zobrazeny průběhy konvergence numerické metody navržené pro řešení turbulentního proudění stlačitelné tekutiny v případě oblasti s rovnou deskou a s využitím obou modelů turbulence. Výrazné špičkové hodnoty v průběhu rezidua Rez jednotlivých složek vektoru konzervativních proměnných \mathbf{w} představují přechod na jemnější výpočetní síť. Jak již bylo naznačeno, použitá numerická metoda konverguje relativně pomalu k ustálenému řešení, přičemž největší počet iterací k nalezení ustáleného stavu vyžadují právě složky obsahující turbulentní veličiny.



Obr. 15: Průběh konvergence výpočtu s použitím modelu $k-\omega$ SST

Porovnání vlastních numerických výsledků s výsledky NASA TMR provedeme nejprve samostatně pro model Spalart-Allmaras a $k-\omega$ SST a rozdíly v řešení při použití jednotlivých modelů uvedeme v samostatné kapitole. Pro srovnání budeme využívat bezrozměrných veličin proudového pole vzhledem k hodnotám veličin ve volném proudě, tj. na vstupu do výpočtové oblasti.

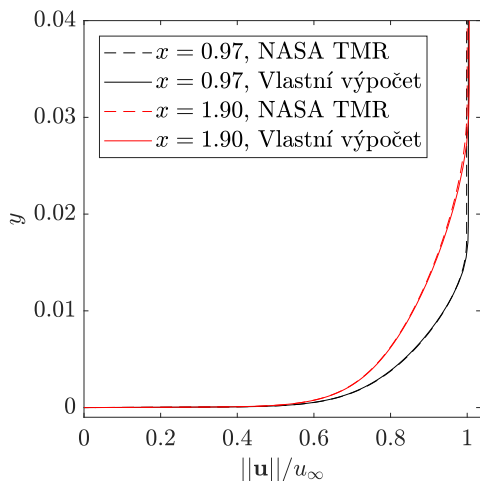
3.1.2 Model Spalart-Allmaras

Obr. 16 zobrazuje průběh bezrozměrné rychlosti u stěny v místech $x = 0.97$ a $x = 1.90$ pro případ numerického řešení s turbulentním modelem Spalart-Allmaras. Získané profily rychlosti $\|u\| = \sqrt{u^2 + v^2}$ jsou v obou místech téměř identické s profily NASA TMR. Na obr. 17 je srovnání průběhu součinitele tření na stěně C_f podél rovné desky získaného vlastním numerickým výpočtem, výsledků NASA TMR a teoretického průběhu daného vztahem (3.9).

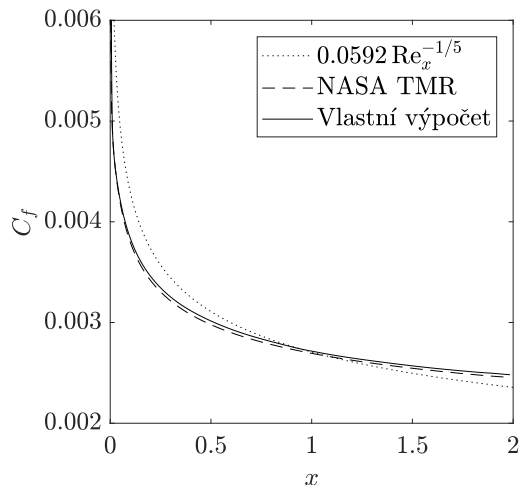
Kvalitativní srovnání numerického řešení přináší obr. 18, kde je zobrazen detail kontur turbulentní vazkosti převedené do bezrozměrného tvaru pomocí molekulární viskozity volného proudy. Na stěně je turbulentní vazkost nulová, směrem od stěny prudce narůstá a na rozhraní mezní vrstvy a volného proudy začíná klesat. Současně narůstá turbulentní vazkost ve směru x se zvyšující se vzdáleností od náběžné hrany rovné desky. S výsledky NASA TMR uvedenými vlevo vykazují vlastní výsledky napravo dobrou shodu. Hodnoty bezrozměrné turbulentní vazkosti byly pro zobrazení omezeny na interval $\langle 0, 300 \rangle$ a uvedené kontury tedy nemusí nutně zohledňovat minimální a maximální hodnoty.

Hodnoty turbulentní vazkosti tedy v tomto případě převyšují hodnoty molekulární vazkosti o dva řády, čímž lze odůvodnit i skutečnost, že reziduum složky $\rho\tilde{\nu}$ vektoru konzervativních proměnných \mathbf{w} (obr. 14) se během výpočtu pohybovalo o několik řádů výše než rezidua ostatních složek, jejichž bezrozměrné hodnoty dosahují řádově jednotek.

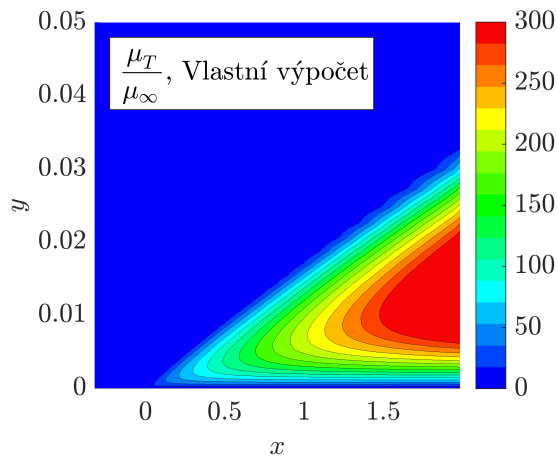
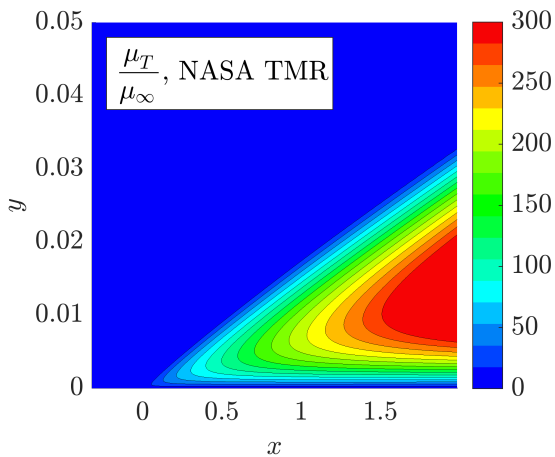
Průběh bezrozměrné turbulentní vazkosti v řezu $x = 0.97$ porovnává obr. 19. V oblasti přechodu z mezní vrstvy do volného proudy, tj. ve výšce $y \approx 0.017$, je již mírně patrný vliv nižšího počtu buněk použité výpočetní sítě než má síť využitá pro výpočty NASA TMR. Na obr. 20 je zobrazeno maximum bezrozměrné turbulentní vazkosti jako funkce x .



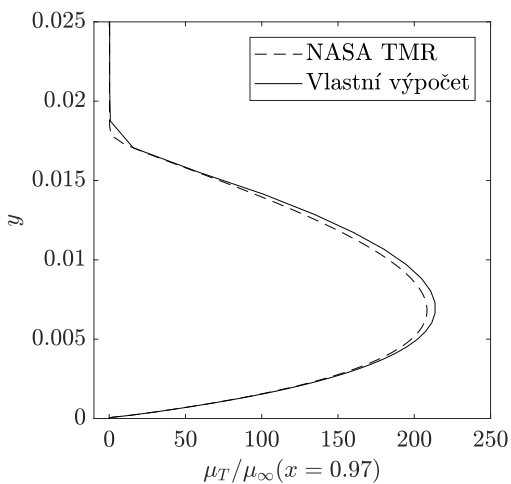
Obr. 16: Průběh bezrozměrné velikosti rychlosti $\|\mathbf{u}\|/u_\infty$ v místě $x = 0.97$ a $x = 1.90$



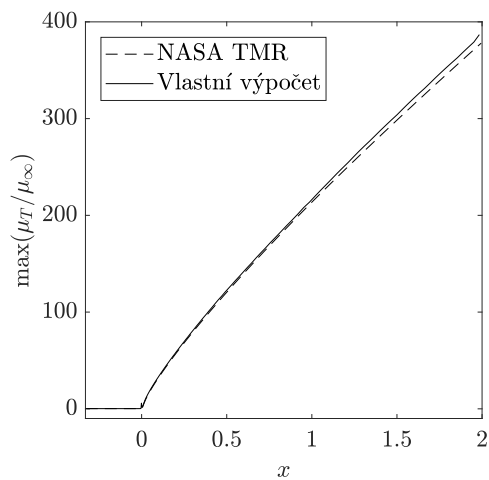
Obr. 17: Průběh součinitele tření na stěně C_f podél desky



Obr. 18: Kontury bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞

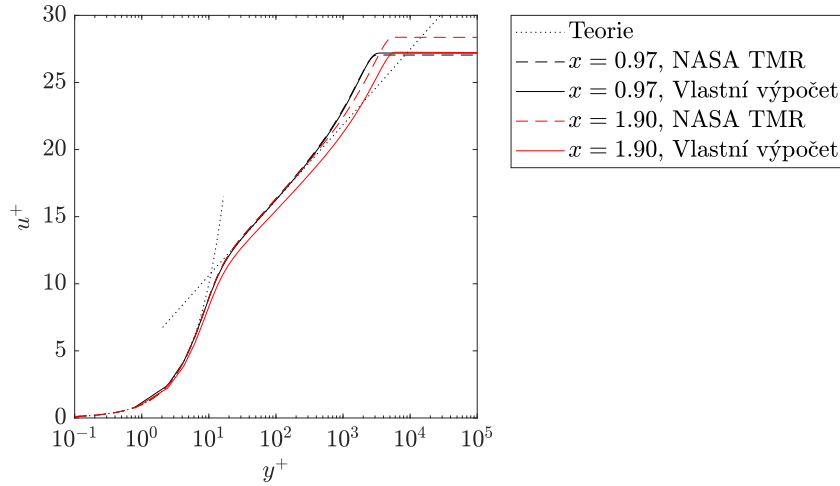


Obr. 19: Průběh bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞ v místě $x = 0.97$



Obr. 20: Maximum bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞ jako funkce x

Závislost bezrozměrné rychlosti u^+ na bezrozměrné vzdálenosti od stěny y^+ , o které bylo pojednáno v kap. 1.3.3, je vykreslena na obr. 21. Průběh je opět porovnáván v místech $x = 0.97$ a $x = 1.90$ spolu s teoretickou závislostí $u^+ = y^+$ platnou pro $y^+ < 5$, resp. závislostí (1.69) platnou pro $30 < y^+ < 200$.

