Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta filozofická

Disertační práce

Hilbertovy Grundlagen der Geometrie v kontextu doby

Jan Zeman

Plzeň 2019

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta filozofická

Katedra filozofie

Studijní program Humanitní studia
Studijní obor Teorie a dějiny vědy a techniky

Disertační práce

Hilbertovy Grundlagen der Geometrie v kontextu doby

Jan Zeman

Vedoucí práce:
Mgr. Marie Větrovcová, Ph. D.(od 2015)
Prof. RNDr. Petr Vopěnka, CSc. (2013–2015)
Katedra filozofie
Fakulta filozofická Západočeské univerzity v Plzni

Plzeň 2019

Prohlášení

Tuto disertační práci jsem zpracoval samostatně a vyznačil jsem použité prameny tak, jak je to ve vědecké práci obvyklé.

V Plzni, dne 26. března 2019
Jan Zeman

Poděkování

Za cennou pomoc s textem a podporu děkuji Katedře filozofie ZČU.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Cílem práce je uvést knihu Davida Hilberta (1862–1943) *Grundlagen der Geometrie* [Hilbert 1899] z roku 1899 do souvislosti s jeho předchozími pracemi na jedné straně a do souvislosti s prostředím a dobou, kdy vznikala, na strabě druhé. Hlavní motivací byl nedostatek filosofických prací o Hilbertově díle v českém jazyce.

V této disertaci provádíme textovou analýzu prvních dvou kapitol Hilbertovy knihy a podrobně rozebíráme konkrétní problémy, které zde autor řeší, např. problém abstrakce od názoru, vzájemné nezávislosti axiomů, problematiku použití modelů a další. Zvláštní pozornost věnujeme problému bezespornosti geometrie a jeho propojení s otázkou o její spojitosti. Doplňujeme kontext Hilbertových názorů, jím neuvedené souvislosti matematické a historické, které se budeme snažit dokázat na primárních textech (viz kap. 1.2). Uvedeme názory několika Hilbertových současníků na Hilbertovu motivaci pro sepsání díla, a porovnáme je se současnou standardní interpretací jeho textu. Naším dalším cílem bude tyto jednotlivé souvislosti prozkoumat. Dále představíme propojení Hilbertova působení s jeho přáteli a širším okruhem kolegů a studentů na univerzitě v Göttingen. Obecně se pak pokusíme najít i další vlivy, které Hilberta ovlivnily v jeho uvažování. Představíme dobový kontext poznání v oboru matematiky a napojení na jiné matematické disciplíny, kterým se Hilbert kromě geometrie taktéž věnoval.

Podstatnou součástí práce je vytvoření překladu *Grundlagen*, který bychom posléze chtěli vydat a doplnit řadu překladů jiných matematických a logických děl, které vznikaly na ZČU, např. děl Eukleida [Eukleidés 2007], Al-Chwárizmího [Al-Chwárizmí 2009], H. Poincarého [Poincaré 2010], G. Fregeho [Frege 2010] spolu s [Frege 2011] či N. H. Abela [Abel 2011].

Začali jsme překladem Hilbertových *Grundlagen* a článku o Hilbertových křivkách [Hilbert 1891], viz kap. 9.2. V průběhu výzkumu jsme vybrali další relevantní články a pořizovali překlady. Přeložili jsme Hilbertův životopis od Otta Blumenthala [Blumenthal 1935], viz kap. 9.1. Z pořízených překladů Minkowského prací z oborů teorie čísel a geometrie čísel uvádíme v disertaci překlad přednášky z kongresu v Chicagu [Minkowski 1893], viz kap. 9.3, která obsahuje nejdůležitější části jeho *Geometrie der Zahlen* [Minkowski 1896]. Část z našich překladů vznikala během zahraničních pobytů v Regensburgu, Würzburgu, Paříži a Göttingen.

1.1 Struktura práce

1. V úvodní kapitole shrneme použité prameny včetně Hilbertovy pozůstalosti a představíme současný Hilbertovský výzkum.

2. Ve druhé kapitole představíme život Davida Hilberta a standardní rozdělení období jeho vědecké činnosti.

3. Ve třetí kapitole budeme usilovat o zachycení Hilbertova sociálního prostředí. Nejprve představíme Hilbertovy nejbližší přátele, Hermanna Minkowského a Adolfa Hurwitze, s nimiž se seznámil během svého předchozího působení na univerzitě v Königsbergu. Stručně uvedeme postavení německých univerzit v 19. století a následně se zaměříme konkrétně na univerzitu v Göttingen, kde v Hilbertově době působili ti nejlepší matematikové, fyzikové a logikové. Stručně představíme Hilbertovy spolupracovníky na základě oborů, kterým se věnovali nejvíce.

4. Ve čtvrté kapitole představíme, jak vypadala geometrie jako obor výzkumu v Hilbertově době, tj. před tím, než vydal své *Grundlagen der Geometrie*. Představíme jednotlivé Hilbertovy předchůdce, kteří se pokoušeli o axiomatizaci geometrie.

5. V páté kapitole objasníme Hilbertův vliv na ostatní matematické disciplíny: teorii množin, axiomatizaci reálných čísel a logiku. Neuvedeme vliv na fyzikální obory a teorii čísel (Vliv na geometrii shrnujeme již v kap. 1.3).

6. V šesté kapitole budou okomentovány prvním dvě kapitoly *Grundlagen* s odkazy na Hilbertovy ostatní geometrické práce.[1] (Tento komentář bude určený i pro zájemce, kteří s Hilbertovým dílem seznámeni nejsou).

7. V sedmé kapitole shrneme přínos naší práce pro současný výzkum.

8. V osmé a deváté kapitole následně již uvedeme jednotlivé překlady, především překlad *Grundlagen* jako podstatnou část této práce.

1.2 Charakteristika použitých pramenů

V současnosti existuje patnáct německých vydání Hilbertových *Grundlagen der Geometrie*. Během Hilbertova života do roku 1943 jich bylo vydáno sedm, konkrétně v letech 1899, 1903, 1909, 1913, 1922, 1923 a 1930. Hilbert svůj text průběžně výrazně měnil na základě svých vlastních výzkumů i aktuálních děl matematických. V základním textu *Grundlagen* ve vydáních, následujících po Hilbertově smrti, docházelo již jen k okrajovým změnám, neměnila se paginace, pouze počet příloh. K nim přibývaly dodatky Hilbertova asistenta Paula Bernayse (1888–1977), který sám editoval vydání *Grundlagen* z let 1956, 1962, 1968 až do jedenáctého vydání v roce 1972. Následně dílo vycházelo v letech 1977, 1987 a v roce 1999 u příležitosti stého výročí prvního vydání. Z tohoto čtrnáctého vydání *Grundlagen der Geometrie*, editovaného M. Toepellem [Hilbert 1899], jsme vycházeli i v našem překladu. Kromě textu Hilbertova díla samotného obsahovalo i přetisk Hilbertova sešitu z jeho gymnaziálních let a dvě historické studie, studii M. Toepella na téma projektivní geometrie v Hilbertově díle [Toepell 1999] a studii kolektivu autorů Kiechleho, Kreuzera a Wefelscheida o tom, jakými cestami se ubíral výzkum základů geometrie po Hilbertovi [Kiechle – Kreuzer – Wefelscheid 1999].

[1] Přitom ze druhé kapitoly *Grundlagen* vynecháváme podrobnější komentář k nearchimédovským geometriím.

Zaměříme se nejdříve speciálně na současný stav výzkumu Hilbertova díla v souvislostech historických. Hilbertovy sebrané spisy vyšly ještě za Hilbertova života v roce 1935 [Hilbert 1935]. Obsahovaly i Hilbertův životopis od jednoho z jeho studentů, matematika Otta Blumenthala (1876–1944) [Blumenthal 1935]. Druhý životopis ze 70. let od historičky Constance Reidové [Reid 1970] byl již sekundární. Přátelství s Hermannem Minkowskim a oboustranný vliv osobní i profesní jsou zaznamenány v Minkowského dopisech Hilbertovi [Minkowski 1973].

Z primárních textů jsme dále pracovali s dalšími primárními zdroji z Hilbertových *Gesammelte Abhandlungen* [Hilbert 1935]. Neopomenuli jsme ani díla Hilbertových předchůdců ve výzkumu základů geometrie, která Hilbert citoval, či jeho současníků v příbuzných matematických disciplínách. Hilbertovo pojetí se pokusíme srovnat s postojem Henriho Poincarého (1854–1912) a Richarda Dedekinda (1831–1916), použijeme aktuální české vydání Poincarého textů [Poincaré 2010] a francouzské kritické vydání spisů Dedekindových [Dedekind 2008]. Více zdvořilostně než Minkowského dopisy jsou pak psány dopisy Davida Hilberta s Felixem Kleinem [Frei 1895]. Pracovali jsme též s články Hilbertových žáků, specializovali jsme se však přitom na oblast geometrie. Hilbertovo dílo analytické, fyzikální a neobyčejně významné dílo logické z let, které po vydání *Grundlagen* následovaly, jsme do našich zkoumání nezahrnuli.

1.2.1 Hilbertova pozůstalost

Po Hilbertově smrti bylo po druhé světové válce plánováno A. Sommerfeldem, E. Heckem a P. Bernaysem vydat přednášky z Hilbertovy pozůstalosti jako součást čtvrtého svazku Hilbertových sebraných spisů. Mezi nimi měly být i následující přednášky z geometrie. Jelikož se na příslušné přednášky v naší práci vícekrát odkazujeme, přejímáme jejich zkrácené značení v závorkách z [Toepell 1986]:[2]

1. (PG): 1891 LS – Projektive Geometrie,
2. (GG): 1894 LS – Die Grundlagen der Geometrie,[3]
3. (FK):[4] 1898 – Über den Begriff des Unendlichen,
4. (EG): 1898/1899 ZS – Grundlagen der Euklidischen Geometrie.[5]

K vydání však nedošlo a pozůstalost zůstala nepřístupna v držení Matematického semináře v Göttingen. Neměla ji k dispozici ani Constance Reidová, která napsala Hilbertův životopis v roce 1970.

Teprve na přelomu šedesátých a sedmdesátých let byla tato část pozůstalosti předána Dolnosaské státní a univerzitní knihovně v Göttingen, utříděna a zpřístupněna badatelům. Zásadní prací byla kniha *Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie“* od M. Toepella z roku 1986 [Toepell 1986], která pojednává o vzniku Hilbertova díla v kontextu s uvedenými přednáškami, z nichž bylo mnoho citováno, často i celé pasáže, a kniha tak byla i zčásti prvním vydáním těchto přednášek. Toepellova kniha zároveň odhalila, že Hilbertovo dílo vychází z jeho výzkumů geometrie projektivní, kterou však následně v díle jako takovém odstranil, pravděpodobně kvůli nekompatibilitě s jeho důležitějším záměrem vytvořit lineární kalkulus. Námitky kritiků Hilbertova díla (např. H. Freudenthala

[2] Viz ([Toepell 1986], s. 0).

[3] Ač to v názvu přednášky není výslovně uvedeno, pojednával zde Hilbert na rozdíl od pozdější přednášky ze ZS 1898/1899, o axiomatické výstavbě geometrie neeukleidovské.

[4] *Ferienkurs*, prázdninový kurz pro učitele, 1898 velikonoce.

[5] Tuto přednášku zmiňoval Blumenthal v Hilbertově životopise, zaměnil však slovo *Grundlagen* za *Elemente*. Do edice nemělo být zařazeno tzv. vypracování (*Ausarbeitung*) této přednášky pro studenty od H. v. Schapera z roku 1899, které značíme s Toepellem (SG).

[Freundenthal 1957]), jimž ještě pozůstalost přístupná nebyla, že jeho úvahy postrádají zohlednění projektivní geometrie, se tak ukázaly být neoprávněnými. Toepell postupuje v knize chronologicky podle jednotlivých přednášek až k hlavnímu textu. Je zpracován výklad většiny kapitol a propojení s dobovou matematickou literaturou, s dalšími přednáškami i s konečným textem *Grundlagen*. V tomto případě pak také autor zaznamenává, ve kterém vydání byla příslušná pasáž uvedena poprvé, a následně souvislosti a rozdíly mezi jednotlivými vydáními díla. Kniha obsahuje navíc grafické vyznačení, které axiomy byly v jednotlivých vydáních použity pro důkaz důležitých vět, Pascalovy a Desarguovy, neboť právě v tomto Hilbert průběh důkazu často měnil.

Kompletní vydání uvedených přednášek, včetně prvního vydání *Grundlagen der Geometrie*, pak bylo až ve svazku *Lectures on the Foundation of Geometry, 1891–1902*, editovaném M. Hallettem a U. Majerem z roku 2004 [Hilbert 2004]. Taktéž jsou zde zaznamenány souvislosti a rozdíly mezi jednotlivými vydáními díla, ač strukturovaně v úvodním komentáři.

Dobře známo je přátelství Davida Hilberta s Hermannem Minkowskim a vzájemný vliv obou osobností, ač v konkrétním případě základů geometrie na první pohled zjevný nebyl. Velmi přínosné bylo v tomto kontextu vydání Minkowského dopisů Hilbertovi v roce 1973, které editovali H. Zassenhaus a Minkowského dcera L. Rüdenberg [Minkowski 1973]. Hilbertova část korespondence se ztratila, ačkoliv Blumenthal ji měl ještě při psaní životopisu k dispozici. Dopisy jsou často citovány především kvůli prvotnímu uvedení Minkowského vylepšení Hermitovy meze pro minimum kvadratických forem z roku 1889, ale také v souvislosti s Minkowského radou, o čem má Hilbert přednášet na Mezinárodním kongresu matematiků v roce 1900. V kontextu geometrie jsou relevantní dále dopisy s Lindemannem, které se ale taktéž ztratily, a s Hurwitzem – tato korespondence je kompletně k dispozici v Göttingen.[6] Z Hilbertovy korespondence byla vydána už jen ta s Kleinem [Frei 1895]. Často je citováno ze dvou dopisů Fregeho a jedné Hilbertovy odpovědi z přelomu let 1899/1900, ve kterých mezi sebou vedli spor o povahu axiomů a o jejich bezespornost.[7]

1.2.2 Minkowského přednáška z dob jeho studia

Na základě odkazu v knize M. Toepella jsme se vydali do univerzitního archivu ve Würzburgu, kde byla uložena pozůstalost Ferdinanda Lindemanna. Původně jsme dle odkazu hledali konkrétní Hilbertovy dopisy, které by měly souviset s jeho výzkumy základů geometrie. Nalezli jsme však jen jediný, který byl z jiného data a týkal se jiného tématu. Po čase jsme se dozvěděli, že hledaná část dopisů byla v čase mezi vydáním Toepellovy knihy a dneškem z archivu zcizena. Nalezli jsme však taktéž citovaný Lindemannův sešit se záznamy o jím vedených seminářích, včetně kolokvia, které v Königsbergu založil. Každý týden probírali studenti aktuální matematickou literaturu a jeden z nich měl přednášku na určité téma. V sešitě byly záznamy těchto přednášek zapsány přímo vlastnoručně jednotlivými autory. Mezi nimi byl i text Hermanna Minkowského, datovaný 20. 5. 1884.

O Minkowského textu v archiválii jsme se nejprve domnívali, že by mohlo jít o první, dosud necitovaný, a tedy potenciálně neznámý, doklad, kdy Minkowski poprvé objevil postup pro geometrické znázornění vět z teorie čísel, neboť takové znázornění jeho dřívější texty postrádaly. Minkowskim uváděné příklady jsme tedy propočítávali, ukázalo se, že do značné míry korespondují s jeho habilitační přednáškou, kterou však uvedl až o tři roky později. V komentáři k ní jsme však nakonec dohledali, že onu geometrickou interpretaci kvadratických forem objevil již Carl

[6] Cod. Ms. D. Hilbert 160; Cod. Ms. Math. Arch. 76: 221–282. 284–321. 323–332. 332A David Hilbert.

[7] Viz [Dubucs 1992], ([Epple 1999], s. 404), ([Fiala 2006b], s. 126).

Friedrich Gauss dlouho před Minkowskim. Ve svém textu tak Minkowski tento již známý postup jen použil. Následně jsme se domnívali, že text by i tak mohl být přínosný pro historii geometrie čísel v tom, že by dokazoval, že geometrické úvahy vedly Minkowského uvažování již mnohem dříve před jeho všeobecně známou habilitací, která za jeho první geometrickou práci byla pokládána. Zpráva o tomto Minkowského rukopisu však byla nedávno před námi v relevantním časopise vydána, pouze ušla naší pozornosti.

Text archiválie jsme tak jen přeložili a napsali nad ním studii [Zeman 2018], jejímž smyslem tak namísto příspěvku k historii matematiky bylo především objasnění matematických postupů, které Minkowski použil.

1.2.3 Sekundární literatura

Pro komentáře jsme používali především následující literaturu sekundární:

Nejvíce jsme používali výše zmíněnou disertaci M. Toepella [Toepell 1986] o původu tohoto Hilbertova díla. Především v ní byly uvedeny komentované citace Hilbertových přednášek o geometrii. Ty autor hojně propojoval jak mezi sebou navzájem, tak s dobovou matematickou literaturou, kterou Hilbert četl. Šlo o stěžejní pasáže těchto Hilbertových přednášek, nicméně jejich kompletní vydání potom vyšlo až v edici Michaela Halletta a Ulricha Majera, která na rozdíl od knihy Toepellovy zastávalo referenční funkci [Hilbert 2004]. V průběhu naší práce vyšla v roce 2015 kniha s názvem *David Hilbert – Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899)* [Volkert 2015] s přetiskem prvního vydání a komentáři editora Klause Volkerta. Autor si nenárokoval označení své knihy za další, v pořadí již patnácté vydání. Často cituje z Hallettovy edice, v porovnání s Toepellovou prací ale žádný radikálně nový pohled na dílo nepřináší.

Některé interpretace z oboru filosofie matematiky pak byly následně převzaty z knihy *Philosophie der Mathematik* od Romana Murawského a Thomase Bedürftiga [Bedürftig – Murawski 2015] a z knihy *Uvedení do obecné topologie a jejích dějin do roku 1960* Petra Vopěnky a Marie Větrovcové [Vopěnka – Větrovcová 2015]. Současné interpretace jsme citovaly z knihy *Geschichte der Analysis* editora Hanse N. Jahnkeho [Jahnke 1999] a knihy *From Kant to Hilbert* editora Williama Ewalda [Ewald 2006].

1.3 Současný stav bádání

Podle standardní interpretace chtěl Hilbert opravit chyby v Eukleidově systému a ve svých axiomech jej zjednodušit s cílem vyjasnit axiomaticko-deduktivní metodu *Základů* a přeformulovat nedokazované základní věty geometrie (tj. axiomy a postuláty) co nejpřehledněji.[8] Valná většina Hilbertových publikací má za svůj základ axiomatickou metodu a v dnešní době je Hilbert znám především pro svoji teorii důkazu a běžně používaný Hilbertovský kalkul jako typický zástupce proudu formalismu. Stejně tak jsou i *Grundlagen* nahlíženy mnohými z hlediska logiky, filosofie a filosofie matematiky jakožto první formalistické dílo. Geometrie zde šla opravdu v předstihu před ostatními vědami. Není však zcela oprávněné zařazovat Hilberta jako formalistu výhradně, neboť v posledním kroku mu šlo o to, aby měla jeho geometrie obsah. Také se ve svých dopisech a rukopisech přednášek velmi intenzivně zabýval i geometrií názornou. Tu pak následně samostatně vydal jako *Anschauliche Geometrie* [Hilbert – Cohn-Vossen 1996].

Badatelé se též věnovali tomu, kam se Hilbertova geometrie vyvíjela dál. Brzy se ustanovily základy geometrie jako samostatná matematická disciplína. Roli hrály Hilbertem vedené disertační práce, např. M. Dehna o tzv. Legendrových větách

[8] Tato interpretace např. v ([Epple 1999], s. 401).

(viz kap. 6.5) či G. Hamela o úsečce jako nejkratší spojnici. Mnoho dalších disertačních prací na poli výzkumů základů geometrie vycházelo z Göttingenské školy v širším slova smyslu včetně přenosu axiomatické metody do dalších oborů, kde se vytvořila samostatná pole pro výzkum, např. v logice. *Grundlagen der Geometrie* započaly axiomatické uchopení celé matematiky a výzkum vzájemných vztahů mezi geometrickými modely a ostatními oblastmi matematiky (algebra, kombinatorika, topologie), který je i v současnosti stále aktuální.

Současný Hilbertovský výzkum se odehrává především v německém a americkém prostředí. V Česku je Hilbertovo geometrické dílo blíže uvedeno vyjma didaktických prací (např. Z. Halase [Halas 2018] či M. Lávičky [Lávička 2002]) pouze v pracích J. Fialy [Fiala 2011], Z. Nádeníka [Nádeník 1972], či D. Trkovské [Trkovská 2015]. Větší pozornost je věnována Hilbertovu programu v logice, viz např. L. Dostálová [Dostálová 2010], P. Kůrka [Kůrka 2016], V. Švejdar [Švejdar 2002], K. Trlifajová [Trlifajová 2011], P. Vopěnka [Vopěnka 2004]. V tomto ohledu je ve filosofii matematiky hodně probíraný spor mezi formalisty a intuicionisty.

1.4 Metodologický rámec

Historiografie matematiky se zabývá výzkumem historie matematiky jako vědní disciplíny, její rekonstrukcí, popisem a co nejkritičtější a nejkomparativnější interpretací v relevantních dobách. Zahrnuje co nejpřesnější popis vývoje historie matematiky až do dnešního stavu a odpovídá na otázku, proč tento vývoj probíhal na různých místech odlišně. Zohledňuje přitom používané metody a postupy, používané historiky v různých dobách, na různých místech a za různých podmínek ekonomických, politických, filosofických, náboženských, ale i např. zdravotních či psychologických.

Obecně byla historiografie matematiky bez větší reflexe nahlížena jako součást matematiky samotné. S tou se samozřejmě vždy prolínala, ovšem stejně tak i s filosofií, historií či filologií. Tyto vzájemné vlivy byly patrné především v začátcích oboru. Např. v době renesance se humanismus nezaměřoval jen na literární texty, ale také na vědu a matematiku. Byly tištěny katalogy autorů matematických prací, rozřazených do kategorií podle matematických disciplín. V 17. a 18. století vládl ideál všeobjímající vzdělanosti, psaly se historické úvody k matematickým dílům a i v obecné literatuře byla věda stále populárnější. V 18. a 19. století byla historie matematiky použita jako argument pro ospravedlnění pojmu pokroku. Její funkce byly rozdílné i dle národnosti, např. Italové v době resorgimenta potřebovali národní vědu, a znovu tak objevovali a rekonstruovali i dědictví italské matematiky. Na historii matematiky měly též vliv příslušné „národní filosofie“, ve Francii osvícenství, v Německu filologická tradice. V 19. století pak začal národní akcent převažovat a platilo více než kdy jindy, že se v případě životopisů historikové zabývali především matematiky z jejich vlastní země. Ve 20. století pak nastal posun od národního pohledu ke specializaci oborové, začínaly se objevovat univerzity, instituce, akademie či vydavatelství, zaměřené výhradně na matematiku. V nových matematických časopisech se zprvu pěstovala i historie matematiky, v knižních edicích pak vycházely dokonce i řady, zaměřené výlučně na ni.

Po druhé světové válce výrazně vzrostla sofistikovanost historie včetně historie vědy, a spolu s ní i historie matematiky. Historikové vědy vedly debaty ohledně převažujících internalistických nebo externalistických vlivů na vývoj vědy při různých podmínkách politických, ekonomických, vědeckých či vojenských, válečných i mírových. Konkrétně v historii matematiky byly zainteresovaní matematici nebo učitelé matematiky povětšinou zastánci převahy vlivů internalistických, a profesionální historici spíše vlivů externalistických. Výhradně internalisticky zaměřených životopisů či studií o vývoji konkrétních disciplín matematiky se ale psalo čím dál méně a začal převládat institucionální rámec. Obě složky nejsou zcela oddělitelné a historiografie matematiky nejvíce čerpá z jejich prolnutí. Při volbě v daný okamžik úspěšnější a vhodnější historiografické strategie, kterou by měl historik zastat, je pak třeba vzít v potaz i otázky z oblastí filosofie vědy a teorie poznání.

Současní autoři mají tendenci ve svých pracích spíše zobecňovat a pojímat je až jako reflexe modernistických tendencí. Výrazně roste zájem o historii aplikované matematiky a její provázanost jednak s utilitárními požadavky společnosti, jednak s čistou matematikou. Též se píše o matematické komunitě v průmyslu, roli týmové práce, dějinách laboratoří a experimentů. S rozvojem digitalizace se pak ustanovily elektronické časopisy, např. *Historia mathematica*, a velké databáze i z oblasti historie matematiky v čele s databází MacTutor History of Mathematics Archive, editorů J. J. O'Connora a E. F. Robertsona z Univerzity St. Andrews ve Skotsku. Z historie matematiky se vyčlenila historie informatiky s vlastními časopisy. Historie matematiky se stala veřejným zájmem. I přes snahu o objektivitu je patrná velká pluralita interpretací i názorů na zcela základní otázky o významu historické práce a dnešní historikové, kteří již musejí počítat s větší vážností svého oboru, musejí také zastat určitý postoj k jeho minulosti i budoucnosti.

Jak jsme tedy uvedli, funkce historiografie matematiky byly v různých dobách velmi rozdílné. Nejzákladnější společnou funkcí však bylo vždy poskytnout matematikovi nástroj k srovnání jeho výsledků s ostatními jednak z hlediska chronologického, jednak co do jasnosti, koherence a elegance řešení, a sloužila mu k vystopování vývoje určité myšlenky nebo tvrzení. Další uplatnění našla v sociologických výzkumech, v otázkách matematické komunity na daném místě, či v tématech např. africká matematika či ženská matematika. Rozvíjela se též etnomatematika, zájem o ornament v architektuře a keramice. Velmi relevantní se historie matematiky stala pro učitele matematiky.

Kapitola 2

Život Davida Hilberta

O životě Davida Hilberta (1862–1943) bylo napsáno již mnoho, proto jej zde nebudeme uvádět dopodrobna. Narodil do rodiny krajského soudce v okolí východopruského města Königsberg. Jeho matka se zajímala o filosofii a David po ní pravděpodobně zdědil i nadání pro matematiku. Měl sestru Elise. Nejprve Hilbert navštěvoval v Königsbergu klasické gymnázium, poté přestoupil na gymnázium reálné, kde se mohl více vzdělávat v technických oborech. V předmětech humanitních patří Hilbert k průměrným studentům. Zde roku 1880 nastoupil i na univerzitu, kterou před tím proslavila jména jako Kant, Euler či Jacobi. Na ní potkal svého nejlepšího přítele Hermanna Minkowského (1864–1909). Ještě s jejich učitelem Adolfem Hurwitzem (1859–1919) podnikali všichni tři každý den procházky, provázené živými diskusemi.

Druhý semestr strávil Hilbert v Heidelbergu. Disertační práci z oboru teorie invariantů napsal v Köngisbergu u Ferdinanda Lindemanna (1852–1939) v roce 1885 a následně vyučoval na univerzitě jako soukromý docent. Byl také na univerzitě v Lipsku u známého matematika Felixe Kleina (1849–1925). Na jeho doporučení vyjel Hilbert v roce 1886 na studijní cestu do Paříže. Po návratu do Königsbergu se zde stal profesorem.

V roce 1895 zajistil Felix Klein pro Davida Hilberta místo profesora na univerzitě v Göttingen. Město Göttingen již bylo ve světě známé jako centrum matematiky, Hilbert však hodlal dále pokračovat v Kleinově myšlence vybudovat pro Göttingen věhlas centra celé vědy. Kromě pravidelných přednášek fungoval na univerzitě jednou za týden matematický klub, neformální setkání místních matematiků, často s hostovanou přednáškou, po němž bylo zvykem jít na dlouhou společnou procházku. Hilbert dá na zahradě vybudovat velkou tabuli, táhnoucí se od sousedova domu, a také zastřešenou cestu k procházení, aby mohl pracovat i za deště. Paul Bernays (1888–1977) se zmiňuje o Hilbertově vztahu k hudbě, který zapříčinil jeho gramofon.[1]

Co se týče rodinného života, Hilbert se oženil v roce 1892 s Käthe Jeroschovou a o rok později se jim narodil syn Franz, který však začal trpět duševní poruchou a otec s ním nevycházel dobře. Když v roce 1897 Hilbertovi zemřela při porodu sestra Elise, psal Minkowski, který jeho sestru znal ze společných výletů, Hilbertovi v dopise z 30. 5. 1897: "Jak blízká musela být Tvému srdci s ohledem na to, že nemáš jiného sourozence."[2] Dle rodiny byl však Hilbert ke své sestře spíše chladný.[3]

Hilbertovým stěžejním dílem pak byla následně kniha *Grundlagen der Geometrie* ([Hilbert 1899a]; srov. [Libický 1903]), za kterou mu byl německou vládou udělen

[1] Viz ([Reid 1970], s. 175).

[2] "Wie mag sie Dir an's Herz gewachsen sein, der Du keine anderen Geschwister hast." (Minkowski Hilbertovi, 30. 5. 1897; [Minkowski 1973], s. 102).

[3] Viz ([Reid 1970], s. 54).

čestný titul tajného rady.[4] Hilbert se poté stal velmi známým a musel odmítat nabídky na profesorská místa ve větších městech. Když mu v roce 1930 bylo uděleno čestné občanství města Königsbergu, ve svém projevu k této příležitosti se mimo jiné vyhranil[5] proti obecně známému citátu Emila DuBois-Reymonda (1818–1896) "Ignoramus et Ignorabimus" (v překladu "ignorujeme a máme ignorovat") slovy "Wir müssen wissen, wir werden wissen" (v překladu "musíme vědět, budeme vědět"), která jsou dnes epitafem na jeho hrobě. David Hilbert zemřel v roce 1943 následkem nepohyblivosti způsobené úrazem.

Hilbertovu vědeckou činnost lze rozdělit do období, ve kterých pokaždé zcela dominují odborné práce a přednášková činnost z určité konkrétní či blíže související oblasti matematiky. Hermann Weyl rozlišuje období těchto podoborů:[6]

1. teorie invariantů (1885–1893),
2. teorie algebraických číselných těles (1893–1898),
3. základy geometrie (1898–1902),
4. integrální rovnice (1902–1912),
5. fyzika (1910–1922),
6. základy matematiky obecně (1922–1930).[7]

První období teorie invariantů ještě zcela spadá do Hilbertova působení na univerzitě v Königsbergu, všechna ostatní jsou již z doby jeho činnosti v Göttingen.

[4] Ten obdržel např. i Felix Klein a představoval ekvivalent anglického šlechtického titulu.

[5] Podobně to už jednou udělal na kongresu v Paříži v roce 1900 [Hilbert 1900].

[6] Viz ([Weyl 1944], s. 245f).

[7] Pro zajímavost uveďme některé termíny, které se v matematice staly standardem a nesou Hilbertovo jméno, a přiřaďme je k jednotlivým obdobím: 1. Hilbertovy křívky; 2. Hilbertova geometrie; 3. Hilbertovy problémy; 4. Hilbertův prostor, Hilbertova krychle; 6. Hilbertův program, Hilberovský kalkul, Hilbertův hotel.

Kapitola 3

Hilbertovo sociální prostředí

Hilbertovými nejbližšími přáteli byli Hermann Minkowski a Adolf Hurwitz. Oba zde stručně představíme skrze jejich vzájemnou korespondenci. Od seznámení se mohli mezi lety 1883–1887 setkávat v Königsbergu všichni tři. Poté byli v témže městě najednou jen ve dvou: 1887–1892 Hilbert a Hurwitz v Königsbergu, 1894–1895, Hilbert a Minkowski v Königsbergu, 1896–1902 Minkowski a Hurwitz v Zürichu, 1902–1909 Hilbert a Minkowski v Göttingen.[1]

3.1 Hermann Minkowski

Hermann Minkowski (1864–1909) byl nejlepším přítelem Davida Hilberta. Pocházel z židovské rodiny obchodníka, která do Königsbergu přišla z ruské části Polska, kde byla vystavena antisemitickým persekucím.[2] Hermann Minkowski následně chodil na totéž gymnázium jako budoucí slavní fyzici Arnold Sommerfeld (1868–1951) či Norbert Wien (1894–1964). Poté strávil tři semestry v Berlíně, kde studoval u Leopolda Kroneckera (1821–1891), Karla Weierstrasse (1815–1897), Hermanna von Helmholtze (1821–1894) a Gustava Roberta Kirchhoffa (1824–1887). Po návratu do Königsbergu se zúčastnil v roce 1882 soutěže Pařížské akademie věd z oboru teorie kvadratických forem. Úlohu, jak určit, kdy je celé číslo rozložitelné na součet pěti druhých mocnin, řešil Minkowski za použití Gaussových sum a Dirichletových řad a problém navíc zobecnil, za což sklidil uznání Camilla Jordana (1838–1922) a byla mu udělena hlavní cena.[3] Teprve poté se na univerzitě seznámil s Hilbertem, který byl o dva roky starší. Ten byl roku 1885 oponentem Minkowského doktorské práce. Minkowski musel následně nastoupit službu v pruské armádě, kde působil až do roku 1887. Poté usiloval o habilitaci, ale protože v Königsbergu mu to Lindemann pro nedostatek studentů neumožnil, habilitoval se Minkowski v Bonnu. Zde spolupracoval s fyzikem Heinrichem Hertzem (1857–1894), který byl již v té době známý svým experimentálním důkazem, že se elektromagnetický rozruch z jednoho místa na druhé šíří konečnou rychlostí v podobě elektromagnetických vln.[4] Minkowski zde pracoval též několik dní v týdnu v institutu pro výrobu fyzikálních přístrojů a od roku 1892 v Bonnu působil jako mimořádný profesor. Do Königsbergu stále jezdil na prázdniny.

[1] Výjimku tvoří léta 1892–1894, kdy byl Hilbert v Königsbergu, Minkowski v Bonnu a Hurwitz v Zürichu.

[2] Měl sestru a dva bratry; bratr Oskar se uplatnil jako vědec v medicíně a je znám pro objev souvislosti cukrovky se slinivkou břišní ([Minkowski 1973], s. 12).

[3] Srov. ([Hilbert 1909], s. 341).

[4] Minkowski se zmínil Hilbertovi, že kdyby Hertz v roce 1894 nezemřel, stal by se Minkowski fyzikem ([Reid 1970], s. 40).

Do tohoto období spadají také Minkowského práce z oboru teorie čísel, ve kterých se věnoval diofantovským rovnicím, teorii invariantů, transformacím kvadratických forem a problémům jejich redukce. Tím směřoval ke geometrii čísel, tedy k odvozování některých vlastností čísel na základě geometrického názoru. V roce 1895, kdy Hilbert odešel do Göttingen, nastoupil Minkowski do Königsbergu na jeho místo jako řádný profesor. Dokončoval v Königsbergu svou knihu *Geometrie der Zahlen* [Minkowski 1896], která vyšla roku 1896 a za kterou Minkowski získal i uznání francouzského matematika Charlese Hermita (1822–1901). Vyšla dříve, než Minkowski zamýšlel. Původně chtěl ještě v části o řetězových zlomcích najít kritérium pro kubická iracionální čísla, což se mu podařilo až v roce 1899 v článku „Ein Kriterium für die algebraische Zahlen“ [Minkowski 1899], zato však v obecném znění pro rovnici $n$tého řádu. Paralelně s touto knihou psal spolu s Hilbertem zprávu o vývoji teorie čísel, ale svoji část nedokončil. Kromě témat z teorie čísel, kterým se Minkowski věnoval i v *Geometrie der Zahlen*,[5] publikoval i další práce z oboru čisté geometrie.[6]

V roce 1895 má také popularizační přednášku o aktuálním nekonečnu v přírodě.[7] V dopise Hurwitzovi psal o svých přednáškách z algebry, ale také z fyziky, konkrétně z kinematiky.[8] Na podzim 1896 odešel stejně jako Hurwitz i Minkowski z Königsbergu do Zürichu.[9] Na zdejší univerzitě však nebyl spokojen. V dopise Hilbertovi si stěžoval na lenost zdejších studentů matematiky:

> “Co do popularizace budu muset zajít až na nejzazší možnou hranici.”[10]

Zároveň byl však jedním z Minkowského nadaných studentů Albert Einstein (1879–1955), který měl ale častou absenci na přednáškách.

Zde se také v roce 1897 se oženil s Auguste Adlerovou s níž měl dvě dcery. V roce 1902 zařídil Hilbert, aby se v Göttingen otevřelo nové profesorské místo pro Minkowského. Na rozdíl od Hilberta byl Minkowski zadobře i s menšími dětmi. Hilbertova syna Franze se na Hilbertových tanečních večírcích snažil rozmluvit. Franz však přišel o Minkowského ve svých 16 letech.

Minkowski po svém přestěhování sdílel s Hilbertem optimismus a nadšení jak pro matematiku, tak pro studenty, se kterými se setkával i mimo školu. Oba jim byli blíže než Felix Klein, který si od studentů udržoval odstup. Společně s Hilbertovým osobním asistentem Maxem Bornem konzultovali u Hilberta doma. Minkowski s Hilbertem dále např. navštěvovali i společné pilotní přednášky Otta Blumenthala a Ernsta Zermela (1871–1953) o základech aritmetiky, aby vznikající projekt podpořili. V zimním semestru 1903/1904 přednášel Minkowski Úvod do teorie čísel. Tyto

[5] “[...] teorii jednotek v algebraických číselných tělesech, věty o řádu konečné grupy homogenních lineárních celočíselných substitucí a věty o počtu transformací pozitivní kvadratické formy na sebe, důkaz konečnosti počtu tříd pozitivních kvadratických forem při daném determinantu, přiblížení k libovolně mnoha reálným veličinám přes racionální čísla téhož jmenovatele, teorie lineárních forem s celými komplexními koeficienty, věty o minimech potenčních součtů lineárních forem, teorie řetězových zlomků [...]” ([Hilbert 1909], s. 348).

[6] Tamtéž, s. 350ff.

[7] Viz níže, kap. 5.2.1.

[8] Viz (Minkowski Hurwitzovi, 11. 5. 1896; [Minkowski 1973], s. 230).

[9] Constance Reidová ([Reid 1970], s. 52) píše o Minkowského povolání do Zürichu, že Minkowski neměl vlastnosti vhodné pro složitá politická vyjednávání, např. ohledně výše platu nebo nástupcích při výměnách profesorských míst, a že, možná z jiných důvodů, sice nabídku z Zürichu přijal, ale spíše nerad (*regretfully*). To je sporné vzhledem k Minkowského dopisům z 28. 8. 1896 a z 5. 9. 1896. Ještě před definitivním rozhodnutím Minkowského musel ministerský rada Friedrich Althoff (1839–1908) potvrdit, že Minkowski může odejít do Zürichu, s čímž ale dle Minkowského slov nebude mít problém. Hlavně ale píše Hilbertovi o výši nabízeného platu ve Švýcarsku a že nabídku přijme, pokud se ho Althoff nebude snažit držet v Königsbergu, tedy mu podstatně zvýšit plat: “Wenn nun Althoff keinen Werth darauf legt, mich in Königsberg zu halten, d. h. einigermaßen zu verbessern, so werde ich wohl die Berufung annehmen.” (Minkowski Hilbertovi, 5. 9. 1896; [Minkowski 1973], s. 85).

[10] “Ich werde in der Popularisierung des Stoffs bis an die äusserst mögliche Grenze gehen müssen.” (Minkowski Hilbertovi, 31. 1. 1897; [Minkowski 1973], s. 94).

přednášky následně v roce 1907 vydal jako učebnici pod názvem *Diophantische Approximationen* [Minkowski 1907]. V Göttingen přednášel též topologii a byl autorem jednoho z návrhu řešení problému čtyř barev.[11]

Především je ale Minkowski dodnes znám v oboru fyziky pro definici Minkowského časoprostoru, představenou na přednášce v Kolíně nad Rýnem v roce 1908 [Minkowski 1909]. Jeho přínos ke speciální teorii relativity je i ten, že zobecnil invarianci elektrodynamických rovnic vůči Lorentzově transformaci na všechny děje, které v přírodě probíhají.[12]

Hermann Minkowski zemřel na zánět slepého střeva v roce 1909. Ve vzpomínkové řeči před společností věd v Göttingen pak Hilbert vyjmenoval jeho životní milníky a vědecké úspěchy, což byl také jeden z mála momentů, kdy Hilbert projevil veřejně své emoce.

Jak se vzájemné přátelství v Göttingen proměnilo oproti prvním studijním létům v Königsbergu? V období, kdy ještě oba bydleli v Königsbergu u rodičů, si vykali. Na pravidelné procházky chodili spolu s Hurwitzem pouze ve třech, zato v Göttingen se od roku 1902 takto scházely v určitý čas všechny čtyři profesorské stolice, což utvořilo celý zástup studentů a kolegů. Hilbert byl o něco starší než Minkowski, dosáhl tak v Königsbergu vyššího akademického postavení dříve (viz zmíněnou oponenturu Minkowského disertace). V Göttingen již byli oba profesoři akademicky na stejné úrovni, jejich současníci (na rozdíl od budoucích generací matematiků) ale údajně spíše uznávali Minkowského. Ve fyzice byly rozdíly ještě zřetelnější, Hilbert se jí teprve s Minkowského pomocí začal v Göttingen intenzivněji věnovat.[13]

3.2 Adolf Hurwitz

Adolf Hurwitz (1859–1919) studoval u Felixe Kleina nejdříve v Mnichově, poté ho roku 1880 následoval do Lipska. Již od mládí ho výrazně provázelo chatrné zdraví. Habilitoval se na univerzitě v Göttingen, kde se věnoval především teorii funkcí, a odtud v roce 1884 přišel do Königsbergu. Zde byl Hurwitz mimořádným profesorem a Hilbertovým učitelem matematiky, později se s Minkowskim a Hilbertem stali přáteli. Na jejich dlouhých procházkách jim byl při matematických debatách vždy starším rádcem, ke kterému vzhlíželi. Byl zodpovědný za Hilbertovu důkladnou průpravu v teorii funkcí, a to jak v pojetí Riemanna a Kleina, tak v pojetí Weierstrasse. V Königsbergu se kromě toho věnoval teorii čísel, a to ve vlastních pracích o počtu tříd či o diofantovských rovnicích.[14] Kromě toho publikoval i články k čisté geometrii.[15]

V roce 1892 se oženil s Idou Samuelovou, dcerou profesora medicíny z Königsbergu, a ve stejném roce dostal místo řádného profesora v Zürichu. Minkowski psal Hurwitzovi, že s rodinou Samuelových udržuje v Königsbergu kontakt a že se jich často ptá na aktuální zprávy o rodině Hurwitzových v Zürichu.[16] Hurwitz následně

[11] Mějme libovolnou mapu, omezenou plochu, rozdělenou na konečný počet souvislých, navzájem disjunktních oblastí. Problém čtyř barev spočívá v tom, zda lze tyto oblasti obarvit s použitím pouhých čtyř barev tak, že sousedící oblasti nebudou nikdy obarvené stejnou barvou. Plný důkaz problému byl podán Kennethem Appelem a Wolfgangem Hakenem z univerzity v Illinois až v sedmdesátých letech 20. století.

[12] Viz ([Hilbert 1909], s. 356f). Minkowského zápis rovnice transformace se však oproti dnešku liší. Konstantní rychlost světla je v Minkowského zápisu označena jedničkou, a jde pak o novou škálu, kde rychlost může nabývat hodnoty od 0 do 1.

[13] ([Reid 1970], s. 100), ([Blumenthal 1935], s. 407; překlad, s. 132).

[14] Společně s Hilbertem dokázal v článku "Über die diophantische Gleichungen vom Geschlecht Null", že diofantovské rovnice určitého typu lze převést oboustrannou transformací na kvadratickou rovnici [Hilbert – Hurwitz].

[15] ([Hilbert 1919], s. 372).

[16] Viz (Minkowski Hurwitzovi, 11. 5. 1896; [Minkowski 1989], s. 231).

v Zürichu zůstal a obecně cestoval velmi málo. Se všemi matematiky, kteří prošli Zürichem, však měl blízké vztahy.

V článku "Über die Theorie der Ideale" [Hurwitz 1894b] z roku 1894 používal Dedekindovo pojetí ideálů, ale kombinoval ho již s Kroneckerovým přístupem (samotnou teorii ideálů označoval jako Dedekindovu–Kroneckerovu). Richard Dedekind (1831–1916) toto Hurwitzovi vytýkal a udal důvody, proč takovou kombinaci považuje za metodologicky nesprávnou [Dedekind 1895].[17] Navíc v dopise z 11. 5. 1896 Minkowski psal o své (dosud nevydané) knize *Geometrie der Zahlen* [Minkowski 1896], že bude obsahovat řetězové zlomky v komplexním oboru,[18] jak Hurwitz požadoval v článku "Über die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche" [Hurwitz 1894a]. Na podzim 1896 se do Zürichu odstěhoval také Minkowski. Následujícího roku 1897 se zde konal Mezinárodní matematický kongres a Hurwitz na něm přednášel moderní historii obecné teorie funkcí.[19]

Poté se Hurwitz ještě hlouběji věnoval teorii ideálů a možnosti jejich rozkladu. V roce 1902 v článku "Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier" [Hurwitz 1902] usiloval za pomoci kulových funkcí o nové analytické podložení Minkowského teorie povrchů a objemů.[20] Hurwitzova práce "Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n-ten Potenzen ganzer Zahlen" [Hurwitz 1908] zase pobídla Hilberta k řešení Waringova problému. Ačkoliv měl mít Hurwitz více nabídek na profesorská místa do Německa, pokaždé jej předběhl jiný matematik. Během první světové války mohl zůstat v neutrálním Švýcarsku a válka se na něm díky tomu nepodepsala tolik, jako kdyby zůstal v Německu. Hilbert připisuje Hurwitzovi k dobru i jeho práci pedagogickou a vhodný výběr motivačních příkladů vyzývajících studenty k další spolupráci. Toho je dokladem i učebnice *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen* [Hurwitz 1919]. V roce publikace Hurwitz zemřel. Dodejme, že do jeho matematické skupiny v Zürichu patřili též Hermann Weyl, George Pólya a Paul Bernays.

3.3 Fenomén Göttingen

3.3.1 Postavení německých univerzit

Německé univerzity a akademie byly na začátku 19. století, ještě před ustanovením jednotného státu, relativně nezávislé, podřízené vždy jen jednomu konkrétnímu monarchovi, a k většímu propojení vědců na úrovni celé pozdější říše nedocházelo. Vzájemnou komunikaci umožnily teprve nově vznikající spolky, zejména Společnost německých přírodovědců a lékařů (*Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte*), založená v roce 1822. Shromáždění společnosti, která se pořádala každý rok na jiném místě na pomyslné mapě Německa a i Rakouska, včetně míst, kde nebyla univerzita, měla především slavnostní charakter a byla představována jako manifestace německé touhy po sjednocení, přes všechny nepříznivé podmínky, které mu bránily. Na přednáškách v obecných sekcích byly téměř zbožšťovány významné osobnosti německé vědy. Slovo měla střední vrstva (*Bildungsbürgertum*), která však již byla vzdělaná dle Humboldtova neohumanismu a zprvu tak ve společnosti zároveň převažoval názor, že věda přispěje k dobru celého lidstva, nehledě na místo, kde výzkum probíhá. Snaha o lepší komunikaci mezi vědci německými měla pomoci posílit taktéž vztahy mezinárodní. Zmíněné nacionalizující tendence začínají převažovat zhruba od poloviny století, kdy také přestávají na univerzitách

[17] Hilbert se však ve své *Zahlbericht* [Hilbert 1897] tímto směrem vydává také. Více k tématu viz ([Schappacher 2005], s. 703f).

[18] Viz (Minkowski Hurwitzovi, 11. 5. 1896; [Minkowski 1989], s. 231).

[19] ([Hilbert 1919], s. 374f).

[20] To se podaří až Hilbertovi v roce 1910 za pomoci integrálních rovnic [Hilbert 1910].

vycházet závěrečné práce v latině a kdy klesá význam akademií. Hermann von Helmholtz (1821–1894) se např. v roce 1862, ještě dlouho před sjednocením, obracel ve své přednášce k národu, aby podporoval vědu, protože to bude jemu samému ku prospěchu. Na přednášce pozdější z roku 1869 pak již kvituje důvtip i odvahu německých vědců oproti kolegům francouzským či britským.

Podobné procesy probíhaly i v ostatních státech. Pokračovaly tendence ze začátku století, kdy se začaly preferovat přírodní vědy nebo např. dějepis, a na odiv se stavěly výsledky vědeckých expedic či archeologických výzkumů. Důraz byl však čím dál více kladen také na prezentaci nových technologií. Už od poloviny 19. století se pořádaly světové výstavy. Ačkoliv zde již státy musely své úspěchy prezentovat jako pokrok celého lidstva, měly výstavy vždy podtext mezinárodní soutěže. Světové kongresy či Nobelova cena, které se pak ustanovovaly na přelomu století, se nesly v podobném duchu.

Po sjednocení Německa v roce 1871 a následném bouřlivém hospodářském růstu bylo hlavní snahou, aby se ve všech oblastech dosáhlo celosvětově vedoucích míst. Nejdříve však probíhala záměrná rekonstrukce pojmu německého národa. Zakládaly se lokalizované statistické kanceláře, měnily se mapy a pořádala se sčítání lidu, prezentující národ jako homogenní celek. Vliv měly komunikační možnosti, např. tištěná média, ale i možnosti dopravní. Kromě teritorializace národa probíhala i nacionalizace jednotlivých území. Např. v anektovaném Alsasku–Lotrinsku byla pro tento účel založena německá univerzita ve Štrasburku a do oblasti byla uměle zaváděna němčina. Ač byla na úrovni německé říše oficiálně spravována jen ona část vědy, která Německo reprezentovala navenek, centralizoval se i univerzitní svět. Univerzity si již bez svolení Berlína nemohly samy určovat, s kým budou spolupracovat, což bývalo jejich tradičním právem. Hlavní slovo mělo Pruské ministerstvo kultu a především ministerský rada Friedrich Althoff (1839–1908), který zde oddělení pro univerzity mezi lety 1887–1907 vedl. Althoffovým působením vznikl především specifický systém přerozdělování profesorských stolic, jejichž počet v té době, stejně jako počty studentů, strmě rostl. Technické vysoké školy byly zrovnoprávněny s univerzitami a bylo na nich možno získat doktorát. Althoff se však podílel i na obecnější reformě univerzit, díky které již nemusely pokaždé vyučovat zcela stejný soubor všeobecných předmětů, ale mohly se do určitého směru profilovat. Na univerzitě v Göttingen tak Althoff za přispění Felixe Kleina a Davida Hilberta cíleně vybudoval zázemí pro rychle se rozvíjející matematiku a fyziku.

Do výzkumu nových technologií bylo zapotřebí mnohem více peněz než dříve, a Althoff tak vyjednával s průmyslnickými spolky o podmínkách financování. Při univerzitách tak vznikala podle francouzských a amerických vzorů průmyslem a státem podporovaná vědecko-technologická centra bez povinnosti pracovníků vést zároveň výuku.

3.3.2 Specifika Göttingen jako centra matematiky a astronomie

Univerzita v Göttingen byla založena britským panovníkem Jiřím II. roku 1751, kdy město spadalo pod Hannoverské království. S velikým vlivem Carla Friedricha Gausse (1777–1855) se Göttingen proměnily ve významné astronomické centrum, pro matematiku vešly ve světě ve známost zhruba od roku 1886, kdy na univerzitu nastoupil Felix Klein (1849–1925). V matematice zde mohl kromě Gausse navazovat na tradici Bernharda Riemanna (1826–1866) a Petera Gustava Lejeune Dirichleta (1805–1859), ve fyzice na Wilhelma Webera (1804–1891). Absolvent této univerzity měl mít přehled o aktuální světové matematické literatuře, k čemuž měla dopomoci nová čítárna. Na univerzitě vycházely zároveň dva vlivné časopisy: *Mathematische Annalen* pod vedením Davida Hilberta a Otto Blumenthala a od roku 1894 každoroční *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften* *zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*,[21] který navazoval na předchozí periodikum, pokrývající více oborů. Připomeňme také, že paralelně s Kleinem působí v témže období na katedře filosofie Edmund Husserl (1859–1938), zakladatel filosofické fenomenologie.[22]

Hermann Minkowski napsal Hilbertovi o své připravované první cestě do Göttingen v únoru 1894:

> "Bylo by určitě docela zajímavé prozkoumat tuto instituci, která se právě těší takovému věhlasu, a kdoví, kdy bych se k tomu později dostal,"[23]

a roku 1899, když už zde působil Hilbert:

> "Kdo zažil v těchto dnech Göttingen, nestačí se divit, kolik života panuje v tamních matematických kruzích, a v současnosti je to výhradně Tvou zásluhou."[24]

Před 1. světovou válkou se v Göttingen ustavilo mezinárodní vědecké prostředí včetně početné americké enklávy.[25] Německo mělo v té době totiž mezi zahraničními studenty velkou prestiž a obzvláště Göttingen, které se stávají jedním ze světových center vědy.[26] Jedním z důvodů byla jednak možnost svobodné volby jednotlivých předmětů, jednak nízké náklady na studium – stálo třetinu toho, co studium na amerických univerzitách.[27] Po americkém a francouzském vzoru založil Klein také spolek (*Göttingenskou asociaci*) propojující univerzitu s průmyslem za účelem uplatnění matematického výzkumu v praxi. Kolem univerzity tak vzniklo jedno z prvních vědecko-technologických center.

Po 1. světové válce panovala v Německu politicky i hospodářsky nejistá situace. Ve 20. letech měla demokratická výmarská republika problém s financováním školství.[28] Německo bylo zatíženo reparacemi a lidé střední třídy již neměli možnost financovat studia svých dětí. Studenti si tak na ně museli vydělávat nejdříve během prázdnin, za hospodářské krize i v semestru. K tomu jim sloužily také místní studentské organizace.[29] Některé pozice byly přímo pod záštitou univerzity, např. přepisování přednášek na stroji[30] či práce v kuchyni. Také byly zřizovány překladatelské kanceláře. Konkrétně v Göttingen byly kolem roku 1922 takto nabízeny práce především v zemědělství.[31] Na přelomu roku 1922 a 1923 navíc studenti čelili inflační krizi

[21] Zkráceně *Göttinger Nachrichten* [Hilbert 1900a], což užíváme v citacích i v tomto textu.

[22] Právě u Husserla studoval i český filosof Jan Patočka (1907–1977).

[23] "Wer weiss, wann ich später dazu kommen könnte, und es ist ja ganz interessant, die mathematische Werkstätte, die vorderhand im meisten Ansehen steht, einmal zu inspicieren." (Minkowski Hilbertovi, 8. 2. 1894; [Minkowski 1973], s. 61). Constance Reidová překládá jako "Who knows when I shall have another opportunity to inspire the mathematical workshop which is now of highest repute?" ([Reid 1970], s. 54). To je chybou překladu, neboť Minkowski chce jen uznávanou matematickou instituci prozkoumat (*inspicieren*), nikoliv inspirovat (*to inspire*).

[24] "Wer diese Tage in Göttingen verlebt hat, wird nicht genug staunen können, wie viel Leben in den Göttinger mathematischen Kreise herrscht, und zur Zeit ist es ausschliesslich Dein Verdienst." (Minkowski Hilbertovi, 24. 6. 1899; [Minkowski 1973], s. 117).

[25] Např. dle Kleinovy doktorandky Grace Chrisholm Youngové (1868–1944) se její kruh skládal z pěti Američanů, jednoho Švýcara, jednoho Itala, jednoho Maďara, jedné Angličanky (Youngová sama) a z jen asi čtyř Němců ([Reid 1970], s. 48).

[26] Z německých univerzit se pouze v Berlíně vyučovala matematika na stejné úrovni jako v Göttingen. Srov. vyjádření M. Borna, že jej do Göttingen přivedla rada, že pokud si přeje přendnášky na Hurwitzově úrovni, pak v Göttingen. ([Born 1975], s. 123).

[27] Viz ([Ewing 1996], s. 667).

[28] Více k tématu viz [Moravcová 2006].

[29] V roce 1921 byla na konferenci *Deutsche Studententag* v Erlangen ustanovena organizace *Wirtschaftshilfe der deutschen Studentenschaft* (Hospodářská podpora německého studentstva), jejímž cílem bylo právě hledání práce pro studenty. "Wirtschaftshilfe" dále zprostředkovávala komunikaci univerzity s oblastmi průmyslu v jejím okolí a s jednotlivými organizacemi. Často se konkrétní univerzita specializovala i v nabídce pracovních pozic ([Kater 1975], s. 75).

[30] Viz ([Reid 1970], s. 108f).

[31] Viz ([Kater 1975], s. 76).

a panovala možnost, že ani po vystudování nenajdou práci a že jejich vysokoškolský titul nebude náležitě doceněn, což vedlo k jejich radikalizaci a následné podpoře NSDAP.[32] Slavné období univerzity v Göttingen končí roku 1933 nástupem Hitlera a nuceným odchodem značné části židovských profesorů a studentů do zahraničí.

Dále se budeme věnovat Hilbertovým spolupracovníkům, které seskupíme na základě oborů, jimž se ve svých pracích nejvíce věnovali. Dělení bude orientační, zejména proto, že uvedení vědci během své tvůrčí činnosti zaměření měnili.

3.3.3 Matematikové

O rozvoj Göttingen v centrum matematického bádání se ještě před Davidem Hilbertem nejvíce zasloužil Felix Klein (1849–1925), který v Göttingen působil od roku 1886. Bylo jeho zásluhou, že v roce 1895 připadlo uvolněné profesorské místo právě Hilbertovi. V matematice je Klein známý především pro tzv. Erlangenský program z roku 1872, studii invariantů vůči grupám geometrických transformací [Klein 1872], který byl jedním z hlavních inspiračních zdrojů Hilbertových *Grundlagen der Geometrie*. Proto právě Kleinovi adresuje Hilbert v roce 1894 dopis, vydaný o rok později jako článek "Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte" [Hilbert 1895]. Geometrii, kterou Hilbert v tomto článku představil, pak Klein srovnává ve svém článku roku 1898 [Klein 1898] s geometrií Minkowského a Hilbert se naopak na tento Kleinův článek odkazuje hned na první straně svých *Grundlagen der Geometrie*.[33]

Klein se věnoval neeukleidovským geometriím a teorii potenciálu, propojoval teoretickou matematiku s inženýrskými aplikacemi a byl přitom v úzkém kontaktu s místním průmyslem. Stál za vydáním encyklopedie matematických věd s kompletní matematikou své doby, která vycházela po svazcích až do třicátých let, a u čtvrtého svazku o mechanice se Klein uplatnil i jako editor [Klein – Müller 1901]. V Göttingen zřídil k profesurám placené pozice pro osobní asistenty, kteří měli za úkol např. výběr literatury, přepis přednášek a zpětnou vazbu směrem k profesorům. Klein si v knize *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus*[34] stěžoval na rozkol mezi výukou matematiky na středních a vysokých školách. Svým úsilím o reformy v této oblasti ovlivnil výuku matematiky na školách v celém Německu. V roce 1902 založil Mezinárodní školskou komisi, která fungovala až do války do roku 1914.[35]

Další významní matematici v Göttingen kolem Davida Hilberta pocházeli již z řad jeho žáků. Nejstarší byli Otto Blumenthal (1876–1944) a Erhard Schmidt (1876–1959). První jmenovaný, Otto Blumenthal, byl Hilbertovým vůbec prvním doktorandem. Ve své následné habilitaci, publikované roku 1903 [Blumenthal 1903], užil Hilbertovu konstrukci relativních Abelových těles [Hilbert (relativquad.) 1899] a Hurwitzovy výsledky z článku o grupě substitucí [Hurwitz 1895] Od roku 1905 byl profesorem na univerzitě v Cáchách a šéfredaktorem *Mathematische Annalen*. Od roku 1924 byl též spoluvydavatelem *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (DMV). Nástupem nacistů v roce 1933 byl však z univerzity propuštěn a své funkce v DMV se vzdal.[36] Šéfredaktorem *Mathematische Annalen* nicméně zůstal až do roku 1938.

Otto Blumenthal je také významný pro sepsání Hilbertova životopisu, poprvé publikovaného v roce 1935 [Blumenthal 1935] (překlad viz kap. 9.1). Hledal v té

[32] Po přijetí klíčového Zákona o civilní službě dne 7. 4. 1933 byla propuštěna značná část akademiků židovského původu. Výjimku měl ten, kdo byl ve funkci před rokem 1914 či kdo bojoval za války na straně Německa, což se týkalo na univerzitě v Göttingen např. Richarda Couranta.

[33] Tj. do šestého vydání ([Hilbert 1899c], s. 1). V sedmém vydání, posledním Hilbertově, tento odkaz v úvodu knihy neuveden není.

[34] Viz ([Klein 1908], s. 2).

[35] Viz ([Reid 1970], s. 88).

[36] Viz ([Remmert 2006], s. 423).

době zaměstnání po mnoha evropských univerzitách (v témže roce 1935 měl přednášku i na Německé univerzitě v Praze).[37] Teprve v únoru 1939 se pro něj podařilo zařídit místo na univerzitě v Delftu a v červenci téhož roku emigroval do Holandska. Odtud se jej snažil Paul Ewald (1888–1985) dostat do Británie a Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) do USA, v obou případech ovšem neúspěšně. Po obsazení Holandska německou armádou byl odsunut nejprve do tamního koncentračního tábora Westerbork a odtud na vlastní žádost do Terezína, kde měla být držena i jeho sestra.[38] V terezínském ghettu Blumenthal zemřel následkem nemoci v listopadu 1944.

Druhý zástupce Hilbertových starších žáků, Erhard Schmidt, je v matematice znám díky své disertaci z roku 1905, kde zpřehlednil ortogonalizační proces, původně navržený Jorgenem Pedersenem Gramem v roce 1885[39] Schmidt byl poté postupně profesorem v Bonnu a v Berlíně. Výrazně vylepšil Hilbertovy výsledky v integrálních rovnicích [Schmidt 1907], v geometrii se věnoval isoperimetrii, přičemž navazoval přímo na Minkowského [Schmidt 1939]. Byl též učitelem Johna von Neumanna. V roce 1936 byl Schmidt předsedou DMV.[40]

Vlivná matematická skupina se ve 20. letech utvořila kolem Hilbertových mladších žáků, Richarda Couranta (1888–1972) a Emmy Noetherové (1882–1935). Courant získal v Göttingen pod Hilbertovým vedením titul doktora v roce 1910. Jeho disertace týkající se Dirichletova principu pomohla Hilbertovi ve zkoumání funkcionální analýzy a axiomatizace.[41] Následně se Courant stal Hilbertovým asistentem a před 1. světovou válkou doučoval též jeho syna Franze. Za války Courant bojoval na frontě a byl zasažen plynem. Po válce vyučoval v Münsteru, poté byl Kleinovým nástupcem na pozici řádného profesora matematiky v Göttingen. Rozvíjel analytické myšlenky Riemanna, Kleina a Hilbertovy integrální rovnice, které v roce 1924 shrnul ve vlivné knize *Methoden der mathematischen Physik* [Courant 1924]. Ty posléze aplikoval v teorii konformního zobrazení a v termodynamice.[42] Courant na univerzitě pořádal festival čtení důkazů a zasazoval se o výstavbu nové budovy pro matematický institut. Byl spoluvydavatelem časopisu *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, zaměřeného na recenze matematických textů a referáty, který vycházel od roku 1931.[43] V roce 1933 emigroval Courant do USA[44] a učil na univerzitě v New Yorku. S Hilbertem si ještě v roce 1936 telefonovali, ale pouze v čistě společenském tónu. V roce 1962 mluvil v Göttingen o tamním Hilbertově působení k výročí sta let od jeho narození.[45]

Emmy Noetherová, dcera Maxe Noethera (1844–1921), významného algebraika,

---

[37] Viz ([Bečvářová 2016], s. 341).

[38] Více k tématu viz [O'Connor – Robertson: Blumenthal].

[39] Gram–Schmidtův ortogonalizační proces se dodnes vyučuje v základních kurzech lineární algebry.

[40] Schmidt musel čelit kritice z řad nacistických docentů za to, že na seznamu členů byl veden statistik Emil Gumbel, který byl již v emigraci. Ten však byl jako sociální demokrat zbaven členství již dříve, o čemž jej měl informovat tehdejší tajemník DMV, zároveň i nacista Ludwig Bieberbach (1886–1982). Schmidt se zástupcům docentů omluvil a zadal tisknout opravený seznam. Obával se přitom, že aféra vyvolá pozornost vůdčích osob nacistických kruhů, což se však nestalo. Důvodem, proč se Bieberbach sám do konfliktu nezapojil, mohlo být mimo jiné i to, že Schmidt byl jeho kolegou na univerzitě v Berlíně (viz ([Remmert 2006], s. 428).

[41] Viz ([Blumenthal 1935], s. 410).

[42] Viz ([Weyl 1944], s. 279, 282).

[43] Časopis tak představoval konkurenci časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, vycházejícího již od roku 1869. *Jahrbuch* vydávala Pruská akademie věd v čele s Ludwigem Bieberbachem, jenž požadoval „rasovou čistotu“ autorů textů. Bieberbach se snažil o spojení obou časopisů, což bylo v rozporu s ideologickým zaměřením nakladatelství Springer, které *Zentrallblatt* vydávalo. Ač ke spojení nedošlo, jeho záměr se podařil, neboť byla v roce 1939 ustavena jednotná redakce obou časopisů v čele s nacisty. Více k tématu viz ([Remmert 2006], s. 436f).

[44] Emigroval, přestože se na něj vztahovala výjimka z rasového zákona za jeho službu v německé armádě za války.

[45] Viz ([Reid 1970], s. 219).

teoretika invariantů, přišla do Göttingen na Hilbertovo pozvání v roce 1911 z Berlína, kde soukromě studovala u Karla Weierstrasse. V teoretické mechanice je velmi používán její slavný teorém z roku 1918 [Noether 1918] kterým propojila spojité symetrie se zákony zachování fyzikálních veličin. Hilbert jí v Göttingen umožnil se habilitovat, což obecně nebylo pro ženy v této době vůbec možné. Ve 20. letech zakládala teorii komutativních okruhů, přičemž vycházela z Dedekindovy teorie ideálů. Byla následně editorkou jeho sebraných spisů [Dedekind 1932] a právě kvůli neortodoxnosti v reprodukci Dedekindových myšlenek měla také neoficiálně kritizovat Hilbertův *Zahlbericht*.[46] Sama však na tuto Hilbertovu zprávu navazovala, a to v článku s názvem "Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper" [Noether 1933] jímž předznamenávala zrod Galoisovy kohomologie.

V roce 1923 zve Hilbert do Göttingen Pavla Alexandrova (1896–1982) a Pavla Urysona (1898–1924), členy Moskevské topologické školy. Pavel Uryson je znám pro Urysonovo lemma a větu o zobrazení libovolného známého prostoru do Hilbertova prostoru. Oba se zde spřátelili s Noetherovou i s Courantem a přijeli sem znovu roku 1924. Uryson ale následně tragicky zahynul ve Francii.[47] Alexandrov jezdil o prázdninách do Göttingen dále až do roku 1932[48] a Noetherová naopak do SSSR, neboť v komunistické revoluci viděla progresivní sílu.[49] Po nástupu nacistů v roce 1933 však emigrovala do USA,[50] kde roku 1935 zemřela. Předtím ještě krátce přednášela na ženské koleji Bryn Mawr.

3.3.4 Logikové

V Göttingen se od dvacátých let tvořila také silná skupina logiků. Zástupcem dřívějších Hilbertových studentů na tomto poli je Ernst Zermelo (1871–1953). Sice se u Hilberta habilitoval prací z variačního počtu, je však významný především prací v teorii množin a její axiomatizací z roku 1908, obsahující i slavný axiom výběru [Zermelo 1908b].Tato nebyla ihned přijata a např. Felix Hausdorff se na ni ještě v roce 1914 odkazuje jako na rozpracovaný článek.[51] Bezespornost Zermelova systému axiomů studoval i Hilbert.[52] Ačkoliv však byl systém následně vylepšován, zůstal oproti původní verzi bez podstatných změn a Zermelo–Fraenkelova teorie množin tak nese jméno jeho autora. Uveďme ještě dřívější práci z roku 1904, jejímž hlavním tématem byl důkaz existence dobře uspořádané množiny a v níž Zermelo přiznává, že na myšlenku tohoto důkazu jej přivedl Erhard Schmidt.[53] Na druhou Zermelovu verzi onoho důkazu [Zermelo 1908a] se v kontextu nekonzistentnosti Cantorových alefů (nekonečných kardinálů) odkazují Hilbertovy pozdější vydání *Grundlagen der Geometrie* v příloze *Über den Zahlbegriff*.[54]

Další skupinu Hilbertových studentů a následně spolupracovníků na poli logiky poté zastupují Paul Bernays (1888–1977) a Wilhelm Ackermann (1896–1962). Poté, co Paul Bernays vystudoval, odešel roku 1917 do Zürichu, kde působil spolu s Adolfem Hurwitzem. Na začátku 20. let jej Hilbert chtěl přivést zpět do Göttingen jako svého asistenta. Bernays se zde tedy habilitoval a následně i od roku 1924 vyučoval jako Hilbertův nejbližší spolupracovník. Byl editorem nových vydání *Grundlagen der Geometrie*.[55] Na rozdíl od Hilberta nepoznal Bernays Kroneckera a jeho reduk-

[46] Srov. ([Schappacher 2005], s. 703f).
[47] Srov. ([Crilly 2005], s. 849).
[48] Viz ([Vopěnka – Větrovcová 2015], s. 209, 213).
[49] Viz ([Segal 2003], s. 59).
[50] Emigrovala, přestože se i na ni vztahovala výjimka z rasového zákona, neboť nebyla oficiálně na univerzitě zaměstnaná.
[51] Viz ([Epple 1999], s. 406).
[52] Viz ([Hilbert 1992], s. xvii).
[53] Viz ([Zermelo 1904], s. 514).
[54] Viz ([Hilbert (Zahlbegriff) 1900], s. 242).
[55] Hilbert v předmluvě šestého vydání zmínil jeho pomoc při práci na dodatcích

cionistickou matematiku, a proto se ve věci intuicionismu s Hilbertem často přel.[56] Následně s Hilbertem sepsali program matematického formalismu v obsáhlém díle *Grundlagen der Mathematik* [Hilbert – Bernays 1934], přičemž vhodnou literaturu volil právě Bernays. V roce 1933 byl jako Žid přinucen rektorem k dobrovolné rezignaci na profesorské místo a z Göttingen se stěhoval nazpět do Zürichu. Paul Bernays je též známý pro Gödel–Bernaysovu teorii množin.[57]

Wilhelm Ackermann se po své disertaci [Ackermann 1924] jako Hilbertův spolupracovník podílel především na důkazech bezespornosti reálných čísel. Na Hilbertovu přednášku "Über das Unendliche" [Hilbert 1925] z Münsteru roku 1925 proto navázal studií "Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen" z roku 1928 [Ackermann 1928], v níž podal důkaz Hilbertem vyslovené hypotézy, týkající se použití rekurze k důkazu bezespornosti aritmetiky. Ackermann s Hilbertem pracovali také na knize *Grundzüge der theoretischen Logik* [Hilbert – Ackermann 1928] z roku 1928, poprvé shrnující Hilbertův program v knižní formě.

