

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra mechaniky

**Řešení kontaktních úloh
v elastodynamice pomocí
nehladké Newtonovy metody**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jan Holeček

Plzeň 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval sám, za pomoci vedoucího práce a uvedené citované literatury

.....
Bc. Jan Holeček

V Plzni dne 10. 6. 2019

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat projektu SGS-2019-009 a dále i grantovému projektu GACR 19-04956S Grantové agentury České republiky (the Czech Scientific Foundation). V neposlední řadě vedoucímu práce prof. Dr. Ing. Eduardu Rohanovi DSc. za jeho rady a čas vynaložený při řešení diplomové práce a ing. Vladimíru Lukešovi Ph.D. za pomoc při řešení softwarových náležitostí.

Abstrakt

Tato práce se zabývá úlohou kontaktu elastického tělesa s tuhou překážkou ve 3D s uvažováním tření na kontaktní hranici a dynamických účinků. Stručně jsou shrnuty některé používané metody pro popis kontaktu elastického tělesa. Podmínka kontaktu je v této práci formulována jako nelineární komplementární problém. Stejným způsobem je popsáno i tření.

Úloha je formulována ve spojitě oblasti. Pro numerické řešení je provedena diskretizace úlohy v prostoru metodou konečných prvků a diskretizace v čase pomocí metody centrálních diferencí.

Na několika modelových úlohách je ukázáno řešení tohoto problému pro různé parametry úloh.

Klíčová slova: Úloha kontaktu, nelineární komplementární problém, nehladká Newtonova metoda, suché tření, metoda konečných prvků, metoda centrálních diferencí

Abstract

This work deals with the role of contact of an elastic body with a rigid obstacle in 3D with consideration of friction on the contact boundary and with dynamic effects. Some of the commonly used methods to describe the contact of the elastic body are briefly summarized. The contact condition in this work is formulated as a nonlinear complementary problem. Friction is described in the same way.

The task is formulated in a continuous area. For numerical solution, the finite element method of discretization of the problem is performed using the central differences method.

Solution of several model problems is shown for various task parameters.

Key words: Contact problem, nonlinear complementarity problem, non-smooth Newton method, dry friction, finite element method, Central differences method

Obsah

1	Úvod	1
2	Významné metody pro popis úlohy kontaktu	3
2.1	Popis kontaktu	3
2.2	Popis tření na kontaktní hranici	4
3	Nelineární komplementární problém (NCP)	5
3.1	Algoritmus řešení využívající <i>Fischerovu-Burmeisterovu</i> funkci	6
3.2	Souvislost s úlohou kontaktu	8
4	Úloha jednostranného kontaktu elastického tělesa s tuhou překážkou	10
4.1	Formulace úlohy	10
4.2	Prostorová diskretizace	13
4.3	Časová diskretizace	17
5	Implementace numerického řešení	19
5.1	Úloha kontaktu, 2D, bez tření	20
5.2	Úloha kontaktu, 3D, bez tření	21
5.3	Úloha kontaktu, 2D, se suchým třením	21
5.4	Úloha kontaktu, 3D, se suchým třením	22
6	Výsledky numerických simulací	26
6.1	Úloha kontaktu, bez tření	26
6.2	Úloha kontaktu, 2D, se suchým třením	29
6.3	Úloha kontaktu, 3D, se suchým třením	35
6.4	Poznámky k numerickým simulacím	39
7	Závěr	40

Seznam obrázků

1	Příklad grafu funkce jedné reálné proměnné (modrá barva) s nehladkým bodem (označen šipkou) a naznačenou množinou subderivací (červená barva) příslušející subdiferenciálu.	6
2	Okrajové podmínky kontaktní úlohy.	10
3	Změna posuvu ve dvou následných časových hladinách.	12
4	Těleso simulované v případě úlohy kontaktu bez tření ve 3D.	27
5	Pole posuvů pro případ úlohy kontaktu bez tření ve 3D v čase $t = 0.02\text{s}$	28
6	Normálové napětí na kontaktní hranici pro případ úlohy kontaktu bez tření ve 3D v časech $t = 0.008\text{s}$ a $t = 0.02\text{s}$	28
7	Těleso simulované v případě 2D úlohy se třením.	30
8	Pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$ a koeficient tření $f_c = 0$ (bez tření), zakřivená překážka.	30
9	Pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$ a koeficient tření $f_c = 0.5$, zakřivená překážka.	31
10	Pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$ a koeficient tření $f_c = 5$, zakřivená překážka.	31
11	Třecí a kontaktní napětí pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$ pro případ zakřivené překážky	32
12	Pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$ a koeficient tření $f_c = 0$ (bez tření), rovná překážka.	32
13	Pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$ a koeficient tření $f_c = 0.5$, rovná překážka.	33
14	Pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$ a koeficient tření $f_c = 5$, rovná překážka.	33
15	Třecí a kontaktní napětí pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$ pro případ rovné překážky	34
16	Třecí a kontaktní napětí pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v časech do $t = 0.25\text{s}$, pro koeficient tření $f_c = 5$ pro případ rovné překážky v různých časech.	34
17	Těleso simulované v případě úlohy se třením ve 3D.	35
18	Směry posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 3D v čase $t = 0.025\text{s}$ a koeficient tření $f_c = 0$ (bez tření).	36
19	Průběh velikosti kontaktního napětí pro případ na obr. 18, v uzlu označeném v obr. 17.	36
20	Směry posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 3D v čase $t = 0.025\text{s}$ a koeficient tření $f_c = 0.5$	37

21	Průběh velikosti kontaktního napětí pro případ na obr. 20, v uzlu označeném v obr. 17.	37
22	Průběh velikosti třecího napětí pro případ na obr. 20, v uzlu označeném v obr. 17.	38

Seznam tabulek

1	Porovnání výsledků numerické simulace pro úlohu bez tření pro různé délky časového kroku d_t	27
2	Porovnání výsledků numerické simulace pro úlohu ve 2D pro hodnoty koeficientu tření f_c	29
3	Porovnání výsledků numerické simulace pro úlohu ve 3D pro různé koeficienty tření f_c	38

Důležité použité značení

- ϵ_{ij} - tenzor malých deformací,
 Γ_c - kontaktní hranice,
 Γ_o - tuhá překážka,
 Θ_H - funkcionál definovaný pomocí Hamiltonova principu,
 Φ - NCP funkce,
 Ψ - norma NCP funkce,
 Ω - oblast řešení,
 Δt - délka časového kroku,
 $\Delta \mathbf{u}$ - vektor přírůstků posuvů mezi dvěma časovými hladinami,
 $\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{z}}^{(+)}$, $\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{z}}^{(-)}$ - vektor přírůstků posuvů mezi dvěma časovými hladinami na kontaktní hranici v tečné rovině rozdělené do kladného a záporného směru,
 \mathbf{A} - „vahová“ matice na kontaktní hranici,
 \mathbf{b}_i - plošné síly,
 D_{ijkl} - elastický tenzor čtvrtého řádu,
 E - celková deformační energie,
 \mathbf{F} - levá strana rovnice,
 f_i - objemové síly,
 \mathbf{f} - vektor pravých stran,
 f_c - koeficient tření,
 \mathbf{g} - napětí na kontaktní hranici,
 \mathbf{g}_τ - vektor napětí na kontaktní hranici,
 \mathbf{J} - Jacobiova matice,
 \mathbf{K} - matice tuhosti,
 K - celková kinetická energie,

- K_H - množina přípustných posuvů vzhledem k počátečním a okrajovým podmínkám a konstitučním vztahům,
- K_C - množina přípustných posuvů vzhledem k podmínkám nulového průniku,
- K_T - množina přípustných posuvů vzhledem k podmínkám tření,
- $K_{H,C,T}$ - průnik množin K_H , K_C a K_T ,
- \mathbf{M} - matice hmotnosti,
- \mathbf{p} - vektor kontaktního napětí z předchozí časové hladiny,
- \mathbf{Q} - vektor sil určený z hodnot z předchozí časové hladiny,
- \mathbf{R} - matice rotace,
- t_k - čas odpovídající k -té časové hladině,
- $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ - vektory složek tečného vektoru v tečné rovině,
- \mathbf{u} - posuvy tělesa,
- \mathbf{u} - vektor posuvů,
- $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ - restriční matice,
- $Z(\mathbf{u})$ - oblast, kde dochází ke kontaktu,

1 Úvod

Motivace

Úloha kontaktu elastických těles je nedílnou součástí mnoha problémů v mechanice. Jako typický příklad uveďme například crash-testy automobilů. Řešit úlohu kontaktu je ovšem třeba v každém mechanickém systému, kde se vyskytnou vazby mezi tělesy, které je třeba modelovat co nejděle, v systémech, které modelují srážky či kontakty těles či pokud může dojít k tzv. self-kontaktu (například těleso s dutinou, která se vlivem deformace uzavře). K této problematice existuje mnoho přístupů, z nichž některé budou uvedeny v následující kapitole. V této práci bude použit přístup k modelování kontaktu mezi elastickým tělesem a tuhým překážkou pomocí formulace tzv. nelineárního komplementárního problému. Stejným způsobem bude přistoupeno k modelování suchého tření na kontaktní hranici.

Postup a závěry uvedené v této práci mohou být v budoucnu zobecněny i pro problém kontaktu dvou elastických těles, či pro případ výše zmíněného self-kontaktu.

Cíl práce

Cílem této práce je formulovat úlohu jednostranného kontaktu 3D elastického tělesa s tuhým překážkou za uvažování tření a dynamických účinků. Dále provést implementaci numerického řešení těchto úloh pomocí metody konečných prvků a Newtonovy nehladké metody a řešit modelové úlohy s různými parametry modelu (koeficienty tření) a numerických metod (parametry diskretizace). K tomuto účelu bude využit programovací jazyk Python, zejména pak knihovny SfePy a NumPy.

Struktura práce

Tato práce je rozdělena do sedmi kapitol. První kapitola slouží k seznámení s motivací a cíli této práce.

Druhá kapitola popisuje některé používané přístupy k modelování kontaktu elastického tělesa s překážkou a některé přístupy pro modelování tření v místě kontaktu.

Ve třetí kapitole se čtenář seznámí s tzv. nelineárním komplementárním problémem. Je zde uveden způsob, jak jej přeformulovat jako soustavu nehladkých rovnic. Dále je zde popsán způsob řešení soustavy nehladkých rovnic

pomocí modifikace Newtonovy metody a nakonec je uvedena přímá souvislost nelineárního komplementárního problému s úlohou kontaktu.

Ve čtvrté kapitole je formulována úloha kontaktu elastického tělesa s tuhou překážkou, dále prostorová diskretizace problému pomocí metody konečných prvků a časová diskretizace pomocí metody centrálních diferencí.

Pátá kapitola nabízí popis implementace numerického řešení modelu odvozeného ve čtvrté kapitole, včetně některých jednodušších speciálních případů, jako je úloha kontaktu bez uvažování tření či úloha kontaktu ve 2D. Taktéž je uveden postup pro vylepšení

V šesté kapitole jsou uvedeny výsledky numerických simulací v programovacím jazyce Python pro modelové úlohy. Jsou zde porovnány a zhodnoceny výsledky pro různé parametry modelu.

V poslední kapitole je uvedeno shrnutí této práce, dosažených výsledků a možných rozšíření modelu pro obecnější problémy.

Poznámka

Tato práce navazuje na bakalářskou práci [3] autora tohoto textu a svým tématem s ní úzce souvisí. Z důvodu, aby se některé části zbytečně neopakovaly, bude v takovém případě uveden v textu vždy jen odkaz na tuto práci a případně stručně zmíněny odlišnosti či změny.

2 Významné metody pro popis úlohy kontaktu

V této kapitole budou uvedeny některé možnosti popisu kontaktu elastického tělesa s tuhou překážkou a některé základní modely suchého tření.

2.1 Popis kontaktu

V této části zmiňme některé používané metody pro popis kontaktu, popsané například v [4], odkud (pouze) pro účely této části převezmeme i způsob značení.

Penaltová metoda Penaltová metoda je hojně používaná metoda pro popis kontaktu. Její popularita vyplývá ze snadné implementace a z důvodu její fyzikální interpretace. Tuto metodu si lze představit jako pružinu, která je aktivní jen v částech kontaktní hranice, kde dochází k průniku tělesa a překážky. Hodnota penaltové funkce pak odpovídá této fiktivní pružině. Nevýhodou této metody je ovšem fakt, že připouští průnik tělesa do překážky, tedy kontaktní podmínky jsou splněny pouze přibližně.

Napětí na kontaktní hranici p_c je v případě této metody nahrazeno funkcí:

$$p_c^i = \epsilon_N \langle g_N^i \rangle, \quad (1)$$

kde ϵ_N je penaltová funkce, často volená jako konstanta, g_N je záporně vzatá vzdálenost tělesa od překážky a $\langle \cdot \rangle$ jsou tzv. Macaulayovy závorky definované následovně:

$$\langle x \rangle = \frac{|x| + x}{2}, \quad (2)$$

tedy pro kladné x je hodnota x a pro záporné x je hodnota nulová. Jedním z problémů této metody je také vhodná volba penaltové funkce.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů Tato metoda spočívá v interpretaci napětí na kontaktní hranici jakožto Lagrangeových multiplikátorů, tedy

$$p_c^i = \lambda_N^i. \quad (3)$$

Jako časté nevýhody této metody jsou uváděny zvýšení počtu neznámých a nutnost použití speciálního typu řešiče.