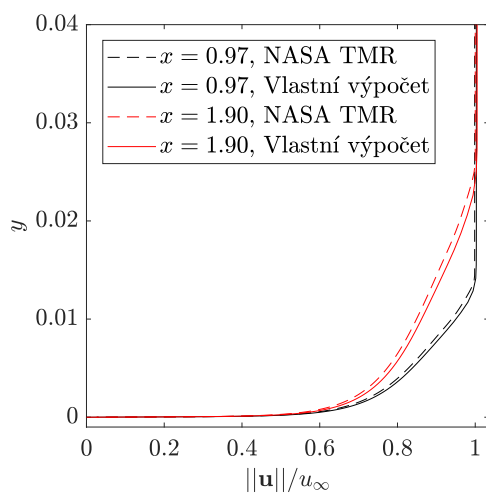


Obr. 21: Závislost bezrozměrné rychlosti u^+ na bezrozměrné vzdálenosti od stěny y^+ v místě $x = 0.97$ a $x = 1.90$

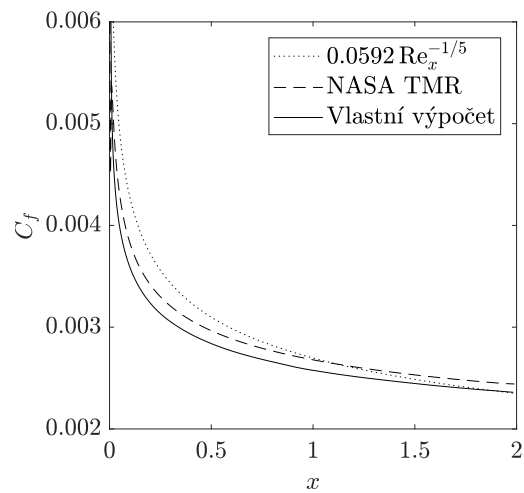
3.1.3 Model $k-\omega$ SST

V případě modelu $k-\omega$ SST jsou již numerické výsledky zatíženy větší chybou než v případě modelu Spalart-Allmaras. Model $k-\omega$ SST je zřejmě citlivější na vzdálenost první buňky sítě od stěny y_1 . Tato citlivost vyplývá ze způsobu implementace okrajové podmínky pro specifickou rychlost disipace ω na stěně (1.67), jejíž hodnota odpovídá $\mathcal{O}(10/y_1^2)$.

Obr. 22 zobrazuje průběhy bezrozměrné rychlosti v blízkosti stěny v místech $x = 0.97$ a $x = 1.90$. Ačkoliv vlastní numerické výsledky jsou v dobré shodě s výsledky NASA TMR,



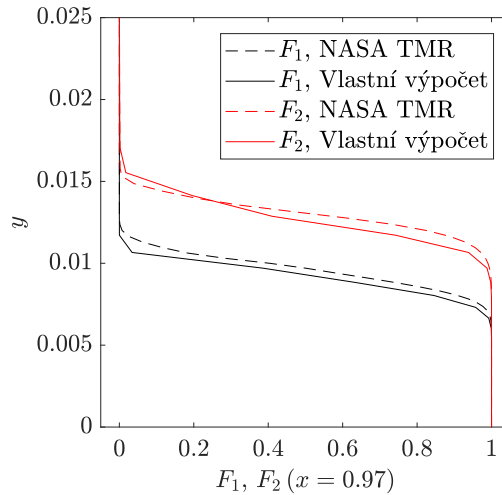
Obr. 22: Průběh bezrozměrné velikosti rychlosti $\|\mathbf{u}\|/u_\infty$ v místě $x = 0.97$ a $x = 1.90$



Obr. 23: Průběh součinitele tření na stěně C_f podél desky

lze oproti řešení s použitím modelu Spalart-Allmaras již jednotlivé profily rychlosti rozeznat. Obdobná situace nastává v případě průběhu součinitele tření na stěně C_f podél rovné desky na obr. 23.

Přechodové funkce F_1 a F_2 modelu $k-\omega$ SST jsou vykresleny v řezu $x = 0.97$ na obr. 24. V jisté vzdálenosti od stěny obě funkce prudce klesají z hodnoty 1 k nule. Zde se projevuje vliv nízkého počtu buněk výpočetní sítě, jelikož samotný pokles funkcí je zachycen na přibližně pěti buňkách, a dochází tak k určité disipaci v numerickém řešení.



Obr. 24: Průběh přechodových funkcí SST modelu F_1 a F_2 v místě $x = 0.97$

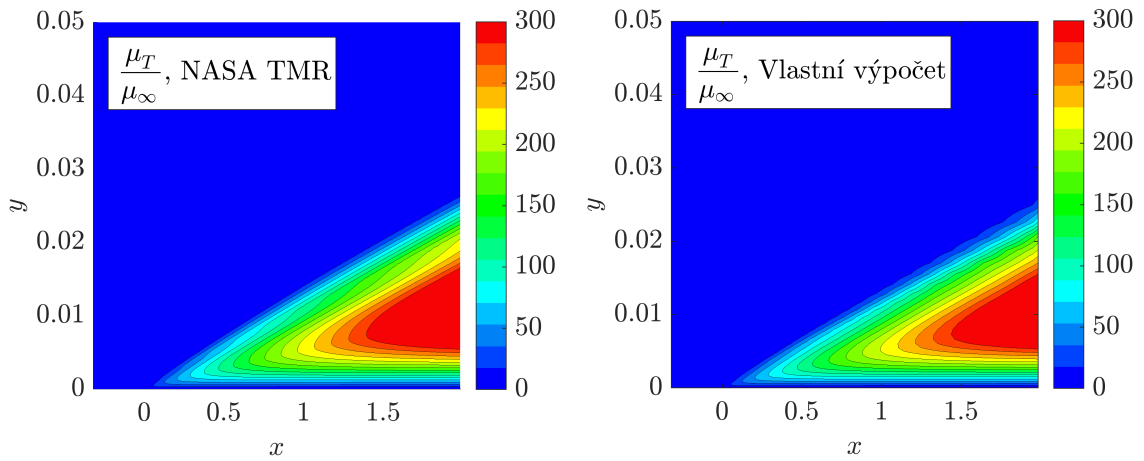
Obr. 25 - 27 zobrazují kontury bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞ , bezrozměrné turbulentní kinetické energie k/a_∞^2 a bezrozměrné specifické rychlosti disipace $\omega\mu_\infty/(\rho_\infty a_\infty^2)$ v blízkosti stěny, přičemž výsledky NASA TMR jsou uvedeny vlevo a výsledky vlastního numerického výpočtu vpravo. Kontury turbulentní vazkosti modelu Spalart-Allmaras (obr. 18) jsou kvalitativně shodné s konturami modelu $k-\omega$ SST (obr. 25), avšak výška mezní vrstvy dosahuje pro případ modelu $k-\omega$ SST nižších hodnot.

Turbulentní kinetická energie převedená do bezrozměrného tvaru pomocí rychlosti zvuku ve volném proudu (obr. 26) je stejně jako turbulentní vazkost na stěně nulová, její maximum se však soustřeďuje těsně za náběžnou hranou rovné desky ve směru proudění. S rostoucí vzdáleností od náběžné hrany turbulentní kinetická energie klesá. I v tomto případě byly hodnoty k/a_∞^2 pro potřeby zobrazení omezeny, a to na interval $\langle 0, 2 \cdot 10^{-4} \rangle$.

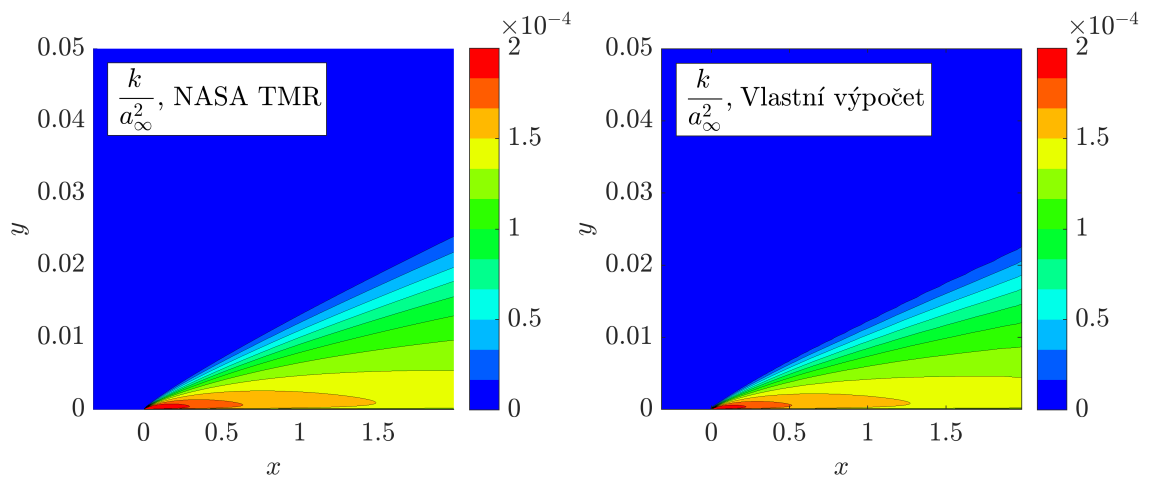
Nejinak tomu bylo i v případě bezrozměrné specifické rychlosti disipace, kdy jsou na obr. 27 zobrazeny hodnoty z intervalu $\langle 0, 10^{-6} \rangle$, ačkoliv v těsné blízkosti stěny dosahuje $\omega\mu_\infty/(\rho_\infty a_\infty^2)$ o několik řádů vyšších hodnot. Se vzrůstající vzdáleností od stěny hodnoty ω prudce klesají, přičemž na rozhraní mezní vrstvy a volného proudu se mění skokově.