Třetí a nejmladší generaci logiků tvoří John von Neumann (1903–1957) a Gerhard Gentzen (1909–1945). John von Neumann nebyl na rozdíl od ostatních zástupců, zmíněných v této kapitole, žákem Davida Hilberta. Studoval v Berlíně u Erharda Schmidta. Kolem roku 1924 však často navštěvoval Göttingen a zajímal se o Hilbertův přístup k fyzice a teorii důkazu [Von Neumann 1927]. Ve své práci zobecnil pojem Hilbertova prostoru tak, aby lépe vyhovoval potřebám kvantové mechaniky. Její axiomatizaci vydal nejdříve společně s Hilbertem v článku z roku 1928 [Hilbert – Neumann – Nordrheim 1928], následně v roce 1932 představil svou vlastní verzi v knize *Mathematische Grundlagen der Quantummechanik* [Von Neumann 1932] Přednášel i axiomatiku teorie množin, pomocí níž se pokoušel v práci *Zur Hilbertschen Beweistheorie* [Von Neumann 1927] o důkaz bezespornosti teorie čísel, která obsahuje i komentář k vlivu Ackermanových vylepšení.[58] Tento důkaz se v konečné podobě podařil Bernaysovu doktorandovi Gerhardu Gentzenovi v roce 1936 [Gentzen 1936]. Touto prací navázal na svůj dřívější spis, kde má jiný formalismus [Gentzen 1935]. Těsně před válkou se Gentzen stal Hilbertovým asistentem a za války působil jako docent na pražské německé univerzitě. Po Pražském povstání roku 1945 byl jako člen NSDAP odsouzen a ve věznici poté zemřel.

3.3.5 Fyzikové

Paralelně se skupinou matematickou se ustanovila silná skupina fyzikální kolem Maxe Borna (1882–1970). Ten přišel do Göttingen v roce 1902 z tehdy německé Breslau (dnešní Wroclawi). Byl synem židovského vědce z oboru medicíny. O dva roky později, ještě jako student, se stal Hilbertovým asistentem. V roce 1905 navštěvoval Minkowského přednášky o elektrodynamice, kde se již vyučoval např. Lorentzův vlastní čas nebo Michelson–Morleyho pokus (Einsteinova speciální teorie relativity ještě Minkowskému během výuky nebyla známa). V roce 1908 byl Max Born též v publiku na zmíněné Minkowského přednášce v Kolíně, kde představil i svůj časoprostor. Minkowski chtěl Borna jako spolupracovníka, předtím ho ale ještě ke konci roku poslal zpět do Breslau, kde měl prostudovat jeho poslední práce. Aby se Born vyhnul zkoušce u Felixe Kleina, psal disertační práci z astronomie, i když měl blíže k obecné fyzice.[59] Po Minkowského smrti v roce 1909 byl Born pověřen vydáním textů z Minkowského pozůstalosti [Born 1910] a v Göttingen se stal soukromým docentem. Věnoval se elasticitě krystalů a od roku 1910 se přátelil s Richardem

k textu ([Hilbert 1899c], obálka).

[56] Viz ([Reid 1970], s. 174).

[57] Více k tématu viz [Vopěnka 2006].

[58] Srov. ([Sieg – Ravaglia 2005], s. 985).

[59] Viz ([Reid 1970], s. 105).

Courantem. V roce 1914 byl Born s Einsteinem v Berlíně. Po válce se stal v Göttingen vedoucím teoretické fyziky.

Ve dvacátých letech se v Göttingen kolem Borna soustředili nejlepší fyzikové té doby. Spolupracovali zde především v oblasti kvantové fyziky. V roce 1922 si k sobě Born přizval Jamese Francka (1882–1964), po němž je pojmenován Franck–Hertzův pokus, dokazující nespojitost energetického spektra elektronů. Jeho dalšími spolupracovníky se stali Wolfgang Pauli (1900–1958), známý pro Pauliho vylučovací princip, a Werner Heisenberg (1901–1976), známý pro rovnice neurčitosti. Po Heisenbergovi je pojmenován maticový přístup k vlnové rovnici, na který jej ale upozornil právě Born spolu se svým žákem Pascualem Jordanem (1902–1980). Ti také pro vlnovou rovnici roku 1925 představili statistickou interpretaci, která umožňuje popsat kvantovou fyziku v dnešní podobě a za kterou roku 1954 získal Born Nobelovu cenu. Ve fyzice pevných látek je též známa od jeho kolegy Petera Debeye (1884–1966) Debeyeho teplota a dále zobecnění soustavy oscilátorů ve statistické fyzice.[60]

V Bornově skupině však chyběl Hermann Weyl (1885–1955), neboť ve dvacátých letech působil v Zürichu. Oba však předtím v téže době v Göttingen studovali. Disertační práci napsal Weyl u Hilberta. Věnoval také filosofii a byl významně ovlivněn působením Edmunda Husserla, neboť jeho žena Helene Josephová byla filosofkou a Husserlovou studentkou.[61] Od roku 1909 byl soukromým docentem. Věnoval se bodovým množinám a vyučoval Riemannovy plochy, na základě čehož sepsal knihu *Die Idee der Riemannsche Fläche* z roku 1913 [Weyl 1913]. V první světové válce sloužil v německé armádě, po jejím konci se stal profesorem v Zürichu. Z této doby pochází jeho slavná fyzikální práce *Raum–Zeit–Materie* [Weyl 1918b], která uvádí geometrizaci obecné teorie relativity a propojení s magnetickými poli. Hilbert ji však kritizoval jako příliš idealizovanou.[62]

Weyl se v téže době seznámil s myšlenkami programu intuicionismu Luitze Egberta Jana Brouwera (1881–1966) a stal se jedním z jeho hlavních stoupenců. V roce 1918 Weylovi vyšla kniha *Das Kontinuum* [Weyl 1918a] a Hilbert jej znovu pozval do Göttingen, aby intuicionismus představil veřejnosti. V roce 1922 mu chtěl Hilbert zařídit místo profesora, ačkoliv ve stejném roce na kongresu v Hamburgu důrazně hovořil proti jeho a Brouwerovu programu. Weyl však kvůli nejisté situaci v poválečném Německu odmítl. V té době vedl přednášky k teorii grup a kvantové mechanice, poznatky z nich shrnul v knize *Gruppentheorie und Quantummechanik* [Weyl 1928b] z roku 1928. Pro kvantovou mechaniku zde požadoval zobecnění na spojitě nekonečně-dimenzionální vektorový prostor.[63] Teprve v roce 1930, kdy Hilbert odešel do důchodu, přijal Weyl napodruhé místo profesora v Göttingen. Následně v roce 1933, kdy se v Německu v březnu dostal k moci Hitler, byl Weyl po odchodu Richarda Couranta krátce v čele Matematického institutu, na podzim však odjel do Zürichu a do Göttingen se již nevrátil. Následně odchází i z Evropy na univerzitu do Princetonu v USA. V roce 1943 psal Auguste Minkowské do Bostonu zprávu o Hilbertově smrti a následně napsal i souhrnný článek o Hilbertově matematické činnosti [Weyl 1944].

[60] Jako předseda *Deutsche Physikalische Gesellschaft* Debey rozeslal v prosinci 1938 jejím členům dopis, aby němečtí Židé obratem ohlásili vystoupení ze společnosti. DMV přistoupila ke stejnému kroku, židovské členy však oproti tomu ze seznamu členů vymazalo vedení přímo. Více k tématu viz ([Remmert 2006], s. 441f).

[61] Viz [Weyl (wikipedia)], srov. (Weyl Husserlovi, 26. 3. 1921; [Bedürftig – Murawski 2015], s. 93f), srov. ([Vopěnka – Větrovcová 2015], s. 207).

[62] Viz ([Hilbert 1992], s. xxi).

[63] Srov. ([Brown – Rechenberg 2005], s. 889).

Kapitola 4

Geometrie před Hilbertovými Grundlagen

Již delší dobu před Hilbertem bylo mezi matematiky známo, že Eukleidovy *Základy* obsahují jisté nedostatky. Šlo např. o skutečnost, že některé jeho axiomy bylo možné odvodit z jiných, že množina axiomů nebyla nejmenší možná, že některá jeho tvrzení měla být naopak označena za axiomy, že ve svých důkazech neuvedl všechny předpoklady, které používal, nebo že některé z nich nebyly v díle ani přítomny, ať už jako axiomy či jako tvrzení. Vývoj těchto výtek nebudeme v naší práci zohledňovat, popsán je např. ve standardních kritických vydáních *Základů*.

Zaměříme se speciálně na druhou polovinu 19. století, kdy se uvažování o geometrii oproti dřívějšímu pojetí proměnilo nachází se zhruba ve stavu, kdy jsou jednotlivé objekty dány neměnně, trvale a geometrie pouze odhaluje zákonitosti, které prostor na těchto objektech vynucuje.[1] V tomto kontextu nabývají důkazy nezávislosti pátého Eukleidova postulátu, díky kterým byly v první polovině 19. století objeveny neeukleidovské geometrie, nového významu jakožto důkazy bezespornosti neeukleidovských geometrii. Ve stejném čase se navíc zpětně objevil problém spojitosti geometrie.[2]

Nejprve stručně představíme Hilbertovy předchůdce z této doby, kteří buď po změnách v založení geometrie volali, nebo je již sami prostřednictvím axiomaticko-deduktivní metody zapracovali. Neopomeneme přitom, co dílu předcházelo v dřívějších Hilbertových přednáškách.

[1] Viz ([Vopěnka 2003], s. 97).

[2] Jde o otázku, zda Eukleidovy axiomy vynucují, aby prostor obsahoval nutně všechny body. Problém se projeví hned při prvním Eukleidově tvrzení první knihy *Základů*, ve kterém Eukleidés stanovuje úlohou, že lze zkonstruovat rovnostranný trojúhelník, aniž by v důkaze uvedl předpoklad, že se dvě kružnice se středy v krajních bodech úsečky, jejichž poloměrem je délka této úsečky, musejí nutně protnout, tj. že body protnutí existují. Eukleidés tento předpoklad neuvedl, což však nebylo chybou, ale souviselo s jiným chápáním geometrického důkazu v antice, totiž jakožto poukazu k evidenci. Budoucí změnu v pojetí geometrických důkazů předznamenal Bernard Bolzano (1781–1848), jenž u tohoto tvrzení upozornil, že evidovaná pravda o protnutí dvou kružnic při konstrukci rovnostranného trojúhelníku je až objektivním důsledkem objektivní pravdy, že prostor body protnutí obsahuje (viz ([Bolzano 1967], s. 211), srov. ([Eukleidés 2007], s. 46). V Hilbertově době na nespojitost Eukleidovy geometrie upozornil Dedekind v dopise Lipschitzovi z roku 1876 ([Dedekind 1932a], s. 479), srov. komentář ([Dedekind 2008], s. 273–281).

4.1 Výstavba geometrie pomocí grup pohybů a zavedení mechaniky do geometrie

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894) výrazně zasáhl do vývoje hned několika přírodních věd, včetně matematiky. Působil na univerzitě v Berlíně ve stejné době jako významný teoretik čísel L. Kronecker či analytik K. Weierstrass. Helmholtz měl však v matematice vliv především na vývoj geometrické linie.

Největší význam pro matematiku měla už jeho přednáška *Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie* [Helmholtz 1868], přednesená z roku 1868. Uvádí ji v době, kdy už jsou známy i neeukleidovské geometrie Lobačevského a Riemanna, ještě však před Erlangenským programem Felixe Kleina (1849–1925), který jednotlivé geometrie klasifikoval. Eukleidovská geometrie, ač značně oslabená, měla stále ještě výsadní postavení.

Helmholtzovou klíčovou myšlenkou je, že každá metrika v prostoru, stejně jako Riemannovy objevy v geometrii, na které navazoval, byly již vynuceny existencí volně pohyblivých těles. I dosavadní axiomatické systémy jednotlivých geometrií implicitně vypovídaly také o mechanickém chování těles při pohybu, nejen o vztazích prostoru. Helmholtz v přednášce uvedl axiomatický systém, který zmíněnou podmínku obsahoval a byl slučitelný jak s geometrií eukleidovskou, tak s geometriemi neeukleidovskými. Dle Davida Hilberta tak bylo díky dílům Helmholtze a Riemanna objeveno, že je geometrie jen konceptuálním rámcem fyziky,[3] což mělo následně vliv i na epistemologický význam jednotlivých geometrií. Věty eukleidovské geometrie byly zákony pohybů tuhých těles a věty geometrií neeukleidovských zákony pohybu těles analogických, která Helmholtz označoval za nejtužší možná, neboť v některých geometriích přesto měnila po přesunu svůj tvar. Helmholtzovu teorii prostoru použil Marius Sophus Lie (1842–1899) ve své významné práci z roku 1890 [Lie 1935] k uplatnění své teorii grup.[4]

4.2 Erlangenský program Felixe Kleina

Felix Klein (1849–1925), který neeukleidovské geometrie ve svém Erlangenském programu [Klein 1871], [Klein 1873] klasifikoval, dokázal bezespornost neeukleidovské geometrie hyperbolické pomocí modelu, ve kterém identifikoval její prvky a vztahy s určitými prvky a vztahy geometrie eukleidovské.[5] Nabízela se ihned otázka, zda by mohl být proveden podobný důkaz bezespornosti těch geometrií, které by vycházely z absence jiných předpokladů než zrovna pátého Eukleidova postulátu o rovnoběžkách.[6] Pokud ano, bylo by tím též dokázáno, že tyto axiomy a postuláty nejsou nutné pro to, aby byla výsledná geometrie bezesporná, a že jsou tedy nezávislé.[7]

---

[3] Viz ([Hilbert 1930], s. 383).

[4] David Hilbert vytýkal Liemu, že při použití analytických prostředků na své grupy implicitně předpokládal jejich diferencovatelnost. Proto v pátém ze svých 23 problémů pro 20. století kladl Hilbert otázku, zda lze Lieho teorie grup vybudovat i bez tohoto předpokladu ([Hilbert 1900], s. 304ff). Sám Lie v korespondenci s Poincarém vyjádřil namísto toho obavy, že jeho teorie je možná příliš restriktivní, protože se týká pouze grup spojitých. Pro užití tohoto pojetí v Hilbertových *Grundlagen* viz kap. 6.7.

[5] Požadavek důkazu bezespornosti eukleidovské geometrie samotné matematikové nevznášeli, neboť její bezespornost dokazoval názor samotný.

[6] Nejprve používá Klein v článku termín předpoklady (*Voraussetzungen*), následně již jen axiomy. Pod tento termín však zahrnuje i Eukleidovy postuláty, neboť mluví např. výslovně o axiomu o rovnoběžkách (pátý postulát) či axiomu o nekonečné přímce (první postulát) ([Klein 1873], s. 113).

[7] Toto pojetí nezávislosti tvrzení (tj. i axiomů a postulátů) je třeba odlišit od druhého případu, kdy říkáme, že axiom je nezávislý na ostatních, pokud jej z ostatních nelze odvodit. Pokud potom jsou takto vzájemně nezávislé všechny axiomy daného systému, neobsahuje tento systém nadbytečné axiomy. Viz ([Weyl 1944], s. 266), srov. ([Toepell 1986], s. 59).

Mezi takto vzniklými geometriemi by tak eukleidovská geometrie ztratila jakékoliv výsadní postavení a nedostačoval by ani Eukleidův způsob vedení důkazů pomocí přivedení k evidenci,[8] což většina matematiků, včetně těch, kteří zmíněné neeukleidovské geometrie uznávali, již nebyla ochotna přijmout.[9]

Klein navrhoval vytvořit nový systém axiomů nejprve pro projektivní geometrii, která v jeho pojetí všechny tyto metrické geometrie zahrnovala.[10] Přidáním dalších axiomů by pak tyto další geometrie bylo možné vyčlenit. Zároveň, bráno z druhé strany, by pak např. pro systém axiomů eukleidovské geometrie platilo, že pokud bychom vzali jen jeho podmnožinu, bylo by z ní možné odvodit opět pouze určitou podmnožinu ze všech tvrzení eukleidovské geometrie.[11]

4.3 Moritz Pasch - Vorlesungen über neuere Geometrie

Kleinem navržená axiomatika se poprvé objevila v knize *Vorlesungen über neuere Geometrie* z roku 1882 od Moritze Pasche (1843–1930), který se zde na Kleina také přímo odkazoval. Jako novější geometrii právě geometrii projektivní. Pasch řešil některé zmíněné výtky k Eukleidovu dílu. Jeho axiomy, které nazýval základní věty (*Grundsätze*), již představovaly množinu, z níž šla všechna ostatní tvrzení přísně logicky odvodit. Žádný axiom nebyl v celé množině nadbytečný. Základní pojmy, o nichž tyto axiomy vypovídaly, tj. body, úsečky a části roviny, měly stejně jako u Eukleida stále empirický původ, i když Pasch již uznával nejednoznačnost jejich interpretace.[12] Pasch se zaměřoval na zacelení nedostatků v Eukleidově systému, tj. na přidání axiomů, které v Eukleidovi scházely a odstranění axiomů nadbytečných. Jednotlivá tvrzení pak již měla z Paschovy sady axiomů vyplývat zcela logickou cestou bez dalšího se odvolání na názor.

Axiomy Pasch rozděleny do skupin nikoliv podle jednoho kritéria: axiomy úsečky, axiomy roviny, axiomy shodnosti. Významný je tzv. *Paschův axiom*, že přímka, protínající jednu stranu trojúhelníka protíná i druhou. Pasch dále oproti Eukleidovi přidal např.:

- axiomy uspořádání,
- axiom, že se dvě kružnice, jejichž součet poloměrů je větší, než vzdálenost jejich středů, vždy protínají,[13]
- axiom o shodnosti trojúhelníků.[14]

Pasch byl empiristou a jeho axiomy jsou založené na názoru. To se projevuje už u jeho primitivních pojmů, tj. bodů, úseček a částí roviny.[15] V opačném smyslu

[8] Viz ([Eukleidés 2007], s. 26).

[9] Viz ([Poincaré 1903], s. 2).

[10] Byla by tedy podle následujícího schématu:

axiomy projektivní geometrie I, II, V $\subset$ axiomy neeukleidovské geometrie I, II, III, V $\subset$ axiomy eukleidovské geometrie I–V,

ale zároveň

eukleidovská geometrie $\subset$ podobnostní geometrie $\subset$ afinní geometrie $\subset$ projektivní geomterie ([Trkovská 2015], s. 83). Pro Kleinovo zhodnocení dalšího vývoje o 20 let později viz též kap. 6.6.

[11] Srov. ([Toepell 1986], s. 7).

[12] Ani Pasch proto nepokládal otázku o bezespornosti svého systému axiomů, neboť ji stejně jako u Eukleida zaručoval názor.

[13] V anglosaské literatuře se vyskytuje termín tvrzení o kružnici a kružnici (*circle-circle theorem*).

[14] Tento je, stejně jako u Hilberta, uveden v silnější podobě, umožňující překlápění. trojúhelníku, nebo-li osovou souměrnost (viz kap. 6.6).

[15] Viz ([Trkovská 2015], s. 118). Tedy pouze takových primitivních pojmů, kde se nevyskytuje nekonečno.

se to pak projevuje když Pasch uvádí případě axiomy spojitosti,[16] aby jej vzápětí odmítl, jakožto neodpovídající názoru.[17] Jednotlivá Paschova tvrzení ovšem, jak jsme již poznamenali, jsou oproti tomu odvozená přísně logicky bez dalšího odvolání na názor. Pro nás je podstatné poznamenat, že toto Paschovo dílo doporučoval Hilbert svým studentům ve všech svých následných přednáškách o geometrii. Ve svých *Grundlagen der Geometrie* na Paschovu knihu též přímo odkazoval.

4.4 Další předchůdci

Zcela abstraktní, tj. na zkušenosti nezávislé, byly teprve základní proměnné v axiomatizaci geometrie Giuseppe Peana (1858–1932) z roku 1889 [Peano 1889c], která představovala pouhý logický kalkul se symboly. Ve své pozdější práci z roku 1894 [Peano 1894] navíc Peano požaduje důkazy vzájemné nezávislosti všech axiomů. Hilbert se na Peana v *Grundlagen* neodvolával, ale o jeho činnosti věděl a např. ve svých přednáškách z roku 1898 odkazoval na jinou Peanovu práci k axiomatizaci geometrie.

Hilbertův odklon od názoru však dle Blumenthala odvisel především od Hermanna Wienera (1857–1939) a jeho přednášky ze sjezdu německých přírodovědců roku 1891 v Halle.[18] Položil otázku, zda by nemohla být celá projektivní geometrie znovu vystavěna na zcela abstraktních axiomech, tedy těch odlišných od Eukleidových (či Paschových) empirických. Projektivní geometrie by se tak stala neintuitivní, abstraktní vědou.[19] Hilbert zde nabyl přesvědčení, že je matematicky nevýznamné, zda geometrické pojmy vycházejí z názoru či nikoliv, a že má smysl přemýšlet pouze o jejich spojení prostřednictvím axiomů.[20] Formalismus však byl ve vzduchu již minimálně od objevu neeukleidovských geometrií, neboť negace pátého postulátu, uvažovaná v důkazech jeho nezávislosti, neměla nic společného s názorem.[21]

4.5 Hilbertova činnost v geometrii před Grundlagen

Výtky k Eukleidovým *Základů* výše uvedeného druhu byly tím, co Hilbertovi ulehčilo práci při tvoření jeho axiomatizace geometrie.[22] Jeho činnost v oboru geometrie počínala vedením přednášek o geometrii projektivní v roce 1891 a o geometriích neeukleidovských v roce 1894. Výsledky svých výzkumů shrnul v dopise Kleinovi z téhož roku, kde Hilbert pojednával o úsečce jako nejkratší spojnici dvou bodů. Publikace tohoto dopisu z roku 1895 je zároveň Hilbertovou první prací z oboru geometrie [Hilbert 1895]. Po letech, kdy se věnoval teorii čísel, se ke geometrii vrátil v přednáškách v zimním semestru 1898/1899, a to nyní ke geometrii eukleidovské.[23]

[16] Pasch tímto termínem axiom, který je dnes uváděn častěji pod označením Weierstrassův axiom a který odpovídá Bolzanově-Weierstrassově větě o horní hranici (viz kap. 6.2).

[17] Viz ([Toepell 1986], s. 7).

[18] Poznamenejme, že v Halle měl řeč i Hermann Minkowski, poprvé zde užil termín *geometrie čísel* a zároveň zde pro prostor o třech dimenzích definoval svou slavnou větu o mřížkových bodech (viz kap. 6.6).

[19] Viz ([Blumenthal 1935], s. 402f), srov. ([Toepell 1986], s. 40ff). Oněmi novými větami jsou míněny projektivní věty o protnutí, Pascalova a Desarguova, jimž jsou i v *Grundlagen* věnovány samostatné kapitoly. Do této disertace však jejich výzkum nezahrnujeme (viz kap. 6).

[20] Viz tamtéž.

[21] Viz ([Blumenthal 1935], s. 403f; překlad s. 130).

[22] Viz ([Vopěnka 2003], s. 106).

[23] V dopise Adolfovi Hurwitzovi z 16. 3. 1898 se Hilbert vyjádřil, že kvůli tomu, že byla veškerá pozornost upřena na axiom o rovnoběžkách a příslušné geometrie neeukleidovské, byla eukleidovská geometrie zanedbávána, ač je s podivem, kolik nového v ní lze objevit. "[...] Man hat fast ausschliesslich das Augenmerk auf das Parallelenaxiom gerichtet und über der so entstandenen Nichteuklidischen Geometrie die Euklidische vernachlässigt [...] Es ist merkwürdig wie viel Neues da zu holen ist [...]" (Hilbert Hurwitzovi, 16. 3. 1898; Cod. Ms. Math. Arch. 76: 272). Srov. ([Toepell 1986], s. 116).

Kapitola 5

Hilbertův vliv na ostatní disciplíny

5.1 Kongres v Paříži, 1900

Ve své slavné přednášce na druhém Mezinárodním matematickém kongresu v Paříži v roce 1900 uvedl Hilbert 23 matematických problémů pro nadcházející 20. století. Jeho řeč měla velký vliv na pozdější tvorbu matematiků, i částečné řešení určitého problému přinášelo velkou prestiž a Hilbert tímto skutečně udal směr, kterým se matematika následně vyvíjela.[1]

Původně chtěl Hilbert v Paříži ale mít přednášku na jiné téma a hájit své pojetí matematiky proti tomu, které představil Poincaré na předchozím kongresu v Zürichu. V dopisech H. Minkowskému a A. Hurwitzovi se svých přátel zeptal na jejich názor v této věci. Minkowski mu v dopise z 5. 1. 1900 poradil, aby jako téma vybral pro mezinárodní publikum spíše pohled do budoucnosti matematiky.[2] Hilbert tedy změnil téma a Minkowskému poslal v červnu ke korekturám svůj článek s 23 matematickými problémy. V dopise z 22. 6. 1900 vyjadřil Minkowski ještě politování nad tím, že Hilbert jako předseda Německé matematické společnosti nebude moci mluvit na hlavní plénu, ale v sekci pro dějiny a metodu.[3] Hilbert měl přednášku dne 8. 8. 1900 a francouzský překlad textu přednášky nechal rozdat do publika ještě před přednáškou, což v té době ještě vůbec nebylo zvykem.[4]

Přednáška jako publikace vyšla ještě téhož roku 1900 nejdříve ve formě shrnutí v časopise *L'Enseignement Mathématique* [Hilbert 1900d], kompletně potom v *Göttinger Nachrichten* [Hilbert 1900]. Tato verze byla pojata jako vzor pro Laugelův překlad článku do francouzštiny, který byl uveřejněn ve sborníku ke kongresu [Hilbert 1900c]. To, že zde byl uveden již nikoliv v kapitole k sekci, kde skutečně proběhla, ale jako jedna z přednášek plenárních, naznačuje, jak patrný byl její historický význam již krátce po kongresu.

Plný text přednášky vyšel německy ještě jednou, a to roku 1901 v časopise *Archiv der Mathematik und Physik* [Hilbert 1900b], a tento byl pak přetištěn také v Hilbertových sebraných spisech [Hilbert 1900]. Tato verze byla oproti té z *Göttinger*

[1] Viz ([Grattan-Guinness 2000], s. 752). Dle I. Grattana-Guinesse to však mohlo být právě Hilbertovou přednáškou způsobeno: "The glamour that was to be bestowed on his selection may have distorted priorities somewhat in the development of mathematics during the twentieth century." ([Grattan-Guinness 2000], s. 757). Otto Blumenthal potvrzuje, že jejich výběr byl velmi osobní a "jen málo problémů pocházelo z obecného stavu matematiky nebo z kontextu problémů od jiných vědců." ([Blumenthal 1935], s. 405; překlad s. 131).

[2] Viz (Minkowski Hilbertovi, 5. 1. 1900; [Minkowski 1973], s. 119f).

[3] Viz (Minkowski Hilbertovi, 22. 6. 1900; [Minkowski 1973], s. 126f).

[4] Viz ([Blumenthal 1935], s. 426; překlad s. 144). Tento překlad se ale nedochoval.

Nachrichten na třech místech rozšířena. Ve 14. problému, který se týkal teorie invariantů a bezprostředně souvisel s Hilbertovou vlastní prací, rozšířil první odstavec a přiznal zde podíl A. Hurwitzovi.[5] Dále v této verzi rozšíří ještě problém č. 23 z oblasti variačního počtu, kam přidává citaci z učebnice A. Knesera,[6] a stejně tak problém č. 13 o řešitelnosti rovnice sedmého stupně citací článku M. Ocagneho.[7]

V předmluvě dával Hilbert obecný apel na dovedení řešení problémů až na úroveň axiomů. Jako vzor aritmetické teorie, operující s geometrickými pojmy a znaky s největší důsledností, uvádí Minkowského *Geometrie der Zahlen*.[8] Následuje popis jednotlivých matematických problémů. Grattan-Guinness jmenuje též oblasti, které jsou v ní pokryty velmi dobře: teorie čísel,[9] analýza (variační problémy č. 19, 20 a 23) a topologie.[10] Méně byla už zastoupena geometrie, především v problému č. 4 o úsečce jako nejkratší spojnici mezi dvěma body, tedy problému na totéž téma jako výše zmíněný vědecký dopis Kleinovi (viz kap. 6.6).

Velmi málo se naopak Hilbert věnoval numerické matematice. V oblasti teorie množin pak scházelo její napojení na matematickou analýzu.[11] Opomenuta zůstala dále teorie matic, matematická statistika a matematická logika. Tyto tři vědy, ač již běžné na matematické scéně, se ale v té době ještě obecně nevyučovaly a nevyskytují se ani v Kleinově encyklopedii věd. Na významu nabudou tyto vědy teprve ve 20. letech.

Zajímavá je situace na poli fyziky. Ačkoliv problém č. 6 už v názvu požadoval axiomatizaci celé fyziky, při popisu problému Hilbert neopustil oblast mechaniky. I tak zde ale scházel v té době významný problém tří těles, ač byl zmíněn v předmluvě.[12] Hilbert zcela vynechal i velmi populární oblast elektromagnetismu. Z celé přednášky byl také jen u tohoto problému zastoupen pravděpodobnostní počet, a to pouhou zmínkou v kontextu teorie plynů.[13]

O bezprostředních dojmech z kongresu psal Hilbert Hurwitzovi dne 25. 8. 1900: "Účast nebyla ani příliš hojná, ani příliš kvalitní,"[14] a jmenuje především francouzské matematiky, kteří se tohoto kongresu nezúčastnili. I Poincaré byl na kongresu přítomen jen velmi krátce. Poznamenejme, že paralelně s matematickým kongresem probíhal v Paříži mezinárodní kongres filosofů.[15] Peano tak navštívil i Hilbertovu přednášku. V následné diskuzi komentoval druhý Hilbertův problém axiomatizace aritmetiky a upozornil Hilberta na práce svých italských kolegů. Problém totiž již před tím řešil A. Padoa.[16] Mimo jiné se Peano na tomto kongresu také poprvé setkal s Bertrandem Russellem, který v té době pracoval v oblasti jazykovědy na tomtéž problému jako Peano, totiž vytvoření umělého univerzálního jazyka pro vědu. Russell si zde také od Peana vyžádal jeho práce, které ho inspirovaly ke zkoumání základů matematiky.[17]

---

[5] Viz ([Hilbert 1900], s. 315).

[6] Viz tamtéž, s. 324, 328.

[7] Viz tamtéž, s. 314.

[8] Viz tamtéž, s. 296.

[9] Např. problém č. 10 o řešitelnosti polynomů, viz [Poonen 2008].

[10] Viz ([Grattan-Guinness 2000], s. 757).

[11] Tímto odvětvím se však bude Hilbert sám zabývat v následujícím období své tvorby.

[12] Zabýval se jím např. H. Poincaré [Poincaré 1890], jehož článek recenzoval Minkowski [Minkowski 1890b].

[13] Viz ([Hilbert 1900], s. 306).

[14] "Der Besuch war nicht sehr stark weder in quantitativer noch in qualitativer Hinsicht." (Hilbert Hurwitzovi, 25. 8. 1900; Cod. Ms. Math.-Arch 76: 277/1).

[15] Za Göttingen se ho účastnil též Edmund Husserl.

[16] Viz ([Kennedy 2002], s. 28f), srov. ([Grattan-Guinness 2000], s. 755). Hilbert ale u tohoto problému neudělal v tištěné verzi své přednášky, která měla vyjít po Kongresu, žádné změny, na rozdíl od problémů jiných, jak uvedeno výše.

[17] Viz ([Vopěnka – Větrovcová 2015], s. 173f). Na Peanovu notaci z *Arithmetices principia* se odvolává i Russellův dopis Fregemu z 16. června 1902 [Russell 1902], kde se poprvé objevil Russellův paradox (viz kap. 5.2.2). Zároveň zde Russell zmínil, že o paradoxu již napsal též Peanovi.

5.2 Teorie množin

5.2.1 Peanova a Hilbertova křivka

V teorii množin došlo v průběhu osmdesátých a především devadesátých let devatenáctého století k uznání aktuálního nekonečna.[18] Z Berlína se především L. Kronecker v této souvislosti vyhraňoval proti velké části tehdejší matematiky, především proti teorii množin Georga Cantora (1845–1918), ale také proti snahám o aritmetizaci analýzy, neboť se v nich předpokládala existence aktuálně nekonečných množin.[19] Mladší matematici jako Minkowski či Hilbert byli naopak Cantorovi nakloněni (viz kap. 6.6).

Konkrétním problémem z této oblasti bylo zobrazení křivky na plochu, u kterého již existovala vzájemně jednoznačná řešení, avšak tato zobrazení nebyla spojitá.[20] První spojité zobrazení popsal v roce 1890 Giuseppe Peano v práci *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane* [Peano 1890], a to analyticky, formou iterujících funkcí.[21] Peano zároveň uvádí, že takto definovaná limitní funkce, ačkoliv všude spojitá, nemá nikde derivaci.[22] Výsledná *Peanova křivka* má díky svému meandrovému tvaru nekonečně mnoho dvojných bodů.[23] V oboru teorie množin byl Peanův článek velmi významný, neboť především ukázal, že zobrazit křivku na plochu spojitě je skutečně možné.

V návaznosti na tuto Peanovu práci podal Hilbert na sjezdu německých přírodovědců a lékařů v Brémách roku 1890 vlastní algoritmus pro vytvoření křivky, která vyplňuje část plochy. Publikoval jej o rok později v článku *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück* ([Hilbert 1891]; překlad viz s. 146).[24] Oproti Peanovi neuvedl výrazy pro zobrazovací funkce, ale algoritmus vysvětlil názornou, tj. geometrickou cestou:

> "[. . .] Křivku, kterou máme zobrazit, např. úsečku délky 1, rozdělíme nejdříve na čtyři stejné části 1, 2, 3, 4 a určitou část plochy, kterou budeme předpokládat v podobě čtverce o straně délky 1, rozdělíme dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři stejné čtverce 1, 2, 3, 4. Následně rozdělíme každou z úseček 1, 2, 3, 4 zase na čtyři stejné části, takže na původní úsečce dostaneme šestnáct úseček 1, 2, 3, . . . , 16. Současně rozdělíme každý ze čtyř čtverců 1, 2, 3, 4 zase na čtyři stejné čtverce a takto vzniklých šestnáct čtverců popíšeme následně čísly 1, 2, 3, . . . , 16, přičemž je však nutno zvolit takové pořadí čtverců, že se každý následující čtverec bude jednou stranou dotýkat čtverce předcházejícího.

[18] To souviselo i se založením Německé společnosti matematiků v roce 1891 ([Trlifajová 2001], s. 65).

[19] Viz ([Bedürftig – Murawski 2015], s. 78ff), srov. ([Hilbert 1909], s. 360).

[20] Poprvé u Cantora v roce 1878. (Viz ([Trlifajová 2001], s. 45ff).) E. Netto následně dokonce podal důkaz, že takové požadované zobrazení je nutně nespojité. Na spojitá zobrazení, která v dalším představujeme, se Nettův důkaz nevztahuje, neboť nejsou vzájemně jednoznačná.

[21] Pro konkrétní tvar viz ([Koudela 2013], s. 95ff) a též ([Hykšová 2001b], s. 235). Výsledné křivky jsou pak po něm pojmenovány jako *Peanovy křivky* nebo v limitě, která již vyplňuje celou plochu, jako *Peanova křivka*. Poznamenejme, že Peano odkazoval jak na Cantora, tak na Netta, ale také na francouzské matematiky Hermita a Jordana.

[22] Viz ([Peano 1890], s. 160). Křivka tak patří mezi tzv. patologické funkce. Vůbec první příklad takové spojité a nederivovatelné funkce podal Bernard Bolzano přibližně kolem roku 1832 ([Bolzano 1930], s. 76f). K této funkci srov. zprávy Martina Jaška (1879–1945), plzeňského středoškolského učitele, který ji v Bolzanově pozůstalosti objevil: [Jašek 1922a], [Jašek 1922b], [Jašek 1922c]. Pro matematické důkazy spojitosti a nederivovatelnosti Bolzanovy funkce viz [Jarník 1922], [Rychlík 1922]. Srov. současná literatura o Bolzanově funkci, např. ([Kůrka 2011], s.136f), k Jaškovi též srov. [Zeman 2016]. Nutno však připomenout, že Bolzanova funkce na rozdíl od Peanovy křivky plochu nevyplňuje.

[23] Viz ([Poincaré 2010], s. 92).

[24] Na Peana zde také Hilbert explicitně jako jediného odkazoval, avšak vyjma závěrečné poznámky o Weierstrassovi (viz níže) jen na něj.

> Uvážíme-li pokračování tohoto postupu [. . .] lze snadno nahlédnout, jak lze každému danému bodu úsečky přiřadit jeden jediný konkrétní bod čtverce."[25]

Toto zobrazení je jednoznačné a spojité a Hilbert k němu udává i zajímavou interpretaci z mechaniky, že totiž pohybující se bod může projít všemi body čtverce v konečném čase. V tomto duchu se vyjadřuje i Minkowski, když v dopise z 22. 12. 1890 reaguje na Hilbertovu přednášku takto:

> "Nedávno jsem přemýšlel o Vaší přednášce na sjezdu přírodovědců. [. . .] Co vlastně máte proti onomu principiálně jednoduššímu příkladu, kdy je čas, jdoucí od 0 do 1, vyjadřován desetinným rozvojem a pouze se ze sudých a lichých pozic vytvoří dva další desetinné rozvoje, které budou potom vyjadřovat pravoúhlé souřadnice bodu v onen konkrétní čas. Spojitost pohybu je zde přece zaručena ve zcela stejném smyslu."[26]

Minkowski zde tedy v podstatě opakuje Cantorův důkaz z roku 1877, uvedený původně v dopise Dedekindovi[27] a poté ve článku z téhož roku, avšak jen krátce na konci, aby poukázal na jeho úskalí.[28] Cantor se v tomto původním důkazu snaží postupem uvedeným v Minkowského dopise vzájemně zobrazit pouze nekonečné desetinné rozvoje, a tedy iracionální čísla (jak pro původní úsečku, tak v souřadnicích čtverce). Některá iracionální čísla na úsečce, ty s periodou $\overline{0c}$ nebo $\overline{c0}$, kde c je číslice, se však potom zobrazí do bodu čtverce, jehož jedna souřadnice bude racionální. To Cantor vylučuje i proto, že se do téhož bodu čtverce zobrazi i perioda $\overline{c9}$ nebo $\overline{9c}$,[29] Minkowskému to však v jeho interpretaci nevadilo. Komentuje následně představu bodu, pohybujícího se všemi body čtverce, podobně, jako v případě Hilbertových křivek. Cantor se na rozdíl od Minkowského nevyjadřuje v časových a pohybových analogiích, už jen proto, že jeho bod by neprošel místy s racionálními souřadnicemi.

Že se Minkowski teorii množin ve svých výzkumech věnoval, dokazuje také následující dopis Hilbertovi z roku 1891 (viz kap. 6.6). Ve vzpomínkové řeči Hilbert píše, že Minkowski byl prvním matematikem jeho generace, který rozeznal Cantorův význam, a že Hilbert jej v tomto podporoval. V tomto kontextu píše Blumenthal

[25]"Die abzubildende Linie – etwa eine Gerade von der Länge 1 – theilen wir zunächst in 4 gleiche Theile 1, 2, 3, 4 und das Flächenstück, welches wir in der Gestalt eines Quadrates von der Seitenlänge 1 annehmen, theilen wir durch zwei zu einander senkrechte Gerade in 4 gleiche Quadrate 1, 2, 3, 4. Zweitens theilen wir jede der Theilstrecken 1, 2, 3, 4 wiederum in 4 gleiche Theile, so dass wir auf der Geraden die 16 Theilstrecken 1, 2, 3, . . . , 16 erhalten; gleichzeitig werde jedes der 4 Quadrate 1, 2, 3, 4 in 4 gleiche Quadrate getheilt und den so entstehenden 16 Quadraten werden dann die Zahlen 1, 2, 3, . . . , 16 eingeschrieben, wobei jedoch die Reihenfolge der Quadrate so zu wählen ist, dass jedes folgende Quadrat sich mit einer Seite an das vorhergehende anlehnt. Denken wir uns dieses Verfahren fortgesetzt, [. . .] , so ist es leicht ersichtlich, wie man einem jedem gegebenen Punkte der Geraden einen einzigen bestimmten Punkt des Quadrates zuordnen kann." ([Hilbert 1891], s. 459f; překlad viz s. 146). Poznamenejme, že algoritmus je součástí výuky programování na VŠ a demonstruje se na něm využití rekurze.

[26]"Jüngstens habe ich einmal über Ihren Vortrag auf der Naturforscherversammlung nachgedacht. [. . .] Was haben Sie eigentlich gegen das doch principiell einfachere Beispiel, dass man die von 0 bis 1 gehende Zeit fortwährend als Decimalbruch darstellt und aus den geraden und ungeraden Stellen allein zwei andere Decimalbrüche bildet, die nun die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes zu betreffenden Zeit ausdrücken sollen. Die Stetigkeit der Bewegung ist doch hier in genau demselben Sinne gewahrt." (Minkowski Hilbertovi, 22. 12. 1890; [Minkowski 1973], s. 41f).

[27]Viz ([Koudela 2013], s. 90).

[28]Článek se zabývá novým a zcela odlišným důkazem, využívajícím řetězové zlomky a dokazující ekvivalentnost jednorozměrného a n-rozměrného kontinua, a přitom nejen iracionálních čísel, ale už též všech čísel reálných. (Viz [Trlifajová 2001], s. 45f). Na tento článek také Peano po dvanácti letech odkazuje. Pokud Hilbert tento Cantorem vytvořený, avšak také odmítnutý, a Minkowskim znovu připomenutý důkaz neznal již před tím, mohl jej na základě tohoto odkazu najít snadno a mít jej na paměti již před psaním svého vlastního článku.

[29]Spíše než o zobrazení křivky (úsečky) na čtverec mu jde o důkaz toho, že čtverec, potažmo libovolný n-rozměrný útvar, má mohutnost kontinua, a nikoliv větší (Viz [Trlifajová 2005], s. 201).

na základě osobních hovorů s Hilbertem, jednak že Hilbert v mládí obdivoval Cantorovu teorii množin a Dedekindovu *Was sind und was sollen die Zahlen?*, a jednak že byl Hilbert pyšný na to, že Königsbergská škola se jako první zabývala aplikacemi Kroneckerem zamítnuté Cantorovy teorie množin.[30]

V kapitole 3.1 jsme se zmínili také o Minkowského přednášce na téma aktuálního nekonečna v přírodě, přednesenou v Königsbergu v roce 1895.[31] Minkowski v probíraném dopise píše, že dovětek "v přírodě" uvedl pro efekt, a k tomuto tématu se vztahovaly pouze jím vytvořené, vlastní popularizační příklady. K tomu však nutno podotknout, že termín aktuální nekonečno v přírodě stvořené (*in natura naturata*) bylo u Cantora termínem. Toto aktuální nekonečno lze totiž přesto zvětšovat, na rozdíl od aktuálního nekonečna *absolutního*.[32] Uvedl přitom také především Cantorovy věty, které se týkaly obecnějších témat. Především však Minkowski hovořil o poloze bodů v prostoru.[33] Hlavní Minkowského výsledky v topologii však pochází až z pozdější doby po roce 1900: Minkowského suma[34], Minkowského míra[35] a Minkowského věty o rekonstrukci konvexní množiny z bodů extrémů[36].

Zobrazení inverzní, tvrdí Hilbert, přiřadí každému bodu čtverce 1, 2 nebo 4 body úsečky, tj. je nejvýše trojznačné.[37] Nakonec Hilbert v článku poznamenává, že zobrazovací funkce jsou v každém svém bodě spojité a lze je tedy podle Weierstrassovy věty rozvinout do nekonečných řad, na celém intervalu stejnoměrně konvergujících, s krokem délky celé racionální funkce.[38] Zároveň nejsou tyto funkce nikde derivovatelné.[39]

Není jasné, jak se k tématu Hilbert dostal, neboť v tomto období soustavně pracoval na jiném tématu, totiž v teorii invariantů. Je možné, že byl jen krátce ohromen

[30] Viz ([Blumenthal 1935], s. 391, 421; překlad s. 123, 141) Dedekindův spis vyšel v roce 1888, Hilbertovo seznámení se s Cantorovu teorií množin je tedy vskutku možné datovat až do té doby. Blumenthal přitom již v následující větě zmiňuje článek o Hilbertových křivkách a ač to z jeho vyjádření není příliš zřetelné, musel mít tento článek na mysli jako konkrétní příklad jedné takové rané aplikace teorie množin, konkrétně onoho zmíněného Cantorova důkazu, že mohutnost n-rozměrného útvaru je rovna mohutnosti kontinua z článku z roku 1878, na který, jak jsme uvedli, odkazuje i Peano. Tato Blumenthalova věta je tedy argumentem pro to, že Hilbert svými křivkami spíše směřoval ke Cantorovým mnohem starším úvahám o kontinuu, nikoliv že pouze reagoval na Peanův článek podáním názorné verze křivek Peanových.

[31] Svědčí o ni Hilbertova vzpomínková řeč ([Hilbert 1909], s. 360) a dopis Hilbertovi z 1. července 1895 ([Minkowski 1973], s. 67f). Minkowski v něm odpovídá, že slovo aktuální nekonečno (*Aktual-Unendliche*) převzal z jednoho Cantorova článku. Že by jej Hilbert neznal a v předchozím dopise se ptal Minkowského na jeho význam a původ? Bez ztracené Hilbertovy korespondence se to nedozvíme.

[32] Viz [Trlifajová 2001], s. 78f.

[33] Constance Reidová píše, že na Hilbertovu pobídku měl Minkowski dokonce i univerzitní přednášky k teorii množin, které si mohl dovolit teprve nyní, když byl řádným profesorem ([Reid 1970], s. 50). Je možné, že tímto komentovala probíraný dopis, udělala chybu při překladu a zaměnila jednorázovou přednášku (*Vortrag*), o níž píše Minkowski v dopise i Hilbert ve vzpomínkové řeči, s přednáškami univerzitními (*Vorlesungen*) a podmínku prestižní pozice řádného profesora chybně dovodila. Taktéž ona Hilbertova pobídka k Minkowského činnosti v teorii množin není zmíněna v relevantních materiálech ([Hilbert 1909], s. 360), ([Minkowski 1973], s. 68), ([Blumenthal 1935], s. 391). Oproti tomu je v memoárech Kowalewského uvedeno, že v tomto období učil Minkowski vyšší algebru a úvod do teorie čísel, kde však přesto v rámci představování svých hlavních vět o mřížkových bodech kladl velký důraz na zahrnutí nekonečna ([Kowalewski 1950], s. 26).

[34] Viz [Tomiczková 2006].

[35] Včetně související Minkowského–Bouliandovy dimenze. Viz ([Koudela 2013], s. 172, 193f).

[36] Viz ([Netuka 2011], s. 53).

[37] Minkowski však ve stejném dopise vyjadřuje pochybnost a neví, proč by určitým bodem čtverce měl pohybující se bod projít více než dvakrát: "Sind Sie sicher, daß bei der von Ihnen angegebenen Bewegung eines Punktes in einem Quadrat der Punkt manche Stellen zu drei verschiedenen Zeiten passirt. Mir will es scheinen, als ob er nirgends mehr als zweimal hinkommt." (Viz tamtéž). Pravdu měl však Hilbert, jak dokázal Sierpinski ([Sierpinsky 1912], s. 210).

[38] Srov. ([Kůrka 2011], s. 145). Jelikož v Hilbertově článku scházela analytická vyjádření oněch zobrazovacích funkci, učinil tuto poznámku pravděpodobně proto, aby podtrhl, že kdyby je někdo požadoval, bylo by je možné najít.

[39] Viz pozn. 22.

překvapivým Peanovým výsledkem. V Hilbertově tvorbě šlo o ojedinělý článek a dále na něj nenavazuje. Naráží na něj jen na prázdninovém kurzu pro učitele 1898 (FK) při zmínce o axiomech uspořádání, když tvrdí, že je možno body čtverce uspořádat zobrazením na přímku.[40] Jak dále uvádí, Archimédův axiom (originální tvar, viz kap. 6.2) nebude např. při tomto uspořádání v platnosti, neboť vyžaduje jednodimenzionalitu přímek. V *Grundlagen* tyto poukazy vymizely a zbylo už jen holé konstatování, že Archimédův axiom je axiomem lineárním.[41] O vlivu *Peanových křivek* a navazujícího Hilbertova článku na *Grundlagen* mluvit nelze. Teorii množin v kontextu geometrie se Hilbert nicméně ještě jednou věnoval v článku [Hilbert 1902], uvedeném v *Grundlagen* jako 4. příloha, a to jako jeden z průkopníků topologického založení geometrie.[42] Tématu *Peanových křivek* se pak na začátku 20. století věnovali např. Moore, Lebesgue, Hausdorff či Sierpinsky.[43]

5.2.2 Paradoxy a další vývoj po Grundlagen

V roce 1902 našel Bertrand Russell paradox v teorii množin, když se ptal po množině všech množin, jež nejsou prvky samy sebe.[44] Richard Dedekind a Gottlob Frege následně stáhli svá dřívější díla ([Dedekind 1888] a [Frege 1893]), neboť se v nich uvažovalo nyní neplatným způsobem.[45]

Axiomatická metoda se následně prosazuje i v teorii množin, jejíž axiomatizaci podal jako první Ernst Zermelo v roce 1908 [Zermelo 1908b]. V ní se vyhne paradoxům a zachová přitom v té době obecně používané způsoby důkazu. Tato práce, která obsahuje i slavný axiom výběru, nebyla ihned přijata a např. Felix Hausdorff se na ni ještě v roce 1914 odkazuje jako na rozpracovaný článek.[46] Na druhou Zermelovu verzi důkazu dobře uspořádaných množin [Zermelo 1908a] se v kontextu nekonzistentnosti Cantorových alefů (nekonečných kardinálů) odkazují pozdější vydání Hilbertových *Grundlagen der Geometrie* v příloze *Über den Zahlbegriff*.[47]

5.3 Aritmetika

5.3.1 Logicisté a axiomatizace přirozených čísel

Axiomatiku přirozených čísel měli již zástupci proudu logicismu. G. Frege usiloval v dílech *Die Grundlagen der Arithmetik* z roku 1884 [Frege 1884] a *Grundgesetze der Arithmetik begriffsschiftlich abgeleitet* z roku 1893 [Frege 1893] o převedení aritmetiky na logiku, tj. poznání pravidel logického kalkulu (zákonů pravdivosti, axiomů logiky) včetně možnosti jejich následného uplatnění v aritmetice. Přetrvala však především axiomatizace přirozených čísel G. Peana z díla *Arithmetices principia, nova methodo exposita* z roku 1889 [Peano 1889a].[48]

Dle Bedürftiga a Murawského měly výše uvedené Peanovy a Fregovy axiomatizace přirozených čísel poskytnout jistotu pro předešlé pokusy Karla Weierstrasse

[40] Viz ([Toepell 1986], s. 123). Následně uvádí, že je možné i jiné uspořádání, a to např. podle principu: $x + iy < x' + iy'$ platí, buďto pokud $y < y'$ nebo pokud $y = y'$ a zároveň $x < x'$.

[41] Viz ([Hilbert 1899], s. 31, překlad, s. 75).

[42] Poznamenejme, že to bylo čtyři roky před pro tento obor konstitutivním článkem M. Frécheta (viz [Vopěnka – Větrovcová 2015], s. 15).

[43] Viz ([Koudela 2013], s. 99f).

[44] Fregemu o něm referoval v dopise z června 1902 ([Russell 1902], s. 124). Paradox publikoval o rok později [Russell 1903].

[45] Viz ([Bernays 1970], s. 199).

[46] Viz ([Epple 1999], s. 406).

[47] Viz ([Hilbert (Zahlbegriff) 1900], s. 242).

[48] Originální axiomatizaci, ale zcela analogickou tomuto dílu Peanovu, nalezneme v díle *Was sind und was sollen die Zahlen?* Richarda Dedekinda z roku 1888 [Dedekind 1888]. Podotkněme, že v něm navazoval na svou předchozí práci z roku 1872 [Dedekind 1872], ve které definoval čísla reálná pomocí tzv. řezů (viz kap. 6.2).

(1815–1897) či Richarda Dedekinda o aritmetizaci analýzy, tj. v konečném důsledku založení pojmu reálného čísla na číslech přirozených.[49]

Peano pak ve svém následujícím díle *Formulario matematico* (v pěti dílech mezi lety 1895 a 1908) hodlal založit na logice již celou matematiku. stejný záměr měl i B. Russell ve svém prvním díle *Principles of Mathematics* z roku 1903 [Russell 1903]. V následující knize *Principia Mathematica* od Russella a Whiteheada [Russell – Whitehead 1910] se již podařilo vyhnout se paradoxům.

5.3.2 Opozice Poincarého

V souboru článků z let 1905 až 1906 polemizuje Henri Poincaré (1854–1912) s Louisem Couturatem (1868–1914), který obhajuje dosavadní úspěchy logicistů (logistiky), výslovně axiomatizaci aritmetiky Giuseppe Peana a novou logiku Bertranda Russella. Oba systémy vynucovaly pokaždé, aby byly vyřčeny i všechny předpoklady, které matematici považovali za samozřejmé. Poincaré v tomto kontextu oponuje Couturatovu názoru o výhodách logiky a píše, že kromě jistoty již další větší výhody nepřinesla a matematiky pouze zdržuje. Jako příklad v návaznosti na Peanovo *Formulario* uvádí, že bylo nutno 27 rovností pro zjištění toho, že 1 je číslo.

Co se týká Peanovy aritmetiky, považuje Couturat její axiomy za *skryté definice*[50] nuly, následníka a přirozeného čísla. Poincaré oponuje, že k tomu, aby se dokázala jejich existence, je nutné dokázat bezespornost těchto definic, a to pomocí axiomu úplné indukce, který je ale právě jedním z právě dokazovaných Peanových axiomů. Nejdříve tedy tvrdí, že důkaz bezespornosti není možný. To i Couturat ve svém následujícím článku uzná, označí však Poincarého požadavek tohoto důkazu za nadbytečný. Jednotliviny se dle Couturata pokládají už od začátku za existující a vždy náleží nějaké existující třídě. Poincaré v následujícím článku oponuje, že i kdyby uvedená jednotlivina v Couturatově pojetí existovala od začátku, stejně bychom museli dokázat, že tvrzení, že do zmíněné třídy přísluší, není v rozporu samo se sebou a s dalšími přijatými axiomy. Důkaz bezespornosti by byl tedy nutný tak jako tak. Oproti svému předchozímu článku však nyní Poincaré uvádí, že takový důkaz možný je, musíme ale axiom úplné indukce pokládat nikoliv za skrytou definici, ale za syntetický apriorní soud.

Podobné problémy jako v Peanově aritmetice se při zavedení čísla vyskytují i v Russellově logice. Russell chtěl dokázat, že všechny věty matematiky jsou analytické. Poincaré ukazuje, že Russellovy nedokazatelné principy jsou syntetické apriorní soudy a vyžadují tedy akt intuice, což v tomto případě Russell i Couturat potvrzují. Dle Poincarého je však chybné jejich tvrzení, že poté se dá již celá matematika odvodit zcela analyticky a dokazuje to na příkladech vět, ve kterých Russell používá pojem čísla, aniž by bylo zavedeno. Jeho logika tak není na pojmu čísla nezávislá a aritmetiku nepředchází.

5.3.3 Hilbertova axiomatizace čísla reálného

Během 19. století došlo k uznání komplexních čísel a zároveň se vyskytl problém, jak vybudovat čísla reálná. Hilbert vytvořil svůj vlastní systém axiomů pro reálná čísla v přednášce *Über den Zahlbegriff* a následném článku, vydaném roku 1900. Analogicky ke geometrii byla množina reálných čísel v Hilbertově pojetí pouze systémem věcí, který je sám o sobě prázdný a je definován teprve uzavřeným systémem axiomů.[51] Opět však musí být dokázána bezespornost aritmetiky, tedy že z takového

[49] Viz ([Bedürftig – Murawski 2015], s. 78ff).

[50] Poincarého termín, stejně jako jeho často zmiňované synonymum *konvence*. Oba poprvé zavedl v roce 1891. Pro vysvětlení viz kap. 6.1.

[51] Historik William Ewald napojuje v případě aritmtetiky tento Hilbertův formalismus na předchozí pokusy o syntaktickou teorii algebry. Ta byla následně používána např. i k ospravedlnění

systému axiomů nelze odvodit dvě věty, které budou vzájemně ve sporu. Ačkoliv byla tato bezespornost aritmetiky mezi matematiky uznávána, rigorózní důkaz se Hilbertovi nepodařilo najít a na Kongresu v Paříži stanovil jeho nalezení za druhý problém pro 20. století. Hilbert píše:

> "Kdyby se podařilo zcela dokázat bezespornost axiomů, ztratily by námitky, které byly doposud proti existenci pojmu reálných čísel vzneseny, jakékoliv opodstatnění."[52]

Píše, že by to mohlo být provedeno poměrně snadnou modifikací dosavadních postupů. To se však ukázalo jako liché poté, co byly objeveny paradoxy teorie množin (viz kap. 5.2.2).

5.3.4 Hilbertova Zahlbericht, zpráva o vývoji teorie čísla, 1897

Na sjezdu Německé matematické společnosti v roce 1893 byl Davidu Hilbertovi, společně s Hermannem Minkowskim, přidělen úkol, podat zprávu o aktuálním stavu poznání v oblasti teorie čísel v kontextu ostatních oborů matematiky. Minkowski měl na tomto poli už tehdy své zásluhy, ačkoliv však v Bonu, kde působil, postrádal vědecké zázemí. Jeho část měla být o racionálních číslech a Hilbertova část o číslech algebraických. Hilbert tedy do svého pojednání zahrne vše, co bylo o teorii čísel napsáno od konce 18. století, aritmetickou tradici Gausse, Kroneckera a Jacobiho, algebraickou Galoise a Riemanna a nové pojetí čísla Weierstrasse a Cantora.[53] Minkowski píše svůj text pomaleji a chce tedy odložit vydání své části o rok, aby měl čas rozšířit referát o nové objevy, které neměl dosud precizně dokázané. V dopise z února roku 1896 přistupuje na oddělené vydání své a Hilbertovy části.[54]

Nakonec bude vydána jen Hilbertova část, a to v dubnu 1897 pod názvem *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* [Hilbert 1897], ale v matematické komunitě se ujme zkrácený název *Zahlbericht*. Zpráva je matematiky velmi ceněna, i Minkowski píše v dopise Hurwitzovi: "Hilbertův referát o algebraických číselných tělesech, na jehož korekturách se podílím, je skvělý a významně přispěje k povědomí o této oblasti."[55] Hilbert ve zprávě totiž podal velmi srozumitelně nové složité výsledky Ernsta Eduarda Kummera (1810–1893). Kromě shrnutí aktuálního stavu oborů algebraické geometrie a topologie Hilbert též oba obory obohatí o své nové poznatky. *Zahlbericht* bude pro pozdější významné osobnosti vědce, např. E. Artina, H. Weyla, či H. Hasseho, prvním uvedením do teorie čísel.[56]

---

komplexních čísel, teorie diferenciálních operátorů či algebraické logiky. ([Ewald 2006], s. 1090).

[52]"In der Tat, wenn der Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der Axiome völlig gelungen sein wird, so verlieren die Bedenken, welche bisweilen gegen die Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen gemacht worden sind, jede Berechtigung." ([Hilbert 1900], s. 301).

[53]Viz ([Vopěnka – Větrovcová 2015], s. 203).

[54]"Ich gehe also auf Deinen zweiten Plan ein mit der Wirkung, dass mein Theil erst in den nächstjährigen Bericht aufgenommen wird." (Minkowski Hilbertovi, 10. 2. 1896; [Minkowski 1973], s. 77ff). Originál tohoto dopisu přetištěn též v ([Minkowski 1989], s. 227).

[55]"Hilberts Referat über die algebraischen Zahlkörper, von dem ich die Correcturen mitlese, ist ganz ausgezeichnet und wird zur Hebung der Kenntnissen dieses Gebiets ausserordentlich beitragen." (Minkowski Hurwitzovi, 11. 5. 1896; [Minkowski 1989], s. 231).

[56]Viz ([Ewald 2006], s. 1088).

5.3.5 Aritmetizace

Kromě axiomatizace byla na konci 19. století často skloňovaným slovem aritmetizace. Mluvíme-li o aritmetizaci určitého oboru, můžeme mít na mysli tři různé významy:

- Aritmetizace analýzy (reálných čísel): jejich vybudování prostřednictvím přirozených nebo racionálních čísel (např. v Dedekindových řezech),[57]
- Aritmetizace jako použití matematické indukce (v důkazech nebo např. v samotné definici přirozených čísel prostřednictvím Peanových axiomů),
- Aritmetizace geometrie prostřednictvím nalezení vhodného aritmetického modelu, který bude splňovat axiomy geometrie. Hilbert se vyjadřuje takto:

  > "Aritmetizace geometrie pramení z moderních výzkumů neeukleidovské geometrie, ve kterých se jedná o její přísně logickou výstavbu a co nejpřímější a zcela bezproblémové zavedení čísla do geometrie."[58]

Aritmetizace geometrie vedla Hilberta také k zavedení zobecněných spojitých pojmů, jako např. přímka, na podkladě diskrétního číselného oboru (viz kap. 6.8).

5.4 Logika

Řešení třetí krize matematiky, způsobené paradoxy teorie množin, vyžadovalo změny v samotné logice. Hilbert se této otázce věnuje poprvé na kongresu v Heidelbergu roku 1904. Kromě jeho axiomatické metody se objevily další dvě alternativní řešení. Russell vytvořil vlivnou teorii logických typů [Russell – Whitehead 1910],[59] podle níž všechna tvrzení určité matematické teorie musejí být stejného logického typu, aby se předešlo antinomiím. Druhou možností bylo zavedení intuicionistické logiky.[60]

5.4.1 Hilbertova přednáška v Heidelbergu z roku 1904 a matematický formalismus

Krátce po vydání *Grundlagen der Geometrie* se s Hilbertem na téma existence objektů, stanovených axiomy, přel logicista Gottlob Frege (1849–1915).[61] Hilbert držel stanovisko, že matematika je dána nezávisle na logice a vyžaduje některé matematické objekty, které leží mimo logiku. Ty je nutné postulovat a v axiomech, tj. jejich implicitních definicích, uvést všechny požadované vlastnosti.

O rok později pak Hilbert vyslovuje na kongresu v Paříži v rámci svého druhého problému požadavek důkazu bezespornosti aritmetiky. Hilbertovo následné zkoumání možnosti tohoto důkazu převodem na logiku aktivoval dle Paula Bernayse

[57] Viz např. ([Kůrka 2011], s. 137f).

[58] "Die Arithmetisierung der Geometrie vollzieht sich durch die modernen Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie, in denen es sich um eine streng logischen Aufbau derselben und um die möglichst direkte und völlig einwandfreie Einführung der Zahl in die Geometrie handelt." ([Hilbert 1897], s. 66).

[59] Srov. ([Holeček 2014], s. 81).

[60] Poznamenejme, že stejně jako článek o Hilbertových křivkách z roku 1891 dokazoval Hilbertův brzký zájem o teorii množin, tak lze dle Blumenthala na počátku devadesátých let najít i počátky Hilbertova transfinitního myšlení a jeho zájmu o logiku a teorii důkazu, konkrétně v jeho pracech k teorii invariantů (viz [Blumenthal 1935], s. 395; překlad, s. 125). Hilbert sám se však v Blumenthalem uvedeném citátu vyjadřuje pouze o nemožnosti podání jistého důkazu konečným počtem úsudků. Blumenthal dále píše, že i v *Zahlbericht*, tj. kolem roku 1896, se Hilbert snažil o to, aby se dle Kroneckerových pokynů vyhnul nejen nekonečným pojmům, ale i nekonečným postupům v důkazech (viz [Blumenthal 1935], s. 421; překlad, s. 141).

[61] [Dubucs 1992], viz ([Epple 1999], s. 407), srov. ([Bedürftig – Murawski 2015], s. 98).

objev Russellova paradoxu.[62] To je zároveň zaznamenáno v korespondenci s Hurwitzem. Hurwitz v dopise z května 1903 komentuje 2. vydání *Grundlagen* a chválí Hilberta, že otevřel nezměrné pole matematického výzkumu, které daleko přesahuje hranice geometrie a mohlo by nést označení "matematika axiomů".[63] Ve své odpovědi z 25. 8. 1903 píše Hilbert, že jen aplikace podobného postupu jako v *Grundlagen* na celou logiku zamezí podobným sporům, jako v případě Russellova paradoxu.[64]

Obě uvedené pohnutky vedly Hilberta k přednášce *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* [Hilbert 1904] na třetím mezinárodním kongresu matematiků v Heidelbergu v roce 1904.[65] Hilbert požaduje, aby ani jeden z obou oborů nebyl zahrnován pod druhý, ale aby se usilovalo o jejich paralelní rozvoj.[66] Dále navrhuje obrat od sémantiky k syntaxi a výzkum matematických důkazů jako samostatného objektu.[67] Prostředkem má být převod matematického důkazu do symbolismu logiky. Hilbert dokazuje bezespornost formulí, bezprostředně odvoditelných z daného systému axiomů, podle toho, zda jsou v jistém smyslu invariantní. Pokud ano, budou tyto formule bezesporné a naopak, pokud budou formule obsahovat spor, nebudou vykazovat zmíněnou invarianci.[68]

V tomto Hilbertovým obrácením pozornosti k důkazu samotnému je možno vidět počátek matematického formalismu, ačkoliv celkově proces formalizace vědy probíhal již nějaký čas.[69] Petr Vopěnka jej přitom představil spíše v kontextu teorie než formalizace důkazu:

> "[Formalismus se řídí třemi] zásadami:
>
> 1. Otázce, zda nějaké tvrzení (týkající se nadto nekonečných množin) je či není pravdivé, matematický formalismus žádný hlubší smysl nepřikládá.
> 2. Matematický formalismus klade pouze otázku, zda to či ono tvrzení je z daných axiomů dokazatelné nebo nedokazatelné (neboli zda jeho negace je s těmito axiomy bezesporná a lze ji tedy k nim přidat jako dodatečný axiom).
> 3. Osvědčenou metodou na prokázání bezespornosti nějakého tvrzení s danými (rozumí se bezespornými) axiomy je vytvoření modelu teorie o těchto axiomech (nejlépe opět v této teorii), v němž navíc platí tvrzení, jehož bezespornost s těmito axiomy chceme prokázat."[70]

[62]Viz ([Bernays 1970], s. 199).

[63]Viz (Hurwitz Hilbertovi, 8. 6. 1903; Cod. Ms. D. Hilbert 160: 60). Dopis otištěn v ([Toepell 1986], s. 257). Jediné Hilbertovo použití axiomaticko-deduktivní metody v jiném oboru bylo přitom zatím stále jen to na reálná čísla *Über den Zahlbegriff* z roku 1900 [Hilbert (Zahlbegriff) 1900], vícero požadavků na podobné axiomatizace padlo v přednášce na kongresu v Paříži téhož roku.

[64]Poté, co Hilbert v dopise paradox stručně popsal, uvedl: "Es scheint mich da ein Fall vorzuliegen, wie man durch Anwendung der üblichen Regeln der überlieferten Logik zu einem Widerspruch in sich gelangt und ich glaube, dass man diesen Widerspruch und gewisse weitere Fragen nach der Existenz gewisser Begriffe in befriedigender Weise nur lösen kann, wenn man die Logik von Anfang an streng "nach der axiomatische Methode" ähnlich wie die Geometrie aufbaut. Ob ich freilich dazu komme, das alles selbst zu thun, glaube ich kaum [. . .]" (Hilbert Hurwitzovi, 25. 8. 1903; Cod. Ms. Math. Arch. 76: 288).

[65]To dokazuje i tento citát z přednášky: "[Frege] neklade však žádná omezení na pojem "každý", čímž se vystavuje těm teoreticko-množinovým paradoxům, které spočívají například v pojmu množiny všech množin a které ukazují, že používání logiky v běžném smyslu není sto vyhovět přísným požadavkům kladeným teorií množin." ([Hilbert 1904], s. 244).

[66][Hilbert 1904]; srov. ([Trlifajová 2011], s. 96f, 99f), dále též ([Vopěnka – Větrovcová 2015], s. 204) a ([Epple 1999], s. 403, 410).

[67]Poukazuje přitom na rozdíl mezi geometrií a aritmetikou ve smyslu převoditelnosti geometrie na aritmetiku ale nepřevoditelnosti aritmetiky při důkazu bezespornosti.

[68]Viz ([Blumenthal 1935], s. 422).

[69]Srov. ([Vopěnka – Větrovcová 2015], s. 204).

[70]Viz ([Vopěnka 2004], s. 711).

Hilbert však po této přednášce na kongresu v Heidelbergu z roku 1904 v reakci na kritiku prozatím od těchto myšlenek ustupuje, seznamuje se s doposud vytvořenými logickými kalkuly, aby posléze mohl logické úsudky formalizovat. K tématu se vrátí až ve dvacátých letech.

5.4.2 Opozice Poincarého

V již výše uvedené při s Couturatem (viz kap. 5.3.2) se Poincaré vyjadřuje i k Hilbertově přednášce z Heidelbergu, ač Couturat již Hilberta za logicistu nepovažuje. Hilbert klade na rozdíl od Russella požadavek, aby se logika vyvíjela s aritmetikou paralelně. Poincaré však dokazuje, že i v Hilbertově logice je číslo použito dříve, než je zavedeno, a to ve dvou významově odlišných případech, jednak přímo v axiomech[71] a jednak v důkazu bezespornosti při následující úvaze: Za proměnnou lze u tohoto důkazu dosadit pouze kombinace symbolů 1 a = bez standardního významu. Jejich skryté definice mají být uvedeny v axiomech, které proto na rozdíl od logiky Russellovy vyžadují důkaz bezespornosti. Hilbert se v něm snaží vyhnout použití axiomu úplné indukce. Zjišťuje, že na spor nenarazí pokaždé v konečném počtu kroků. Poincaré však zmiňuje, že zde používáme pojem konečného čísla. Jak jej lze definovat? Jednou možností by byla skrytá definice v axiomu indukce, což není možné, neboť by to znamenalo definici kruhem. Druhou možností je definovat jej rekurentně za předpokladu, že axiom úplné indukce nebudeme pokládat za skrytou definici konečného čísla, ale za apriorní syntetický soud. Tuto druhou možnost, která by dle Poincarého byla jediná korektní, však Hilbert neuvedl, a dle Poincarého tak rekurentní uvažování nerozpoznal. Ani Hilbertova logika tak dle Poincarého nepřispěje k důkazu, že definice přirozeného čísla prostřednictvím axiomu úplné indukce neimplikuje kontradikci.

V oblasti geometrie však Poincaré axiomy, které se bezprostředně neváží na aritmetiku, za skryté definice považuje a s logicisty fakticky není ve sporu.[72] Souhlasí s Couturatem v tom, že se v geometrii použití axiomu indukce v takové míře nevyskytuje, ale nesouhlasí s jeho výrokem, že se nevyskytuje vůbec. Upozorňuje, že se o něj opírá i Hilbert v důkaze bezespornosti svých geometrických axiomů, byť přes svůj aritmetický model. A axiom indukce bude muset být použit vždy, i při důkazu bezespornosti jakéhokoliv jiného systému, neboť možných důsledků axiomů je nekonečně mnoho.

5.4.3 Opozice intuicionistů

Programem intuicionismu, který od roku 1907 budoval významný holandský matematik Luitzen Egbert Jan Brouwer (1881–1966), bylo vyhnout se paradoxům teorie množin odmítnutím aktuálního nekonečna.[73] Brouwer se tím vymezoval i proti Hilbertovu stanovisku ve věci formalizace matematických pojmů.[74] Namítá, že pojmy, které Hilbertův formalismus stanovuje, stejně jako jeho věty, které byly formálně odvozeny správně, nemusejí mít spojitost s realitou nebo mohou být dokonce v protikladu s realitou. Matematické pojmy mají dle Brouwera vždy intuitivní obsah a matematika v kontaktu s realitou zůstat musí.[75]

[71]„ ‘[...v cifře 1] není obsažen pojem čísla, protože se rozumí samo sebou, že 1 je zde jen symbol’ [...] ‘Skupiny [*Zusammenfassungen*] utvořené z tohoto předmětu, dvakrát, třikrát či víckrát opakovaného [...]’ Aha! Tentokrát už tomu tak není, jestliže uvádí slova dva, tři a dokonce vice, zavádí pojem čísla. Definice konečného přirozeného čísla, která přijde za chvilku, přijde pozdě.” ([Poincaré 1905], s. 81f).