Vylepšená Lagrangeova metoda Tato metoda kombinuje oba výše uvedené postupy následujícím způsobem:

$$p_c^i = \langle \lambda_N^i + \epsilon_N g_N^i \rangle. \quad (4)$$

Tato metoda umožňuje volit nižší hodnoty penaltové funkce, což má příznivý vliv na numerické vlastnosti problému.

2.2 Popis tření na kontaktní hranici

V této části jsou uvedeny některé používané modely pro popis suchého tření na kontaktní hranici (viz [6]). Dále budeme předpokládat homogenní a izotropní vlastnosti materiálu.

Tresca model Model tření Tresca je také známý jako model s předepsaným třením. Ačkoliv se nejedná o realistický mechanický model, lze jej použít v některých speciálních případech, nebo v iteračních metodách jako přiblížení Coulombůva modelu. Označme napětí v kontaktním uzlu v tečném směru g_t . Dále označme posuv uzlu v tečném směru jako u_t . V tečném směru na kontaktní hranici platí:

$$|g_t| \leq p \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (5)$$

$$|g_t| < p \Rightarrow u_t = 0 \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (6)$$

$$g_t = 0 \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda g_t \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (7)$$

kde $p \geq 0$ je daná funkce, λ je třecí multiplikátor.

Coulombův model Coulombův model tření je podobný předcházejícímu modelu, nahrazuje v něm předepsanou funkci p součinem třecího koeficientu μ a absolutní hodnoty normálového napětí g_n . Vztahy (5) až (7) příslušným způsobem upravíme na tvar:

$$|g_t| \leq \mu |g_n| \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (8)$$

$$|g_t| < \mu |g_n| \Rightarrow u_t = 0 \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (9)$$

$$g_t = 0 \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda g_t \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (10)$$

Nortonův-Hoffův model Nortonův-Hoffův model tření je variací předcházejícího modelu, zavádí koeficient ρ , pro který platí $0 < \rho < 1$ a může být zapsán takto:

$$g_t \leq \mu |g_n| \|u_t\|^\rho u_t \quad \text{na } \Gamma_c. \quad (11)$$

Poznamenejme, že čím více se koeficient ρ blíží nule, tím více se tento model blíží Coulombovu modelu.

3 Nelineární komplementární problém (NCP)

Nelineární komplementární problém (nonlinear complementarity problem, dále jen NCP) je úloha, jejíž cílem je pro dvě dané funkce \mathbf{A} , \mathbf{B} , které jsou spojitě diferencovatelné, $\mathbf{A}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ najít takové $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pro které platí:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0. \quad (12)$$

Definujme množinu indexů γ pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\gamma = \{i : A_i(\mathbf{x}) = B_i(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (13)$$

Pokud pro řešení \mathbf{x} platí $\gamma = \emptyset$, hovoříme o nedegenerovaném řešení.

Velice často používaný způsob, jak přeformulovat NCP jako soustavu nelineárních rovnic je zavedení zvolené NCP funkce $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, pro kterou platí:

$$\phi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad ab = 0, \quad (14)$$

kde a, b jsou spojitě diferencovatelné funkce, $a, b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Potom jsou podmínky (12) ekvivalentní se soustavou nelineárních rovnic

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi(A_1(\mathbf{x}), B_1(\mathbf{x})) \\ \phi(A_2(\mathbf{x}), B_2(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ \phi(A_n(\mathbf{x}), B_n(\mathbf{x})) \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Dvě nejčastěji používané NCP funkce (dle [7]) jsou funkce minima

$$\phi(a, b) = \phi_{\min}(a, b) \equiv \min(a, b), \quad (16)$$

a Fischerova-Burmeisterova funkce

$$\phi(a, b) = \phi_{FB}(a, b) \equiv \sqrt{a^2 + b^2} - (a + b). \quad (17)$$

Obě tyto funkce jsou diferencovatelné na celém svém definičním oboru s výjimkou počátku, kde mají nehladký bod (pro ilustraci viz Obr. 1). Z tohoto důvodu byly pro řešení soustavy rovnic (15) použity metody Newtonova typu pro nehladké soustavy rovnic, viz dále.

Před uvedením možných algoritmů řešení definujme pojem B-subdiferenciál, který bude dále používán. Nechť $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ je spojitá a je diferencovatelná až na konečně mnoho bodů. Označme D_G množinu bodů, kde je \mathbf{G}

diferencovatelná. Poté můžeme B-subdiferenciál funkce \mathbf{G} v bodě \mathbf{x} definovat takto:

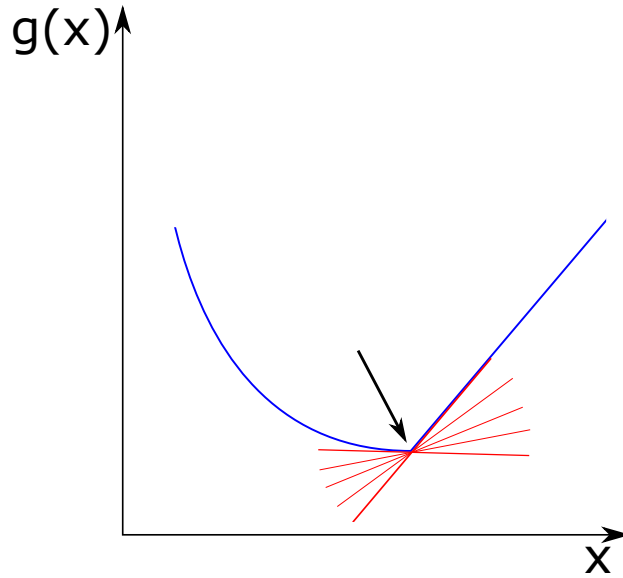
$$\partial_B \mathbf{G}(\mathbf{x}) := \lim_{\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}} \mathbf{G}'(\mathbf{x}^k), \quad \text{kde } \mathbf{x}^k \in D_G, \quad (18)$$

pro ilustraci viz Obr. 1 pro funkci jedné proměnné.

Též uvedme definici Clarkova subdiferenciálu:

$$\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}) := \text{co } \partial_B \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad (19)$$

kde co značí konvexní obal množiny.



Obr. 1: Příklad grafu funkce jedné reálné proměnné (modrá barva) s nehladkým bodem (označen šipkou) a naznačenou množinou subderivací (červená barva) příslušející subdiferenciálu.

3.1 Algoritmus řešení využívající *Fischerovu-Burmeisterovu* funkci

Tento algoritmus byl poprvé představen v [2].

Zavedme funkci ψ , pro kterou platí:

$$\psi(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \|\Phi(\mathbf{x})\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi(A_i(\mathbf{x}), B_i(\mathbf{x}))^2. \quad (20)$$

Je zřejmé, že $\psi(\mathbf{x}) = 0$ právě tehdy, když \mathbf{x} je řešením (12), tedy řešení (12) je ekvivalentní s hledáním globálního minima $\psi(\mathbf{x})$

Algoritmus 1

Krok 0 Nastav $k=0$, zvol $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$, $p > 2$, $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, $\epsilon \geq 0$.

Krok 1 (zastavovací podmínka) Pokud $\|\psi(\mathbf{x}^k)\| < \epsilon$ zastav.

Krok 2 Vyber $\mathbf{J}^k \in \partial_B \Phi(\mathbf{x}^k)$ a vyřeš rovnici

$$\mathbf{J}^k \mathbf{d}^k = -\Phi(\mathbf{x}). \quad (21)$$

Pokud soustava (21) není řešitelná, nebo pokud není splněná podmínka

$$\nabla \psi(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k \leq -\rho \|\mathbf{d}^k\|^p, \quad (22)$$

pak nastav $\mathbf{d}^k = -\nabla \psi(\mathbf{x}^k)$

Krok 3 (linesearch) Najdi nejmenší $i^k = 0, 1, \dots$ takové, že

$$\psi(\mathbf{x}^k + 2^{-i^k} \mathbf{d}^k) \leq \psi(\mathbf{x}^k) + \beta 2^{-i^k} \nabla \psi(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k \quad (23)$$

Krok 4 Nastav $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + 2^{-i^k} \mathbf{d}^k$ a jdi na Krok 1.

Za pozornost stojí fakt, že aplikací standardních pravidel nehladké analýzy dostáváme následující:

$$\partial \psi(\mathbf{x}^k) = \{\nabla \psi(\mathbf{x}^k)\} = \mathbf{V}^T \Phi(\mathbf{x}^k) \quad \text{pro } \forall \mathbf{V} \in \partial \Phi(\mathbf{x}^k). \quad (24)$$

Můžeme položit $\mathbf{V} = \mathbf{J}^k$ a vezmeme-li v úvahu (21), můžeme psát následující:

$$\nabla \psi(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}^k = (\Phi(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{J}^k) \mathbf{d}^k = -\|\Phi(\mathbf{x}^k)\|^2. \quad (25)$$

Nyní uvedme postup při výpočtu Jacobiovy matice \mathbf{J}^k podle [2].

Krok 1 Nastav γ (viz (13)).

Krok 2 Vyber takové $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $z_i \neq 0$ pro $i \in \gamma$

Krok 3 Pro každé $i \notin \gamma$ má i -tá řádka Jacobiovy matice \mathbf{J}^k tvar

$$J_i = \left(\frac{A_i(\mathbf{x})}{\|A_i(\mathbf{x}), B_i(\mathbf{x})\|} - 1 \right) \nabla A_i(\mathbf{x})^T + \left(\frac{B_i(\mathbf{x})}{\|A_i(\mathbf{x}), B_i(\mathbf{x})\|} - 1 \right) \nabla B_i(\mathbf{x})^T. \quad (26)$$

Krok 4 Pro každé $i \in \gamma$ má i -tá řádka Jacobiovy matice \mathbf{J}^k tvar

$$J_i = \left(\frac{\nabla A_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}}{\|\nabla A_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}, \nabla B_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}\|} - 1 \right) \nabla A_i(\mathbf{x})^T + \left(\frac{\nabla B_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}}{\|\nabla A_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}, \nabla B_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}\|} - 1 \right) \nabla B_i(\mathbf{x})^T. \quad (27)$$

Jacobiova matice \mathbf{J} pro uvedený postup splňuje $\mathbf{J} \in \partial_B \Phi(\mathbf{x})$, důkaz viz [2].

Konkrétní hodnoty ρ , p , β byly zvoleny (v souladu s [2]) takto:

$$\rho = 10^{-8}, \quad p = 2.1, \quad \beta = 10^{-4}. \quad (28)$$

Jediné, co zbývá, je definice vektoru \mathbf{z} . V této práci byl zvolen stejně jako v [2] tak, aby platilo $z_i = 1$ pro $i \in \gamma$ a $z_i = 0$ pro $i \notin \gamma$.

Uvedený postup konverguje k řešení, důkaz viz [2]. V témže článku je uveden i heuristický postup pro urychlení výpočtu.

Označme:

$$\alpha_i = \frac{\nabla A_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}}{\|\nabla A_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}, \nabla B_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}\|}, \quad \beta_i = \frac{\nabla B_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}}{\|\nabla A_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}, \nabla B_i(\mathbf{x})^T \mathbf{z}\|}. \quad (29)$$

Poznamenejme, že nezáporné konstanty α_i a β_i mohou být obecně voleny libovolně tak, aby splňovaly následující vztah:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1, \quad (30)$$

viz [7]. Čtenář snadno nahlédne, že výše zvolená konkrétní volba těchto konstant (viz vztah (29)) splňují podmínku (3.1).

Na závěr poznamenejme, že výše uvedený algoritmus lze různými způsoby modifikovat, například v [7] je pro případ singulární Jacobiovy matice navrženo místo postupu ve směru největšího spádu prohledávat okolí ve směru jednotlivých souřadnic. Tato modifikace se ale v této práci nejeví příliš vhodná vzhledem k vysokému počtu stupňů volnosti při použití metody konečných prvků (viz dále).

3.2 Souvislost s úlohou kontaktu

Souvislost s úlohou kontaktu lze ukázat, jestliže zvolíme funkci $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ jako vzdálenost tělesa od překážky v místě \mathbf{x} a funkci $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ jako velikost normálové (kontaktní) síly na kontaktní hranici v místě \mathbf{x} . Je zřejmé, že platí podmínky (12), tedy platí, že vzdálenost tělesa a překážky nemůže být nikdy záporná, jelikož možnost průniku není přípustná. Stejně tak velikost

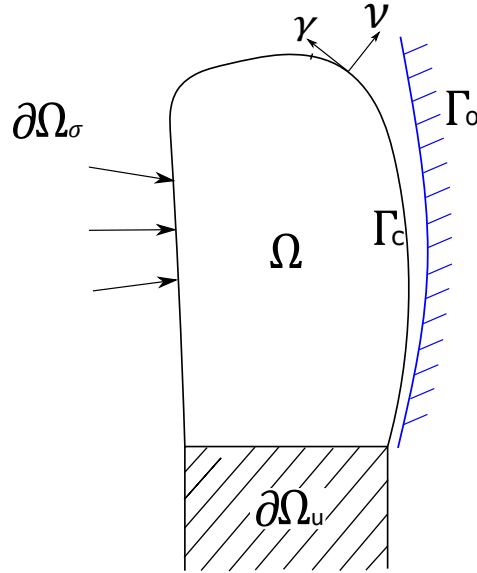
normálové síly na kontaktní hranici nemůže být záporná (záporná hodnota by znamenala přitažlivé působení mezi tělesem a překážkou, což nebudeme připouštět). Třetí člen v (12) popisuje skutečnost, že není možné, aby byla nenulová zároveň vzdálenost a zároveň kontaktní síla, ovšem je možný případ kdy jsou obě funkce nulové, což odpovídá nehladkému bodu. Fyzikálně tento případ odpovídá speciální situaci, kdy je vzdálenost tělesa od překážky v daném bodě nulová, ovšem těleso s překážkou na sebe silově nepůsobí. Jako nelineární komplementární problém lze vnímat i problém tření na kontaktní hranici, o tom více v následující kapitole.