Z průběhu bezrozměrné turbulentní vazkosti v místě $x = 0.97$ na obr. 28 je patrné, že na užité výpočetní síti se nepodařilo korektně zachytit zlom v horní části průběhu, kde turbulentní vazkost směrem od stěny klesá. Na základě numerických experimentů bylo zjištěno, že tento jev je způsoben aktivací členu obsahující funkci F_2 ve vztahu pro turbulentní vazkost (1.62). V databázi NASA TMR se vyskytují numerické výsledky pro oblast rovné desky s použitím modelu $k-\omega$ BSL, který pro určení turbulentní vazkosti nevyužívá funkce F_2 a zmíněný zlom se v tomto případě již neobjevuje.

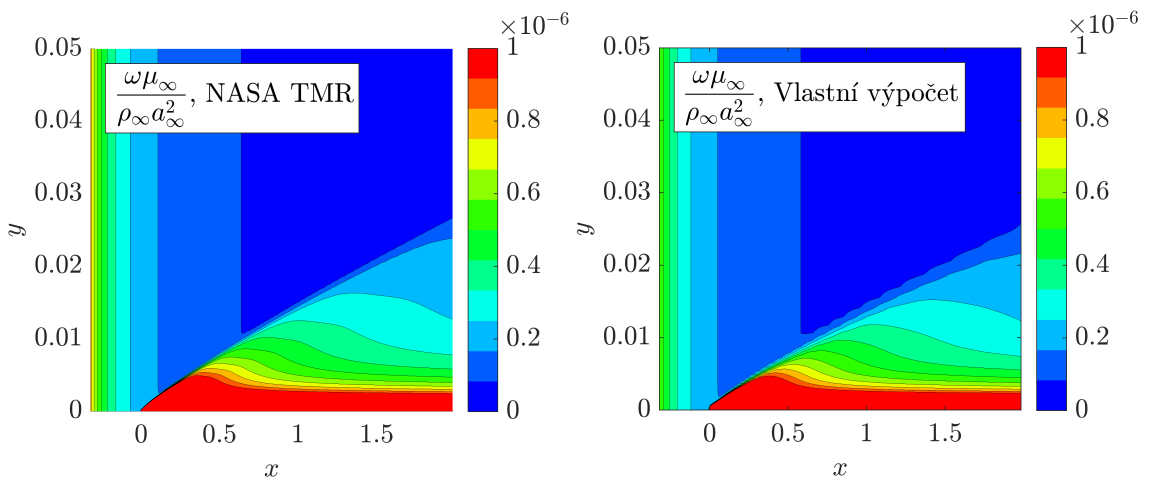
Maximum bezrozměrné turbulentní vazkosti jako funkce x je vyneseno na obr. 29. Na náběžné hraně se objevuje lokální nárůst turbulentní vazkosti způsobený nárůstem turbulentní kinetické energie, který nemá fyzikální opodstatnění, ale souvisí spíše s nedo-



Obr. 25: Kontury bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞



Obr. 26: Kontury bezrozměrné turbulentní kinetické energie k/a_∞^2

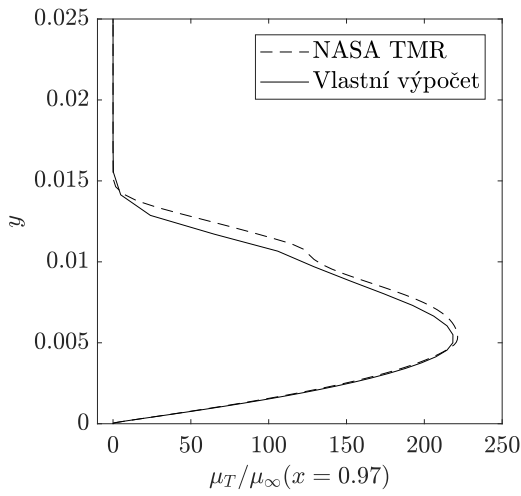


Obr. 27: Kontury bezrozměrné specifické rychlosti disipace $\omega\mu_\infty/(\rho_\infty a_\infty^2)$

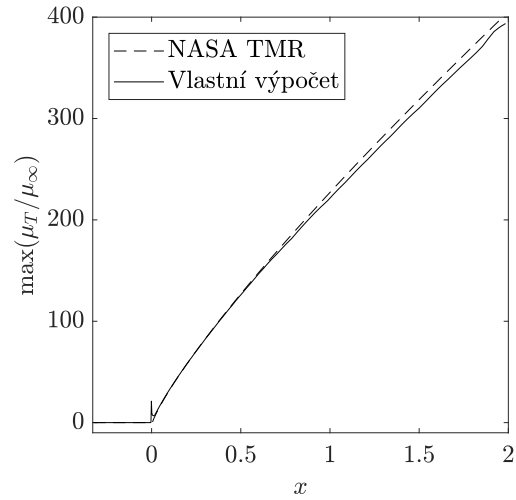
statečným tlumením k v okolí stagnačního bodu pomocí limiteru produkce \tilde{P}_k daného vztahem (1.54), kterým byl produkční člen omezen na dvacetinásobek destruktivního členu.

Obr. 30 a 31 zobrazují průběhy bezrozměrné turbulentní kinetické energie a specifické rychlosti disipace v místě $x = 0.97$. Lze říci, že i ve velmi těsné blízkosti stěny je vlastní numerické řešení velice blízké výsledkům NASA TMR. V průběhu obou turbulentních veličin se v přechodu z mezní vrstvy do vnějšího proudu objevuje skoková změna, která je pro model $k-\omega$ SST v blízkosti vnější hranice turbulentní oblasti typická, [7]. V oblasti ostrého poklesu obou průběhů lze pozorovat mírný vliv numerické vazkosti, kdy je skok vyhlazený díky minmod limiteru užitému v numerickém schématu.

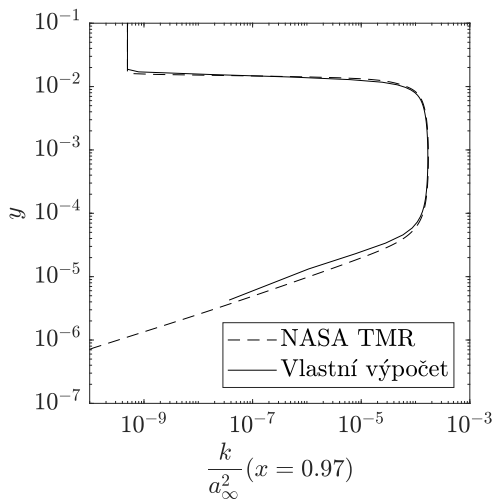
Na obr. 32 je vykreslena závislost bezrozměrné rychlosti u^+ na bezrozměrné vzdálenosti od stěny y^+ v místě $x = 0.97$ a $x = 1.90$ pro případ modelu $k-\omega$ SST. I zde je vlastní průběh v dobré shodě s výsledky NASA TMR.



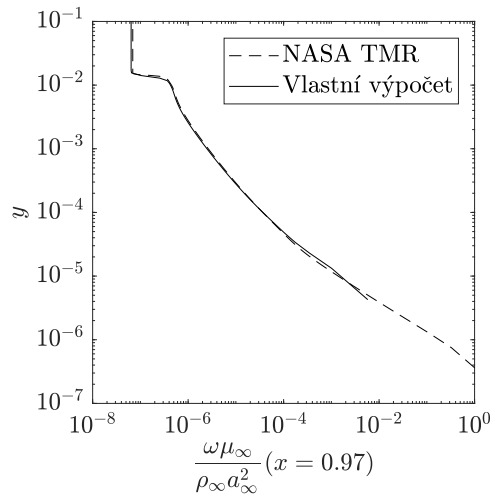
Obr. 28: Průběh bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞ v místě $x = 0.97$



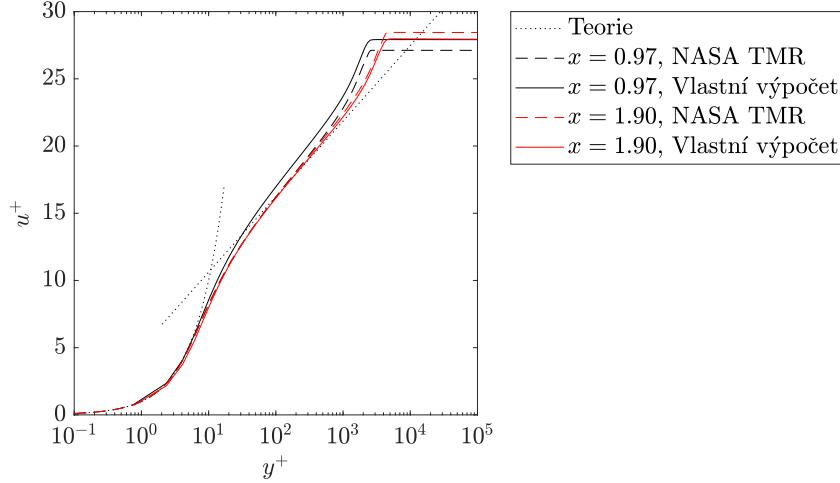
Obr. 29: Maximum bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞ jako funkce x



Obr. 30: Průběh bezrozměrné turbulentní kinetické energie k/a_∞^2 v místě $x = 0.97$



Obr. 31: Průběh bezrozměrné specifické rychlosti disipace $\omega\mu_\infty/(\rho_\infty a_\infty^2)$ v místě $x = 0.97$



Obr. 32: Závislost bezrozměrné rychlosti u^+ na bezrozměrné vzdálenosti od stěny y^+ v místě $x = 0.97$ a $x = 1.90$