[72]Pouze v tomto případě je tak oprávněné označit Poincarého za konvencionalistu.

[73]Viz ([Fiala 2006a], s. LXXII–LXXIII), srov. ([Trlifajová 2011], s. 98f).

[74]Patrné to bylo dále v Brouwerově inaugurační řeči z roku 1912. Viz ([Blumenthal 1935], s. 423; překlad s. 142).

[75]V tomto se tedy Brouwerova námitka neliší od té Poincarého.

V základu matematiky podle Brouwera nestála ani logika ani jazyk, nýbrž matematika logiku i jazyk předcházela.[76] Pro naplnění svého programu hodlal Brouwer přizpůsobit logiku matematice. Existence matematických pojmů byla zaručena důkazem, že je možno tyto pojmy v mysli zkonstruovat, nikoliv však sporným důkazem toho, že zkonstruovat nejdou. Tím Brouwer zpochybnil od doby Aristotela obecně přijímaný logický zákon vyloučeného třetího; Výroky, které nelze dokázat ani vyvrátit, dle Brouwera v matematice existují, a to výslovně v matematice nekonečných množin. Tím však zároveň znemožnil vůbec jakýkoliv důkaz sporem, kvůli čemuž by velká část vět tehdejší matematiky musela být dokázána jinak a mnoho by jich nemohlo být dokázáno vůbec (viz níže).

Bývalý Hilbertův žák Hermann Weyl, který se postavil na Brouwerovu stranu se v této věci vyjádřil: "Je trpkým, ale neodvratitelným faktem, že lze z tohoto hlediska udržet jen část, možná jen velmi malou část klasické matematiky."[77] Brouwerův program v průběhu let obecně nalézal ohlas především mezi mladými matematiky. Kodifikován byl až roku 1925 [Brouwer 1925].

5.4.4 Hilbertův program po 1. sv. válce

Hilbert viděl v intuicionismu hrozbu především kvůli možné ztrátě matematického kulturního dědictví a ke konci 1. sv. války se vrátil ke svým úvahám z roku 1904. Oproti kongresu v Heidelbergu je však nyní cílem tzv. Hilbertova programu axiomatizace celé matematiky, tj. nalezení konečného systému axiomů, z něhož již půjde odvodit celou matematiku.[78] Hilbert předně rozlišuje mezi matematikou reálnou a ideální, neboli finitní a transfinitní. Transfinitní matematika zahrnuje prostřednictvím kvantifikátorů nekonečno a zjednodušuje vyjadřování o finitní matematice. Je však jen jejím konzervativním rozšířením, tj. všechna tvrzení, odvozená transfinitními prostředky, má být možno odvodit i finitně. Za tímto účelem mají být jednak všechna tvrzení matematiky přepsána do symboliky formalizovaného jazyka a jednak má být stanoven (taktéž konečný) systém odvozovacích pravidel pro manipulaci s těmito symboly. To umožní jednak ryze mechanicky odvodit ze stanovených axiomů onu sadu všech tvrzení matematiky a jednak dokázat bezespornost stanoveného systému matematiky, a to při užití pouze finitních prostředků.[79] Hilbert usiloval o zachování integrity matematiky tím, že ji učiní jistější a důvěryhodnější tam, kde operuje s aktuálním nekonečnem. Díky jedinému logicko-symbolickému systému, který bude mít ucelenou formální strukturu, ale žádný obsah, tak budou dle Hilberta obhájena ohrožená matematická témata. V tomto kontextu však poznamenejme, že sjednocování matematiky na základě logiky vede k pokračujícímu vyprazdňování intuitivního obsahu pojmů.

Hilbert se programem pro teorii důkazu zabývá nejprve ve třech významných přednáškách: v Zürichu [Hilbert 1918], z roku 1922 v Hamburgu [Hilbert 1922a] a z téhož roku v Lipsku [Hilbert 1922b]. Přitom jej v každé z nich znovu obměňuje a vylepšuje. V první přednášce, nazvané "Axiomatisches Denken", navazuje na úspěchy axiomatické metody v pracích svých kolegů: Ernsta Zermela v teorii množin a Bertranda Russela a Alfreda N. Whiteheada v aritmetice.[80] V přednášce z Hamburgu se poprvé staví na obranu dosavadního pojetí analýzy proti výtkám intuicionistů, přičemž výslovně jmenuje Weyla a Brouwera. Podává výčet, které části především novější matematiky nejsou s jejich pojetím slučitelné:

[76] Jazyk byl přitom jen prostředkem k objasnění matematických konceptů.

[77] "Daß von diesem Standpunkt aus nur ein Teil, vielleicht nur ein kümmerlicher Teil der klassischen Mathematik zu halten ist, ist eine bittere, aber unumgängliche Tatsache." ([Weyl 1928a], s. 87).

[78] Součástí tohoto požadavku je tedy i důkaz úplnosti stanovené teorie.

[79] Viz ([Dostálová 2010], s. 104f), srov. ([Bedürftig – Murawski 2015], s. 92ff).

[80] Viz ([Bernays 1970], s. 200f).

- obecný koncept iracionálního čísla,
- problémy v teorii funkcí,
- Cantorova transfinitní čísla a jeho objevy v teorii množin včetně spočitatelnosti podmnožiny nekonečné množiny,
- věta, že mezi nekonečně mnoha čísly existuje nejmenší,
- logický zákon vyloučeného třetího.[81]

Dále zde Hilbert ostře odděluje logický (metamatematický) a obsahový formalismus[82] a pro oba zavádí vlastní znaky.[83] Zmíněný princip vyloučeného třetího zde také vlastním způsobem formalizuje. Na sjezdu přírodovědců v Lipsku 1922 zahrnuje do své formalizace matematického důkazu také Zermelův axiom výběru.[84] Dvě Hilbertovy následující významné přednášky, *Über das Unendliche* [Hilbert 1925] v Münsteru[85] a druhá přednáška z Hamburgu, přednesená roku 1930 [Hilbert 1931], se kromě dalšího rozšíření teorie důkazů zabývají Cantorovým problémem kontinua.

Dosud byl Hilbertův program pouze v jednotlivých studiích, kompaktní monografii vydává Hilbert až roku 1928 ve spolupráci se svým studentem Wilhelmem Ackermannem [Hilbert – Ackermann 1928] pod názvem *Grundzüge der theoretischen Logik*. (Následně vydává Hilbert společně s Paulem Bernaysem v letech 1934 a 1938 dva díly mnohem širších *Grundlagen der Mathematik* [Hilbert – Bernays 1934].[86]

[81] Viz ([Hilbert 1922a], s. 159f).

[82] Již u Peanovy práce *Arithmetices principia*, viz ([Peano 1889b], s. 86-93, 94-97).

[83] Negaci zde ale připouští použít jen u nerovnic, což je dle Paula Bernayse pozůstatek z doby, kdy ještě zmíněné oddělení nebylo provedeno ([Bernays 1970], s. 203).

[84] ([Hilbert 1922b], 178f). Přednáška měla oproti publikovanému článku jiný název, a to "Das Auswahlaxiom in der mathematischen Logik". Poznamenejme, že se setkání účastní i učitel matematiky Martin Jašek (1879–1945) z Plzně se zprávou o objevu Bolzanovy funkce. Viz [Jašek 1922c], srov. [Zeman 2016].

[85] Zde se Hilbert vztahuje ke Cantorovým transfinitním číslům, jejich zobrazitelnosti pomocí typů proměnných a odtud pochází též jeho známý výrok "Nikdo nás nemůže vyhnat z ráje, do nějž nás Cantor přivedl." ([Hilbert 1925], s. 170). Poznamenejme, že přednáška je shrnutím Hilbertových univerzitních přednášek se stejným názvem z roku 1924 (Amtliches Namensverzeichnis 1924–1925, s. 24), tedy z doby, kdy je v Göttingen na studiích i významný český matematik Vojtěch Jarník (1897–1970). V literatuře je však uvedena jen jeho účast na přednáškách Hilbertových kolegů (viz [Bečvářová – Netuka 2010], s. 27).

[86] Ve druhém díle se již reflektují Gödlovy věty o neúplnosti, podle nichž které v každé teorii (aspoň tak bohaté jako Peanova aritmetika) jsou nedokazatelná tvrzení. Viz ([Sieg – Ravaglia 2005], s. 990).

Kapitola 6

Komentář ke Grundlagen der Geometrie

V této kapitole se již konkrétně zaměříme na Hilbertovu knihu *Grundlagen der Geometrie* z roku 1899 [Hilbert 1899] a pokusíme blíže nastínit obsah prvních dvou kapitol knihy a vysvětlit dobové i věcné souvislosti, nutné k jejich pochopení. Postupovat budeme sekvenčně. Nejprve představíme způsob implicitních definic základních pojmů a vztahů v axiomech, a dále Hilbertovo rozdělení axiomů do skupin (§ 1), Zejména se zaměříme na axiomy spojitosti (§ 8) v kontextu s otázkou o bezespornosti geometrie. K tomu popíšeme konstrukci aritmetického modelu axiomů geometrie, který Hilbert pro důkaz bezespornosti používá (§ 9). Výklad doplníme konkrétními příklady či protipříklady, kterými se budeme snažit ozřejmit napojení problému bezespornosti geometrie na problém její spojitosti. Dále uvedeme Hilbertovy modely pro geometrii, ve které neplatí axiom o rovnoběžkách (§ 10), a pro geometrii, ve které neplatí axiom o shodnosti trojúhelníků (§ 11). V prvém případě jej dáme do kontextu s Hilbertovou pozdější prací výhradně na téma neeukleidovské geometrie, ve druhém případě provedeme studii možného vlivu Hermanna Minkowského na Hilbertovu konstrukci modelu.[1] Na konec se pokusíme nastínit hlavní důvody, které Hilberta k napsání díla vedly, a některé klíčové důsledky jeho pojetí axiomatiky geometrie.[2] Pokusíme se předložit takový výklad, který by pomohl nováčkovi se v textu orientovat.

Hilbertovy výsledky z dalších kapitol, tj. týkající se teorie proporcí, Pascalovy[3] a Desarguovy věty, stejně jako eukleidovských konstrukcí do zkoumání nezařazujeme.

6.1 Axiomy geometrie a její základní prvky

Od začátku díla *Grundlagen der Geometrie* operuje Hilbert v prostoru a zavádí Hilbert své tři základní pojmy – body, přímky a roviny – jako tři různé systémy věcí (*Systeme von Dingen*). Toto sousloví použil již před ním Dedekind, přičemž slovo systém užíval v tomtéž významu jako množina a věc definoval jako "předmět našeho myšlení" (*Gegenstand unseres Denkens*).[4] To mělo i u Hilberta, v souladu s jím zamýšlenou radikální abstrakcí od názoru, vyjádřit, že zavedené pojmy nenesou od začátku tentýž standardní význam, který nesou v obyčejném jazyce. Určitý konkrétní význam získávají až skrze jednotlivé axiomy, které mezi těmito pojmy

[1] Obě tato témata jsou naše původní a v literatuře probírána nejsou.
[2] Autory, kteří axiomatizovali aritmetiku a logiku, uvádíme v kapitole 5.
[3] Terminologie dle Hilberta, věta je nyní přisuzována Pappovi.
[4] Viz ([Dedekind 1888], s. 344).

zavádějí vztahy, což komentoval jeho současník, matematik a fyzik Henri Poincaré takto:

> "Co je to za 'věci'? To nevíme a ani vědět nemáme, dokonce by bylo nepřístojné po tom pátrat. Jediné, co máme právo vědět, je to, o čem nás poučují axiomy, např. tento: dva různé body určují vždy jednu přímku [. . .]"[5]

Toto pojetí mělo také za následek, že se při záměně všech výskytů určitého základního pojmu, třeba slova bod, za jakékoliv jiné slovo, původní teorie nezmění. Užít by přitom bylo možné i zcela vymyšlená slova, která dosud postrádala smysl, což Dedekind navrhoval již roku 1876 v dopise Lipschitzovi jako vhodný prostředek pro analýzu bezespornosti té které teorie (jmenovitě např. Eukleidovy geometrie či reálných čísel):

> "Nahradit všechny umělé výrazy libovolnými nově vymyšlenými (dosud bezvýznamnými) slovy, je li budova dobře zkonstruována, nesmí toto zapříčinit její zřícení [. . .]"[6]

Ač se tyto Hilbertem stanovené axiomy navenek velmi podobají axiomům a postulátům Euklidovým či základním větám Paschovým, na významové úrovni se pak od nich výrazně odlišují. Tyto axiomy jsou *implicitními definicemi*[7] zmíněných základních pojmů (systémů věcí), které se v nich vyskytují, ale také Hilbertem používaných základních vztahů incidence, uspořádání (bytí mezi) a shodnosti. Např. výše uvedený axiom je tak částí implicitní definice bodu, přímky a vztahu incidence. Zcela definován, bráno z druhé strany, je totiž určitý základní pojem či vztah teprve skrze všechny axiomy, ve kterých se vyskytuje. Jeho význam je tedy ovlivněn tím, které axiomy jsme zavedli a které ne. Pro Hilberta je pak to, že je takový systém věcí vůbec možný (tj. že věci existují), zaručeno důkazem bezespornosti takto arbitrárně stanoveného systému axiomů (viz níže). Určitý nový pojem v Hilbertově pojetí matematicky existuje jen tehdy, pokud je podán důkaz bezespornosti všech jeho znaků:

> "Podaří-li se však dokázat, že znaky, přidělené pojmu, nemohou v konečném počtu logických kroků nikdy vést na spor, potom řeknu, že je tím dokázána matematická existence pojmu , např. čísla nebo funkce, která splňuje jisté požadavky."[8]

Na rozdíl od svých předchůdců uspořádal Hilbert své axiomy geometrie do skupin, a to následovně: axiomy incidence (I), axiomy uspořádání (II), axiomy shodnosti (III), axiom o rovnoběžkách (IV) a axiomy spojitosti (V). Každá z těchto skupin měla dle Hilberta "vyjadřovat jistá vzájemně související základní fakta o našem

[5] Viz ([Poincaré 1904], s. 29).

[6] "[. . .] alle Kunstausdrücke durch beliebige neu erfundene (bisher sinnlose) Worte zu ersetzen, das Gebäude darf, wenn es richtig construirt ist, dadurch nicht einstürzen [. . .]" ([Dedekind 1932a], s. 479).

[7] Více k tématu viz např. ([Weyl 1944], s. 264). Ve francouzském prostředí místo termínu *définitions implicites* (např. [Dubucs 1992], s. 217) používal H. Poincaré též termín *définitions deguisées* (doslova převlečené definice). Jiří Fiala jej v soudobém sborníku Poincarého textů přeložil jako skryté definice (viz [Poincaré 2010], s. 65, 85, 170) vůči originálům ([Poincaré 1908], s. 131, 185) a ([Poincaré 1912], s. 503) dříve jako maskované definice (viz [Fiala 2010], s. 193) vůči originálu ([Poincaré 1891] s. 773).

[8] "Gelingt es jedoch zu beweisen, daß die dem Begriffe erteilten Merkmale bei Anwendung einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu einem Widerspruche führen können, so sage ich, daß damit die mathematische Existenz des Begriffes, z. B. einer Zahl oder einer Funktion, die gewisse Forderungen erfüllt, bewiesen worden ist." ([Hilbert 1900], s. 301).

názoru."[9] Systém axiomů měl splňovat tři požadavky: nezávislost, úplnost a bezespornost. Pojem nezávislosti v tomto případě znamená, že nelze žádný axiom vyvodit z axiomů ostatních.[10] O úplnosti axiomatického systému mluvíme, pokud je v něm každé tvrzení buď dokazatelné, nebo vyvratitelné. Pokud je nějaké tvrzení současně dokazatelné i vyvratitelné, je teorie sporná, pokud se takové tvrzení nevyskytuje, je bezesporná, neboli konzistentní. Právě důkaz vzájemné bezespornosti axiomů označuje Hilbert na Mezinárodním kongresu matematiků v Paříži v roce 1900 za nejdůležitější ze všech problémů, které se na poli axiomů vyskytují.[11] Předtím, než Hilbertův důkaz bezespornosti představíme, se však blíže zaměříme na problém spojitosti.

6.2 Axiomy spojitosti

Mezi axiomy spojitosti patří Archimédův axiom (V1) a axiom úplnosti (V2). Archimédův axiom V1 vypovídá o tom, že pokud na přímce, na níž leží tři různé body, klademe kratší úsečku, kterou vytínají dva z nich, několikrát za sebou směrem k bodu třetímu, vždy se po určitém počtu kroků dostaneme za něj.[12] Tento axiom je ale pouze nutnou podmínkou spojitosti, nikoliv postačující.

Axiom úplnosti[13] V2 vyjadřuje, že sjednocený systém bodů, přímek a rovin (původně tří různých systémů věcí) se nemůže rozšiřovat o další systém věcí tak, že by zároveň v takto rozšířeném systému platily předchozí axiomy I–V1.[14] V tomto ohledu jej lze, v odpovídající podobě, použít i jako poslední axiom jakéhokoliv jiného axiomatického systému.[15] Pro příslušný spojený systém věcí, v našem případě pro geometrii, proto tento axiom zaručuje jednoznačnost, ale především spojitost. Hilbertův student a pozdější kolega Paul Bernays poznamenává, že ze znění axiomu úplnosti není na první pohled zřejmé, že vyjadřuje také požadavek spojitosti a že je tento zřejmější např. z Cantorova axiomu, jímž se zavádějí reálná čísla jako posloupnosti vnořených intervalů.[16]

V prvním vydání *Grundlagen der Geometrie* byl uveden pouze axiom V1, a to doslova pod tímto označením: "Skupina axiomů V: axiom spojitosti (Archimédův axiom)".[17] Jak jsme ale uvedli, tento axiom spojitost nevyjadřoval a šlo tedy o Hilbertovu chybu, na kterou jej upozornil teprve recenzent. V následujících vydáních

---

[9] "[. . . jede Gruppe] drückt gewisse zusammengehörige Grundtatsachen unserer Anschauung aus." ([Hilbert 1899], s. 2; překlad s. 62).

[10] Srov. pozn. 7.

[11] Viz ([Hilbert 1900], s. 300). Poznamenejme, že Minkowského na *Grundlagen* zaujalo nejvíce, že Hilbert neuvedl čtvrtý Eukleidův postulátu o shodnosti pravých úhlů mezi svými axiomy, ale jako větu. Dne 5. 6. 1899 píše Hilbertovi: "Daß das Euklidische Axiom uber die rechten Winkel beseitigt ist, wird besonders auffallen." (Minkowski Hilbertovi, 5. 6. 1899; [Minkowski 1973], s. 116).

[12] Tato vlastnost vyskytovala jak u Eukleida (viz níže), tak u Pascheho ve formě věty.

[13] Stejně jako v případě nezávislosti (viz pozn. 7) může i v případě úplnosti nastat nedorozumění kvůli terminologii. Tento axiom úplnosti V2 vyjadřuje úplnost systémů věcí (tedy základních prvků – bodů, přímek, rovin). Oproti tomu jsme se výše (text za pozn. 10) zmiňovali o úplnosti systému axiomů. Axiom V2 o ní nevypovídá a ani jeho výskyt tuto vlastnost neovlivňuje.

[14] Přítomnost Archimédova axiomu V1 (nebo odpovídajícího axiomu) vyžaduje Hilbert výslovně. Geometrii, která splňuje jen axiomy I–IV, avšak nesplňuje V1, lze totiž vždy rozšiřovat o další body, aby ony axiomy I–IV zůstaly v platnosti, což je se smyslem axiomu V2 v rozporu. Viz ([Hilbert 1899], s. 31ff; překlad s. 75). To dokazuje, jinými slovy řečeno, že Archimédův axiom V1 je na těchto axiomech I–IV a V2 závislý. Pouze na axiomech I–IV však závislý není, což Hilbert dokázal ve druhé kapitole *Grundlagen* modelem geometrie, ve které tyto axiomy I–IV platí, axiomy V1 a V2 však neplatí. Tato geometrie se nazývá *nearchimédovská*. Ohledně nezávislosti axiomu úplnosti V2 viz níže v textu. Viz ([Hilbert 1899], s. 47–50; překlad, s. 83–85).

[15] Sám Hilbert jej poprvé použil až při své axiomatizaci aritmetiky, která následovala až po jeho axiomatizací geometrie. Stalo se tak v přednášce *Über den Zahlbegriff* z podzimu 1899, tedy mezi prvním a druhým (již opraveným) vydáním díla *Grundlagen der Geometrie*. Tuto přednášku publikoval Hilbert o rok později jako článek. Viz ([Hilbert (Zahlbegriff) 1900], s. 240).

[16] Viz ([Bernays 1970], s. 197f).

[17] Viz ([Hilbert 1899b], s. 95).

se již vyskytují oba axiomy spojitosti V1 a V2. Uvedená chyba měla delší vývoj a Hilbert obě označení, tj. "Archimédův axiom" a "axiom spojitosti", často zaměňoval. Uveďme nejprve vše, co mohl u Hilberta "Archimédův axiom", resp. "axiom spojitosti", označovat:

1. originální tvar Archimédova axiomu, uvedený v *Grundlagen* jako V1,

2. projektivni tvar Archimédova axiomu,

3. Weierstrassův axiom.

Zmínili jsme také výše, že se "axiom spojitosti" vyskytoval už u Pasche, aby jej vzápětí odmítl. Tento byl ve tvaru Weierstrassova axiomu. Pasch uvedl také axiom, který je totožný s Hilbertem představeným druhým projektivním tvarem Archimédova axiomu. Tento již přijal.[18] Hilbert ve svých přednáškách (GG) používal, stejně jako Pasch, jak "axiom spojitosti", který označoval Weierstrassův axiom, tak "Archimédův axiom", o němž se zmiňuje v poznámce a který míní v projektivním tvaru. Uvedený "axiom spojitosti" oproti Paschovi již Hilbert přijímá.[19] V následném dopise Kleinovi (BG) uvádí jen "axiom spojitosti" (opět Weierstrassův tvar), který se od tvaru v (GG) liší jen v detailu. V prázdninovém kurzu pro učitele 1898 (FK) uvádí jen "Archimédův axiom" v originální podobě,[20] vědom si toho, že spojitost nevyjadřuje, neboť jeho cílem je představit geometrické konstrukce bez nutnosti spojitosti. V následných přednáškách (EG) i vypracování (SG) jsou všechny tři podoby výčtem uvedeny jako podoby "Archimédova axiomu".[21] Podotknul však, že tyto tři podoby nejsou zcela rovnocenné a že první ještě nezajišťuje úplnost, a tedy ani spojitost, na rozdíl od ostatních dvou.[22]

Původně se Archimédův axiom nacházel již v Euklidových *Základech* ve formě tvrzení (kniha V, tvrzení 4).[23] Axiom V2 ani žádná jeho alternativa se v Eukleidových *Základech* nenacházel. Hilbert proto geometrií *eukleidovskou*[24] nazýval ve své knize takovou geometrii, kterou lze odvodit již z axiomů I–V1. Jak bude níže vysvětleno, takovýchto *eukleidovských* geometrií najdeme nekonečné množství a až na tu, ve které platí navíc V2, jsou všechny nespojité. Tento speciální případ *eukleidovské* geometrie o axiomech I–V2, která zároveň odpovídá naší běžné analytické geometrii, nazýval Hilbert geometrií *kartézskou.* Zároveň poznamenal, že ačkoliv axiom V2 neobsahuje bezprostředně žádný výrok o pojmu konvergence, lze v kartézské geometrii dokázat existenci meze, odpovídající Dedekindovu řezu,[25] čímž mínil dělicí bod z Dedekindova postulátu.[26] Dokázat lze dle Hilberta i Bolzanovu větu o existenci

[18] Viz ([Toepell 1986], s. 7, 78). Byl uveden jako důsledek Paschova axiomu shodnosti. Termín "Archimédův axiom" Pasch nepoužil.

[19] Viz tamtéž, s. 74, 78.

[20] Viz tamtéž, s. 127.

[21] Viz tamtéž, s. 192, 221.

[22] V našem textu budeme dále ctít terminologii druhého a následujících vydání *Grundlagen*: Jako "Archimédův axiom" budeme označovat právě onen slabší první tvar a označení "axiom spojitosti" používat nebudeme.

[23] Proto mluvíme o originálním tvaru.

[24] Stanovme následující konvenci: pokud budeme hovořit o *eukleidovské* geometrii v Hilbertově terminologii, nikoliv o eukleidovské geometrii v běžném chápání tohoto pojmu, vyznačíme ji kurzívou.

[25] Viz ([Hilbert 1899], s. 33; překlad, s. 76). Dedekind zkonstruoval množinu reálných čísel pomocí tzv. řezů. Termín Dedekindův řez označuje dvě disjunktní množiny racionálních čísel, jejichž sjednocení dá celou množinu racionálních čísel, a je též ztotožňován s číslem, které toto rozdělení zapříčiňuje. To však může být jak racionální, tak iracionální. Množina všech takových čísel bude množinou čísel reálných. Viz ([Epple 1999], s. 379f).

[26] "Rozdělíme-li všechny body přímky na dvě třídy tak, že každý bod první třídy leží vlevo od každého bodu druhé třídy, potom existuje jeden a právě jeden bod, který dělí všechny body na tyto dvě třídy, tedy bod, ve kterém je přímka na tyto dvě části rozstřižena." ([Dedekind 1872], s. 322). Důvodem, proč Hilbert namísto tohoto postulátu použil pro zajištění spojitosti dvojici axiomů (V), byla dle interpretace Halletta a Majera jeho úzká provázanost s aritmetickým světem.

hromadných bodů.[27]

6.3 Aritmetický model pro důkaz bezespornosti

Po stanovení systému axiomů geometrie v první kapitole představuje Hilbert v kapitole druhé důkaz jejich bezespornosti prostřednictvím konstrukce aritmetického modelu.[28] Pro jistotu nejprve uveďme, že standardní geometrická interpretace systému axiomů geometrie, ve které jsme intuitivně zvyklí uvažovat o stanovených systémech věcí, jakožto skutečných bodech, přímkách a rovinách, je v Hilbertově pojetí taktéž pouhým logicko sémantickým modelem na stejné úrovni jako kterýkoliv jiný.[29]

V aritmetickém modelu uvažujeme pod oněmi věcmi, které nazýváme "body", pouze jejich kartézské souřadnice, tj. uspořádané dvojice čísel $(x,\ y)$, a pod věcmi, které nazýváme "přímkami", uspořádané trojice čísel $(m : n : s)$, kde m a n nejsou zároveň nula.[30] O třetím systému věcí, "rovinách", zde Hilbert nemluví. Uvedený aritmetický model tvoří jen pro dvojrozměrnou geometrii a poznamenává pouze, že rozšíření do třetího rozměru by již nebylo obtížné.

Pro uvedeným způsobem pozměněnou interpretaci základních pojmů mají být nyní stanovené axiomy I–V2 splněny, Dosazujme-li za ony proměnné x, y, m, n, s reálná čísla, platnost axiomů ověříme snadno.[31] Zároveň tím s odvoláním na bezespornost aritmetiky reálných čísel podáváme důkaz bezespornosti geometrie o uvedených axiomech I–V2, tj. geometrie *kartézské* dle Hilbertovy terminologie.[32]

Hilbert však ve druhé kapitole *Grundlagen* postupoval jinak. Nejprve konstruoval aritmetický model pro důkaz bezespornosti libovolné geometrie *eukleidovské*, tj. model, ve kterém jsou splněny zatím jen axiomy I–V1. Samozřejmě, jestliže náš předchozí model, ve kterém jsme za proměnné x, y, m, n, s dosazovali reálná čísla, splňoval axiomy I–V2, splňoval i axiomy I–V1. Ptejme se však s Hilbertem nově: Lze za ony proměnné dosazovat i výběrem z nějaké užší množiny? Pokud ano, která množina bude ta nejmenší možná? Může jít např. jen o čísla celá?

Předně, jak vyžaduje Archimédův axiom V1, tato množina musí být nějakým algebraickým tělesem, tj. strukturou, která obsahuje výsledky operací sčítání a náso-

Hilbert se snažil vybudovat svou geometrii bez použití pojmu čísla. Viz ([Hilbert 2004], s. 430), srov. níže v textu kap. 6.8.

[27] Viz též ([Bolzano 1882], s. 27). Tj. Bolzano-Weierstrassovu větu. Takto byla známa už v Hilbertově době na základě pojmenování H. A. Schwarze, viz ([Šebestík 1992], s. 107). Není známo, proč zde Hilbert nepoužil Weierstrassova jména. Lze vidět paralelu též v označní Weierstrassova axiomu za axiom spojitosti (potažmo chybně za Archimédův)? Nejspíše ne, protože stejně tak jednal i M. Pasch, i Klein, od něhož Pasch tento axiom přijal ([Toepell 1986], s. 7). Kronecker zemřel v roce 1892, Weierstrass v roce 1897, tedy dlouho před vydáním *Grundlagen*. Navíc Hilbertův přítel Adolf Hurwitz byl vydavatelem Weierstrassových přednášek.

[28] U Hilberta neručí za bezespornost eukleidovské geometrie pouhý názor, na rozdíl od Paschových a Eukleidových axiomů. Hilbert se opře o bezespornost aritmetiky.

[29] Hilbertův systém axiomů měl umožnit více sémantických interpretací a měl být otevřený pro různé modely. Viz ([Gray 2011], s. 385). To i v případě obměny tohoto systému axiomů, viz níže v textu následující kap. 6.4.

[30] Výraz "bod leží na přímce", který se vyskytuje v axiomech, bude v tomto pojetí znamenat, že čísla x, y, m, n, s vyhovují jisté rovnici: $mx + ny + s = 0$. Body (x, y) pak budou ležet na přímce $(m : n : s)$. Viz ([Hilbert 1899], s. 34; překlad, s. 76).

[31] Axiomy incidence I tím, že bod a přímka vyhovují rovnici z předchozí poznámky, axiomy uspořádání II tím, že je těleso reálných čísel uspořádané, axiomy shodnosti III, které umožňují provádění geometrických operací (viz níže), tím, že souřadnice bodu po jejich provedení budou opět reálné, axiom o rovnoběžkách IV tím, že pro danou přímku $(m : n : s)$ a daný bod $A_0[x_0, y_0]$ mimo ni existuje jediná přímka $(m : n : t)$, splňující rovnici $mx_0 + ny_0 + t = 0$, aby zároveň žádný bod $A[x, y]$, který vyhovuje $mx + ny + t = 0$, nevyhovoval současně rovnici pro původně danou přímku $(m : n : s)$, tj. $mx + ny + s = 0$. Nakonec jsou splněny i axiomy spojitosti: Archimédův axiom V1 proto, že jsou reálná čísla archimédovským tělesem, a axiom úplnosti V2 proto, že množinu reálných čísel nelze při zachování předchozích axiomů rozšiřovat o jakákoliv další čísla.

[32] Říkáme pak, že reálná čísla indukují kartézskou geometrii.

bení u všech dvojic svých prvků. Toto těleso musí být dále archimédovské, tj. uspořádané a s tou vlastností, že při zvolení libovolných dvou prvků lze násobením menšího z nich nějakým celým číslem vždy získat číslo, které bude větší než číslo druhé. To by např. racionální čísla splňovala, nepodařilo by se nám však na nich ověřit axiomy shodnosti III, které kromě přenášení úseček a úhlů, umožňují také provádění shodných zobrazení, tj. geometrických operací posunutí, osové souměrnosti či rotace. Výsledkem naposledy jmenované operace rotace v aritmetickém modelu s racionálními čísly by totiž již mohl být i bod o iracionálních souřadnicích. Při konstrukci hledaného tělesa tedy musíme kromě všech aritmetických operací, nutných pro konstrukci tělesa racionálních čísel, tj. sčítání, odčítání, násobení, dělení, přidat navíc operaci odmocniny ze součtu čtverců, zkráceně $\sqrt{1+\omega^2}$, kde symbol ω značí prvek, který již v tělese je.[33]

Takto zkonstruované těleso indukuje nejmenší možnou *eukleidovskou* geometrii, ve které jsou splněny všechny axiomy I–V1, ačkoliv v ní některé body naší obyčejné geometrie (tj. u Hilberta *kartézské*) chybějí. Každé její rozšíření o další body potom bude v aritmetickém modelu znamenat i rozšíření příslušného algebraického tělesa. Maximálním takovým rozšířením je *kartézská* geometrie a jí příslušné těleso reálných čísel. Hilbert kapitolu zakončuje takto: "Lze nahlédnout, že existuje nekonečně mnoho geometrií, které vyhovují axiomům I–V1, oproti tomu jen jedna jediná, totiž geometrie *kartézská*, ve které platí zároveň axiom úplnosti V2."[34] K tématu patří i metoda, kterou Hilbert uvedl až na konci kapitoly třetí po redefinici Eukleidovy nauky o proporcích, pro jednoznačné přiřazení reálných čísel (ne nutně všech) všem bodům dané přímky (v příslušné *eukleidovské*, tj. i nespojité, geometrii).[35]

To, že se Hilbertovi pro zmíněné geometrie (jak *kartézské* o axiomech I–V2, tak *eukleidovských* o axiomech I–V1) podařilo nalézt aritmetické modely, v nichž byly příslušné axiomy splněny, zároveň podle něj dokazovalo, že jsou tyto geometrie bezesporné. Především v případě geometrií *eukleidovských* to pro jejich nespojitost nebylo vůbec samozřejmé, a tento Hilbertův počin tak nelze považovat za výhradně formální.[36] Kromě uvedeného důkazu bezespornosti celého axiomatického systému využil Hilbert v druhé kapitole aritmetické modely i pro důkazy nezávislosti jednotlivých skupin axiomů.

---

[33] Výsledné těleso, Hilbertem označované jako Ω, je menší než těleso reálných čísel a je oproti němu spočitatelné. Zároveň je i menší než Dedekindem navržené těleso algebraických čísel, které původně použil Dedekind pro ukázání nespojitosti eukleidovské geometrie, a Hilbert tak tímto tělesem Ω Dedekindovu podmínku zpřesňuje. Viz ([Hilbert 1899], s. 34; překlad, s. 76), srov. ([Dedekind 1888], s. 339). O konstrukci tohoto tělesa v Hilbertových *Grundlagen* referoval též Jiří Fiala, viz ([Fiala 2011], s. 22). Východiskem mu však byly geometrické konstrukce pravítkem a etalonem, uvedené až na konci díla v sedmé kapitole.

[34] Viz ([Hilbert 1899], s. 37).

[35] Na přímce stanovíme dva body a označíme je 0 a 1. Potom budeme výslednou úsečku stále půlit a v každém kroku přiřadíme příslušnému bodu číslo $\frac{1}{2^n}$. Úsečku mezi počátkem a tímto bodem značí Hilbert $O\frac{1}{2^n}$. Nanášíme-li ji za sebou směrem k bodu 1, přiřadíme výsledným bodům hodnoty $\frac{m}{2^n}$, a nanášíme-li ji na opačnou stranu, přiřazujeme hodnoty $-\frac{m}{2^n}$. Viz ([Hilbert 1899], s. 67f; překlad, s. 94).

Tato metoda vyžaduje Archimédův axiom V1, který zaručuje, že se v rozvoji zlomků $\frac{1}{2^n}$ body nenahustí ještě na jiném místě přímky než u počátku, a tedy, že číslo 0 nebude přiděleno dvěma různým bodům (viz nestandardní analýza). Více k tématu viz ([Toepell 1986], s. 70ff). Zavedení nebo nezavedení axiomu úplnosti V2 potom rozhoduje o tom, zda lze také opačným směrem přiřadit bod všem reálným číslům. To lze provést pouze v geometrii *kartézské*.

Pro zajímavost poznamenejme, že Hilbert toto téma ve zmíněných předchozích přednáškách z roku 1898/1899 uvedl úryvkem z dramatu Gottloba E. Lessinga (1729–1781) *Moudrý Nathan*, pojednávajícím o tom, že největším divem ze všech je, že nám jsou skutečné divy skryty ve své všednosti. Hilbert zmínil následně klíčovou roli, kterou hraje obyčejné číslo v přírodních vědách. Viz ([Toepell 1986], s. 194).

[36] Od tohoto místa, tedy počínaje druhou kapitolou, již Hilbert při svých výzkumech axiom V2 neuvažuje a když potom hovoří o celku všech svých axiomů, zůstává na geometrii *eukleidovské*, tj. na obecnější úrovni.

6.4 Důkazy nezávislosti skupin axiomů

To, že axiomy ztratily návaznost na názor a pojmy, o nichž vypovídaly, se staly zcela abstraktními a implicitně těmito axiomy definovanými, umožnilo obměnou axiomatického systému vytvářet zcela nové geometrie. To sice přinášelo nebezpečí, že takto vzniklé geometrie, závisející na libovůli autora, nemusely mít pro obor žádný význam, ale zároveň to umožňovalo, dokázat tak jejich bezespornost a upevnit je v jejich konstrukci na logických základech. Pro jednotlivé axiomy to odpovídalo možnosti je ze systému vyjímat, a tak dokazovat, že jsou nezávislé.[37] Následkem vyjmutí jednoho takového axiomu můžeme ze systému odvodit:

1. stejnou sadu tvrzení jako předtím (geometrie byla na axiomu nezávislá, axiom byl *nadbytečný*),
2. jinou sadu tvrzení; pokud je tato *bezesporná*,[38] potom byl axiom *nezávislý.*

Hilbert dokazuje nezávislost jednotlivých svých axiomů vůči ostatním skupinám.[39] Axiomy skupin I a II zůstávají přitom v platnosti vždy, jejich nezávislost Hilbert nedokazuje. Uvedeme nyní podrobně Hilbertovy důkazy nezávislosti skupin III a IV paralelně s jeho dílem. V případě nezávislosti axiomu III uvedeme porovnání s Minkowského dílem a budeme snažit prokázat nebo vyvrátit jeho vliv na toto dílo Hilbertovo. Důkaz nezávislosti axiomů spojitosti V nebudeme rozpracovávat. Podotkněme jen, že zároveň zahrnoval popis nových *nearchimédovských* geometrií.[40]

6.5 Nezávislost axiomu o rovnoběžkách IV a neeukleidovské geometrie

Nejprve uveďme přesné znění Hilbertova axiomu o rovnoběžkách IV:

> "Nechť je a libovolnou přímkou a A bodem mimo ni: potom v rovině, určené přímkou a a bodem A leží nejvýše *jedna* přímka, která prochází bodem A a neprotíná přímku a."[41]

Můžeme nyní uvažovat jednak o geometrii postavené na axiomech I–III, V (absolutní geometrii), jednak o geometrii, ve které platí negace axiomu IV a existují tedy body A, kde k přímce a lze vést v důsledku dokonce nekonečné množství rovnoběžek, což představuje hyperbolickou geometrii.[42] Hilbert dodává, že lze dokázat, že axiom IV platí buďto pro každý bod, nebo neplatí pro žádný.

[37] Máme přitom dva významy nezávislosti axiomu (viz též pozn. 7), méně často se hovoří také o nezávislosti geometrie na axiomu.

[38] Tj. aniž by v ní současně platilo nějaké tvrzení a jeho negace (viz kap. 6.3).

[39] Uvádí přitom, že uvnitř každé ze skupin I, II a III jsou jednotlivé axiomy vzájemně nezávislé "v podstatě vždy" ([Hilbert 1899], s. 38; překlad, s. 78).

[40] V nich oproti výše uvedeným příkladům na neplatnost axiomu úplnosti V2 již neplatí ani Archimédův axiom V1. Poincaré označil tyto geometrie za Hilbertovu nejoriginálnější koncepci ([Poincaré 1903], s. 10). Hilbert se však v *Grundlagen der Geometrie* odkazuje v souvislosti s nimi již na předchozí výzkumy Veroneseho [Veronese 1891]. V ní také dostaneme možná vícero hromadných bodů, což je následně téma nestandardní analýzy.

[41] "Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens *eine* Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet." ([Hilbert 1899], s. 28; překlad, s. 74). Srov. pátý Eukleidův postulát: "A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna, že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých." ([Eukleidés 1907], s. 2). Obě vyjádření jsou porovnány v ([Vopěnka 2003], s. 97f). V duchu Eukleida opravený (místo přímek úsečky) a v současné češtině vyjádřený pátý postulát lze nalézt v ([Eukleidés 2007], s. 66).

[42] Poznamenejme, že hyperbolická geometrie neumožňuje podobná zobrazení a součet úhlů trojúhelníku je v ní menší než 180°. Riemannova geometrie zde zahrnuta není, neboť by pro ni musely být pozměněny ještě axiomy uspořádání II, srov. níže.

Pro důkaz nezávislosti tohoto axiomu IV používá Hilbert standardní model hyperbolické geometrie (Bolyai-Lobačevského) v geometrii eukleidovské:

1. primitivní prvky prostorové geometrie jsou stejné jako u Eukleida, pouze uvnitř koule,
2. shodnosti jsou dány prostřednictvím transformace, která převádí kouli na sebe samu.

V tomto modelu tedy platí kromě axiomu IV všechny Hilbertovy axiomy, tj. I–V1.[43] Jelikož bylo známo, že je takový model bezesporný, plynulo by z toho, že byl axiom IV axiomem nezávislým.[44]

Hilbert potom dokazuje dvě Legendrovy věty, které, jak známo, platí jak v eukleidovské, tak v neeukleidovské geometrii:

1. Součet úhlů v trojúhelníku je menší nebo roven dvěma úhlům pravým,[45]
2. Pokud je v nějakém trojúhelníku součet úhlů roven dvěma úhlům pravým, potom je tomu tak v každém trojúhelníku.

Hilbert v přednáškách roce 1898 navrhl k řešení dosud neprozkoumaný problém, zda lze Legendrovy věty odvodit bez Archimédova axiomu V1.[46] Ukázalo se, že nelze odvodit uvedenou první Legendrovu větu, zato lze odvodit druhou Legendrovu větu. Odvození podal nejprve v roce 1900 ve své disertaci Max Dehn (1876–1953). Zkoumá však především, jaký součet vnitřních úhlů v trojúhelníku může nastat. Hilbert jeho výsledky v *Grundlagen* uvádí nejprve v prvním francouzském vydání z téhož roku [Hilbert 1899d], v německých vydáních až od toho sedmého ve zkrácené podobě, a to po vyložení svých nearchimédovských geometrií.[47] Hilbert shrnuje Dehnovy výsledky takto:

> "Pokud vyloučíme Archimédův axiom, neplyne z předpokladu nekonečně mnoha rovnoběžek k nějaké přímce v jednom bodě, že součet úhlů trojúhelníku je menší než dva pravé. Existuje totiž zaprvé geometrie (*nelegendrovská geometrie*), ve které lze jedním bodem vést k nějaké přímce nekonečně mnoho rovnoběžek a ve které přesto budou platit věty Riemannovy (eliptické) geometrie. Zadruhé existuje geometrie (*poloeukleidovská geometrie*), ve které v jednom bodě existuje k nějaké přímce

[43] Již jsme poznamenali, že Hilbert svůj axiom V2 počínaje druhou kapitolou již při svých výzkumech neuvažuje, viz pozn. 36.

[44] Ač to Hilbert výslovně neuvedl, je v tomto standardním modelu zavedena vzdálenost jako logaritmus dvojpoměru jistých obyčejných eukleidovských vzdáleností, v popisu J. Fialy: "Vezměme si libovolný kruh. Body uvnitř tohoto kruhu (nikoliv tedy body na jeho obvodu) budou "body" naší teorie. "Přímka" bude libovolná tětiva kružnice [...]. Vezměme "úsečku" XY, která leží na "přímce" MN. "Vzdálenost" "bodů" X a Y je pak dána následující formulí:

$$\kappa \log \left| \frac{MX}{NX} : \frac{MY}{NY} \right|,$$

kde MA atd. označují obyčejnou délku úsečky MA a κ je libovolná kladná konstanta (jedna a táž pro všechna měření všech "úseček"); $|a|$ je absolutní hodnota čísla a a log je (libovolný, např. desítkový) logaritmus." Viz ([Fiala 2006a], s. LVI–LVII). Analogicky v prostoru, místo kružnice jen použita koule.

Tato hyperbolická míra (tzv. Cayley–Kleinova) je oproti *Grundlagen* uvedena v Hilbertových přednáškách (GG) z roku 1894 a výslovně srovnávána s obyčejnou parabolickou na základě vzorce pro posunutí. Viz ([Toepell 1986], s. 97). V (EG) již tuto míru nerozebírá, ale alespoň na ni odkazuje do literatury ([Toepell 1986], s. 181f).

[45] Tato první Legendrova věta je též známa jako Saccheri-Legendrova věta. Poznamenejme, že v důkazu se používá slabší axiom III 5 a stále půlení úhlu. Viz ([Lávička 2002], s. 36).

[46] Viz ([Toepell 1986], s. 197).

[47] Viz ([Hilbert 1899], s. 50). Právě z nearchimédovských geometrií kvůli absenci Archimédova axiomu Dehn vychází.

nekonečně mnoho rovnoběžek a ve které přesto platí věty eukleidovské geometrie.[48] Z předpokladu, že rovnoběžky neexistují, plyne vždy, že je součet úhlů v trojúhelníku větší než dva pravé."[49]

Jinou výstavbu neeukleidovské geometrie na jiných axiomech, kde navíc od začátku chybějí axiomů spojitosti, podal Hilbert následně v pojednání *Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskysche Geometrie* [Hilbert 1903], které vyšlo jako třetí příloha druhého vydání *Grundlagen*.

Hilbert zde zmiňuje věty, které (oproti zmíněným Legendrovým větám) platí jenom v neeukleidovské geometrii, nikoliv v geometrii eukleidovské, např.:

- "Pokud jsou dány dvě libovolné nerovnoběžné polopřímky, potom existuje vždy přímka rovnoběžná s oběma těmito polopřímkami, tj. vždy existuje taková přímka, která má dva stanovené konce α a β."[50]
- "Pokud jsou dány dvě libovolné přímky a, b, které se ani neprotínají ani nejsou rovnoběžné, existuje vždy přímka, která je na obě dvě kolmá."[51]

Hilbert k oběma těmto již obecně známým větám uvádí jeho vlastní důkazy. Petr Vopěnka na jejich základě argumentoval, že Hilbert jako jeden z mála matematiků od dob Gausse, Bolyaie a Lobačevského dovedl nahlédnout do neeukleidovského světa přímo, bez použití modelů, tj. do neeukleidovského světa, vybudovaného přímo z axiomů.[52]

6.6 Nezávislost axiomu o shodnosti trojúhelníků III 5 a vliv Minkowského

V této kapitole nahlédneme cestu, která vedla Davida Hilberta k důkazu nezávislosti axiomu III 5 o shodnosti trojúhelníků.

"Když pro dva trojúhleníky ABC a $A'B'C'$ platí shodnosti $AB \equiv A'B'$; $AC \equiv A'C'$; $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$, potom platí také shodnost $\sphericalangle ABC \equiv$

[48] Oba uvedené případy označili Dehn a Hilbert termínem *nelegendrovská* geometrie (viz Hilbert Hurwitzovi, 5. 11. 1899; Cod. Ms. Math. Arch. 76).

[49] Jde opět o výše zmíněnou Riemannovu geometrii, pro kterou musel Dehn pozměnit Hilbertovy axiomy uspořádání, jmenovitě odebrat axiom II 3, stanovující, že z libovolných třech bodů přímky leží vždy jeden mezi zbylými dvěma. Hilbert se o této podmínce zmiňuje i při představování svého čtvrtého problému z kongresu v Paříži roku 1900 a podotýká, že tato Riemannova geometrie je jednou z nejbližších geometrii hyperbolické ([Hilbert 1900], s. 302). Citované místo v *Grundlagen* je také z celého základního textu Hilbertova spisu jediné, kde se autor o Riemannově geometrii zmiňuje. Tuto geometrii představil Bernard Riemann (1826–1866) ve své habilitační přednášce *Über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde stehen* [Riemann 1854] v roce 1854. Riemannova geometrie je známa též teoretickým fyzikům pro Riemannův tenzor a geodetiky a vychází z Gaussova pojednání o diferenciální geometrii křivých ploch [Větrovcová 2013].

[50] "Wenn irgend zwei zueinander nicht parallele Halbgeraden vorgelegt sind, so gibt es stets eine Gerade, welche zu diesen beiden Halbgeraden parallel ist, d. h. es gibt stets eine Gerade, die zwei vorgeschriebene Enden α und β besitzt". Viz ([Hilbert 1903], s. 150f), srov. Tvrzení 11 z Vopěnkových *Čtvrtých rozprav s geometrií* : "Buď α ostrý úhel. Potom lze nalézt bod P a přímku p takovou, že úhel souběžnosti bodu P s přímkou p má velikost α." ([Vopěnka 2004], s. 861f). Věty si odpovídají, ač to na první pohled zřejmé není. Onen ostrý úhel α by u Hilberta představoval polovinu úhlu mezi stanovenými polopřímkami. Hilbert hovoří o *rovnoběžkách* (*paralelle Gerade*) pouze ve smyslu, v jakém my označujeme souběžky, tj. rovnoběžné jsou pro něj jen přímky s nejmenším úhlem souběžnosti. Hilbert v důkazu navíc používá neeukleidovský Paschův axiom.

[51] "[...] Wenn irgend zwei Gerade a, b vorgelegt sind, die sich weder schneiden noch zueinander paralllel sind, so gibt es stets eine Gerade, welche auf beiden zugleich senkrecht steht." ([Hilbert 1903], s. 149f), srov. u Vopěnky Tvrzení 8: "Buďte p, q rozběžky. Potom lze vytvořit přímku, která je kolmá na obě tyto přímky." ([Vopěnka 2004], s. 858f). Zdánlivě paradoxnímu Hilbertovu výrazu "neprotínající se nerovnoběžky" tedy odpovídají v češtině *rozběžky*.

[52] Viz ([Vopěnka 2004], s. 877).

$\sphericalangle A'B'C'$."[53]

Axiom v této podobě platí i pro případ, kdy budou dva trojúhelníky zrcadlově převrácené, takže pouhým posunutím a rotací v rovině je nebude možno překrýt. Jde o nejzákladnější tvar, ze kterého jsou u Hilberta následně odvozeny věty o shodnosti trojúhelníků jako důsledky.[54] Dalšími jeho důsledky jsou v *Grundlagen* např. věta o rovnosti úhlů při základně rovnoramenného trojúhelníka[55] nebo věta o existenci pravého úhlu.[56]

Předkládáme zde potenciální možnost, jak mohl Hilbert k důkazu nezávislosti III 5 v § 11 dojít. M. Toepell se v této souvislosti vyjadřuje pouze k tomu, že se důkaz objevil až v *Grundlagen*, v přednáškách (EG) z roku 1898 včetně jejich vypracování (SG) byl uveden důkaz jiný.[57]

Budeme se snažit doložit, že zde, ač to explicitně neuvedl, Hilbert navazoval na práce Hermanna Minkowského z oboru geometrie čísel. Postupovat budeme chronologicky a nejdříve tedy tyto práce představíme. Navazujeme přitom na korespondenci mezi Minkowskim a Hilbertem, týkající se Hilbertových křivek z přelomu let 1890/1891 (viz kap. 5.2.1).[58]

6.6.1 Minkowského geometrie (1891) oproti geometrii Minkowského časoprostoru

Zásadní objevy Minkowského v souvislosti s konvexními tělesy se datují od roku 1891. První dopis, který odeslal Hilbertovi po výše zmiňovaném dopise k tématu Hilbertových křivek (kap. 5.2.1), následoval po půl roce a je datovaný 11. 6. 1891. V něm je první Minkowského zmínka o konvexitě, a to ihned n-rozměrných těles.[59]

[53]"Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$; $AC \equiv A'C'$; $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ gelten, so ist auch stets die Kongruenz $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ erfüllt." ([Hilbert 1899], s. 14; překlad s. 68). Ze skupiny axiomů III jde o jediný axiom, jehož nezávislost je v *Grundlagen* dokazována.

[54]U Eukleida je formulována rovnou shodnost trojúhelníků podle věty (sus) v tvrzení IV první knihy, které v sobě mimo jiné Hilbertovo vyjádření z axiomu III 5 zahrnuje: "Když mají dva trojúhelníky dvě strany (střídavě) s dvěma stranami stejné a úhly stejnými stranami sevřené mají stejné, budou i základnu základně míti rovnou a trojúhelník s trojúhelníkem bude stejný i ostatní úhly s ostatními úhly, proti nimž leží stejné strany, (střídavě) budou stejné." ([Eukleidés 1907], s. 4). Pro případ, kdy budou oba trojúhelníky zrcadlově převrácené, platí i u Eukleida celé tvrzení, takže je umožněno překlápění trojúhelníků. Eukleidés tím však narušuje dokonalou strnulost své geometrie, neboť tímto do ní zavádí pohyb (pouhá rotace by se za pohyb nepovažovala a uplatnil by se na ni jen axiom o shodnosti překrývajících se objektů – "Co se kryje jedno jest."). Viz ([Eukleidés 2007], s. 14, 48f).

[55]Viz u Hilberta Věta 11 ([Hilbert 1899], s. 15f; překlad, s. 68). Už Bolzano se ptal, proč je u Eukleida důkaz této věty prostřednictvím prodloužení ramen a shodnosti trojúhelníků pod základnou tak složitý, když je jejím objektivním důvodem jen shodnost onoho rovnoramenného trojúhelníku se sebou samým při přeznačení vrcholů při základně ([Bolzano 1967], s. 212f). Hilbertův axiom III 5 má vskutku tento Bolzanem zmíněný význam (tedy onu nepřímou shodnost trojúhelníků).

[56]Viz u Hilberta Věta 14 ([Hilbert 1899], s. 17f; překlad, s. 69). Tato věta v prvních vydáních chyběla. Hilberta na to upozornil Adolf Hurwitz v dopise ze 17. 5. 1908 v rámci svých korektur připravovaného třetího vydání Hilbertových *Grundlagen* a zaslal také důkaz věty. Viz (Hurwitz Hilbertovi, 17. 5. 1908; Cod. Ms. D. Hilbert 160). Hilbert jej ale již znal, neboť jej uvedl v předchozích přednáškách (EG), jen jej v *Grundlagen* vynechal, viz ([Hilbert 2004], s. 248). Ke třetímu vydání *Grundlagen* z roku 1909 poznamenejme, že se na jeho korekturách podílel také Hilbertův asistent Alfred Haar (1887–1933), na což vzpomíná v dopise Hilbertovi z 3. 7. 1930 k příležitosti vydání sedmého (Cod. Ms. D. Hilbert 124).

[57]Viz ([Toepell 1986], s. 168) a v našem textu níže, kap. 6.6.3. V (GG) axiom byl uveden, jeho nezávislost však řešena nebyla, a totéž platí pro další axiomy shodnosti. Viz ([Toepell 1986], s. 89).

[58]Poněvadž se v terminologii velmi snadno zamění termíny, které znamenají zcela rozdílné věci, budeme se snažit o širší výklad a rozdíly vyjádříme i nadpisy.

[59]Minkowski udával jím objevený vzorec pro objem redukovaného prostoru dané formy v množině všech forem (tj. prostoru kde se vyskytují k dané formě formy redukované), složeného doslova "z konečného počtu kontinuí". To potvrzuje, že se velmi brzo věnoval teorii množin. Rovnou v n rozměrech je pak psána i jeho kniha *Geometrie der Zahlen* z roku 1896. Oproti tomu se na důležitých přednáškách z Halle a Chicaga se omezuje na rozměry tři (viz [Minkowski 1893]; překlad s. 148).

Veřejně konvexitu zmíní poprvé na kongresu v Halle z téhož roku, a spolu s ní poprvé také termín *geometrie čísel* jako své vědy a první podobu své slavné věty o mřížkových bodech.[60] Následně píše velmi dlouho stejnojmennou knihu *Geometrie der Zahlen*. Hilbert její vydání ve zmíněném dopise Kleinovi, vydaném jako článek v roce 1895, odkazuje taktéž k roku vydání 1895, ač její faktické vydání spadá do roku 1896.[61]

Uvedeného kongresu v Chicagu se Minkowski ani Hilbert nezúčastnili. Byly zde jen přečteny texty jejich přednášek. Minkowského přednáška shrnovala základní východiska z Minkowského zmiňované pozdější knihy *Geometrie der Zahlen*. V úvodu Minkowski zmiňuje, že vychází z Dirichletovy práce, ale na rozdíl od něj se omezuje na problémy, kde vystupuje nekonečno, tj. celá mřížka, nejen její část. V přednášce pak stanovuje jistou obecnou funkci pro vzdálenost (*Strahldistanz*) takovou, že jednotkovým tělesem by bylo tzv. hvězdicové těleso (*Strahlenkörper* či *Eichkörper* der Strahldistanzen), kde úsečka mezi každým jeho bodem a středem leží celá v tělese.[62] Následně specifikuje, že pokud daná konkrétní podoba této funkce bude splňovat trojúhelníkovou nerovnost, budou základní jednotková tělesa vždy konvexní. Ve trojrozměrném případě a vycházeje z ternární kvadratické formy $F = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz$ položenou rovnu konstantě půjde o elipsoidy.

Tuto geometrii označil Hilbert termínem *Minkowského geometrie*. Co se týče terminologie, ujasněme zde jednak, že *Minkowského geometrie* je prostorem, kde se uskutečňuje *geometrie čísel* jako věda a jednak zdůrazněme, že nejde o tutéž geometrii jako geometrie *Minkowského časoprostoru* z oboru fyziky, již zavedl až na přednášce v Kolíně v roce 1908.[63]

Od oněch jednotkových konvexních těles pak Minkowski odvozuje i vlastnosti mřížky. Na základě vztahů mezi obalujícími krychlemi dosáhne své věty o mřížkových bodech a dalších důsledků pro algebru.[64]

6.6.2 Hilbertova geometrie (1894) oproti geometrii Hilbertových Grundlagen

Hilbert vede v roce 1894 přednášky (GG) o neeukleidovské geometrii.[65] Jejich plodem je zmíněný dopis Kleinovi, publikovaný o rok později jako článek [Hilbert 1895], který byl od druhého vydání *Grundlagen* uveden jako první příloha díla. Hilbert se v něm zaměřuje na větu o úsečce jako nejkratší spojnici dvou bodů.[66] Hilbert přičítal této větě přičítal této větě (tj. i ekvivalentní větě o trojúhelníkové nerov-

[60] Viz ([Minkowski 1890a], s. 64). V geometrii čísel umožňuje geometrická interpretace aritmetických vektorů převádět algebraické problémy na problémy geometrické, ty následně řešit a výsledky opět interpretovat algebraicky. Geometrie čísel tak představuje protipól analytické geometrie. Srov. [Zeman 2018].

[61] Kniha je avizována s rokem 1896 i v textu Minkowského přednášky z kongresu v Chicagu v roce 1893 (Viz ([Minkowski 1893], s. 8; překlad s. 148)). Sborník textů z kongresu však vyšel také až roku 1896, proto byla pravděpodobně tato poznámka přidána dodatečně.

[62] Viz ([Minkowski 1893], s. 8f; překlad s. 149).

[63] Rozdíl naznačuje už to, že na rozdíl od časoprostoru platí v probírané *Minkowského geometrii* axiom o rovnoběžkách IV, a tato geometrie proto v tomto smyslu neeukleidovská není.

[64] Hilbert však později uvádí, že objev tohoto postupoval u Minkowského v opačném pořadí, což nebyl jev neobvyklý (viz [Poincaré 1904], s. 32f), srov. ([Fiala 2010], s. 205). Používal elipsoidy a rozeznal, že jejich zásadní vlastností, pro kterou mohl dospět k těmto svým výsledkům, byla jejich konvexnost. Konvexní tělesa se před Minkowskim téměř nepoužívala. Výjimkou však budiž Helmholtzovo vypuklé zrcadlo, kde též užívá synonyma konvexní zrcadlo ([Helmholtz 1870], s. 105), srov. ([Fiala 2010], s. 192). Dále Minkowski rozeznal, že význam těchto těles pro základy geometrie spočívá v propojení s větou o trojúhelníkové nerovnosti.

[65] V nich již podle vzoru Paschových *Vorlesungen* jsou do samostatné skupiny vyčleněny i axiomy shodnosti včetně axiomu o shodnosti trojúhelníků. Jelikož se shoduje s výše uvedeným, budeme jej taktéž značit III 5.

[66] Tato věta v základním textu *Grundlagen* chyběla. Oproti tomu ji např. Helmholtz stanovil jako axiom.

nosti) významnou roli nejen v teorii čísel, ale také v teorii ploch (křivek) a variačním počtu (mechanice).[67]

Platnost věty lze v obyčejné geometrii dokázat na základě věty o trojúhelníkové nerovnosti.[68] Ta u Eukleida přes hierarchii ostatních vět přes hierarchii ostatních vět[69] závisí kromě jiných axiomů shodnosti[70] i na axiomu o shodnosti trojúhelníků III 5.[71] Hilbertovým cílem je nyní dokázat, že věta o úsečce jako nejkratší spojnici dvou bodů nevyžaduje axiomy shodnosti III a lze ji dokázat již při stanovení pouhých axiomů incidence, uspořádání a spojitosti (tj. skupin I, II, V ve značení pozdějších *Grundlagen*).[72]

Prostředkem je mu k tomu prostorový Cayley-Kleinův model neeukleidovské geometrie (viz výše, kap. 6.5), ve kterém namísto koule používá jako hranici libovolné konvexní těleso.[73] Tímto zobecněním Hilbert ruší vlastnost původního modelu, že shodnosti jsou dány transformací, která zobrazí kouli na sebe, a tedy provede zamýšlený záměr, a to vyhnout se nejen axiomu o rovnoběžkách IV, ale také axiomům shodnosti III. Pro neeukleidovskou vzdálenost, definovanou jako logaritmus dvojpoměru, však následně v modelu dokazuje vlastnost trojúhelníkové nerovnosti a odtud i platnost věty o nejkratší spojnici.

Postupuje tedy opačným směrem než Minkowski. Minkowski stanovil obecně vzdálenost, při speciálním případu, kdy by pro vzdálenost platila trojúhelníková nerovnost, dokazuje, že jednotkové těleso by již bylo tělesem konvexním. Hilbert postuloval konvexní těleso, do kterého uzavřel geometrii s konkrétně definovanou vzdáleností, pro níž dokázal trojúhelníkovou nerovnost. Na Minkowského se v dopise odkázal pouze poznámkou, že jím představené konvexní těleso používá Minkowski v *Geometrie der Zahlen*, kde pro něj našel analytickou definici.[74]

Klein se v odpovědi na dopis vyjadřuje v podobném duchu, totiž, že již předtím diskutoval s Heinrichem Weberem (1842–1913), že v "Minkowského nekonvexním[75] tělese tkví jistý druh neeukleidovského určení míry."[76] Jednak poznamenejme, že "Minkowského konvexní těleso" zde neoznačuje nějaké konvexní těleso speciálnější, ale jen zcela libovolné. To, že jej Klein spojuje s Minkowskim podtrhuje fakt, že v této době neoperoval s tímto pojmem nikdo jiný než Minkowski. Dále uveďme, že "neeukleidovským" určením míry Klein naráží na onen logaritmus dvojpoměru, přítomný též v jeho vlastním modelu pro neeukleidovskou geometrii, v němž je základním tělesem koule (viz kap. 6.5). Klein říká tedy v podstatě jen to, že možnost

[67] Viz ([Hilbert 1900], s. 292, 303f).

[68] Tj. trojúhelníkové nerovnosti geometrické, výslovně, že součet dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí.

[69] Tj. zmíněné větě o větší úhel proti většímu straně ([Eukleidés 2007], s. 59), větě o rovnoramenném trojúhelníku a větě o vnějším úhlu.

[70] Tj. přenášení úseček a úhlů.

[71] Viz ([Hilbert 1900], s. 303), srov. ([Hilbert 1909], s. 345). V (GG) i po zavedení míry věta o trojúhelníkové nerovnosti chybí. Věta o nejkratší spojnici je zde uvedena jenom v dodatečné poznámce s odkazem na zmíněný dopis Kleinovi.

[72] Hilbert se tomto svém objevu zmiňuje Hurwitzovi v dopise z 29. 7. 1894. Píše, že větu o nejkratší spojnici je možné odvodit již velmi brzy, pouze z projektivních axiomů, při "jistém omezení", čímž s nejvyšší pravděpodobností míní ono zavedení míry, splňující trojúhelníkovou nerovnost. "Ich habe nämlich während meines Collegs bemerkt, dass dieser Satz unter einer gewissen Einschränkung schon sehr früh aus den Axiomen der projektiven Geometrie abzuleiten ist und dieses schien mir von einigem Interesse." (Hilbert Hurwitzovi, 29. 7. 1894. Viz Cod. Ms. D. Hilbert 160: 256/2). O vlivu Minkowského se zde tedy nezmiňuje.

[73] Hilbert užívá doslova termín "těleso, nikde konkávní".

[74] "[...] diesen [...] nirgends konkaven Körpern auch in den zahlentheoretischen Untersuchungen von H. Minkowski (Vgl. "Geometrie der Zahlen", Teubner, 1896.) eine wichtige Rolle zukommt, und daß H. Minkowski für dieselben eine einfache analytische Definition gefunden hat." ([Hilbert 1895], s. 114).

[75] p. překl.: sic! Jde pravděpodobně o Kleinovu chybu, budto konvexním nebo nekonkávním. Nekonvexní tělesa jsou u Minkowského pouze ona obecnější tělesa hvězdicová (*Strahlenkörper*), kde již nemusí trojúhelníková nerovnost platit.

[76] Viz ([Toepell 1986], s. 107).

zobecnění jeho modelu na libovolné konvexní těleso jej nebo Webera již předtím napadla. Byl to nicméně Hilbert, který ono zobecnění v tomto dopise předložil.

Tato geometrie získala později také označení *Hilbertova geometrie*.[77] Jde opět o ojedinělou Hilbertovu práci, témata konvexního tělesa a úsečce jako nejkratší spojnice dvou bodů sám dále nerozvíjel.[78]

6.6.3 Situace v Grundlagen (1899)

Hilbert dokazuje v paragrafu § 11 *Grundlagen* nezávislost zmíněného axiomu III 5. Zachovány mají být axiomy I, II, III 1–4, IV a V, tedy výslovně i zbylé axiomy skupiny III.[79] Hilbert zde, podobně jako v případě jeho důkazu nezávislosti axiomu IV, nepostupuje přímým důkazem,[80] ale uvedením modelu. V něm definuje standardním způsobem přenášení úhlů, avšak přenášení úseček zavádí jinak, především je tedy jinak definována vzdálenost pomocí speciální konkrétní funkce[81]

$$f = \sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Při této funkci, položené rovnu jedné a vůči počátku $(0,0,0)$, bude jednotkovou plochou plocha nakloněného elipsoidu.[82] Na Minkowského se zde však Hilbert neodkazuje. Funkci, která indukuje zrovna tento tvar elipsoidu, zvolil asi zcela náhodně tak, aby zapadla do Minkowského obecné definice vzdálenosti a aby nešlo o jednotkovou kouli. Na základě své práce na nejkratší spojnici z dopisu Kleinovi již ví, že v takovém případě nebude axiom III 5 obecně platit. Tento jev prokáže Hilbert dále v textu § 11 na jednom konkrétním příkladu. Jelikož je tento model konzistentní, je tím následně dokázáno, že je axiom III 5 nezávislý.[83]

V porovnání se zmíněným předchozím Hilbertovým důkazem z přednášek (EG) a jejich vypracováním (SG)[84] je v aktuálním zjevné notné zjednodušení. Pokud však Hilberta jednodušší důkaz z *Grundlagen* napadl v návaznosti na jeho práci o nejkratší spojnici a na zmíněné Minkowského práce, mohlo se to stát již před přednáškami (EG). V rozmezí necelého jednoho roku mezi časem, kdy Hilbert přednášky vedl, a kdy *Grundlagen* vydal, žádné zásadní nové práce, které by podobu důkazu mohly ovlivnit či inspirovat, vydány nebyly.

Druhým a posledním místem z celé knihy, kde by se mohl projevit vliv Minkowského geometrie čísel byla poslední, sedmá kapitola *Grundlagen* a Hilbertovo algebraické pojetí eukleidovských konstrukcí. Minkowski ve své doktorské tezi vyslovil domněnku, že ne každý polynom lze rozložit na součet čtverců. Větu dokázal již Hilbert sám, avšak na základě svých vlastních výzkumů [Hilbert 1888]. Z nich také následně plynul 17. Hilbertův problém o vyjádření pozitivně definitních funkcí

[77]Viz ([Nádeník 1972], s. 21). Zde opět možné nedorozumění; Nejde o geometrii z Hilbertových *Grundlagen*, ve kterých je axiomatizována obyčejná geometrie eukleidovská, a to už jen proto, že na rozdíl od ní neplatí v této *Hilbertově geometrii* axiom o rovnoběžkách IV.

[78]Téma však uvedl v roce 1900 jako čtvrtý Hilbertův problém.

[79]Viz pozn. 39.

[80]Tj. že se geometrie po odebrání axiomu nezhroutí

[81]Oproti eukleidovské vzdálenosti, která by byla ve tvaru

$$f = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

[82]Jde tedy opět o konvexní těleso, které nutně splňuje trojúhelníkovou nerovnost a v takovéto geometrii bude platit věta o úsečce jako nejkratší spojnici dvou bodů. Ani jednu z těchto tří vlastností zde však Hilbert nejmenuje, neboť sleduje jiné cíle, než v dopise Kleinovi, totiž pouze pomocí oné definice vzdálenosti zamezit platnosti axiomu III 5.

[83]Poznamenejme, že věta o úsečce jako nejkratší spojnici v základním textu *Grundlagen* uvedena není a stejně tak ani věta o trojúhelníkové nerovnosti. Uvedena je pouze věta o větší straně proti většímu úhlu.

[84]Viz ([Hilbert 2004], s. 247f, 325f). Je nutno si v něm představit, že přenášení úseček nebude v celém prostoru jednotné, nýbrž v jedné speciální rovině bude probíhat podle jiných pravidel.

jako součtu čtverců racionálních funkcí proměnných s racionálními koeficienty.[85] Blíže jsme se však tématu nevěnovali, neboť leželo mimo vymezený rozsah.

6.6.4 Čtvrtý Hilbertův problém jako Hilbertova axiomatická interpretace Minkowského geometrie (1900)

Věta o úsečce jako nejkratší spojnici je tedy splněna ve všech třech předchozích případech, protože je zavedena taková míra, která splňuje trojúhelníkovou nerovnost. Dle Hilberta v nich přitom neplatí axiom o shodnosti trojúhelníků, na němž věta u Eukleida spočívá.[86] Místo něj však pro případ *Minkowského geometrie* platí ona věta o trojúhelníkové nerovnosti jako axiom. Tato úvaha už mohla pocházet nikoliv od Minkowského, nýbrž od Hilberta samotného, neboť axiom o trojúhelníkové nerovnosti nebyl Minkowskim explicitně nikde zmíněn a uvedený systém byl čistě hypotetický.