4 Úloha jednostranného kontaktu elastického tělesa s tuhou překážkou

V této kapitole bude formulována úloha kontaktu elastického tělesa s tuhou překážkou ve 3D s uvažováním tření na kontaktní hranici a s uvažováním dynamických účinků. Bude provedena nejprve prostorová a následně časová diskretizace pro obdržení modelu problému ve tvaru soustavy nehladkých algebraických rovnic.

4.1 Formulace úlohy

Při formulaci vyjdeme zejména z prací [3], [8], [9], [10].



Obr. 2: Okrajové podmínky kontaktní úlohy.

Uvažujme elastické těleso (viz obr. 2) na oblasti Ω s hranicí $\partial\Omega$ a tuhou překážkou Γ_0 . Hranici $\partial\Omega$ rozdělme na $\partial\Omega = \partial_u\Omega \cup \partial_\sigma\Omega \cup \Gamma_c$, kde $\partial_u\Omega$ je část hranice tělesa, kde jsou předepsány Dirichletovy okrajové podmínky (posuvy). $\partial_\sigma\Omega$ je část hranice tělesa, kde jsou předepsány Neumannovy okrajové podmínky (napětí). Γ_c je část hranice tělesa, u které uvažujeme možnost kontaktu s překážkou Γ_0 . Dále uvažujme časový interval $t \in \langle 0, T \rangle$.

V každé bodě hranice tělesa Γ_c zavedeme ortonormální systém $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$, kde $\boldsymbol{\tau}$ je tečný vektor k hranici a $\boldsymbol{\nu}$ je vektor vnější normály k hranici. Platí

tedy zřejmě

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad (31)$$

Nechť $s(x)$, $x \in \Gamma_c$ je počáteční vzdálenost mezi hranicí Γ_c tělesa v nezdeformovaném stavu a překážkou Γ_o . Zavedme množinu $Z(u) \subset \Gamma_c$, na které skutečně dochází ke kontaktu:

$$Z(u) = \{x \in \Gamma_c : \nu_i u_i - s = 0\}. \quad (32)$$

Rovnice dynamické rovnováhy pro počáteční nezdeformovanou konfiguraci má následující tvar:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} (D_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{u})) + f_i = 0 & \text{pro } x \in \Omega, t \in \langle 0, T \rangle \\ D_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{u}) \nu_j = b_i & \text{na } \partial\Omega_\sigma, t \in \langle 0, T \rangle \end{cases} \quad (33)$$

kde f_i jsou dané objemové síly, b_i jsou dané povrchové síly, D_{ijkl} , $i, j, k, l = 1, 2, 3$ je elastický tenzor čtvrtého řádu, pro který platí:

$$\begin{cases} D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{klij} \\ \exists \alpha_0 > 0 : D_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \geq \alpha_0 \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad \text{pro } \forall \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (34)$$

Řešení hledáme na množině

$$K_{H,C,T}(\mathbf{u}) = K_H(\mathbf{u}) \cap K_C(\mathbf{u}) \cap K_T(\mathbf{u}) \quad (35)$$

$K_H(\mathbf{u})$ je množina přípustných posuvů, které splňují konstituční vztahy a dále splňují počáteční a okrajové podmínky definované takto:

$$\begin{cases} u_j = 0 & \text{pro } x \in \partial\Omega_u, t \in \langle 0, T \rangle \\ \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} & \text{pro } x \in \Omega, t = 0 \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \hat{\mathbf{v}} & \text{pro } x \in \Omega, t = 0 \end{cases} \quad (36)$$

$K_C(\mathbf{u})$ je množina přípustných posuvů, které splňují podmínku nulového průniku na kontaktní hranici:

$$\begin{cases} \nu_i u_i - s \leq 0 & \text{pro } x \in \Gamma_c, t \in \langle 0, T \rangle \\ \nu_i D_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{u}) \nu_i \leq 0 & \text{pro } x \in \Gamma_c, t \in \langle 0, T \rangle \\ \nu_i D_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{u}) \nu_i = 0 & \text{pro } x \in \Gamma_c \setminus Z(u), t \in \langle 0, T \rangle, \end{cases} \quad (37)$$

a $K_C(\mathbf{u})$ je množina přípustných posuvů splňujících podmínky tření formulované výrazy (5) až (7).

Podle [11] lze úlohu formulovat jako minimalizaci funkcionálu $\Theta_H(\mathbf{u})$, který definujeme pomocí Hamiltonova principu ve tvaru:

$$\Theta_H(\mathbf{u}) = \int_0^T \left(\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{K}_e(\mathbf{u}) - \int_\Omega f_i u_i dV - \int_{\partial\Omega} b_i u_i dS \right) dt, \quad (38)$$

kde platí, že celková potenciální energie deformovaného tělesa je:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} D_{ijkl} \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{kl}(\mathbf{u}) dV \quad (39)$$

a celková kinetická energie je:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV \quad (40)$$

Funkcionál $\Theta_H(\mathbf{u})$ uvažujeme na množině K_H .

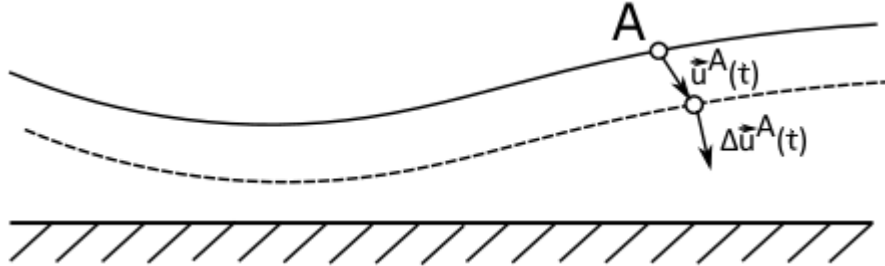
Úkolem je najít takové \mathbf{u} , které splňuje:

$$\mathbf{u} \in K_{H,C,T}(\mathbf{u}) \quad : \quad \Theta_H(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{u}^* \in K_{H,C,T}(\mathbf{u})} \{\Theta_H(\mathbf{u}^*)\}. \quad (41)$$

Na tomto místě stručně zopakujeme problematiku již diskutovanou např. v [3]. Podmínky pro tření je třeba z důvodů numerických vlastnosti algoritmu pro řešení této úlohy (po její časové a prostorové diskretizaci) přeformulovat do jiného tvaru. Nejprve zavedme změnu posuvu bodu A \mathbf{u} v čase $t + \Delta t$:

$$\mathbf{u}^A(t + \Delta t) = \mathbf{u}^A(t) + \Delta \mathbf{u}^A(t), \quad (42)$$

pro ilustraci viz obr. 3.



Obr. 3: Změna posuvu ve dvou následných časových hladinách.

Předpokládejme, že tečný směr τ v daném bodě kontaktní hranice je známý, pak lze rozdělit posuv v tečném směru na kontaktní hranici Δu_τ na dvě části, na posuv v kladném a záporném směru:

$$\Delta u_\tau = \Delta u_\tau^+ - \Delta u_\tau^-. \quad (43)$$

Poté lze množinu K_T definovat následujícími komplementárními podmínkami. V záporném směru:

$$- \Delta u_\tau^- \leq 0, \quad (44)$$

$$g_\tau - f_{cp} \leq 0, \quad (45)$$

$$(g_\tau - f_{cp})(-\Delta u_t^-) = 0, \quad (46)$$

v kladném směru:

$$-\Delta u_\tau^+ \leq 0, \quad (47)$$

$$-g_\tau - f_{cp} \leq 0, \quad (48)$$

$$(-g_\tau - f_{cp})(-\Delta u_\tau^+) = 0, \quad (49)$$

kde

$$g_\tau = \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (50)$$

je kontaktní napětí v tečném směru. Komplementární podmínky formulované výše lze ekvivalentně zapsat takto:

$$\max\{g_\tau - f_{cp}, -\Delta u_\tau^-\} = 0, \quad (51)$$

$$\max\{-g_\tau - f_{cp}, -\Delta u_\tau^+\} = 0. \quad (52)$$

S využitím vztahů (16) či (17) můžeme tyto podmínky zapsat takto

$$\Phi\{-g_\tau + f_{cp}, \Delta u_\tau^-\} = 0, \quad (53)$$

$$\Phi\{g_\tau + f_{cp}, \Delta u_\tau^+\} = 0. \quad (54)$$

4.2 Prostorová diskretizace

Pro vyřešení problému (41) využijeme aproximaci metodou konečných prvků. Pro větší přehlednost odvodíme nejprve model bez uvažování tření (pro statický případ ve 2D již odvozena v [3]), tedy bez členu, kde se vyskytuje tečné napětí.

Odvození tohoto problému pro statický případ je již provedeno v [9], případ s uvažování dynamických účinků se liší pouze zahnutím dynamických účinků za použití matice hmotnosti \mathbf{M} a rozšířením do 3D prostoru, proto zde nebude do podrobností opakováno.

Zavedeme-li restriční matice

$$\mathbf{X} : \mathbb{R}^{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{N}-3N_c},$$

$$\mathbf{Y} : \mathbb{R}^{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_c},$$

$$\mathbf{Z} : \mathbb{R}^{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{2N_c},$$

definované takto ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\tilde{N}}$):

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}\mathbf{v})_k &= \mathbf{v}_k, & \text{pro } k > N_c \\
(\mathbf{Z}\mathbf{v})_{2k-1} &= \mathbf{v}_{3k-2}, & \text{pro } k \leq N_c \\
(\mathbf{Z}\mathbf{v})_{2k} &= \mathbf{v}_{3k-1}, & \text{pro } k \leq N_c \\
(\mathbf{Y}\mathbf{v})_k &= \mathbf{v}_{3k}, & \text{pro } k \leq N_c,
\end{aligned} \tag{55}$$

kde \tilde{N} je počet stupňů volnosti a N_c je počet uzlů na kontaktní hranici. Podmínky rovnováhy pro úlohu kontaktu v diskretizované podobě zapsat jako následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}\mathbf{R}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) &= 0 \\
\max\{\mathbf{Y}\mathbf{R}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}), \mathbf{Y}\mathbf{R}\mathbf{u} - \mathbf{s}\} &= 0 \\
\mathbf{Z}\mathbf{R}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) &= 0,
\end{aligned} \tag{56}$$

kde maximum je bráno po složkách. Zřejmě pro jakékoliv dvě reálné hodnoty a, b platí:

$$\max(a, b) = \min(-a, -b). \tag{57}$$

Tedy soustavu rovnic (56) lze s využitím vztahů (16) či (17) upravit do tvaru

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}\mathbf{R}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) &= 0 \\
\Phi\{\mathbf{Y}\mathbf{R}(\mathbf{f} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{K}\mathbf{u}), \mathbf{s} - \mathbf{Y}\mathbf{R}\mathbf{u}\} &= 0 \\
\mathbf{Z}\mathbf{R}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) &= 0.
\end{aligned} \tag{58}$$

Připomeňme, že \mathbf{K} je matice hmotnosti a \mathbf{R} je matice rotace, která na kontaktní hranici transformuje globální souřadnicový systém (x, y, z) na lokální (normála, tečny).

Nyní zavedme model tření. Využijme metodu Coulombova modelu tření v pevném bodě ([6]). Na tomto místě trochu předběhněme a uvažujme dvě po sobě jdoucí časové hladiny vzdálené od sebe Δt . Coulombova modelu tření v pevném bodě spočívá v tom, že v daném časovém kroku řešíme model tření Tresca, kde daná funkce p , která má význam normálového napětí, je dána výsledky z předcházejícího časového kroku. Tímto přístupem vzniká při numerické simulaci chyba, jelikož pro bod, který se v daném kroku dostal do kontaktu s překážkou je v prvním následujícím kroku hodnota $p = 0$, tedy v okamžiku kontaktu se daný bod chová, jako kdyby tření bylo nulové. Tuto chybu lze zmenšit použitím dostatečného počtu kroků.

Odvození problému se třením je, stejně jako tomu je v případě bez tření, součástí práce [3], proto zde nebude podrobně opakováno, spočívá v rozšíření

modelu bez tření (58) o třecí sílu a komplementární podmínky pro tření. Je třeba připojit rovnici popisující vztah mezi složkami tečen v tečné rovině, neboť tyto nejsou dopředu známe (uvažujeme jednotkovou délku tečny v tečné rovině):

$$(\mathbf{t}_1)^2 + (\mathbf{t}_2)^2 - \mathbf{1} = 0, \quad (59)$$

kde prvky ve vektorech \mathbf{t}_1 a \mathbf{t}_2 jsou složky vektoru tečny v tečné rovině v uzlech na kontaktní hranici, označme pro bod i jako ${}^i\tau_1$ a ${}^i\tau_2$. Výraz $(.)^2$ je brán po složkách.