3.2 Turbulentní proudění okolo zakřivené stěny

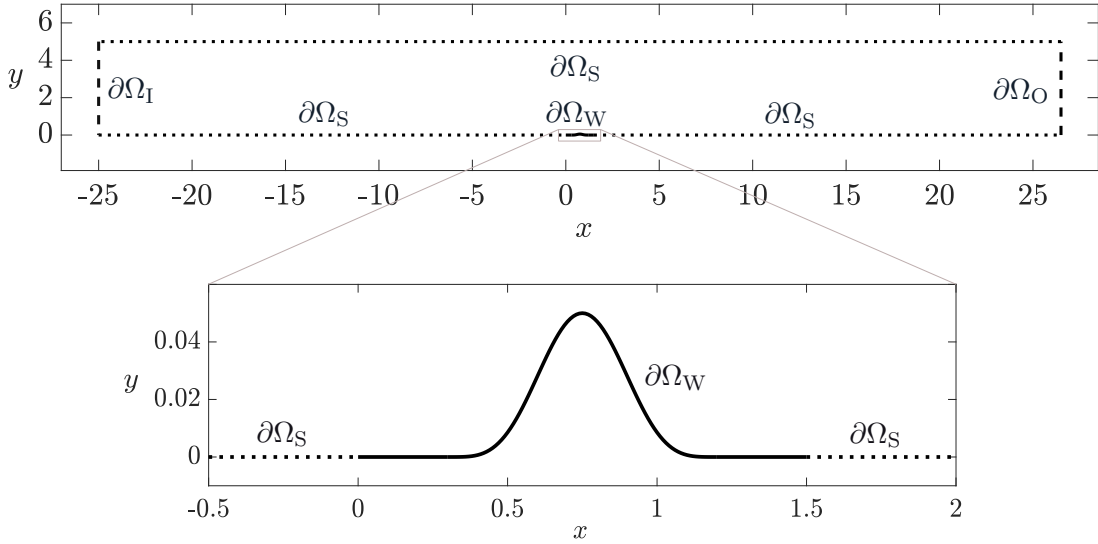
Druhým testovacím příkladem, na kterém budeme verifikovat implementované turbulentní modely, je turbulentní proudění okolo zakřivené stěny, jež je v databázi NASA TMR, [21], označován jako *Bump-in-channel*. Od případu proudění v okolí rovné desky se liší přítomností tlakových gradientů podél stěny, které jsou způsobeny jejím zakřivením. Geometrie oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega \equiv \partial\Omega_I \cup \partial\Omega_S \cup \partial\Omega_W \cup \partial\Omega_O$ je zobrazena na obr. 33. Opět zde zavedeme jednotkovou referenční délku $\ell_{\text{ref}} = 1$ [m]. Pevná adiabatická stěna $\partial\Omega_W$ je umístěna na spodní hranici výpočtové oblasti Ω a sahá od $x = 0$ do $x = 1.5$, přičemž samotné zakřivení se nachází v intervalu $\langle 0.3, 1.2 \rangle$. Analytický předpis pro tvar stěny je dán funkcí

$$y = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x < 0.3, \\ 0.05 \sin^4 \left[\pi \left(\frac{x}{0.9} - \frac{1}{3} \right) \right] & \text{pro } 0.3 \leq x \leq 1.2, \\ 0 & \text{pro } 1.2 < x \leq 1.5. \end{cases} \quad (3.15)$$

Vstup $\partial\Omega_I$ výpočetní oblasti Ω , resp. její výstup $\partial\Omega_O$, je umístěn ve vzdálenosti $25\ell_{\text{ref}}$ od náběžné hrany stěny, resp. od hrany odtokové. Na spodní i horní části hranice $\partial\Omega_S$, které jsou od sebe vzdáleny $5\ell_{\text{ref}}$, předepisujeme okrajovou podmínku symetrie.

Hodnoty veličin předepisovaných na hranici výpočtové oblasti $\partial\Omega$ zůstávají stejné jako v případě rovné desky, tedy na vstupu $\partial\Omega_I$ předepisujeme celkový tlak $p_t = 104190.5$ [Pa], celkovou teplotu $T_t = 302.4$ [K] a nulový úhel náběhu $\alpha = 0^\circ$ a na výstupu $\partial\Omega_O$ uvažujeme atmosférický tlak $p_{\text{outlet}} = 101325$ [Pa]. Vstupní Machovo číslo Ma_∞ dosahuje opět hodnoty 0.2, ale Reynoldsovo číslo Re_∞ charakterizující danou úlohu je v tomto případě rozdílné, a sice 3 miliony. Dynamická vazkost tekutiny tedy na základě dopočítané hodnoty hustoty a rychlosti volného proudu (3.4) činí

$$\mu_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty \ell_{\text{ref}}}{\text{Re}_\infty} = 2.724 \cdot 10^{-5} \text{ [Pa} \cdot \text{s]}. \quad (3.16)$$

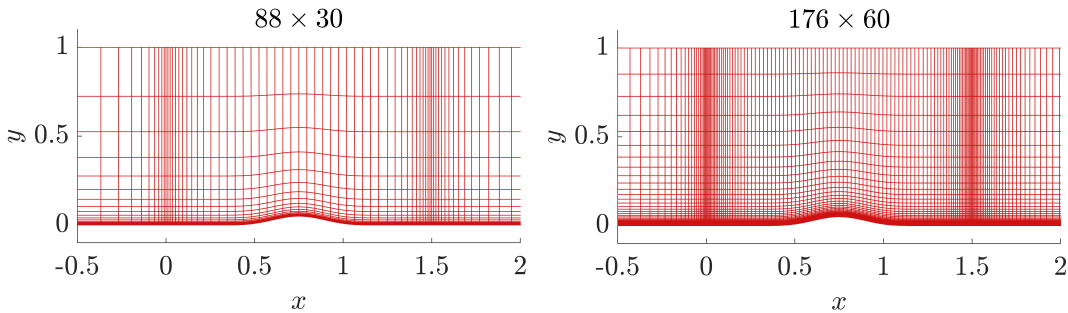


Obr. 33: Oblast $\Omega \in \mathbb{R}^2$ s hranicí $\partial\Omega \equiv \partial\Omega_I \cup \partial\Omega_S \cup \partial\Omega_W \cup \partial\Omega_O$

3.2.1 Diskretizace výpočtové oblasti

K dosažení ustáleného stavu byla i zde zvolena metodika založená na postupných numerických výpočtech s dvojnásobnými počty buněk sítě v obou směrech kartézských souřadnicových os než byl počet buněk předchozí sítě a interpolaci numerických výsledků. Z časových důvodů byl však výpočet proveden pouze na dvou strukturovaných čtyřúhelníkových sítích s počtem 88×30 a 176×60 buněk. Výpočetní sítě uvedené na obr. 34 jsou zahuštěny v blízkosti náběžné i odtokové hrany a v blízkosti stěny.

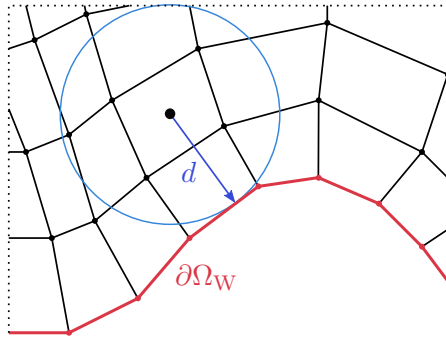
K odhadu výšky první buňky u stěny y_1 se běžně užívá vztahu (3.11), ačkoliv aproximace průběhu součinitele tření na stěně platí pro rovnou desku. Při uvažování délky mezní vrstvy $x = 1.5$ [m] a požadovaného $y_1^+ = 0.9$ činí odhadnutá výška $y_1 = 8.1 \cdot 10^{-6}$ [m]. Vlivem vysoké časové náročnosti numerického výpočtu se podařilo provést výpočet pouze na síti s $y_1^+ \approx 3$, resp. $y_1^+ \approx 1.5$, přičemž máme na mysli odhadnuté hodnoty bezrozměrné vzdálenosti od stěny v první buňce. Reálné hodnoty y_1^+ , které jsou výstupem výpočtu, jsou zřejmě odlišné a na rozdíl od rovné desky se zde podél stěny výrazně mění.



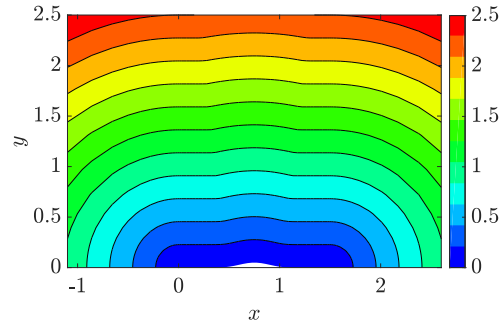
Obr. 34: Detail výpočetní oblasti diskretizované pomocí strukturovaných čtyřúhelníkových sítí o 88×30 a 176×60 buňkách

V obou představených turbulentních modelech vystupuje vzdálenost k nejbližší stěně d . Poznamenejme, že zatímco v případě oblasti s rovnou deskou je výpočet d v každé buňce strukturované sítě přímočarý, pro obecně zakřivené stěny je situace o něco složitější. Pro zjednodušení se totiž nabízí určení vzdálenosti např. pomocí nejmenší vzdálenosti středu

kontrolního objemu a uzlu sítě na stěně či měření vzdálenosti ke stěně podél stran čtyřúhelníkových buněk. Tato simplifikace nicméně může vést k jistým rozdílům v řešení, které narůstají v případech, kdy se spojnice uzlů sítě výrazně odchyľují od normály k úseku stěny daného přilehlou čtyřúhelníkovou buňkou. Reálnou vzdálenost od stěny však ve většině případů se zakřivenou stěnou tvoří délka spojnice středu buňky a bodu na stěně, kterým ale není síť explicitně definována (obr. 35).