Poprvé se Hilbert takto vyjádřil až na kongresu v Paříži v roce 1900 v rámci svého čtvrtého problému,[87] tedy poté, co do problematiky získal vhled díky svým přednáškám z roku 1898 a díky práci na *Grundlagen*. Stejnou interpretaci podává Hilbert ještě ve vzpomínkové řeči po Minkowského smrti v roce 1909.[88] Kvůli záměně axiomu III 5 za trojúhelníkovou nerovnost jde podle Hilberta o "jednu z geometrií, které jsou Eukleiovské geometrii nejblíže".[89] V *Minkowského geometrii* mají totiž jinak platit všechny věty geometrie eukleidovské, schematicky:

I–V (~~III 5~~) + trojúh. nerovnost ⇒ úsečka jako nejkratší spojnice

Dle Hilberta se *Minkowského geometrie* vyznačuje dvěma vlastnostmi:[90]

1. dvě úsečky jsou shodné pouze prostřednictvím rovnoběžného posunutí, nikoliv prostřednictvím otočení,

2. jednotková vzdálenost je definovaná namísto jednotkové sféry z eukleidovské geometrie plochou libovolného konvexního tělesa.

V případě pátého problému z Paříže, komentujícího diferencovatelnost Lieho grup, který jsme již zmínili výše (viz kap. 4.1), Hilbert zmiňuje Minkowského ještě jednou a poznamenává, že v *Geometrie der Zahlen* dokázal, že pokud pro stanovenou vzdálenost (v n-rozměrném prostoru) platí trojúhelníková nerovnost, budou také existovat jisté derivace této funkce vzdálenosti.[91]

6.6.5 Shrnutí

Stejně jako Minkowski operuje Hilbert u *Hilbertovy geometrie* z roku 1894 s pojmem konvexní těleso, a to v době, kdy jeho používání není vůbec běžné. Od jara 1894 byl také Minkowski zpět v Königsbergu. Jistě o větě o nejkratší spojnici hovořili a už kvůli zmíněnému Hilbertovu odkazu na Minkowského práci v kontextu s konvexním tělesem se nabízí domněnka, že výše uvedená *Hilbertova geometrie*, umožňující důkaz věty o nejkratší spojnici jen z axiomů I, II a V, napadla Hilberta na základě myšlenek Minkowského. Tuto domněnku vyjádřil explicitně O. Blumenthal[92]

[85] Viz ([Fiala 2011], s. 23f).
[86] Viz ([Hilbert 1909], s. 344f).
[87] Viz ([Hilbert 1900], s. 303). Odkazuje se přitom opět na Minkowského *Geometrie der Zahlen* z roku 1896 [Minkowski 1896].
[88] Viz ([Hilbert 1909], s. 345f).
[89] Srov. výše pro podobné vyjádření pro Riemannovu geometrii vůči hyperbolické.
[90] Jak dle ([Hilbert 1900], s. 303), tak v ([Hilbert 1909], s. 345). Poznamenejme, že tyto vlastnosti neformuloval Minkowski takto slovně, ale v analytických vzorcích.
[91] Viz ([Hilbert 1900], s. 306).
[92] Viz ([Blumenthal 1935], s. 403; překlad s. 130).

a je patrná i z Kleinova vyjádření, že "otázka po metrické geometrii, kompatibilní s geometrií projektivní, dosáhla v Hilbertově a Minkowského pojetí pozoruhodného obratu".[93] Své úvahy o konvexních tělesech v kontextu úsečky jako nejkratší spojnice dvou bodů z dopisu Kleinovi pak Hilbert mohl užít i k důkazu nezávislosti axiomu III 5 v *Grundlagen*.

Minkowského cíle se přitom vždy týkaly teorie čísel, svou geometrii stanovil analyticky a její axiomatika pro něj roli nehrála. Dle H. Zassenhause nebral Minkowski na Hilbertovu aritmetizaci geometrie takový zřetel, jaký kladl dříve Hilbert na Minkowského intuitivní geometrii čísel. Minkowski získával věty o číslech užitím geometrického názoru a Hilberta právě to podnítilo k hledání neintuitivní geometrie.[94]

6.7 Role projektivní geometrie a grupového pojetí

Projektivní geometrie v *Grundlagen* scházela. Sice by u Hilberta (na rozdíl od Pasche) již nezáleželo na tom, zda ideální elementy existují nebo ne, ale musely by vyhovovat axiomům.[95] Jejich zavedení do geometrie by sice bylo konzistentní s axiomy incidence I a při jisté obměně pomocí oddělování i axiomy uspořádání II, axiomy shodnosti III by však vedly na spor. Důvodem mohlo být, že v Göttingen byla projektivní geometrie již vyučována v rámci jiného předmětu A. Schoenfliessem.[96]

V celé knize také Hilbert nepoužívá způsob výstavby geometrie pomocí grup pohybů, jako by tyto výsledky zcela opomíjel (viz kap. 4.1). Dle Poincarého, který knihu recenzoval, však leží souvislost hlouběji, a pokud si pod každou z Hilbertem stanovených geometrií taktéž představíme jednu grupu pohybů, zjistíme, že je jeho pojetí s teoriemi Lieho i Helmholtze zcela kompatibilní.[97] Např. jeho nearchimédovská geometrie obsahuje celou grupu eukleidovskou a některé pohyby navíc. Geometrii, vybudovanou na základě grup pohybů, včetně citace zmíněných předchůdců uvedl Hilbert teprve v následujícím článku *Über die Grundlagen der Geometrie* [Hilbert 1902], jehož význam pro topologii jsme již zmínili při představování Hilbertových křivek v kap. 5.2.1.[98]

6.8 Hilbertovy důvody

Standardním výkladem hlavního důvodu pro vznik Hilbertova díla je, že v něm chtěl Hilbert vyjasnit vzájemné logické závislosti mezi hlavními větami eukleidovské geometrie, a tento cíl měl Hilbert sledovat i uvedením svého vlastního, nového systému axiomů, které měly být podány v co nejpřehlednějším a nejvhodnějším tvaru. Tento systém měl zjednodušit systém Eukleidův a zacelit jeho nedostatky.[99] Podle Hermanna Weyla chtěl Hilbert ve svém díle především obrátit trend, nastolený Peanem a Veronesem, jejichž výstavba geometrie byla pro vší snahu o minimalizaci počtu nedefinovaných pojmů velmi obtížně srozumitelná. Stanovením bodů, přímek a rovin za základní pojmy a incidence, uspořádání (bytí mezi) a shodnosti za základní vztahy měl Hilbert významně napomoci svým čtenářům k pochopení svého díla,

[93] Viz ([Toepell 1986], s. 108). Kleinův výrok lze nejspíše chápat tak, že se zde Hilbert ptá po projektivní geometrii, kompatibilní s geometrií metrickou. Minkowski však nemá napojení na projektivní geometrii, a není tak jasné, proč zde Klein jmenuje i jej.
[94] Viz ([Zassenhaus 1975] s. 452–453).
[95] Viz ([Toepell 1986], s. 239).
[96] Viz ([Toepell 1986], s. 143).
[97] Viz ([Poincaré 1903], s. 21f).
[98] Některá témata z tohoto spisu, např. stanovené axiomy či transformace, jsou probrána v ([Trkovská 2015], s. 128f).
[99] Viz např. ([Epple 1999], s. 401).

neboť se tím zcela záměrně přiklonil k tradici, všem dobře známé z Eukleidových *Základů*.[100]

Pro porozumění Hilbertovým motivacím je však nutné zmínit, čeho si všiml Felix Klein. Při porovnání *Grundlagen der Geometrie* se záznamy dřívějších Hilbertových přednášek je zřetelné, že se Hilbertovy důvody pro novou axiomatizaci geometrie měnily v čase. Dle Kleina bylo konečným Hilbertovým cílem vyjasnění situace ohledně axiomů spojitosti.[101] K tomuto názoru se přikláníme nejvíce a propojení mezi spojitostí a bezespornosti v Hilbertově pojetí jsme se výše v tomto článku pokusili objasnit.

Dle Blumenthala bylo Hilbertovým cílem vybudovat úplnou axiomatiku zcela mimo nauku o celých číslech, což mu mělo sloužit jako argument proti pojetí Leopolda Kroneckera (1821–1891), podle něhož jednoznačně existují pouze celá kladná čísla a z ostatních matematických objektů mají mít legitimní platnost jen ty, které lze z celých čísel v konečném počtu kroků zkonstruovat.[102] Geometrie měla být pro tento Hilbertův záměr tím nejpřístupnějším oborem. Ačkoliv však při stanovování axiomů geometrie číslo zavedeno nebylo, při dokazování bezespornosti geometrie se Hilbert o aritmetiku opírá.

Hilbert přitom pokládá založení geometrie za obtížnější než založení aritmetiky. O teorii čísel a jejím vztahu k ostatním oborům se ve své předmluvě k *Zahlbericht* z roku 1897 vyjadřuje takto:

> “[. . .] jednoduchost jejích základů, přesnost jejích pojmů a čistota jejích pravd; tyto vlastnosti jí náležejí od začátku, zatímco ostatní matematické vědní obory musely projít kratším nebo delším vývojem, než byly všude splněny požadavky na jistotu v pojmech a přísnost v důkazech.”[103]

Hilbert dále v textu uvádí, že cílem moderní aritmetizace geometrie, kterou zapříčinily výzkumy neeukleidovské geometrie, je zpřísnění geometrických důkazů pomocí co nejpřímějšího zavedení čísla (viz kap. 5.3.5).

6.9 Význam díla

Axiomy v Hilbertově pojetí nebyly založené na názoru, jako axiomy Eukleidovy či Paschovy, a nebyly tak chápány jako evidentně pravdivá tvrzení, která mají oporu v reálném světě. Představovaly oproti tomu množinu nedokázaných, ale vždy pravdivých vět, kterou při budování jisté abstraktní teorie stanovuje autor zcela libovolně, pokud jen jsou jednotlivé axiomy vzájemně bezesporné. V Hilbertově pojetí pak za předpokladu důkazu bezespornosti axiomů vždy existují také ony základní pojmy, tj. systémy věcí, které jsou prostřednictvím axiomů implicitně definovány. Hilbert tak obrátil dosavadní vztah mezi existencí a bezespornosti, čímž se zapsal poprvé do dějin logiky. Jelikož implicitní definice neobjasňovaly, co konkrétně jednotlivé systémy věcí označují, a zda vůbec něco, byly tyto definice ontologicky neutrální, což bylo v souladu s dobovým trendem neutralizovat metafyzické otázky v matematice.[104] Hilbert je proto nyní znám i v dějinách filosofie.

[100]Srov. ([Weyl 1944], s. 265), ([Reid 1970], s. 60).

[101]Viz ([Klein 1908], 2. díl, s. 200), více k tématu viz ([Toepell 1986], s. 199).

[102]Viz ([Blumenthal 2012], s. 176), srov. ([Blumenthal 1935], s. 391; překlad, s. 123), více k tématu viz ([Ewald 2006], s. 942).

[103]“[. . .] die Einfachheit ihrer Grundlagen, die Genauigkeit ihrer Begriffe und die Reinheit ihrer Wahrheiten; ihr kommen diese Eigenschaften von Hause aus zu, während andere mathematische Wissenszweige erst eine mehr oder minder lange Entwicklung haben durchmachen müssen, bis die Forderungen der Sicherheit in den Begriffen und der Strenge in den Beweisen überall erfüllt worden sind.” ([Hilbert 1897], s. 63).

[104]Viz např. ([Epple 1999], s. 401).

Kapitola 7

Shrnutí a výsledky výzkumu

V této práci jsme Hilbertovo dílo zasadili do kontextu doby. Představili jsme Hillbertovo sociální prostředí, především na univerzitě v Göttingen. Dále jsme uvedli, co Hilbertovu dílu v oboru předcházelo a jaké vlivy na jednotlivé disciplíny šlo vysledovat. V našem původním komentáři k prvním dvěma kapitolám jsme se pak pokusili dílo zpřístupnit i laikovi v oboru axiomatizace geometrie. Podmínkou bylo stanovení nového systému axiomů pro geometrii, tradovanou od Eukleidových *Základů*. Zdůraznili jsme v tomto dle našeho názoru hlavní Hilbertův cíl, a to dokázat, že geometrie, běžně nazývaná eukleidovská, nemusí být nutně spojitá, a že je tak i její nespojitá varianta bezesporná. Proto Hilbert zavádí rozlišení mezi geometrií *eukleidovskou* a geometrií *kartézskou*, která představuje její speciální případ jakožto jediná spojitá *eukleidovská* geometrie a teprve jejíž aritmetizace bude převodem na spojitou aritmetiku reálných čísel.

Můžeme si položit otázku, zda formalistická matematika, která není založena na názoru a která povede až k digitalizaci, neklade chybný obecný standard.[1] Důsledky tohoto pojetí matematiky, jichž si Hilbert všiml, jej mohly vést k tomu, aby ve svých pozdějších přednáškách, nazvaných Anschauliche Geometrie z akademického roku 1920/1921 [Hilbert – Cohn-Vossen 1996] zaujal diametrálně opačné stanovisko a představil studentům geometrii, která nebyla redukována na dokonale přesné věty, ale byla zato pro studenty snadněji pochopitelná díky svému založení v názoru, analogicky jako u geometrií z děl Pasche či Eukleida.[2] V té době však sám pokračoval v práci na abstraktní teorii důkazu. Proto se domníváme, že oba tyto známé Hilbertovy příspěvky k filosofii matematiky a formální logice, tj. formalismus i teorie důkazu, mají své kořeny již při hledání axiomatizace a aritmetizace geometrie v *Grundlagen der Geometrie*.

Z prozkoumaných částí díla jsme dále nově zdůraznili vliv Minkowského na Hilbertův důkaz nezávislosti axiomu o shodnosti trojúhelníků. Nešlo přitom o výsledek z nějakého konkrétního Minkowského spisu, ale o výsledek denního setkávání, posléze častého dopisování a výměny názorů a poznatků o nových matematických objevech.

[1] Viz ([Fiala 2005], s. XXXIX).
[2] Srov. ([Poincaré 1904], s. 32f).

Kapitola 8

Překlad Grundlagen der Geometrie

> "Veškeré lidské poznání tak tedy začíná názory, od nich postupuje k pojmům a končí idejemi."

KANT, Kritika čistého rozumu, Nauka o elementech, díl 2., odd. 2[1]

Úvod.

[2]Geometrie vyžaduje – stejně jako aritmetika – ke své logicky správné výstavbě pouze několik jednoduchých zásad. Tyto zásady se nazývají AXIOMY geometrie. Stanovení axiomů geometrie a prozkoumání toho, jak spolu souvisejí [*ihres Zusammenhanges*], bylo od dob EUKLEIDA vytyčeným cílem v mnohých významných matematických pojednáních. Tento úkol vede na logickou analýzu našeho názoru o prostoru.

Tato studie je dalším pokusem, stanovit pro geometrii ÚPLNÝ a CO NEJJEDNODUŠŠÍ systém axiomů a odvodit z nich nejdůležitější geometrické věty tak, aby význam příslušných skupin axiomů byl přitom co možná nejzřetelnější, a stejně tak i dosah důsledků, které lze z jednotlivých axiomů odvodit.

První kapitola. Pět skupin axiomů.

§ 1. Prvky geometrie a pět skupin axiomů

Výměr. Uvažujeme tři různé systémy věcí: věci PRVNÍHO systému nazveme *body* a označíme je $A, B, C, \ldots$; věci DRUHÉHO systému nazveme *přímkami* a označíme je $a, b, c, \ldots$; věci TŘETÍHO systému nazveme *rovinami* a označíme je $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; body se také nazývají *prvky lineární geometrie*, body a přímky se nazývají *prvky rovinné geometrie* a body, přímky a roviny se nazývají *prvky prostorové geometrie* neboli *prostoru.*

Body, přímky a roviny uvažujeme v jistých vzájemných vztazích, a pro jejich označení použijeme slova jako "LEŽET", "MEZI", "SHODNÝ"; přesný a pro matematické účely úplný popis těchto vztahů dostáváme prostřednictvím *axiomů geometrie.*

[1]p. překl.: CrV B 730. Viz ([Kant 2001], s. 425).

[2]p. překl.: Paginaci v odkazech měníme vzhledem k této disertci. Odkazy na nepřeložené přílohy a dodatky, jejichž překlad není součástí této práce značíme ponámkou *originál.* Překlady neprošly odbornou redakcí.

Axiomy geometrie můžeme rozdělit do pěti skupin; každá z těchto skupin vyjadřuje jisté vzájemně související základní fakta o našem názoru.

I	1–8.	axiomy *incidence,*
II	1–4.	axiomy *uspořádání,*
III	1–5.	axiomy *shodnosti,*
IV		axiom *o rovnoběžkách,*
V	1–2.	axiomy *spojitosti.*

§ 2. Skupina axiomů I: axiomy incidence[3]

Axiomy této skupiny vytvářejí mezi výše zavedenými věcmi: body, přímkami a rovinami vlastnost *být incidentní* a znějí následovně:

I 1. *Ke dvěma bodům A, B vždy existuje přímka a, která je incidentní jak s bodem A, tak s bodem B.*

I 2. *Ke dvěma bodům A, B existuje* NEJVÝŠE *jedna přímka, která je incidentní jak s bodem A, tak s bodem B.*

Zde a dále v textu budeme při zmínce o dvou, třech, ... bodech, resp. přímkách, rovinách, mít na mysli vždy RŮZNÉ body, resp. přímky, roviny.

Namísto "BÝT INCIDENTNÍ" budeme používat také jiné obraty, např. PŘÍMKA a PROCHÁZÍ BODY A A B, PŘMKA a SPOJUJE BODY A A B NEBO A S B, BOD A LEŽÍ NA PŘMCE a, BOD A JE BODEM PŘÍMKY a, JE DÁN BOD A NA PŘÍMCE a, atd. Pokud bod A leží na přímce a a kromě toho také na jiné přímce b, používáme také obraty: PŘÍMKY a A b SE PROTÍNAJÍ V BODĚ A, MAJÍ PRŮNIK A, atd.

I 3. *Na přímce se vždy nacházejí nejméně dva body. Existují nejméně tři body, které na jedné přímce neleží.*

I 4. *K libovolným třem bodům A, B, C, které neleží na jedné a téže přímce, existuje vždy nějaká rovina α, která je incidentní s každým ze třech bodů A, B, C. Ke každé rovině existuje vždy nějaký bod, který je s ní incidentní.*

Používáme také obraty: A LEŽÍ V ROVINĚ α; A JE BODEM ROVINY α; atd.

I 5. *Ke každým třem bodům A, B, C, které neleží na jedné a téže přímce, existuje* NEJVÝŠE *jedna rovina, která je incidentní s každým ze třech bodů A, B, C.*

I 6. *Když leží dva body A, B jedné přímky a v jedné rovině α, potom leží v rovině α každý bod přímky a.*

V tomto případě říkáme: PŘÍMKA a LEŽÍ V ROVINĚ α; atd.

I 7. *Když mají dvě roviny α, β nějaký společný bod A, potom mají společný ještě nejméně jeden další bod B.*

I 8. *Existují nejméně čtyři body, které neleží v jedné rovině.*

---

[3]p. překl. : V originále *Axiome der Verknüpfung.* Taktéž používaný překlad axiomy spojení zde nepoužíváme kvůli možné záměně s axiomy spojitosti (skupinou axiomů V). Opíráme se přitom o článek ([Nádeník 1972], s. 20)
Též H. Poincaré v recenzi na Hilbertovu knihu píše: "Přeložil bych jako *projektivní axiomy* (*axiomes projectifs* spíše než abych se snažil najít doslovný překlad, jako např. *axiomy spojení* (*axiomes de la connection*), který by nebyl uspokojivý.)" ([Poincaré 1903], s. 3). V Laugelově francouzském překladu prvního vydání překládáno jako *axiomes d'association.* ([Hilbert 1899d], s. 2)

Axiom I 7 vyjadřuje, že prostor obsahuje nejvýše tři dimenze. Axiom I 8 vyjadřuje oproti tomu, že prostor obsahuje nejméně tři dimenze.

Axiomy I 1–3 se také nazývají *rovinné axiomy skupiny* I, na rozdíl od axiomů I 4–8, které označuji jako *prostorové axiomy skupiny* I.

Z vět, které plynou z axiomů I 1–8 zmíníme pouze tyto dvě:

Věta 1. Dvě přímky jedné roviny mají společný jeden nebo žádný bod; dvě roviny nemají žádný společný bod, nebo mají společnou přímku a žádný jiný bod; rovina a přímka, která v ní neleží, mají společný jeden nebo žádný bod.

Věta 2. Přímka a bod, který na ní neleží, stejně jako dvě různé přímky s jedním společným bodem, leží vždy právě v jedné rovině.

§ 3. Skupina axiomů II: axiomy uspořádání.[4]

Axiomy této skupiny definují pojem "MEZI" a na základě tohoto pojmu umožňují *uspořádání* bodů na přímce, v rovině a v prostoru.

Výměr. Body přímky se nacházejí v jistých vzájemných vztazích, k jejichž popisu nám poslouží obzvláště slovo "*mezi*".

II 1. *Když leží bod B mezi bodem A a bodem C, potom jsou A, B, C tři různé body jedné přímky a B leží potom také mezi C a A.*

II 2. *Ke dvěma bodům A a C existuje vždy nejméně jeden bod B na přímce AC takový, že C leží mezi A a B.*[5]

II 3. *Z libovolných třech bodů jedné přímky leží* NEJVÝŠE JEDEN *mezi druhými dvěma.*[6]

Kromě těchto *lineárních axiomů uspořádání* potřebujeme ještě *rovinný axiom uspořádání.*

Výměr. Uvažujeme na přímce a dva body A a B; systém obou bodů A a B nazveme *úsečkou* a označíme ji AB nebo BA. Body mezi A a B se nazývají body úsečky AB, nebo též body, ležící *uvnitř* úsečky AB; body A, B se nazývají *koncové body* úsečky AB. Všechny zbývající body přímky a se nazývají body, ležící *mimo* úsečku AB.

II 4. *Nechť A, B, C jsou tři body, které neleží na jedné přímé lince a nechť a je přímka v rovině ABC, která neprochází žádným z bodů A, B, C: když přímka a prochází bodem úsečky AB, potom prochází jistě také buď bodem úsečky AC nebo bodem úsečky BC.*

Názorně vyjádřeno: když přímka vstupuje do vnitřku trojúhelníku, vystupuje také z něho ven. Lze dokázat, že zároveň obě úsečky AC a BC přímka a protnout nemůže (viz Dodatek I 1).[7]

---

[4]Tyto axiomy poprvé důkladně zkoumal M. PASCH ve svých Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882. Konkrétně u axiomu II 4 pochází jeho vyjádření od M. PASCHE.

[5]p. překl. : v šestém vydání ještě ve tvaru: Když jsou A a C dva body jedné přímky, existuje vždy nejméně jeden bod B, který leží mezi A a C a nejméně jeden bod D takový, že C leží mezi A a D.

[6]p. překl.: Tento axiom neplatí v Riemannově geometrii, a ta tak není zahrnuta do Hilbertových úvah o neeukleidovské geometrii, vzniklé vypuštěním axiomu o rovnoběžkách IV v par. § 10. Kromě těchto dvou axiomů však v Riemannově geometrii ostatní stanovené axiomy platí. Viz ([Hilbert 1900], s. 302).

[7]p. překl.: originál.

§ 4. Důsledky axiomů spojení a uspořádání.

Z axiomů I a II plynou následující věty:

Věta 3. Ke dvěma bodům A a C existuje vždy nejméně jeden bod D na přímce AC, který leží mezi A a C.

Důkaz. Podle axiomu I 3 existuje bod E mimo přímku AC a podle axiomu II 2 existuje na AE bod F takový, že E je bodem úsečky AF. Podle téhož axiomu a podle axiomu II 3 existuje na FC bod G, který neleží na úsečce FC. Podle axiomu II 4 musí tedy přímka EG protnout úsečku AC v nějakém bodě D. □

Věta 4. Z libovolných třech bodů A, B, C jedné přímky je to vždy právě jeden, který leží mezi druhými dvěma.

Důkaz. Nechť A neleží mezi B a C a obdobně ani C neleží mezi A a B. S bodem B spojíme bod D, který neleží na přímce AC, a na spojnici zvolíme podle axiomu II 2 bod G tak, že D bude ležet mezi B a G. Použijeme-li axiom II 4 na trojúhelník BCG a přímku AD, zjistíme, že se přímky AD a CG protínají v bodě E, který leží mezi C a G. Stejným způsobem zjistíme také, že se přímky CD a AG protnou v bodě F, který leží mezi A a G. Použijeme-li nyní axiom II 4 na trojúhelník AEG a přímku CF, ukazuje se, že D leží na mezi A a E a použitím téhož axiomu na trojúhelník AEC a přímku BG zjistíme, že B leží mezi A a C.[8] □

Věta 5. Jsou-li dány čtyři libovolné body přímky, lze je vždy označit A, B, C, D tak, že bod, označený jako B, leží mezi A a C a také mezi A a D a dále bod, označený jako C, leží mezi A a D a také mezi B a D.[9]

Důkaz. Nechť jsou A, B, C, D čtyři libovolné body přímky g. Nejdříve dokážeme:

1. Leží-li B na úsečce AC a C na úsečce BD, leží potom body B a C také na úsečce AD. Podle axiomů I 3 a II 2 zvolíme bod E, který neleží na g, a bod F tak, že E leží mezi C a F. Několikerým použitím axiomů II 3 a 4 se ukáže, že se úsečky AE a BF protínají v jednom bodě G a dále, že přímka CF protne úsečku GD v jediném bodě H. Jelikož H leží na úsečce GD, oproti čemuž E podle axiomu II 3 na úsečce AG neleží, protne podle axiomu II 4 přímka EH úsečku AD, tedy C leží na úsečce AD. Přesně takto se symetricky dokáže, že také B leží na této úsečce.

2. Leží-li B na úsečce AC a C na úsečce AD, leží potom také C na úsečce BD a B na úsečce AD. Zvolíme bod G mimo g a další bod F tak, že G leží na úsečce BF. Podle axiomů I 2 a II 3 neprotne přímka CF ani úsečku AB ani úsečku BG, tedy podle axiomu II 4 ani úsečku AG. Protože ale C leží na úsečce AD, protne přímka CF úsečku GD v jediném bodě H. Nyní opět podle axiomů II 3 a 4 protne přímka FH úsečku $BD.C$ tedy leží na úsečce BD. Zbytek tvrzení 2 plyne z 1. □

Nechť jsou nyní dány čtyři libovolné body jedné přímky. Vezmeme z nich tři body a označíme Q ten z nich, který podle Věty 4 a axiomu II 3 leží mezi druhými dvěma, tyto označíme P a R, a nakonec označíme S poslední ze čtyř daných bodů. Potom plyne opět z axiomu II 3 a Věty 4, že je pět možností pro polohu bodu S:

[8] Tento důkaz pochází od A. Walda.

[9] Tato věta byla v prvním vydání označena za axiom. E. H. Moore však rozpoznal (Trans. Math. Soc. 1902), že je již důsledkem stanovených rovinných axiomů incidence a uspořádání. Srov. také na to navazující práce Velbena (Trans. Math. Soc. 1904), Schweitzera (American Journ. 1909). Bližší studii nezávislých systémů lineárních axiomů uspořádání, které definují uspořádání na přímce, lze nalézt u E. v. Huntingtona ("A new set of postulates for betweenness with proof of complete independence", Trans. Math. Soc. 1924, srov. také Trans. Math. Soc. 1917).

R leží mezi P a S,

nebo P leží mezi R a S,

nebo S leží mezi P a R a zároveň Q mezi P a S,

nebo S leží mezi P a Q,

nebo P leží mezi Q a S,

První čtyři možnosti budou předpoklady pro 2., poslední předpoklad pro 1. Tím je Věta 5 dokázána.

Věta 6. (zobecnění Věty 5). Je dán libovolný konečný počet bodů přímky, potom lze tyto vždy označit $A, B, C, D, E, \ldots, K$ tak, že bod, označený jako B, leží mezi A na jedné straně a $C, D, E, \ldots, K$ na straně druhé, dále C mezi A, B na jedné straně a $D, E, \ldots, K$ na straně druhé, potom D mezi A, B, C na jedné straně a $E, \ldots, K$ na druhé straně, atd. Kromě tohoto způsobu označení existuje ještě jeden obrácený způsob označení $K, \ldots, E, D, C, B, A$, který bude mít tytéž vlastnosti.

Věta 7. Mezi libovolnými dvěma body přímky se nachází vždy nekonečně mnoho bodů.

Věta 8. Každá přímka a, která leží v rovině α, rozděluje body této roviny α, které v ní neleží, na dvě oblasti s následujícími vlastnostmi: každý bod A jedné oblasti vytváří s každým bodem B druhé oblasti úsečku AB, uvnitř které leží bod přímky a, oproti tomu určují libovolné body A a A' z jedné a téže oblasti úsečku AA', která neobsahuje žádný bod z a.

Výměr. Říkáme: body A, A' leží *v rovině* α *na jedné a téže straně od přímky* a a body A, B leží *v rovině* α *na opačných stranách od přímky* a.

Výměr. Nechť jsou A, A', O, B čtyři body jedné přímky a takové, že O leží mezi A a B, ale neleží mezi A a A'; Potom říkáme: body A, A' leží *na přímce a na jedné a téže straně od bodu* O a body A, B leží *na přímce a na rozdílných stranách od bodu* O. Všechny body přímky a, ležící na jedné straně od O, se také nazývají *polopřímka*, vycházející z bodu O; proto každý bod přímky dělí tuto na dvě polopřímky.

Výměr. Systém úseček $AB, BC, CD, \ldots, KL$ se nazývá *lomená čára*, která vzájemně spojuje body A a L. Tato lomená čára se také zkráceně označuje $ABCD \ldots KL$. Body uvnitř úseček $AB, BC, CD, \ldots, KL$, stejně jako body $A, B, C, D, \ldots, K, L$ se dohromady nazývají *body lomené čáry.* Speciálně, pokud leží všechny body A, B, $C, D, \ldots, K, L$ v jedné rovině a bod L je navíc identický s bodem A, nazývá se tato lomená čára *mnohoúhelník* a značí se mnohoúhelník $ABCD \ldots K$. Úsečky AB, BC, $CD, \ldots, KA$ se také nazývají *strany mnohoúhelníku.* Body $A, B, C, D, \ldots, K$ se nazývají *vrcholy mnohoúhelníku.* Mnohoúhelníky s 3, 4, …, n *vrcholy* se nazývají *trojúhelníky, čtyřúhelníky, …, n-úhelníky.*

Výměr. Když se od sebe všechny vrcholy mnohoúhelníku liší a žádný vrchol mnohoúhelníku není bodem některé strany a žádné dvě libovolné strany mnohoúhelníku nemají společný bod, říkáme, že je mnohoúhelník *jednoduchý.*

Za pomoci Věty 8 dojdeme k následujícím větám (viz odkazy na literaturu na konci Dodatku I 1):[10]

Věta 9. Každý jednoduchý mnohoúhelník, ležící v rovině α, rozděluje ty body roviny α, které nepříslušejí lomené čáře mnohoúhelníku, na dvě oblasti, *vnitřek* a *vnějšek*, které mají následující vlastnosti: nechť A je bod vnitřku (VNITŘNÍ BOD) a B bod vnějšku (VNĚJŠÍ BOD), potom každá lomená čára, která leží v rovině α a spojuje A s B, má s mnohoúhelníkem nejméně jeden společný bod; jsou-li oproti tomu A, A'

[10] p. překl.: originál.

dva body vnitřku a B, B' vnějšku, potom v rovině α existují vždy takové lomené čáry, které spojují A s A' a B s B' a nemají s mnohoúhelníkem žádný společný bod. Při vhodném označení obou oblastí existují v rovině α vždy takové přímky, které celé procházejí vnějškem mnohoúhelníku a oproti tomu žádná taková přímka, která by procházela pouze vnitřkem mnohoúhelníku.

Věta 10. Každá rovina α dělí ostatní body prostoru na dvě oblasti následujícím způsobem: každý bod A jedné oblasti určuje s každým bodem B druhé oblasti úsečku AB, uvnitř které leží jeden bod roviny α; oproti tomu dva libovolné body A a A' jedné a téže oblasti určují vždy úsečku AA', která neobsahuje žádný bod roviny α.

Výměr. Použijeme-li označení z této Věty 10, řekneme: body A, A' leží v prostoru *na jedné a téže straně od roviny* α a body A, B leží v prostoru *na opačných stranách od roviny* α.

Věta 10 vyjadřuje nejdůležitější skutečnosti, týkající se uspořádání elementů v PROSTORU; tyto skutečnosti jsou přitom pouze důsledky dosud probraných axiomů a ve skupině II není zapotřebí žádný nový PROSTOROVÝ axiom.

§5. Skupina axiomů III: axiomy shodnosti.

Axiomy této skupiny definují pojem shodnosti a tím také pojem pohybu.

Výměr. Úsečky uvažujeme v jistých vzájemných vztazích, k jejichž popisu nám poslouží slova "*shodný*" nebo "*identický*".[11]

III 1. *Když jsou A, B dva body na jedné přímce a a když je dále A' bod na téže nebo jiné přímce a', potom lze na dané straně přímky a' od bodu A' vždy nalézt bod B' takový, že úsečka AB bude shodná nebo identická s úsečkou $A'B'$, značíme*

$$AB \equiv A'B'.$$

Tento axiom dává MOŽNOST *přenášení* ÚSEČKY. Jednoznačnost tohoto úkonu dokážeme později.

Úsečka byla definována jako systém dvou bodů AB a byla označena AB nebo BA. Na pořadí obou bodů nebyl tedy brán zřetel; proto znamenají formule

$$\begin{aligned} AB &\equiv A'B', \qquad & AB &\equiv B'A' \\ BA &\equiv A'B', \qquad & BA &\equiv B'A' \end{aligned}$$

totéž.

III 2. *Když jsou úsečky $A'B'$ a $A''B''$ shodné s touž úsečkou AB, je také úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou $A''B''$; nebo jednodušeji: když jsou dvě úsečky shodné se třetí, jsou také shodné mezi sebou.*

Protože shodnost nebo identita jsou do geometrie zavedeny teprve v těchto axiomech, není zprvu zcela samozřejmé, že KAŽDÁ ÚSEČKA JE SHODNÁ SAMA SE SEBOU; tato skutečnost plyne až z obou prvních axiomů shodnosti, když úsečku AB přeneseme na libovolnou polopřímku, označíme $A'B'$, která bude shodná s AB, a potom na shodnosti $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'$ použijeme axiom III 2.

Na tomto základě se dále použitím axiomu III 2 dokáže *symetrie* a *tranzitivita* shodnosti úseček, tj. platnost vět:

[11] p. překl.: splývající, stejný, rovný

Když	AB	$\equiv$	$A'B'$,
pak je také	$A'B'$	$\equiv$	AB;
když	AB	$\equiv$	$A'B'$
a	$A'B'$	$\equiv$	$A''B''$,
pak je také	AB	$\equiv$	$A''B''$.

Na základě symetrie shodnosti úseček můžeme užívat slovní obrat: dvě úsečky jsou "*navzájem shodné*".

III 3. *Nechť jsou AB a BC dvě úsečky bez společných bodů na přímce a a dále $A'B'$ a $B'C'$ dvě úsečky na téže nebo na jiné úsečce a' také bez společných bodů; když je potom*

$$AB \equiv A'B' \qquad \text{a} \qquad BC \equiv B'C',$$

potom je také vždy $\quad AC \equiv A'C'$.

Tento axiom vyjadřuje požadavek SEČITATELNOSTI úseček.

Přesně stejně jako přenášení úseček probereme nanášení úhlů. Musíme však ale nyní kromě MOŽNOSTI nanášení úhlů axiomaticky požadovat také JEDNOZNAČNOST; tranzitivitu a sečitatelnost lze oproti tomu dokázat.

Výměr. Nechť je α libovolná rovina a h, k nechť jsou libovolné dvě různé polopřímky, vycházející z bodu O a ležící v rovině α, které náleží RŮZNÝM přímkám. Systém těchto obou polopřímek h, k pojmenujeme *úhel* a označíme jej $\sphericalangle(h,k)$ nebo $\sphericalangle(k,h)$.

Polopřímky h, k se nazývají *ramena* úhlu a bod O se nazývá *vrchol* úhlu.

Přímý či nekonvexní úhel nebereme podle této definice v úvahu.

Nechť přísluší polopřímka h přímce $\overline{h}$, polopřímka k přímce $\overline{k}$. Polopřímky h a k, společně s bodem O, rozdělují ostatní body na dvě oblasti: o všech bodech, které které leží na stejné straně od $\overline{k}$ jako h a na stejné straně od $\overline{h}$ jako k, řekneme, že leží ve VNITŘKU úhlu $\sphericalangle(h,k)$, o všech ostatních bodech řekneme, že leží ve vnějšku úhlu neboli VNĚ úhlu.

Na základě axiomů I a II snadno nahlédneme, že obě oblasti obsahují nějaké body a že úsečka, která spojuje dva body ve vnitřku úhlu, vždy ve vnitřku také celá leží. Stejně snadno lze dokázat následující skutečnosti: leží-li bod H na h a bod K na k, prochází úsečka HK zcela ve vnitřku. Polopřímka, vycházející z O prochází celá buď uvnitř nebo vně úhlu. Polopřímka, procházející vnitřkem, protíná úsečku HK. Je-li A bodem jedné a B bodem druhé oblasti, prochází každá lomená čára, která spojuje A s B, buďto bodem O nebo má s h nebo k společný nejméně jeden bod; jsou-li oproti tomu A, A' body téže oblasti, existuje vždy taková lomená čára, která A spojuje s A' a neprochází ani bodem O ani bodem na polopřímkách h, k.

Výměr. Úhly mají k sobě jisté vzájemné vztahy, k jejichž označení nám také poslouží slova "*shodný*" nebo "*identický*".

III 4. *Nechť je dán úhel $\sphericalangle(h,k)$ v rovině α a přímka a' v rovině α', a také určitá strana od a' v rovině α'. Nechť h' označuje polopřímku přímky a', která vychází z bodu O': potom v rovině α' existuje jedna a jen jedna polopřímka k' taková, že úhel $\sphericalangle(h,k)$ je shodný nebo identický s úhlem $\sphericalangle(h',k')$ a zároveň leží všechny vnitřní body úhlu $<(h',k')$ na dané straně od a', značíme:*

$$\sphericalangle(h,k) \equiv \sphericalangle(h',k').$$

Každý úhel je shodný sám se sebou, tj. je vždy

$$\sphericalangle(h,k) \equiv \sphericalangle(h,k).$$

Zkráceně také říkáme: každý úhel lze v dané rovině *nanést* na danou stranu dané polopřímky jednoznačně určeným způsobem.

Stejně jako u úseček nezohledňujeme směr, nezohledňujeme u definice úhlu smysl. Proto znamenají výrazy $\sphericalangle(h,k)$, $\sphericalangle(k,h)$ totéž.

Výměr. Úhel s vrcholem B, na jehož obou ramenech leží postupně body A a C, se označujeme také jako $\sphericalangle ABC$ nebo krátce $\sphericalangle B$. Úhly se také označují malými řeckými písmeny.

III 5. *Když pro dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ platí shodnosti*

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

potom platí také shodnost

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'.$$

Pojem trojúhelníku vysvětlujeme na str. 65.[12] Cyklickou záměnou se ukáže, že pokud platí tento axiom, platí také vždy shodnosti

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{a} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

Axiomy III 1–3 obsahují výroky o shodnosti úseček, nazveme je tedy jako *lineární* axiomy skupiny III. Axiom III 4 obsahuje výroky o shodnosti úhlů, Axiom III 5 spojuje pojmy shodnost úseček a shodnost úhlů. Axiomy III 4 a III 5 obsahují výroky o prvcích *rovinné* geometrie a nazveme je tedy jako rovinné axiomy skupiny III.

Jednoznačnost přenášení úseček plyne z jednoznačnosti nanášení úhlů pomocí axiomů III 5. Předpokládejme, že úsečku AB přeneseme na nějakou polopřímku, vycházející z A', dvěma způsoby, jednak až do B' a jednak až do B''. Potom zvolíme nějaký bod C' usečky $A'B'$ a dostaneme shodnosti $A'B' \equiv A'B''$,

$$A'C' \equiv A'C', \quad \sphericalangle B'A'C' \equiv \sphericalangle B''A'C',$$

tedy podle axiomu III 5

$$\sphericalangle A'C'B' \equiv \sphericalangle A'C'B'',$$

což je ve sporu s jednoznačností nanášení úhlu, požadovanou axiomem III 4.

§6. Důsledky axiomů shodnosti.

Výměr. Dva úhly, které mají společný vrchol a jedno rameno a jejichž rameno, které nemají společné, tvoří přímku, se nazývají *vedlejší úhly.* Dva úhly se společným vrcholem, jejichž všechna ramena tvoří pokaždé přímku, se nazývají *úhly vrcholové.* Úhel, který je shodný se svým vedlejším úhlem, je *úhel pravý.*

Nyní postupně dokážeme následující věty:

Věta 11. V trojúhelníku se dvěma shodnými stranami jsou jim protilehlé úhly shodné, nebo krátce v rovnoramenném trojúhelníku se úhly při základně rovnají.

Tato věta plyne z axiomu III 5 a z poslední části axiomu III 4.

Výměr. Říkáme, že trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem $A'B'C'$, pokud platí shodnosti

$$\begin{array}{lllllllll} AB & \equiv & A'B', & AC & \equiv & A'C', & BC & \equiv & B'C' \\ \sphericalangle A & \equiv & \sphericalangle A', & \sphericalangle B & \equiv & \sphericalangle B', & \sphericalangle C & \equiv & \sphericalangle C'. \end{array}$$

Věta 12. (První věta shodnosti pro trojúhelníky). Trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem $A'B'C'$, pokud platí shodnosti

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'.$$

[12] Zde a v následujícím budeme předpokládat, že jeho vrcholy neleží na jedné přímce.

Důkaz. Podle axiomu III 5 jsou splněny shodnosti

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \qquad \text{a} \qquad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C',$$

proto musíme dokázat ještě platnost shodnosti $BC \equiv B'C'$. Předpokládáme-li oproti tomu, že BC není shodná s $B'C'$, a určeme na $B'C'$ bod D' tak, že bude $BC \equiv B'D'$, potom na základě axiomu III 5, použitého na oba trojúhelníky ABC a $A'B'D'$, dostaneme, že $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'D'$. Úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle B'A'D'$, $\sphericalangle B'A'C'$ by tedy byly shodné; to ale není možné, protože podle axiomu III 4 můžeme nanést každý úhel na danou polopřímku na danou stranu v jedné rovině pouze jediným způsobem. – Tím jsme dokázali, že trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem $A'B'C'$. □

Stejně snadno dokážeme:

Věta 13. (Druhá věta shodnosti pro trojúhelníky). Trojúhelník ABC je shodný s jiným trojúhelníkem $A'B'C'$, pokud platí shodnosti

$$AB \equiv A'B', \qquad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \qquad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'.$$

Věta 14. Když je úhel $\sphericalangle ABC$ shodný s druhým úhlem $\sphericalangle A'B'C'$, je také jeho vedlejší úhel $\sphericalangle CBD$ shodný s vedlejším úhlem $\sphericalangle C'B'D'$ onoho druhého úhlu.

Důkaz. Zvolíme body A', C', D' na ramenech, procházejících bodem B' tak, že

$$AB \equiv A'B', \qquad CB \equiv C'B', \qquad DB \equiv D'B'.$$

Z Věty 12 plyne potom, že trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem $A'B'C'$, tj. že platí shodnosti

$$CD \equiv C'D' \qquad \text{a} \qquad \sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle A'D'C',$$

A odtud při uvážení trojúhelníků BCD a $B'C'D'$ plyne podle axiomu III 5:

$$\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle C'B'D'. \quad \square$$

Bezprostředním důsledkem Věty 14 je věta o shodnosti vrcholového úhlu.

Dále z ní plyne existence pravého úhlu (viz str. 68).

Když totiž naneseme libovolný úhel na polopřímku OA z bodu O na obě její strany a na volná ramena přeneseme tutéž vzdálenost: $OB \equiv OC$, protne úsečka BC přímku OA v bodě D. Padne-li bod D do bodu O, budou $\sphericalangle BOA$ a $\sphericalangle COA$ stejné vedlejší úhly, a tedy úhly pravé. Leží-li D na polopřímce OA, potom na základě konstrukce platí: $\sphericalangle DOB \equiv \sphericalangle DOC$; pokud D leží na opačné polopřímce, potom plyne uvedená shodnost z Věty 14. Podle axiomu III 2 je každá úsečka shodná sama se sebou: $OD \equiv OD$. Odtud plyne na základě axiomu III 5, že platí $\sphericalangle ODB \equiv \sphericalangle ODC$.

Věta 15. Nechť jsou jednak h, k, l a jednak h', k', l' vždy tři z bodu O, resp. O', vycházející a v rovině α, resp. α' ležící polopřímky. Nechť leží h, k a h', k' naráz buď na jedné a téže straně nebo na opačných stranách od l, resp. l'. Pokud potom platí shodnosti

$$\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l') \quad \text{a} \quad \sphericalangle(k, l) \equiv \sphericalangle(k', l'),$$

potom je také vždy

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

Důkaz. Důkaz budeme vést pro případ, kdy h a k leží na téže straně od l, a tedy podle předpokladu také h' a k' leží na téže straně od l'. Druhý případ převedeme na případ první s využitím Věty 14. – Z výměru na str. 67 plyne, že buďto prochází h úhlem $\sphericalangle(k, l)$ nebo k úhlem $\sphericalangle(k, l)$. Zvolme takové označení, že h bude ležet v úhlu $\sphericalangle(k, l)$. Na ramenech k, k', l, l' zvolíme body K, K', L, L' tak, že $OK \equiv O'K'$

a $OL \equiv O'L'$. Podle věty, uvedené na str. 67, protíná h přímku KL v bodě H. Určíme H' a h' tak, aby $OH \equiv O'H'$. V trojúhelnících OLH a $O'L'H'$, resp. OLK a $O'L'K'$ se podle Věty 12 ukazují shodnosti

$$\sphericalangle OLH \equiv \sphericalangle O'L'H', \quad \sphericalangle OLK \equiv \sphericalangle O'L'K',$$
$$LH \equiv L'H', LK \equiv L'K' \quad \text{a nakonec} \quad \sphericalangle OKL \equiv \sphericalangle O'K'L'. \quad \square$$

Protože podle axiomu III 4 lze každý úhel nanést na danou polopřímku na danou stranu v jedné rovině jen jedním způsobem, a protože H' a K' podle předpokladu leží na téže straně od l', udávají obě výše uvedené shodnosti úhlů, že H' leží na $L'K'$. Potom obě jmenované shodnosti úseček snadno na základě axiomu III 3 udávají, že $HK \equiv H'K'$. Použitím shodností $OK \equiv O'K', HK \equiv H'K'$ a $\sphericalangle OKL \equiv \sphericalangle O'K'L'$ v axiomu III 5 lze nyní odvodit dané tvrzení.

Podobně dospějeme k následující skutečnosti:

Věta 16. Nechť je úhel $\sphericalangle(h,k)$ v rovině α shodný s úhlem $\sphericalangle(h',k')$ v rovině α' a nechť je l polopřímka v rovině α, která vychází z vrcholu úhlu $\sphericalangle(h,k)$ a prochází vnitřkem úhlu: potom existuje vždy jedna a právě jedna polopřímka l' v rovině α', která vychází z vrcholu úhlu $\sphericalangle(h',k')$ a prochází vnitřkem úhlu tak, že bude platit

$$\sphericalangle(h,l) \equiv \sphericalangle(h',l') \quad \text{a} \quad \sphericalangle(k,l) \equiv \sphericalangle(k',l').$$

Abychom získali třetí větu o shodnosti a vlastnost symetrie shodnosti úhlů, odvodíme z Věty 15 nejdříve následující větu:

Věta 17. Leží-li dva body Z_1 a Z_2 na opačných stranách přímky XY a platí-li shodnosti $XZ_1 \equiv XZ_2$ a $YZ_1 \equiv YZ_2$, potom je také úhel $\sphericalangle XYZ_1$ shodný s úhlem $\sphericalangle XYZ_2$.

Důkaz. Podle Věty 11 je $\sphericalangle XZ_1Z_2 \equiv \sphericalangle XZ_2Z_1$ a $\sphericalangle YZ_1Z_2 \equiv \sphericalangle YZ_2Z_1$. Přitom plyne z Věty 15 shodnost: $\sphericalangle XZ_1Y \equiv \sphericalangle XZ_2Y$. Zvláštní případy, ve kterých X resp. Y leží na Z_1Z_2 se vyřídí ještě jednodušeji. Z poslední shodnosti a z předpokládaných shodností $XZ_1 \equiv XZ_2$ a $YZ_1 \equiv YZ_2$ plyne podle axiomu III 5 tvrzení: $\sphericalangle XYZ_1 \equiv \sphericalangle XYZ_2$. $\square$

Věta 18. (Třetí věta shodnosti pro trojúhelníky). Když jsou ve dvou trojúhelnících ABC a $A'B'C'$ pokaždé dvě odpovídající si strany shodné, pak jsou tyto trojúhelníky shodné.

Důkaz. Kvůli symetrii shodnosti úseček, dokázané na str. 67, stačí dokázat, že trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem $A'B'C'$. naneseme úhel $\sphericalangle BAC$ na polopřímku $A'C'$ od bodu A' na obě strany. Na ramenu, které leží na stejné straně od $A'C'$ jako B', zvolíme bod B_0 tak, aby $A'B_0 \equiv AB$; a na druhém volném ramenu zvolme B'' tak, aby $A'B'' \equiv AB$. Podle Věty 12 je $BC \equiv B_0C'$ a stejně tak $BC \equiv B''C'$. Dosud jmenované shodnosti dohromady s těmi z předpokladu, plynou z axiomu III 2 shodnosti

$$A'B'' \equiv A'B_0, \qquad B''C' \equiv B_0C'$$

a analogicky

$$A'B'' \equiv A'B', \qquad B''C' \equiv B'C'.$$

Předpoklady Věty 17 platí tedy jak pro oba trojúhelníky $A'B''C'$ a $A'B_0C'$, tak pro oba trojúhelníky $A'B''C'$ a $A'B'C'$, tj. úhel $\sphericalangle B''A'C'$ je shodný jak s úhlem $\sphericalangle B_0A'C'$ tak s úhlem $\sphericalangle B'A'C'$. Protože ale podle axiomu III 4 lze každý úhel na danou polopřímku na danou stranu v rovině nanést pouze jediným způsobem, je polopřímka $A'B_0$ zcela identická s polopřímkou $A'B'$, tj. úhel, shodný s $\sphericalangle BAC$, nanesený na $A'C'$ na příslušnou stranu, je úhel $\sphericalangle B'A'C'$. Použitím shodnosti $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ a předpokládaných shodností úseček ve Větě 12 lze potom odvodit dané tvrzení. $\square$

Věta 19. Když jsou dva úhly $\sphericalangle(h',k')$ a $\sphericalangle(h'',k'')$ shodné s třetím úhlem $\sphericalangle(h,k)$, je také úhel $\sphericalangle(h',k')$ shodný s úhlem $\sphericalangle(h'',k'')$.[13]

Tuto větu, která odpovídá axiomu III 2, lze formulovat takto: Pokud jsou dva úhly shodné s třetím, pak jsou shodné i mezi sebou navzájem.

Důkaz. Nechť jsou O', O'' a O vrcholy třech daných úhlů. Zvolíme na každém rameni každého úhlu body A', A'' a A tak, aby $O'A' \equiv OA$ a $O''A'' \equiv OA$. Zvolme nyní dále na volných ramenech body B', B'' a B tak, aby $O'B' \equiv OB$ a $O''B'' \equiv OB$. Z těchto shodností a z obou předpokladů $\sphericalangle(h',k') \equiv \sphericalangle(h,k)$ a $\sphericalangle(h'',k'') \equiv \sphericalangle(h,k)$ plynou podle Věty 12 shodnosti

$$A'B' \equiv AB \quad \text{a} \quad A''B'' \equiv AB.$$

Podle axiomu III 2 se tedy trojúhelníky $A'B'O'$ a $A''B''O''$ shodují ve třech stranách a zároveň platí podle Věty 18

$$\sphericalangle(h',k') \equiv \sphericalangle(h'',k''). \quad \square$$

Z Věty 19 plyne, stejně jako z axiomu III 2 pro úsečky, vlastnost symetrie kongruence úhlů, tj. když je $\sphericalangle\alpha \equiv \sphericalangle\beta$, jsou $\sphericalangle\alpha$ a $\sphericalangle\beta$ SHODNÉ NAVZÁJEM. Díky tomu lze nyní především vyslovit Věty 12–14 v symetrické formě.

Navíc můžeme nyní zavést POROVNÁVÁNÍ VELIKOSTÍ ÚHLŮ.

Věta 20. Nechť jsou dány libovolné dva úhly $\sphericalangle(h,k)$ a $\sphericalangle(h',l')$. Když dostaneme po nanesení $\sphericalangle(h,k)$ na polopřímku h' na stranu směrem k polopřímce l' VNITŘNÍ polopřímku k', dostaneme po nanesení $\sphericalangle(h',l')$ na polopřímku h na stranu směrem k polopřímce k VNĚJŠÍ polopřímku l, a naopak.

Důkaz. Předpokládejme, že l leží ve vnitřku $\sphericalangle(h,k)$. Protože $\sphericalangle(h,k) \equiv \sphericalangle(h',k')$, existuje k vnitřní polopřímce l podle Věty 16 polopřímka l'' ve vnitřku $\sphericalangle(h',k')$, pro kterou platí shodnost $\sphericalangle(h,l) \equiv \sphericalangle(h',l'')$. Podle předpokladu a kvůli symetrii shodnosti úhlů platí $\sphericalangle(h,l) \equiv \sphericalangle(h',l')$, kde l' a l'' jsou nutně různé, což je ve sporu s jednoznačností nanášení úhlů III 4. Opačnou větu dokážeme analogicky. Pokud po nanesení $\sphericalangle(h,k)$, popsaném ve Větě 20, dostaneme vnitřní polopřímku k' úhlu $\sphericalangle(h',l')$, říkáme: $\sphericalangle(h,k)$ je *menší než* $\sphericalangle(h',l')$, symbolicky: $\sphericalangle(h,k) < \sphericalangle(h',l')$; když dostaneme vnější polopřímku, říkáme: $\sphericalangle(h,k)$ je *větší než* $\sphericalangle(h',l')$, symbolicky: $\sphericalangle(h,k) > \sphericalangle(h',l')$. $\square$

Zjišťujeme, že pro dva úhly α a β nastane vždy PRÁVĚ JEDEN ze třech případů

$$\alpha < \beta \text{ a } \beta > \alpha, \quad \alpha \equiv \beta, \quad \alpha > \beta \text{ a } \beta < \alpha.$$

Porovnávání velikostí úhlů je *tranzitivní*, tj. z každého ze třech předpokladů

$$1.\ \alpha > \beta,\ \beta > \gamma; \quad 2.\ \alpha > \beta,\ \beta \equiv \gamma; \quad 3.\ \alpha \equiv \beta,\ \beta > \gamma$$

plyne

$$\alpha > \gamma.$$

Porovnávání velikostí úseček s analogickými vlastnostmi plyne bezprostředně z axiomů II a III 1–3 a z jednoznačnosti přenášení úseček (str. 68).

Na základě porovnávání velikostí úhlů se ukazuje důkaz následující věty, kterou *Eukleidés* – dle mého názoru neprávem – zařadil mezi axiomy.

Věta 21. Všechny pravé úhly jsou navzájem shodné.

[13] Zde uvedený důkaz Věty 19, uvedené v prvních vydáních jako axiom, pochází od A. ROSENTHALA, srov. Math. Ann. sv. 71.
A. ROSENTHAL je též autorem modifikovaného tvaru axiomů I 3, I 4, srov. Math. Ann. sv. 69.

Důkaz. Pravý úhel je podle definice takový, který je shodný se svým vedlejším úhlem. Nechť jsou úhly α, neboli $\sphericalangle(h,l)$, a β, neboli $\sphericalangle(k,l)$, úhly vedlejšími, stejně tak úhly α' a β', a nechť je $\alpha \equiv \beta$ a $\alpha' \equiv \beta'$. Oproti tvrzení Věty 21 budeme předpokládat, že úhel α' nebude shodný s úhlem α. Potom dostáváme po nanesení úhlu α' na polopřímku h na stranu směrem k l polopřímku l'', která je různá od l. Tato l'' leží tedy buď ve vnitřku α nebo ve vnitřku β. Pokud leží l'' ve vnitřku α, potom platí:

$$\sphericalangle(h,l'') < \alpha, \quad \alpha \equiv \beta, \quad \beta < \sphericalangle(k,l'').$$

Odtud plyne na základě tranzitivity porovnávání velikostí:

$$\sphericalangle(h,l'') < \sphericalangle(k,l'').$$

Zároveň platí podle předpokladu a Věty 14:

$$\sphericalangle(h,l'') \equiv \alpha', \qquad \alpha' \equiv \beta', \qquad \beta' \equiv \sphericalangle(k,l''),$$

a odtud plyne

$$\sphericalangle(h,l'') \equiv \sphericalangle(k,l''),$$

což je spor se vztahem $\sphericalangle(h,l'') < \sphericalangle(k,l'')$. Případ, kdy l'' leží ve vnitřku β, vede na zcela analogický spor, čímž je Věta 21 dokázána.[14] $\square$

Výměr. Úhel, který je větší než jeho vedlejší úhel, resp. větší než pravý úhel, se nazývá *tupý* úhel; úhel, který je menší než jeho vedlejší úhel, resp. menší než pravý úhel, se nazývá *ostrý* úhel.

Klíčová věta, která už u Euklida hraje důležitou roli a ze které plyne řada důležitých skutečností, je věta o vnějším úhlu.

Výměr. Úhly $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ a $\sphericalangle CAB$, příslušející trojúhelníku ABC, označujeme za jeho *vnitřní úhly*, úhly k nim vedlejší nazýváme *vnější úhly* trojúhelníku.

Věta 22. (Věta o vnějším úhlu). Libovolný vnější úhel trojúhelníku je větší než každý ze dvou nepřiléhajících vnitřních úhlů trojúhelníku.

Důkaz. Nechť je $\sphericalangle CAD$ vnější úhel trojúhelníku ABC. Zvolme D tak, aby $AD \equiv CB$.

Dokážeme nejdříve $\sphericalangle CAD \not\equiv \sphericalangle ACB$. Pokud by totiž bylo $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ACB$, potom by kvůli shodnosti $AC \equiv CA$ a podle axiomu III 5 platilo: $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle CAB$. Z Vět 14 a 19 by nyní plynulo, že $\sphericalangle ACD$ by byl shodný s vedlejším úhlem úhlu $\sphericalangle ACB$. Podle axiomu III 4 by proto ležel D na přímkce CB, což by byl spor s axiomem I 2. Platí tedy

$$\sphericalangle CAD \not\equiv \sphericalangle ACB.$$

Zároveň nemůže být $\sphericalangle CAD < \sphericalangle ACB$; neboť potom bychom po nanesení vnějšího úhlu $\sphericalangle CAD$ na polopřímku CA od bodu C na stranu, kde leží bod B, dostali rameno, procházející vnitřkem úhlu $\sphericalangle ACB$, které by tak protlo úsečku AB v nějakém bodě B'. V trojúhelníku $AB'C$ by potom byl vnější úhel $\sphericalangle CAD$ shodný s úhlem $\sphericalangle ACB'$. Toto ale není možné, jak jsme právě dokázali. Zůstává tedy jenom poslední možnost: $\sphericalangle CAD > \sphericalangle ACB$.

Ukazuje se také přesně analogicky, že vrcholový úhel úhlu $\sphericalangle CAD$ je větší než úhel $\sphericalangle ABC$, a ze shodnosti vrcholového úhlu a tranzitivity porovnávání velikostí úhlů nyní plyne

$$\sphericalangle CAD > \sphericalangle ABC. \quad \square$$

Tím je tvrzení úplně dokázáno.

Důležitými důsledky této věty o vnějším úhlu jsou následující věty.

[14] Myšlenku tohoto důkazu měl už Eukleidův komentátor Proklus, který však na místo Věty 14 použil předpoklad, že nanesení pravého úhlu dá vždy znovu pravý úhel, tj. úhel rovný svému úhlu vedlejšímu (srov. s. 76).

Věta 23. V každém trojúhelníku leží naproti větší straně větší úhel.

Důkaz. Přeneseme menší z obou uvažovaných stran trojúhelníku od jejich společného vrcholu na stranu větší. Tvrzení pak plyne z Vět 11 a 22, za použití tranzitivity porovnávání velikostí úhlů. □

Věta 24. Trojúhelník se dvěma stejnými úhly je rovnoramenný.

Toto obrácení Věty 11 je bezprostředním důsledkem Věty 23. Z Věty 22 dále snadno plyne doplnění druhé věty o shodnosti trojúhelníků:

Věta 25. Dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou navzájem shodné, pokud platí shodnosti

$$AB \equiv A'B', \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A' \quad \text{a} \quad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'.$$

Věta 26. Každou úsečku lze rozpůlit.

Důkaz. Na danou úsečku AB přeneseme na její koncové body na opačné strany tentýž úhel α a na volná ramena přeneseme stejnou úsečku: $AC \equiv BD$. Protože C a D leží na vzájemně opačných stranách od AB, protne úsečka CD přímku AB v nějakém bodě E.

Předpoklad, že by E byl identický s A nebo B, je bezprostředně ve sporu s Větou 22. Předpokládejme, že B leží mezi A a E. Potom by podle Věty 22 platilo:

$$\sphericalangle ABD > \sphericalangle BED > \sphericalangle BAC,$$

což je ve sporu s konstrukcí. Na tentýž spor vede i předpoklad, že A leží mezi B a E.

E leží tedy podle Věty 4 na úsečce AB. Přitom jsou úhly $\sphericalangle AEC$ a $\sphericalangle BED$ shodné, protože jsou vrcholové. Proto je Věta 25 aplikovatelná na trojúhelníky AEC a BED a dává

$$AE \equiv EB. \quad \square$$

Jako bezprostřední důsledek z Vět 11 a 26 se ukazuje skutečnost: Každý úhel lze rozpůlit.

Pojem shodnosti lze nyní rozšířit na libovolný útvar.

Výměr. Je-li $A, B, C, D, \ldots, K, L$ řada bodů na přímce a a $A', B', C', D', \ldots, K', L'$ řada bodů na přímce a' taková, že všechny odpovídající si úsečky AB a $A'B', AC$ a $A'C', BC$ a $B'C', \ldots, KL$ a $K'L'$ jsou po dvojicích navzájem shodné, potom řekneme, že obě řady bodů jsou navzájem shodné; A a A', B a $B', \ldots, L$ a L' jsou odpovídajícími body *shodných řad bodů.*

Věta 27. Je-li ze dvou shodných řad bodů $A, B, \ldots, K, L$ a $A', B', \ldots, K', L'$ první uspořádaná tak, že B leží mezi A na jedné straně a $C, D, \ldots, K, L$ na straně druhé, C mezi A, B na jedné straně a $D, \ldots, K, L$ na straně druhé, atd., pak jsou body $A', B', \ldots, K', L'$ uspořádány stejným způsobem, tj. B' leží mezi A' na jedné straně a $C', D', \ldots, K', L'$ na straně druhé, C' mezi A', B' na jedné straně a $D', \ldots, K', L'$ na straně druhé, atd.

Výměr. Libovolný konečný počet bodů se nazývá *útvar*; leží-li všechny body útvaru v rovině, nazývá se *rovinný útvar.*

Dva útvary se nazývají *shodné*, pokud lze jejich body přiřadit po dvojicích mezi sebou tak, aby takto přiřazené úsečky a úhly byly všechny navzájem shodné.

Jak lze nahlédnout z Vět 14 a 27, mají shodné útvary následující vlastnosti: leží-li tři body útvaru na jedné přímce, leží na jedné přímce odpovídající body v každém shodném útvaru. Uspořádání bodů v odpovídajících rovinách vzhledem k odpovídajícím přímkám je ve shodných útvarech totéž; Totéž platí i o posloupnosti odpovídajících bodů v odpovídajících rovinách.

Nejobecnější věta o shodnosti rovin a prostorů zní takto:

Věta 28. Když $(A, B, C, ..., L)$ a $(A', B', C', ..., L')$ jsou shodné rovinné útvary a P je bod v rovině prvního útvaru, lze v rovině druhého útvaru vždy najít bod P' tak, že $(A, B, C, \ldots, L, P)$ a $(A', B', C', \ldots, L', P')$ jsou opět shodné útvary. Obsahuje-li útvar $(A, B, C, \ldots, L)$ nejméně tři body, které neleží na jedné přímce, lze zkonstruovat P' jenom jediným způsobem.

Věta 29. Když $(A, B, C, \ldots, L)$ a $(A', B', C', \ldots, L')$ jsou shodné útvary a P je libovolný bod, lze vždy najít bod P' tak, že $(A, B, C, \ldots, L, P)$ a $(A', B', C', \ldots, L', P')$ jsou shodné. Obsahuje-li útvar $(A, B, C, \ldots, L)$ nejméně čtyři body, které neleží v jedné rovině, lze zkonstruovat P' jenom jediným způsobem.

Věta 29 vyjadřuje nejdůležitější výsledek, totiž že všechny PROSTOROVÉ skutečnosti o shodnosti a tím pádem i vlastnosti pohybu v PROSTORU – při platnosti skupin axiomů I a II – jsou důsledky pěti výše stanovených LINEÁRNÍCH a ROVINNÝCH axiomů shodnosti.

§7. Skupina axiomů IV: axiom o rovnoběžkách.

Nechť je α libovolná rovina, a libovolná přímka v α a A bod v α, který neleží na a. Vedeme-li potom v rovině α přímku c, procházející bodem A a protínající přímku a, a následně bodem A v rovině α přímku b tak, že přímka c protíná přímky a, b pod stejnými souhlasnými úhly, plyne snadno z věty o vnějším úhlu, Věty 22, že přímky a, b nemají společný žádný bod, tj. v rovině α lze bodem A, který neleží na přímce a, vždy vést takovou přímku, která onu přímku a neprotne.

Výměr. Dvě přímky nazveme rovnoběžné, když leží v jedné rovině a neprotínají se.

IV 1. *(*EUKLEIDŮV AXIOM*). Nechť je a libovolná přímka a A bod, který na této přímce a neleží: potom existuje v rovině, určené přímkou a a bodem A, nejvýše* JEDNA *přímka, která prochází bodem A a neprotíná přímku a.*

Podle předchozího a na základě axiomu o rovnoběžkách nahlédneme, že k jedné přímce existuje v bodě, který na ní neleží, právě jedna rovnoběžka.

Axiom o rovnoběžkách IV má stejný význam jako následující požadavek:

Pokud dvě přímky a, b v nějaké rovině neprotínají v této rovině ležící třetí přímku c, neprotínají se ani navzájem.

Vskutku, pokud by a, b měly společný bod A, byly by možné v téže rovině obě přímky a, b, které by procházely bodem A a neprotínaly c; tato okolnost by ale byla ve sporu s axiomem o rovnoběžkách IV. Stejně snadno plyne naopak axiom o rovnoběžkách IV z uvedeného požadavku.

Axiom o rovnoběžkách IV je *rovinný axiom*. Zavedení axiomu o rovnoběžkách ZJEDNODUŠUJE základy a velmi ULEHČUJE výstavbu geometrie.

Přibereme-li totiž k axiomům shodnosti axiom o rovnoběžkách, dospějeme snadno k známým skutečnostem:

Věta 30. Pokud jsou dvě rovnoběžky protnuty třetí přímkou, jsou souhlasné a střídavé úhly shodné, a naopak: Shodnost souhlasných nebo střídavých úhlů má za následek, že jsou přímky rovnoběžné.

Věta 31. Úhly trojúhelníku dávají dohromady dva úhly pravé.

Výměr. Pokud je M libovolným bodem v rovině α, nazveme *kružnicí* soubor všech takových bodů A v rovině α, pro které jsou úsečky MA navzájem shodné; M se nazývá *střed kružnice.* Na základě tohoto výměru s použitím skupin axiomů III–IV plynou snadno známé věty o kružnici, hlavně možnost konstrukce kružnice, procházející třemi body, které neleží v jedné přímce, nebo věta o shodnosti všech obvodových úhlů nad toutéž tětivou či věta o úhlech tětivového čtyřúhelníku.

§ 8. Skupina axiomů V: axiomy spojitosti.

V 1. (AXIOM MĚŘENÍ NEBOLI ARCHIMÉDŮV AXIOM). *Jsou-li AB a CD libovolné úsečky, existuje celé kladné číslo n takové, že n-násobné přenesení úsečky CD postupně za sebou od bodu A na polopřímku, procházející bodem B, povede za bod B.*

V 2. (AXIOM LINEÁRNÍ ÚPLNOSTI). *Systém bodů přímky se svými vztahy uspořádání a shodnosti není možné dále rozšiřovat tak, aby zůstaly zachovány vztahy mezi původními prvky, základní vlastnosti lineárního uspořádání a shodnosti, plynoucí z axiomů* I–III, *a axiom* V 1.

Základními vlastnostmi míníme vlastnosti uspořádání, formulované v axiomech II 1–3 a Větě 5, a také vlastnosti shodnosti, formulované v axiomech III 1–3, spolu s jednoznačností přenášení úseček.[15]

Dále uvažujeme, že při rozšíření systému bodů mají vztahy uspořádání a shodnosti platit i pro rozšířenou oblast bodů.

Upozorňujeme, že axiom I 3 zůstává zachován při každém rozšíření eo ipso a že zachování platnosti Věty 3 je pro uvažovaná rozšíření důsledkem zachování Archimédova axiomu V 1.

ZÁSADNÍ PODMÍNKOU PRO SPLNITELNOST AXIOMU ÚPLNOSTI JE TO, ŽE JE V NĚM MEZI AXIOMY, JEJICHŽ ZACHOVÁNÍ JE POŽADOVÁNO, OBSAŽEN I ARCHIMÉDŮV AXIOM. Lze vskutku ukázat: k systému bodů na přímce, který splňuje výše vyjmenované axiomy a věty uspořádání a shodnosti, lze vždy ještě přidat body tak, že v rozšířeném systému budou jmenované axiomy platit taktéž; tj. axiom úplnosti, ve kterém bychom požadovali jen zachování jmenovaných axiomů a vět, nikoliv však Archimédova nebo jemu odpovídajícího axiomu, by vedl na spor.

Oba axiomy spojitosti jsou axiomy *lineárními.*

Na základě lineárního axiomu úplnosti se především ukazuje následující obecnější skutečnost:

Věta 32. (VĚTA O ÚPLNOSTI).[16] Prvky geometrie (tj. body, přímky a roviny) tvoří systém, který při zachování axiomů spojení a uspořádání, shodnosti a Archimédova axiomu, tedy teprve při zachování všech axiomů, již není možné dále rozšířit o body, přímky a roviny.[17]

Důkaz. Prvky, které existují před rozšířením, označme jako prvky STARÉ, ty, které přibudou po rozšíření, jako prvky NOVÉ. Předpoklad nového prvku vede bezprostředně na předpoklad nového bodu N.

Podle axiomu I 8 máme čtyři staré body A, B, C, D, které neleží v jedné rovině. Označení lze zvolit tak, aby A, B, N neležely v jedné přímce. Obě navzájem různé roviny ABN a ACD mají podle axiomu I 7 společný kromě bodu A také nějaký bod E. Tento bod E neleží na přímce AB, neboť jinak by ležel bod B v rovině ACD. Pokud je E novým bodem, pak leží ve staré rovině ACD nový bod E; pokud je oproti tomu E starým bodem, potom leží nový bod N ve staré rovině, totiž v rovině ABE. V každém případě tedy leží nový bod ve staré rovině.