Model popisující popisující úlohu kontaktu se třením ve 3D má následující tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{XR}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) &= 0 \\ \Phi\{\mathbf{YR}(\mathbf{f} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{K}\mathbf{u}), \mathbf{s} - \mathbf{YR}\mathbf{u}\} &= 0 \\ \mathbf{ZR}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) - \mathbf{A}\mathbf{g}_\tau &= 0 \\ \Phi\{\Delta\mathbf{u}_Z^{(+)}, \tilde{\mathbf{g}} + f_c\mathbf{p}\} &= 0 \\ \Phi\{\Delta\mathbf{u}_Z^{(-)}, -\tilde{\mathbf{g}} + f_c\mathbf{p}\} &= 0 \\ (\mathbf{t}_1)^2 + (\mathbf{t}_2)^2 - \mathbf{1} &= 0, \end{aligned} \quad (60)$$

Funkci \mathbf{p} uvažujeme (podrobně odvozeno v [3]) v následujícím tvaru

$$\mathbf{p} = \mathbf{YR}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}), \quad (61)$$

Neznámými jsou posuvy uzlů $\mathbf{X}\mathbf{u}$, $\mathbf{Y}\mathbf{u}$, velikosti posuvů v tečném směru $\Delta\mathbf{u}_Z^{(+)}$ a $\Delta\mathbf{u}_Z^{(-)}$, velikosti tečného napětí $\tilde{\mathbf{g}}$ a složky tečen v tečné rovině \mathbf{t}_1 a \mathbf{t}_2 . Pokud označíme složky tečného vektoru v tečné rovině uspořádáme do matice \mathbf{T} následujícím způsobem:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^1\tau_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & {}^1\tau_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & {}^2\tau_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & {}^2\tau_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (62)$$

a dále zavedeme vektory

$$\tilde{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_2 \\ \tilde{g}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{Z}}^{(+)} = \begin{bmatrix} \Delta^1 u_{\mathbf{Z}}^{(+)} \\ \Delta^1 u_{\mathbf{Z}}^{(+)} \\ \Delta^2 u_{\mathbf{Z}}^{(+)} \\ \Delta^2 u_{\mathbf{Z}}^{(+)} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{Z}}^{(-)} = \begin{bmatrix} \Delta^1 u_{\mathbf{Z}}^{(-)} \\ \Delta^1 u_{\mathbf{Z}}^{(-)} \\ \Delta^2 u_{\mathbf{Z}}^{(-)} \\ \Delta^2 u_{\mathbf{Z}}^{(-)} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (65)$$

potom platí následující vztahy:

$$\mathbf{g}_\tau = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{g}} \quad (66)$$

$$\mathbf{Z} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{T} (\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{Z}}^{(+)} - \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{Z}}^{(-)}) \quad (67)$$

Poznamenejme, že formálně jsou v této formulaci neznámé i posuvy uzlů $\mathbf{Z}\mathbf{u}$, které ovšem budou v následující části popisující časovou diskretizaci vyjádřeny pomocí známých veličin a neznámých veličin $\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{Z}}^{(+)}$, $\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{Z}}^{(-)}$, \mathbf{t}_1 a \mathbf{t}_2 , čímž dostaneme stejný počet rovnic jako je počet neznámých.

4.3 Časová diskretizace

Dosud byla uvažována platnost modelu (60) pro čas $t \in \langle 0, T \rangle$. Označme interval $\langle 0, T \rangle \triangleq I_{time}$. Pro vyřešení úlohy je nutné zeslabit požadavek platnosti modelu pro čas na spojitém intervalu $t \in I_{time}$. Požadujeme proto přesné řešení pouze v bodech t_k , $k = 1, 2, \dots, K$, kde $t_k \in I_{time}$, $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, $t_1 = 0$, $t_K = T$. $\Delta t > 0$ je časový krok mezi dvěma časovými hladinami, v této práci jej budeme uvažovat konstantní, obecně ale může mít proměnnou velikost.

Pro časovou diskretizaci využijme metodu centrálních diferencí popsanou například v [13]. Jedná se o metodu, která pro případ elastodynamiky bez uvažování kontaktu umožňuje použití explicitního řešiče. Zrychlení $\ddot{\mathbf{u}}$ lze vyjádřit následujícím způsobem:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t_k} = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}^{t_{k-1}} - 2\mathbf{u}^{t_k} + \mathbf{u}^{t_{k+1}}). \quad (68)$$

Dosažením vztahu (68) do soustavy 60 obdržíme soustavu rovnic pro naznamé v čase $t = t_{k+1}$. Řešení této soustav získáme na základě známých hodnot v časech $t = t_{k-1}$ a t_k . Soustava má tvar:

$$\begin{aligned} \Phi \left\{ -\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{XRMu}^{t_{k+1}} + \mathbf{XR} \left[\frac{1}{\Delta t^2} (-2\mathbf{Mu}^{t_k} + \mathbf{Mu}^{t_{k-1}}) + \mathbf{Ku}^{t_k} - \mathbf{f}^{t_k} \right] \right. &= 0 \\ \left. -\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{YRMu}^{t_{k+1}} - \mathbf{YR} \left[\frac{1}{\Delta t^2} (-2\mathbf{Mu}^{t_k} + \mathbf{Mu}^{t_{k-1}}) + \mathbf{Ku}^{t_k} - \mathbf{f}^{t_k} \right], \right. & \\ \left. \mathbf{s} - \mathbf{YRu}^{t_{k+1}} - \mathbf{YRu}^{t_k} \right\} &= 0 \\ \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{ZRMu}^{t_{k+1}} + \mathbf{ZR} \left[\frac{1}{\Delta t^2} (-2\mathbf{Mu}^{t_k} + \mathbf{Mu}^{t_{k-1}}) + \mathbf{Ku}^{t_k} - \mathbf{f}^{t_k} \right] - \mathbf{Ag}_\tau^{t_{k+1}} &= 0 \\ \Phi \{ (\mathbf{u}_Z^{(+)})^{t_{k+1}} - (\mathbf{u}_Z^{(+)})^{t_k}, \tilde{\mathbf{g}}^{t_{k+1}} + f_c \mathbf{p}^{t_k} \} &= 0 \\ \Phi \{ (\mathbf{u}_Z^{(-)})^{t_{k+1}} - (\mathbf{u}_Z^{(-)})^{t_k}, -\tilde{\mathbf{g}}^{t_{k+1}} + f_c \mathbf{p}^{t_k} \} &= 0, \\ (\mathbf{t}_1^{t_{k+1}})^2 + (\mathbf{t}_2^{t_{k+1}})^2 - \mathbf{1} &= 0, \end{aligned} \quad (69)$$

kde vektor \mathbf{p}^{t_k} uvažujeme jako kontaktní napětí z předchozí časové hladiny (viz [3] a vztah (61)), tedy

$$\mathbf{p}^{t_k} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{YRMu}^{t_k} + \mathbf{YR} \left[\frac{1}{\Delta t^2} (-2\mathbf{Mu}^{t_{k-1}} + \mathbf{Mu}^{t_{k-2}}) + \mathbf{Ku}^{t_{k-1}} - \mathbf{f}^{t_k} \right]. \quad (70)$$

Poznamenejme, že pro velikost časového kroku jdoucí k nule se tento model tření blíží Coulombovu modelu.

Označíme-li přírůstek \mathbf{u} mezi dvěma časovými hladinami

$$\mathbf{u}^{t_{k+1}} - \mathbf{u}^{t_k} \triangleq \Delta \mathbf{u}, \quad (71)$$

Přírůstek posuvu $\Delta \mathbf{u}_Z^+$ aproximujeme následujícím vztahem:

$$\Delta \mathbf{u}_Z^+ = (\mathbf{u}_Z^+)^{t_{k+1}} - (\mathbf{u}_Z^+)^{t_k} \quad (72)$$

pro $\Delta \mathbf{u}_{\mathbf{Z}}$ analogicky.

Označme

$$\mathbf{Q}^{t_k} = \frac{1}{\Delta t^2} (-\mathbf{M}\mathbf{u}^{t_k} + \mathbf{M}\mathbf{u}^{t_{k-1}}) + \mathbf{K}\mathbf{u}^{t_k} - \mathbf{f}^{t_k}. \quad (73)$$

Soustavu rovnic (69) zapsat takto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{XRM}\Delta \mathbf{u}^{t_{k+1}} + \mathbf{XRQ}^{t_k} &= 0 \\ \Phi \left\{ -\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{YRM}\mathbf{u}^{t_{k+1}} - \mathbf{YRQ}^{t_k}, \mathbf{s} - \mathbf{YRu}^{t_{k+1}} - \mathbf{YRu}^{t_k} \right\} &= 0 \\ \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{ZRM}\Delta \mathbf{u}^{t_{k+1}} + \mathbf{ZRQ}^{t_k} - \mathbf{Ag}_\tau^{t_{k+1}} &= 0 \\ \Phi \{ \Delta \mathbf{u}_{\mathbf{Z}}^{(+)}, \tilde{\mathbf{g}}^{t_{k+1}} + f_c \mathbf{p}^{t_k} \} &= 0 \\ \Phi \{ \Delta \mathbf{u}_{\mathbf{Z}}^{(-)}, -\tilde{\mathbf{g}}^{t_{k+1}} + f_c \mathbf{p}^{t_k} \} &= 0, \\ (\mathbf{t}_1^{t_{k+1}})^2 + (\mathbf{t}_2^{t_{k+1}})^2 - \mathbf{1} &= 0, \end{aligned} \quad (74)$$

Počáteční podmínky v čase $t_0 = 0$ jsou voleny $\mathbf{u}^{t_0} = \hat{\mathbf{u}}$ a $\frac{d\mathbf{u}^{t_0}}{dt} = \mathbf{0}$, kde $\hat{\mathbf{u}}$ odpovídá posuvům tělesa ve statické rovnovážné poloze, která je pro danou sílu f^{t_0} určena řešením kvazistatického modelu.

Jelikož se pro metodu centrálních zrychlení využívá hodnot ze dvou předchozích časových hladin, je třeba určit hodnoty posuvů \mathbf{u}^{t-1} . Vzhledem k předpokladům uvedeným výše platí $\mathbf{u}^{t-1} = \mathbf{u}^{t_0} = \hat{\mathbf{u}}$

Metoda centrálních zrychlení byla zvolena pro svoji snadnou implementaci a také z toho důvodu, že se v soustavě rovnic získané aplikací této metody nevyskytuje ve výrazech s neznámými pohromadě matice tuhosti \mathbf{K} s maticí hmotnosti \mathbf{M} , což vede k lepším vlastnostem při numerické simulaci, viz následující kapitola. Obecně (podle [13]) platí, že u metody centrálních zrychlení je třeba volit krátký časový krok, neboť tato metoda je podmíněně stabilní, což je obecně jedna z nevýhod této metody. Z důvodu zachování přesnosti při výpočtu úlohy kontaktu se třením je volen krátký časový krok nezávisle na použité metodě časové diskretizace, jelikož řešení kontaktní úlohy je ovlivněno historií zatěžování (viz [5]), čímž se nevýhoda této metody nejeví tak zásadní.

5 Implementace numerického řešení

Pro implementaci numerického řešení úlohy odvozené v předchozí části byl použit programovací jazyk Python. K sestavení systémových matic \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{A} a vektoru \mathbf{f} byla využita knihovna SfePy (dokumentace viz [12]), v samotné implementaci numerického řešení byla využita knihovna NumPy (dokumentace viz [13]), která umožňuje pracovat s proměnnými jako s maticemi a provádět s nimi maticové operace. K následnému vykreslení výsledků numerických simulací byla použita knihovna Matplotlib (dokumentace viz [14]). Vektor s určující vzdálenost jednotlivých uzlů na kontaktní hranici od překážky byl vypočten pouze jednou na začátku výpočtu pro nezdeformovanou konfiguraci. Toto zjednodušení je možné, neboť ve zkoumaných modelových úlohách bude uvažována pouze rovná, či lehce zakřivená překážka a jsou uvažovány malé posuvy a deformace. Vzhledem k těmto předpokladům se dopustíme jen malé chyby oproti přesnému řešení, v případě rovné překážky rovnoběžné s kontaktní hranicí tímto přístupem nezanese do modelu žádnou další chybu. Pro výpočet směru normály (pro určení matice rotace \mathbf{R}) a tedy i pro výpočet vektoru vzdálenosti s je možno uvažovat dva základní způsoby výpočtu. První možností je určovat normálu k překážce, druhou možností je pak určení normály ke kontaktní hranici (viz [3]). Jak bylo ukázáno v [3], pro výše uvedené předpoklady se výsledky dosažené oběma způsoby kvalitativně neliší. Vzhledem k povaze modelových úloh, kdy budeme uvažovat elastické těleso ve tvaru obdélníku (ve 2D případě) či kvádrů (ve 3D případě), bude pro jednoduchost použit způsob určování normály vzhledem ke kontaktní hranici tělesa. V případě, že by výše uvedené předpoklady nebyly splněny, bylo by samozřejmě nutné upravit výpočet vzdálenosti a směru normály a provádět jej v každém kroku (viz například [4]). Na následujících stránkách budou popsány modely úlohy kontaktu elastického tělesa s tuhou překážkou, které byly implementovány pomocí výše uvedených prostředků. Nejprve ale zavedme

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{R}\mathbf{P}, \quad (75)$$

kde $\mathbf{P} = \mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{A}, \mathbf{f}$. Pro zjednodušení zápisu bude hvězdička v horním indexu u matic $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{A}$ a vektoru \mathbf{f} v následujícím textu vypuštěna, budeme tedy uvažovat výše uvedené členy již po provedení rotace do lokálního souřadnicového systému vynásobením zleva maticí rotace.