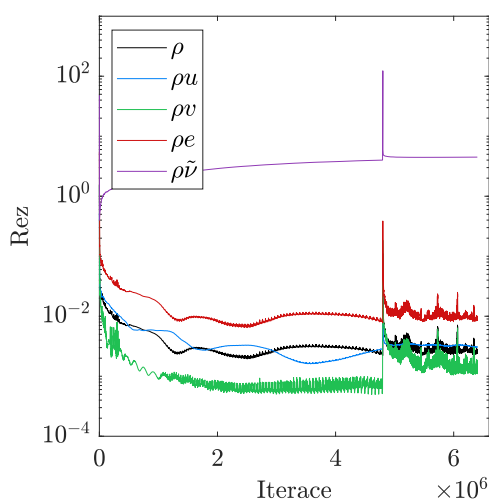
Obr. 35: Určení vzdálenosti d od nejbližší stěny v případě obecně zakřivené stěny



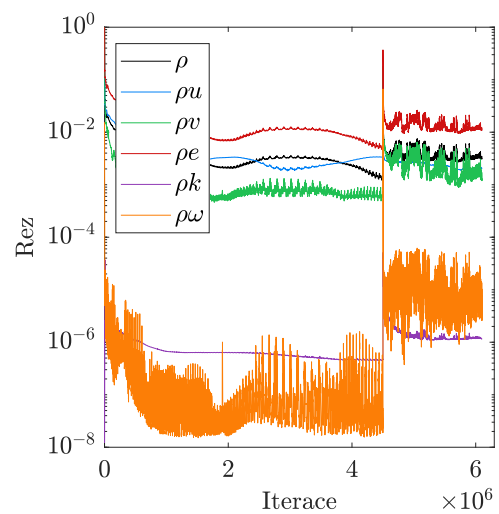
Obr. 36: Kontury vzdálenosti d od nejbližší stěny pro uvažovaný případ

V této práci byl výpočet d založen na vzdálenosti bodu, kterým je střed kontrolního objemu, od přímky definované dvěma body, jež představují dva stěnové uzly sítě první buňky u stěny. Na obr. 36 jsou zobrazeny kontury vzdálenosti k nejbližší stěně pro testovací případ výpočtové oblasti se zakřivenou stěnou.

Strukturovaná čtyřúhelníková síť, na níž byly provedeny výpočty NASA TMR, sestává i zde z mnohem většího počtu buněk než síť použitá pro vlastní numerické řešení středovaného systému Navierových-Stokesových rovnic s připojenými modely turbulence. Síť NASA TMR čítá 1408×640 buněk a průměrná bezrozměrná vzdálenost od stěny dosahuje v první buňce $y_1^+ = 0.06$. Z tohoto důvodu nelze očekávat tak výraznou shodu s vlastním řešením jako v případě rovné desky. Srovnání vlastních výsledků na síti o 176×60 buňkách s výsledky NASA TMR, uvedené v následujících odstavcích, je tedy z tohoto důvodu spíše kvalitativního charakteru.



(a) Spalart-Allmaras



(b) $k-\omega$ SST

Obr. 37: Průběh konvergence výpočtu s použitím jednotlivých modelů turbulence

Konstantu CFL vystupující v podmínce stability (2.87) jsme i v tomto případě zvolili $CFL = 0.9$. Konvergence použité numerické metody byla sledována pomocí rezidua $Rez(w_s)$ jednotlivých složek vektoru konzervativních proměnných definovaného vztahem (3.14). Na obr. 37 je vykreslen průběh konvergence výpočtu na oblasti se zakřivenou stěnou pro oba modely turbulence. Použitá numerická metoda v tomto případě konverguje velmi pomalu a rezidua turbulentních veličin navíc dosahují i po šesti milionech iterací relativně vysokých hodnot. Druhý problém může být rovněž spojený s nedostatečným počtem buněk použité sítě.

3.2.2 Model Spalart-Allmaras

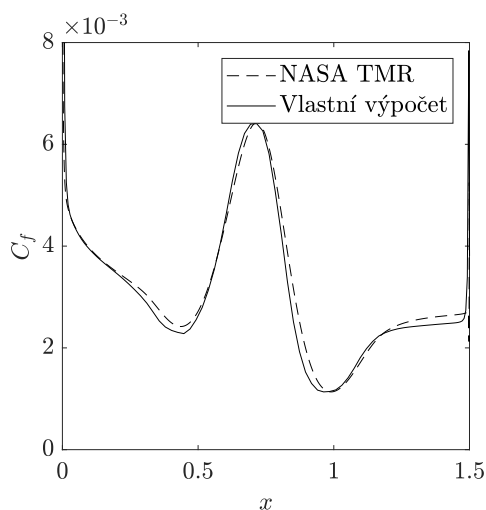
Na obr. 38 je vykreslen průběh součinitele tření na stěně C_f podél zakřivené stěny získaného numerickým řešením středovaného systému Navierových-Stokesových rovnic s připojeným modelem turbulence Spalart-Allmaras. Vlastní výsledky vykazují i přes výrazně redukováný počet kontrolních objemů sítě dobrou shodu s numerickými výsledky NASA TMR.

Obr. 39 zobrazuje průběh součinitele tlaku na zakřivené stěně, který je definován jako podíl rozdílu tlaku na stěně p_w a referenčního tlaku a referenčního dynamického tlaku, tj.

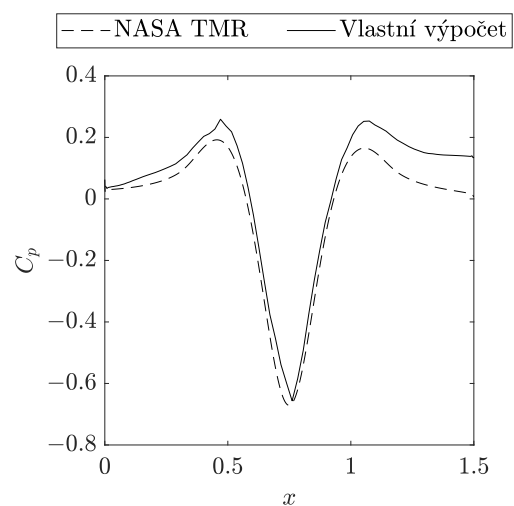
$$C_p = \frac{p_w - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2}, \quad (3.17)$$

kde jako referenční hodnoty jsou uvažovány hodnoty veličin ve volném proudu, tedy na vstupu. Zde dochází k jistému nadhodnocení C_p vzhledem k výsledkům NASA TMR, a to zejména v přední a zadní části stěny ve směru proudění.

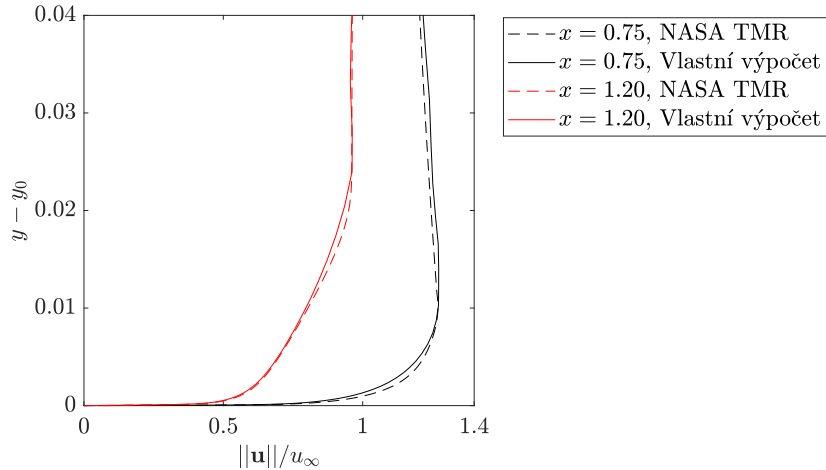
Pro srovnání profilů bezrozměrné rychlosti zde byly vybrány pozice $x = 0.75$, tj. střed zakřivené stěny, resp. nejvyšší bod zakřivení, a $x = 1.20$ nacházející se v druhé polovině stěny za zakřivením. Tyto profily jsou vyneseny na obr. 40, kde y_0 představuje souřadnici povrchu stěny ve směru osy y . Samotné zakřivení, jehož výška dosahuje v nejvyšším bodě relativně nízké hodnoty $y = 0.05$, způsobuje tedy v průběhu proudových veličin výrazné změny a situace je zde tak oproti případu rovné desky z fyzikálního hlediska zajímavější, což činí tento testovací příklad komplexnějším z pohledu verifikace implementovaných turbulentních modelů.



Obr. 38: Průběh součinitele tření na stěně C_f podél zakřivené stěny

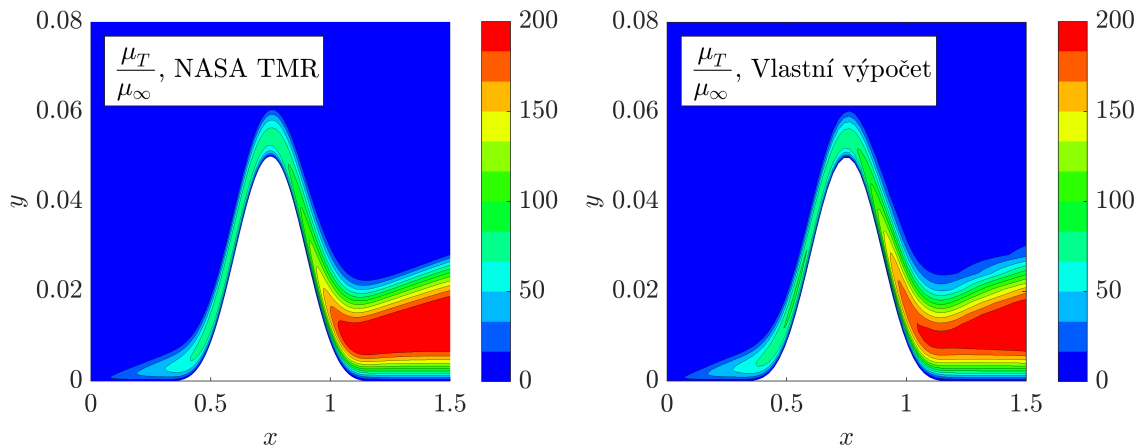


Obr. 39: Průběh součinitele tlaku na stěně C_p podél zakřivené stěny



Obr. 40: Průběh bezrozměrné velikosti rychlosti $\|\mathbf{u}\|/u_\infty$ v místě $x = 0.75$ a $x = 1.20$

Kvalitativně je možné srovnat kontury bezrozměrné turbulentní vazkosti uvedené na obr. 41. Vlivem nižšího počtu buněk použité sítě jsou patrné rozdíly mezi vlastním řešením a výsledky NASA TMR. Nad druhou částí stěny dochází vlivem geometrie ke zdatelné produkci modifikované turbulentní vazkosti $\tilde{\nu}$, resp. turbulentní vazkosti μ_T , což se ve vlastních výsledcích projevuje neostrým zachycením přechodu z mezní vrstvy do volného proudu.