Ve staré rovině je starý trojúhelník FGH a na úsečce FG starý bod I. Spojíme-li nový bod L s I, protnou se podle axiomu II 4 přímky IL a FH nebo přímky IL a GH v nějakém bodě K. Pokud je K novým bodem, leží nový bod K na staré přímce FH, resp. GH; pokud je oproti tomu K starým bodem, leží nový bod L na staré přímce IK. Všechny tři předpoklady jsou tedy ve sporu s axiomem lineární úplnosti. Předpoklad nového bodu ve staré rovině je tedy nutno zamítnout a spolu s tím celý předpoklad nových prvků. □

---

[15] Přesný výběr podmínek, které zde mají být vyžadovány pro lineární uspořádání a shodnost, provedl F. BACHMANN, a to v návaznosti na tvar (*Fassung*) axiomu V 2 ze sedmého vydání.

[16] Poznámka, že stačí lineární axiom úplnosti, pochází od P. BERNAYSE.

[17] Tato poslední poznámka byla v dřívějších vydáních stanovena jako axiom úplnosti.

Větu o úplnosti lze ještě zesílit; zachování některých v ní jmenovaných axiomů není zapotřebí bezpodmínečně vyžadovat. Pro její platnost je však zásadní, aby mezi axiomy, jejichž zachování je v ní požadováno, byl obsažen axiom I 7. Lze vskutku ukázat: k systému prvků, které splňují axiomy I–V, lze vždy ještě přidat body, přímky, roviny tak, že v systému, vzniklém po sloučení, platí tytéž axiomy s výjimkou axiomu I 7; tj. věta o úplnosti, ve které by nebyl zachován axiom I 7 nebo jemu odpovídající axiom, by vedla na spor.

Axiom o úplnosti není důsledkem Archimédova axiomu. Archimédův axiom vskutku sám o sobě nepostačuje k tomu, dokázat s použitím axiomů I–IV, že je naše geometrie identická s obyčejnou analytickou "kartézskou" geometrií (srov. §9 a §12). Oproti tomu při zahrnutí axiomu úplnosti – ačkoliv tento axiom neobsahuje bezprostředně žádný výrok o pojmu konvergence – lze dokázat existenci meze, odpovídající Dedekindovu řezu, a Bolzanovu větu o existenci hromadných bodů, čímž prokážeme identitu naší geometrie s geometrií kartézskou.

Na základě předchozích úvah jsme požadavek spojitosti rozdělili na dvě zásadně odlišné části, totiž na Archimédův axiom, jehož role je připravit požadavek spojitosti, a na axiom úplnosti, který tvoří úhelný kámen celého systému axiomů.[18]

V následujících studiích se budeme opírat o Archimédův axiom a obecně nebudeme předpokládat axiom úplnosti.

Druhá kapitola. Bezespornost a nezávislost axiomů.

§ 9. Bezespornost axiomů.

Axiomy pěti skupin, představené v první kapitole, nevedou vzájemně na spor, tj. není možné z nich logickými úsudky odvodit skutečnost, která je sporná s nějakým ze stanovených axiomů. Abychom toto nahlédli, stanovme z reálných čísel systém věcí, ve kterém budou splněny všechny axiomy pěti skupin.

Uvažujme nejdříve obor Ω všech takových algebraických čísel, které vzniknou, když vyjdeme z čísla 1 a aplikujeme konečný počet čtyř početních operací: sčítání, odčítání, násobení, dělení, a páté operace $|\sqrt{1+\omega^2}|$, přičemž ω nechť pokaždé znamená číslo, které už prostřednictvím zmíněných pěti operací vzniklo.

Dvojici čísel (x, y) oboru Ω uvažujme jako bod a poměry libovolných třech čísel $(u : v : w)$ z Ω, kde u, v nejsou obě nula, jako přímku, nechť dále platnost rovnice

$$ux + vy + w = 0$$

vyjadřuje, že bod (x, y) leží na přímce $(u : v : w)$; tím jsou, jak snadno nahlédneme, splněny axiomy I 1–3 a IV. Čísla oboru Ω jsou všechna reálná; pokud zohledníme,

[18]Srov. také poznámku na konci § 17 a moji přednášku "Über den Zahlbegriff", Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900. – Při zkoumání věty o rovnosti úhlů při základně v rovnoramenném trojúhelníku dospějeme ke dvěma dalším axiomům spojitosti; srov. Příloha II této knihy, s. 135 [*p. překl.: originál*], a moje pojednání "Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck", Proceeding of the London Mathematical Society, sv. XXXV 1903

Mezi následnými souvisejícími studiemi o axiomech spojitosti zmiňme: R. Baldus "Zur Axiomatik der Geometrie" I–III. I v Math. Ann. 100. 321–333 (1928); II v Atti d. Conge. int. d. Mat. Bologna 1928, IV (1928); III v Sitzber. d. Heidelberger Akad. Wiss. 1930, 5. Abh. A. Schmidt "Die Stetigkeit in der absoluten Geometrie" Ibid. 1931, 5. Abh. P. Bernays "Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiome und verwandte Axiome" Math. Zeitschr. 63, 219–292 (1955).

Dodatek k poznámce na str. 72: Byl publikován francouzský překlad komentáře Prokla s úvodem a poznámkami od P. ver Eecke v Collection de travaux de l'Acad. internat. d'histrorie des sciences, č. 1: Proclus de Lycie: Les Commentaires sur le premier livre des élements d'Euclide, Brügge 1948.

že je lze uspořádat podle jejich velikostí, můžeme ihned říci, že pro naše body a přímky platí také všechny axiomy uspořádání II. Vskutku, jsou-li $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ nějaké body na jedné přímce, potom nechť jejich pořadí na přímce je právě toto, pokud v tomto pořadí čísla $x_1, x_2, x_3, \dots$ nebo $y_1, y_2, y_3, \dots$ buď neustále klesají, nebo rostou; abychom dále splnili požadavek axiomu II 4, potřebujeme jen stanovit, aby všechny body (x, y), pro které $ux + vy + w$ vyjde menší nebo větší než 0, ležely na jedné, resp. na druhé straně od přímky $(u : v : w)$. Lehce se přesvědčíme, že se toto tvrzení není ve sporu s předchozím tvrzením, které určuje pořadí bodů na přímce.

Nanášení úseček a přenášení úhlů probíhá podle známých metod analytické geometrie. Transformace tvaru

$$
\begin{aligned}
x' &= x + a,\\
y' &= y + b
\end{aligned}
$$

udává rovnoběžné posunutí úseček a úhlů a transformace tvaru

$$
\begin{aligned}
x' &= x\\
y' &= -y
\end{aligned}
$$

potom osovou souměrnost podle přímky $y = 0$. Označíme-li dále bod $(0, 0)$ jako O, bod $(1, 0)$ jako E a libovolný bod (a, b) jako C, potom otočením o úhel $\sphericalangle COE$, kde O je pevným středem otočení, vznikne z libovolného bodu (x, y) bod (x', y'), kde bude platit

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} y,\\
y' &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} y.
\end{aligned}
$$

Číslo

$$
\sqrt{a^2 + b^2} = b\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}
$$

je opět prvkem oboru Ω, proto v námi stanovené geometrii platí také axiomy shodnosti III 1–4 a zřejmě je splněn také axiom o shodnosti trojúhelníků III 5 a také Archimédův axiom. Axiom úplnosti V 2 splněn není.

Každý spor, na který by vedly důsledky lineárních a rovinných axiomů I–IV, V 1, by se podle tohoto musel projevit také v aritmetice oboru Ω.[19]

Zvolíme-li ve výše uvedených úvahách místo oboru Ω obor VŠECH reálných čísel, dostaneme obyčejnou rovinnou kartézskou geometrii. V ní je kromě axiomů I 1–3, II, III, IV a V 1 splněn také axiom úplnosti, což zjistíme následujícím způsobem.

V kartézské geometrii plyne z pouhých definic uspořádání a shodnosti úseček: každá úsečka je dělitelná na požadovaný počet n shodných částí, a pokud je úsečka AB menší než úsečka AC, potom je také n-tina AB menší než n-tina úsečky AC.

Předpokládejme nyní, že existuje přímka g, na které lze, oproti axiomu úplnosti, přidávat do dané geometrie body, aniž by se tím narušila platnost axiomů II 1–3, III 1–3, V 1, Věty 5 nebo jednoznačnosti nanášení úseček (str. 75). Jeden z takto přidaných bodů označme N. Bod N nyní dělí přímku g na dvě polopřímky, z nichž každá podle Archimédova axiomu obsahuje také ty body, které existovaly před rozšířením a které budeme označovat jako body STARÉ. N tedy rozděluje staré body g

[19]Co se týče otázky po bezespornosti aritmetických axiomů, srov. mé přednášky o pojmu čísla: Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900, a také "Mathematische Probleme," přednesená na Mezinárodním kongresu matematiků 1900, Göttinger Nachr. 1900, obzvláště problém č. 2.

na dvě polopřímky. Uvažujeme-li přímku g v parametrickém tvaru

$$x = mt + n, \qquad y = pt + q,$$

kde parametr t už před rozšířením o N nabývá všech reálných hodnot, představuje rozdělení prostřednictvím bodu N Dedekindův řez těchto hodnot. Pro něj, jak známo, platí: buďto má první jím vymezená třída poslední prvek, nebo má druhá třída prvek první. Bod na přímce g, který odpovídá tomuto prvku, označme A. Mezi A a N pak neleží žádný jiný bod.

Oproti tomu existuje starý bod B takový, že N leží mezi A a B. Podle Archimédova axiomu existuje dále nějaký počet bodů, řekněme $n-1$ různých bodů $C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}, D$ takových, že n úseček $AN, NC_1, C_1C_2, \ldots, C_{n-2}D$ je navzájem shodných, a že zároveň bod B leží mezi A a D. Rozdělíme nyní úsečku AB na n shodných částí. Všechny dělicí body jsou starými body; ten z nich, který leží nejblíže bodu A, označme W. Z lineárních axiomů uspořádání a shodnosti, uvedených na začátku tohoto důkazu, plyne, že je úsečka AW menší než úsečka AN, protože je AB menší než AD. Starý bod W leží tedy mezi A a N. Předpoklad, že lze na g přidat bod N, aniž by se narušila platnost lineárních axiomů, tedy vedl na spor.

V rovinné kartézské geometrii platí tedy VŠECHNY lineární a rovinné axiomy I–V.

Není těžké vést analogické úvahy pro prostorovou geometrii.

Každý spor, na který by vedly důsledky axiomů I–V, by se podle tohoto musel projevit také v aritmetice reálných čísel.

Lze nahlédnout, že existuje nekonečně mnoho geometrií, které vyhovují axiomům I–V, oproti tomu jen JEDNA JEDINÁ, totiž geometrie kartézská, ve které zároveň platí axiom úplnosti V 2.

§ 10. Nezávislost axiomu o rovnoběžkách (Neeukleidovská geometrie).[20]

Poté, co jsme dokázali bezespornost axiomů, se nabízí prozkoumat, zda tyto axiomy jsou také navzájem všechny mezi sebou nezávislé. Ukazuje se totiž, že žádné významné položky uvedených skupin axiomů nelze logickými úsudky odvodit ze skupin axiomů, pokaždé předcházejících.

Co se nejprve jednotlivých axiomů skupin I, II a III týče, lze snadno dokázat, že axiomy jedné a té samé skupiny na sobě nejsou závislé prakticky nikdy.

Axiomy skupin I a II jsou při našem výkladu ostatních axiomů v platnosti vždy, takže jde již jen o to, dokázat nezávislost na ostatních skupinách pro každou ze skupin III, IV a V.

Axiom o rovnoběžkách IV je nezávislý na ostatních axiomech; toto lze nejjednodušeji ukázat následujícím známým způsobem: Za prvky prostorové geometrie zvolme pouze ty body, přímky a roviny obyčejné (kartézské) geometrie, zkonstruované v §9, které procházejí vnitřkem pevné koule, a shodnosti v této geometrii zaveďme prostřednictvím takových lineárních transformací obyčejné geometrie, které převádějí pevnou kouli na samu sebe. Při vhodných předpokladech zjistíme, že v této *"neeukleidovské" geometrii* platí všechny axiomy kromě Eukleidova axiomu IV, a protože jsme v §9 dokázali možnost obyčejné geometrie, plyne z toho zároveň také možnost neeukleidovské geometrie.

Nejpozoruhodnější jsou věty, které platí nezávisle na axiomu o rovnoběžkách, tj. které platí jak v eukleidovské tak v neeukleidovské geometrii. Jako nejdůležitější příklady uveďme Legendrovy věty, z nichž první ke svému důkazu vyžaduje

[20] Lze ostatně ukázat: v geometrii, ve které jsou splněny axiomy I–III a Archimédův axiom V 1, výrok buďto neplatí nikdy pro žádný systém přímky a a bodu A vně a nebo naopak pro každý takový systém; srov. R. BALDUS, neeukleidovská geometrie, Berlin 1927.

kromě axiomů I až III také Archimédův axiom V 1. Nejprve si připravíme několik pomocných vět.

Věta 33. Je dán pravoúhlý trojúhelník OPZ s pravým úhlem u vrcholu P. Na úsečce PZ jsou dány dva body X, Y takové, že platí $\sphericalangle XOY \equiv \sphericalangle YOZ$. Potom je $XY < YZ$.

Důkaz. Pro DŮKAZ nanesme úsečku OX na úsečku OZ od bodu O:

$$OX \equiv OX'.$$

Z Vět 22 a 23 plyne, že X' leží na úsečce OZ, a užitím Věty 22 a axiomu III 5 vyjde:

$$\sphericalangle X'ZY < \sphericalangle OYX \equiv \sphericalangle OYX' < \sphericalangle YX'Z.$$

Vztah $\sphericalangle X'ZY < \sphericalangle YX'Z$ vede nyní podle Vět 12 a 23 na naše tvrzení. □

Věta 34. K libovolným dvěma úhlům α a ε lze vždy najít přirozené číslo r takové, že

$$\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

Přitom označuje $\frac{\alpha}{2^r}$ takový úhel, který dostaneme r-násobným půlením úhlu α.

Důkaz. Jsou dány dva úhly α a ε. Půlení úhlů lze provést na základě předpokládaných axiomů (viz Větu 26). Budeme zkoumat ostrý úhel $\frac{\alpha}{2}$. Pokud $\frac{\alpha}{2} \leq \varepsilon$, potom tvrzení Věty 34 platí pro $r = 2$. Pokud oproti tomu $\frac{\alpha}{2} \geq \varepsilon$, spustíme z bodu C jednoho ramene úhlu $\frac{\alpha}{2}$ na druhé rameno kolmici, která jej protne v bodě B. Vrchol úhlu $\frac{\alpha}{2}$ nazveme A. Přeneseme-li ε na rameno AB do vnitřku úhlu $\sphericalangle BAC = \frac{\alpha}{2}$, protne volné rameno podle předpokládané nerovnice úsečku BC v bodě D (srov. s Větou 13). Archimédův axiom V 1 vede na tvrzení, že existuje přirozené číslo n takové, že

$$n \cdot BD > BC.$$

Nyní přeneseme n-krát úhel ε, a to pokaždé do vnějšku na volné rameno.

Může nastat případ, že nejpozději při n-tém přenesení, řekněme při m-tém přenesení, nově vzniklé volné rameno jako první neprotne polopřímku BC. Protože předchozí volné rameno ještě tuto polopřímku protne, je úhel $(m-1)\varepsilon$ ostrý. Odtud snadno vyjde, že vnitřek úhlu $m\varepsilon$, zkonstruovaný m-násobným přenesením, leží v té polorovině, vymezené přímkou AB, která obsahuje bod C, a dále že polopřímka AC prochází vnitřkem úhlu $m\varepsilon$, tj. platí

$$m \cdot \varepsilon > \frac{\alpha}{2}.$$

V druhém případě vytne každý z úhlů ε, vzniklých n-násobným přenesením, na polopřímce BC úsečku, která je podle Věty 33 větší nebo rovna BD. Nechť n-té volné rameno protíná BC v bodě E. Součet BE n-ti úseček, vytčených na BC, je větší než $n \cdot BD$, tedy tím spíše větší než BC. Odtud plyne

$$n \cdot \varepsilon > \frac{\alpha}{2}.$$

Přiřaďme k m, resp. n, celé číslo r tak, že $m < 2^{r-1}$, resp. $n < 2^{r-1}$. Úhel $m\varepsilon$, resp. $n\varepsilon$ označme μ. Úhly $\frac{\mu}{2^{r-1}}$ a $\frac{\alpha}{2^r}$ lze zkonstruovat. Z možnosti porovnání velikostí úhlů vychází snadno, že jednak z nerovnice $2^{r-1} > m$ plyne nerovnice $\frac{\mu}{2^{r-1}} < \frac{\mu}{m} = \varepsilon$

a jednak z nerovnice $\mu > \frac{\alpha}{2}$ plyne nerovnice $\frac{\mu}{2^{r-1}} > \frac{\alpha}{2^r}$. Proto na základě tranzitivity porovnávání velikostí (str. 72) platí

$$\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon. \quad \square$$

Věta 35. (První Legendrova věta). Součet úhlů trojúhelníku je menší nebo roven dvěma úhlům pravým.

Důkaz. Označme $\sphericalangle A = \alpha$ libovolný ze třech úhlů daného trojúhelníku; oba zbývající označme $\sphericalangle B = \beta, \sphericalangle C = \gamma$ tak, že platí $\beta \leq \gamma$. Podle Věty 26 má úsečka BC ve své polovině bod D. Úsečku AD prodloužíme směrem od bodu D o sebe samu až do bodu E. Díky shodnosti vrcholových úhlů (str. 69) lze na trojúhelníky ADC a EDB použít axiom III 5, a pokud na základě Věty 15 definujeme jasným způsobem součet úhlů, vyjdou pro úhly α', β', γ' trojúhelníku ABE vztahy

$$\alpha' + \gamma' = \alpha, \qquad \beta' = \beta + \gamma.$$

Trojúhelník ABE tak má tentýž součet úhlů jako trojúhelník ABC.

Z nerovnosti $\beta \leq \gamma$ snadno plyne podle Vět 23 a 12

$$\alpha' \leq \gamma' \qquad \text{a odtud} \qquad \alpha' \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Ke každému trojúhelníku ABC a libovolnému jeho úhlu α lze tedy vždy najít trojúhelník o stejném součtu úhlů, ve kterém bude nějaký úhel menší nebo roven $\frac{\alpha}{2}$, a zároveň lze, když je dále dáno přirozené číslo r, najít trojúhelník o stejném součtu úhlů, ve kterém bude nějaký úhel menší nebo roven $\frac{\alpha}{2^r}$.

Předpokládejme nyní oproti tvrzení první Legendrovy věty, že součet úhlů daného trojúhelníku je větší než dva pravé.

Z Věty 22 plyne, že součet dvou úhlů trojúhelníku je menší než dva úhly pravé. Součet úhlů daného trojúhelníku lze podle předpokladu zapsat ve tvaru

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\rho + \varepsilon$$

kde ε označuje nějaký úhel a ρ pravý úhel. Podle Věty 34 lze určit přirozené číslo r tak, že je

$$\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

Zkonstruujeme nyní uvedeným způsobem trojúhelník s úhly $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$, které splňují tyto vztahy:

$$\alpha^* + .\beta^* + \gamma^* = 2\rho + \varepsilon, \qquad \alpha^* \leq \frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

V tomto trojúhelníku je

$$\beta^* + \gamma^* > 2\rho,$$

což je spor s Větou 22. Tím jsme dokázali první Legendrovu větu. $\square$

Věta 36. Když má čtyřúhelník $ABCD$ při vrcholech A a B pravé úhly a když kromě toho jsou v něm navzájem protilehlé strany AD a BC shodné, potom jsou také úhly $\sphericalangle C$ a $\sphericalangle D$ navzájem shodné. Dále kolmice, sestrojená ve středu M úsečky AB, protíná protilehlou stranu CD v bodě N tak, že čtyřúhelníky $AMND$ a $BMNC$ jsou shodné.

Důkaz. Kolmice na úsečku AB, sestrojená v bodě M, prochází, jak plyne z Vět 21 a 22, vnitřkem úhlu $\sphericalangle DMC$, a zároveň tak podle věty, zmíněné na str. 67, protíná úsečku CD v nějakém bodě N. Z Vět 12, 21 a 15 plyne, že trojúhelníky MAD a MBC jsou navzájem shodné a stejně tak trojúhelníky MDN a MCN. Z těchto shodností plyne pomocí Věty 15

$$\sphericalangle BCN \equiv \sphericalangle ADN.$$

Čtyřúhelníky $AMND$ a $BMNC$ jsou tedy shodné. □

Věta 37. Když má čtyřúhelník $ABCD$ čtyři pravé úhly, potom každá kolmice, spuštěná z bodu E přímky CD na protilehlou stranu AB, je kolmá také na CD.

Důkaz. Zavedeme pojem osové souměrnosti podle přímky a následovně: Spustíme-li z libovolného bodu P kolmici na nějakou přímku a a prodloužíme-li tuto o samu sebe směrem za patu kolmice až do bodu P', potom se P' nazývá obraz bodu P.

Zobrazíme úsečku EF v osové souměrnosti podle osy AD a podle osy BC. Obrazy E_1F_1 a E_2F_2 jsou, jak vyplývá z druhé části Věty 36, shodné s úsečkou EF. Body F_1 a F_2 leží spolu s F na přímce AB; body E_1 a E_2 leží spolu s E na přímce CD. Předpoklady první části Věty 36 platí pro čtyřúhelníky EFF_1E_1, EFF_2E_2 a $E_1F_1F_2E_2$, z čehož vyplývá shodnost čtyř úhlů, ležících při bodech E, E_1, E_2. U jednoho tohoto bodu vystupují tedy dva shodné vedlejší úhly (v přiloženém obrázku u bodu E_1); tj. čtyři shodné úhly jsou pravé. □

Věta 38. Pokud jsou v libovolném čtyřúhelníku všechny čtyři úhly pravé, potom v každém čtyřúhelníku se třemi pravými úhly je pravý také úhel čtvrtý.

Důkaz. Nechť je $A'B'C'D'$ čtyřúhelník se čtyřmi pravými úhly, $ABCD$ nechť je libovolný čtyřúhelník se třemi pravými úhly při vrcholech A, B, D. Zkonstruujeme ke čtyřúhelníku $A'B'C'D'$ takový shodný čtyřúhelník $AB_1C_1D_1$, jehož pravý úhel při vrcholu A je identický s tímtéž z čtyřúhelníku $ABCD$.

Pokud je bod B identický s bodem B_1 nebo bod D s bodem D_1, potom se naše tvrzení zcela shoduje s tím z Věty 37. Pokud leží B mezi A a B_1, D_1 mezi A a D, potom z věty o vnějším úhlu plyne, podobně jako u důkazu Věty 36, že se úsečky BC a C_1D_1 protínají v nějakém bodě F. Věta 37 dále říká, že při F, a tedy také při C, vystupuje pravý úhel.

Analogickým postupem vyplývá naše tvrzení pro ostatní možná uspořádání bodů A, B, B_1 a A, D, D_1. □

Pomocí Věty 38 lze dokázat druhá Legendrova věta.

Věta 39. (Druhá Legendrova věta). Pokud je v libovolném trojúhelníku součet úhlů roven dvěma pravým, potom je součet úhlů roven dvěma pravým v KAŽDÉM trojúhelníku.

Důkaz. Každému trojúhelníku ABC se součtem úhlů $2w$ můžeme přiřadit čtyřúhelník, který má tři pravé úhly a jehož čtvrtý úhel je roven w. Za tímto účelem propojíme navzájem středy D a E stran AC a BC a na spojnici spustíme z bodů A, B a C kolmice AF, BG a CH. Ze shodnosti trojúhelníků AFD a CHD a zároveň trojúhelníků BGE a CHE plyne jednak, lhostejno zda daný trojúhelník má tupý jeden z úhlů $\sphericalangle A$ nebo $\sphericalangle B$, nebo nikoliv, že

$$AF \equiv BG,$$
$$\sphericalangle FAB + \sphericalangle GBA = 2w.$$

Sestrojíme-li ve středu FG kolmici IK, potom plyne z druhé části Věty 36, že jsou čtyřúhelníky $AKIF$ a $BKIG$ shodné. Každý z obou čtyřúhelníků má tedy tři pravé úhly a jejich čtvrté úhly jsou stejné, tj.

$$\sphericalangle FAB \equiv \sphericalangle GBA.$$

Tím dostaneme $\quad \sphericalangle FAB = w$
a čtyřúhelník $AKIF$, přiřazený danému trojúhelníku, tak bude mít požadovanou vlastnost.

Nechť je nyní v libovolném trojúhelníku D_1 součet úhlů roven dvěma pravým, a nechť je kromě toho dán další trojúhelník D_2. Zkonstruujeme asociované čtyřúhelníky V_1, resp. V_2. Čtyřúhelník V_1 má čtyři pravé úhly, čtyřúhelník V_2 pravé úhly tři. Podle Věty 38 je ve V_2 pravý také čtvrtý úhel. Tím jsme dokázali druhou Legendrovu větu. □

§ 11. Nezávislost axiomů shodnosti

Ze skutečností, které se týkají nezávislosti axiomů shodnosti, chceme jako obzvláště důležitou dokázat tuto: Axiom III 5 nelze logickými úsudky odvodit ze zbývajících axiomů I, II, III 1–4, IV, V.

Zvolíme body, přímky, roviny obyčejné geometrie také jako prvky nové prostorové geometrie a definujeme přenášení úhlu stejně jako u obyčejné geometrie, např. tak, jak jsme uvedli v § 9; přenášení úsečky oproti tomu definujeme jinak. Nechť mají dva body A_1, A_2 v obyčejné geometrii souřadnice x_1, y_1, z_1 resp. x_2, y_2, z_2; potom kladnou hodnotu

$$\sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

budeme označovat jako délku úsečky A_1A_2 a dvě libovolné úsečky A_1A_2 a $A'_1A'_2$ jako navzájem shodné, pokud budou mít stejné délky v právě zavedeném významu.

Je ihned zřejmé, že v takto vytvořené prostorové geometrii platí axiomy I, II, III 1–2, 4, IV, V, (a ostatně také Věty 14, 15, 16, 19, 21, odvozené pomocí axiomu III 5).

Abychom ukázali, že je splněn také axiom III 3, zvolíme libovolnou přímku a a na ní tři body A_1, A_2, A_3 tak, že A_2 leží mezi A_1 a A_3. Body x, y, z přímky a jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \lambda t + \lambda', \\ y &= \mu t + \mu', \\ z &= \nu t + \nu', \end{aligned}$$

kde t je parametr a $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ jsou jisté konstanty. Jsou-li $t_1, t_2 (< t_1), t_3 (< t_2)$ hodnoty parametrů, které odpovídají bodům A_1, A_2, A_3, potom najdeme pro délky tří úseček A_1A_2, A_2A_3 a A_1A_3 výrazy

$$\begin{aligned} (t_1 - t_2)\left|\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}\right|, \\ (t_2 - t_3)\left|\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}\right|, \\ (t_1 - t_3)\left|\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}\right|, \end{aligned}$$

součet délek úseček A_1A_2 a A_2A_3 je tak roven délce úsečky A_1A_3. Odtud plyne platnost axiomu III 3. Axiom III 5 pro trojúhelníky v naší geometrii pokaždé splněn není. Jako příklad uveďme v rovině $z = 0$ ležící čtyři body

O	se	souřadnicemi	$x = 0,$	$y = 0,$
A	"	"	$x = 1,$	$y = 0,$
B	"	"	$x = -1,$	$y = 0,$
C	"	"	$x = 0,$	$y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Úsečky OA, OB a OC mají délku 1. Pro oba pravoúhlé trojúhelníky AOC a COB tak platí shodnosti

$$\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle COB,$$
$$OA \equiv OC,$$
$$OC \equiv OB.$$

Oproti axiomu III 5 ale úhly $\sphericalangle OAC$ a $\sphericalangle OCB$ shodné nejsou. – V tomto příkladu navíc není splněna první věta shodnosti, neboť AC má délku $\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{2}}}$, BC oproti tomu délku $\sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{2}}}$. Ani pro jeden z obou rovnoramenných trojúhelníků AOC a COB přitom neplatí Věta 11.

Příkladem ROVINNÉ geometrie, ve které jsou splněny všechny axiomy s výjimkou axiomu III 5, je následující: V rovině α definujme standardním způsobem všechny pojmy, vystupující v axiomech, vyjma shodnosti úseček. Za délku úsečky však bude stát standardním způsobem definovaná délka projekce této úsečky do roviny β, která je oproti α nakloněna o libovolný ostrý úhel.

§ 12. Nezávislost axiomů spojitosti V (nearchimédovská geometrie).

Abychom dokázali nezávislost Archimédova axiomu V 1, musíme vytvořit geometrii, ve které budou všechny axiomy s výjimkou axiomů V splněny, tyto poslední ale splněny nebudou.[21]

Za tímto účelem zkonstruujme obor $\Omega(t)$ všech těch algebraických funkcí parametru t, které vzniknou z parametru t pomocí pěti početních operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a operace $\left|\sqrt{1 + \omega^2}\right|$; přitom značí ω libovolnou funkci, která již přostřednictvím oněch operací vznikla. Množina prvků $\Omega(t)$ je spočitatelná – stejně jako množina prvků Ω z § 9. Všech těchto pět operací je jednoznačných a aplikovatelných na reálná čísla; obor $\Omega(t)$ proto obsahuje jenom jednoznačné a reálné funkce parametru t.

Nechť je c libovolnou funkcí oboru $\Omega(t)$; Jelikož je funkce c algebraickou funkci parametru t, může být nulová pokaždé jen pro konečný počet hodnot t, pro dostatečně velké kladné hodnoty t tak bude funkce c buďto pořád kladná nebo pořád záporná.

Na funkce oboru Ω se nyní podíváme jako na nějaký druh komplexních čísel ve smyslu následujícího paragrafu § 13; v takto definovaném systému čísel zřejmě platí všechna obyčejná početní pravidla. Dále, pokud jsou a, b libovolná dvě různá čísla tohoto komplexního systému čísel, řekneme o číslu a, že je větší nebo menší než číslo b, symbolicky: $a > b$ nebo $a < b$, podle toho, zda rozdíl $c = a - b$ jako funkce t vyjde pro dostatečně velké kladné hodnoty t vždy kladný nebo vždy záporný. Při takovémto vymezení můžeme čísla našeho komplexního číselného systému uspořádat podle jejich velikosti, analogicky jako u reálných čísel; lze snadno nahlédnout,

[21] G. VERONESE se ve svém promyšleném díle: "Grundzüge der Geometrie", německy od A. Scheppa, Leipzig 1894, taktéž pokusil o vybudování geometrie, která byla nezávislá na Archimédově axiomu.

že pro naše komplexní čísla platí věty, podle kterých zůstávají nerovnice v platnosti, pokud přičteme k obou stranám stejné číslo nebo obě strany vynásobíme stejným číslem > 0.

Označíme-li n libovolné kladné celé racionální číslo, platí jistě pro obě čísla n a t oboru $\Omega(t)$ nerovnice $n < t$, neboť rozdíl $n - t$, pojatý jako funkce parametru t, vychází zřejmě pro dostatečně velké hodnoty t vždy záporně. Tuto skutečnost vyslovíme následujícím způsobem: dvě čísla 1 a t oboru $\Omega(t)$, která jsou obě > 0, mají vlastnost, že libovolný násobek prvního je vždy menší než druhé.

Z komplexních čísel oboru $\Omega(t)$ nyní vybudujeme geometrii přesně stejným způsobem, jaký jsme užili v § 9 po zavedení oboru Ω algebraických čísel: systém tří čísel (x, y, z) oboru $\Omega(t)$ budeme uvažovat jako bod a poměry libovolných čtyř čísel $(u : v : w : r)$ z $\Omega(t)$, kde u, v, w nejsou všechna nula, jako rovinu; dále nechť platnost rovnice

$$ux + vy + wz + r = 0$$

vyjadřuje, že bod (x, y, z) leží v rovině $(u : v : w : r)$, a jako přímku označme soubor všech bodů, ležících ve dvou rovinách s rozdílným $u : v : w$. Stanovíme-li potom analogické věty pro uspořádání prvků a pro přenášení úseček a úhlů jako v § 9, vzniká *"nearchimédovská" geometrie*, ve které, jak ukazují výše zmíněné vlastnosti komplexního systému čísel $\Omega(t)$, jsou splněny všechny axiomy s výjimkou axiomů spojitosti. Vskutku, úsečku 1 lze nanášet na úsečku t libovolně mnohokrát za sebou, aniž bychom překročili koncový bod úsečky; to je ve sporu s požadavkem Archimédova axiomu.

To, že je také axiom úplnosti V 2 nezávislý na všech předchozích axiomech I–IV, V 1, ukazuje první z geometrií, představených v § 9, neboť v té je Archimédův axiom splněn.

Jak nearchimédovské, tak neeukleidovské geometrie mají mimořádný význam, a velmi důležitá je především role, kterou hraje Archimédův axiom v důkazu Legendrových vět. Výzkum, který na toto téma provedl na mou pobídku M. Dehn,[22] vedl k úplnému vyjasnění této otázky. Studie M. Dehna předpokládá axiomy I–III. Jen na konci Dehnovy práce – aby do oblasti výzkumu spadala také Riemannova (eliptická) geometrie – byly axiomy II uspořádání pojaty obecněji než v tomto pojednání, totiž přibližně takto:

Čtyři body A, B, C, D jedné přímky se dělí vždy na dvě dvojice A, C a B, D tak, že A, C a B, D jsou "ODDĚLENÉ" a naopak. Pět bodů na přímce lze vždy označit A, B, C, D, E tak, že body A, C jsou odděleny body B, D a body B, E, dále tak, že body A, D jsou odděleny body B, E a body C, E, atd.

Na základě axiomů I–III, tedy bez použití spojitosti, dokazuje M. Dehn nejdříve další tvar druhé Legendrovy věty, Věty 39:

POKUD JE V *libovolném* TROJÚHELNÍKU SOUČET ÚHLŮ VĚTŠÍ, RESP. ROVEN NEBO MENŠÍ, NEŽ DVA ÚHLY PRAVÉ, POTOM JE TOMU TAK V *každém* TROJÚHELNÍKU.[23]

Dále na příslušném místě dokazuje následující doplnění první Legendrovy věty, Věty 35:

POKUD VYLOUČÍME ARCHIMÉDŮV AXIOM, *neplyne* Z PŘEDPOKLADU NEKONEČNĚ MNOHA ROVNOBĚŽEK K NĚJAKÉ PŘÍMCE V JEDNOM BODĚ, ŽE SOUČET ÚHLŮ TROJÚHELNÍKU JE MENŠÍ NEŽ DVA PRAVÉ. EXISTUJE TOTIŽ ZAPRVÉ GEOMETRIE (NELEGENDROVSKÁ GEOMETRIE), VE KTERÉ LZE JEDNÍM BODEM VÉST K NĚJAKÉ PŘÍMCE NEKONEČNĚ MNOHO ROVNOBĚŽEK A VE KTERÉ PŘESTO BUDOU

[22]"Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck", Math. Ann. sv. 53, 1900.

[23]Důkaz této věty uvedl následně také F. Schur, Math. Ann. sv. 55, a dále Hjelmslev, Math. Ann. 64; v tomto druhém vyzdvihněme velmi krátkou úvahu, užitou k důkazu prostřední části této věty. Srov. také F. Schur, Grundlagen der Geometrie, Leipzig a Berlin 1909, § 6.

platit věty Riemannovy (eliptické) geometrie. Zadruhé existuje geometrie (poloeukleidovská geometrie), ve které v jednom bodě existuje k nějaké přímce nekonečně mnoho rovnoběžek a ve které přesto platí věty eukleidovské geometrie.

Z předpokladu, že rovnoběžky neexistují, plyne vždy, že je součet úhlů v trojúhelníku větší než dva pravé.

Poznamenávám nakonec, že pokud přibereme Archimédův axiom, lze nahradit axiom o rovnoběžkách požadavkem, aby byl v trojúhelníku součet úhlů roven dvěma pravým.

Třetí kapitola. Nauka o proporcích.

§ 13. Komplexní číselné systémy.[24]

Na začátku této kapitoly předešleme několik krátkých úvah o kompexních číselných systémech, které se nám později budou hodit hlavně pro usnadnění zápisu.

Reálná čísla tvoří jako celek systém věcí s následujícími vlastnostmi:

Věty o incidenci (1–6):

1. Z čísla a a z čísla b vzniká "sčítáním" určité číslo c, symbolicky:

$$a + b = c \qquad \text{nebo} \qquad c = a + b.$$

2. Pokud jsou a a b daná čísla, potom existuje vždy právě jedno číslo x a právě jedno číslo y, pro která bude

$$a + x = b \qquad \text{resp.} \qquad y + a = b.$$

3. Existuje určité číslo – nazveme jej o – takové, že pro každé a je zároveň

$$a + o = a \qquad \text{a} \qquad o + a = a.$$

4. Z čísla a a z čísla b vzniká určité číslo c ještě jiným způsobem, "násobením", symbolicky:

$$ab = c \qquad \text{nebo} \qquad c = ab.$$

5. Když a a b jsou libovolná daná čísla a a není o, potom existuje vždy právě jedno číslo x a právě jedno číslo y takové, že

$$ax = b \qquad \text{resp.} \qquad ya = b.$$

6. Existuje určité číslo – nazveme jej 1 – takové, že pro každé a je zároveň

$$a \cdot 1 = a \qquad \text{a} \qquad 1 \cdot a = a.$$

Početní pravidla (7–12):

Pokud jsou a, b, c libovolná čísla, platí vždy následující početní zákony:

7. $a + (b + c) = (a + b) + c$
8. $a + b = b + a$
9. $a(bc) = (ab)c$
10. $a(b + c) = ab + ac$
11. $(a + b)c = ac + bc$
12. $ab = ba.$

[24]Viz k tomu Dodatek 2 [*p. překl.: originál*].

VĚTY O USPOŘÁDÁNÍ (13–16):

13. Když a, b jsou libovolná dvě různá čísla, potom je vždy právě jedno z nich (např. a) větší než druhé; o druhém řekneme, že je menší, symbolicky:

$$a > b \qquad \text{a} \qquad b < a.$$

Pro žádné číslo a neplatí $a > a$.

14. Pokud je $a > b$ a $b > c$, potom je také $a > c$.
15. Pokud je $a > b$, potom je také vždy

$$a + c > b + c.$$

16. Pokud je $a > b$ a $c > 0$, potom je také vždy

$$ac > bc.$$

VĚTY O SPOJITOSTI (17–18):

17. (ARCHIMÉDOVA VĚTA.) Pokud jsou $a > 0$ a $b > 0$ dvě libovolná čísla, potom lze vždy přičítat a k sobě samému tak dlouho, dokud nebude výsledný součet větší než b, symbolicky:

$$a + a + a + \cdots + a > b.$$

18. (VĚTA O ÚPLNOSTI.) K systému čísel nelze jako čísla připojit jiný systém věcí, aby také v systému, vzniklém jejich spojením, při zachování vztahů mezi čísly, platily také všechny Věty 1–17; nebo zkráceně: čísla tvoří systém věcí, který není možné dále rozšiřovat, aby přitom byly zachovány všechny vztahy a všechny zavedené věty.

Systém věcí, který má jenom část vlastností 1–18, nazveme jako komplexní číselný systém. Komplexní číselný systém nazveme archimédovským nebo nearchimédovským podle toho, zda vyhovuje nebo nevyhovuje požadavku 17.

NĚKTERÉ ZE STANOVENÝCH VLASTNOSTÍ 1-18 PLYNOU Z VLASTNOSTÍ OSTATNÍCH. Naskýtá se úkol, prozkoumat logickou závislost těchto vlastností.[25] V šesté kapitole § 32 a § 33 zodpovíme naznačenou cestou dvě určité otázky, týkající se jejich geometrického významu a zde pouze poukážeme na to, že požadavek 17 není v žádném případě důsledkem jemu předchozích vlastností, neboť např. už komplexní číselný systém $\Omega(t)$, probíraný v § 12, má všechny vlastnosti 1–16, ale požadavek 17 nesplňuje.

Obecně platí ohledně vět o spojitosti (17–18) analogické poznámky jako ty, které jsme uvedli v § 8 o geometrických axiomech spojitosti.

§ 14. Důkaz Pascalovy věty.

V této a v následujících kapitolách stanovíme pro náš výzkum ROVINNÉ axiomy všech skupin s výjimkou axiomů spojitosti, tj. axiomy I 1–3 a II–IV. V aktuální třetí kapitole máme v úmyslu vybudovat Eukleidovu nauku o proporcích na základě uvedených axiomů, tj. V ROVINĚ A NEZÁVISLE NA ARCHIMÉDOVĚ AXIOMU (viz mimo jiné Dodatek II). Za tímto účelem dokážeme nejdříve jeden fakt, který je zvláštním případem známé Pascalovy věty z nauky o kuželosečkách a který budu dále zkráceně označovat jako Pascalovu větu. Tato věta zní:

Věta 40. (PASCALOVA VĚTA.[26]) Nechť jsou A, B, C resp. A', B', C' pokaždé tři

[25] Srov. Dodatek I 2. [*p. překl.: originál*]

[26] F. SCHUR publikoval zajímavý důkaz Pascalovy věty na základě rovinných a prostorových axi-

body na dvou protínajících se přímkách a nechť jsou tyto body různé od průsečíku; je-li potom CB' rovnoběžná s BC' a CA' rovnoběžná s AC', potom je také BA' rovnoběžná s AB'.

Abychom uvedli důkaz této věty, zavedeme nejdříve následující značení: V pravoúhlém trojúhelníku je zřejmě odvěsna a jednoznačně určena přeponou c a přilehlým úhlem α, vytnutém odvěsnou a a přeponou c; zavedeme stručné označení

$$a = \alpha c,$$

takže symbol αc znamená vždy určitou úsečku, přičemž c je libovolná úsečka a α libovolně daný ostrý úhel. Stejně tak je pro libovolně danou úsečku a a libovolně daný ostrý úhel α rovnicí $a = \alpha c$ vždy jednoznačně určena úsečka c.

Nechť je navíc c libovolnou úsečkou a α, β nechť značí dva libovolné ostré úhly; tvrdíme, že jistě platí shodnost úseček

$$\alpha\beta c = \beta\alpha c,$$

a tak lze vždy navzájem prohodit symboly $\alpha = \beta$.

Abychom dokázali toto tvrzení, vezmeme úsečku $c = AB$ a přeneseme na tuto úsečku od bodu A na obě strany úhly α, resp. β. Potom spustíme z bodu B na druhá ramena těchto úhlů kolmice BC a BD, spojíme C s D a nakonec spustíme z A kolmici AE na CD.

Protože jsou úhly $\sphericalangle ACB$ a $\sphericalangle ADB$ pravé, leží čtyři body A, B, C, D na kružnici, a oba úhly $\sphericalangle ACD$ a $\sphericalangle ABD$ tak jsou shodné, coby obvodové úhly, příslušné téže tětivě AD. Přitom dává jednak $\sphericalangle ACD$ dohromady s $\sphericalangle CAE$ a jednak $\sphericalangle ABD$ dohromady s $\sphericalangle BAD$ pokaždé pravý úhel, proto jsou také úhly $\sphericalangle CAE$ a $\sphericalangle BAD$ navzájem shodné, tj. je

$$\sphericalangle CAE \equiv \beta,$$

a proto

$$\sphericalangle DAE \equiv \alpha.$$

Tak získáme ihned shodnosti úseček

$$\begin{aligned} \beta c &\equiv AD, & \alpha c &\equiv AC, \\ \alpha\beta c &\equiv \alpha(AD) \equiv AE, & \beta\alpha c &\equiv \beta(AC) \equiv AE, \end{aligned}$$

a odtud plyne správnost výše uvedené shodnosti.

Vrátíme se k obrázku Pascalovy věty a označíme průnik obou přímek jako O a úsečky $OA, OB, OC, OA', OB', OC', CB', BC', AC', CA', BA', AB'$ po řadě jako $a, b, c, a', b', c', l, l^*, m, m^*, n, n^*$. Potom spustíme z bodu O kolmici na $l, m*, n$; Kolmice na l vytíná s oběma přímkami OA, OA' ostré úhly λ', λ, a kolmice na m^* resp. na n tvoří s přímkami OA a OA' ostré úhly μ', μ resp. ν', ν. Vyjádříme-li nyní tyto tři kolmice výše uvedeným způsobem pomocí přepon a úhlů při základně v příslušných pravoúhlých trojúhelnících dvojím způsobem, dostaneme následující tři shodnosti:

$$\lambda b' \equiv \lambda' c, \tag{1}$$

$$\mu a' \equiv \mu' c, \tag{2}$$

$$\nu a' \equiv \nu' b. \tag{3}$$

omů I–III v Math. Ann. sv. 51; totéž provedl Dehn, Math. Ann. sv. 53. J. Hjelmslevovi se potom podařilo, přičemž staví na výsledcích G. Hessenberga (Math. Ann. sv. 61), dokázat Pascalovu větu pouze na základě rovinných axiomů I–III ("Neue Begründung der ebenen Geometrie"; Math. Ann. sv. 64). Srov. příloha III této knihy [*p. překl.: originál*].

Jelikož má podle předpokladu být l rovnoběžná s l^* a m rovnoběžná s m^*, jsou kolmice z bodu O, které bychom spustili na l^*, resp. na m, identické s kolmicemi na l, resp. na m^*, a dostaneme tak

$$\lambda c' \equiv \lambda' b, \tag{4}$$

$$\mu c' \equiv \mu' a. \tag{5}$$

Pokud použijeme na shodnost (3) vlevo a vpravo symbol $\lambda'\mu$ a uvážíme, že podle výše dokázaného lze symboly, o nichž je řeč, navzájem prohodit, nalezneme

$$\nu\lambda'\mu a' \equiv \nu'\mu\lambda' b.$$

V této shodnosti zohledníme vlevo shodnost (2) a vpravo (4); potom bude

$$\nu\lambda'\mu' c \equiv \nu'\mu\lambda c'$$

nebo

$$\nu\mu'\lambda' c \equiv \nu'\lambda\mu c'.$$

Zde zohledníme vlevo shodnost (1) a vpravo (5); potom bude

$$\nu\mu'\lambda b' \equiv \nu'\lambda\mu' a$$

nebo

$$\lambda\mu'\nu b' \equiv \lambda\mu'\nu' a.$$

Na základě vlastnosti našich symbolů, uvedené na str. 87, odvodíme z této poslední shodnosti ihned

$$\mu'\nu b' \equiv \mu'\nu' a,$$

a odtud

$$\nu b' \equiv \nu' a. \tag{6}$$

Upřeme-li nyní pozornost na kolmici, spuštěnou z O na n, a spustíme-li na n též kolmice z A a z B', potom dle shodnosti (6) budou paty obou posledně jmenovaných kolmic identické, tj. přímka $n^* = AB'$ bude kolmá ke kolmici na n, a tedy rovnoběžná s n. Tím je důkaz Pascalovy věty hotov.

K vybudování nauky o proporcích použijeme pouze ten speciální případ Pascalovy věty, ve kterém platí shodnost úseček

$$OC \equiv OA',$$

a tedy také

$$OA \equiv OC',$$

a ve kterém leží body A, B, C na téže polopřímce, vycházející z bodu O. Tento speciální případ lze dokázat zvláště snadno, totiž následovně:

Naneseme na OA' od bodu O úsečku OB a koncový bod označíme D', takže spojnice BD' bude rovnoběžná s CA' a AC'. Kvůli shodnosti trojúhelníků $OC'B$ a OAD' bude

$$\sphericalangle OC'B \equiv \sphericalangle OAD'. \tag{1†}$$

Protože CB' a BC' jsou podle předpokladu navzájem rovnoběžné, je

$$\sphericalangle OC'B \equiv \sphericalangle OB'C; \tag{2†}$$

Z (1†) a (2†) odvodíme

$$\sphericalangle OAD' \equiv \sphericalangle OB'C;$$

potom je ale $ACD'B'$ podle nauky o kružnici tětivovým čtyřúhelníkem, a platí tak podle známé věty o úhlech v tětivovém čtyřúhelníku shodnost

$$\sphericalangle OD'C \equiv \sphericalangle OAB'. \tag{3†}$$

Dále je kvůli shodnosti trojúhelníků $OD'C$ a OBA' také

$$\sphericalangle OD'C \equiv \sphericalangle OBA'; \tag{8.1}$$

z (3†) a (8.1) odvodíme

$$\sphericalangle OAB' \equiv \sphericalangle OBA', \tag{8.2}$$

a tato shodnost říká, že AB' a BA' jsou navzájem rovnoběžné, jak požaduje Pascalova věta.

Je-li dána libovolná přímka, nějaký bod, který na ní neleží, a libovolný úhel, lze zřejmě prostřednictvím přenesení tohoto úhlu a vedení rovnoběžky nalézt přímku, která prochází daným bodem a danou přímku protíná pod daným úhlem. S uvážením tohoto stavu můžeme konečně pro důkaz obecné Pascalovy věty použít následující jednoduché odvození, jež mi bylo sděleno třetí stranou a za něž děkuji.

Veďme bodem B přímku, která protíná OA' v bodě D' pod úhlem $\sphericalangle OCA'$, takže platí shodnost

$$\sphericalangle OCA' \equiv < OD'B; \tag{1*}$$

potom podle známé věty z nauky o kružnici je $CBD'A'$ tětivovým čtyřúhelníkem, a tak podle věty o shodnosti obvodového úhlu při téže tětivě platí shodnost

$$\sphericalangle OBA' \equiv \sphericalangle OD'C. \tag{2*}$$

Protože CA' a AC' jsou podle předpokladu navzájem rovnoběžné, je

$$\sphericalangle OCA' \equiv \sphericalangle OAC'; \tag{3*}$$

Z (1*) a (3*) odvodíme shodnost

$$\sphericalangle OD'B \equiv \sphericalangle OAC';$$

potom je ale také $BAD'C'$ tětivovým čtyřúhelníkem, a platí tak podle věty o úhlech tětivového čtyřúhleníku shodnost

$$\sphericalangle OAD' \equiv \sphericalangle OC'B. \tag{4*}$$

Protože je dále podle předpokladu CB' rovnoběžná s BC', máme také

$$\sphericalangle OB'C \equiv \sphericalangle OC'B; \tag{5*}$$

Z (4*) a (5*) odvodíme shodnost

$$\sphericalangle OAD' \equiv \sphericalangle OB'C;$$

tato dále říká, že $CAD'B'$ je tětivovým čtyřúhelníkem, a tak platí také shodnost

$$\sphericalangle OAB' \equiv \sphericalangle OD'C. \tag{6*}$$

Z (2*) a (6*) plyne:

$$\sphericalangle OBA' \equiv \sphericalangle OAB',$$

a tato shodnost říká, že BA' a AB' jsou navzájem rovnoběžné, jak požaduje Pascalova věta.

Pokud je D' identický s některým z bodů A', B', C' nebo pokud je pořadí bodů A, B, C jiné, potom bude zapotřebí obměna důkazu, kterou lze snadno nahlédnout.[27]

[27]Pozornost zasluhuje také užití věty o společném průniku výšek trojúhelníku pro zdůvodnění Pascalovy věty; srov. v této souvislosti F. Schur, Math. Ann. sv. 57, a J. Mollerup, "Studier over den plane geometris Aksiomer", Kopenhagen 1903.

§ 15. Počet s úsečkami na základě Pascalovy věty.

Pascalova věta, dokázaná v předchozím paragrafu, nám umožňuje zavést do geometrie počet s úsečkami, ve kterém budou platit všechna početní pravidla pro reálná čísla v původní podobě.

Místo výrazu "je shodný" a znaménka $\equiv$ budeme v počtu s úsečkami používat "rovná se" a znaménko $=$.

Pokud A, B, C jsou tři body jedné přímky a B leží mezi A a C, označíme $c = AC$ jako *součet* obou úseček $a = AB$ a $b = BC$ a zapíšeme

$$c = a + b.$$

Úsečky a a b nazveme menší než c, symbolicky:

$$a < c, \qquad b < c,$$

a c nazveme větší než a a b, symbolicky:

$$c > a, \qquad c > b.$$

Z lineárních axiomů shodnosti III 1–3 dostaneme snadno, že pro právě definované sčítání úseček platí zákon ASOCIATIVITY

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

a také zákon KOMUTATIVITY

$$a + b = b + a.$$

Pro geometrickou definici součinu úsečky a do úsečky b[28] použijeme následující konstrukci: Zvolíme nejdříve libovolnou úsečku, kterou po celou dobu nebudeme měnit, a označíme ji 1. Dále naneseme na jedno rameno pravého úhlu od vrcholu O počínaje úsečku 1 a na totéž rameno též od vrcholu O počínaje úsečku b; potom naneseme na druhé rameno úsečku a. Koncové body úseček 1 a a spojíme přímkou a vedeme k ní rovnoběžku koncovým bodem úsečky b; tato vytíná na druhém rameni úsečku c: tuto úsečku c potom nazveme *součinem* úsečky a do úsečky b a označíme ji

$$c = ab.$$

Především chceme dokázat, že pro právě definované násobení úseček platí zákon KOMUTATIVITY

$$ab = ba.$$

Za tímto účelem zkonstruujeme nejdřív výše uvedeným způsobem úsečku ab. Dále naneseme na první rameno pravého úhlu úsečku a a na druhé rameno úsečku b, spojíme přímkou koncový bod úsečky 1 s koncovým bodem úsečky b na druhém rameni a k této přímce vedeme rovnoběžku koncovým bodem a na prvním rameni: tato vytíná na druhém rameni úsečku ba; vskutku, jak ukazuje obrázek, je kvůli rovnoběžnosti tečkovaných pomocných linek podle Pascalovy věty (viz Věta 40) tato úsečka ba identická s předem zkonstruovanou úsečkou ab. Jak je ihned vidět, vyplývá také naopak z platnosti zákona komutativity v našem počtu s úsečkami, že speciální případ Pascalovy věty, jmenovaný na str. 88, platí jistě pro takové obrazce, ve kterých tvoří polopřímky OA a OA' pravý úhel.

Abychom pro naše násobení úseček dokázali zákon ASOCIATIVITY

$$a(bc) = (ab)c,$$

[28] p. překl.: Používáme v souladu s Hilbertem zvláštní předložkový výraz ("Produkt... in die Strecke"), který má zdůraznit, že pro stanovený součin neplatí zákon komutativity.

naneseme na rameno pravého úhlu od vrcholu O úsečky 1 a b a na druhé rameno také od bodu O úsečky a a c. Potom zkonstruujeme úsečky $d = ab$ a $e = cb$ a naneseme tyto úsečky d a e na první rameno od bodu O počínaje. Zkonstruujeme-li následně ae a cd, je zase na základě Pascalovy věty vidět z přiloženého obrázku, že koncové body těchto úseček jsou identické, tj. že je

$$ae = cd \qquad \text{nebo} \qquad a(cb) = c(ab),$$

a odtud plyne za pomoci zákona komutativity také

$$a(bc) = (ab)c.$$[29]

Jak vidno, použili jsme v předcházejícím při důkazu jak zákona komutativity, tak i asociativity násobení, pouze onen speciální případ Pascalovy věty, jejž jsme na str. 88 (§ 14) dokazovali zvláště jednoduchým způsobem za použití tětivového čtyřúhelníku.

Shrneme-li tyto úvahy, dospějeme k následujícímu zdůvodnění zákonů násobení v počtu s úsečkami, které se mi jeví z dosavadních známých druhů zdůvodnění jako nejjednodušší:

Na jedno rameno pravého úhlu naneseme od vrcholu O úsečky $a = OA$ a $b = OB$ a na druhé rameno potom jednotkovou úsečku $1 = OC$. Kružnice, procházející body A, B, C protíná toto druhé rameno ještě v bodě D. Bod D lze najít jednoduše bez použití kružítka jen na základě axiomů shodnosti tak, že spustíme ze středu kružnice kolmici na OC a podle ní zobrazíme v osové souměrnosti bod C. Kvůli shodnosti úhlů $\sphericalangle OCA$ a $\sphericalangle OBD$ je podle definice součinu dvou úseček (str. 90)

$$OD = ab,$$

a kvůli shodnosti úhlů $\sphericalangle ODA$ a $\sphericalangle OBC$ je podle téže definice

$$OD = ba.$$

Odtud plynoucí zákon komutativity násobení

$$ab = ba$$

navíc podle poznámky na str. 90 dokazuje, že pro ramena, která svírají pravý úhel, platí speciální případ Pascalovy věty, uvedený na str. 88, a odtud zase podle str. 90 plyne zákon asociativity násobení

$$a(bc) = (ab)c.$$

Nakonec platí v našem počtu s úsečkami také zákon distributivity

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Abychom toto dokázali, zkonstruujeme úsečky ab, ac a $a(b + c)$, následně vedeme koncovým bodem úsečky c (viz přiložený obrázek)[30] rovnoběžku s druhým ramenem pravého úhlu. Shodnost obou pravoúhlých trojúhelníků, vyšrafovaných na obrázku, a použití věty o shodnosti protilehlých stran rovnoběžníku nám potom dá hledaný důkaz.

Jsou-li b a c dvě libovolné úsečky, existuje vždy úsečka a taková, že $c = ab$; tuto úsečku a označíme $\frac{c}{b}$ a pojmenujeme jako *podíl* c děleno b.

[29] V této souvislosti srov. metody pro založení nauky o proporcích, které mezitím představili A. Kneser, Archiv für Math. und Phys., R. III, sv. 2 a J. Mollerup, Math. Ann. sv. 56, včetně "Studier over den plane geometris Aksiomer", Kopenhagen 1903, ve kterých je v prvé řadě uvedena proporční rovnice. F. Schur, Zur Proportionenlehre, Math. Ann. sv. 57, poznamenává, že správný důkaz zákona komutativity podal už Kupffer (Sitzungsber. der Naturforschergesellschaft zu Dorpat 1893). Následné Kupfferovo založení nauky o proporcích je však dle našeho názoru nedostatečné.

[30] p. překl.: originál

§ 16. Důkaz Pascalovy věty.

Pomocí představeného počítání s úsečkami lze snadno vybudovat Eukleidova nauka o proporcích, a to bez Archimédova axiomu následujícím způsobem:

Výměr. Jsou-li a, b, a', b' libovolné čtyři úsečky, potom nechť poměr

$$a : b = a' : b'$$

má tentýž význam jako úsečková rovnice

$$ab' = ba'.$$

Výměr. Dva trojúhelníky nazveme podobnými, pokud jsou v nich odpovídající si úhly shodné.

Věta 41. Pokud a, b a a', b' jsou odpovídající si strany ve dvou podobných trojúhelnících, potom platí poměr $a : b = a' : b'$.

Důkaz. Uvažujme nejdříve zvláštní případ, kdy úhly, které svírají strany a, b a a', b' v obou trojúhelnících, jsou pravé, a uvažujme oba trojúhelníky nakreslené v jednom a témže pravém úhlu. Dále nanesme od vrcholu na jedno rameno úsečku 1 a veďme koncovým bodem této úsečky 1 rovnoběžku k oběma přeponám; tato vytne na druhém rameni úsečku e; potom je podle naší definice součinu úseček

$$b = ea, \qquad b' = ea';$$

a máme tak

$$ab' = ba',$$

tj.

$$a : b = a' : b'.$$

□

Nyní se vrátíme k obecnému případu. Zkonstruujeme v každém z obou dvou podobných trojúhelníků průsečík S, resp. S' třech os úhlů, jehož existenci snadno odvodíme z Věty 25, a spustíme z nich tři kolmice r, resp. r' na strany trojúhelníku; Takto vzniklé úseky označíme

$$a_b, a_c, b_c, b_a, c_a, c_b$$

resp.

$$a'_b, a'_c, b'_c, b'_a, c'_a, c'_b.$$

Výše dokázaný speciální případ naší věty nám dá poměry

$$\begin{array}{c|c} a_b : r = a'_b : r' & b_c : r = b'_c : r' \\ a_c : r = a'_c : r' & b_a : r = b'_a : r'; \end{array}$$

Z těchto odvodíme pomocí zákona distributivity:

$$a : r = a' : r', \qquad b : r = b' : r'$$

a odtud

$$b'ar' = b'ra', \qquad a'br' = a'rb'.$$

Tyto rovnice dávají použitím zákona komutativity násobení:

$$a : b = a' : b'.$$

Z Věty 41 odvodíme snadno základní větu v nauce o proporcích, která zní následovně:

Věta 42. Vytínají-li dvě rovnoběžky na ramenech libovolného úhlu úsečky a, b, resp. a', b', platí poměr

$$a : b = a' : b'.$$

Obráceně, pokud tento poměr platí pro čtyři úsečky a, a', b, b' a pokud jak a, a', tak b, b' leží pokaždé na jednom rameni libovolného úhlu, budou spojnice koncových bodů úseček a, b resp. a', b navzájem rovnoběžné.

§ 17. Rovnice přímek a rovin

K dosavadnímu systému úseček připojíme ještě druhý obdobný systém úseček. Na základě axiomů uspořádání lze na přímce totiž snadno rozlišovat "*kladný*" a "*záporný*" směr. Úsečku AB, kterou jsme dosud nazývali a, budeme nyní tímto písmenem a označovat už pouze tehdy, když bude B ležet v kladném směru od A, jinak ji označíme $-a$. Jeden bod označíme jako úsečku 0. Úsečku a nazveme "*kladnou*", resp. větší než o, symbolicky: $a > o$; úsečku $-a$ nazveme "*zápornou*", resp. menší než 0, symbolicky: $-a < 0$.

V tomto rozšířeném počtu s úsečkami platí všechna početní pravidla 1–16 pro reálná čísla, která jsme shrnuli v § 13. Vyzdvihneme následující speciální skutečnosti:

Vždy je

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \text{a} \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Pokud $ab = 0$, potom je buď $a = o$ nebo $b = o$. Pokud $a > bac > 0$, potom plyne vždy $ac > bc$. Pokud dále $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ je n bodů přímky, potom je součet úseček $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ roven 0.

V rovině α budeme nyní předpokládat dvě navzájem kolmé přímky, protínající se v bodě 0 jako pevný osový kříž a naneseme potom libovolné úsečky x, y od bodu 0 počínaje na obě přímky; potom vztyčíme kolmici v koncových bodech úseček x, y a určíme průsečík P této kolmice: úsečky x, y se nazývají *souřadnice* bodu P. Každý bod roviny α je jednoznačně určen svými souřadnicemi x, y, které mohou být kladnými nebo zápornými úsečkami nebo 0. Nechť je l libovolná přímka v rovině α, která prochází bodem 0 a bodem C o souřadnicích a, b. Jsou-li potom x, y souřadnice libovolného bodu P přímky l, nalezneme snadno na základě Věty 42

$$a : b = x : y,$$

neboli

$$bx - ay = 0$$

jako rovnici přímky l. Je-li l' přímka rovnoběžná s l, která vytne na ose x úsečku c, dospějeme k rovnici přímky l', pokud v rovnici přímky l nahradíme úsečku x úsečkou $x - c$; hledaná rovnice tedy zní

$$bx - ay - bc = 0.$$

Na základě těchto úvah, způsobem, nezávislým na Archimédově axiomu, dojdeme snadno k závěru, že každá přímka bude v rovině zobrazena jako rovnice v souřadnicích x, y a naopak bude každá taková lineární rovnice představovat přímku, přičemž její koeficienty budou přímkami, existujícími v příslušné geometrii.

Analogické výsledky v prostorové geometrii dokážeme stejně tak snadno.

Od této chvíle lze geometrii dále budovat pomocí metod, které se obecně používají v analytické geometrii.

Zatím jsme v této třetí kapitole nikde nepoužili Archimédův axiom; pokud budeme nyní předpokládat, že platí, budeme moci přiřadit reálná čísla bodům libovolné přímky v prostoru, a to následovně:

Zvolíme na přímce dva libovolné body a přiřadíme jim čísla 0 a 1; potom rozpůlíme jimi určenou úsečkou 01 a vzniklý střed označíme $\frac{1}{2}$; střed úsečky $0\frac{1}{2}$ dále označíme $\frac{1}{4}$ atd.; po n-násobném opakování tohoto postupu dospějeme k bodu, kterému je přiřazeno číslo $\frac{1}{2^n}$. Nyní budeme úsečku $0\frac{1}{2^n}$ nanášet asi m-krát za sebou od bodu o počínaje jak na stranu k bodu 1, tak na opačnou stranu, a takto vzniklým bodům přidělíme číselné hodnoty $\frac{m}{2^n}$, resp. $-\frac{m}{2^n}$. Z Archimédova axiomu lze snadno odvodit, že uvedeným, jednoznačně určeným způsobem lze každému libovolnému bodu přímky přiřadit reálné číslo a toto přiřazení bude mít následující vlastnost: pokud A, B, C jsou libovolné tři body přímky a α, β, γ příslušná reálná čísla a B leží mezi A a C, potom pro tato čísla platí vždy buď nerovnice $\alpha < \beta < \gamma$ nebo $\alpha > \beta > \gamma$.

Na základě úvah, uvedených ve druhé kapitole § 9, je zřejmé, že pro každé číslo, náležící do tam představeného algebraického číselného tělesa Ω, musí na přímce nutně existovat bod, kterému je přiděleno. To, jestli nějaký bod odpovídá také každému dalšímu reálnému číslu, závisí na tom, zda v uvažované geometrii platí nebo neplatí axiom V2.

Pokud budeme oproti tomu předpokládat v geometrii pouze platnost Archimédova axiomu, budeme systém bodů, přímek a rovin vždy moci rozšířit o "*iracionální*" prvky, aby na každé přímce byl nějaký bod přiřazen bez výjimky každému systému tří reálných čísel, který vyhovuje její rovnici. Při náležitých předpokladech lze ihned dospět k tomu, že v rozšířené geometrii platí VŠECHNY axiomy (I–V). Tato rozšířená geometrie (připojením iracionálních prvků) je přesně ona obyčejná analytická kartézská geometrie prostoru, ve které platí také axiom úplnosti V2.[31]

Čtvrtá kapitola. Nauka o obsazích ploch v rovině.

§ 18. Identita mnohoúhelníků po rozdělení a po doplnění.

Pro zkoumání v aktuální čtvrté kapitole budeme předpokládat tytéž axiomy, jako ve třetí kapitole, totiž lineární a rovinné axiomy všech skupin s výjimkou axiomů spojitosti, tj. axiomů I 1–3 a II–IV.

Nauka o proporcích, probíraná ve třetí kapitole a tamtéž zavedený počet s úsečkami nám umožňují vybudovat Eukleidovu nauku o obsazích ploch pomocí výše uvedených axiomů, tj. *v rovině a nezávisle na axiomech spojitosti.*

Podle úvah ve třetí kapitole závisí nauka o proporcích zásadně na Pascalově větě (Věta 40) a toto platí také pro nauku o obsazích ploch; dle mého názoru je jednou z nejpozoruhodnějších aplikací Pascalovy věty v elementární geometrii, vybudovat nauku o obsazích ploch na jejím základě.

Výměr. Spojíme-li dva body jednoduchého mnohoúhelníku P libovolnou lomenou čarou, která prochází pouze vnitřkem mnohoúhelníku a která neobsahuje žádný bod dvakrát, vzniknou dva nové jednoduché mnohoúhelníky P_1 a P_2, jejichž vnitřní body leží všechny ve vnitřku P; říkáme: P SE ROZDĚLUJE na P_1 a P_2, nebo P JE ROZDĚLENO na P_1 a P_2, nebo P_1 a P_2 SE SKLÁDAJÍ do P.

Výměr. Dva jednoduché mnohoúhelníky nazveme *identické po rozdělení*, pokud je lze rozdělit na konečný počet trojúhelníků, které jsou po dvojicích shodné.

Výměr. Dva jednoduché mnohoúhelníky P a Q nazveme *identické po doplnění*, pokud k nim lze připojit konečný počet mnohoúhelníků $P', Q'; P'', Q''; \ldots; P''', Q'''$, po dvojicích identických po rozdělení, tak, že tímto způsobem vzniklé mnohoúhelníky $P + P' + P'' + \cdots + P'''$ a $Q + Q' + Q'' + \cdots + Q'''$ budou vzájemně identické po rozdělení.

Z těchto výměrů plyne ihned: připojením mnohoúhelníků, identických po rozdělení, vznikají zase mnohoúhelníky, IDENTICKÉ PO ROZDĚLENÍ, a když odebereme mnohoúhelníky, identické po rozdělení, od mnohoúhelníků, identických po rozdělení, jsou zbývající mnohoúhelníky, IDENTICKÉ PO DOPLNĚNÍ (srov. Doplněk III).[32]

[31] Srov. poznámky na konci § 8.

[32] p. překl.: originál

Dále platí následující věty:

Věta 43. Jsou-li dva mnohoúhelníky P_1 a P_2 identické po rozdělení se třetím mnohoúhelníkem P_3, jsou také navzájem identické po rozdělení. Jsou-li dva mnohoúhelníky identické po doplnění se třetím, jsou identické po doplnění také mezi sebou.

Důkaz. Podle předpokladu lze jak pro P_1, tak pro P_2, udat rozdělení na trojúhelníky tak, že bude každému z těchto dvou rozdělení odpovídat nějaké rozdělení mnohoúhelníku P_3 na shodné trojúhelníky. Uvažujeme-li obě tato rozdělení mnohoúhelníku P_3 současně, bude obecně každý trojúhelník z jednoho rozdělení rozdělen na mnohoúhelníky přímkami, které příslušejí druhému rozdělení. K tomu nyní přidáme tolik úseček, aby se každý z těchto mnohoúhelníků sám zase rozdělil na trojúhelníky, a zaneseme potom dvě odpovídající si rozdělení na trojúhelníky do P_1 a P_2; potom se zřejmě oba tyto mnohoúhelníky P_1 a P_2 rozdělí na stejný počet navzájem shodných trojúhelníků a budou tak podle výměru navzájem identické po rozdělení. □

Důkaz druhé výpovědi Věty 43 lze provést snadno (viz Doplněk III).[33]

Obvyklým způsobem vyložíme pojmy: *obdélník, základna* a *výška rovnoběžníku, základna* a *výška trojúhelníku.*

§ 19. Rovnoběžníky a trojúhelníky se stejnou základnou a výškou.

Známý *Eukleidův* důkaz, znázorněný na obrázcích dole nám dává tuto větu:

Věta 44. Dva rovnoběžníky se stejnou základnou a výšku jsou navzájem identické po doplnění.

Dále platí známá skutečnost:

Věta 45. Každý trojúhelník ABC je identický po rozdělení s jistým rovnoběžníkem se stejnou základnou a poloviční výškou.

Důkaz. Nechť je bod D v polovině AC a bod E v polovině BC. Prodloužíme-li potom úsečku DE o sebe samu až do bodu F, budou trojúhelníky DCE a FBE navzájem shodné, a následně tak bude trojúhelník ABC identický po rozdělení s rovnoběžníkem $ABFD$. □

Z Věty 44 a z Věty 45 při přibrání Věty 43 plyne ihned:

Věta 46. Dva trojúhelníky se stejnou základnou a výškou jsou IDENTICKÉ PO DOPLNĚNÍ.

Jak naznačuje obrázek po straně a jak je dobře známo, lze snadno ukázat, že dva rovnoběžníky, a tedy podle Vět 43 a 45 také dva trojúhelníky, se stejnými základnami a výškami, jsou vždy IDENTICKÉ PO ROZDĚLENÍ. Poznamenejme však, že *tento důkaz není možný bez použití Archimédova axiomu;* vskutku, v každé nearchimédovské geometrii (pro jednu takovou viz např. druhou kapitolu § 12) lze udat takové dva trojúhelníky, které budou mít stejnou základnu a výšku a budou podle Věty 46 vzájemně IDENTICKÉ PO DOPLNĚNÍ, ale přesto NE IDENTICKÉ PO ROZDĚLENÍ.