5.1 Úloha kontaktu, 2D, bez tření

Tuto zjednodušenou úlohu obdržíme z (74), vypuštěním rovnic a členů týkajících se tření. Dále rozdělení posuvý v tečném směru na kladnou a zápornou část je v tomto případě zbytečné. Označme

$$\mathbf{Q}^{t_k} = \frac{1}{\Delta t^2}(-\mathbf{M}\mathbf{u}^{t_k} + \mathbf{M}\mathbf{u}^{t_{k-1}}) + \mathbf{K}\mathbf{u}^{t_k} - \mathbf{f}^{t_k} \quad (76)$$

členy, ve kterých se nevyskytují neznámé. Model pro úlohu kontaktu bez tření ve 2D s uvažováním dynamických účinků má tvar:

$$\begin{aligned} \Phi\left\{-\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{Y}\mathbf{M}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{Y}\mathbf{Q}^{t_k}, \mathbf{s} - \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{X}\mathbf{M}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{X}\mathbf{Q}^{t_k}\right\} &= 0 \\ \Phi\left\{-\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{Y}\mathbf{M}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{Y}\mathbf{Q}^{t_k}, \mathbf{s} - \mathbf{Y}\mathbf{R}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{Y}\mathbf{R}\mathbf{u}^{t_k}\right\} &= 0 \\ \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{Z}\mathbf{M}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{Z}\mathbf{Q}^{t_k} &= 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Z důvodu snížení čísla podmíněnosti Jacobiovy matice soustavy (viz dále) vynásobme rovnice číslem $\frac{1}{\Delta t^2}$ a vydělme konstantou M_{\max} , která má hodnotu nejvyššího prvku matice \mathbf{M} v absolutní hodnotě. Tím docílíme toho, že v Jacobiově matici soustavy se budou vyskytovat pouze prvky s podobným řádem. Poznamenejme ještě, že řešení rovnice

$$\Phi\{a, b\} = 0 \quad (78)$$

se nezmění, pokud vynásobíme libovolnou kladnou konstantou pouze jeden z členů a, b . Tohoto faktu s výhodou využijeme a soustavu rovnic (77) upravíme na tvar:

$$\begin{aligned} \Phi\left\{-\frac{1}{M_{\max}}\mathbf{Y}\mathbf{M}\Delta\mathbf{u} - \frac{\Delta t^2}{M_{\max}}\mathbf{Y}\mathbf{Q}^{t_k}, \mathbf{s} - \frac{1}{M_{\max}}\mathbf{X}\mathbf{M}\Delta\mathbf{u} + \frac{\Delta t^2}{M_{\max}}\mathbf{X}\mathbf{Q}^{t_k}\right\} &= 0 \\ \Phi\left\{-\frac{1}{M_{\max}}\mathbf{Y}\mathbf{M}\Delta\mathbf{u} - \frac{\Delta t^2}{M_{\max}}\mathbf{Y}\mathbf{Q}^{t_k}, \mathbf{s} - \mathbf{Y}\mathbf{R}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{Y}\mathbf{R}\mathbf{u}^{t_k}\right\} &= 0 \\ \frac{1}{M_{\max}}\mathbf{Z}\mathbf{M}\Delta\mathbf{u} + \frac{\Delta t^2}{M_{\max}}\mathbf{Z}\mathbf{Q}^{t_k} &= 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Označme

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{M_{\max}}\mathbf{M}. \quad (80)$$

a

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{\Delta t^2}{M_{\max}}\mathbf{Q}. \quad (81)$$

Soustavu rovnic (79) pak můžeme zapsat ve finálním tvaru:

$$\begin{aligned} \Phi\left\{-\mathbf{Y}\tilde{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{Y}\tilde{\mathbf{Q}}^{t_k}, \mathbf{s} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{X}\tilde{\mathbf{Q}}^{t_k}\right\} &= 0 \\ \Phi\left\{-\mathbf{Y}\tilde{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{Y}\tilde{\mathbf{Q}}^{t_k}, \mathbf{s} - \mathbf{Y}\mathbf{R}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{Y}\mathbf{R}\mathbf{u}^{t_k}\right\} &= 0 \\ \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{Q}}^{t_k} &= 0 \end{aligned} \quad (82)$$

v tomto tvaru je soustava implementována.

Vektor neznámých \mathbf{x} seřadíme následujícím způsobem:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}\Delta\mathbf{u} \\ \mathbf{Y}\Delta\mathbf{u} \\ \mathbf{Z}\Delta\mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (83)$$

a dále označme

$$\mathbf{X}\tilde{\mathbf{M}} = [\tilde{\mathbf{M}}_X^X \quad \tilde{\mathbf{M}}_X^Y \quad \tilde{\mathbf{M}}_X^Z] \quad (84)$$

$$\mathbf{Y}\tilde{\mathbf{M}} = [\tilde{\mathbf{M}}_Y^X \quad \tilde{\mathbf{M}}_Y^Y \quad \tilde{\mathbf{M}}_Y^Z] \quad (85)$$

$$\mathbf{Z}\tilde{\mathbf{M}} = [\tilde{\mathbf{M}}_Z^X \quad \tilde{\mathbf{M}}_Z^Y \quad \tilde{\mathbf{M}}_Z^Z]. \quad (86)$$

Analytické vyjádření Jacobiovy matice soustavy (79) lze potom psát takto:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_X^X & \tilde{\mathbf{M}}_X^Y & \tilde{\mathbf{M}}_X^Z \\ -\boldsymbol{\alpha}_1\tilde{\mathbf{M}}_Y^X & -\boldsymbol{\alpha}_1\tilde{\mathbf{M}}_Y^Y - \boldsymbol{\beta}_1\tilde{\mathbf{M}}_Y^X & -\boldsymbol{\alpha}_1\tilde{\mathbf{M}}_Y^Z \\ \tilde{\mathbf{M}}_Z^X & \tilde{\mathbf{M}}_Z^Y & \tilde{\mathbf{M}}_Z^Z \end{bmatrix} \quad (87)$$

kde $\boldsymbol{\alpha} = \text{diag}(\alpha_i - 1)$ a $\boldsymbol{\beta} = \text{diag}(\beta_i - 1)$. Hodnoty α_i a β_i získáme podle (26) resp. (27).

5.2 Úloha kontaktu, 3D, bez tření

Soustava rovnic popisující tento problém je z matematického hlediska totožná s 2D úlohou uvedenou výše, všechny vztahy uvedené u 2D problému bez tření zůstávají v platnosti.

5.3 Úloha kontaktu, 2D, se suchým třením

Tato úloha je zjednodušená varianta úlohy ve 3D se třením. Jelikož ve 2D případě tečná rovina přejde na jednorozměrnou tečnu, získáme soustavu popisující úlohu kontaktu se suchým třením ve 2D vypuštěním poslední rovnice v soustavě (74), a vypuštěním členů složek tečny v tečné nadrovině.

Označíme-li

$$\mathbf{Q}^{t_k} = \frac{1}{\Delta t^2} (-\mathbf{M}\mathbf{u}^{t_k} + \mathbf{M}\mathbf{u}^{t_{k-1}}) + \mathbf{K}\mathbf{u}^{t_k} - \mathbf{f}^{t_k}, \quad (88)$$

a posuvy v tečném směru rozdělené na kladný a záporný směr

$$\mathbf{Z}\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}_Z^{(+)} - \Delta\mathbf{u}_Z^{(-)} \quad (89)$$

obdržíme soustavu rovnic (provedeme stejné úpravy jako v části 5.1, to jest vynásobením číslem $\frac{1}{\Delta t^2}$ a vydělením konstantou M_{\max}):

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}\tilde{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{X}\tilde{\mathbf{Q}}^{t_k} &= 0 \\
\Phi\{-\mathbf{Y}\tilde{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{Y}\tilde{\mathbf{Q}}^{t_k}, \mathbf{s} - \mathbf{Y}\mathbf{R}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{Y}\mathbf{R}\mathbf{u}^{t_k}\} &= 0 \\
\mathbf{Z}\tilde{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{g}}_\tau^{t_{k+1}} + \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{Q}}^{t_k} &= 0 \\
\Phi\{\Delta\mathbf{u}_Z^{(+)}, \tilde{\mathbf{g}}_\tau^{t_{k+1}} + f_c\mathbf{p}^{t_k}\} &= 0 \\
\Phi\{\Delta\mathbf{u}_Z^{(-)}, -\tilde{\mathbf{g}}_\tau^{t_{k+1}} + f_c\mathbf{p}^{t_k}\} &= 0,
\end{aligned} \tag{90}$$

kde

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{\Delta t^2}{M_{\max}} \mathbf{A}. \tag{91}$$

Vektor neznámých seřadíme takto:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}\Delta\mathbf{u} \\ \mathbf{Y}\Delta\mathbf{u} \\ \Delta\mathbf{u}_Z^{(+)} \\ \Delta\mathbf{u}_Z^{(-)} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{t_{k+1}} \end{bmatrix} \tag{92}$$

Analytické vyjádření Jacobiovy matice soustavy (90) lze potom psát takto:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_X^X & \tilde{\mathbf{M}}_X^Y & \tilde{\mathbf{M}}_X^Z & -\tilde{\mathbf{M}}_X^Z & \mathbf{0} \\ -\alpha_1\tilde{\mathbf{M}}_Y^X & -\alpha_1\tilde{\mathbf{M}}_Y^Y - \beta_1\tilde{\mathbf{M}}_Y^X & -\alpha_1\tilde{\mathbf{M}}_Y^Z & \alpha_1\tilde{\mathbf{M}}_Y^Z & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{M}}_Z^X & \tilde{\mathbf{M}}_Z^Y & \tilde{\mathbf{M}}_Z^Z & -\tilde{\mathbf{M}}_Z^Z & -\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha_2 & \mathbf{0} & \beta_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha_3 & -\beta_3 \end{bmatrix} \tag{93}$$

kde $\alpha = \text{diag}(\alpha_i - 1)$ a $\beta = \text{diag}(\beta_i - 1)$. Hodnoty α_i a β_i získáme podle (26) resp. (27).

5.4 Úloha kontaktu, 3D, se suchým třením

Soustava rovnic popisující úlohu kontaktu ve 3D s uvažováním suchého tření a s uvažováním dynamických účinků má tvar (byly provedeny stejné úpravy jako v částech 5.1 a 5.3):

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}\tilde{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{X}\tilde{\mathbf{Q}}^{t_k} &= 0 \\
\Phi\{-\mathbf{Y}\tilde{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{Y}\tilde{\mathbf{Q}}^{t_k}, \mathbf{s} - \mathbf{Y}\mathbf{R}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{Y}\mathbf{R}\mathbf{u}^{t_k}\} &= 0 \\
\mathbf{Z}\tilde{\mathbf{M}}\Delta\hat{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{g}}_\tau^{t_{k+1}} + \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{Q}}^{t_k} &= 0 \\
\Phi\{\Delta\mathbf{u}_Z^{(+)}, \tilde{\mathbf{g}}_\tau^{t_{k+1}} + f_c\mathbf{P}^{t_k}\} &= 0 \\
\Phi\{\Delta\mathbf{u}_Z^{(-)}, -\tilde{\mathbf{g}}_\tau^{t_{k+1}} + f_c\mathbf{P}^{t_k}\} &= 0, \\
(\mathbf{t}_1^{t_{k+1}})^2 + (\mathbf{t}_2^{t_{k+1}})^2 - \mathbf{1} &= 0,
\end{aligned} \tag{94}$$

v tomto tvaru je také úloha implementována.