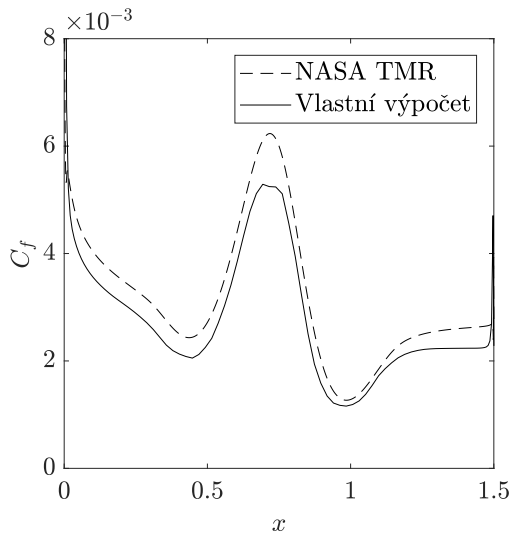


Obr. 41: Kontury bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞

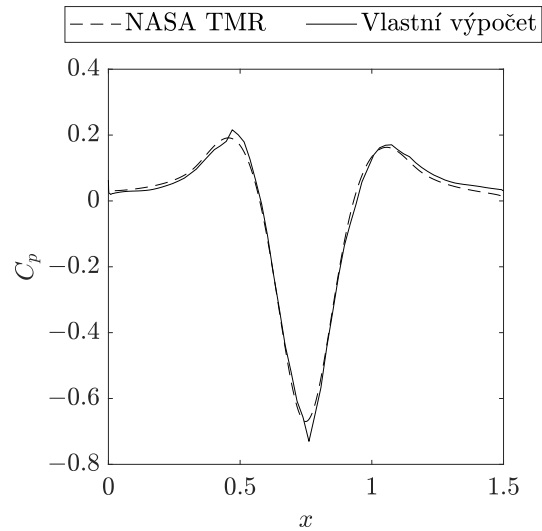
3.2.3 Model $k-\omega$ SST

V případě modelu $k-\omega$ SST je průběh C_f a C_p na obr. 42 a obr. 43 oproti modelu Spalart-Allmaras v opačném poměru. Zatímco u součinitele tření na stěně je průběh jistým způsobem podhodnocen vzhledem k výsledkům NASA TMR, průběh součinitele tlaku na stěně dosahuje srovnatelných hodnot.

Profily bezrozměrné rychlosti v místě $x = 0.75$ a $x = 1.20$, obr. 44, se však shodují s řešením NASA TMR v obdobné míře jako u modelu Spalart-Allmaras. Pro vyvození důsledků a posouzení vlastností jednotlivých modelů turbulence by však bylo nutné provést další numerické výpočty s větším počtem buněk sítě, který má v obou případech nezanedbatelný vliv na přesnost numerického řešení.



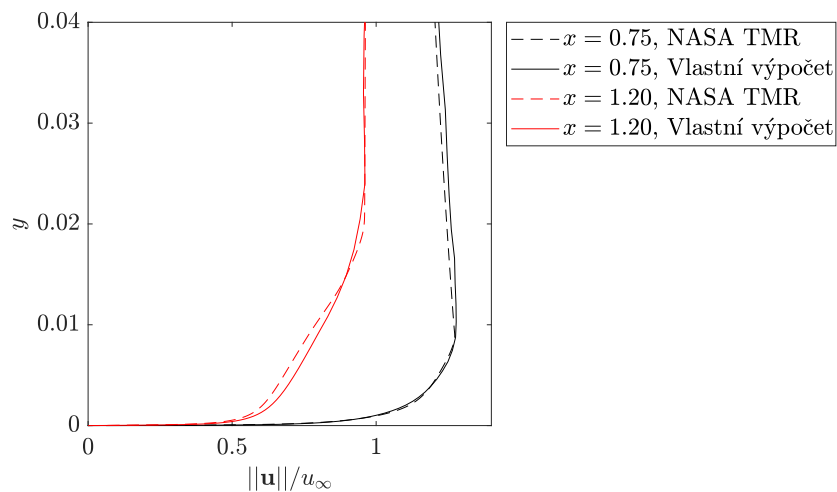
Obr. 42: Průběh součinitele tření na stěně C_f podél zakřivené stěny



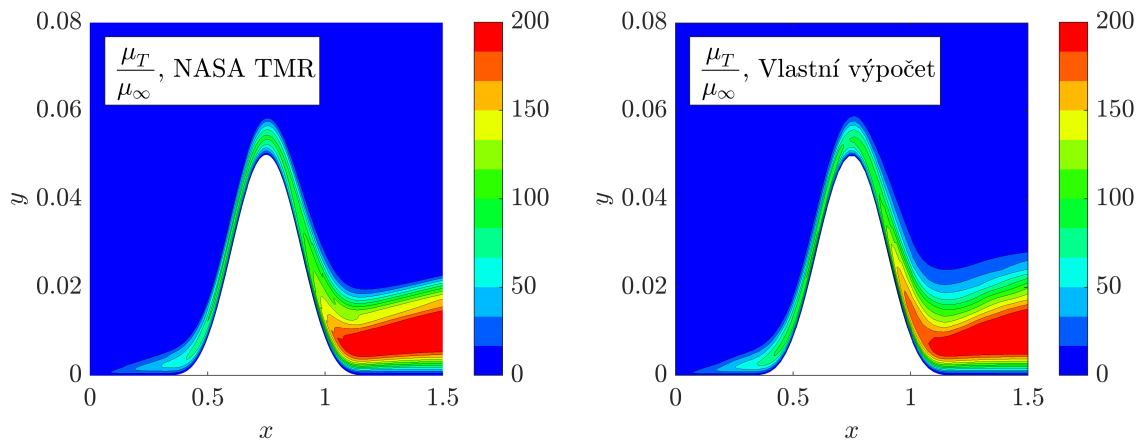
Obr. 43: Průběh součinitele tlaku na stěně C_p podél zakřivené stěny

Obr. 45 - 47 přináší kvalitativní srovnání kontur bezrozměrných turbulentních veličin modelu $k-\omega$ SST v blízkosti zakřivené stěny získaných vlastním výpočtem s výsledky NASA TMR. I zde je patrný vliv redukováného počtu buněk strukturované čtyřúhelníkové sítě použité pro numerický výpočet, a to zejména v oblasti nad druhou částí stěny, kde je průběh veličin na hranici mezní vrstvy zachycen neostře podobně jako v případě modelu Spalart-Allmaras (obr. 41).

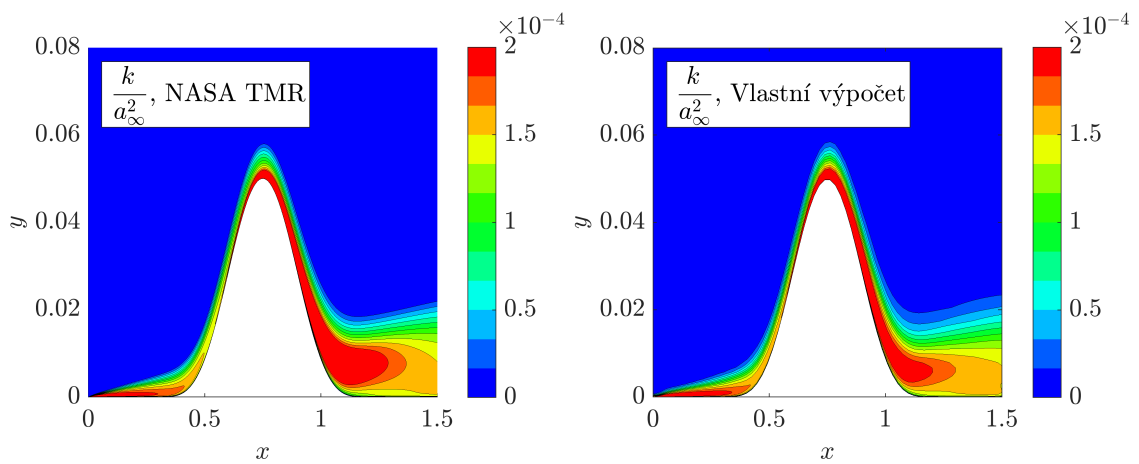
Rozložení turbulentní kinetické energie dosahuje v této úloze vysokých hodnot rovněž na náběžné hraně zakřivené stěny jako u rovné desky. Maximum k se však vyskytuje v druhé části zakřivení. Tento jev je způsoben nepříznivým gradientem tlaku, který v této oblasti ovlivňuje i průběh rychlosti tak, že tloušťka mezní vrstvy podél zakřivení narůstá (obr. 44). Tlakový gradient nicméně nedosahuje tak vysokých hodnot, aby způsobil odtržení mezní vrstvy.