Nanesme v nearchimédovské geometrii na jednu polopřímku dvě takové úsečky $AB = e$ a $AD = a$, které nesplňují pro žádné číslo n vztah:

$$n \cdot e \geq a.$$

Na úsečce AD vztyčme v jejích koncových bodech kolmice AC a DC' délky e. Trojúhelníky ABC a ABC' jsou podle Věty 46 identické po doplnění. Z Věty 23

[33] p. překl.: originál

plyne, že součet dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí, přičemž součet dvou stran uvažujeme ve smyslu počtu s úsečkami, zavedeném ve třetí kapitole.

Tedy je $BC < e + e = 2e$. Dále lze bez použití spojitosti dokázat větu: Úsečka, ležící celá ve vnitřku trojúhelníku je menší než její nejdelší strana. Zároveň je také každá úsečka, ležící ve vnitřku trojúhelníku ABC menší než $2e$.

Předpokládejme nyní, že je dáno rozdělení trojúhelníků ABC a ABC' na konečně mnoho, např. pokaždé na k, po dvojicích shodných trojúhelníků. Každá strana částečného trojúhelníku, použitého pro rozdělení trojúhelníku ABC, leží buď v trojúhelníku ABC nebo na jedné z jeho stran, tj. je vždy menší než $2e$. Obvod každého částečného trojúhelníku je tedy menší než $6e$; součet všech těchto obvodů je tak menší než $6k \cdot e$. Rozdělení trojúhelníků ABC a ABC' musí dát stejný součet obvodů, tedy musí také součet obvodů částečných trojúhelníků, použitých pro rozdělení trojúhelníku ABC', být vždy menší než $6k \cdot e$. V tomto součtu je ale strana AC' jistě zcela obsažena, tj musí platit: $AC' < 6k \cdot e$, a tedy podle Věty 23 tím spíše: $a < 6k \cdot e$. To odporuje našemu předpokladu o úsečkách e a a. Předpoklad možnosti rozdělení trojúhelníků ABC a ABC' na po dvojicích shodné částečné trojúhelníky tak vedl na spor.

Důležité věty elementární geometrie o identitě po doplnění pro mnohoúhelníky, obzvláště Pythagorova věta, jsou snadnými důsledky právě stanovených vět. Zmíníme ještě větu:

Věta 47. K libovolnému trojúhelníku a zároveň také k libovolnému jednoduchému mnohoúhelníku lze vždy zkonstruovat pravoúhlý trojúhelník, který bude mít odvěsnu 1 a který bude s trojúhelníkem, resp. mnohoúhelníkem, identický po doplnění.

Platnost tvrzení pro trojúhelníky plyne snadno na základě Vět 46, 42 a 43. Platnost pro mnohoúhelníky se dokáže následovně. Rozdělíme daný jednoduchý mnohoúhelník na trojúhelníky, ke kterým přiřadíme pravoúhlé trojúhelníky, identické po doplnění, každý s odvěsnou 1. Pokud budeme brát odvěsny 1 jako výšky trojúhelníků, povede jejich složení (str. 94) na naše tvrzení, opět za pomoci Vět 43 a 46.

Při dalším budování teorie obsahů ploch ale narazíme na zásadní problém. V našem dosavadním zkoumání jsme především dosud pomíjeli, zda možná nejsou VŠECHNY mnohoúhelníky navzájem identické po doplnění. V tom případě by byly všechny výše uvedené věty bezpředmětné a neměly by význam. S tím souvisí otázka, zda se dva obdélníky, identické po doplnění, s jednou společnou stranou nutně shodují také ve druhé straně.

Po hlubší úvaze se ukázuje, že je k zodpovězení vznesené otázky zapotřebí obrácení Věty 46, které zní takto:

Věta 48. Pokud mají dva trojúhelníky, identické po doplnění, stejnou základnu, mají také stejnou výšku.

Tato základní Věta 48 se nachází v první knize *Eukleidových* Základů jako Věta 39; při důkazu se však *Eukleidés* odvolává na obecnou větu o veličinách: „Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζονέστιν“ (Celek je větší než část) – postup, který vede na zavedení nového geometrického axiomu o identitě po doplnění.[34]

NYNÍ JE MOŽNÉ, ZDŮVODNIT VĚTU 48 A ZDE PŘEDSTAVENOU CESTOU TAK VYBUDOVAT NAUKU O OBSAZÍCH PLOCH, TJ. VÝHRADNĚ POMOCÍ ROVINNÝCH AXIOMŮ A BEZ POUŽITÍ ARCHIMÉDOVA AXIOMU. Abychom toto nahlédli, je zapotřebí mít pojem míry obsahu.

[34]Ve skutečnosti konstruujeme v Příloze II [*p. překl.: originál*] geometrii, ve které jsou splněny všechny zde stanovené axiomy I–IV kromě axiomu III 5, který je tam uveden jen v užším pojetí, a přece v ní neplatí Věta 48, a tedy také věta “Celek je větší než část”; srov. str. 152f [*p. překl.: originál*].

§ 20. Míra obsahu trojúhelníků a mnohoúhelníků

Výměr. Přímka AB rozděluje body rovinné geometrie, které na ni neleží, na dvě oblasti bodů. Jednu tuto oblast pojmenujeme *napravo* od polopřímky AB, vycházející z bodu A, resp. od "orientované přímky AB" a nalevo od polopřímky BA, vycházející z bodu B, resp. od "*orientované přímky*" BA, druhou nazveme *nalevo* od polopřímky AB a naprovo od polopřímky BA. Vzhledem ke dvěma orientovaným úsečkám AB a AC nazveme tutéž oblast oblastí napravo, pokud B a C leží na stejné polopřímce, vycházející z A (a naopak). – Když pro polopřímku g, vycházející z bodu O, je už definovaná oblast napravo a do této oblasti vchází z bodu O polopřímka h, nazveme vzhledem k h oblastí nalevo tu oblast, která obsahuje g. Vycházíme-li tedy z určité polopřímky AB, je vidět, že jsou uvedeným způsobem jednoznačně stanoveny pravé a levé strany vzhledem ke každé polopřímce, resp. každé orientované úsečce rovinné geometrie.

Body ve vnitřku (str. 65) trojúhelníku ABC leží buď nalevo od stran AB, BC, CA nebo nalevo od CB, BA, AC. V prvním případě říkáme: nechť je ABC (resp. BCA, resp. CAB) kladný smysl obíhání a CBA (resp. BAC, resp. ACB) záporný smysl obíhání trojúhelníku; ve druhém případě říkáme: nechť je CBA kladný a ABC záporný smysl obíhání trojúhelníku.

Výměr. Pokud v trojúhelníku ABC se stranami a, b, c zkonstruujeme obě výšky $h_a = AD, h_b = BE$, plyne z podobnosti trojúhelníků BCE a ACD podle Věty 41 proporce

$$a : h_b = b : h_a,$$

tj.

$$ah_a = bh_b;$$

proto je zároveň v každém trojúhelníku součin základny a k ní příslušné výšky nezávislý na tom, kterou stranu trojúhelníku zvolíme za základnu. Polovina součinu základny a výšky je tedy pro trojúhelník ABC charakteristickou úsečkou a. Mějme např. v trojúhelníku ABC směr obíhání ABC jako kladný. KLADNOU úsečku a (podle definice na str. 93) nazveme nyní *mírou obsahu trojúhelníku ABC*, *obíhaného v kladném smyslu*, a označíme $[ABC]$; ZÁPORNOU úsečku — a nazveme *mírou obsahu trojúhelníku ABC, obíhaného v záporném smyslu*, a označíme $[CBA]$.

Potom platí jednoduchá věta:

Věta 49. Pokud bod O leží mimo trojúhelník ABC, potom pro míru obsahu trojúhelníku platí vztah

$$[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OCA].$$

Důkaz. Nejdříve předpokládejme, že se úsečky AO a BC protínají v bodě D. Potom podle definice míry obsahu dostaneme pomocí zákona distributivity v počtu s úsečkami vztahy

$$\begin{aligned} [OAB] &= [ODB] + [DAB], \\ [OBC] &= -[OCB] = -[OCD] - [ODB], \\ [OCA] &= [OCD] + [CAD]. \end{aligned}$$

Sečtením úseček, uvedených v této rovnici, vyjde za použití věty, jmenované na str. 93:

$$[OAB] + [OBC] + [OCA] = [DAB] + [CAD],$$

a odtud plyne, opět podle distributivního zákona,

$$[OAB] + [OBC] + [OCA] = [ABC].$$

□

Ostatní možné předpoklady ohledně polohy bodu O vedou na tvrzení Věty 49 analogickým způsobem.

Věta 50. Pokud trojúhelník ABC rozložíme nějakým způsobem v konečný počet trojúhelníků Δ_k, je míra obsahu trojúhelníku ABC, obíhaného v kladném směru, rovna součtu míry obsahu všech trojúhelníků Δ_k, obíhaných v kladném směru.

Důkaz. V trojúhelníku ABC budeme za kladný směr obíhání uvažovat např. ABC. Nechť DE je úsečka vc vnitřku trojúhelníku ABC, která je zároveň stranou obou trojúhelníků DEF a DEG z rozdělení. V trojúhelníku DEF budeme za kladný směr obíhání uvažovat např. DEF; potom je GED kladný směr obíhání trojúhelníku DEG. Zvolíme-li nyní nějaký bod O mimo trojúhelník ABC, platí podle Věty 49 vztahy

$$\begin{aligned}[DEF] &= [ODE] + [OEF] + [OFD],\\ [GED] &= [OGE] + [OED] + [ODG]\\ &= [OGE] - [ODE] + [ODG].\end{aligned}$$

Sečtením obou úsečkových rovnic vyjde na pravé straně míra obsahu $[ODE]$.

Vyjádříme míru obsahu všech trojúhelníků Δ_k, obíhaných v kladném směru tímto způsobem podle Věty 49 a sečteme všechny vzniklé úsečkové rovnice. Potom pro každou úsečku DE, ležící ve vnitřku trojúhelníku ABC, vychází na pravé straně míra obsahu $[ODE]$. Označíme-li body, použité pro rozdělení trojúhelníku ABC, které leží na jeho stranách, podle jejich pořadí $A, A_1, \dots, A_l, B, B_1, \dots, B_m, C, C_1, \dots, C_n$, a označíme-li Σ součet měr obsahu všech trojúhelníků Δ_k, obíhaných v kladném směru, vychází, jak snadno nahlédneme, součet všech úsečkových nerovnic:

$$\begin{aligned}\Sigma &= [OAA_1] + \dots + [OA_lB]\\ &\quad + [OBB_1] + \dots + [OB_mC]\\ &\quad + [OCC_1] + \dots + [OC_nA]\\ &= [OAB] + [OBC] + [OCA],\end{aligned}$$

tedy podle Věty 49 $\qquad \Sigma = [ABC].$ □

Výměr. Definujeme-li míru obsahu $[P]$ jednoduchého, kladně obíhaného mnohoúhelníku jako součet míry obsahu všech trojúhelníků, obíhaných v kladném smyslu, na které se tento při určitém rozdělení rozpadá, poznáme na základě Věty 50 pomocí podobného důkazu, jako jsme použili v § 18 u důkazu Věty 43, že míra obsahu $[P]$ je nezávislá na způsobu rozdělení na trojúhelníky a samotný mnohoúhelník ji jednoznačně určuje.

Z tohoto výměru dostaneme za použití Věty 50 skutečnost, že MNOHOÚHELNÍKY, IDENTICKÉ PO ROZDĚLENÍ, MAJÍ VŽDY STEJNOU MÍRU OBSAHU. (Zde a v následujícím rozumíme mírou obsahu tu s kladným smyslem obíhání).

Jsou-li dále P a Q mnohoúhelníky, identické po doplnění, musí podle výměru existovat takové mnohoúhelníky $P', Q'; \dots; P'', Q''$, po dvojicích identické po rozdělení, že mnohoúhelník $P + P' + \dots + P''$, složený z $P, P', \dots, P''$, bude identický po rozdělení s mnohoúhelníkem $Q + Q' + \dots + Q''$, složeným z $Q, Q', \dots, Q''$. Z rovnic

$$\begin{aligned}[P + P' + \dots + P''] &= [Q + Q' + \dots + Q'']\\ [P'] &= [Q']\\ &\vdots\\ [P''] &= [Q''],\end{aligned}$$

dostaneme snadno $\qquad [P] = [Q],$

tj. MNOHOÚHELNÍKY, IDENTICKÉ PO DOPLNĚNÍ MAJÍ TUTÉŽ MÍRU OBSAHU.

§ 21. Identita po doplnění a míra obsahu.

V § 20 jsme nalezli, že mnohoúhelníky, identické po rozšíření, mají vždy stejnou míru obsahu. Na základě tohoto faktu máme ihned důkaz Věty 48. Označíme-li totiž stejnou základnu obou trojúhelníků g, příslušné výšky h a h', potom odvodíme z předpokládané identity po doplnění obou trojúhelníků, že musejí mít pouze tutéž míru obsahu, tj. plyne

$$\frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}gh'$$

a zároveň po dělení $\frac{1}{2}g$

$$h = h';$$

to je také výpověď Věty 48.

Navíc lze také obrátit výpověď, učiněnou na konci § 20. Vskutku, jsou-li P a Q dva mnohoúhelníky o stejné míře obsahu, zkonstruujme podle Věty 47 dva pravoúhlé trojúhelníky Δ a E s následující vlastností: nechť mají oba jednu odvěsnu 1 a dále nechť je trojúhelník Δ identický po doplnění s mnohoúhelníkem P a trojúhelník E s mnohoúhelníkem Q. Z věty, dokázané v závěru § 20, plyne potom, že Δ a P, a také E a Q mají stejnou míru obsahu. Kvůli identitě měr obsahu P a Q plyne, že také Δ a E mají stejnou míru obsahu. Jelikož se nyní oba tyto pravoúhlé trojúhelníky shodují v odvěsně 1, shodují se nutně také jejich druhé odvěsny, tj. oba trojúhelníky Δ a E jsou navzájem shodné, a zároveň s tím také podle Věty 43 oba mnohoúhelníky P a Q navzájem identické po doplnění.

Obě skutečnosti, nalezené v tomto a v předešlém paragrafu, shrneme do následující věty:

Věta 51. *Dva mnohoúhelníky, identické po doplnění, mají vždy tutéž míru obsahu a dva mnohoúhelníky se stejnou měrou obsahu jsou vždy navzájem identické po doplnění.*

Především si musejí dva obdélníky, identické po doplnění a s jednou stranou společnou, odpovídat i ve druhé straně. Také plyne tato věta:

Věta 52. Rozdělíme-li obdélník přímkami na několik trojúhelníků a vynecháme-li byť jen jediný tento trojúhelník, nelze již obdélník pomocí zbylých trojúhelníků vyplnit.

Tuto větu stanovili DE ZOLT[35] i O. STOLZ[36] jako axiom a F. SCHUR[37] a W. KILLING[38] ji dokázali pomocí Archimédova axiomu. V následujícím ukážeme, že TOTÉŽ PLATÍ NEZÁVISLE NA ARCHIMÉDOVĚ AXIOMU.

K důkazu Vět 48, 50, 51 jsme v podstatě použili počet s úsečkami, zavedený ve třetí kapitole § 15, a protože tento závisí v podstatě na Pascalově větě (Věta 40) nebo spíše na jejím speciálním případě (str. 88), ukazuje se, že Pascalova věta je nejdůležitějším stavebním kamenem nauky o obsazích.

Snadno nahlédneme, že také obráceně z Vět 46 a 48 lze znovu získat Pascalovu větu. Vskutku, z rovnoběžnosti přímky CB' a $C'B$ plyne podle Věty 46 identita po doplnění trojúhelníků OBB' a OCC'; stejně tak plyne z rovnoběžnosti přímek CA' a AC' identita po doplnění trojúhelníků OAA' a OCC'. Jelikož jsou podle tohoto navzájem identické po doplnění také trojúhelníky OAA' a OBB', udává Věta 48, že také BA' musí být rovnoběžná s AB'.

[35] Principii della equaglianza di poligoni preceduti da alcuni critici sulla della equivalenza geometrica. Milano, Briola 1881. Srov. také Principii della eguaglianza di poliedri e di poligoni sferici. Milano, Briola 1883.

[36] Monatshefte für Math. und Phys., Jahrgang 5, 1894.

[37] Sitzungsberichte der Dorpater Naturf. Ges. 1892.

[38] Grundlagen der Geometrie, sv. 2, odstavec 5, § 5, 1898.

Snadno také nahlédneme, že mnohoúhelník, který leží zcela ve vnitřku jiného mnohoúhelníku, má vždy menší míru obsahu než tento, a tedy podle Věty 51 nemůže být s tímto identický po doplnění. Tato skutečnost obsahuje Větu 52 jako speciální případ.

Tím jsme vybudovali základní věty nauky o obsazích ploch v rovině.

Již GAUSS obrátil pozornost matematiků na analogickou otázku pro prostor. Já jsem vyslovil domněnku o nemožnosti analogického vybudování nauky o obsazích v prostoru a stanovil určitý úkol,[39] udat dva čtyřstěny se stejnou základnou a stejnou výškou, které nelze v žádném případě rozdělit na shodné čtyřstěny, a které nejdou rozšířit přidáním shodných čtyřstěnů na takové mnohostěny, pro které z jejich strany rozložení na shodné čtyřstěny možné je.

M. DEHNOVI[40] se tento důkaz skutečně podařilo podat; Rigorózně ukázal nemožnost vybudovat nauku o objemech v prostoru tak, jako tomu bylo předtím v případě obsahů v rovině.

K řešení analogických problémů v prostoru je podle něj nutno přibrat jiné prostředky, např. Cavalieriho princip.[41]

V tomto smyslu vybudoval nauku o prostoru W. Süß.[42] Ten říká o dvou čtyřstěnech stejných výšek a po doplnění identických základen, že jsou cavalierovsky identické. Dále říká o dvou mnohostěnech, které lze rozdělit na konečně mnoho po dvou cavalierovsky identických čtyřstěnů, že jsou cavalierovsky identické po rozdělení. Nakonec říká o dvou mnohostěnech, které lze zapsat jako rozdíly mnohostěnů, cavalierovsky identických po rozdělení, že jsou cavalierovsky identické po doplnění. Bez použití axiomů spojitosti lze dokázat, že identita měr obsahů a cavalierovská identita po doplnění jsou ekvivalentní pojmy, zatímco cavalierovská identita po rozdělení lze u mnohostěnů o stejné míře obsahu dokázat jen pomocí Archimédova axiomu.

Z nových výsledků zmiňme ten, nalezený J.-P. SYDLEREM:[43] Věta, vycházející pro rovinu z Věty 51 a úvahy na str. 95 (která se váže k Větě 46), že každé dva mnohostěny, identické po doplnění, jsou také identické po rozdělení, lze za předpokladu Archimédova axiomu rozšířit na prostor. Z tohoto výsledku plyne tvrzení, že množina tříd ekvivalence mnohostěnů má vzhledem k identitě po rozdělení mohutnost kontinua.

Pátá kapitola. Desarguova věta.

§ 22. Desarguova věta a její důkaz v rovině pomocí axiomů shodnosti.

Z axiomů, stanovených v první kapitole, jsou všechny ty ze skupin II–V buď axiomy lineárními nebo rovinnými; axiomy 4–8 skupiny I jsou jediné prostorové axiomy. Abychom jasně rozeznali význam těchto prostorových axiomů, mějme dánu libovolnou rovinnou geometrii a prozkoumejme obecně podmínky pro to, abychom mohli brát tuto ROVINNOU geometrii za část geometrie prostorové, ve které platí axiomy, které předpokládáme pro rovinnou geometrii, a kromě toho prostorové axiomy spojení I 4–8.

[39] Viz má přednáška “Mathematische Probleme”, č. 3.

[40] “Über raumgleiche Polyeder”, Göttinger Nachr. 1900, a také “Über den Rauminhalt”, Math. Ann. sv. 55, 1902; srov. dále KAGAN, Math. Ann. sv. 57.

[41] Pouze první část Věty 51 a Věty 52 platí analogicky v prostoru; srov. např. SCHATUNOWSKY, “Über den Rauminhalt der Polyeder”, Math. Ann. sv. 57, M. DEHN ukázal v pojednání “Über den Inhalt sphärischer Dreiecke”, Math. Ann. sv. 60, že lze vybudovat nauku o obsazích ploch v rovině také bez axiomu o rovnoběžkách, jen pomocí vět o shodnosti. Viz dále FINZEL, “Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie”, Math. Ann. sv. 72.

[42] “Begründung der Lehre vom Polyederinhalt”, Math. Ann. sv. 82.

[43] Sur la décomposition des polyèdres. Comm. Helv. 16, 266–273. 1943/44.

Jelikož v této a v následující kapitole nebudeme obecně přibírat axiomy shodnosti, musíme axiom o rovnoběžkách IV (str. 74) zavést v silnější podobě:

IV* (Axiom o rovnoběžkách v silnější podobě). *Nechť je a libovolná přímka a A bod mimo a: potom existuje v rovině, určené bodem A a přímkou a, jedna a právě jedna přímka, která prochází bodem A a přímku a neprotne.*

Jak známo, lze na základě axiomů skupin I a IV* dokázat tzv. Desarguovu větu; Desarguova věta je rovinná věta o průsečících. Především vymezíme přímku, na které mají ležet průsečíky odpovídajících si stran obou trojúhelníků, jako tzv. "nekonečně vzdálenou přímku" a označíme takto vzniklou větu spolu s větou k ní opačnou prostě jako Desarguovu větu; tato věta zní takto:

Věta 53. (Desarguova věta). Pokud jsou dva trojúhelníky postaveny v rovině tak, že jsou každé dvě sobě si odpovídající strany navzájem rovnoběžné, potom spojnice odpovídajících si vrcholů buďto procházejí jedním a týmž bodem nebo jsou navzájem rovnoběžné, a naopak:

Pokud jsou dva trojúhelníky postaveny v rovině tak, že spojnice odpovídajících si vrcholů procházejí jedním bodem nebo jsou navzájem rovnoběžné, a když jsou dále dvě dvojice odpovídajících si stran trojúhelníku rovnoběžné, jsou navzájem rovnoběžné také třetí strany obou trojúhelníků.

Jak již bylo zmíněno, je Věta 53 důsledkem axiomů I a IV*; podle této skutečnosti je platnost Desarguovy věty v rovinné geometrii v každém případě nutnou podmínkou pro to, aby bylo možné tuto geometrii pojímat jako část prostorové geometrie, v níž platí všechny axiomy skupin I, II, IV*.

Předpokládejme nyní, stejně jako ve třetí a čtvrté kapitole, rovinnou geometrii, ve které platí axiomy I 1–3 a II–IV a uvažujme v ní počet s úsečkami, zavedený podle § 15: potom, jak jsme představili v § 17, lze každému bodu roviny přiřadit dvojici úseček (x, y) a každé přímce poměr tří úseček $(u : v : w)$, kde u, v nejsou obě nula, tak, že lineární rovnice

$$ux + vy + w = o$$

bude představovat podmínku pro společnou polohu bodu a přímky. Systém všech úseček v naší geometrii tvoří podle § 17 číselný obor, pro který platí vlastnosti 1–16, vyjmenované v § 13, a lze tak pomocí tohoto číselného oboru, podobně jako tomu bylo v § 9 nebo v § 12 pomocí číselného oboru Ω, resp. $\Omega(t)$, zkonstruovat prostorovou geometrii; pro tento účel stanovíme, že systém třech úseček (x, y, z) bude představovat bod, poměry čtyř úseček $(u : v : w : r)$, ve kterých nejsou všechny u, v, w zároveň nulové, budou představovat rovinu, přičemž přímky definujeme jako průsečíky dvou rovin; lineární rovnice

$$ux + vy + wz + r = o$$

přitom vyjadřuje, že bod (x, y, z) leží v rovině $(u : v : w : r)$. Nakonec, co se týče uspořádání bodů na přímce nebo bodů v rovině vzhledem k přímce, která v ní leží, nebo nakonec uspořádání bodů vzhledem k rovině v prostoru, bude toto určeno nerovnicemi mezi úsečkami analogickým způsobem, jako tomu bylo v § 9 pro rovinu.

Jelikož dostaneme dosazením hodnoty $z = o$ opět původní rovinnou geometrii, zjistíme, že naši rovinnou geometrii lze pojmout jako část prostorové geometrie. Platnost Desarguovy věty je tedy nyní podle výše uvedených myšlenkových postupů podmínkou nutnou, z čehož plyne, že Desargova věta musí platit také v předpokládané rovinné geometrii. Tato je tedy důsledkem axiomů I 1–3, II–IV.

Poznamenejme, že právě nalezenou skutečnost lze také přímo bez námahy odvodit z Věty 42 v nauce o proporcích nebo z Věty 61.

§ 23. Nedokazatelnost Desarguovy věty v rovině bez pomoci axiomů shodnosti.

Nyní prozkoumáme otázku, zda lze v rovinné geometrii dokázat Desarguovu větu také bez pomoci axiomů shodnosti, a dospějeme k následujícímu výsledku:

Věta 54. Existuje rovinná geometrie, ve které platí axiomy I 1–3, II, III 1–4, IV*, V, tj.všechny lineární a rovinné axiomy s výjimkou axiomu shodnosti III 5, avšak Desarguova věta (Věta 53) neplatí. Desarguovu větu tedy NELZE VYVODIT pouze ze jmenovaných axiomů; Ke svému důkazu potřebuje nutně buď prostorové axiomy nebo axiom III 5 o shodnosti trojúhelníků.

Důkaz. [44]V obyčejné rovinné kartézské geometrii, jejíž možnost jsme poznali ve druhé kapitole §9, pozměníme definici přímky a úhlu následujícím způsobem. Zvolíme libovolnou přímku kartézské geometrie jako osu a rozlišíme na této ose kladný a záporný směr a zároveň kladnou a zápornou polorovinu vzhledem k této ose.

Jako přímku naší nové geometrie označíme nyní osu a každou s ní rovnoběžnou přímku kartézské geometrie, dále každou přímku kartézské geometrie, jejíž polopřímka, ležící v kladné polorovině, tvoří s kladným směrem osy pravý nebo tupý úhel, a konečně každý systém dvou polopřímek h, k kartézské geometrie s následující vlastností: Společný vrchol h a k leží na ose; polopřímka h, ležící v kladné polorovině, tvoří s kladným směrem osy ostrý úhel α, a prodloužení k‘ polopřímky k, ležící v záporné polorovině, tvoří s kladným směrem osy úhel β tak, že v kartézské geometrii platí vztah

$$\frac{tg\beta}{tg\alpha} = 2.$$

Uspořádání bodů a délka úseček budou definovány evidentním způsobem jako obvykle také na oněch přímkách, které se v kartézské geometrii zobrazí jako systém dvou polopřímek. Jak snadno nahlédneme, platí v takto definované geometrii axiomy I 1–3, II, III 1–3, IV*; např. je ihned zřejmé, že přímky, procházející jedním bodem, pokryjí rovinu. Platí ostatně také axiomy V.

Všechny úhly, které nemají alespoň JEDNO rameno, které vychází z osy do kladné poloroviny a s kladným směrem osy tvoří ostrý úhel, se budou měřit jako v kartézské geometrii. Je-li oproti tomu nejméně jedno rameno úhlu ω polopřímka h s právě uvedenou vlastností, definujeme jako velikost úhlu ω v nové geometrii velikost onoho úhlu ω' kartézské geometrie, který má za rameno namísto h příslušnou polopřímku k' (viz výše). Obrázek nalevo znázorňuje postup této definice pro dvě dvojice vnějších úhlů. Na základě naší definice úhlu platí také axiom III 4; především platí pro každý úhel $\sphericalangle(l,m)$:

$$\sphericalangle(l,m) \equiv \sphericalangle(m,l).$$

Oproti tomu, jak ihned ukazuje obrázek napravo a jak snadno potvrdíme výpočtem, V NOVÉ ROVINNÉ GEOMETRII DESARGUOVA VĚTA NEPLATÍ. Stejně snadno lze ostatně nakreslit obrázek, který ukáže, že neplatí ani Pascalova věta. □

Zde představená rovinná "nedesarguovská" geometrie slouží zároveň jako příklad rovinné geometrie, ve které platí axiomy I 1–3, II, III 1–4, IV*, V a kterou nepůjde pojmout jako část prostorové geometrie.[45]

---

[44]Místo "nedesarguovské geomterie", uvedené na tomto místě v předchozích vydáních této knihy, bude v následujícím vysvětlena o něco jednodušší geometrie, pocházející od MOULTONA. Srov. F. R. Moulton, "A simple non-desarguesian plane geometry", Trans. Math. Soc. 1902.

[45]Další zajmavé příklady nedesarguovského systému přmek udává H. MOHRMANN. Festschrift David Hilbert, Berlin 1922, s. 181.

§ 24. Zavedení počtu s úsečkami bez pomoci axiomů shodnosti na základě Dessargovy věty.

[46]

Abychom plně nahlédli význam Dessarguovy věty (Věty 53), zavedeme rovinnou geometrii, ve které platí axiomy I 1–3, II, IV*,[47] tj. všechny lineární a rovinné axiomy kromě axiomů shodnosti a axiomů spojitosti, a v této geometrii zavedeme NEZÁVISLE NA AXIOMECH SHODNOSTI nový počet s úsečkami následujícím způsobem:

V rovině budeme předpokládat dvě pevné přímky, které se necháme navzájem protínat v bodě O, a v následujícím budeme počítat jen s takovými úsečkami, jejichž výchozím bodem je O a jejichž koncové body leží libovolně na jedné z těchto dvou úseček. Také bod O sám označíme jako úsečku o, symbolicky:

$$OO = o \qquad \text{nebo} \qquad o = OO.$$

Nechť je jak E, tak E', pokaždé určitým bodem na pevné přímce, procházející O; potom označíme obě úsečky OE a OE' jako úsečky 1, symbolicky:

$$OE = OE' = 1$$

neboli

$$1 = OE = OE'.$$

Přímku EE' pojmenujeme krátce jako jednotkovou přímku. Jsou-li dále A a A' body na přímce OE, resp OE', a je-li spojnice AA' rovnobnoběžná s přímkou EE', nazveme úsečky OA a OA' sobě rovnými, symbolicky:

$$OA = OA' \qquad \text{nebo} \qquad OA' = OA.$$

Abychom nejprve definovali součet úseček $a = OA$ a $b = OB$, ležících na OE, zkonstruujme AA', rovnoběžnou s jednotkovou přímkou EE', a veďme potom bodem A' rovnoběžku s OE a bodem B rovnoběžku s OE' Obě tyto rovnoběžky se protínají v bodě A''. Nakonec veďme bodem A'' rovnoběžku s jednotkovou přímkou EE'; Tato protíná pevné přímky OE a OE' pokaždé v jednom bodě C a C': Potom nazveme $c = OC = OC'$ *součtem* úsečky $a = OA$ s úsečkou $b = OB$, symbolicky:

$$c = a + b \qquad \text{nebo} \qquad a + b = c.$$

Zde předešleme, že se za předpokladu platnosti Desarguovy věty (Věty 53) bude obecným způsobem zachovávat součet dvou úseček; bod C, který určuje součet $a + b$ na oné přímce, na níž leží A a B, je totiž potom nezávislý na volbě zavedené jednotkové úsečky EE‘, tj. bod C dostaneme také následující konstrukcí:

Zvolme na přímce OA' nějaký bod $\overline{A'}$ a veďme bodem B rovnoběžku k $O\overline{A'}$ a bodem $\overline{A'}$ rovnoběžku k OB. Obě tyto rovnoběžky se protínají v bodě $\overline{A''}$. Rovnoběžka s AA', vedená nyní bodem $\overline{A''}$, protíná přímku OA v bodě C, který určuje součet $a + b$.

Pro důkaz předpokládáme, že jak body A' a A'', tak také body $\overline{A'}$ a $\overline{A''}$ zůstanou uvedeným způsobem zachovány a bod C nechť je na OA určen tak, že CA'' je rovnoběžná s AA'. Potom je nutno dokázat, že také $C\overline{A''}$ je rovnoběžná s $A\overline{A'}$. Trojúhelníky $AA'\overline{A'}$ a $CA''\overline{A''}$ jsou položeny tak, že spojnice odpovídajících si vrcholů jsou rovnoběžné, a protože navíc dvě dvojice odpovídajících si stran, totiž

[46] Odovození počtu s úsečkami, navazující na postupy z projektivní geometrie [*Geometrie der Lage*], udává G. HESSENBERG ve své práci “Über einen geometrischen Kalkül”, Acta math. sv. 29, 1994. Ukazuje se, že v některé části tohoto odvození budou snazší, pokud nejdříve zavedeme součet vektorů v rovině na základě Desarguovy věty. Srov. HÖLDER, “Streckenrechnung und projektive Geometrie”, Leipz. Ber. 1911.

[47] Nový počet s úsečkami lze zavést také bez axiomu o rovnoběžkách IV*, a to při použití projektivního tvaru Desarguovy věty. Co se týče možnosti vyjmutí axiomů uspořádání srov. Doplněk IV [*p. překl.: originál*].

$A'\overline{A'}$ a $A''\overline{A''}$, stejně jako AA' a CA'', jsou rovnoběžné, potom jsou skutečně podle druhého výroku Desarguovy věty vzájemně rovnoběžné také třetí strany $A\overline{A'}$ a $C\overline{A''}$.

Abychom definovali součin úsečky $a = OA$ do úsečky $b = OB$, posloužíme si přesně tou konstrukcí, udanou v paragrafu § 15, ve které jen místo ramen pravého úhlu budou vystupovat obě pevné přímky OE a OE'. Konstrukce je potom následující: Určíme na OE' bod A' tak, že AA' bude rovnoběžná s jednotkovou přímkou EE', spojíme E a A' a vedeme bodem B rovnoběžku k EA'; tato rovnoběžka protne pevnou přímku OE' v bodě C'; potom nazveme $c = OC'$ *součinem* úsečky $a = OA$ do úsečky $b = OB$, symbolicky:

$$c = ab \qquad \text{nebo} \qquad ab = c.$$

§ 25. Zákon komutativity a asociativity sčítání v novém počtu s úsečkami.

Jak lehce nahlédneme, platí pro náš nový počet s úsečkami všechny věty spojení, stanovené v § 13. Nyní prozkoumáme, která z pravidel počítání, tam stanovených, budou pro ně platit, pokud zavedeme rovinnou geometrii, ve které budou splněny axiomy I 1–3, II, IV* a NAVÍC DESARGUOVA VĚTA. Především chceme dokázat, že pro sčítání úseček, definované v § 24, platí zákon KOMUTATIVITY

$$a + b = b + a.$$

Nechť je

$$a = OA = OA',$$
$$b = OB = OB',$$

přičemž podle našeho předpokladu jsou AA' a BB‘ rovnoběžné s jednotkovou přímkou. Nyní zkonstruujme body A'' a B'', aby $A'A''$ i $B'B''$ byly rovnoběžné s OA a aby dále AB'' a BA'' byly rovnoběžně s OA'; jak je ihned vidět, naše tvrzení vypovídá o tom, že je spojnice $A''B''$ rovnoběžná s AA'. Správnost tohoto tvrzení nahlédneme na základě Desarguovy věty (Věty 53) následovně: Průsečík AB'' a $A'A''$ označíme F a průsečík BA'' a $B'B''$ označíme D. V trojúhelnících $AA'F$ a $BB'D$ jsou potom odpovídající si strany navzájem rovnoběžné. Pomocí Desarguovy věty odvodíme, že tři body O, F, D leží v jedné přímce. Následkem této okolnosti jsou oba trojúhelníky OAA' a $DB''A''$ položeny tak, že spojnice odpovídajích si vrcholů procházejí týmtéž bodem F, a protože navíc dvě dvojice odpovídajících si stran, totiž OA a DB'' stejně jako OA' a DA'' jsou navzájem rovnoběžné, jsou podle druhé výpovědi Desarguovy věty (Věty 53) také třetí strany AA' a $B''A''$ navzájem rovnoběžné.

Z tohoto důkazu vychází zároveň, že je jedno, ze které z obou pevných přímek při konstrukci součtu dvou přímek vycházíme.

Dále platí zákon asociativity sčítání

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Na přímce OE jsou dány úsečky

$$a = OA, \qquad b = OB, \qquad c = OC.$$

Na základě všeobecného předpisu pro sčítání, udaného v předchozím paragrafu lze zkonstruovat součty

$$a + b = OG, \qquad b + c = OB', \qquad (a + b) + c = OG'$$

následujícím způsobem: na přímce OE' libovoně zvolíme bod D a spojíme jej s A a B. Obě rovnoběžky k OD, vedené body B a C, protnou rovnoběžku k OA, vedenou bodem D, v bodech F, resp. D'. Rovnoběžka k AD, vedená bodem F, resp. k BD, vedená bodem D', protne nyní přímku OA ve výše uvedených bodech G, resp. B', a rovnoběžka ke GD, vedená bodem D' protne dále přímku OA v taktéž zmíněném bodě G'. Součet $a + (b + c)$ bude nakonec zachován, kde nejprve vedeme bodem B' rovnoběžku k OD, kterou přímka DD' protne v bodě F', a kde vedeme bodem F' rovnoběžku k AD. Jde tedy jen o to, dokázat, že $G'F'$ je rovnoběžná s AD. Označíme-li nyní průsečík přímek BF a GD jako H a průsečík přímek $B'F'$ a $G'D'$ jako H', potom jsou v trojúhelnících BDH a $B'D'H'$ odpovídající si strany navzájem rovnoběžné; a protože dále obě přímky BB' a DD' vzájemně rovnoběžné, a tak je podle Desarguovy věty také přímka HH' rovnoběžná s oběma těmito přímkami. Můžeme tak druhou výpověď Desarguovy věty použít na trojúhelníky GFH a $G'F'H'$ zjistíme, že $G'F'$ je rovnoběžná s GF, tedy vskutku také s AD.

§ 26. Zákon asociativity násobení a oba zákony distributivity v novém počtu s úsečkami.

Při našich předpokladech platí pro násobení úseček zákon ASOCIATIVITY

$$a(bc) = (ab)c.$$

Nechť jsou na první z obou pevných přímek, protínajících se v O, dány úsečky $1 = OA, \qquad b = OC, \qquad c = OA'$ a na druhé přímce úsečky

$$a = OG \qquad \text{a} \qquad b = OB.$$

Abychom zkonstruovali podle předpisu v § 24 po řadě úsečky

$$\begin{aligned} bc &= OB' \qquad \text{a} \qquad bc = OC', \\ ab &= OD \\ (ab)c &= OD', \end{aligned}$$

vedeme $A'B'$ rovnoběžnou s $AB, B'C'$ rovnoběžnou s BC, CD rovnoběžnou s AG a $A'D'$ rovnoběžnou s AD; jak ihned zjistíme, vede potom naše tvrzení na to, že také CD musí být rovnoběžná s $C'D'$. Označíme-li nyní průsečík přímek AD a BC jako F a průsečík přímek $A'D'$ a $B'C'$ jako F', potom jsou v trojúhelnících ABF a $A'B'F'$ odpovídající si strany navzájem rovnoběžné; podle Desarguovy věty leží proto tři body O, F, F' na jedné přímce. Kvůli této okolnosti můžeme použít druhou výpověď Desarguovy věty na oba trojúhelníky CDF a $C'D'F'$ a odtud zjistíme, že je vskutku CD rovnoběžná s $C'D'$. Na základě Desarguovy věty nakonec v našem počtu s úsečkami dokážeme oba zákony distributivity

$$a(b + c) = ab + ac$$

a $\qquad (b + c)a = ba + ca.$

Pro důkaz PRVNÍHO ZÁKONA DISTRIBUTIVITY

$$a(b + c) = ab + ac$$

předpokládejme: na první z obou pevných přímek jsou dány úsečky

$$1 = OE, \qquad b = OB, \qquad c = OC$$

a na druhé přímce úsečka

$$a = OA.$$

Rovnoběžky, vedené k přímce EA body B a C, protínají přímku OA pokaždé v jednom bodě D, resp. F. Potom je na základě předpisu pro násobení z § 24

$$OD = ab, \qquad OF = ac.$$

Podle obecného předpisu pro sčítání z § 24 dostaneme součet $OH = b+c$, kde bodem C vedeme rovnoběžku k OD a bodem D rovnoběžku k OC a dále průsečíkem G obou těchto přímek rovnoběžku k BD, která protne OC v uvedeném bodě H a OD v bodě K. Protože je $OH = b + c$, platí na základě předpisu pro násobení

$$OK = a(b + c).$$

Podle obecného předpisu pro sčítání a na základě možnosti zaměnění pevných přímek OE a OE' při konstrukci součtu, dokázané na str. 104, lze nakonec součet $ac + ab$ zkonstruovat následujícím způsobem: Vedeme libovolným bodem přímky OE, např. bodem C, rovnoběžku CG k přímce OD, dále bodem D rovnoběžku DG k přímce OC a nakonec bodem G rovnoběžku GK k přímce CF. Platí tedy $OK = ac + ab$,
a odtud plyne pomocí zákona komutativity sčítání první zákon distributivity.

Abychom nakonec dokázali DRUHÝ ZÁKON DISTRIBUTIVITY, předpokládejme: na první z obou pevných přímek jsou dány úsečky

$$1 = OE, \qquad a = OA$$

a na druhé přímce úsečky

$$b = OB, \qquad c = OC.$$

Rovnoběžkami AB' k přímce EB, resp. AC' k přímce EC jsou určeny úsečky

$$OB' = ba, \qquad OC' = ca.$$

Zkonstruujeme úsečky

$$OF = b + c, \qquad OF' = ba + ca$$

opět na pevné přímce OB podle obecného předpisu pro sčítání následovně: bodem C vedeme rovnoběžku k přímce OE a bodem E k přímce OC. Tyto se protínají v bodě D, kterým vedeme rovnoběžku k EB, kterou OA protne ve výše uvedeném bodě F. Stejně tak vedeme bodem A rovnoběžku k OC' a bodem C' rovnoběžku k OA. Tyto se protínají v bodě D', kterým vedeme rovnoběžku k AB', kterou protne OB v uvedeném bodě F'.

Podle předpisu pro násobení bude druhý zákon distributivity dokázán, pokud ukážeme, že AF' je rovnoběžná s EF. V trojúhelnících ECD a $AC'D'$ jsou odpovídající si strany vzájemně rovnoběžné; podle Desarguovy věty tak leží tři body O, D, D' na jedné přímce. Můžeme tak druhou výpověď Desarguovy věty použít na oba trojúhelníky EDF a $AD'F'$ a zjistit, že je vskutku AF' rovnoběžná s EF.

§ 27. Rovnice přímky na základě nového počtu s úsečkami.

V § 24 až § 26 jsme prostřednictvím axiomů, stanovených v § 24, a za předpokladu platnosti Desarguovy věty v rovině, zavedli počet s úsečkami, ve kterém kromě vět spojení, uvedených v § 13, bude platit zákon komutativity sčítání, zákon asociativity sčítání a násobení i oba zákony distributivity. To, že zákon komutativity násobení nemusí nutně platit, poznáme v § 33. V tomto paragrafu chceme ukázat, jakým způsobem je na základě tohoto počtu s úsečkami možné analytické zobrazení bodů a přímek v rovině.

Výměr. Označíme v rovině obě předpokládané pevné přímky, protínající se v bodě O, jako osy x a y a uvažujeme libovolný bod P roviny, určený úsečkami x, y, které dostaneme na ose x, resp. y, pokud bodem P vedeme k těmto osám rovnoběžku. Tyto úsečky x, y se nazývají souřadnice bodu P.

Na základě nového počtu s úsečkami a pomocí Desarguovy věty dospějeme k následující skutečnosti:

Věta 55. *Souřadnice x, y bodu na libovolné přímce splňují vždy úsečkovou rovnici tvaru*

$$ax + by + c = o;$$

v této rovnici stojí úsečky a, b nutně NALEVO *od souřadnic x, y; úsečky a, b nejsou nikdy obě nulové a c je libovolná úsečka.*

Obráceně: každá úsečková rovnice popsaného stylu představuje vždy přímku v zavedené rovinné geometrii.

Důkaz. Vzdálenost x každého bodu P osy Y nebo přímky s ní rovnoběžné nezávisí na volbě bodu P na příslušné přímce, tj. takovou přímku lze zapsat ve tvaru

$$x = \overline{c}.$$

K $\overline{c}$ existuje úsečka c taková, že je

$$\overline{c} + c = o,$$

a zároveň platí $$x + c = o.$$
Tato rovnice má požadovaný tvar.

Nechť je nyní l přímka, která protne osu y v bodě S. Libovolným bodem P této přímky vedeme rovnoběžku s osou y, kterou osa x protne v bodě Q. Úsečka $OQ = x$ je odchylka od P. Rovnoběžka k přímce l, vedená bodem Q, vytne na ose y úsečku OR, a podle definice násobení platí

$$OR = ax,$$

kde a je úsečka, která závisí jen na poloze od l, ne ale na volbě P na l. Horizontálna z bodu P se jmenuje y. Podle rozšířené definice součtu, udané na str. 103, a kvůli možnosti zkonstruovat součet také, vycházeje z osy y, dokázané už na str. 104, udává nyní úsečka OS součet $ax + y$. Úsečka $OS = \overline{c}$ je úsečkou, určenou pouze polohou od l. Z rovnice

$$ax + y = \overline{c}$$

plyne $$ax + y + c = o,$$
kde je opět c úsečkou, určenou rovnicí $\overline{c} + c = o$. Posledně jmenovaná rovnice přímky má požadovaný tvar.

Snadno nahlédneme, že souřadnice bodu, který neleží na l, tuto rovnici nesplňují.

Stejně tak snadno lze dokázat platnost druhé výpovědi Věty 55. Je-li totiž dána úsečková rovnice

$$a'x + b'y + c' = o,$$

ve které nejsou obě čísla a', b' nula, potom v případě, že $b‘ = o$, rovnici zleva vynásobíme úsečkou a, určenou vztahem $aa' = 1$, v případě, že $b' \neq 0$, úsečkou b, určenou vztahem $bb' = 1$. Potom dostaneme na základě početních pravidel jednu z právě odvozených rovnic přímky v zavedené rovinné geometrii můžeme snadno zkonstruovat přímku, která vyhovuje této rovnici. □

Poznamenejme ještě výslovně, že úsečková rovnice tvaru

$$xa + yb + c = o,$$

ve které stojí úsečky a, b NAPRAVO od souřadnic x, y, obecně při našich předpokladech NEPŘEDSTAVUJE přímku.

V § 30 představíme důležitou aplikaci Věty 55.

§ 28. Soubor úseček, pojatý jako komplexní systém čísel.

Již jsme zmínili, že pro náš nový počet s úsečkami, zavedený v § 24, jsou splněny Věty 1–6 z § 13.

Dále jsme v § 25 a § 26 pomocí Desarguovy věty poznali, že pro tento počet s úsečkami platí početní zákony 7–11 z § 13; platí tedy všechny věty spojení a početní pravidla, kromě zákona komutativity násobení.

Abychom nakonec umožnili uspořádání úseček, učiníme tento předpoklad: nechť jsou A, B libovolné dva rozdílné body na přímce OE; potom dáme podle Věty 5 čtyři body O, E, A, B do takového pořadí, kde E bude stát za O. Je-li v tomto pořadí také B za A, nazveme úsečku $a = OA$ *menší* než úsečka $b = OB$, symbolicky:

$$a < b;$$

stojí-li oproti tomu v daném pořadí A za B, nazveme úsečku $a = OA$ *větší* než úsečka $b = OB$, symbolicky:

$$a > b.$$

Snadno nahlédneme, že v našem počtu s úsečkami budou na základě axiomů II navíc splněny početní zákony 13–16 z § 13; tím tvoří celek všech různých úseček komplexní číselný systém, pro který platí zákony 1–11, 13–16 z § 13, tj. VŠECHNY PŘEDPISY KROMĚ ZÁKONA KOMUTATIVITY NÁSOBENÍ A VĚT SPOJITOSTI; takový číselný systém budeme v následujícím označovat krátce jako *desarguovský číselný systém.*

29. Vybudování prostorové geometrie pomocí desarguovského číselného systému.

Nechť je nyní dán libovolný desarguovský číselný systém D; TENTO NÁM UMOŽŇUJE VYBUDOVÁNÍ PROSTOROVÉ GEOMETRIE, VE KTERÉ BUDOU SPLNĚNY VŠECHNY AXIOMY I, II, IV*.

Abychom toto nahlédli, uvažujme jako bod systém libovolných tří čísel (x, y, z) desarguovského číselného systému D a jako rovinu systém libovolných čtyř čísel $(u : v : w : r)$, z nichž první tři nejsou zároveň o; systémy $(u : v : w : r)$ a $(au : av : aw : ar)$, kde a znamená libovolné číslo z D, různé od o, přitom představují tutéž rovinu. Platnost rovnice

$$ux + vy + wz + r = o,$$

nechť vyjadřuje, že bod (x, y, z) leží v rovině $(u : v : w : r)$. Přímku nakonec definujeme pomocí systému dvou rovin $(u' : v' : w' : r')$ a $(u'' : v'' : w'' : r'')$, když nelze v D najít takové číslo a, různé od o, aby bylo současně

$$au' = u'', \qquad av' = v'', \qquad aw' = w''.$$

O bodu (x, y, z) řekneme, že leží na této přímce

$$[(u' : v' : w' : r'), (u'' : v'' : w'' : r'')],$$

pokud je společný oběma rovinám $(u' : v' : w' : r')$ a $(u'' : v'' : w'' : r'')$. Dvě přímky, které obsahují tytéž body, nepovažujeme za různé. Pokud použijeme početní zákony 1–11 z § 13, které mají podle předpokladu platit pro čísla z D, dospějeme bez potíží k výsledku, že v právě stanovené prostorové geometrii jsou splněny všechny axiomy I a IV*. Aby bylo také axiomům II učiněno zadost, stanovme následující předpoklady. Nechť jsou

$$(x_1, y_1, z_1), \qquad (x_2, y_2, z_2), \qquad (x_3, y_3, z_3)$$

libovolné tři body přímky

$$[(u' : v' : w' : r'), \qquad (u'' : v'' : w'' : r'')];$$

potom řekneme o bodu (x_2, y_2, z_2), že leží mezi zbylýma dvěma, pokud je splněn nejméně jeden z šesti párů nerovnic

$$x_1 < x_2 < x_3, \qquad x_1 > x_2 > x_3, \tag{1}$$

$$y_1 < y_2 < y_3, \qquad y_1 > y_2 > y_3, \tag{2}$$

$$z_1 < z_2 < z_3, \qquad z_1 > z_2 > z_3, \tag{3}$$

Platí-li nyní např. jedna z obou dvojtých nerovnic (1), odvodíme snadno, že musí platit buď $y_1 = y_2 = y_3$ nebo nutně jedna z obou dvojitých nerovnic (2), a stejně tak že musí platit buď $z_1 = z_2 = z_3$ nebo jedna z dvojitých nerovnic (3). Vskutku, násobením rovnic

$$\begin{aligned} u'xi + v'yi + w'zi + r' &= o, \\ u''xi + v''yi + w''zi + r'' &= o, \\ (i = 1, 2, 3)& \end{aligned}$$

zleva vhodnými čísly z D, které jsou $\neq o$, a následným sečtením vzniklých rovnic odvodíme systém rovnic tvaru

$$\begin{gathered} u'''xi + v'''yi + r''' = o \\ (i = 1, 2, 3). \end{gathered} \tag{4}$$

Koeficient v''' zde určitě není o, neboť jinak by plynula rovnost tří čísel x_1, x_2, x_3. Pokud je $u''' = o$, vychází

$$y_1 = y_2 = y_3.$$

Je-li ale $u''' \neq o$, odvodíme z

$$x_1 \gtrless x_2 \gtrless x_3$$

další dvojitou nerovnici

$$u'''x_1 \gtrless u'''x_2 \gtrless u'''x_3$$

a zároveň kvůli (4)

$$v'''y_1 + r''' \gtrless v'''y_2 + r''' \gtrless v'''y_3 + r'''$$

a odtud $$v'''y_1 \gtrless v'''y_2 \gtrless v'''y_3,$$
a protože v''' není o, máme

$$y1 \gtrless y_2 \gtrless y_3;$$

v každé z těchto dvojitých nerovnic platí vždy buď všude horní znaménko nebo všude znaménko dolní.

Uvedenými úvahami lze nahlédnout, že v naší geometrii platí lineární axiomy II 1–3 uspořádání. Zbývá jenom ukázat, že v naší geometrii platí také axiom II 4.

Nechť je pro tento účel dána rovina $(u : v : w : r)$ a v ní přímka $[(u : v : w : r), (u' : v' : w' : r')]$. Budeme předpokládat, že všechny body (x, y, z), ležící v rovině $(u : v : w : r)$, pro které je výraz $u'x + v'y + w'z + r'$ menší nebo větší než o, budou ležet na jedné, resp. na druhé straně od oné přímky, a musíme potom dokázat, že je tento předpoklad jednoznačný a že je v souladu s předpokladem na str. 65, což lze snadno provést.

Tím jsme poznali, že všechny axiomy I, II, IV* jsou splněny v oné prostorové geometrii, která vychází výše nastíněným způsobem z desarguovského systému čísel D.

Jelikož je Desarguova věta důsledkem axiomů I, 1–8 a IV*, zjistíme:

Nad DESARGUOVSKÝM ČÍSELNÝM SYSTÉMEM D *lze nastíněným způsobem vybudovat rovinnou geometrii, ve které budou čísla systému* D *tvořit prvky počtu s úsečkami, zavedeného v § 24, a ve které budou splněny axiomy I 1–3, II, IV*; v takovéto rovinné geometrii bude potom vždy platit také* DESARGUOVA VĚTA.

Tato skutečnost je obrácením výsledku, ke kterému jsme dospěli v § 28 a který můžeme shrnout následovně:

V rovinné geometrii, ve které kromě axiomů I 1–3, II, IV platí také* DESARGUOVA VĚTA, *lze zavést počet s úsečkami podle § 24; prvky tohoto počtu s úsečkami potom při vhodném předpokladu uspořádání budou vždy tvořit* DESARGUOVSKÝ ČÍSELNÝ SYSTÉM.

§ 30. Význam Desarguovy věty.

Pokud jsou v rovinné geometrii splněny axiomy I 1–3, II, IV* a navíc platí Desarguova věta, je podle poslední věty vždy možné zavést v této geometrii počet s úsečkami, pro který platí pravidla 1–11, 13–16 z § 13. Na soubor těchto úseček budeme dále nahlížet jako na komplexní číselný systém a vybudujeme nad ním podle postupu úvah z § 29 prostorovou geometrii, pro kterou budou platit všechny axiomy I, II, IV*.

Upřeme-li v této prostorové geometrii pozornost jenom na body (x, y, o) a na ty přímky, na kterých tyto body leží, vznikne rovinná geometrie, a když zohledníme Větu 55, odvozenou v § 27, ukáže se, že tato rovinná geometrie musí odpovídat rovinné geometrii, dané na začátku, tj. prvky obou geometrií lze mezi sebou vzájemně jednoznačně přiřadit při zachování spojení a uspořádání. Tak získáme následující větu, kterou lze pojmout jako konečný cíl veškerých úvah v této kapitole:

Věta 56. *Nechť v rovinné geometrii platí axiomy I 1–3, II, IV*: potom je platnost Desarguovy věty nutnou a postačující podmínkou pro to, aby tuto rovinnou geometrii bylo možno pojmout jako část prostorové geometrie, ve které jsou splněny všechny axiomy I, II, IV*.*

Desarguova věta se tak pro rovinnou geometrii projevuje do určité míry jako výsledek eliminace prostorových axiomů.

Nalezené výsledky nám také umožňují nahlédnout, že každá prostorová geometrie, ve které jsou splněny všechny axiomy I, II, IV*, lze vždy pojmout jako část "geometrie libovolně mnoha rozměrů"; pojmem geometrie libovolně mnoha rozměrů přitom rozumíme soubor bodů, přímek, rovin a ještě dalších prvků, pro které jsou splněny odpovídajícím způsobem rozšířené axiomy spojení, uspořádání i axiom o rovnoběžkách.

Šestá kapitola. Pascalova věta

§ 31. Dvě věty o dokazatelnosti Pascalovy věty.

Jak již bylo poznamenáno, lze Desarguovu větu (Větu 53) dokázat z axiomů I, II, IV*, tj. při nutném použití prostorových axiomů, ale bez zahrnutí axiomů shodnosti; v § 23 jsem ukázal, že důkaz bez prostorových axiomů skupiny I a bez axiomů shodnosti III není možný, ani když bude povoleno POUŽITÍ AXIOMŮ SPOJITOSTI.

V § 14 byla Pascalova věta (Věta 40), a v § 22 také Desarguova věta, odvozena z axiomů I 1–3, II–IV, tedy s vyloučením prostorových axiomů a za nutného použití axiomů shodnosti. Vzniká otázka, zda lze při přibrání prostorových axiomů spojení BEZ POUŽITÍ AXIOMŮ SHODNOSTI ODVODIT TAKÉ PASCALOVU VĚTU. Náš výzkum ukáže, že se v tomto smyslu chová Pascalova věta zcela jinak než věta Desarguova, neboť PŘIBRÁNÍ NEBO VYLOUČENÍ ARCHIMÉDOVA AXIOMU má při důkazu Pascalovy věty rozhodující vliv ná na její platnost. Jelikož v této kapitole nebudeme obecně předpokládat axiomy shodnosti, musíme v ní stanovit Archimédův axiom v následující podobě:

V 1*. (Archimédův axiom počtu s úsečkami.) *Nechť je na přímce g dána úsečka a a dva body A a B. Potom lze vždy nalézt nějaký počet bodů $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ takových, že B leží mezi A a A_n a úsečky $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$ jsou rovny úsečce a ve smyslu počtu s úsečkami, který lze na g zavést podle § 24 na základě axiomů I, II, IV* a Desarguovy věty.*

Nejdůležitější výsledky našeho výzkumu shrneme v následujících dvou větách:

Věta 57. *Pascalovu větu (Větu 40) lze dokázat na základě axiomů I, II, IV*, V1*, tj. s vyloučením axiomů shodnosti při přibrání Archimédova axiomu.*

Věta 58. *Pascalovu větu (Větu 40) nelze dokázat na základě axiomů I, II, IV*, tj. s vyloučením axiomů shodnosti i Archimédova axiomu.*

Ve vyjádření obou těchto vět lze podle obecné Věty 56 nahradit prostorové axiomy I 4–8 také požadavkem rovinné geometrie, že má platit Desarguova věta (Věta 53).

§ 32. Zákon komutativity násobení v archimédovském číselném systému.

Důkazy Vět 57 a 58 bytostně spočívají na jistých vzájemných vztazích, které platí při početních pravidlech a axiomech aritmetiky a jejichž znalost se zdá být žádoucí i sama o sobě. Stanovíme následující dvě věty:

Věta 59. *Pro archimédovský číselný systém je zákon komutativity násobení nutným důsledkem zbylých početních zákonů; tj. pokud má číselný systém vlastnosti 1–11, 13–17, jmenované v § 13, plyne nutně, že vyhovuje také vzorci 12.*

Důkaz. Nejdříve poznamenejme: Pokud je a libovolné číslo číselného systému a

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1$$

je celé kladné racionální číslo, potom pro a a n platí vždy zákon komutativity násobení; je totiž

$$\begin{aligned} an = a(1 + 1 + \cdots + 1) &= a \cdot 1 + a \cdot 1 + \cdots + a \cdot 1 \\ &= a + a + \cdots + a \end{aligned}$$

a stejně tak

$$\begin{aligned} na = (1 + 1 + \cdots + 1)a &= 1 \cdot a + 1 \cdot a + \cdots + 1 \cdot a \\ &= a + a + \cdots + a. \end{aligned}$$

Nechť jsou nyní oproti našemu tvrzení a, b dvě čísla číselného systému, pro které zákon komutativity násobení neplatí. Potom lze, jak je snadno vidět, předpokládat, že

$$a > o,\ b > o, \qquad ab - ba > o.$$

Kvůli požadavku 5 z § 13 existuje číslo $c(> o)$ takové, že

$$(a + b + 1)c = ab - ba.$$

Nakonec zvolíme číslo d, které vyhovuje zároveň nerovnicím

$$d > o, \qquad d < 1, \qquad d < c,$$

a označíme jako m a n ta dvě celá racionální čísla >= o, pro která bude

$$md < a \leq (m+1)d$$

resp.

$$nd < b \leq (n+1)d.$$

Existence těchto čísel m, n je bezprostředním důsledkem Archimédovy věty (tedy Věty 17 z § 13). S ohledem na poznámku na začátku tohoto důkazu dostaneme z posledně jmenované nerovnice násobením

$$ab \leq mnd^2 + (m+n+1)d^2,$$
$$ba > mnd^2,$$

tedy odečtením

$$ab - ba < (m+n+1)d^2.$$

Nyní je $$md < a, \quad nd < b, \quad d < 1$$

a tedy $$(m+n+1)d < a+b+1,$$

tj. $$ab - ba < (a+b+1)d$$

neboli kvůli $d < c$ $$ab - ba < (a+b+1)c.$$

Tato nerovnice je ve sporu s definicí čísla c, a tím je důkaz Věty 59 hotov. □

§ 33. Zákon komutativity násobení v nearchimédovském číselném systému.

Věta 60. *Pro nearchimédovský číselný systém není zákon komutativity nutným důsledkem zbylých početních zákonů; tj. existuje číselný systém, který má vlastnosti 1–11, 13–16, vyjmenované v § 13 – desarguovský číselný systém dle § 28 –, ve kterém neplatí zákon komutativity násobení (12).*

Důkaz. Nechť je t parametrem a T libovolným výrazem s konečným nebo nekonečným počtem členů tvaru

$$T = r_0 t^n + r_1 t^{n+1} + r_2 t^{n+2} + r_3 t^{n+3} + \cdots;$$

přitom nechť $r_0 (\neq o), r_1, r_2, \ldots$ znamenají libovolná racionální čísla a n nechť je libovolné celé racionální číslo $\gtreqless o$. K oboru těchto výrazů T přibereme číslo o. Dva výrazy tvaru T nazveme sobě rovnými tehdy, když se v nich všechna čísla $n, r_0, r_1, r_2, \ldots$ po dvojicích rovnají. Dále nechť je s dalším parametrem a S libovolným výrazem s konečným, nebo nekonečným počtem členů tvaru

$$S = s^m T_0 + s^{m+1} T_1 + s^{m+2} T_2 + \cdots;$$

nechť přitom $T_0 (\neq o), T_1, T_2, \ldots$ označují libovolné výrazy tvaru T, a m nechť je zase libovolné celé racionální číslo $\gtreqless o$. Na soubor všech výrazů tvaru S, ke kterým přibereme ještě číslo o, budeme nahlížet jako na komplexní číselný systém $\Omega(s,t)$, ve kterém stanovíme následující početní zákony:

Nejdříve počítejme s parametry s a t pouze podle pravidel 7–11 v § 13, na místě pravidla 12 oproti tomu vždy použijme vzorec

$$ts = 2st. \tag{1}$$

Snadno se přesvědčíme, že je tento předpoklad bezesporný.

Jsou-li nyní S', S'' libovolné dva výrazy tvaru S:

$$S' \quad = s^{m'} T'_0 + s^{m'+1} T'_1 + s^{m'+2} T'_2 + \cdots,$$
$$S'' \quad = s^{m''} T''_0 + s^{m''+1} T''_1 + s^{m''+2} T''_2 + \cdots,$$

potom sčítáním po členech lze zřejmě vytvořit nový výraz $S' + S''$, který je opět tvaru S a zároveň určený jednoznačně; tento výraz $S' + S''$ nazveme součtem čísel, zapsaných jako S', S''.

Obyčejným násobením po členech obou výrazů S', S'' dospějeme nejprve k výrazu tvaru

$$\begin{aligned} S'S'' &= s^{m'}T_0's^{m''}T_0'' + (s^{m'}T_0's^{m''+1}T_1'' + s^{m'+1}T_1's^{m''}T_0'') \\ &+ (s^{m'}T_0's^{m''+2}T_2'' + s^{m'+1}T_1's^{m''+1}T_1'' + s^{m'+2}T_2's^{m''}T_0'') \\ &+ \cdots. \end{aligned}$$

Tento výraz bude při použití vzorce (1) zřejmě jednoznačně určeným výrazem ve tvaru S; posledně jmenovaný nazveme součinem čísla zapsaného jako S' do čísla, zapsaného jako S''.

Při takto stanovené metodě výpočtu je ihned vidět platnost početních pravidel 1–4 a 6–11 z § 13. Také platnost předpisu 5 z § 13 není těžké nahlédnout. Pro tento účel předpokládejme, že např.

$$S' = s^{m'}T_0' + s^{m'} + {}^1T_1' + s^{m'} + {}^2T_2' + \cdots,$$

a $\quad S'''' = s^{m''''}T_0'''' + s^{m''''} + {}^1T_1'''' + s^{m''''} + {}^2T_2'''' + \cdots,$
jsou dané výrazy tvaru S, a uvažme, že při našich předpokladech musí být analogicky první koeficient r_0' z T_0' různý od o. Pokud nyní porovnáme stejné mocniny s na obou stranách rovnice

$$S'S'' = S'''', \tag{2}$$

nalezneme nejdříve jednoznačným způsobem určené celé číslo m'', jakožto exponent, a potom po řadě jisté výrazy

$$T_0'', T_1'', T_2'', \ldots$$

takové, že výraz

$$S'' = s^{m''}T_0'' + s^{m''} + {}^1T_1'' + s^{m''} + {}^2T_2'' + \cdots$$

vyhovuje při použití vzorce (1) rovnici (2); odpovídající platí pro rovnici

$$S'''S' = S''''.$$

Tím je hledaný důkaz hotov. □

Abychom nakonec umožnili uspořádání čísel našeho číselného systému $\Omega(s,t)$, stanovme tyto předpoklady: Číslo systému nazveme $<$ nebo $>$ o, podle toho, zda ve výrazu S, kterým jej zapíšeme, bude první koeficient r_0 výrazu T_0 $<$ nebo $>$ o. Jsou-li dána libovolná dvě čísla a a b komplexního číselného systému, potom je nazveme $a < b$, resp. $a > b$, podle toho, zda je $a \breve{~} b < o$ nebo $> o$. Je ihned vidět, že při těchto předpokladech platí také pravidla 13–16 z § 13, tj. $\Omega(s,t)$ je desarguovský číselný systém (srov. § 28).

Předpis 12 v § 13, jak ukazuje rovnice (1), NENÍ splněn pro náš komplexní číselný systém $\Omega(s,t)$, čímž jsme zcela prokázali správnost Věty 60. Archimédova věta (Věta 17 z § 13) pro právě stanovený číselný systém $\Omega(s,t)$ neplatí, což je ve shodě s Větou 59.

§ 34. Důkaz obou vět o Pascalově větě. (Nepascalovská geometrie.)

Pokud v nějaké prostorové geometrii platí všechny axiomy I, II, IV*, potom platí také Desarguova věta (Věta 53), a díky tomu lze podle poslední věty z § 28 zavést v této geometrii na každé dvojici protínajících se přímek počet s úsečkami, pro který budou platit předpisy 1–11, 13–16 z § 13. Předpokládáme-li nyní v naší geometrii Archimédův axiom V1*, platí zřejmě pro počet s úsečkami Archimédova věta (Věta 17 z § 13), a spolu s tím podle Věty 59 také zákon komutativity násobení. Na základě přiloženého obrázku je ihned zřejmé, že zákon komutativity neznamená nic jiného, než Pascalovu větu pro obě osy. Tím jsme prokázali správnost Věty 57.

Abychom dokázali Větu 58, upřeme pozornost na desarguovský číselný systém $\Omega(s,t)$, stanovený v § 33, a pomocí něho zkonstruujeme způsobem, popsaným v § 29, prostorovou geometrii, ve které budou platit všechny axiomy I, II, IV*. Pascalova věta však v této geometrii platit nebude, neboť v desarguovském systému $\Omega(s,t)$ neplatí zákon komutativity násobení. Takto vybudovaná *"nepascalovská" geometrie* je na základě Věty 57 zároveň nutně také *geometrií "nearchimédovskou"*.

Je zřejmé, že při našich předpokladech nelze Pascalovu větu dokázat ani tehdy, když budeme prostorovou geometrii pojímat jako část geometrie libovolně mnoha rozměrů, ve které budou kromě bodů, přímek a rovin existovat ještě další prvky a ve které bude pro tyto zaveden odpovídající systém axiomů spojení a uspořádání i axiom o rovnoběžkách.

§ 35. Důkaz libovolné věty o průsečících pomocí Pascalovy věty.

Nejprve dokážeme důležitou skutečnost:

Věta 61. *Desarguovu větu (Větu 53) lze dokázat z věty Pascalovy (Věty 40) pouze pomocí axiomů I 1–3, II, IV* tedy bez použití axiomů shodnosti a spojitosti.*

Důkaz. [48] Obě částečné výpovědi, ze kterých se skládá Věta 53, plynou očividně ihned ze sebe navzájem. Stačí tedy dokázat např. druhou výpověď Věty 53. Důkaz povedeme nejprve při určitých vedlejších předpokladech.

Nechť jsou dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ položeny tak, že spojnice odpovídajících si vrcholů procházejí bodem O a že je dále AB rovnoběžná s $A'B'$ a AC s $A'C'$. Dále předpokládáme, že ani přímky OB' a $A'C'$ ani přímky OC' a $A'B'$ nejsou navzájem rovnoběžné. Nyní vedeme k OB' rovnoběžku bodem A, kterou protne přímka $A'C'$ v bodě L a přímka OC' v bodě M. Dále nechť přímka LB' není rovnoběžná ani s OA ani s OC. Přímky AB a LB' určitě nejsou rovnoběžné, tj. protínají se v bodě N, který spojíme s M a s O.

Na základě konstrukce lze na konfiguraci $ONALA'B'$ použít Pascalovu větu a lze nahlédnout, že je ON rovnoběžná s $A'L$, a proto také rovnoběžná s CA. Pascalovu větu je též možno použít na konfigurace $ONMACB$ a $ONMLC'B'$ a vyjde, že MN je rovnoběžná jak s CB, tak s $C'B'$. Strany CB a $C'B'$ jsou tedy vskutku rovnoběžné.

Vedlejší předpoklady, které jsme při důkazu stanovili, lze nyní postupně odstraňovat. Důkaz těchto převodů zde neuvádíme. □

Nechť je nyní dána rovinná geometrie, ve které kromě axiomů I 1–3, II, IV* platí Pascalova věta. Věta 61 nám říká, že v této geometrii platí také Desarguova věta. Můžeme v ní tedy zavést počet s úsečkami podle § 24 a kromě Pascalovy věty bude v tomto počtu s úsečkami podle § 34 platit také zákon komutativity násobení, tj. budou v něm platit všechny početní zákony 1–12 z § 13.

Označíme-li útvar, který odpovídá obsahu Pascalovy, resp. Desarguovy věty, jako pascalovskou, resp. desarguovskou konfiguraci, potom lze výsledek §§ 24–26 a 34 shrnout následovně: Každé použití početních zákonů (Vět 1–12 z § 13) v našem počtu s úsečkami se ukazuje jako kombinace konečně mnoha pascalovských a desarguovských konfigurací, a protože podle důkazu Věty 61 lze desarguovskou konfiguraci

[48] Větu 61 dokázal G. Hessenberg ("Beweis des Desarguesschen Satzes ", Math. Ann. sv. 61) zde naznačeným způsobem.

reprezentovat jako kombinaci pascalovských konfigurací prostřednictvím konstrukcí vhodných pomocných bodů a pomocných přímek, potom se ukazuje každé použití jmenovaných početních zákonů v našem počtu s úsečkami jako kombinace konečně mnoha pascalovských konfigurací.