Vektor neznámých seřadíme takto:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}\Delta\mathbf{u} \\ \mathbf{Y}\Delta\mathbf{u} \\ \Delta\mathbf{u}_Z^{(+)} \\ \Delta\mathbf{u}_Z^{(-)} \\ \tilde{\mathbf{g}}_\tau^{t_{k+1}} \\ \mathbf{t}_1^{t_{k+1}} \\ \mathbf{t}_2^{t_{k+1}} \end{bmatrix} \tag{95}$$

Pro větší přehlednost uveďme Jacobiovu matici soustavy (94) v blokovém tvaru,

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2 \quad \mathbf{J}_3 \quad \mathbf{J}_4 \quad \mathbf{J}_5 \quad \mathbf{J}_6 \quad \mathbf{J}_7], \tag{96}$$

které odpovídají jednotlivým souřadnicím, tak jak jsou seřazeny v (95). Nejprve zaveďme matice \mathbf{F} a \mathbf{E} následujícím způsobem:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{97}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{98}$$

tedy násobením maticí \mathbf{F} resp. \mathbf{E} zprava vybereme pouze liché resp. sudé sloupce. Dále zavedme matice \mathbf{C} a s následujícím způsobem

$$\mathbf{C} = \text{diag}(\mathbf{t}_1^{t_{k+1}}) \quad (99)$$

$$\mathbf{S} = \text{diag}(\mathbf{t}_2^{t_{k+1}}) \quad (100)$$

Poté můžeme psát:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_X^X \\ -\alpha_1 \tilde{\mathbf{M}}_Y^X \\ \tilde{\mathbf{M}}_Z^X \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (101)$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_X^Y \\ -\alpha_1 \tilde{\mathbf{M}}_Y^Y - \beta_1 \\ \tilde{\mathbf{M}}_Z^Y \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (102)$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_X^Z \mathbf{F} \mathbf{C} + \tilde{\mathbf{M}}_X^Z \mathbf{E} \mathbf{S} \\ -\alpha_1 (\tilde{\mathbf{M}}_X^Y \mathbf{F} \mathbf{C} + \tilde{\mathbf{M}}_Y^Z \mathbf{E} \mathbf{S}) \\ \tilde{\mathbf{M}}_Z^Z \mathbf{F} \mathbf{C} + \tilde{\mathbf{M}}_Z^Z \mathbf{E} \mathbf{S} \\ \alpha_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (103)$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{M}}_X^Z \mathbf{F} \mathbf{C} - \tilde{\mathbf{M}}_X^Z \mathbf{E} \mathbf{S} \\ \alpha_1 (\tilde{\mathbf{M}}_X^Y \mathbf{F} \mathbf{C} + \tilde{\mathbf{M}}_Y^Z \mathbf{E} \mathbf{S}) \\ -\tilde{\mathbf{M}}_Z^Z \mathbf{F} \mathbf{C} - \tilde{\mathbf{M}}_Z^Z \mathbf{E} \mathbf{S} \\ \mathbf{0} \\ \alpha_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (104)$$

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{F} \mathbf{C} - \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{E} \mathbf{S} \\ \beta_2 \\ -\beta_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (105)$$

$$\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_X^Z \mathbf{F} \operatorname{diag}(\Delta \mathbf{u}_Z^{(+)} - \Delta \mathbf{u}_Z^{(-)}) \\ -\alpha_1 (\tilde{\mathbf{M}}_Y^Z \mathbf{F} \operatorname{diag}(\Delta \mathbf{u}_Z^{(+)} - \Delta \mathbf{u}_Z^{(-)})) \\ \tilde{\mathbf{M}}_Z^Z \mathbf{F} \operatorname{diag}(\Delta \mathbf{u}_Z^{(+)} - \Delta \mathbf{u}_Z^{(-)}) - \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{F} \operatorname{diag}(\mathbf{g}_\tau^{t_{k+1}}) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 2\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (106)$$

$$\mathbf{J}_7 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_X^Z \mathbf{E} \operatorname{diag}(\Delta \mathbf{u}_Z^{(+)} - \Delta \mathbf{u}_Z^{(-)}) \\ -\alpha_1 (\tilde{\mathbf{M}}_Y^Z \mathbf{E} \operatorname{diag}(\Delta \mathbf{u}_Z^{(+)} - \Delta \mathbf{u}_Z^{(-)})) \\ \tilde{\mathbf{M}}_Z^Z \mathbf{E} \operatorname{diag}(\Delta \mathbf{u}_Z^{(+)} - \Delta \mathbf{u}_Z^{(-)}) - \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{E} \operatorname{diag}(\mathbf{g}_\tau^{t_{k+1}}) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 2\mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad (107)$$

kde $\boldsymbol{\alpha} = \operatorname{diag}(\alpha_i - 1)$ a $\boldsymbol{\beta} = \operatorname{diag}(\beta_i - 1)$. Hodnoty α_i a β_i získáme podle (26) resp. (27).

Výše uvedenými postupy jsme obdrželi soustavu rovnic a Jacobiovu matici pro 4 varianty úlohy kontaktu (ve 2D a 3D; bez a s uvažováním tření na kontaktní hranici). Takto definované modely jsou ve vhodném tvaru k použití **Algoritmu 1** popsaného v části 3.1 k řešení několika modelových úloh. Výsledky simulací těchto úloh jsou ukázány v následující části.

6 Výsledky numerických simulací

Všechny úlohy v této části byly simulovány v programovacím jazyce Python 3.6.1 na notebooku Dell Inspiron s procesorem Intel Core i5-7200U CPU, 2.50GHz, 4 jádra procesoru, operační paměť 3,8 GiB. Označme hodnoty použité dále v textu následujícím způsobem:

k_{sim} - počet časových kroků simulace,

N_{Jac} - počet vyčíslení Jacobiovy matice,

N_{func} - počet vyčíslení funkční hodnoty,

t_{comp} - počet časových kroků simulace.

Soustavu řešených rovnic (82), (90) či (94) můžeme ve všech případech formálně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (108)$$

V následujících částech budou uvedeny následující úlohy:

- Úloha kontaktu ve 3D bez uvažování tření, viz část 5.2.
- Úloha kontaktu ve 2D se třením, viz část 5.3.
- Úloha kontaktu ve 3D se třením, viz část 5.4.

6.1 Úloha kontaktu, bez tření

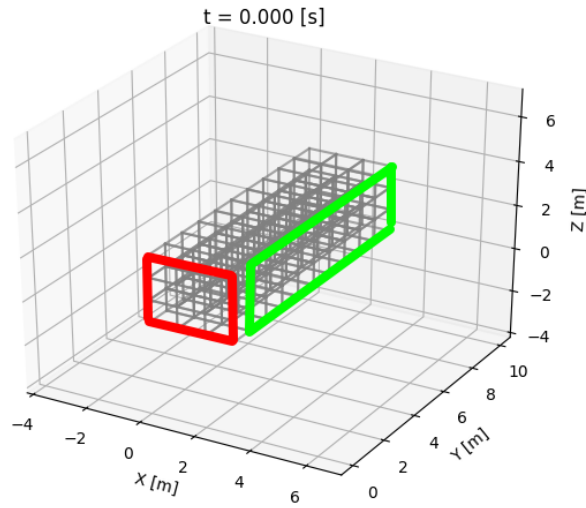
Vzhledem k matematické podobnosti případů ve 2D a 3D ukažme výsledky pouze pro případ ve 3D. Pro těleso ve tvaru kvádrů, na kterém byly uvažovány homogenní Dirichletovy okrajové podmínky v oblasti naznačené na obr. 4 (kontaktní hranice naznačena tamtéž) byly uvažovány materiálové parametry: modul pružnosti v tahu $E = 2 \times 10^8$ Pa, Poissonova konstanta $\mu = 0.3$, hustota $\rho = 7800$ kgm⁻³. Překážka je uvažována rovná ve vzdálenosti $s = 0$ m. Těleso bylo zatěžováno v celém svém objemu silou \mathbf{f} o složkách $\mathbf{f} = [100000, 5000, 5000]^T$ Nm⁻³. Těleso bylo diskretizováno pomocí 90 lineárních prvků typu hexaedr.

Na obr. 5 je vykresleno vektorové pole deformací v čase $t = 0.02$ s, na obr. 6 je vykresleno normálové napětí na kontaktní hranici v časech $t = 0.008$ s a $t = 0.02$ s.

V tab. 1 jsou potom shrnuty výsledky simulace z hlediska počtu iterací,

počtu vyčíslení Jacobiovy matice a času výpočtu. Zastavovací podmínka byla volena následovně:

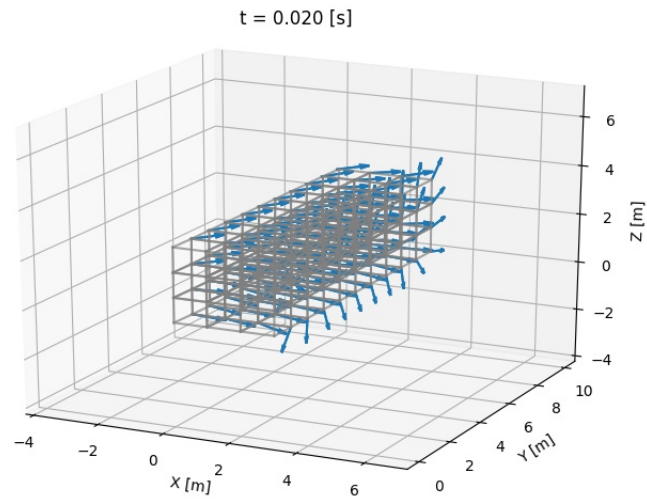
$$\| \mathbf{F}(\mathbf{x}) \|_{\infty} < 10^{-10}. \quad (109)$$



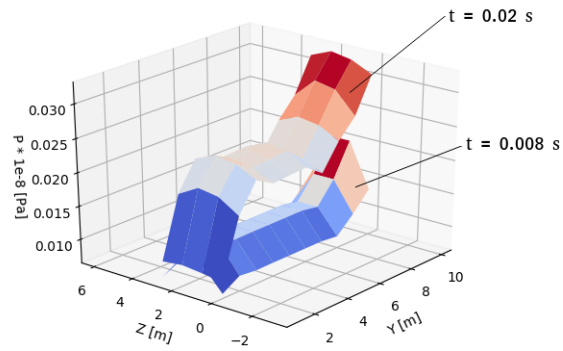
Obr. 4: Těleso simulované v případě úlohy kontaktu bez tření ve 3D. V obdélníku označeném červeně jsou zavedeny homogenní Dirichletovy okrajové podmínky, kontaktní hranice je označena zeleným obdélníkem.

Tab. 1: Porovnání výsledků numerické simulace pro úlohu bez tření pro různé délky časového kroku d_t .

Δt	k_{sim}	N_{Jac}	N_{func}	t_{comp} [s]	Pozn.
0.0001	200	1314	2689	48.0	-
0.0002	100	598	1198	22.3	-
0.01	-	-	-	-	Nestabilní



Obr. 5: Pole posuvů pro případ úlohy kontaktu bez tření ve 3D v čase $t = 0.02s$.



Obr. 6: Normálové napětí na kontaktní hranici pro případ úlohy kontaktu bez tření ve 3D v časech $t = 0.008 \text{ s}$ a $t = 0.02 \text{ s}$.

6.2 Úloha kontaktu, 2D, se suchým třením

Pro těleso ve tvaru obdélníku se zavedenými homogenní Dirichletovými okrajovými podmínkami, v oblasti označené na obr. 7 (kontaktní hranice naznačena tamtéž) byly uvažovány následující materiálové parametry: modul pružnosti v tahu $E = 2 \times 10^8$ Pa, Poissonova konstanta $\mu = 0.3$, hustota $\rho = 7800 \text{ kgm}^{-3}$. Těleso bylo zatíženo na hraně naznačené v obr. 7 silou \mathbf{f} o složkách $\mathbf{f} = [20000, 10000]^T \text{ Nm}^{-2}$. Těleso bylo diskretizováno pomocí 50 lineárních prvků typu čtyřúhelník.

Na obr. 8 až 10 jsou vykresleny pole posuvů v čase $t = 0.25$ s pro úlohu se zakřivenou překážkou ve tvaru paraboly s parametrickým vyjádřením $[5 + 0.008r^2, r]$, $r \in \mathbb{R}$, pro koeficient tření po řadě $f_c = 0$, $f_c = 0.5$ a $f_c = 5$, na obr. 11 jsou pak vykresleny třecí a kontaktní napětí na kontaktní hranici v témže čase. Mezi výsledky jsou malé rozdíly způsobené třením v kontaktním bodě.

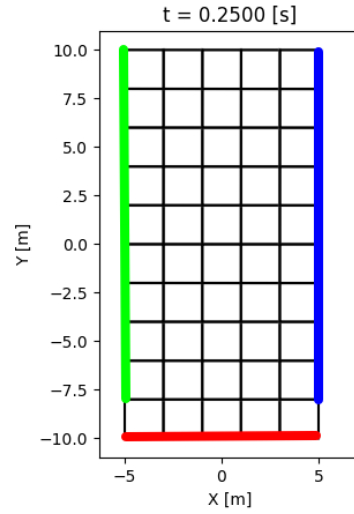
Na obr. 12 až 14 jsou vykresleny pole posuvů v čase $t = 0.25$ s pro úlohu s rovnou překážkou ve vzdálenosti $s = 0$ m, pro koeficient tření po řadě $f_c = 0$, $f_c = 0.5$ a $f_c = 5$, na obr. 15 jsou pak vykresleny třecí a kontaktní napětí na kontaktní hranici v témže čase. Za povšimnutí stojí zejména případ na obr. 14 (koeficient tření $f_c = 5$), kdy došlo v průběhu výpočtu k odlehnutí části uzlů od kontaktní hranice, průběh kontaktního a tečného napětí v čase pro tento případ je naznačen na obr. 16, na rozdíl od případů s menší hodnotou koeficientu tření.

V tab. 2 jsou potom shrnuty výsledky simulace z hlediska počtu iterací, počtu vyčíslení Jacobiovy matice a času výpočtu. Zastavovací podmínka byla volena následovně:

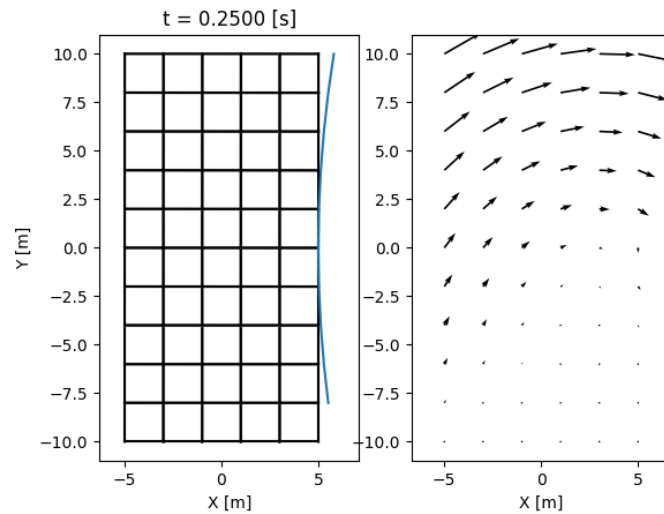
$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_{\infty} < 10^{-10}. \quad (110)$$

Tab. 2: Porovnání výsledků numerické simulace pro úlohu ve 2D pro hodnoty koeficientu tření f_c .