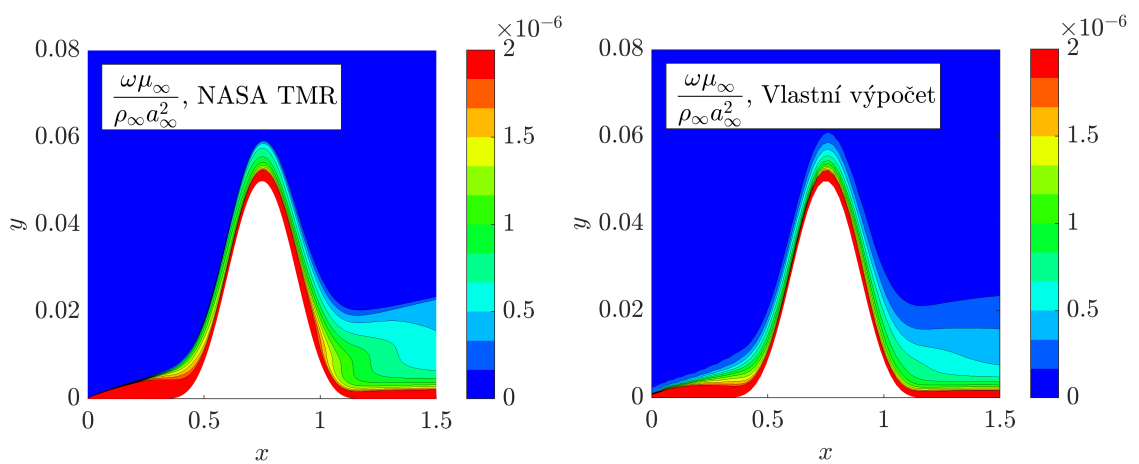
Obr. 44: Průběh bezrozměrné velikosti rychlosti $\|\mathbf{u}\|/u_\infty$ v místě $x = 0.75$ a $x = 1.20$



Obr. 45: Kontury bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞



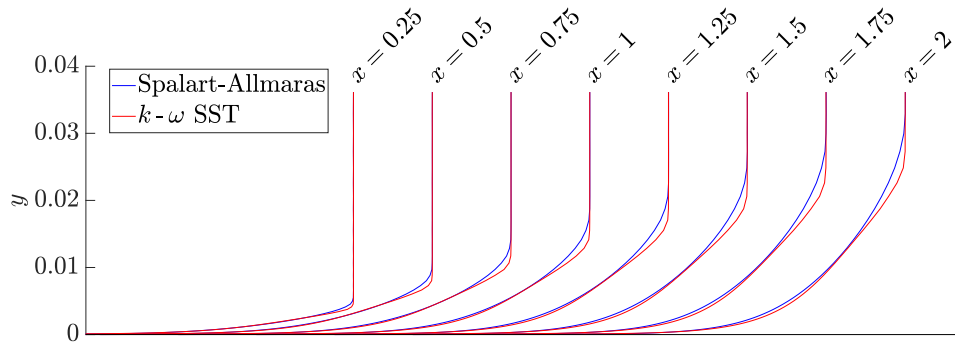
Obr. 46: Kontury bezrozměrné turbulentní kinetické energie k/a_∞^2



Obr. 47: Kontury bezrozměrné specifické rychlosti disipace $\omega\mu_\infty/(\rho_\infty a_\infty^2)$

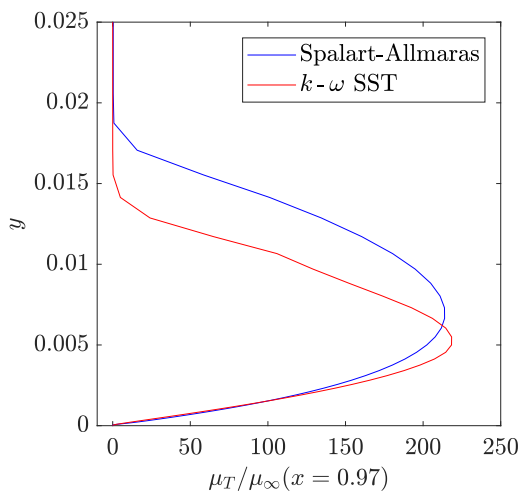
3.3 Porovnání modelu Spalart-Allmaras a $k-\omega$ SST

Pro srovnání numerických výsledků obou modelů turbulence byly vybrány profily rychlosti úlohy turbulentního proudění stlačitelné tekutiny v okolí rovné desky. Na obr. 48 jsou ekvidistantně vykresleny průběhy rychlosti $\|u\| = \sqrt{u^2 + v^2}$ ve vybraných řezech podél rovné desky. U modelu $k-\omega$ SST dochází v oblasti přechodu z mezní vrstvy do volného proudu k dosažení rychlosti volného proudu v nižší výšce y než pro případ modelu Spalart-Allmaras. Toto chování je pro model $k-\omega$ SST typické, jelikož model má tendenci předpovídat nefyzikálně ostré vnější hranice turbulentních oblastí, [7]. Při praktických výpočtech však výpočetní sítě nedosahují v těchto místech takového rozlišení, a numerická vazkost tak způsobuje vyhlazení ostrých přechodů.

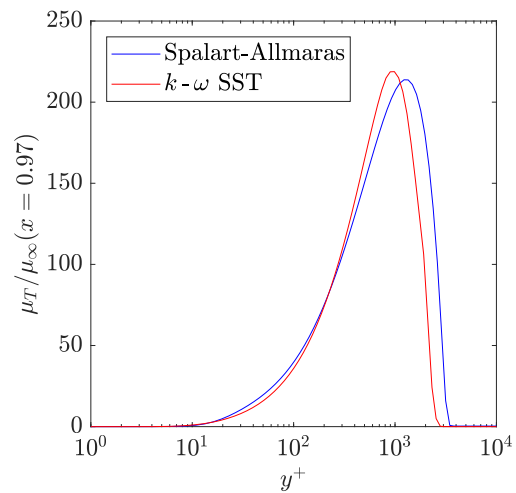


Obr. 48: Kvalitativní srovnání profilů rychlosti $\|u\|$ ve vybraných řezech podél rovné desky

Výrazné rozdíly mezi numerickým řešením turbulentního proudění na oblasti rovné desky s využitím jednotlivých modelů turbulence se objevují v průběhu turbulentní vazkosti. Obr. 49 zobrazuje průběh bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞ v řezu $x = 0.97$ pro oba turbulentní modely. Pro větší názornost je zde vynesena i závislost bezrozměrné turbulentní vazkosti na bezrozměrné vzdálenosti od stěny y^+ (obr. 50), kde se v logaritmické oblasti oba průběhy překrývají.

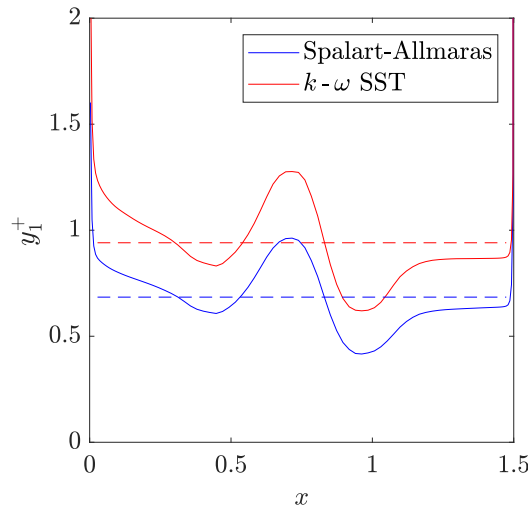


Obr. 49: Závislost bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞ na y



Obr. 50: Závislost bezrozměrné turbulentní vazkosti μ_T/μ_∞ na y^+

Vzhledem k ovlivnění numerických výsledků v případě úlohy se zakřivenou stěnou vlivem nedostatečného počtu buněk strukturované čtyřúhelníkové sítě zde není porovnání jednotlivých modelů turbulence uvedeno. V kap. 3.2.1 bylo řečeno, že bezrozměrná vzdálenost od stěny v první buňce y_1^+ se v tomto případě výrazně odlišuje od odhadnuté hodnoty y_1^+ , která byla využita při přípravě výpočetní sítě. Poznamenejme, že tlakový gradient u stěny způsobuje, že y_1^+ se podél zakřivené stěny mění dle průběhu na obr. 51. Čárkovanou čarou je zde vynesena střední hodnota průběhu, při jejímž výpočtu nebyly uvažovány oblasti náběžné a odtokové hrany, kde se objevují singularity. Obě střední hodnoty se ovšem pohybují pod požadovanou hodnotou $y_1^+ < 1$.



Obr. 51: Kvalitativní srovnání profilů rychlosti $\|u\|$ ve vybraných řezech podél rovné desky

Závislost $y_1^+(x)$ kvalitativně připomíná průběhy součinitele tření na stěně C_f (obr. 38 a 42). Singularity v průběhu obou těchto veličin lze vysvětlit následovně. Smykové napětí na stěně τ_w , na kterém závisí výpočet y_1^+ i C_f , je definováno vztahem

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w, \quad (3.18)$$

kde \bar{u} je složka vektoru rychlosti rovnoběžná se stěnou, y je vzdálenost od stěny a index w značí hodnoty veličin na stěně. Při praktickém výpočtu je poté derivace v rovnosti (3.18) nahrazena diferencním podílem, tj.

$$\tau_w \approx \mu_w \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_w}{y_1 - y_w} = \mu_w \frac{\bar{u}_1}{y_1}, \quad (3.19)$$

kde bylo zohledněno, že zřejmě platí $\bar{u}_w = 0$ a $y_w = 0$, jelikož se jedná o hodnoty na stěně. V první buňce u stěny za náběžnou hranou není ještě zcela vyvinutá mezní vrstva a platí tedy $\bar{u}_1 \gg y_1$, což v případě podílu těchto hodnot vede na singulární hodnoty v průběhu veličin podél stěny.

Závěr

V rámci diplomové práce byl uveden možný způsob numerického řešení turbulentního proudění stlačitelné tekutiny. Autorem navržené algoritmy pro řešení středovaných Navierových-Stokesových rovnic uzavřených turbulentními modely Spalart-Allmaras a $k-\omega$ SST byly implementovány v prostředí MATLAB. Vyvinutý software byl následně verifikován pomocí dvou základních testovacích příkladů turbulentního proudění, které jsou součástí databáze *NASA Turbulence Modeling Resource*, jež slouží zejména pro účely verifikace. Na základě uvedeného srovnání výsledků lze říci, že bylo dosaženo velmi dobré shody s řešením uváděným NASA TMR, a tím byla ověřena správnost implementace autorem navržených algoritmů.

Za hlavní přínos práce lze považovat to, že se autor pokusil detailním způsobem zmapovat jeden z přístupů modelování turbulentního proudění, kterým je středování rovnic dle Reynoldse (RANS), resp. Favra (FANS). Text práce je koncipován tak, že umožňuje uživatelům komerčních výpočtových systémů, kterými jsou například ANSYS Fluent či CFX, seznámit se hlouběji se základními principy modelování turbulentního proudění a způsobem implementace numerických schémat pro jeho řešení, jenž tvoří jádro těchto výpočtových softwarů. Snahou autora zároveň bylo poukázat na možná úskalí, která jsou spojena s řešením rovnic modelů turbulence. Současně může práce sloužit i dalším studentům, kteří se již seznámili s numerickým řešením laminárního proudění, a to pro usnadnění orientace v oblasti numerického modelování turbulentního proudění, jelikož se jedná o přímé rozšíření základních principů a metod uplatňujících se v rámci řešení proudění laminárního.