Podle § 27 na základě zákona komutativity násobení v tomto počtu s úsečkami představuje dvojice reálných čísel (x, y) bod a poměr tří celých čísel $(u : v : w)$, ze kterých první dva nejsou obě nula, úsečku. Vzájemnou polohu bodu a přímky značí rovnice

$$ux + vy + w = o$$

a rovnoběžnost dvou přímek $(u : v : w)$ a $(u' : v' : w')$ poměr

$$u : v = u' : v'.$$

Nechť je nyní v takto dané geometrii dána čistá věta o průsečících. Pod čistou větou o průsečících zde rozumíme větu, která obsahuje výpověď o vzájemné poloze bodů a přímek a o rovnoběžnosti přímek aniž by byly použity další vztahy, jako např. shodnost nebo kolmost. Každou takovou čistou větu o průsečících rovinné geometrie lze převést na následující tvar:

Zvolme nejprve libovolně systém konečně mnoha bodů a přímek, potom veďme předepsaným způsobem k některým z těchto přímek libovolné rovnoběžky, na některých z těchto přímek zvolme libovolné body a veďme některými z těchto bodů libovolné přímky; pokud potom předepsaným způsobem zkonstruujeme přímky spojnic, průsečíky a rovnoběžky k již daným bodům, dospějeme nakonec k určitému systému konečně mnoha přímek, o kterých vypovídá věta, že budou procházet týmž bodem, resp. že budou rovnoběžné.

Souřadnice nejprve zcela libovolně zvolených bodů a přímek považujme za parametry $p_1, \ldots, p_n$; následně zvolíme další body a přímky již s omezenou libovůlí. Některé jejich souřadnice budeme moci považovat za další parametry $p_{n+1}, \ldots, p_r$, ostatní budou určeny parametry $p_1, \ldots, p_r$. Souřadnice všech přímek spojnic, průsečíků a rovnoběžek, které nyní dále zkonstruujeme, budou potom na těchto parametrech racionálně závislé výrazy $A(p_1, \ldots, p_r)$ a výpověď dané věty o průsečících bude představovat tvrzení, že jisté takové výrazy při odpovídajících hodnotách parametrů mají za výsledek odpovídající hodnoty; tj. věta o průsečících bude vypovídat o tom, že určité výrazy $R(p_1, \ldots, p_r)$, racionálně závislé na jistých parametrech $p_1, \ldots, p_r$, budou vždy nulové, pokud za tyto parametry dosadíme libovolné prvky počtu s úsečkami, zavedeného v dané geometrii. Jelikož je obor těchto prvků nekonečný, odvodíme podle známé věty z algebry, že PŘI POČETNÍCH PRAVIDLECH 1–12 z § 13 musejí být výrazy $R(p_1, \ldots, p_r)$ IDENTICKY nulové. Abychom ale v našem počtu s úsečkami toto identické vynulování výrazů $R(p_1, \ldots, p_r)$ dokázali, stačí podle toho, co jsme výše dokázali pro použití početních zákonů, použít Pascalovu větu a zjistíme:

Věta 62. *Každá čistá věta o průsečících, která platí v rovinné geometrii a v níž platí axiomy I 1–3, II, IV* a Pascalova věta, se prostřednictvím konstrukce vhodných pomocných bodů a pomocných přímek ukazuje jako kombinace konečně mnoha pascalovských konfigurací.*

Pro důkaz správnosti věty o průsečících tedy díky použití Pascalovy věty nemusíme zpětně používat axiomy shodnosti a spojitosti.

Historická poznámka

Pozorování, uvedená v páté a šesté kapitole, byla iniciována výzkumem HERMANNA WIENERA "Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie", o kterém přednášel na shromáždění přírodovědců v Halle v roce 1891 (srov. publikace H. Wienera v Jahresber. D. Deutschen Mathem.–Vereinigung, sv. 1, str. 45 až 48 (1892)). H. Wiener je také vydavatel cyklu pojednání "Vertauschbare zweispiegelige Verwandschaften" v Berichten der Kgl. sächs. Ges. d. Wiss., Leipzig 1890, 1891, 1893.

Sedmá kapitola. Geometrické konstrukce na základě axiomů I–IV.

§ 36. Geometrické konstrukce pomocí pravítka a etalonu.

Je dána prostorová geometrie, ve které platí všechny axiomy I–IV; pro jednoduchost upřeme v této kapitole pozornost pouze na rovinnou geometrii, která je obsažena v této prostorové geometrii, a prozkoumáme potom otázku, které elementární konstrukční úlohy (vhodné praktické pomůcky předpokládáme) lze v takové geometrii určitě provést.

Na základě axiomů I, II, IV lze vždy vyřešit následující úlohu:

Úloha 1. Spojit dva body přímkou a najít průsečík dvou přímek, pokud přímky nejsou rovnoběžné.

Na základě axiomů shodnosti III lze nanášet úsečky a úhly, tj. v dané geometrii lze řešit následující úlohy:

Úloha 2. Nanést danou úsečku na danou přímku od nějakého bodu směrem na danou stranu.

Úloha 3. Přenést daný úhel na danou přímku od daného bodu na danou stranu nebo zkonstruovat přímku, která protne danou přímku v daném bodě pod daným úhlem.

Nahlédneme, že při stanovení axiomů I–IV lze řešit jen ty konstrukční úlohy, které lze převést na právě jmenované úlohy 1–3. K základním úlohám 1–3 připojíme ještě následující dvě:

Úloha 4. Daným bodem vést rovnoběžku k přímce.

Úloha 5. K dané přímce vést kolmici.

Ihned poznáme, že obě tyto úlohy lze řešit různými způsoby pomocí úloh 1–3.

K provedení Úlohy 1 potřebujeme pravítko. Abychom provedli úlohy 2–5, postačí, jak v následujícím ukážeme, použít kromě pravítka ještě etalonu, nástroj, který umožňuje nanesení jediné[49] určité úsečky, např. jednotkové úsečky. Tak dospějem k následujícímu výsledku:

Věta 63. *Ony geometrické konstrukční úlohy, které při stanovení axiomů I–IV lze řešit, lze nutně provést pomocí pravítka a etalonu.*

Důkaz. Abychom vykonali Úlohu 4, spojíme daný bod P s libovolným bodem A dané přímky a a pomocí etalonu na ni od bodu A dvakrát za sebou naneseme jednotkovou úsečku, tyto body pojmenujeme např. B a C. Nechť je nyní D libovolný bod na AP, který je různý od A a P a pro který nejsou BD a PC rovnoběžné. Potom se protínají CP a BD v bodě E a AE a CD v bodě F. PF je podle Steinera hledaná rovnoběžka s a. □

Úlohu 5 vyřešíme následujícím způsobem: Nechť je A libovolným bodem dané přímky; potom nanesme na tuto přímku pomocí etalonu na obě strany od A jednotkové úsečky AB a AC a určeme potom na dvou libovolných jiných přímkách,

[49]Na to, že zde stačí pořadavek přenášení jedné jediné úsečky, upozornil J. Kürschák, srov. jeho zprávu "Das Streckenabtragen", Math. Ann. sv. 53, 1902

procházejících A body E a D tak, že také úsečky AD a AE budou rovny jednotkové úsečce. Úsečky BD a CE se protínají v bodě F, přímky BE a CD v bodě H, a FH je hledaná kolmice. Vskutku: úhly $\sphericalangle BDC$ a $\sphericalangle BEC$ jsou pravé, neboť jsou to úhly na polokružnici nad průměrem BC, a proto podle věty o průsečíku výšek v trojúhelníku, kterou použijeme na trojúhelník BCF, je také FH kolmá na BC.

Na základě Úloh 4 a 5 je vždy možno na danou přímku a spustit kolmici z bodu D, který na ní neleží, nebo k ní vztyčit kolmici z bodu A, který na ní leží.

Nyní můžeme snadno vyřešit také Úlohu 3 pouze pomocí pravítka a etalonu; navrhneme např. následující postup, který vyžaduje pouze vedení rovnoběžek nebo spouštění kolmic. Nechť je β úhel, který se má přenést a A pata tohoto úhlu. Bodem A vedeme přímku l rovnoběžnou s danou přímkou, na kterou máme nanést daný úhel β. Z libovolného bodu B na ramenu úhlu β spustíme kolmici na druhé rameno úhlu β a na l. Paty těchto kolmic pojmenujeme D a C. C a D jsou od sebe rozdílné, a A neleží na CD. Z bodu A tak můžeme spustit kolmici na CD; její patu pojmenujeme E. Podle důkazu, provedeného na str. 87 je $\sphericalangle CAE = \beta$. Pokud vybereme B na druhém rameni daného úhlu, spadne E na druhou stranu l. K AE vedeme rovnoběžku daným bodem na dané přímce; tím jsme vyřešili Úlohu 3.

Abychom nakonec provedli Úlohu 2, použijeme následující jednoduchou konstrukci, uvedenou J. Kürschákem: nechť je AB úsečka, kterou máme nanést a P daný bod na dané přímce l. Bodem P veďme rovnoběžku k AB a nanesme na ni pomocí etalonu jednotkovou úsečku od bodu P na tu stranu AP, na níž leží bod B, např. do bodu C; nanesme dále na l od P na danou stranu jednotkovou úsečku až do bodu D. Rovnoběžka k AP bodem B protne PC v Q a rovnoběžka k CD bodem Q protne l v bodě E: potom je $PE = AB$. Pokud bude l identická s PQ a Q neleží na dané straně, musíme konstrukci jednoduchým způsobem rozšířit.

Tím jsme ukázali, že všechny úlohy 1–5 lze řešit pravítkem a etalonem, a Větu 63 jsme tak zcela dokázali.

§ 37. Kritérium pro možnost provedení geometrických konstrukcí pomocí pravítka a etalonu.

Kromě úloh z elementární geometrie, probraných v § 36 existuje ještě velká řada dalších úloh, k jejichž řešení potřebujeme pouze rýsování přímek a nanášení úseček. Abychom mohli získat přehled o oblasti všech úloh, řešitelných tímto způsobem, stanovíme pro další pozorování pravoúhlý souřadnicový systém a souřadnice bodů budeme uvažovat obyčejným způsobem jako reálná čísla nebo funkce jistých libovolných parametrů. Abychom zodpověděli otázku po souboru všech konstruovatelných bodů, přijmeme následující úvahu:

Nechť je dán systém určitých bodů; Ze souřadnic těchto bodů složíme obor racionality[50] R. Tento obsahuje jistá reálná čísla a jistý libovolný parametr p. Zároveň uvažujme soubor všech těch bodů, které z daného systému bodů lze zkonstruovat rýsováním přímek a nanášením úseček. Obor, jejž zkonstruujeme ze souřadnic těchto bodů, označíme $\Omega(R)$; tento obsahuje jistá reálná čísla a funkce libovolného parametru p.

Naše pozorování v § 17 ukazuje, že rýsování přímek a rovnoběžek vede analyticky na použití sčítání, násobení, odčítání a dělení úseček; dále říká známý vzorec pro otočení, uvedený v § 9, že nanášení úseček na libovolnou přímku nevyžaduje žádnou jinou analytickou operaci, než zkonstruovat druhou odmocninu ze součtu dvou čtverců, jejichž základy jsme již zkonstruovali. Naopak, nanášením úseček lze vždy na základě Pythagorovy věty pomocí pravoúhlého trojúhelníku konstruovat druhou odmocninu ze součtu dvou úsečkových čtverců.

[50] p. překl.: Obor racionality [*Rationalitätsbereich*] je starší alternativní označení pro těleso [*Körper*]. Viz ([Fiala 2011], s. 25).

Z těchto pozorování vychází, že obor $\Omega(R)$ obsahuje všechna taková a jen taková reálná čísla a funkce parametru p, které vycházejí z čísel a parametrů v R po konečném počtu použití pěti početních operací, totiž čtyř elementárních početních operací a páté operace, za kterou bereme konstrukci druhé odmocniny ze součtu dvou čtverců. Tento výsledek vyslovíme následovně:

Věta 64. Geometrická konstrukční úloha je řešitelná rýsováním přímek a nanášením úseček, tj. pomocí pravítka a etalonu, tehdy a jen tehdy, když jsou při analytickém řešení úlohy souřadnice hledaných bodů takové funkce souřadnic daných bodů, jejichž vytvoření vyžaduje jen racionální operace a operaci konstrukce druhé odmocniny ze součtu dvou čtverců – a sice jen konečný počet použití těchto pěti operací.

Z této věty můžeme ihned poznat, že ne každou úlohu, řešitelnou pomocí kružítka, lze také řešit pouze pravítkem a etalonem. Pro tento účel stanovíme onu geometrii, kterou jsme vybudovali v § 9 pomocí algebraického číselného tělesa Ω; v této geometrii existují jen takové úsečky, které lze zkonstruovat pomocí pravítka a etalonu, totiž úsečky, určené čísly oboru Ω.

Je-li nyní ω libovolné číslo v Ω, snadno z definice oboru Ω nahlédneme, že také každé algebraické číslo, sdružené s ω, musí ležet v Ω a protože čísla oboru Ω jsou zřejmě všechna reálná, plyne z toho, že obor Ω může obsahovat jen taková reálná algebraická čísla, s nimiž sdružená čísla jsou taktéž reálná, tj. čísla oboru Ω jsou totálně reálná.

Nyní stanovíme úkol, zkonstruovat pravoúhlý trojúhelník s přeponou 1 a odvěsnou $|\sqrt{2}| - 1$. Teď se algebraické číslo $\sqrt{2|\sqrt{2}| - 2}$, které vyjadřuje číselnou hodnotu druhé odvěsny, v číselném oboru Ω nevyskytne, neboť s ním sdružené číslo $\sqrt{-2|\sqrt{2}| - 2}$ vyjde imaginární. Stanovený úkol tak není ve stanovené geometrii řešitelný, a proto nemůže být řešitelný pravítkem a základní mírou, ačkoliv konstrukce prostřednictvím kružítka je řešitelná ihned.

Naše pozorování lze také obrátit, tj. platí:

Každé totálně reálné číslo, získatelné z racionálních čísel prostřednictvím reálných druhých odmocnin, leží v oboru Ω. Odtud je každá úsečka, určená takovým číslem, konstruovatelná pravítkem a základní mírou. Důkaz této věty získáme z obecného pozorování. Podaří se nám totiž najít kritérium, které pro geometrickou konstrukční úlohu, řešitelnou pomocí pravítka a kružítka, umožní ihned z analytické povahy úlohy a jejích řešení posoudit, zda je konstrukce řešitelná také pomocí pravítka a etalonu. Toto dostaneme prostřednictvím následující věty:

Věta 65. *Máme geometrickou konstrukční úlohu takovou, že při jejím analytickém řešení mohou být souřadnice hledaných bodů získány ze souřadnic zadaných bodů pomocí racionálních operací a druhých odmocnin. Nechť n je nejmenší počet druhých odmocnin, který dostačuje pro výpočet souřadnic bodů; k tomu, aby bylo možné tuto konstrukční úlohu také řešit jen pomocí vedení přímek a nanášení úseček, je nutné a dostačující, aby tato geometrická úloha měla při připuštění nekonečné vzdálenosti přesně 2^n reálných řešení, a to pro* VŠECHNY *polohy zadaných bodů, to jest pro* VŠECHNY *hodnoty libovolných parametrů, které se vyskytují v souřadnicích zadaných bodů.*

Na základě pozorování, uvedených na začátku tohoto paragrafu, je nutnost stanoveného kritéria ihned zřejmá. Tvrzení, že kritérium také postačuje, vede na následující větu:

Věta 66. *Nechť funkce $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ se dostane z parametrů $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pomocí racionálních operací a druhých odmocnin. Jestliže hodnota této funkce je pro* KAŽDOU *reálnou sadu hodnot parametrů* TOTÁLNĚ REÁLNÉ *číslo, pak je tato funkce prvkem oboru $\Omega(R)$, který se dostane, z $1, x_1, \ldots, x_n$ pomocí čtyř aritmetických operací a druhých odmocnin* SOUČTU ČTVERCŮ DVOU ČÍSEL.

Poznamenejme předem, že v definici oboru $\Omega(R)$ lze omezení na DVOJČLENNÝ součet čtverců odstranit. Vskutku, vzorce

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2+c^2}, \tag{8.3}$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2+d^2}, \tag{8.4}$$

$$\dots \tag{8.5}$$

udávají, že obecně lze konstrukce druhé odmocniny součtu libovolně mnoha čtverců vždy převést na několikerou konstrukci druhé odmocniny ze součtu dvou čtverců.

Postupnou adjunkcí druhých odmocnin pokaždé co nejvíce do vnitřku funkce $f(p_1,\dots,p_n)$ vznikají při její výstavbě postupně jednotlivé obory racionality. V tomto kontextu proto na základě předchozího odstavce stačí dokázat, že základ každé z uvedených druhých odmocnin se již vyskytl v předchozím oboru racionality jako součet čtverců. Pro tento důkaz se opřeme o následující algebraickou větu:

Věta 67. Každá pozitivně definitní (která tedy pro žádné reálné hodnoty proměnných nenabývá záporné hodnoty) racionální funkce $\rho(p_1,p_2,\dots,p_n)$ s racionálními koeficienty může být vyjádřena ve tvaru součtu čtverců racionálních funkcí proměnných $p_1,p_2,\dots,p_n$ s racionálními koeficienty.[51]

Tuto větu uvedeme v následující podobě:

Věta 68. *V oboru racionality, určeném parametry $1,x_1,\dots,x_n$, je součtem čtverců každá funkce, která nikdy, tj. pro žádnou reálnou sadu hodnot parametrů, není záporná.*

Nechť je nyní dána funkce $f(p_1,p_2,\dots,p_n)$ s vlastnostmi, které jsme jmenovali ve Větě 66. Poslední tvrzení potom ještě rozšíříme na ty obory, které dostaneme postupnou adjunkcí těch druhých odmocnin, které potřebujeme k vybudování funkce f. Pro tyto obory platí, že funkce, která není nikdy záporná, lze spolu s funkcemi k ní konjugovanými zapsat jako součet čtverců z funkcí příslušného oboru.

Důkaz povedeme pomocí úplné indukce. Nejprve uvažujeme obor, který vznikne z R adjunkcí druhé odmocniny, která je ve funkci nejvíce vevnitř. Základ této druhé odmocniny je RACIONÁLNÍ funkce $f_1(p_1,\dots,p_n)$. Nechť je $f_2(p_1,\dots,p_n)$ funkce z oboru $(R,\sqrt{f_1})$, vzniklého adjunkcí, který spolu s funkcí konjugovanou nenabývá nikdy záporných hodnot a také není identicky nulová; tento má tvar $a+b\sqrt{f_1}$, kde jsou a a b racionální funkce, stejně jako f_1. Z předpokladů, které jsme učinili o f_2, plyne, že součet ϕ a součin ψ funkcí $a+b\sqrt{f_1}, a-b\sqrt{f_1}$ nenabývá nikdy záporných hodnot. Funkce

$$\phi = 2a, \qquad \psi = a^2 - b^2 f_1$$

jsou navíc racionální, lze je tedy podle Věty 68 zapsat jako součty čtverců funkcí z R. Funkce ϕ přitom nemůže být identicky nulové.

Z rovnice, platné pro f_2

$$f_2^2 - \phi f_2 + \psi = o$$

dostaneme
$$f_2 = \frac{f_2^2+\psi}{\phi} = \left(\frac{f_2}{\phi}\right)^2 \cdot \phi + \frac{\phi\psi}{\phi^2}.$$

Po tom, co bylo řečeno o ϕ a ψ, lze tedy f_2 zapsat jako součet čtverců funkcí oboru $(R,\sqrt{f_1})$. Výsledek, obdržený takto pro obor $(R,\sqrt{f_1})$ odpovídá Větě 68, platné pro obor R. Pokud právě použitý postup zopakujeme při dalších adjunkcích, dospějeme nakonec k výsledku, že v každém z oborů, ke kterým při budování

[51] O problému pro JEDNU proměnnou jsem již pojednával dříve, načež podal E. LANDAU kompletní důkaz této věty pro jednu proměnnou za použití velmi jednoduchých a elementárních prostředků, Math. Ann. sv. 57, 1903. Úplný důkaz podal nedávno E. ARTIN, Hamburger Abhandlungen sv. 5, 1927.

funkce f dospějeme, je každá funkce spolu s funkcí konjugovanou, které nejsou nikdy záporné, součtem čtverců funkcí příslušného oboru. Nyní pozorujeme libovolnou druhou odmocninu, vyskytující se v f. Tato odmocnina i funkce konjugovaná jsou v každém případě reálné a jejich základ je proto v daném oboru oné odmocniny i funkce k ní konjugované takovou funkcí, která není nikdy záporná, a lze ji proto ve zmíněném oboru zapsat jako součet čtverců. Tím je Věta 66 dokázána; kritérium, uvedené ve Větě 65, je tedy i postačující.

Za příklad použití Věty 65 nechť slouží pravidelné mnohoúhelníky, zkonstruované pomocí kružítka; v tomto případě se nevyskytne libovolný parametr p. Výrazy, které je nutno konstruovat, představují namísto toho spíše všechna algebraická čísla. Je zřejmé, že je kritérium Věty 65 splněno a vychází tak, že lze ony pravidelné mnohoúhelníky zkonstruovat také prostřednictvím rýsování přímek a nanášení úseček – výsledek, který lze také přímo získat z teorie dělení kružnice.

Co se týče dalších konstrukčních úloh, známých z elementární geometrie, zmiňme zde jen, že Malfattiho problém prostřednictvím pravítka a etalonu vyřešit lze, což ovšem neplatí pro Apolloniovu úlohu o dotyku.[52]

Závěr.

Toto pojednání je kritickou studií principů geometrie; v této studii nás vedlo základní pravidlo, abychom při řešení každého problému, na který narazíme, zároveň ověřili, zda je tento problém řešitelný uvedeným způsobem i při jistých omezených prostředcích. Dle mého názoru vykazuje toto pravidlo obecnou a přirozenou platnost; vskutku, pokud při našich matematických pozorováních narazíme na nějaký problém nebo máme nějakou hypotézu, uspokojí náš pud poznání teprve to, když nalezneme buď úplné řešení onoho problému a přísný důkaz oné hypotézy nebo pokud nahlédneme důvod, proč je není možné nalézt a proč takové pokusy nutně ztroskotají.

V novější matematice proto hraje obrovskou otázka o NEMOŽNOSTI jistých řešení nebo úkolů a snaha zodpovědět otázku takového typu byla často popudem k objevu nových a plodných oblastí výzkumu. Vzpomeňme jenom na ABELŮV důkaz nemožnosti řešení rovnic pátého stupně pomocí odmocnin, dále na poznání nedokazatelnosti axiomu o rovnoběžkách či na HERMITOVY a LINDEMANNOVY věty o nemožnosti zkonstruovat algebraickou cestou čísla e a π.

Základní pravidlo, podle kterého bychom u důkazů měli pokaždé vyložit principy, proč jsou možné, souvisí také velmi s požadavkem "čistoty" metod důkazů, který byl mnohými matematiky nadmíru zdůrazňován. Tento požadavek není v podstatě nic jiného, než subjektivní podoba námi následovaného základního pravidla. Obecně je ve skutečnosti cílem této naší geometrické studie vyjasnit, které axiomy, předpoklady nebo prostředky jsou nutné k důkazu nějaké pravdy z oboru elementární geometrie, a v každém jednotlivém případě pak zůstává ke zvážení zvlášť, kterou metodu důkazu je z právě uvedeného hlediska vhodné upřednostnit.

[52] Co se týče dalších geometrických konstrukcí pravítkem a etalonem srov. M. FELDBLUM, "Über elementargeometrische Konstruktionen", inaugurační disertace, Göttingen 1899.

Kapitola 9

Další překlady

9.1 Otto Blumenthal – Lebensgeschichte (1935) [Hilbertův životopis]

Životní příběh.[1]
Autor: Otto Blumenthal.

Prarodiče Davida Hilberta z otcovy strany se do Königsbergu přistěhovali za časů Fridricha Velikého. Předek königsbergské rodiny, pradědeček Davida Hilberta, Christian David, byl rázný, pozoruhodný muž, který zanechal životopis, cenný jako dokument o své době. Z něj přebíráme následující: Rodina Hilbertů se v 17. století usídlila v okolí městečka Brand u Freibergu v Sasku. Vyznáním byli evangelíci. Tito maloměšťané, řemeslníci a obchodníci si své ženy vícekrát našli mezi dcerami učitelů. Mnoho míst v popisu života Christiana Davida, včetně jeho biblického křestního jména, vzbuzuje domněnku, že byla rodina církevně blízko pietismu. Johan Christian Hilbert, otec Christiana Davida, vyučený pasíř, byl na začátku 18. století "brandský velkoobchodník, nejuznávanější muž v Brandu, který zaměstnával přes 100 lidí (v textilním průmyslu)." Zemřel ale v době, kdy byly jeho děti nezletilé a nesvědomití poručníci přivedli rodinu k žebrotě. Christian David, který se ve Freibergu vyučil u městského ranhojiče holičskému řemeslu, se jako učeň odstěhoval, veden náhodou, do Königsbergu, vstoupil jako rotný ranhojič do armády, zúčastnil se v letech 1777 a 1778 poslední války Fridricha Velikého proti Rakousku. Zůstal potom v Königsbergu natrvalo, oženil se (dokonce třikrát), měl čtyři děti, ze kterých mnoho zemřelo mladých, nakonec dosáhl pílí a spořivostí toho, že koupil "holičství", uvolněné kvůli smrti majitele, což bylo spojeno s jistými právy, a složil ve věku 33 let zkoušky k jeho užívání jako "Královský pruský aprobovaný privilegovaný úřední a městský ranhojič, opperateur, accoucheur." V těchto dobrých městských poměrech žil v Königsbergu ještě přes 20 let, než na podzim roku 1812 "schoval svá čtyři zlatá holičská umyvadla". Brzy na to v 56 letech pravděpodobně zemřel. Jeho synové se přiklonili ke studiu, a od té doby byli Hilbertové v Königsbergu právníci a lékaři. Dědeček Davida Hilberta a jeho otec byli soudci. Otec Otto Hilbert je líčen jako poněkud jednostranný právník, s pravidelným režimem života, který denně chodil na tutéž procházku, srostlý s Königsbergem, který opouštěl rodinu jen, když měl strávit léto ve východopruských lázních u moře, který nebyl

[1] Pro doplnění tohoto životopisu srov. číslo "Naturwissenschaften" o Hilbertovi [sv. 10, (1922) s. 65–104]. Můj tamní článek, vzniklý v jiný čas a při jiné příležitosti, možná podává příběh v jiných barvách. Při vyprávění jsem se také úmyslně vyhýbal opakování malých drobnosti. Viz též referáty o Hilbertových pracích, vzniklých k příležitosti udílení cen Bolyaie v letech 1905 a 1910 od G. Radose (Math. Ann. sv. 72, s. 167–176) a H. Poincarého (Ungar. Ak. Wiss. 1910). – Musím poděkovat mnoha Hilbertovým žákům a přátelům za cenné rady a poznámky.

příliš spokojen s neobvyklou životní drahou, kterou se jeho syn vydal, a který měl dlouho velkou nedůvěru v její úspěch. Neobyčejné humanitní zájmy měla na rozdíl od něj matka, roz. Erdtmannová, z rodiny königsbergského obchodníka, osobitá žena, která se zálibou četla filozofické a astronomické spisy a počítala prvočísla.

David Hilbert se narodil jako jediný syn 23. 1. 1862. Jeho mladší sestra zemřela ve 28 letech v šestinedělí. Navštěvoval nejdříve od roku 1870 Friedrichskolleg v Königsbergu, kde však nebyl spokojen, hlavně měl výhrady k tamním metodám výuky formou učení nazpaměť. Poslední školní rok strávil na Vilémově gymnáziu, kde také v srpnu 1880 maturoval. Zdejší prostředí ho podporovalo více, učitelé měli pochopení pro jeho jedinečnost; později na ně často a rád vzpomínal. Dosud dostupný sešit z matematiky prokazuje, že zde ve značném rozsahu učili novější geometrii. Charakteristický je ale Hilbertův pozdější výrok: "Na škole jsem se matematikou nijak zvlášť nezabýval, neboť jsem už věděl, že ji pravděpodobně budu dělat později."

S výjimkou 2. semestru, který strávil v Heidelbergu u L. Fuchse, proběhla celá Hilbertova studia v Königsbergu. Jako řádný profesor matematiky zde do roku 1883 působil Heinrich Weber, který předtím společně s R. Dedekindem vytvořil slavnou aritmetickou "teorii algebraických funkcí jedné proměnné." Hilbert chodil na jeho přednášky o teorii čísel a eliptických funkcích a účastnil se semináře o teorii invariantů.[2] Když dostal Weber v roce 1883 místo v Charlottenburgu, nastoupil na jeho místo F. Lindemann, který byl na vrcholu slávy po svém důkazu transcendence čísla π, publikovaném v roce 1882. K tomu přistoupily ale ještě dva další vlivy, které se s časem ukázaly býti trvalejšími. Matematici v Königsbergu byli tehdy okouzleni velkým nadáním a skvělým úspěchem Hermanna Minkowského, který, o 2 roky mladší než Hilbert, ale imatrikulován o $\frac{1}{2}$ roku dříve, se už prosazoval, coby průkopník, v oboru teorie čísla a v dubnu 1883 obdržel velkou cenu Pařížské Akademie. Brzy se s ním David Hilbert spřátelil, ačkoliv Hilbertův otec sblížení s tak slavným člověkem pokládal za drzost. Odhlédneme-li od jeho vlastních originálních myšlenek, přinesl si Minkowski ze svých studijních let v Berlíně také znalosti od Kummera, Kroneckera, Weierstraße a Helmholtze a musel tak na poněkud uzavřený königsberský okruh působit neobyčejně oživujícím způsobem. A potom dostal o Velikonocích 1884 místo mimořádného profesora v Königsbergu Adolf Hurwitz, o 3 roky starší než Hilbert. O něm Hilbert častokrát vyprávěl: "Byli jsme, Minkowski a já, zcela udoláni jeho znalostmi a nevěřili jsme, že to někdy dotáhneme tak daleko." Poskytl Hilbertovi především nejdůkladnější úvod do teorie funkcí, jak Riemannovým-Kleinovým směrem, tak směrem Weierstraßovým. Už zde lze s předstihem mluvit o neobvykle harmonické a plodné spolupráci mezi těmito třemi matematiky. Pro celoživotní přátelství s Minkowskim nalezl Hilbert ve své vzpomínkové řeči nejněžnější a nejkrásnější slova.[3] V jejich korespondenci vidíme přechod od lehkého tónu studentských let ke zralému, upřímnému sdílení všech zájmů.[4] Vnější známka srdečnosti, tykání, se objevuje teprve v roce 1891. O vědeckých stycích s Hurwitzem píše Hilbert ve své vzpomínkové řeči takto: "Na nesčetných, někdy i každodenních procházkách jsme tehdy během osmi let prozkoumali (*durchstöbern*) snad všechna zákoutí matematické vědy a Hurwitz se svými širokými a mnohostrannými, ale zároveň i pevnými a dobře uspořádanými znalostmi nám v tom byl vždy vůdcem."[5] Těchto procházek se o prázdninách pravidelně účastnil také Minkowski. Hilbert ve svém učitelském období zakládal tímto pro něj vždy charakteristickým způsobem své znalosti, ne systematickou výukou nebo studiem knih, ale rychlým a hlubokým pochopením a důkladným promyšlením toho, co mu jeho společníci

[2] V Königsbergu si pánové Szegö, Specht a Fitting dali velkou práci a vystavili pro mě z akt univerzitní pokladny seznam přednášek, kterých se Hilbert účastnil. Za to jim upřímně děkuji.

[3] sv. III s. 363–364 nebo Math. Ann. sv. 68, (1910) s. 470–471.

[4] Paní Lili Rüdenberg, roz. Minkowski, mi přátelsky dovolila nahlédnout do korespondence.

[5] sv. III s. 371 nebo Math. Ann. sv. 83. s. 163.

přinesli.

Na tomto místě se hodí připomenout zvláštní význam, který měl pro Hilbertův vývoj Leopold Kronecker. Zaprvé se projevuje v tom, že Hilbert po celý život vnímal jeho protivnost. Mluví o ni ve své vzpomínkové řeči na Minkowského, další informace máme z jeho rozhovorů. Kronecker byl v době Hilbertova dospívání panovačnou osobností, tyranem, který chtěl vést matematický výzkum jím upřednostňovaným směrem a outsidery odmítal. Hilbert se ale celým svým temperamentem vzpouzel proti jakémukoliv omezení svobody ducha. Kroneckerova kritika Dedekindova-Weierstraßova pojmu čísla, která se projevila v "policejním zákazu", bezpochyby jako první aktivovala Hilbertovo kroužení okolo axiomů aritmetiky. A Hilbert je pyšný na to, že oproti Kroneckerovi patřili členové Königsbergské školy k prvním německým matematikům, kteří ctili a používali Kroneckerem odmítnuté výtvory G. Cantora v teorii množin.[6] Hilbertova jediná publikace z prvního období, která se netýkala teorie invariantů, byla na téma z oboru teorie množin, zobrazení čtverce na úsečku.[7] Na druhou stranu ale Kroneckerovo dílo bezpochyby udalo směr Hilbertovým algebraickým a číselně-teoretickým pracím: jedině Kroneckerovým zpracování modulárních systémů umožnilo výzkumy z oblasti teorie forem, teprve racionální metody (Kronecker, Dedekind) pro určení báze algebraického číselného tělesa poskytly prostředek ke stanovení úplných invariantních systémů, a od Kroneckera nakonec vyšly silné pobídky ke studiu relativních Abelových těles.

Tyto vlivy se ale zprvu ještě neprojevují. 11. prosince 1884 složil Hilbert doktorské zkoušky, diplom nese datum 7. února 1885. Jako doktorské téma mu Lindemann stanovil otázku po invariantních podmínkách pro takové formy, které lze projektivně transformovat na kulovou funkci n-tého řádu.[8] Vstupem měla být diferenciální rovnice kulových funkcí. Ke zvládnutí tohoto speciálního úkolu Hilbert ihned zavedl obecný pomocný prostředek, zobrazení libovolné kovarianty prostřednictvím derivace formy a nutných a postačujících podmínek, připsatelných ve tvaru obyčejné diferenciální rovnice, pro to, aby funkce této derivace měla kovariantní charakter. Po tomto stanovení základů lze použít diferenciální rovnici kulové funkce a úkol vyřešit. V pozdějším zpracování disertace pro *Mathematische Annalen*[9] ostatně Hilbert přiznal, že stanovení kulových funkcí bylo ztížením, zatímco přirozenější otázky by se týkaly invariantního charakteru obecných přerušených hypergeometrických řad. Hilbert ve svých publikacích po disertaci až do roku 1892 setrvával téměř výhradně v oblasti teorie forem nebo invariantů, žertem se v dopise Minkowskému označil za "Fach-teoretika invariantů".

Na doktorské zkoušky navazují některé osobní události. V květnu 1885 složil státní zkoušky z matematiky a fyziky jako hlavních předmětů. Hilbert později rád napomínal žáky, kteří si byli jisti vítězstvím a mysleli jen na habilitaci a akademickou dráhu, aby si těmito zkouškami nechali otevřenou skromnější, ale jistější cestu. V zimě 1885 až 1886 byl Hilbert na studijních výjezdech. Nejdříve do Lipska k F. Kleinovi, který byl totiž předtím také učitelem Hurwitze. K Hilbertovým šedesátinám mu Klein, už ochromen na kolečkovém křesle, předal jako dárek protokol Dr. Hilberta ze svého tehdejšího semináře. Z Lipska odjel na Kleinovu radu krátce do Paříže, kde dostal podněty od Ch. Hermite, které spojil s úvahami o své habilitační práci.[10] Ve stejný čas byl v Paříži i E. Study. Je politováníhodné, že si tyto dvě významné a jedinečné osobnosti kvůli rozdílnosti svých názorů tehdy ani později

[6]sv. III s. 360 nebo Math. Ann. sv. 68, (1910) s. 467.

[7]sv. III č. 1.

[8]V blahopřání, které zaslal skoro 83-letý Lindemann 7. února 1935 Hilbertovi k výročí padesáti let od získání doktorského titulu, zmiňuje, že mu Hilbert nejdřív navrhl jako svou disertaci vlastní téma, totiž zobecnění řetězových zlomků, načež mu Lindemann musel "bohužel sdělit, že toto zobecnění podal už Jacobi."

[9]sv. II, č. 4 nebo Math. Ann. sv. 30, (1887) s. 15–29.

[10]sv. II č. 9 nebo J. Math. pures appl. 4. řada sv. 4 (1888) s. 240–256.

téměř neměli co říct. V červnu 1886 se v Königsbergu habilitoval prací “Über einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete”,[11] ve které převáděl teorii vlastních hodnot a vlastních funkcí kvadratických a lineárních forem na obecné binární formy.[12] Hilbert byl tedy ve svém živlu, když na tentýž problém natrefil později znovu u integrálních rovnic.

Období soukromého docenta v Königsbergu trvalo až do roku 1892. Vyznačuje se rozsáhlou publikační činností. Oproti svým pozdějším pracím řeší Hilbert také vedlejší otázky, které leží mimo linii jeho hlavního zájmu. Později se mnohokrát dával za příklad těm soukromým docentům, kteří byli líní publikovat. Z těchto vedlejších prací podala studie o maximálním počtu reálných tahů algebraických křivek[13] podnět k jednomu z “Pařížských problémů”, díky čemuž měla tato studie velký dopad.[14] Také jeden z Hilbertových nejznámějších objevů musíme započítat mezi vedlejší práce, větu o ireducibilitě[15] s důležitou aplikací na konstrukci celočíselných rovnic se symetrickou a alternující grupou. Původ této věty lze totiž vypátrat z nečekaného zdroje: ve článku, který napsal společně s Hurwitzem,[16] se uvádí, že jistá ireducibilní ternární forma s parametry zůstane ireducibilní také pro obecné celočíselné hodnoty těchto parametrů. Z této, v daném případě bez problémů dokazatelné, poznámky stvořil Hilbert podnět pro hlubokou větu o ireducibilitě, jejíž důkaz byl hotov o $1\frac{1}{2}$ rok později. Vedle publikací hraje zásadní roli přednášková činnost. Hilbert si tehdy v pečlivě připravených přednáškách upevňoval obsáhlé a pevné vědomosti ze všech důležitých oblastí matematiky (v 1. semestru přednáší invarianty, ve 2. už vede, pravděpodobně pod Minkowského vlivem, přednášky o hydrodynamice), kterých se mu za jeho studentských let nedostalo.[17] Hilbert vůbec rád probíral nejdříve na přednáškách ty oblasti, na kterých teprve chtěl pracovat. Také výše uvedené studie o reálných tazích algebraických křivek jsou výsledkem přednáškové činnosti. Přednášky však měly žalostně malý dopad. Mezi studenty matematiky nastal v té době odliv. Dopis Minkowskému to ironizuje “11 docentů[18] na přibližně stejný počet studentů.” Zábleskem světla a známkou začínající slávy königsbergské školy byl v zimním semestru 1891 až 1892 příjezd amerického matematika, profesora Franklina z Baltimoru, “velmi bystrého a výjimečně zvídavého matematika,” kterému sám Hilbert přednášel svou první přednášku o analytických funkcích. Inspirace dostával jednak na matematickém kolokviu, na kterém se kromě docentů podíleli také studenti, mezi jinými A. Sommerfeld, kterému se říkalo “opravdová opora,” jednak, a to především, na procházkách s Hurwitzem “každé odpoledne přesně v 5 hodin k jabloni”, a když pravidelně o prázdninách přijel na návštěvu Minkowski. Své jisté místo měly tehdy i později i společenské oslavy, tancování a každoroční letní pobyty v Rauschen nebo Cranzu. Hilbert navštěvuje také sjezdy přírodovědců a patří k zakládajícím členům Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

Zatímco habilitační práce a její publikace v roce 1887 vzbuzují dojem, že se Hilbert ani tehdy ještě sám nenalezl, přináší rok 1888 díky osobní události rozhodující obrat. Během velikonočních prázdnin podnikl cestu do Erlangen a Göttingen. V Erlangen vyhledal P. Gordana, “krále invariantů,” který podal jako první početními metodami důkaz konečnosti systému invariantů binární formy. Tento problém zaujal Hilberta a už jej neopustil. Zde začíná vítězné tažení, které mi připomíná první Napoleonovo válečné tažení do Itálie. V březnu 1888 sepsal v Göttingen článek, ve kte-

[11] sv. II č. 3 nebo Math. Ann. sv. 28, (1887) s. 381–446.

[12] K tomuto úkolu se Hilbert ještě jednou vrátil v Göttingenské disertaci Marxsena (DV. č. 10). [DV. = Seznam Hilbertem vedených disertací; sv. III s. 431–433.]

[13] sv. II č. 27 nebo Math. Ann. sv. 38, (1891) s. 115–138.

[14] Viz Rohn: Math. Ann. sv. 73, (1913) s. 177–229 a práce sv. II, č. 29 nebo Gött. Nachr. 1909, s. 308–313.

[15] sv. II, č. 18 nebo J. Math. sv. 110, (1892) s. 104–129.

[16] sv. II, č. 17 nebo Acta Math. sv. 14, (1891) s. 217–224.

[17] Původ mnohých pozdějších aplikací lze vysledovat do těchto let.

[18] p. překl.: Tj. v německém prostředí vysokoškolských učitelů.

rém shrnuje a zásadně zjednodušuje dosavadní důkazy věty (P. Gordana a F. Mertense). Na mnohem vyšší úrovni však otázku zcela vyřeší v prvním článku "Zur Theorie der algebraischen Gebilde"[19], který do *Göttinger Nachrichten* zasílá dne 6. září 1888 ze svého letního pobytu v Rauschen. Základ tvoří obecná věta o konečnosti báze systému modulů, tak jednoduchá, až by se zdála triviální, a z tohoto surového materiálu ukuje větu o konečnosti systému invariantů pomocí procesu pro vytváření invariantů, který už před ním používali Gordan a Mertens. Zde se objevují poprvé osobité rysy Hilbertova způsobu práce, které lze nalézt ve všech jeho pracích: sestoupit do nejhlubších základů problému a s rozvahou se seznámit s formalismem a přisvojit si jej. To mu se skoro nevědomou samozřejmostí poskytne prostředky pro výpočet. Tento poslední bod je dobré zvláště zdůraznit právě proto, že Hilbert formalismus opakovaně odsuzuje jako nevhodný. Jednou píše Minkowskému, "že také v naší vědě je podmínkou úspěchu vždy jen rozvážný duch, ne účelový nátlak vzorců." Pro rozřešení tohoto zdánlivého sporu je nutné malé vysvětlení. – Hlavní na práci z 6. září 1888 je to, že vedle řešení problému invariantů velmi rozšířila téma na algebraické formy vůbec. Ve druhém článku "Zur Theorie der algebraischen Gebilde"[20] odvodil z konečnosti báze "charakteristickou funkci" modulového systému, která úzce souvisí s číslem rodu algebraického útvaru, ve třetím článku výsledky vytříbil ve smyslu teorie čísel.[21]

Problém invariantů se ale objevuje ještě jednou. Důkaz konečnosti systému invariantů měl mezeru, kterou kritizoval hlavně Gordan. "To není matematika," řekl, "to je teologie." Hilbert se k tomu sám vyjadřuje následujícím způsobem: "(Důkaz) neposkytuje vůbec žádný prostředek, jak konečným počtem procesů, nahlédnutelných už před výpočtem, stanovit takový systému invariantů, abychom např. horní hranici pro počet invariantů tohoto systému nebo pro jejich stupně mohli udat v koeficientech základních forem."[22] Na tomto základě vzniká práce "Über die vollen Invariantensysteme"[23], která onu mezeru zaceluje. Sem patří i nové, velmi silné pomocné prostředky: teorie algebraických číselných těles, do které se mezi tím Hilbert zcela zapracoval, a hluboko ležící rozšíření Noetherovy věty na funkce více než dvou proměnných. Celé a zlomkové invarianty formy tvoří algebraické těleso funkcí konečného stupně, jehož celé prvky jsou právě celé invarianty. Úplná teorie tohoto tělesa, k jejímuž vybudování je zásadní pojem "nulová forma," vrací horní hranici pro váhu takových celých invariantů, pomocí kterých lze všechny ostatní vyjádřit v celé i v algebraické podobě, a ze kterých lze následně pomocí nutných aritmetických procesů vyjádřit konečná báze systému invariantů. Práce končí slovy: "Tímto jsou, jak věřím, dosaženy nejdůležitější obecné cíle teorie těles funkcí, vytvořených pomocí invariantů." Je datována 29. září 1892, tedy skoro přesně čtyři roky po prvním obecném důkazu konečnosti. Současně s tím píše Hilbert Minkowskému: "Prací v *Annalen* definitivně opouštím obor invariantů a obrátím se raději k teorii čísel." Tento odklon od oboru jeho rané slávy provedl se vskutku zřídka viděnou důsledností: žádná další publikace[24] a jen tři přednášky, kterými v letech 1929 a 1930 před svým odchodem do penze ukončil svou učitelskou činnost.

Rok 1892 je tedy hraničním v Hilbertově vědecké dráze, v jeho osobním životě ale taktéž. Následkem Kroneckerovy smrti a Weierstraßova odchodu do penze bylo o velikonocích roku 1892 provedeno mnoho přesunů profesorů. V tomto procesu zís-

[19]sv. II, č. 13 nebo Gött. Nachr. 1888, s. 450–457.

[20]sv. II, č. 14 nebo Gött. Nachr. 1889, s. 25–34.

[21]sv. II, č. 15 nebo Gött. Nachr. 1889, s. 423–430.

[22]Důkaz je vzorovým příkladem "transfinitního" uvažování a silně Hilberta inspiroval k pozdějším logicko-matematickým zkoumáním.

[23]sv. II, č. 19 nebo Math. Ann. sv. 42, (1893) s. 313–373.

[24]Pozdější příležitostný text sv. II, č. 25 je výjimka, potvrzující pravidlo. [Také Math. Abh. Hermann Amandus Schwarz k jeho padesátému výročí udělení titulu doktora, s. 448–451. Berlin: Julius Springer 1914.]

kal Hurwitz místo řádného profesora na Eidgenossische Polytechnikum v Zürichu, za jeho nástupce v pozici mimořádného profesora v Königsbergu fakulta jednohlasně a jako jediného navrhla Hilberta a ihned nato ho ministerstvo do funkce jmenovalo. Po téměř 6 let byl soukromým docentem, po dobu, která pro něj byla skutečně velmi dlouhá. Ale už na podzim 1893 se udála další změna. Lindemann odešel jako nástupce L. Siegela do Mnichova, seznam kandidátů na uvolněné místo řádného profesora v Königsbergu začínal Hilbertem a pokračoval mnohem staršími Brillem, Krausem a Vossem. Rozhodnutí v Hilbertův prospěch vydal ministerský rada, pozdější vedoucí na pruském ministerstvu školství Friedrich Althoff, jenž měl obdivuhodnou znalost lidí a Hilbert se mu zamlouval. Nejen, že mu za výhodných podmínek předal místo řádného profesora, ale navíc ho vyzval, aby se vyjádřil ohledně svého nástupce na místo mimořádného profesora. Poprvé tehdy projevil Hilbert schopnost, kterou i později používal jen při nejdůležitějších příležitostech, schopnost obratné a energické akademické diplomacie. Podařilo se mu, přes některé komplikované osobní problémy, přivést o velikonocích 1894 do Königsbergu Minkowského jako mimořádného profesora. Oba zde mohli ještě rok spolupracovat, než Hilbert kolem velikonoc 1885 přesídlil do Göttingen. O tom ale informujeme později.

Ještě jednu další událost mu přinesl rok 1892. Zkraje roku se zasnoubil s Käthe Jerosch, dcerou obchodníka z Königsbergu, která se s rodinou Hilbertových přátelila, a v říjnu roku 1892 se oženil. V životopisech významných mužů se často uvádí několik milých slov i o jejich životních partnerkách. Paní Käthe Hilbertová by ale měla být oslavována ještě více, a i s trochou humoru, aby to také přátelsky přijala. Je to silná a pevná a čistá osobnost. Ve šťastném období Hilbertova domu v Göttingen byla rovnocenná svému muži, dobrotivá a kritická, vždy originální, matka a opatrovnice mnoha mladých matematiků, kteří do tohoto doširoka otevřeného domu přišli, aby si odnesli vědu, rázność a někteří moudrost od něj, zdravý rozum, životní radost a znalost lidí od ní, pocit láskyplné sounáležitosti od obou. Je empatickou, srdečnou pečovatelkou svého muže a svého syna. Mnoho Hilbertových rukopisů bylo napsáno jejím vysokým, pevným písmem. Všechny nás přesně znala, temperamentně hodnotila a uměla nás přijmout se všemi našimi zvláštnostmi. Uzavřeme tento popis následující historkou: Když se jednou na oslavě Hilbertových narozenin recitovala "Abeceda milých" – Hilbertovi tehdejší "milí", ke každému písmenu jedno křestní jméno – a básníka nenapadlo žádné na "K", řekla s jistou königsbergskou kadencí: "No, teď byste mohl také jednou myslet na mě." Načež vznikl verš: "Bohudík, že Käthe, jeho žena, necítí se znevážena."

Co se týče vědecké činnosti, patří profesorská léta v Konigsbergu a první léta v Göttingen teorii čísel. Tuto oblast otevře zjednodušením Hermitova-Lindemannova důkazu transcendence e a π (v zimě 1892 až 1893),[25] potom obrací zájem zcela k teorii číselných těles. Už dlouho, pravděpodobně od studentských let, se Hilbert cítil přitahován k této "stavbě nezměrné krásy a harmonie," ve které "je ukryto ještě mnoho cenných pokladů, které budou odměnou tomu výzkumníkovi, který bude znát jejich cenu a bude je s láskou dobývat." Přitahoval ho také protiklad mezi jednoduchými úsudky a "monstrózními důkazy". Na procházkách s Hurwitzem důkladně probírali Kroneckerovy a Dedekindovy práce. Hilbert později drasticky vyprávěl: "Jeden přednesl Kroneckerův důkaz jednoznačného rozkladu na prvočíselné ideály, druhý Dedekindův a oba jsme posoudili jako strašné." Výše jsme ukázali, že závěrečná práce o "úplných systémech invariantů" byla zcela prostoupená duchem teorie těles. Po ukončení studií začal Hilbert zprvu intenzivně studovat literaturu. V dopisech Minkowskému zmiňuje konkrétně Dedekindovu práci o diskriminantu, která je pro něj "velkým potěšením", a Kummerovy práce o zákonu reciprocity. Hilbertova

[25]sv. I, č. 1 nebo Math. Ann. sv. 43, (1893) s. 216–219.

vlastní publikace začíná přednáškou "Zwei neue Beweise für die Zerlegbarkeit der Zahlen eines Körpers in Primideale,"[26] kterou uvedl v září 1893 na mnichovském sjezdu Německé matematické společnosti. To byl první plod procházek s Hurwitzem. Druhým byl Hurwitzův o rok později publikovaný důkaz téže věty, který Hilbert upřednostnil v "Zahlbericht". Ještě na sjezdu v Mnichově se jednota matematiků shodla: "Prosíme pány Hilberta a Minkowského o zhotovení referátu o teorii čísel do dvou let," pozoruhodná známka toho, že Hilbert už byl autoritou v oboru, ve kterém teprve začal publikovat. Minkowski později odstoupil, neboť mu jeho "Geometrie der Zahlen," zabírala příliš mnoho času, a tak vyšla v *Jahresbericht* za rok 1896 namísto referátu o teorii čísel Hilbertova monumentální zpráva "Die Theorie der algebraischen Zahlkörper,"[27] jejíž úvod je datován 10. dubna 1897. Pro obsah zprávy odkazujeme na Hasseho referát.[28] Kolik vlastních výsledků a vlastních obratů zpráva obsahuje, prokazují nesčetné Hilbertovy dopisy Minkowskému, který čte korektury a svým kritickým způsobem komentuje. Tento první shrnující přehled teorie číselných těles měl nesmírný dopad na vývoj oboru. Ten chtěl Hilbert popularizovat ještě více, a na jeho pobídku tak v návaznosti na přednášky ze zimního semestru 1897–1898 napsal tehdejší soukromý docent v Göttingen J. Sommer svou známou učebnici "Vorlesungen über Zahlentheorie," ve které vysvětluje obecnou teorii na příkladu kvadratického číselného tělesa.[29]

Během práce na *Zahlbericht* sledoval po čase Hilbert své vlastní plány. Týkají se zákona reciprocity v libovolném číselném tělese a směřují navíc k úplnému probádání relativních Abelových těles nad takovým tělesem. Zde postupuje Hilbert úplně jinak než u invariantů, kde se na kýžené místo dostával ve velké rychlosti. Zde jde opatrně od speciálního k obecnému, vyzkouší nejdříve své metody na Dirichletových bikvadratických číselných tělesech,[30] potom dá definitivní podobu již známým zákonům kvadratického a Kummerova číselného tělesa[31], a nakonec důkladně probere novou teorii relativně kvadratického číselného tělesa,[32] kde se však ještě také při diskuzi jednotlivých výsledků omezí na případ základního komplexního tělesa lichého čísla třídy, se všemi konjugovanými členy. Z těchto zvláštních případů však pomocí velké intuice vyabstrahuje obecnou teorii relativních Abelových těles, kterou opírá o jím do centra postavený pojem tělesa tříd; hlavně se dostane k nejobecnějšímu zákonu reciprocity v libovolném základním tělese, který vyjádří jím vymyšleným symbolem zbytkové normy v celistvé formě.[33] On sám tento poznatek ještě obecně nedokázal, z Hasseho referátu se ale dovíme, že se jeho předpověď – sice po dlouhé práci mnoha vědců – ve všech bodech potvrdila. První úspěch podnítil ještě on sám: Pro cenu Göttingenské společností věd za rok 1901 stanovil jako úkol: "Je zapotřebí odvodit pro libovolné číselné těleso zákon reciprocity pro l-tý mocninný zbytek, kde l bude liché prvočíslo." Co do úplnosti nad jeho očekávání vyřešil úkol Ph. Furtwängler, kterého do teorie čísla uvedl Klein a který se samostatně zapracoval do Hilbertovy teorie.

Zbývá zde zmínit ještě studie, které Hilbert sám nepublikoval, o kterých ale spečlivě vedl záznamy. Jednalo se o konstrukci relativních Abelových těles transcendentními metodami, stejným způsobem, jakým lze získat všechna relativní Abelova tělesa nad racionálním číselným tělesem prostřednictvím adjunkce hodnoty exponenciální funkce e^{ipx} pro racionální hodnoty argumentu. Důkaz Kroneckerem domnělé

[26]sv. I, č. 2 nebo Jber.dtsch.Math.-Ver. sv. 3, (1894) s. 59.

[27]sv. I, č. 7 nebo Jber.dtsch.Math.-Ver. sv. 4, (1897) s. 177–546.

[28]sv. I, s. 529.

[29]Zmiňme též dva Hilbertovy články do encyklopedie IC 4a a IC 4b.

[30]sv. I, č. 5 nebo Math. Ann. sv. 45, (1894) s. 309–340.

[31]Zahlbericht 3. a 5. část.

[32]sv. I, č. 8 a 9. nebo Jber. dtsch. Math.-Ver. sv. 6 (1899) s. 88–94 a Math. Ann. sv. 51, (1899) s. 1–127.

[33]sv. I, č. 10 nebo Acta Math. sv. 26, (1902) s. 99–132.

a Hilbertem znovu[34] vyslovené věty, “že Abelovy rovnice budou v oblasti kvadratického imaginárního tělesa budou všechny použity při transformačních rovnicích eliptických funkcí se singulárním modulem,” započal R. Fueter ve své Hilbertem podnícené disertaci[35] a potom ji samostatně dokončil. Hilbertovy záznamy se zabývají případem kvadratického imaginárního nadtělesa reálného tělesa se všemi svými sdruženými členy. Tyto záznamy s povděkem použil O. Blumenthal[36] pro svou habilitaci. Provedení myšlenek pro případ reálného kvadratického základního tělesa tvoří téma disertace a habilitace E. Heckeho.[37]

Po roce 1899 už Hilbert o teorii číselných těles nepsal.[38]

Poté, co jsme probrali matematické práce raného Göttingenského období, prozkoumejme nyní jeho osobní život v těchto letech. Po odchodu Hilbertova bývalého učitele Heinricha Webera do Straßburgu získal Hilbert o velikonocích roku 1895 místo v Göttingen. Bylo to zásluhou F. Kleina, který mi o tom později řekl: “Moji kolegové mi tehdy vyčítali, že si prý chci na uvolněné místo dosadit nějakého mladého, nekonfliktního kolegu. Odpověděl jsem ale: Dosazuji si toho nejkonfliktnějšího ze všech.” Vzpomínám si ještě přesně na nezvyklý dojem, kterým na mě – ve druhém semestru – působil tento středně vysoký, čilý, zcela neprofesorsky vypadající, nevzhledně oblečený muž se širokou nazrzlou bradkou, který se tak podivně lišil od úctyhodné, ohnuté postavy Heinricha Webera a Kleinova pronikavého pohledu a celkově panovačného zjevu. Teprve jako starší student jsem se s Hilbertem setkal blíže, nejdříve na semináři o teorii funkcí, který vedl společně s Kleinem, potom v Matematické společnosti, kam mimo docentů měli na zvláštní pozvání přístup také pokročilí studenti, teprve později na přednáškách. Hilbertovy přednášky byly bez ozdob. Přednášel přísně věcně, se sklonem k opakování důležitých vět, také s mnoha přerušeními, ale obsahová hutnost a prostý elegantní výklad daly na formu zapomenout. Přinášel mnoho nového a vlastního, aniž by na to upozorňoval. Viditelně se snažil být pro všechny srozumitelný, přednášel studentům, ne sám pro sebe.[39] Jeho chování na semináři se stalo legendárním: byl velmi pozorný, obecně mírný, uznávající dobré výkony, pokud však přednášející svému tématu hrubě neporozuměl, uměl náhle ztratit trpělivost a podat kritiku jedinečným způsobem a nechtěně ostře. Aby se se svými studenty dobře poznal, vedl je jednu dobu po každém semináři ve velkých zástupech do lesa, kde probírali matematiku. Z účastníků semináře se postupně vydělovala skupina těch nejlepších, kteří se potom stali doktorandy. Nikdy nezapomenou to, čemu Hilbertovi vděčí za hloubokou inspiraci a osobní přízeň. Vytrvalý chodec s nimi každý týden dělal dlouhé vycházky do Göttingenských kopců: zde se ho mohl každý ptát, většinou ale mluvil Hilbert sám o svých pracích, kterými se právě zabýval. Tady jsme získali vhled do jeho způsobu práce a i když jsme třeba nerozuměli všemu, naučili jsme se tím více, co znamená myšlení a práce, práce jako životní radost a životní nutnost. Vnitřní spojení s mladými potřeboval po celý život. V dopise Minkowskému píše o svých “třech zázračných dětech”, studentech mojí generace, kteří přišli na univerzitu s neobvykle velkými znalostmi. U něj a u jeho paní Käthe měli mladní soukromí docenti skutečný pocit domova! Mluvili jsme s ním jako rovni s rovným, ačkoliv on byl vždy ten, kdo dával. Nejen ve svých vědeckých pracích, také na naší výuce měl činný podíl: Když jsme jednou E. Zermelo a já chtěli vést elementární matematická cvičení tehdy ještě nezvyklým způsobem, účastnili se jich pravidelně on i Minkowski, aby vznikající projekt podpořili.

[34] sv. I, s. 369 nebo Jber. dtsch. Math.-Ver. sv. 6, (1899) s. 94

[35] DV. č. 25.

[36] Math. Ann. sv. 56, (1903) s. 509–548; Jber. dtsch. Math.-Ver. sv. 13, (1904) s. 120–132.

[37] Math. Ann. sv. 71, (1912) s. 1–37 (= DV. č. 48) a sv. 74, (1913) s. 465–510.

[38] 9 Hilbertových disertací se zabývá otázkami z teorie čísla.

[39] Hilbert nechával po vzoru Kleina své asistenty vypracovat opisy většiny svých přednášek. Část je uložena v knihovně matematického ústavu v Göttingen. (viz sv. III, s. 430.)

S Kleinem měli již dlouho užší vědecký vztah. Projevoval se hlavně v tom, že Hilbert od roku 1888 posílal Kleinovi hotové rukopisy svých velkých prací, a ten je předložil Göttingenské společnosti věd pro *Göttinger Nachrichten.* Také geometrickou práci z roku 1894 (viz níže) napsal ve formě dopisu, zaslaného Felixi Kleinovi. Náhodou pak ale přibližně ve stejný čas, kdy Hilbert přesídlil do Göttingen, opustil Felix Klein svou činnost čistě matematickou a obrátil se ke svým pokusům o propojení matematiky a inženýrských věd, potom ke svým pedagogickým cílům. Následkem toho se Hilbert cítil ve svých prvních Göttingenských letech poněkud osamocen. Přibližně z oné doby pochází charakteristický výrok: "Matematika je vznešená dáma, která nežebrá u sousedů a nevnucuje se k nim, která ale ráda poskytne svou ochranu těm, kteří si to zaslouží." Později se Klein s Hilbertem sblížili více, už jen proto, že jej stále více překvapovala Hilbertova všestrannost, jeho talent pro spojení vzdálených oborů. To byla schopnost, kterou si Klein vážil nejvíce, zatímco Hilbertovi se oproti tomu líbila lehkost, s jakou Klein přijímal nové myšlenky, jak je propojoval se svými bohatými znalostmi a jak je rozšiřoval o vlastní poznámky. Dalším polem spolupráce obou byly "*Mathematische Annalen*", do jejichž hlavní redakce přibrali Hilberta v roce 1902, u 55. svazku. Od doby svých prvních publikací se k tomuto časopisu stavěl přátelsky a věrně, skoro všechny své velké, shrnující práce v něm publikoval. Jeho přítomnost v redakci zajistila časopisu spolupráci nejen Göttingenské školy v užším smyslu, ale všech oněch mnoha matematiků z domova i ze světa, kteří pracovali na jeho problémech nebo je přitáhlo jeho velké jméno. Tak časopisu zachoval a nově zajistil původně Kleinem vybudovaný mezinárodní ohlas. Také Hilbert sám zde dále nechával publikovat velkou část svých pojednání, ostatní vycházela hlavně v *Nachrichten* Göttingenské společnosti věd, jejímž členem se stal krátce po převzetí profesury v Göttingen (22. června 1895). Poté, co Klein v časopisu skončí, převezme ústřední postavení v redakci. – V obchodních a organizátorských věcech by Hilbert rád přenechal Kleinovi navyklé a osvědčené vedení. Obchodní záležitosti jej vůbec málo zajímají a drží se od nich daleko. Proto se nikdy nestal rektorem nebo děkanem. Jen v málo případech, kde viděl bezpráví nebo hrubou chybu, zakročil a prosadil svou vůli. Klein a Hilbert byli velmi rozdílní lidé, ale navzájem se cenili a věděli o tom.[40]

Nabídku pozice v Lipsku, na místo odstoupivšího S. Lieho, Hilbert v roce 1898 bez váhání odmítl.

Oba dosud Hilbertem skoro výhradně zpracované matematické obory, teorie čísel a algebra, jsou, co se týče svých základů, obzvláště jednoduché, neboť pracujeme jen v konečné nebo spočitatelně nekonečné oblasti. Obtíže nekonečna, které se předtím vyskytly při probírání kontinua, se ještě neprojevují. V roce 1898 začíná nové, až dodnes trvající, období Hilbertovy činnosti, vyznačující se prací s nekonečnem.

Na zimu 1898 až 1899 vypsal Hilbert přednášku "Elemente der Euklidischen Geometrie." To vzbudilo mezi studenty podivení, neboť ani my starší, účastníci "procházek o číselných tělesech," jsme si nikdy předtím nevšimli, že se Hilbert zabýval geometrickými otázkami: říkal nám jen o číselných tělesech. Údiv a obdiv ale podnítilo, když přednáška začala a Hilbert v ní začal rozvíjet zcela originální obsah. Její znamenité vypracování pro tisk (*autographierte Ausarbeitung*) od předčasně zemřelého H. v. Schapera, Hilbertova prvního asistenta, je ještě dnes doporučeníhodným úvodem do axiomatiky geometrie, neboť obsahuje některé motivace a příklady, které v jeho pozdější knize již z precizně vypilovaného výkladu vymizely. Tato kniha, nazvaná "Grundlagen der Geometrie", vyšla v roce 1899 jako slavnostní spis (*Festschrift*) k odhalení Göttingenského pomníku Gausse a Webera a dostalo se jí od té doby sedmi vydání, přičemž byla obohacována o přílohy a v detailech

[40]Darovaný exemplář jeho Integralgleichungen, který se nachází v mém vlastnictví, věnuje Hilbert "drahému kolegovi Felixi Kleinovi s přátelstvím."

vylepšována. Zajistila svému autorovi, který byl dosud znám jen ve svém oboru, celosvětovou slávu. Bude užitečné vystopovat důvod tohoto úspěchu a vývoj Hilbertových myšlenek.

Tento vývoj začal pravděpodobně už velmi brzy. Jistě víme jen, že silným podnětem byla přednáška "Grundlagen und Aufbau der Geometrie", kterou uvedl H. Wiener v roce 1891 na sjezdu přírodovědců v Halle.[41] V této přednášce stanovuje Wiener zcela jasně následující požadavek: Tvrzení (*Tatsachen*), která platí pro body a přímky roviny a pro operace sjednocení a průniku, musí být možné odvodit z takových základních vět (*Grundsätze*), jejichž formulace obsahují jen tyto prvky a operace. Na základě těchto základních vět tak "bude možné vybudovat abstraktní vědu, která bude nezávislá na axiomech geometrie." Jako úplný systém takovýchto základních vět uvádí Wiener Desarguovu větu a speciální větu Pascalovu (Pappovu) a udává také několik poznatků o vzájemném vztahu obou vět. Hilberta, který v předchozím semestru projektivní geometrii přednášel, zaujaly tyto úvahy natolik, že se těmto otázkám začal věnovat už na zpáteční cestě. V Berlínské čekárně diskutoval se dvěma geometry (jestli se nemýlím s A. Schoenfliesem a E. Kötterem) o axiomatice geometrie a svému pojetí dodal osobitý ostrý ráz výrokem: "Namísto "body, přímky, roviny" musíme mít pokaždé možnost říkat "stoly, židle, půllitry"." Jeho postoj, že je názorný substrát geometrických pojmů matematicky nevýznamný a smysl má přemýšlet pouze o jejich spojení prostřednictvím axiomů, byl tedy v té době už hotov. V dubnu 1893 napsal Minkowskému: "Zapracoval jsem se teď do neeukleidovské geometrie, neboť o ní zamýšlím v příštím semestru přednášet." Přednášky se uskutečnily v létě 1894. Jejich plodem je (již výše zmíněný) dopis Kleinovi "Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte",[42] ve kterém, snad vlivem Minkowského myšlenek, probírá geometrie, jejichž body vyplňují vnitřek nějakého konvexního tělesa (analogicky k vnitřku koule, který body vyplňují v Kleinově provedení Lobačevského geometrie), a ukazuje, že při definici vzdálenosti jako logaritmu dvojpoměru s nekonečně vzdálenými body platí trojúhelníková nerovnost. Historicky významné je, že na začátku této práce jsou stanoveny axiomy incidence a uspořádání a Archimédův axiom, a to v podstatě ve stejné podobě jako v "Grundlagen", axiomy uspořádání s výslovným odvoláním na M. Pasche.

"Grundlagen" vděčí za svůj nesmírný úspěch bezpochyby v prvé řadě svému filosofickému zaměření, tj. radikální abstrakci od názoru a jeho nahrazení logickými spojeními (*Verknüpfungen*). Toto filosofické zaměření je vyjádřeno už na začátku díla v Kantově mottu, které stanovuje hierarchickou posloupnost "názory, pojmy, ideje", a výslovně je pak rozvedeno v Schaperově vypracování (*Ausarbeitung*) přednášky "Elemente": "abychom přesně prozkoumali axiomy samotné, probádali jejich vzájemné vztahy, co možná nejvíce snížili jejich počet." Dnes je pro nás těžké si představit, jakou novinku toto pojetí tehdy představovalo, neboť je pro nás již tento úhel pohledu samozřejmým. Ale přečtěme si Eukleida, nebo, což je nám blíže, Pasche. Paschovým cílem je vydolovat z názoru ony "základní věty" (později říká "jádrové věty" (*Kernsätze*)), které stačí k logické výstavbě geometrie. Otázku, zdali jsou tyto "základní věty" navzájem bezesporné (*verträglich*), nikdo nepokládá: za to ručí názor. Stejně tak nikdo nezkoumá otázku vzájemné závislosti. Samozřejmě, důkazy nezávislosti prostřednictvím protipříkladů byly prováděny již dříve v diskuzích ohledně axiomu o rovnoběžkách, ale nevědomě, nebo to alespoň nebylo zdůrazněno. Bylo holou banalitou, že se jedná o logický protipříklad, který s názorem neměl nic společného. V tomto působilo Hilbertovo dílo revolucionářsky. Jeho vliv nemohu vyjádřit lépe než v rozmrzelém zvolání jednoho zdatného matematika: "Tady se nazývá shodným to, co shodné není!" O vítězství nového pojetí rozhodla velká flexibilita (*breite Anlage*), mnohostrannost studie. Důkazy odvoditelnosti nebo vzájemné

[41] Jber.dtsch.-Math.Ver. sv. 1, (1892) s. 45–48.

[42] Grundlagen der Geometrie, 7. vydání, Leipzig a Berlin: B. G. Teubner 1930, příloha I nebo Math. Ann. sv. 46, (1895) s. 91–96.

nezávislosti různých skupin vět, které se u mnoha problémů opakovaly, ukazovaly nečekané souvislosti mezi axiomy, které spolu na první pohled neměly co do činění. Pomysleme na nahraditelnost prostorových axiomů axiomy shodnosti v důkazu Desarguovy věty nebo na nahraditelnost axiomů shodnosti Archimédovým axiomem v důkazu věty Pascalovy. K tomu se přidala i ukázkově provedená aritmetizace, jejímž nejslavnějším příkladem je Desarguův počet s úsečkami.

V následujících Hilbertových geometrických publikacích se jeho zájem soustřeďuje na dvě otázky: Význam spojitosti a prostorové axiomy. Nejdříve zmíním práci,[43] ve které podle myšlenky S. Lieho buduje rovinnou geometrii pouze na vlastnosti grupy pohybů a na nejdalekosáhlejších (*weitestgehenden*) požadavcích spojitosti, takže všechny zbylé axiomy z těchto několika předpokladů vyplynou. Studie je důležitá také proto, že v ní byly poprvé významně použity metody z nauky o množinách bodů. K tomuto pojednání se v mých vzpomínkách váže malý zážitek, který je nanejvýš charakteristický pro Hilbertův způsob práce. Když jsem se ho na procházce ptal, jak pokročil ve své práci, týkající se Lieho, řekl mi napůl se smíchem: "Jsem v úzkých. Najednou vidím, že nemohu použít výsledky ze svých 'Grundlagen', protože v Lieho geometrii neexistuje překlápění [*Klappung*]."[44] Tyto trable předznamenala vynikající studie "Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenklingen Dreieck",[45] ve které nanejvýš důkladně objasňuje vztah překlápění a spojitosti.[46] Co se týče výzkumu axiomů spojitosti je důležitým členem také disertace M. Dehna "Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck"[47] Hilbert v "Grundlagen" při těchto pozorováních významně využíval také axiom o rovnoběžkách, jehož postavení ve vztahu k prostorovým axiomům bylo ještě třeba objasnit. K tomu sloužila práce "Neue Begründung der Bolyai–Lobatschefskyschen Geometrie",[48] která však ještě nepřináší závěrečný výsledek. Ten získal až o 4 roky později J. Hjelmslev.[49]

Ke studiím o axiomech geometrie je nakonec nutno připočítat i stanovení axiomů aritmetiky v přednášce "Über den Zahlbegriff,"[50] neboť Hilbert, jak známo, klade nejdříve otázku po bezespornosti geometrických axiomů a odpovídá ji tím, že ji vztáhne k zákonům čísel, jejichž bezespornost zaručuje názor.