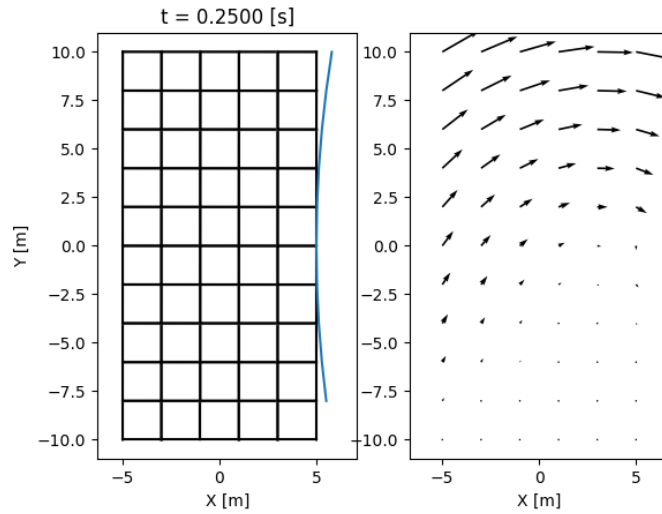
Δt	f_c	k_{sim}	N_{Jac}	N_{func}	t_{comp} [s]	Pozn.
0.0025	0	100	8919	25727	43.0	Zakřivená překážka
0.0025	0.5	100	34573	106539	146.2	Zakřivená překážka
0.0025	5	100	38680	115899	159.8	Zakřivená překážka
0.0025	0	100	5737	16574	29.6	Rovná překážka
0.0025	0.5	100	14659	53590	73.3	Rovná překážka
0.0025	5	100	41631	126486	188.3	Rovná překážka



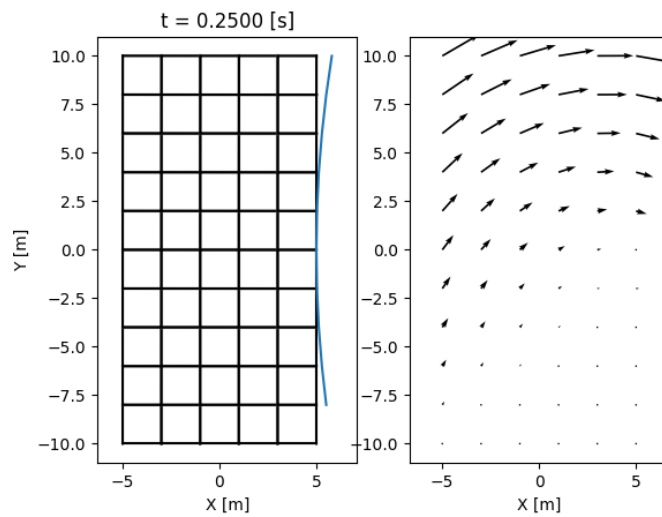
Obr. 7: Těleso simulované v případě 2D úlohy se třením. Modře je označena kontaktní hranice, červene je označena oblast, na které jsou definovány homogenní Dirichletovy okrajové podmínky, zelenou barvou je označena oblast, kde je aplikováno zatížení.



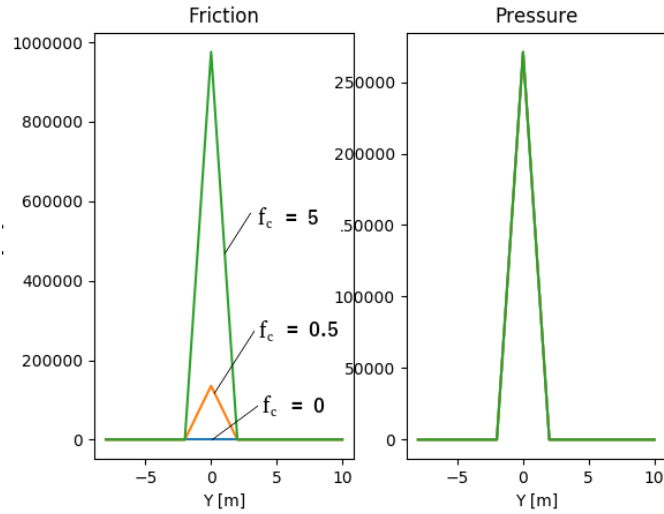
Obr. 8: Vlevo počáteční konfigurace, vpravo pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$ a koeficient tření $f_c = 0$ (bez tření), zakřivená překážka.



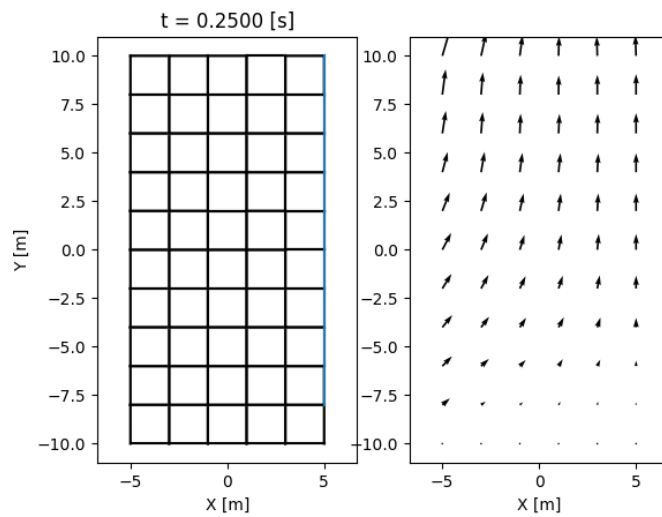
Obr. 9: Vlevo počáteční konfigurace, vpravo pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25$ s a koeficient tření $f_c = 0.5$, zakřivená překážka.



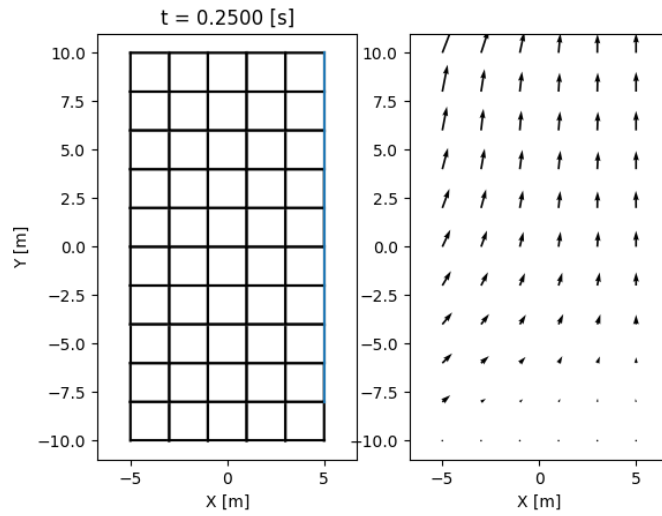
Obr. 10: Vlevo počáteční konfigurace, vpravo pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25$ s a koeficient tření $f_c = 5$, zakřivená překážka.



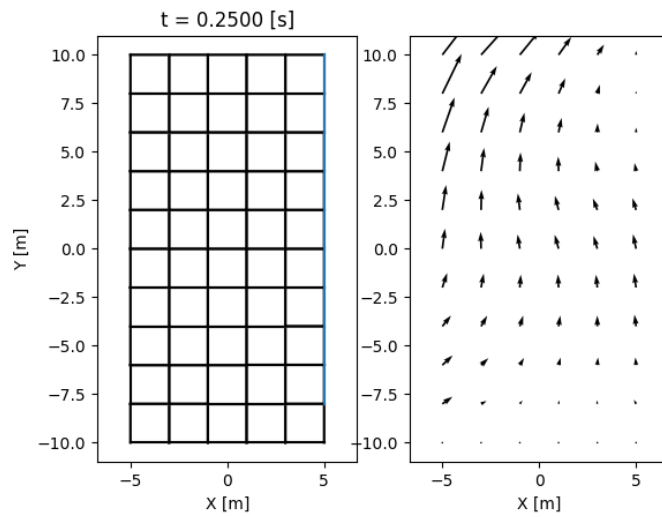
Obr. 11: Vlevo třecí napětí, vpravo kontaktní napětí pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$. Modře pro koeficient tření $f_c = 0$, oranžově pro koeficient tření $f_c = 0.5$, zeleně pro koeficient tření $f_c = 5$.



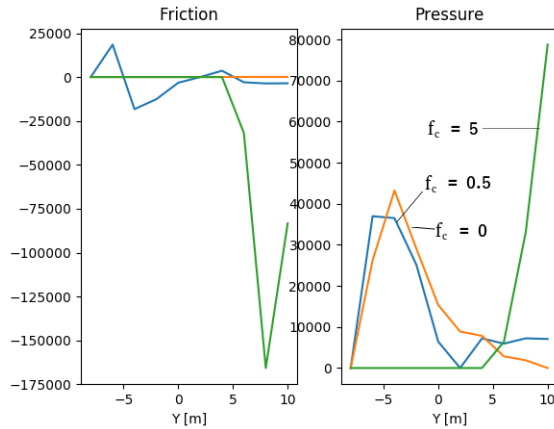
Obr. 12: Vlevo počáteční konfigurace, vpravo pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$ a koeficient tření $f_c = 0$ (bez tření).



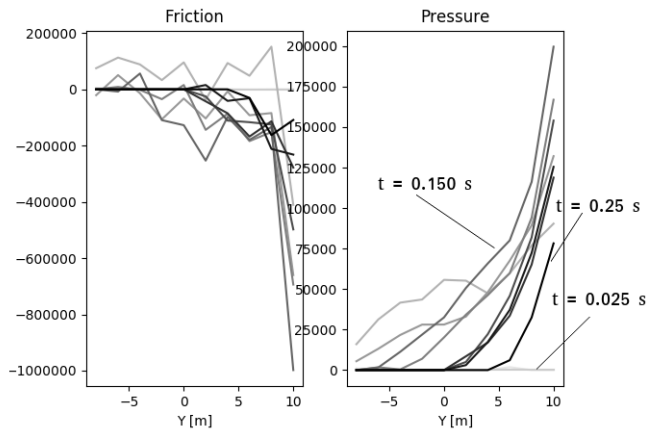
Obr. 13: Vlevo počáteční konfigurace, vpravo pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25$ s a koeficient tření $f_c = 0.5$.



Obr. 14: Vlevo počáteční konfigurace, vpravo pole posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25$ s a koeficient tření $f_c = 5$.



Obr. 15: Vlevo třecí napětí, vpravo kontaktní napětí pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D v čase $t = 0.25\text{s}$ pro případ rovné překážky. Oranžové pro koeficient tření $f_c = 0$, modře pro koeficient tření $f_c = 0.5$, zeleně pro koeficient tření $f_c = 5$.



Obr. 16: Vlevo třecí napětí, vpravo kontaktní napětí pro případ úlohy kontaktu se třením ve 2D, pro koeficient tření $f_c = 5$, pro případ rovné překážky v časech $t = 0.025, 0.050, 0.075, 0.1, 0.125, 0.150, 0.175, 0.2, 0.225, 0.25\text{s}$. Tmavší barva odpovídá pozdějšímu času.

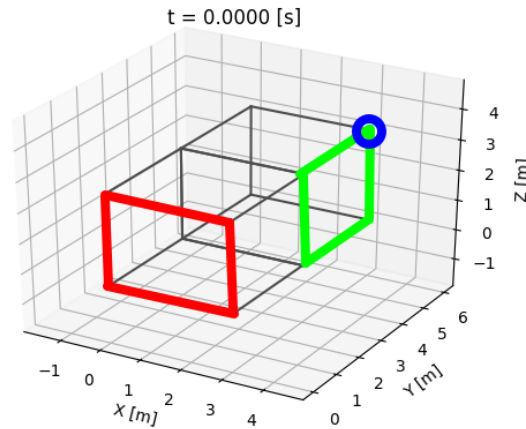
6.3 Úloha kontaktu, 3D, se suchým třením

Pro těleso ve tvaru kvádrů na obr. 17 byly uvažovány homogenní Dirichletovy okrajové podmínky v oblasti naznačené na obr. 4 (kontaktní hranice naznačena tamtéž) a materiálové parametry: modul pružnosti v tahu $E = 2 \times 10^8$ Pa, Poissonova konstanta $\mu = 0.3$, hustota $\rho = 7800$ kgm⁻³. Překážka je uvažována rovná ve vzdálenosti $s = 0$ m. Těleso bylo zatěžováno v celém svém objemu silou \mathbf{f} o složkách $\mathbf{f} = [1000, 100, 100]^T$ Nm⁻³. Těleso bylo diskretizováno pomocí 2 lineárních prvků typu hexaedr.