Jelikož problematika modelování proudění, a to zejména turbulentního, a s ní spojená algoritmicke numerické metody pro řešení konkrétních problémů technické praxe je velice obtížnou disciplínou, předpokládá se, že se tato diplomová práce stane východiskem pro další vědecko-výzkumnou práci autora v rámci doktorského studia. Autor práce se dále zaměří na studium implicitních schémat, která umožňují výrazné zkrácení výpočetního času nutného pro získání numerického řešení, a zejména na další možné přístupy modelování turbulentního proudění, které se v současnosti v oblasti CFD dynamicky rozvíjejí a patří mezi ně např. LES - *Large Eddy Simulation*.

Literatura

- [1] ALLMARAS S. R., JOHNSON F. T., SPALART P. R. *Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model*. Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7). 1-11. 2012.
- [2] BLAZEK J. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications (Third Edition)*. Butterworth-Heinemann, 2015. ISBN 978-0-0809-9995-1.
- [3] *CFD Online* [online]. © CFD Online. Dostupné z: <https://www.cfd-online.com/>.
- [4] *CFL3D Version 6 Home Page* [online]. Dostupné z: <https://cfl3d.larc.nasa.gov/>.
- [5] FERZIGER J.H. *Large Eddy Simulation: An Introduction and Perspective*. In: MÉTAIS O., FERZIGER J.H. (eds) *New Tools in Turbulence Modelling*. Centre de Physique des Houches, vol 5. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [6] HELLSTEN A. *Some improvements in Menter's $k-\omega$ SST turbulence model*. 29th AIAA, Fluid Dynamics Conference, Fluid Dynamics. June 15 - 18, 1997. Albuquerque, NM.
- [7] HELLSTEN A. *New Two-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Applications*. PhD Thesis, Helsinki University of Technology, Espoo, Finland, Feb 2004.
- [8] HIRSCH Ch. *Numerical computation of internal and external flows, Volume 1, 2*. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier, 2007. ISBN 978-0-7506-6594-0.
- [9] HOFFMANN K. A. a CHIANG S. T. *Computational fluid dynamics. Vol. I*. 4th ed. Wichita: Engineering Education System, 2000. iv, 486 s. ISBN 0-9623731-0-9.
- [10] HOFFMANN K. A. a CHIANG S. T. *Computational fluid dynamics. Vol. III*. 4th ed. Wichita: Engineering Education System, 2000. iv, 175 s. ISBN 0-9623731-6-8.
- [11] KALITZIN G., MEDIC G., IACCARINO G. a DURBIN P. *Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions*. *Journal of Computational Physics*. 204. 265-291. 2005.
- [12] KATO M. a LAUNDER B. E. *The Modelling of Turbulent Flow Around Stationary and Vibrating Square Cylinders*. 9th Symposium on Turbulent Shear Flows, Kyoto, Japan, August 1993, paper 10-4.
- [13] LEVEQUE R. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002. ISBN 978-05-11-79125-3
- [14] LIOU M.-S., STEFFEN C. J. *A New Flux Splitting Scheme*. *Journal of Computational Physics* 107:23-39, 1993.

- [15] LOUDA P., KOZEL K., PŘÍHODA J. *Numerical modelling of compressible inviscid and viscous flow in turbine cascades*. Proceedings of ALGORITMY 2012 pp. 301–310, 2012.
- [16] MENTER F. R. *Influence of freestream values on k - ω turbulence model predictions*. AIAA Journal, Vol. 30, No. 6 (1992), pp. 1657-1659.
- [17] MENTER F. R. *Zonal Two Equation k - ω Turbulence Models For Aerodynamic Flows*. AIAA Paper. 1993. 10.2514/6.1993-2906.
- [18] MENTER F. R. *Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications*. AIAA Journal, Vol. 32, No. 8, 1994.
- [19] MLYNAŘÍKOVÁ H. *Matematické modelování turbulentního proudění* [diplomová práce]. Plzeň: Západočeská univerzita, 2012.
- [20] MOIN P., MAHESH K. *Direct Numerical Simulation: A Tool in Turbulence Research*. Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 30, No. 1, 1998.
- [21] *NASA Turbulence Modeling Resource*. Langley Research Center. [online]. Dostupné z: <https://turbmodels.larc.nasa.gov/>.
- [22] PŘÍHODA J., LOUDA P. *Matematické modelování turbulentního proudění*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03623-5.
- [23] REYNOLDS O. *On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 186, 123-161, ser. A, 1895.
- [24] SCHLICHTING H. *Boundary-Layer Theory*. New York: McGraw-Hill, 1979.
- [25] SPALART P. R., JOU W-H., STRELETS M., ALLMARAS S. R. *Comments on the Feasibility of LES for Wings and on a Hybrid RANS/LES Approach*. Advances in DNS/LES, 1st AFOSR Int. Conf. on DNS/LES, Greyden Press, Columbus Oh, 4-8 August, 1997.
- [26] SPALART P. R., DECK S., SHUR M., SQUIRES K., STRELETS M. K., TRAVIN A. *A New Version of Detached Eddy Simulation, Resistant to Ambiguous Grid Densities*. Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 0935-4964, pp.181-195, July 2006.
- [27] SPALART P. R., ALLMARAS S. R. *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. La Recherche Aéronautique 1:5-21, 1994.
- [28] VIMMR J. *Matematické modelování proudění stlačitelné tekutiny ve vnitřní aerodynamice* [disertační práce]. Plzeň: Západočeská univerzita, 2002. 126 s.
- [29] VIMMR J. *Modelování proudění tekutin s aplikacemi v biomechanice a ve vnitřní aerodynamice* [habilitační práce]. Plzeň: Západočeská univerzita, 2008. 185 s.
- [30] WALLIN S. *Engineering Turbulence Modelling for CFD with a Focus on Explicit Algebraic Reynolds Stress Models*. Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, 2002.
- [31] WILCOX D. C. *Turbulence Modeling for CFD*. 3rd ed. San Diego: DCW Industries, 2006. xxii, 522 s. ISBN 1-928729-08-8.
- [32] WHITE, F. M. *Viscous fluid flow*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, ©2006. xxi, 629 s. McGraw-Hill series in mechanical engineering. ISBN 978-0-07-240231-5.

Příloha A

Model Spalart-Allmaras v bezrozměrném tvaru

Model Spalart-Allmaras v bezrozměrném konzervativním tvaru je definován následujícími vztahy, kde všechny uvedené veličiny jsou bezrozměrné.

Kinematická turbulentní vazkost:

$$\mu_T = \rho \tilde{\nu} f_{v1}$$

Transportní rovnice pro modifikovanou turbulentní vazkost $\tilde{\nu}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \tilde{\nu} u_j) &= c_{b1}(1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\nu} - \frac{\rho}{\text{Re}} \left[c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{\text{Re} \sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + \frac{\rho c_{b2}}{\text{Re} \sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} - \frac{1}{\text{Re} \sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Pomocné vztahy a konstanty modelu:

$$\begin{aligned} f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, & f_{v2} &= 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, & f_w &= g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}} \\ f_{t2} &= c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2), & \chi &= \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, & g &= r + c_{w2} (r^6 - r), & r &= \frac{\tilde{\nu}}{\text{Re} \tilde{S} \kappa^2 d^2} \\ \tilde{S} &= S + \frac{\tilde{\nu}}{\text{Re} \kappa^2 d^2} f_{v2}, & S &= \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (\text{pro 2D}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{b1} &= 0.1355, & c_{b2} &= 0.622, & c_{w2} &= 0.3, & c_{w3} &= 2, & c_{v1} &= 7.1 \\ c_{t3} &= 1.2, & c_{t4} &= 0.5, & \sigma &= \frac{2}{3}, & \kappa &= 0.41, & c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} \end{aligned}$$

Příloha B

Model $k - \omega$ SST v bezrozměrném tvaru

Model $k - \omega$ SST v bezrozměrném konzervativním tvaru s produkčními členy v transportních rovnicích aproximovanými pomocí velikosti tenzoru vířivosti je definován následujícími vztahy, kde všechny uvedené veličiny jsou bezrozměrné.

Kinematická turbulentní vazkost:

$$\mu_T = \min \left(\frac{\bar{\rho}k}{\omega}, \frac{\text{Re} a_1 \bar{\rho}k}{SF_2} \right).$$

Transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho k u_j) = & \min \left(\frac{1}{\text{Re}} \mu_T S^2, \text{Re} 20 \beta^* \rho \omega k \right) - \\ & - \text{Re} \beta \rho \omega k + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \end{aligned}$$

Transportní rovnice pro specifickou rychlost disipace ω :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \omega u_j) = & \frac{1}{\text{Re}} \gamma_\omega \rho S^2 - \text{Re} \beta \rho \omega^2 + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \\ & + \frac{1}{\text{Re}} 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Pomocné vztahy a konstanty modelu:

$$\begin{aligned} F_1 = \text{tgh} (\Gamma_1^4), \quad \Gamma_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\text{Re} \beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{\text{Re}^2 \omega d^2} \right), \frac{4\bar{\rho}\sigma_{\omega 2}k}{\text{CD}_{k\omega}d^2} \right] \\ \text{CD}_{k\omega} = \max \left(2\bar{\rho}\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \\ F_2 = \text{tgh} (\Gamma_2^2), \quad \Gamma_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\text{Re} \beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{\text{Re}^2 \omega d^2} \right) \end{aligned}$$

$$[\sigma_k \quad \sigma_\omega \quad \beta]^\top = F_1 [\sigma_k \quad \sigma_\omega \quad \beta]_1^\top + (1 - F_1) [\sigma_k \quad \sigma_\omega \quad \beta]_2^\top$$

$$\sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.07$$

$$\sigma_{k2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828$$

$$\kappa = 0.41, \quad \beta^* = 0.09, \quad a_1 = 0.31, \quad \gamma_\omega = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma_\omega \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}$$