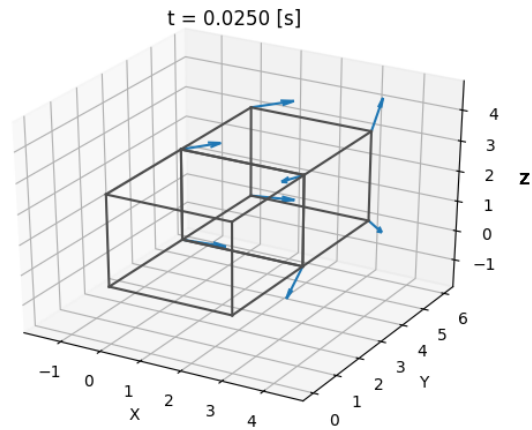
Na obr. 18, resp. 20 jsou uvedeny směry posuvů v čase $t = 0.025$ s pro koeficient tření $f_c = 0$, resp. $f_c = 0.5$. Na obr. 19 je vykreslena hodnota kontaktního napětí pro případ $f_c = 0$, na obr. 21 a 22 jsou vykresleny velikosti kontaktního a třecího napětí, to vše pro uzel označený v obr. 17.

V tab. 3 jsou potom shrnuty výsledky simulace z hlediska počtu iterací, počtu vyčíslení Jacobiovy matice a času výpočtu. Zastavovací podmínka byla volena méně přísná, než v předchozích případech a to následovně:

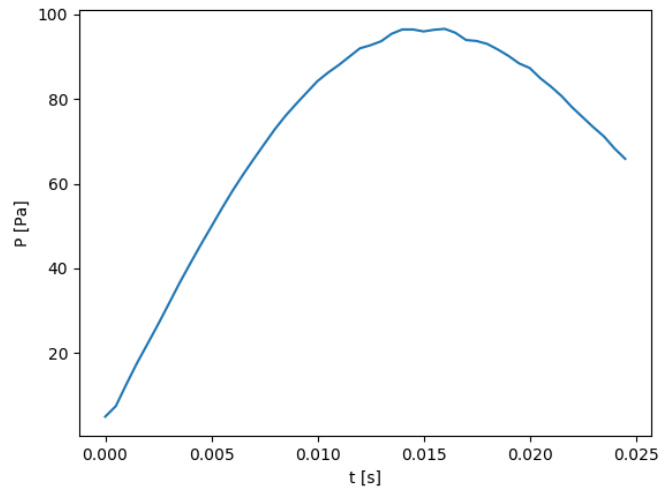
$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_{\infty} < 10^{-8}. \quad (111)$$



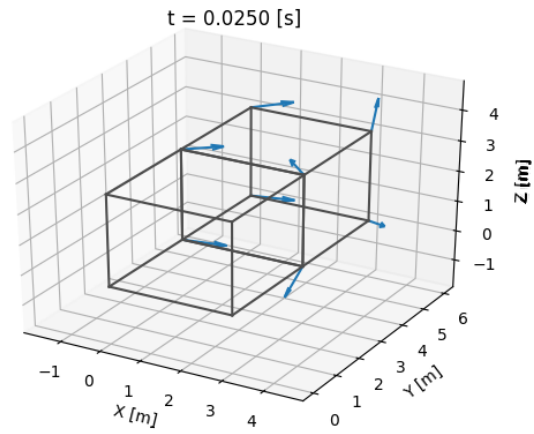
Obr. 17: Těleso simulované v případě úlohy se třením ve 3D. Červeně je vyznačená oblast, ve které jsou aplikovány homogenní Dirichletovy okrajové podmínky, zeleně je označena kontaktní hranice, pro uzel v modrém kruhu je vykreslen průběh kontaktního a třecího napětí.



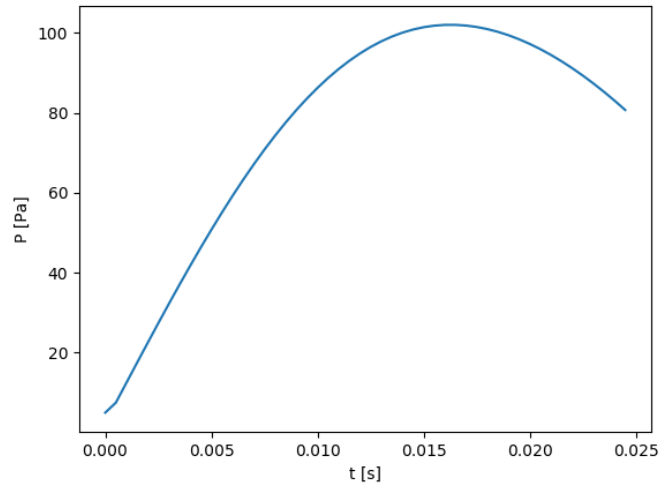
Obr. 18: Směry posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 3D v čase $t = 0.025\text{s}$ a koeficient tření $f_c = 0$ (bez tření).



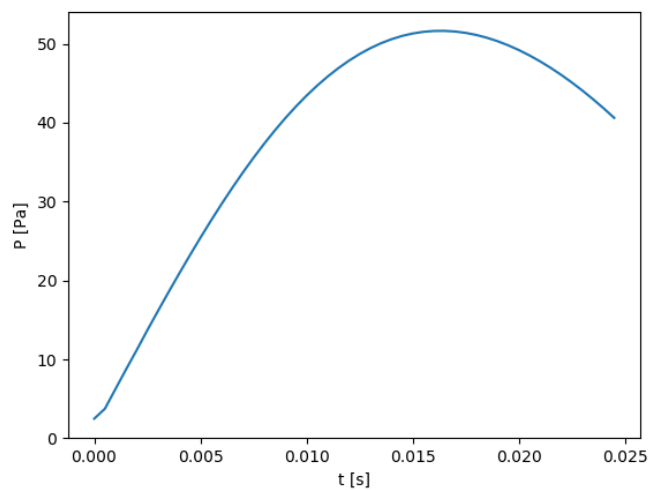
Obr. 19: Průběh velikosti kontaktního napětí pro případ na obr. 18, v uzlu označeném v obr. 17.



Obr. 20: Směry posuvů pro případ úlohy kontaktu se třením ve 3D v čase $t = 0.025$ s a koeficient tření $f_c = 0.5$.



Obr. 21: Průběh velikosti kontaktního napětí pro případ na obr. 20, v uzlu označeném v obr. 17.



Obr. 22: Průběh velikosti třecího napětí pro případ na obr. 20, v uzlu označeném v obr. 17.

Tab. 3: Porovnání výsledků numerické simulace pro úlohu ve 3D pro různé koeficienty tření f_c .

Δt	f_c	k_{sim}	N_{Jac}	N_{func}	t_{comp} [s]	Pozn.
0.0005	0	50	10495	126397	76.1	-
0.0005	0.5	50	33010	301389	172.9	-

6.4 Poznámky k numerickým simulacím

V úlohách s uvažováním tření ukázaly numerické simulace citlivost na volbu počátečního odhadu řešení. Občasným jevem bylo zpomalení či úplné zastavení konvergence v případě úlohy se třením, ve 2D případě pouze pro vyšší hodnoty koeficientu tření f_c . V takovém případě byl k odhadu řešení přičten vektor náhodných hodnot v určitém rozmezí, které bylo určeno na základě pokusu. Tento postup byl v případě potřeby uskutečněn opakovaně. Z tohoto důvodu je třeba hodnoty počtu vyčíslení funkčních hodnot a počtu vyčíslení Jacobiovy matice brát s rezervou, neboť je v nich zahrnut tento prvek náhody, nicméně i tak poskytují jistou představu o efektivitě algoritmu pro jednotlivé případy.

Pro zastavovací podmínku byla volena norma $\| \cdot \|_\infty$, která je odlišná od hodnoty minimalizované funkce zavedené v (20) pro **Algoritmus 1** popsany v části 3.1. Jak je uvedeno v [2], zastavovací podmínka může být volena odlišně od (20). Výsledky simulací ukázaly, že při volbě zastavovací podmínky podle (20) často nastala situace, kdy jeden prvek vektoru rezidua $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ byl o několik řádů vyšší než ostatní, často byl z numerického hlediska jeden z mála nenulových. Zastavovací podmínka podle (20) občas znamenala nepřesné výsledky či nutnost volit zastavovací kritérium zbytečně přísné (neboť situace popsaná výše nenastala vždy). Proto bylo přistoupeno k volbě normy $\| \cdot \|_\infty$.

V bakalářské práci [3] jsou uvedeny dva algoritmy pro řešení nelineárního komplementárního problému. Algoritmus Newtonovy metody s tlumením pro NCP funkci ϕ_{min} se v testovaných případech neukázal z hlediska numerických vlastností jako vhodný (vysoká citlivost na počáteční odhad řešení; nejednoznačná definice subdiferenciálu). Z tohoto důvodu byl v této práci použit jen **Algoritmus 1** z části 3.1.

7 Závěr

V této práci byla stručně představena problematika úlohy kontaktu elastického tělesa s tuhou překážkou za uvažování tření včetně několika používaných přístupů jak řešit problematiku kontaktu a problematiku tření.

Jeden ze způsobů, jak matematicky modelovat kontakt, je přistupovat k němu jako k tzv. nelineárnímu komplementárnímu problému, viz část 2. Byly stručně uvedeny některé teoretické poznatky k této problematice. Dále byl uveden algoritmus pro řešení jednoho z možných přístupů, konkrétně formulací komplementárních podmínek do nehladké rovnice pomocí Fischer-Burmeisterovy funkce. Také byla uvedena souvislost nelineárního komplementárního problému s problémem kontaktu.

Úlohy kontaktu elastického tělesa a tuhé překážky za uvažování tření a dynamických účinků byla formulována ve spojitě oblasti za použití komplementárních podmínek. Bylo také formulováno řešení této úlohy jakožto úloha minimalizace. Tato úloha byla poté diskretizována v prostoru za použití metody konečných prvků a následně také diskretizována v čase pomocí metody centrálních diferencí.

Výsledný model úlohy diskretizované v prostoru a čase byl po několika úpravách použit pro implementaci v programovacím jazyce Python. Dále byla analyticky určena Jacobiova matice soustavy rovnic popisujících tento model potřebná pro použití Algoritmu řešení popsaného v části 2. Byly také ukázány možnosti, jak modelovat některé zjednodušené problémy, tj. úlohu kontaktu bez tření a úlohu kontaktu ve 2D.

V části 6 byly uvedeny ukázky numerického řešení několika modelových úloh. Z výsledků numerických simulací vyplynulo několik poznatků. Simulace ukázaly citlivost na počáteční odhad řešení. Pro špatný počáteční odhad se v některých případech nepodařilo najít řešení splňující požadavky na přesnost. Za účelem vyřešení tohoto problému se v případě výrazného zpomalení či zastavení konvergence k řešení provedla perturbace odhadu řešení. V případě úlohy se třením ve 2D a úlohy bez tření ve 3D se podařilo nalézt řešení pro relativně přísnou zastavovací podmínku.

Lze konstatovat, že cíle této práce byly splněny, podařilo se simulovat úlohu kontaktu i v nejsložitějším případě pro úlohu se třením ve 3D a s uvažováním dynamických účinků. Podotkneme, že simulovaná úloha nebyla

ovšem v tomto nejsložitějším případě příliš rozsáhlá a časová a výpočetní náročnost odpovídala náročnosti 2D úlohy s mnohem podrobněji diskretizovanou oblastí. Do budoucnosti je možné tuto práci rozšířit či upravit tak, aby bylo možné simulovat i rozsáhlejší problémy. Za tímto účelem lze uvažovat například o použití některé z implicitních metod pro časovou diskretizaci (viz např. [1]). Dále je zde možnost rozšíření modelu o materiálové tlumení. Další možností je modelování kontaktu v tekutém prostředí. V neposlední řadě je zde také možnost modelování kontaktu dvou elastických těles.

Literatura

- [1] *K. J. Bathe: Finite Element Procedures, 2nd edition*, Prentice Hall, Pearson Education, Inc., Spojené státy americké, 2014.

- [2] *De Luca T., Facchinei F., Kanzow C.: A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems*, Mathematical programming 75, 1996.

- [3] *Holeček J.: Numerické řešení úlohy kontaktu elastických těles*, Bakalářská práce ZČU Plzeň, 2017.

- [4] *Kopačka J.: Efficient and Robust Numerical Solution of Contact Problems by the Finite Element Method*, Disertační práce ČVUT Praha, 2018

- [5] *Ligurský T.: Aproximace, numerická realizace a kvalitativní analýza kontaktních úloh se třením*, Disertační práce MFF UK Praha, 2011.

- [6] *Maurry A.: Shape optimization for contact and plasticity problems thanks to the level set Method*, Disertační práce Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2016

- [7] *Pieraccini S., Gasparo M. G., Pasquali A.: Global Newton-type methods and semismooth reformulations of NCP*, Applied Numerical Mathematics 44, 2003.

- [8] *Rohan E.: Contact shape optimalization of elasto-plastic bodies*, Proceedings of the University of West Bohemia '97, 1998.

- [9] *Rohan E.: Optimalizace tvaru elasto-plastických těles*, Disertační práce ZČU Plzeň, 1997.

- [10] *Rohan E., Whiteman R.J.:* **Shape optimization of elasto-plastic structures and continua**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 187, 2000.
- [11] *Zozulya V.V.:* **Variational formulation and nonsmooth optimization algorithms in elastodynamic contact problems for cracked body**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 200, 2011.
- [12] **Dokumentace ke SfePy**, dostupné online na http://sfepy.org/doc-devel/_downloads/sfepy_manual.pdf
- [13] **Dokumentace k NumPy**, dostupné online na <https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.11.0/numpy-ref-1.11.0.pdf>
- [14] **Dokumentace k Matplotlib**, dostupné online na <https://matplotlib.org/Matplotlib.pdf>