Celkově vydržela práce na geometrii do roku 1902. Do této skupiny musejí být zařazeny také různé související studie z teorie ploch, které v oněch letech vznikly a ve kterých se Hilbert ve velkém zabýval chováním jistých tříd ploch.

Publikací "Grundlagen" začíná v Hilbertově životě období největší slávy jeho osoby. Začíná již rokem 1900 a Mezinárodním matematickým kongresem v Paříži, na kterém se Hilbert podílel jako předseda Německé společnosti matematiků a přednesl svou nanejvýš vlivnou přednášku "Mathematische Probleme".[51] Těchto 23 problémů dávalo od té doby mnoho podnětů matematikům až do nejmladší generace, mnoho problémů šlo vyřešit, některé nejsou vyřešeny ani dnes, skoro ke všem existují alespoň náznaky a částečná řešení. Menší část z nich souvisí s Hilbertovými dřívějšími pracemi, některé ze zbylých tvoří jeho vlastní program pro budoucnost: axiomatika aritmetiky a fyziky a problémy variačního počtu, kterým se právě začal věnovat. Jen velmi málo jich pochází z obecného aktuálního stavu matematiky nebo z okruhu problémů jiných vědců. Jako příklad hutného problému, pocházejícího z prchavého vnějšího podnětu, zmíním problém 13: Nemožnost řešení obecné rovnice

[43] Grundlagen, příloha IV nebo Math. Ann. sv. 56, (1903) s. 381–422.
[44] Srov. příloha IV, § 41 a 42.
[45] Proc. London Math. Soc. sv. 35, (1903) s. 50–68; příloha II (2.–6. vydání).
[46] Viz také nové zpracování tématu od A. Schmidta v příloze II 7. vydání.
[47] DV (p. překl: seznam disertací), č. 8.
[48] Grundlagen, příloha III nebo Math. Ann. sv. 57, (1903) s. 137–150.
[49] Srov. A. Schmidt ve sv. II, s. 410.
[50] Grundlagen, příloha VI nebo Jber. dtsch. Math.-Ver. sv. 8, (1900) s. 180–184.
[51] sv. III, č. 17 nebo Arch. Math. Phys. 3. řada, sv. 1, (1900) s. 44–63, 213–237.

7. řádu konečným počtem zanořených funkcí o pouhých 2 argumentech.[52] Důležitější než konkrétní problémy je pro nás celkové téma přednášky a forma zpracování. Ve volbě tématu se totiž ukazuje celý Hilbert. Velké, jasně zadané problémy jsou pro něj životní nutností. Potřebuje je k činnosti a nasměrování svého výjimečného myšlení. Proto váhavý začátek jeho vědecké činnosti, proto náhlé přerušení klimaxu studií právě na jejich vrcholu. Forma je umělecky vytříbena, jazyk povznesen, zdobí se obrazy z Hilbertovy nejmilejší činnosti v hodinách odpočinku. "Nový problém, pochází-li navíc ze světa vnějších jevů, je jako mladé proutí, které vyrůstá a nese plody, jen pokud se opatrně a podle přísných zahradnických pravidel naroubuje na starý kmen, bezpečný depozitář našeho matematického vědění." Základem je nepodmíněné, radostné přitakání velké budoucnosti matematiky: obavy, stojící proti ní, budou vyvráceny. Pomocí axiomatiky lze dosáhnout naprosté přísnosti ve všech oblastech, kterých se matematika dotýká, nejen v analýze nebo už vůbec jenom v aritmetice, přísnost nestojí v opozici proti jednoduchosti, "usilování o přísnost nás nutí k hledání jednoduchých úsudků; klestí nám také často cestu k metodám, které lze lépe rozvinout než metody staré," kromě toho má takovéto zjednodušování potom za následek, že je matematik méně ohrožen roztříštěností než jiný vědec, "že se jedinému vědci, poté co si osvojí silnější pomocné prostředky a jednodušší metody, podaří orientovat v různých vědeckých oblastech matematiky snadněji, než je tomu v jakékoliv jiné vědě." Všechny tyto výroky vyjadřují jeho vlastní pozitivní zkušenost. Nad tím stojí ale nejvyšší "přesvědčení, které jistě každý matematik sdílí, ačkoliv k němu dosud vůbec nikdo nepodal důkaz, totiž že každý konkrétní matematický problém musí být určitě možno přísně vyřešit... Toto přesvědčení je nám velkým povzbuzením do práce; slyšíme v sobě stálé volání: Tady je problém, najdi řešení. Můžeš jej najít čistým myšlením; neboť v matematice neexistuje ignorabimus!" Tento mnohokrát citovaný výrok jsme zde museli zmínit, jinak by Hilbertův obraz zůstal neúplný.

Sledujeme dále následující události v Hilbertově osobním životě. Rok 1902 přinesl událost nejvýznamnější. V létě 1902 byl Hilbert na seznamu následovníků L. Fuchse do Berlína. Dlouho se nemohl rozhodnout, potom ale vypracoval opravdu velkolepý plán, jehož úspěšné provedení mu mělo prověřit to, jakou váhu má jeho názor u správy vzdělávání. Přesvědčil vedoucího na ministerstvu Althoffa o nutnosti zřídit v Göttingen, vedle Berlína, centrum pro matematiku a navedl ho na to, že to bude vyžadovat zajištit místo pro Minkowského, který tehdy byl v Zürichu. A stalo se tak; ještě v letním semestru navštívil Minkowski poprvé Göttingen, dokázal v Matematické společnosti svou jedinečnost díky přednášce: "Über die Körper konstanter Breite,"[53] a zúčastnil se následného zasedání, na kterém vládla radost kvůli Hilbertově setrvání a Minkowského příchodu. Pro oba přátele začalo 6 let nejčilejší, vlastně nepřerušené spolupráce. Hilbert říká ve své vzpomínkové řeči na Minkowského: "telefonní hovor k domluvení schůzky nebo pár kroků přes ulici a kamínek na drnčící římsu malého rohového okna jeho pracovny – a byl tu, připraven k jakémukoliv matematickému i nematematickému podniku." Místo Kleina vedl semináře Minkowski. Společně začali Minkowski a Hilbert intenzivně a do hloubky studovat mechaniku a fyziku, k čemuž dal pravděpodobně popud Hilbert, který měl před očima cíl v axiomatizaci fyziky, zatímco Minkowski přinášel větší znalosti z oboru. Minkowski mohl sklidit také nejbohatší úrodu ze společné setby: objevení principu relativity. Když potom v roce 1904, díky šťastné volbě nového řádného profesora aplikované matematiky, přišel do Göttingen C. Runge, byly položeny pevné základy Göttingen jako tvrze matematiky. Spolupráce čtyř řádných profesur se osobně projevovala na společných procházkách "každý čtvrtek přesně ve tři hodiny," které spojovaly matema-

[52] Pozoruhodné výsledky, které tento problém přináší, obsahuje pozdější příležitostný text sv. II, č. 26 nebo Math. Ann. sv. 97, (1927) (sešít o Riemannovi) s. 243–250.

[53] Minkowski: Werke sv. II, č. XXVII.

tiku, společenství a sportovní výkon. A v čilém sdílení s matematikou se rozvíjely i příbuzné vědy, astronomie, mechanika, fyzika, zastoupené výjimečnými muži.

V tomto prostředí, velmi významném, dorostla Hilbertova škola do své největší slávy. Mezi lety 1901 až 1914 vzniká pod Hilbertovým vedením více než 40 disertací, mnoho z nich trvalé hodnoty, některé slavné; z mladých doktorů se rekrutovali Hilbertovy asistenti, z nichž jsou dnes skoro všichni velmi uznávanými akademickými učiteli a vědci. Do Göttingen navíc ve velkém počtu přijížděli již osvědčení matematici z domova i ze světa, učili se u Hilberta a přinášeli s sebou mnohé cenné podněty. Mnozí se usadili jako soukromí docenti, další soukromí docenti pocházeli z řad doktorandů. V kulatých číslech je to 15 známých mužů, kteří tehdy začali v Göttingen svou dráhu docenta. Byl to bouřlivý vědecký život, díky němuž i slabší byli buzeni ke značným výkonům: nikdo z těch, kteří jej mohli prožít, na něj nezapomněl.

A Hilbert si zvykl být slavným mužem, aniž by ztratil přirozenost. Okolo prostého domu, který vybudoval brzy po svém přesídlení do Göttingen bujela zahrada stále více a více, radost a pracoviště svého pána, s opečovávanými ovocnými stromy a zastřešenou cestou pro matematickou práci za špatného počasí. Čilého světáka Hilberta bylo vidět ve odvážném slaměném klobouku. Narozeninové oslavy se staly zábavnými společenskými událostmi. Osobní blahopřání, členství v různých učených společnostech, vědecké ceny přicházely bez ustání. Na Matematickém kongresu v Heidelbergu roku 1904 dostal Hilbert také lákavou nabídku profesorského místa, to když mu L. Königsberger nabídl nástupnictví na své místo v Heidelbergu. Po krátkém váhání ale Hilbert odmítl. Další nabídka přišla až mnohem později v prvních poválečných letech, když mu měla být zajištěna profesorská pozice v Bernu. Přes tehdy zcela očividné osobní výhody, které by toto místo skýtalo, zůstal Hilbert v Göttingen.

Roky, následující po vydání "Grundlagen der Geometrie", se vyznačují množstvím publikací současně v odlišných oblastech. Zatímco pokračoval výše nastíněným způsobem v geometrických bádáních a během toho, co vznikají "Mathematische Probleme", vystupují do popředí už také studie z oblasti analýzy a teorie funkcí. Chrlí je velkou rychlostí až do roku 1906 a pomalu ustávají až do roku 1910. Analýzu obohatily o nové, účinné metody, které, doplněny a rozšířeny díky spolupráci dalších vědců, jsou souhrnně představeny v učebnici Couranta a Hilberta "Methoden der mathematischen Physik".[54]

Zdá se mi, že také do těchto studií Hilbert od začátku ukryl axiomatický program. Formuloval to však teprve mnohem později, v přednášce, určené pro Matematický kongres v Římě roku 1908:[55] "Mimořádně žádoucí by dle mého názoru byla... studie o konvergencích, které slouží k výstavbě určité analytické disciplíny, tím způsobem, že stanovíme systém jistých, co nejjednodušších základních vět, které samy jisté konvergence vyžadují a pomocí nichž výhradně, bez přibrání jakýchkoliv nových konvergencí, půjdou dokázat všechny věty oné analytické disciplíny."

Pro lepší srozumitelnost je potřeba uvést několik slov o stavu analýzy na konci 19. století. Poté, co byla stavba teorie funkcí zajištěna v základech a nabyla ohromné výšky, se výzkum klonil spíše k okrajovým problémům, problému existence potenciálové funkce s danými okrajovými podmínkami a problému vlastního chvění elastických těles (v prvé řadě struny a membrány). Stav byl neuspokojivý. Dříve se zdálo, že Dirichletův princip bude jednotící metodou pro vyřešení všech těchto úkolů. Poté, co se ale ukázalo, že tato půda nosná není, byl člověk odkázán vytvořit pro vyřešení každé úlohy zvláštní postupy. Ty byly vytvořeny s velkým důvtipem, ještě dnes mají neblednoucí estetický půvab (C. Neumann, H. A. Schwarz, H. Poincaré),[56] ale kvůli

[54] První vydání Berlin: Julius Springer, 1924.

[55] sv. III, č. 6, s. 72 nebo Rend. Circ. Mat. Palermo sv. 27, (1909) s.[59–74] 74.

[56] Také Hilbert přispěl. Viz Charles A. Noble "Lösung der Randwertaufgabe für eine ebene Randkurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente und ohne Spitzen". Gött. Nachr. 1896. S. 191–

své různorodosti přinášejí zmatek, ačkoliv se jmenovitě Poincaré na konci devadesátých let s velkým důvtipem a hlubokým vhledem o sjednocení snažil. Chyběla právě ona “základní, jednoduchá fakta”, ze kterých by bylo možno ad hoc bez úvah o konvergencích odvodit všechny výsledky.

Hilbert je hledal nejdříve ve variačním počtu, v obyčejných variačních problémech,[57] tj. v oněch, u kterých je v přísném smyslu splněna Legendrova podmínka. Jako první se nenechal odstrašit Weierstraßovou kritikou a namísto toho přesně promyslel to, kde začínají obtíže a kde jsou zdroje chyb a nalezl způsob, jak je překonat. Nahlédl, že plochy, připuštěné ke konkurenci, musejí projít nejdříve procesem, kdy se stanou hladkými, a podal pro tento účel dvě metody. První (z roku 1899),[58] s velmi jednoduchou myšlenkou, popsal Klein názorně slovy: “Hilbert stříhá plochám vlasy.” Druhá je mnohem záludnější. Aby ukázal její sílu, používá ji ve svém slavnostním spise k 150. výročí založení Göttingenské společnosti věd (1901) pro vyřešení velmi známého klasického problému, existence Abelova integrálu 1. druhu.[59] Poté, co byla z posloupnosti aproximačních funkcí získána spojitá limitní funkce, a to pomocí “procesu výběru”, který Hilbert použil už v první metodě, byl nad ní získán šestinásobný integrál, který se potom ukázal být potenciálovou funkcí, na který se potom mohla napojit také původní funkce. Proces, kdy se stane hladkou, zde tedy proběhne stanovením střední hodnoty. Vysoká věž silných úsudků je obdivuhodná. Mnohem později (v roce 1909), když vyvstal pro teorii funkcí nový úkol, obecná uniformizace, se Hilbert vrátil ještě jednou k Dirichletově principu a pomocí jeho modifikace provedl zobrazení libovolné oblasti na hladkou rovinu, vytnutou řezem, rovnoběžným s reálnou osou.[60] Pro teorii funkcí je tedy Dirichletův princip skutečně oním základním faktem, který hledal.

Pobídnut tímto úspěchem, vedl Hilbert roku 1899 přednášky o variačním počtu. Jejich plodem byla známá věta o nezávislosti, nové, obzvláště užitečné pojetí teorie pole, které s očividnou radostí přednesl v Paříži jako poslední ze svých matematických problémů. Později (roku 1905 opět na základě přednášek)[61] ukázal, že metodu věty o nezávislosti lze beze změny použít také v případě více závislých funkcí. Ve stejném článku podává přehledný a silný důkaz metody multiplikátorů pro jednodimenzionální variační problémy za neholonomních vedlejších podmínek a vyplňuje tak dlouho přetrvávající, citelnou mezeru. Pomocí pojmu “systémy řešení pozitivně-definitního” a “vnitřně jednoznačného” charakteru formuluje nové postačující kritérium pro variační problémy s pevným okrajem, které bude mít velký dopad. Tyto závěry k obecnému variačnímu počtu, jakkoliv důležité pro upevnění a zjednodušení teorie, jsou ale jen vedlejší produkty, směr hlavního zkoumání se překvapivě stočil jinam.

Ve stejném čase totiž, zatímco se Hilbert prostřednictvím metod variačního počtu pokoušel o sjednocení analýzy, se I. Fredholm, přiblížil ke stejnému cíli cestou lineárních integrálních rovnic, přičemž navazoval na výše uvedené Poincarého práce. V zimním semestru 1900 až 1901 přinesl na Hilbertův seminář E. Holmgren, který k Hilbertovi do Göttingen přišel studovat z Upsaly, Fredholmův první článek, který vyšel o rok dříve, o integrálních rovnicích[62] a přednášel o nich. Tento den byl rozhodujícím pro dlouhé období Hilbertova života a značnou část jeho slávy. Musí zůstat

198.

[57]Mathematische Probleme, č. 19 a 20, sv. III, s. 320–322.

[58]sv. III, č. 3 nebo Jber. dtsch. Math.-Ver. sv. 8, (1900) s. 184–188. Viz také disertace Nobleho (DV. č. 16) a Hedricka (č. 14).

[59]sv. III, č. 4 nebo Math. Ann. sv. 59, (1904) s. 161–186. Tutéž metodu mohl potom použít W. Ritz ve svém známém habilitačním spise. Ritz’ Werke. Paříž 1911, s. 192–250 nebo J. Math. sv. 135, (1908) s. 1–61.

[60]sv. III, č. 7 nebo Gött. Nachr. 1909, s. 314–323. Viz také disertace Couranta (DV. sv. 47).

[61]sv. III, č. 5 nebo Math. Ann. sv. 62. (1906) s. 351

[62]Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Öfvers. Vet. Ak. Förh. Stockholm 57, s. 39–46 (10. I. 1900).

otázkou, jestli by dokázal dát variačním metodám takovou flexibilitu a sílu, aby jen ony samy mohly prostoupit a nést celou analýzu. Nepokoušel se o to, nýbrž vášnivě začal s novým zkoumáním a našel svůj cíl v jejich napojení na variační principy.

V roce 1904 jako výsledek přístupů, které od léta 1901 představoval v přednáškách a na seminářích,[63] vychází v *Göttinger Nachrichten* 1. zpráva "Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen." Pro pochopení jejího významu je opět zapotřebí historické ohlédnutí. Fredholm předtím stanovil a vyřešil problém řešení integrální rovnice 2. druhu, kde důvtipně vyložil a rozvinul důležité přístupy Poincarého. Tento výsledek stačil k vyřešení okrajové úlohy teorie potenciálu. Touto metodou však ještě nevyřešil problém vlastního kmitání a problém rozvoje libovolné funkce v řadu, ačkoliv právě z této úlohy předtím abstrahoval Poincaré ony své zmíněné přístupy v oblasti teorie potenciálu. Toto napojení provedl teprve Hilbert. Pro vyřešení integrální rovnice použil heuristickou cestu, ze které Fredholm úmyslně odbočil a která spočívala v tom, že se integrál nahradí konečným součtem, čímž přejde integrální rovnice v homogenní systém lineárních rovnic, tyto rovnice potom vyřeší metodou determinantu a v determinantu provede limitní přechod. Uviděl přitom, že homogenní rovnice, příslušející k tomuto lineárnímu systému, jsou při symetrii systému koeficientů přesně rovnice ortogonální transformace hlavních os kvadratické nebo bilineární formy. Symetrie systému koeficientů má ale týž význam jako symetrie jádra integrální rovnice (slovo "jádro", které se stalo mezinárodním, pochází od Hilberta) a ukázalo se, že právě jádra, vystupující u problémů z oblasti kmitání, mají vlastnost symetrie. Hilbert tedy rozšířil Fredholmův úkol tak, že se zaměřil na tuto bilineární formu a její transformaci hlavních os a uskutečnil na ní limitní přechod. Tento limitní přechod se podařil: kořeny sekulárních rovnic se blíží k "vlastní hodnotě" parametru, pro kterou je řešitelná homogenní integrální rovnice, koeficienty transformace konvergují k "vlastním funkcím" a rovnice transformace hlavních os udává rovnost dvojného integrálu, na jehož integrandy přejde jádro integrální rovnice, a řady nebo konečného součtu, ve kterém každý sčítanec závisí přesně na 1 vlastní hodnotě. Z tohoto pro Hilbertovu teorii základního vzorce o dvojném integrálu plyne bezprostředně existence vlastních hodnot symetrických spojitých jader. Dále z něj mohl za omezujícího předpokladu o jádře, odvodit rozvinutelnost pramenně (*quellenmässig*)[64] zobrazené funkce prostřednictvím vlastních funkcí. Tím ukázal, že lineární integrální rovnice je skutečně základem jak pro věty o existenci z teorie potenciálu, tak pro rozvoj podle vlastních funkcí. Díky důkazu jistých maximálních vlastností dvojného integrálu zůstává v platnosti také napojení na variační počet. Z našeho dnešního pohledu se nám tyto úvahy zdají trochu neohrabané. – zvláštní postavení zaujímají např. ještě vícenásobné odmocniny determinatu jmenovatele –, když je srovnáme třeba se stručností a elegancí důkazů E. Schmidta,[65] rozhodující krok byl ale učiněn a Hilbert ještě ve stejném roce ve 2. zprávě[66] mohl sklidit bohaté plody své setby díky aplikaci na Sturm-Liouvillovy a ještě obecnější rozvoje v řadu a díky důkazům existence Greenových funkcí. Ještě do větší hloubky zachází ve 3. sdělení, které vyšlo o rok později.[67] Z velkých úkolů, které Riemann požadoval od teorie funkcí, zůstával ještě jeden nevyřešen: problém existence diferenciálních rovnic s předepsanou grupou monodromie.[68] Hilbert ji vztahuje k úkolu určit ve vnitřku nebo vnějšku uzavřené křivky pokaždé dvě holomorfní funkce, na jejichž reálné a imaginární části křivky se použijí lineární substituce s dvakrát spojitě diferencovatelnými koeficienty. Řešení tohoto úkolu je vzorovým příkladem Hilbertem požadované axiomatiky li-

[63] První Hilbertova disertace o integrálních rovnicích (Kellog, č. 24 DV.) je z roku 1902.
[64] Výraz nepochází od Hilberta, pojem ale ano.
[65] DV, č. 30 a práce Math. Ann. sv. 64, (1907) s. 161–174.
[66] Gött. Nachr. 1904, s. 213–250.
[67] Gött. Nachr. 1905, s. 307–338.
[68] Mathematische Probleme č. 21.

mitních procesů: vše vyplývá bez dalších limitních pozorování z existence obyčejné Greenovy funkce pro vnitřek a vnějšek uzavřené křivky a z toho, že má vždy řešení buď homogenní nebo nehomogenní integrální rovnice.

Metoda integrálních rovnic má ale omezení, která lze ještě snadno nahlédnout, např. že nekonečná mohou být pouze jádra menšího řádu. Mnohem širší pole se otevřelo, když Hilbert ve 4. a 5. zprávě z roku 1906 prozkoumal obecně a systematicky teorii kvadratických (obecných, bilineárních) forem nekonečně mnoha proměnných, z čehož v 1. zprávě používal jen jistý speciální případ. Variabilita spočitatelně nekonečně mnoha proměnných je omezena horní hranicí pro součet jejich čtverců (Hilbertův prostor, jak byl později nazývaný). Nyní budeme pozorovat obecně "omezené" kvadratické formy nekonečně mnoha proměnných, tj. takové, jejichž všechny úseky pro všechny body Hilbertova prostoru zůstanou pod určitou konečnou hranicí. Na ně lze přenést transformaci hlavních os, ale se zásadními obměnami co se týče vlastních hodnot a vlastních funkcí. Zatímco v případě 1. sdělení tvoří soubor vlastních hodnot (dle Hilberta "spektrum", což je vtipné přenesení významu fyzikálního pojmu) nanejvýše spočetná množina reálných čísel bez nahromadění v konečnu, může pro obecnou omezenou formu spektrum vykazovat libovolné zhuštění, mohou být dokonce pokryty celé intervaly vlastních hodnot. Spektrální rozklad kvadratické formy se nevyčerpá v nekonečné řadě, ale musí být rozšířen Stieltjessovým integrálem. Z kvadratických forem nekonečně mnoha proměnných, které byly zavedeny nejdříve jako pomocný prostředek, se staly objekty s vlastními zákonitostmi o velké kráse a průhlednosti. Ještě šlo o to, vybrat z množiny omezených forem takové, jejichž spektrum bude mít základní vlastnosti spektra Fredholmova. Podařilo se ukázat, že tyto vlastnosti jsou důsledkem obzvláště přísné spojitosti kvadratické formy, "ryzí spojitosti". Pro transformaci hlavních os ryze spojitých forem také vůbec nepotřebujeme výše načrtnutou obecnou teorii, zde lze určit vlastní hodnoty pomocí jednoduchého pozorování maxima, jako v případě konečně mnoha proměnných.

Použití této teorie jsou mnohá. Zahrnují jmenovitě integrální tvar libovolných funkcí na způsob Fourierova integrálu. Mnoho žáků je spolu s dalšími provedeními teoriemi zpracovalo.[69] Hilbert sám se spokojil s tím, znovu získat věty svého 1. sdělení z teorie ryze spojitých funkcí. To se mu daří velmi přehledně prostřednictvím úplného ortogonálního systému funkcí. Věty teorie navíc nemají omezení, která byla ještě v 1. sdělení přítomná, a mají ještě širší obor platnosti, co se týče přípustných jader. Jako nové přidává Hilbert pojednání o "polární" integrální rovnici, která se od (obyčejné) "ortogonální" liší o činitel, měnící své znaménko a dovoluje, mimo jiné, řešit až dosud nepřístupné případy Sturm-Liouvilleova problému.

Hilbert si myslí, že vytvořením teorie nekonečně mnoha proměnných dal analýze natolik široký základ, že je splněn jeho požadavek jednotnosti a vzájemného vymezení úvah o konvergenci. Vývoj vědy mu dal zapravdu: Hilbertův prostor, s jistými zobecněními, je ještě dnes dominujícím pojmem. Hilbert sám přispěl jen ještě dvěma dodatky, již zmíněným ohlédnutím,[70] určeným pro kongres v Římě, ve kterém přidává ještě několik pozorování o mocninných řadách nekonečně mnoha proměnných, a už v roce 1907 koncipované, ale teprv v roce 1910 vydané 6. sdělení,[71] jehož nejdůležitější obsah tvoří analytické znovuzaložení Minkowského teorie objemů a povrchů konvexních těles. Už Hurwitz[72] se pokoušel roku 1902 chopit tohoto úkolu ve své teorii kulových funkcí, docílil ale jen částečného úspěchu. Hilbert, který vlastní mocný nástroj integrálních rovnic, nahrazuje kulové funkce obecnými funkcemi, padnoucími na každé konvexní těleso, a postupuje. Musí pak překonávat

[69] Z disertací viz Hellinger (DV. č. 41) a Weyl (č. 42). Celkově bylo u Hilberta sepsáno 24 disertací o variačním počtu a integrálních rovnicích.

[70] Sv. III, č. 6.

[71] Gött. Nachr. 1910, s. 355–417.

[72] Ann.Ec.Norm. 3.řada, sv. 19, (1902) s. 357–408.

ještě jednu zásadní obtíž, která spočívala v tom, že diferenciální výraz, definovaný na uzavřené kouli, nemůže být všude zapsán ve stejných nezávislých proměnných. Musel proto nalézt invariantní formu pro jádro integrální rovnice, příslušející tomuto diferenciálnímu výrazu. Hilbert ji udává jako “parametrix”. Tato je náhradou za Greenovu funkci: jako ona má stejné vlastnosti nespojitosti a okrajové vlastnosti (v Minkowského případě konečnost na kouli), není ale napojena na diferenciální rovnici. Minkowského nerovnost mezi objemy a povrchy se znovu odráží ve skutečnosti, že jistá integrální rovnice má kromě triviálních jenom kladné vlastní hodnoty. Minkowského jedinečné nadání natolik zapůsobilo na oba jeho königsbergské kolegy, že je vždy těšilo, zařadit do svých úvah výsledky, vyrostlé na půdě jeho výjimečného geometrického názoru.[73]

V roce 1912 sepsal svých 6 zpráv do monografie “Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen,”[74] což bylo žádoucí pro jejich kompaktní vydání bez mezer. Předcházel jí úvod, sloužící jako přehledný rozcestník, text byl vylepšen jen na několika místech, kde toho žádal pokrok ve výzkumu.

Šťastné období Hilbertovy a Minkowského spolupráce mělo skončit velkolepým závěrem: z Minkowského strany principem relativity, ze strany Hilbertovy vyřešením Waringova problému.[75] Hilbert zde, stejně jako předtím v případě důkazu konečnosti systému invariantů, mistrovsky a v překvapivě krátkém čase zvládl úkol, k němuž přední matematici dlouhá léta nenacházeli cestu.

Waring vyslovil v 18. století domněnku, že každé celé kladné číslo je zobrazitelné jako součet omezeného počtu K_n kladných celých čísel mocniny n. Problém se zdál být neřešitelný, a teprve v posledním desetiletí 19. století se různí matematici pokoušeli potvrdit Waringovu domněnku alespoň pro některé malé hodnoty exponentu. Zde je zajímavá krátká Hurwitzova poznámka,[76] datovaná 20. listopadu 1907 a vyšlá v dubnu 1908 v *Mathematische Annalen.* ve které se dokazuje následující skutečnost: “Je-li n-tá mocnina $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ identicky rovná součtu $(2n)$–tých mocnin lineárních racionálních forem proměnných x_1, x_2, x_3, x_4, a platí-li Waringova hypotéza pro n, platí také pro $2n$.” Tato věta pobídla Hilberta a udala směr jeho zkoumáním.

Pro stanovení identity Hurwitzem druhu pro libovolná n nalezl totiž takovou cestu, o které se nikomu nezdálo. Sám se o ní vyjadřuje následovně: “Důkaz. . . je veden prostřednictvím neobvyklého použití analýzy na teorii čísel. . . . Budu vycházet z jistého integrálního vzorce a z něj nakonec získám čistě analytický vztah.” Vskutku, odvozuje z obecného principu, který Hurwitz použil v roce 1897 v teorii invariantů[77] vzorec, ve kterém n-tá mocnina součtu 5 čtverců $x^2 + \cdots + x_5^2$ bude vyjádřena 25–násobným určitým integrálem přes $(t_{11}x_1 + \cdots + t_{15}x_5)^{2n}$ s parametry $t_{11}, \ldots, t_{15}, t_{21}, \ldots, t_{55}$.[78] Tento integrál se bude aproximačně nahrazovat konečným součtem a pomocí jednoduché úvahy, že existuje jenom omezený počet lineárně nezávislých forem $2n-$–tého řádu proměnných $x_1, \ldots, x_5$, se bude počet jeho členů na tento počet redukovat. Tím se podaří přeložit limitní přechod, požadovaný integrací, na koeficienty součtu a nakonec pomocí dalšího mistrovského tahu nahradit tyto koeficienty kladnými racionálními. Tím je položen základ důkazu Waringovy věty. Je proveden pomocí obdivuhodného řetězu vysoce důvtipných úsudků, jejichž výchozím bodem je vyjádření exponentu n v duálním systému. Myšlenka tohoto

[73]Jiný příklad nabízí Minkowského věta o celočíselných lieárních formách, jejíž ryze analytický důkaz podal poprvé Hilbert [publikován v Minkowského knize “Diophantische Approximationen” (1907), kap. I §6–7], a potom následně Hurwitz (Gött. Nachr. 1897, s. 139–145).

[74]Lipsko a Berlín: B. G. Teubner.

[75]Sv. I, č. 11 nebo Math. Ann. sv. 67, (1909) s. 281–300.

[76]Math. Ann. sv. 65, (1908) s. 424–427

[77]Gött. Nachr. 1897, s. 71–90

[78]V pozdějším pojetí je 25–násobný integrál nahrazen 5–násobným; zde mi ale jde o to, zdůraznit spojitost s Hurwitzovou prací.

duálního rozvoje spočívá dle Hurwitzova hezkého úsudku v přechodu z n na $2n$, v přehršli originálních výpovědí s ním souvisejících se tato téměř ztrácí.

Důkaz Waringovy věty je asi nejsilnějším svědectvím o Hilbertově výjimečném myšlení. Bojoval totiž s mistrem nejvyššího stupně, Hurwitzem, a vyhrál zbraněmi z Hurwitzovy výzbroje v momentě, kdy tento neměl žádné vyhlídky na úspěch.

Uprostřed ledna 1909 chtěl Hilbert představit svůj hotový důkaz na jím a Minkowskim vedeném společném semináři. K němu ale nedošlo: 12. ledna Minkowski zemřel. Jeho vzpomínce Hilbert pojednání zasvětil.

Minkowského smrt tvoří předěl v Hilbertově životě. Poznáme to zřetelně na zmenšení počtu jeho publikací. Chyběl přítel ve vědě, "připravený ke každému podniku", a rádce otevřeného a přitom kritického ducha, chyběly nekonečné matematické rozhovory, o kterých Hilbert ve vzpomínkové řeči o Minkowském říká: "Rádi jsme ale také vyhledávali skryté cesty a objevovali některé nové výhledy." Tyto výhledy ukazovaly Hilbertovi v dálce konkrétní problémy, ke kterým dovedl nalézt cestu. Po Minkowského smrti to byli ti mladší, jeho žáci dorostlí ke zralým vědcům, s nimiž se vydával tyto výhledy hledat. Zemřelého ale v jeho jedinečnosti nahradit nemohli.

Bezprostředně citelně Minkowski chyběl v navazujícím pracovním období, kdy se Hilbert přiklonil axiomatickému pronikání do fyziky, kterému se předtím s Minkowskim věnovali společně. U axiomatiky přírodovědné disciplíny se přirozeně nemůže jednat o natolik dalekosáhlý pojmový rozbor, jako v geometrii. Záleží jen na tom, nalézt základ, spočívající v co nejméně navzájem bezesporných větách, ze kterého je možno čistě matematicky odvodit celou nauku, tedy na tom, oprostit fyzikální hypotézy od matematického aparátu. Takto Hilbert např. buduje v mechanice Gaußův princip nejmenšího odporu nebo Bertrandův princip maximální kinetické energie po impulsu, v teorii záření Fermatův princip nejrychlejšího šíření světla. Otázkou, jak tyto principy získat, se nezabývá. Oproti tomu je zásadní studium jejich vzájemných závislostí a jejich bezespornost, přičemž slovo bezespornost nutno chápat v nejobecnějším smyslu, aby spor nenastal ani vzhledem k sousedním disciplínám (teorie záření s optikou, kinetické teorie plynů s termodynamikou). Bádání v meTchanice a fyzice z těchto hledisek tvoří obsah mnoha Hilbertových přednášek z těchto věd, které vedl již roku 1902, hlavně ale mezi lety 1910 až 1918. Části těchto přednášek by měly být publikovány. Nemají za cíl vykonat nějakou průkopnickou fyzikální práci, šlo v nich spíše o rozbor, zásadní pro upevnění toho, co již fyzici objevili, a pro uspořádání a pochopení vztahů, které jsou v tom obsaženy. Celá síla postupu se použije na aktuální fyzikální problém, budování důsledků zůstane věcí matematiky. Stalo se, že matematiku dokonce poněkud podhodnocoval. Když postup vedl na v daný čas neproveditelný problém, říkal Hilbert dosti opovržlivě: "To je čistě matematický úkol," nebo se smíchem: "Právě k tomu má fyzik velký počítací stroj přírodu." Fyzika má podle něj svůj samostatný účel, není cvičištěm matematických sil. Platí to přes některé svévolné paradoxy přednášek, např. ve vzpomínkách mnohých Hilbertovců nesmrtelná "spojená lavina," která by měla zviditelňovat unášivé síly při pohybu bodu proměnné hmotnosti. Pozůstatek čistě matematického pojetí se projevuje spíše v tom, že jasně odvozený elegantní systém vzorců, díky těmto estetickým přednostem, pro Hilberta představoval pravděpodobně správné vyjádření přírodních zákonů, zatímco A. Einstein shrnul pesimismus přírodovědce slovy: "K přírodě mám bezmeznou nedůvěru." – Nejdříve si Hilbert intenzivním studiem společně s Minkowskim osvojil a kriticky promyslel klasickou teoretickou fyziku – studiem knih, kterému se jinak vyhýbal –, potom ho ale pohltily nové velké převraty fyzikálního myšlení, relativita a kvantová mechanika. S nejčilejším zájmem sledoval jejich vývoj a sám do něj zásadně promluvil. V roce 1913 svolal "Göttingenský týden plynu," na kterém přednášeli a debatovali M. Planck, P. Debeye, W. Nernst, M. v. Smoluchowski, A. Sommerfeld, H. A. Lorentz a jiní výjimeční fyzikové o problémech z kvantové teorie a teorie plynu. V posledních předválečných letech měl také zvláštního asistenta pro fyziku, místo, které s radostí obsadil nadaným žákem A. Sommerfeldem. Ještě dnes pořádá pravidelná setkání s mladými fyziky, na kterých se probírají nejnovější fyzikální objevy. Okolo něj a díky němu se ustanovila činná škola "matematických fyziků", mezi nimi i slavní vědci, významné obohacení fyzikálního života Göttingen, který čile kvetl díky šťastným tahům v obsazování profesorských stolic, při nichž mělo Hilbertovo slovo největší váhu. Jaký význam měl pro tuto školu jeho duch, vyjadřují slova jednoho fyzika, který se stal jeho asistentem: "Onen vášnivě hledající duch, který volá po důsledném provedení myšlenky, o jejíž pravdivosti a jednoduchosti se přesvědčil, odkládá stranou nepodstatné věci a s mistrovskou jasností napíná nitky mezi vrcholy – duch, který pro vědu nadchnul generace hledajících duší."[79]

V Hilbertově fyzikálních pracích rozlišujeme 3 období. V prvním, které spadá mezi roky 1912 a 1914, buduje pomocí metod integrálních rovnic nové a přísné základy pro výsledky klasické fyziky. Pro Hilberta to bylo milé překvapení, že se dostal k problémům, ve kterých se nutně vyskytnou integrální rovnice, aniž by se k nim dostával matematickým přepisem diferenciálních rovnic. Takový případ představovala nejdříve kinetická teorie plynů.[80] Hilbert si stanoví úkol, odvodit pohyb plynu ze dvou základních předpokladů: 1. molekuly jsou všechny stejné, zcela elastické koule; 2. po srážkách se změna rozdělení rychlosti řídí Boltzmannovým-Maxwellovým vzorcem pro srážky. Pokud bez diskuze přijmeme specializaci předpokladu 1., která má dalekosáhlý dopad, má problém "klasický" charakter. Všechna pravděpodobnostní pozorování jsou oproti tomu staženа do vzorce pro srážky: jiná nenastanou. K základním předpokladům je jen nutno ještě přibrat zdánlivě samozřejmé, přesně formulované podmínky spojitosti a okrajové podmínky rozdělení rychlostí. Hilbertova matematická myšlenka spočívala jen v tom, po vzoru integrálních rovnic rozvinout rozdělovací funkci podle mocnin parametru λ. První člen tohoto rozvoje dá Maxwellův rozdělovací zákon, odvozený již Boltzmannem ze vzorce pro srážky (v každém bodě časoprostoru), následující členy dají časoprostorové zobecnění středních rychlostí, odpovídající počátečním podmínkám a silovým polím. Každý z těchto členů nyní vyhovuje – to je nejzásadnější objev – jedné integrální rovnici se symetrickým jádrem, na kterou je aplikovatelná Fredholmova teorie, a výběr mezi řešitelností homogenní a nehomogenní rovnice vede bezprostředně na makroskopické zákony pohybu plynu (hydrodynamické rovnice apod.); obzvláště se ukazuje, jak to musí být fyzikálně, aby bylo rozdělení rychlostí všude a v každý čas jednoznačně definováno pěti makroskopickými počátečními podmínkami. Tato práce, ke které později pomocí přesnějšího pozorování integrální rovnice podal zásadní rozšíření E. Hecke,[81] se stala výchozím bodem 3 disertací,[82] ze kterých dvě, vedené M. Bornem a P. Hertzem, používaly Hilbertovu metodu na teorii elektronů a elektrolýzu, jedna (Baule) dokázala poprvé systematicky v souladu s pozorováními vysvětlit nápadný výskyt teplotního skoku a smýkání zředěného plynu na pevných stěnách. – Aniž by ještě byly sepsány výsledky z kinetické teorie plynů, přinesla elementární teorie záření[83] už druhý příklad spontánního výskytu integrální rovnice ve fyzice. Jednalo se o odvození Kirchhoffových zákonů záření z následujících základních předpokladů: 1. Šíření energie cestou nejrychlejšího dopadu; 2. vyrovnání energií každé jednotlivé barvy. Bilance energie každého prostorového elementu vede potom bez jakéhokoliv dalšího předpokladu na homogenní Fredholmovu integrální

[79]P. P. Ewald: Besprechung des Courant-Hilbert. Naturwissenschaften sv. 13, (1925) s. 385. Z tohoto článku pochází sousloví "matematičtí fyzikové" ve výše použitém speciálním smyslu.

[80]Integralgleichungen kap. XXII nebo Math. Ann. sv. 72. (1912) s. 562–577.

[81]Math. Z. sv. 12, (1922) s. 274–286.

[82]Bolza (DV. č. 56), Baule (č. 58), Schellenberg (č. 59).

[83]Sv. III, č. 13 nebo Gött. Nachr. 1912, s. 773–789.

rovnici pro emisní koeficienty, které mají jen jednu jedinou vlastní funkci. Její fyzikální význam je proporcionalita mezi emisí a absorpcí, tedy Kirchhoffův základní zákon. K tomuto objevu připojuje Hilbert ještě jednu významnou diskuzi svých předpokladů (axiomů).[84] Ptá se výslovně, zda nelze nahradit předpoklad 2. méně vyžadujícím a v dřívější literatuře používaným předpokladem vyrovnání celkové energie. Ukazuje na protipříkladu, že toto možné není, a to ani když přidáme ještě axiom, že rychlost světla, emisní a absorpční koeficient závisí jen na fyzikální vlastnosti hmoty, ne na místě, tj. na poloze vzhledem k hranicím prozářeného prostoru. Oproti tomu se ukazují zbylé dva axiomy (o fyzikální povaze hustoty záření a o existenci jistých rozmanitostí mezi látkami ve schopnostech absorpce a lomu) jako rovnocenné s vyrovnáním energií všech barev. Jsou nyní tyto vzájemně rovnocenné axiomy navzájem kompatibilní? Otázka je nutná, protože tyto axiomy jsou velmi dalekosáhlé abstrakce fyzikálních pozorování. Je objasněna matematickým důkazem bezespornosti. Nakonec vedlo ještě předchozí bližší zkoumání účinku odrazu na stěnách k novému zákonu čisté optiky. Pěkným důkazem správnosti základních předpokladů bylo, že tento zákon bylo možné získat také z Maxwellových rovnic teorie světla. Tato diskuze, původně vycházející z kontroverzí s fyziky, kteří probírali teorii záření jiným způsobem, je dobrým příkladem Hilbertovy důslednosti.

Druhé období fyzikální produkce podnítil A. Einstein stanovením obecné teorie relativity (1914). Na konci roku 1915 předkládá Hilbert Göttingenské společnosti věd svou 1. zprávu o základech fyziky, před koncem roku 1916 následuje doplňující 2. zpráva. Tyto práce silně zapůsobily na téměř 70-tiletého Kleina, kterému se pomocí důvěrně známé Lieho metody infinitezimální transformace podařilo Hilbertův výpočet zkrátit. Za jejich konečnou podobu považujeme souborné vydání ve zjednodušeném tvaru z roku 1924,[85] ke kterému se Hilbert rozhodl poté, co teorii dále rozvinul H. Weyl, a mimo jiné se tak Hilbert přesvědčil o "trvalém jádru" svých úvah – Hilbertovým cílem bylo, v návaznosti na dřívější pojetí G. Mieho, které bylo založeno na speciální teorii relativity, spojit elektromagnetické pole s gravitačním polem. Používá na to Hamiltonův princip, který aplikuje na funkci gravitačního potenciálu, invariantní vůči libovolné transformaci souřadnic, a elektromagnetického čtyřvektoru. Na základě zvláštní vlastnosti variačních rovnic vycházejí vskutku 4 rovnice, které spojují elektromagnetické veličiny s gravitačními veličinami. Ale není všechno zlato co se třpytí, neboť skrytým cílem těchto zpráv byla teorie pole atomových jader a elektronů, a ta se ani Hilbertovi najít nepodařila.

Teorii atomu, tak jak se ustavila prostřednictvím kvapného rozvoje kvantové mechaniky, se Hilbert věnoval ve své poslední fyzikální práci, kterou – tehdy velmi nemocen – vydal v návaznosti na přednášku 1927 se svými oběma spolupracovníky J. v. Neumannem a L. Nordheimem.[86][87] Jedná se o uspořádaný přehled různých formalismů, užívaných v kvantové teorii, kde jsou ozřejmeny základní pojmy, ve fyzikálních detailech se ale ponechává dostatečný prostor pro to, co bude aktuálně zapotřebí. Neboť kvantová mechanika není ještě uzavřeným systémem, ale může být pokaždé postavena před nové úkoly. Proto není tato axiomatizace tak uzavřená jako ty dřívější: ještě nemůže být. Hledaný obecný rámec pro různé speciální teorie nachází Hilbert v tom, že nejdříve pomocí jistých vlastností axiomaticky stanoví pojem amplituda pravděpodobnosti mezi dvěma naměřenými veličinami, a potom vybuduje operátorový kalkul s lineárním integrálními transformacemi, ve kterém je každý pár naměřených veličin reprezentován jistou "kanonickou transformací." "Jádro" této transformace má potom vlastnosti, požadované pravděpodobnostmi,

[84] sv. III, č. 14 a 15 nebo Gött. Nachr. 1913, s. 409–416 a 1914, s. 275–298.

[85] sv. III, č. 16 nebo Math. Ann. sv. 92, (1924) s. 1–32.

[86] "Über die Grundlagen der Quantenmechanik". Math. Ann. sv. 98, (1928) s. 1–30. Neotištěno v "Gesammelte Abhandlungen".

[87] Už dříve se kvantovou teorií zabývala diz. H. Knesera (DV. č. 63), která zásadně vyjasňuje starší "postupy kvantování".

a je identifikováno s relativní amplitudou pravděpodobnosti obou veličin. Kanonická transformace je díky dalšímu požadavku reálnosti pravděpodobností stanovena natolik jednoznačně, nakolik to je při současných fyzikálních podkladech možné požadovat. Kýženým a dosaženým cílem práce je čisté oddělení fyzikálních pojmů od matematického formalismu, které Hilbert v publikacích fyziků postrádal.

Tato poslední práce spadá do období, ve kterém se Hilbert obrátil k výjimečně hlubokým a obtížným problémům, se kterými bude jeho jméno navždy spojeno. Řeč je o axiomatizaci teorie čísel. Je nutným završením jeho axiomatizační činnosti, neboť z axiomatického pohledu je u každého systému axiomů hlavní otázkou slučitelnost, bezespornost vět systému. V oboru geometrie, ve fyzice ještě více, lze bezespornost prokázat převodem na nadřazený obor. Pokud ukážeme, že se body eukleidovské geometrie se podle geometrických axiomů budou chovat stejně jako trojice reálných čísel, potom, pokud platí bezespornost aritmetiky reálných čísel, nemůže žádná aplikace axiomů vést ke sporu. U aritmetiky to ale musíme dokázat přímo, protože k číslům žádný nadřazený obor neexistuje.

Tady se objevují záludnosti nekonečna. Hilbert byl s nimi již dříve obeznámen. V mládí obdivoval Cantorovu teorii množin a Dedekindovy “Was sind und was sollen die Zahlen?” a “ze sportu” se cvičil v tom, aby se v teorii algebraických číselných těles podle Kroneckerových pravidel vyhnul nekonečným pojmům a způsobům úsudků. Bezespornost aritmetických axiomů je druhý z jeho pařížských problémů. Z náznaků způsobu důkazu zajisté nelze poznat obtíže tohoto úkolu. Situace byla ale kritická. V paradoxech teorie množin se hrozivě ukázalo, že jisté operace s nekonečnem, které měl každý za přípustné, by bez pochyby vedly ke sporům. Hilbert se o tom definitivně přesvědčil v jím samým položeném příkladu bezesporné množiny všech množin, vzniklých sjednocením a sebepokrytím (*Selbstbelegung*), který přitom neopouštěl oblast čistě matematických operací. Byla to doba, kdy Dedekind a G. Frege popírali své spisy, kdy se jiní, mezi nimi i Cantor, snažili pomocí vyloučení jistých obzvláště kompromitovaných množin zachovat uznání zbylým. Vzpomínám si na jednu vyhrocenou diskuzi na sjezdu přírodovědců v Kasselu v roce 1903 mezi Cantorem a L. Boltzmannem, kdy Boltzmann, lomcující jablkem v ruce, Cantorovi objasňoval, že je v tomto jablku obsaženo nekonečně mnoho věcí, zaprvé jablko, za druhé představa jablka, za třetí představa představy jablka, atd. Hilbert šel zatím dále vlastní cestou a přednáška, kterou měl na Mezinárodním kongresu v Heidelbergu,[88] už obsahovala základní myšlenku jeho pozdější teorie důkazu, totiž že se mají formule, vyplývající z daného systému axiomů, formálně ověřit, aby se potom ukázala jistá invariance této formy – v přednášce se pracuje s “homogenitou” – a že takové formule, které budou bezprostředně ukazatelné na základě systému axiomů a budou obsahovat spor, tuto invarianci vykazovat nebudou. V přednášce je, očividně pod Dedekindovým vlivem, zavedeno samo nekonečno jako jeden z prvních pojmů. Přednáška zůstala tehdy, podle všeho co vím, zcela nepochopena, a také při bližším zkoumání se její postupy ukazují jako nedostatečné. Hilbert se pak dlouho těmito problémy nezabýval, ačkoliv se jich mnohokrát dotknul na přednáškách o principech matematiky. Místo toho sledoval s nejčilejším zájmem množinově-teoretické úvahy E. Zermela, jeho postulát výběru a axiomatiku teorie množin. Dále se seznámil s logickým kalkulem v jeho různých podobách, neboť si již v roce 1904 uvědomil, že bez přehledné a úplné formalizace logických úsudků nemohl jít na své kýžené cestě dopředu. Jeho vlastní stanovisko k postupům z roku 1904 osvětlí snad více tento zážitek: V posledních předválečných letech se mi přihodilo, že jsem na procházce s ním a s paní Hilbertovou mluvil o jeho přednášce v Heidelbergu a s notnou otevřeností člověka, věci neznalého, jsem vyjádřil jako samozřejmost názor, že z ní přece vůbec nic nebylo. Nato se Hilbert zcela beze slova

[88]Grundlagen, příloha VII nebo Verh. Int. Math.–Kongreß Heidelberg (1904) s. 174 až 185.

odmlčel, zatímco paní Hilbertová ve formě mého vyjádření viděla očividně narážku a se smíchem útok odrazila. V roce 1917 – poté, co přestal zkoumat teorii relativity – se Hilbert vrátil s větší energií ke svým starým myšlenkám a rychle je nyní rozvíjel, přičemž při něm stál P. Bernays jako neunavitelný kritik a spolupracovník. Vývoj byl ale obzvláště poznamenán tím, že Hilbert stál od začátku v opozici proti snahám, osvobodit matematiku od sporů na základě zcela jiných principů. Tyto snahy vycházely od L. E. J. Brouwera a H. Weyla, oběma byl společný úmysl, pevně podložit jednu část matematiky, obětovat zbytek, oběma bylo společné pojetí, že jen skutečná konstruovatelnost matematického objektu zajistí její logicky bezespornou existenci. Weylova kniha "Das Kontinuum" vyšla roku 1918. Brouwer odmítal už dříve[89] použitelnost věty o vyloučení třetího u problémů, které se týkaly nekonečna a začal, také kolem roku 1918, s velkou energií budovat ty části analýzy, které ve svých základech nevyžadují použití této věty. Hilbert ale naše matematické dědictví odmítl takto obětovat. "Plodné způsoby vytváření pojmů a úsudků je nutno důkladně prozkoumat, a to všude tam, kde se nabízí i jen nejmenší vyhlídka, opečovávat je, upevňovat a připravovat k použití. Nikdo nás nemůže vyhnat z ráje, který nám stvořil Cantor."[90] Se svou teorií vystoupil na veřejnost poprvé v roce 1922, v přednáškách v Kodani a Hamburgu.[91] Jeho principem je "finitní pojetí," tj. operování s konečným počtem znaků a formulí. Nejdříve lze oddělit elementárnější část aritmetiky, skládající se z takových úvah, ve kterých vystoupí pokaždé jenom konečný počet čísel. Nejsou zde nutné žádné axiomy, obsahově můžeme skončit s jedním jediným znakem, 1. Obtíže ale nastanou ihned, když přejdeme do oblasti "všech" celých čísel, a sice budou tyto spočívat právě v pojmu "všechna" a s ním souvisejícími pojmy negace a "existuje". K tomuto přistoupí Hilbert se svou osvědčenou axiomatickou metodou, přičemž pro axiomatické pojmy (číslo jako takové, rovnost, aritmetické operace atd.), ale také pro pojmy logické (vyplývá, všechny, negace, existuje atd.) zavede znaky a stanoví mezi nimi systém formulí (axiomů). Stejně formálně vyloží schéma úsudku a úplný systém axiomů aritmetiky bude mít tehdy, když ze systému formulí půjde pomocí dosazení a podle schématu důkazu odvodit všechny formule, které budou odpovídat nám obsahově známým aritmetickým zákonům. Každé odvození, každý "důkaz", se skládá z konečného počtu pod sebou napsaných formulí. Na této skutečnosti je založena (zde se vracíme k přednášce z roku 1904) metoda důkazu bezespornosti systému axiomů. Sporná formule (lze ji vždy dát tvar $0 \neq 0$) musí totiž vyjít jako člen důkazu konečného řetězu formulí. V předloženém "důkazu" půjdeme potom nazpět a doložíme z formálního charakteru jednotlivých řádků, že sporná poslední řádka k nim nelze připojit. Přesvědčivá síla hamburské přednášky spočívala v tom, že Hilbert provedl pro zjednodušený systém axiomů úplný důkaz bezespornosti. V dalším vývoji se středem pozornosti stal axiom, který měl nahradit větu o vyloučení třetího, transfinitní axiom neboli axiom transfinitní funkce, kterou Hilbert znázornil takto: "Vezměme za A např. predikát 'být úplatný' potom bychom pod τA rozuměli určitého člověka s takovým nezlomitelným smyslem pro spravedlnost, že, když by se tento člověk ukázal jako úplatný, byli by skutečně úplatní všichni lidé."[92] Proto jsme toto τ nazvali "Aristides". V podstatě záleží na tom, dokázat bezespornou možnost zabudování tohoto axiomu do systému aritmetických axiomů.[93] Toto se také do jisté míry podařilo,[94] avšak ještě ne natolik, aby se touto cestou ukázala bezespornost aritmetiky. Z tohoto důvodu bylo v posledních letech provedeno rozšíření finitního pojetí a pomocí

[89] Srov. jeho akademickou vstupní řeč "Institutionisme en Formalisme" 1912.

[90] Grundlagen, příloha VIII, s. 274 nebo Math. Ann. sv. 95, (1926) s. 170.

[91] Sv. III, č. 10 nebo Abh. Sem. Hamb. Univ. sv. 1, (1922) s. 157–177. – Shrnuji zde pod Hamburskou přednášku části obsahu pozdějších publikací.

[92] Sv. III, č. 11 s. 183 nebo Math. Ann. sv. 88, (1923) s. 156.

[93] V pozdějších publikacích vstupuje na místě "protipříkladu" τ pozitivní charakteristický prvek ε.

[94] Diz. Ackermann (DV. č. 65).

něho se bezespornost nauky o celých číslech skutečně podařilo dokázat, odpovídající zásah v oblasti reálných čísel však ještě zbývá provést.

Hilbert si stanovil mnohem vyšší cíle. Do své teorie zařazuje Zermelův axiom výběru.[95] V poslední části své (v "Grundlagen" neotištěné) přednášky "Über das Unendliche"[96] skicuje smělou řadu úsudků, která začíná lemmatem o rozhodnutelnosti jakéhokoliv matematického problému[97] a od něj dojde až k zobrazení Cantorových transfinitních čísel pomocí typů proměnných a k řešení problému kontinua. Na vyšší, ještě nevyřešené problémy odkazuje jeho vlivná přednáška na Mezinárodním matematickém kongresu v Bologni, která má velký dopad.[98]

Ale až k vykonání těchto velkých plánů vede ještě dlouhá, náročná cesta, obzvláště proto, že dosavadní publikace mají jen formu přednášek, s mnoha náznaky. Je proto velkým posunem, že v roce 1934 vyšel I. svazek velkolepě pojatého díla Hilberta a Bernayse "Grundlagen der Mathematik."[99] Představení Hilbertova logického kalkulu vyšlo už roku 1928: Hilbert–Ackermann "Grundzüge der theoretischen Logik."[100] Otázky dosud přetrvávají, proti teorii důkazu byly vysloveny vážné námitky, obzvláště K. Gödelem. Ale Hilbert je zcela přesvědčen, že nakonec bude mít teorie důkazu úspěch, v každém případě je projevem velké originality a energie natolik, že při svém věku bude toto dílo pokládáno za jedno z jeho největších.[101]

V poválečných letech dostala jeho přednášková činnost zvláštní ráz. Zbavil se povinných přednášek a nutnosti zkoušení studentů. Mohl tak probírat skoro výhradně ty obory, které ho bezprostředně zaměstnávaly, obzvláště nejnovějším problémům z fyziky nebo ze základů matematiky. Přednášel velmi rád, během těžké nemoci nechal zařídit jako posluchárnu dokonce i jídelnu se 40 židlemi u něj doma a zde přednášel. Ani zákonem nařízený odchod do penze, který se udál roku 1930, nezměnil na jeho vyučování nic. Pokračoval v něm až do Velikonoc roku 1934. Nově se objevují přednášky výslovně popularizačního charakteru. Hlavně ale musíme zmínit přednášky "Anschauliche Geometrie," které vyšly roku 1932 jako kniha,[102] kterou vypracoval a o nejnovější stav výzkumu doplnil St. Cohn-Vossen. Hilbert zde téměř bez důkazů, častokrát pomocí demonstrace na modelu, představuje velké množství takových geometrických faktů, které uváděly čtenáře do hlubších souvislostí. Vezměme např. jako obzvláště vypovídající §32, Jedenáct vlastností na kouli. Sledujeme skoro s napětím, jaké nové vlastnosti zde poznáme a k jakým obecným problémům odkazují. My Hilbertovi studenti však vidíme přátelský smích, podobný smíchu šelmy, a slyšíme láskyplnou modulaci hlasu, jímž Hilbert u tabule pronesl: "*Jedenáct* vlastností koule... tedy *jedenáct* vlastností koule." Zásadou knihy je, že se vyhýbal jakékoliv systematice: Procházky, ne pochod k cíli. Je pozoruhodné, že se Hilbert ve svém pozdějším věku v tomto směru shodl s Kleinem, který byl natolik jiný.

Na závěr chci představit nákres Hilbertovy osobnosti, jak se mi jeví. Bez pochyb se do toho zaplete několik osobních událostí posledních 20 let. Hilbert je vyložený umělec života v dobrém slova smyslu. Mistrovsky si vždy uměl uspořádat vztahy a okolí, aby vyhovovaly jeho práci. Ve svém způsobu života je skromný, ale potřebuje jistý poklidný řád. Bylo udivující, s jakou vytrvalostí a jakým důvtipem

[95] Sv. III, č. 11 nebo Math. Ann. sv. 88, (1923) s. 151–165.

[96] Math. Ann. sv. 95, (1926) s. 180–190.

[97] Je pozoruhodné, že o takovém důkazu byla řeč už na pařížské přednášce. Viz doslova citované místo na s. 406.

[98] Grundlagen, příloha X nebo Math. Ann. sv. 102, (1930) s. 1–9.

[99] Berlin: Julius Springer.

[100] Berlin. Julius Springer.

[101] [Dodatek při korektuře září 1935.] Úplný důkaz bezespornosti teorie čísel dle Hilbertova plánu se nedávno podařil G. Gentzenovi. (Math. Ann. sv. 112)

[102] Berlin: Julius Springer.

si tyto zachoval v překotných válečných letech a v poválečném čase.[103] Je bytostným individualistou a nelze ho posuzovat měřítkem druhého. Egocentrický ale není. Je přístupný dobré práci druhého a přes své kritické hodnocení ji dovede s radostí uznávat, někdy dokonce obdivovat. Pokaždé vřele vyslechl všechny své studenty, obzvláště mladší vědce, kteří za ním přicházeli, a nezapomíná na ty, které si jednou oblíbil. Nemá bojovnou povahu; když ho ale povážlivé okolnosti donutily vystoupit, použil těžké zbraně. Ač zcela skromný ve vystupování, přesto zná svou cenu a umí na ni, když na to přijde, upozornit. Ve svých raných letech např. přesně datoval všechny své práce, a když mu jeden časopis datum vyškrtl, přestal s ním natrvalo spolupracovat. Ze své pařížské přednášky nechal zhotovit a vytisknout francouzský výtah a exempláře nechal před přednáškou rozdat do publika: smysluplný skutek, který ale tehdy ještě nebyl zvykem. Prostý je i jeho vědecký styl, bez ozdob, ale se sebevědomou vážností. Nezřídka se objevují výrazy hrdosti na pěkný nebo nečekaný výsledek. Byla mu udělována mnohá ocenění. Rád je přijímal, ale téměř nikdy o nich nemluvil.[104] Jmenujme několik ocenění z posledních let. Jeho 60. a 70. narozeniny byly velkými slavnostmi, ty první v intimním kruhu přátel a žáků, se sborníkem, do kterého přispělo 54 autorů,[105] ty druhé s veřejnými gratulacemi a průvodem studentů s pochodněmi. Ale pravý Hilbertovský ráz daly oběma teprve jemný, oduševnělý humor a nenucená zábava. Nejcennější ze všech ocenění, které dostal, bylo pro něj a pro jeho ženu čestné občanství města Königsbergu, které mu bylo uděleno roku 1930 při příležitosti tamního sjezdu přírodovědců a jeho známé přednášky “Naturerkennen und Logik”[106]. Následkem výsledků své práce, zaměřených vždy na to nejvyšší, se velmi brzy dostal do čestného, ale nebezpečného ranku starých mistrů. Proto v posledních letech tolik pozvání a cestování na přednášky v zahraničí. Uchvacující důkaz jeho mezinárodní slávy a obliby jsme zažili na kongresu v Bologni 1928, jehož úspěch zajistil rozhodným vystoupením v krizovém období. Když tehdy přicházel ke katedře se svou přednáškou, obtížně se protlačuje davem, bledý nemocí, s vyzáblou postavou starce, tu se zvedl svorný aplaus, z jehož nadšení byla jasně slyšet srdečnost a upřímnost.

Tvář starého Hilberta je neobyčejně výrazná. Vysoké, široké, dopředu zaoblené čelo, úzký obličej a malá brada jsou významnými znaky moudrého člověka. Ale široce rozpůlená, při smíchu do široka otevřená pusa poukazuje na výrazný fyzický prvek. Byl zdatný a často prováděl různá tělesná cvičení. Práce na zahradě mu byla odpočinkem, miloval tanec a plesy, kde mohl také uplatnit sobě vlastní sklon ke dvornosti. Měl neobyčejnou životní energii, a právě ona jej zachrnánila v těžkém ohrožení. Dříve pevného, jen přechodně narušovaného zdraví,[107] onemocněl v roce 1925 anémií a byl v ohrožení života. Znal svou nemoc a vědecky se o ní poučil. Ale uchovával si víru ve své vyléčení a pracoval dále, jak byl zvyklý, nakolik to bylo při tělesné únavě možné. A jeho odvaha a energie ho držely nad vodou, než se stal zázrak a preparát z jater, vyvinutý Američanem Minotem v roce 1927 – který mu díky ochotné pomoci věrných přátel posloužil jako jednomu z prvních – mu přinesl uzdravení, které jen bylo během Bolognského kongresu opět zpochybněno, kvůli podezřelému pádu na záda. Bezprostřední důsledek jeho vitality je veselá mysl, spojená s humorem, a bezmezný optimismus, obzvláště ve vědě. Na začátku jeho přednášky v Königsbergu je věta: “V posledních desetiletích jsme o přírodě získali bohatší a hlubší poznatky, než dříve za stejný počet staletí.” Končí slavným – a bohužel mnohokrát špatně pochopeným výrokem: “Musíme vědět, budeme vědět.” Bez onoho optimismu člověk Hilbertem stanovené problémy řešit nemůže.

[103] Válka si v jeho rodině žádnou oběť nevyžádala, v kruhu jeho přátel a žáků ale mnoho.
[104] Srov. místo ze vzpomínkové řeči na Minkowského. Sv. III, s. 363.
[105] Sborník se neprodává.
[106] Sv. III, č. 22 nebo Naturwissenschaften sv. 18. (1930) s. 959–963.
[107] V létě 1908, v roce před Minkowského smrtí, prodělal stav nervového vyčerpání, který ho velmi zmáhal a kterého se zbavil delším pobytem v zotavovně.

Hilbertova inteligence je úžasná. Nejen ve vědě, ale ve všech oblastech života, také v těch nejmenších, každodenních. Ač jeho úvahy také často zněly paradoxně, ve velkých otázkách se nakonec ukázaly býti pravdivými. Existuje nesčetně příhod, ve kterých vystupuje jako "zmatený profesor". Ty jsou všechny o to lepší tím, že jsou pravdivé. Politicky měl vyjasněné názory, obecně zachovával daný směr, snad kvůli svému původu z dobré königsbergské rodiny úředníka. Jeho zájem o umění a literaturu nebyl tak intenzivní. Co se týče hudby, vyvrací Hilbert často – bez důvodu – proklamovaný soud, že matematici bývají buď velmi muzikální, nebo vůbec ne: sám hudbu neprovozuje ani nechodí na koncerty, ale nejlepší zábavu mu přináší vzorně opečovávaný gramofon spolu s pokladem cenných desek. Jako vědec není uzavřen pouze v jednom oboru. V oblasti matematiky a fyziky je pro něj všestrannost samozřejmou podmínkou. Od raných časů byl však také otevřen filozofickým úvahám a v posledních letech také sám veřejně vystoupil s univerzitními i jednorázovými přednáškami o věcech obecného poznání přírody.[108] V nich mu šlo jednak o to, zdůvodnit svůj finitní pohled také ze strany přírodovědy, a jednak o to, aby upozornil na možnost uplatnění axiomatické metody také v těchto oblastech. Příkladem jemné analýzy výsledků přírodovědy je v königsbergské přednášce diskuze genetických experimentů na mouše drosophila.

V matematikovi Hilbertovi je něco těžko pochopitelného. Mnohokrát jsem s ním vedl hovory na témata z oboru. Vede je velmi rád, do ničeho se nenutí a je v nich sdílný. Pokud se týkaly jeho vlastní práce, byla řeč vždy jen o tématu, o kterém se právě chystal publikovat. Náhlost, se kterou vícerokrát přeskočil do zcela nových oborů, a vyzrálou formu hned prvních publikací v nich lze však na druhou stranu vysvětlit jen dlouhou přípravou a obeznámeností s tématem. Nemohu než se domnívat, že se tento proces děje zčásti podvědomě, v krátkých příležitostných úvahách, možná při nějaké procházce nebo práci na zahradě, že se tyto myšlenky uchovávají v neobvyklé matematické paměti – což je také jinak doložitelné –, a když se – mnohem později – začne o tento obor zajímat více, vystoupí náhle na světlo. Jisté je, že je Hilbert bez přerušení zaměstnán matematickými myšlenkami. Je to píle, kterou lze označit za nevědomou. K tomu ale přistupuje také píle ctižádostivá, sebevědomá, vpravdě kantovská.

Při analýze matematického nadání rozlišujeme mezi "talentem objevovat", který vytváří nové myšlenkové objekty, a "schopností intuice," která proniká do hlubokých souvislostí a nalézá sjednocující základy. Potom spočívá Hilbertova velikost především v nadměrné "schopnosti intuice." Všechny jeho práce obsahují příklady materiálů, sebraných zdaleka, jejichž vnitřní příbuznost a vztah k předloženému problému uměl rozpoznat jen on, a z jejichž sloučení vyrostlo jeho umělecké dílo. Co se týče oné "schopnosti objevovat", postavil bych Minkowského výše, a z klasických velikánů asi i Gauße, Galoise, Riemanna. Co do "schopnosti intuice" dosáhne z oněch velikánů na Hilberta jen málokdo.

Na matematice se cení jako ctnost, že lidi vede k důsledné snaze o pravdu. H. Scholz[109] rozvedl tuto myšlenku při objasňování platónských idejí a vykreslil typus "osobnosti intelektuála", to je člověk, ke kterému patří přesné myšlení natolik bytostně, že neustále určuje rozhodným způsobem jeho život a jednání. Nevím o nikom, koho by bylo možné označit za osobnost intelektuála takovým právem, jako Hilberta. Jistě, jak víme, je ratio jen část člověka, ale je to ona část, která činí člověka člověkem jako takovým, a dle mého názoru je Hilbert ideálem ratia, pozdviženého k moudrosti a vzdělaného k osobnosti.

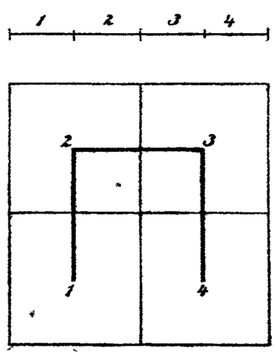
[108]Referáty Zürich 1918 [sv. III, č. 9 nebo Math. Ann. sv. 78, (1918) s. 405–415]. Königsberg 1930 (l.c.) a úvody k různým logicko-matematickým referátům.

[109]Semesterberichte aus den Seminaren Bonn und Münster Wintersemester 1933/34.

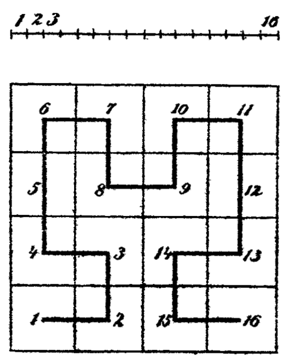
9.2 David Hilbert – Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück (1891) [Hilbertovy křivky]

O spojitém zobrazení křivky na část plochy[110]
Autor
DAVID HILBERT, Königsberg v Prusku

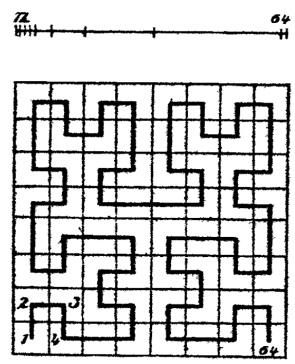
V jedněch z posledních Mathematische Annalen[111] ukázal PEANO aritmetickou cestou, jak lze body křivky spojitě zobrazit na body nějaké části plochy. Funkce, které takové zobrazení umožní, lze vytvořit přehlednějším způsobem za pomoci následujícího geometrického znázornění. Křivku, kterou máme zobrazit, například úsečku délky 1, rozdělíme nejdříve na čtyři stejné části 1, 2, 3, 4 a určitou část plochy, kterou budeme předpokládat v podobě čtverce o straně délky 1, rozdělíme dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři stejné čtverce 1, 2, 3, 4 (Obr. 1). Následně rozdělíme každou z úseček 1, 2, 3, 4 zase na čtyři stejné části, takže na původní úsečce dostaneme šestnáct úseček 1, 2, 3, . . . , 16. Současně rozdělíme každý ze čtyř čtverců 1, 2, 3, 4 zase na čtyři stejné čtverce a takto vzniklých šestnáct čtverců popíšeme následně čísly 1, 2, 3 . . . , 16, přičemž je však nutno zvolit takové pořadí



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

čtverců, že se každý následující čtverec bude jednou stranou dotýkat čtverce předcházejícího (Obr. 2). Uvážíme-li pokračování tohoto postupu – Obr. 3 znázorňuje další krok –. lze snadno nahlédnout, jak lze každému danému bodu úsečky přiřadit jeden jediný konkrétní bod čtverce. Je pouze nutno určit ty částečné úsečky na původní úsečce, na které daný bod připadá.[112] Čtverce, označené týmiž čísly, leží nutně uvnitř sebe[113] a svírají v limitě určitý konkrétní bod oné původní části plochy.[114] Tento bod bude je oním bodem, přiřazeným bodu danému. *Takto nalezené zobrazení*

[110]Srov. se zprávou na totéž téma ve Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. Brémy 1890.
[111]Svazek 36, str. 157.
[112]p. překl.: Doslovný překlad. Plurál je použit ve významu zanořených částečných úseček napříč iteracemi, tzn. jedné určité částečné úsečky pro jednu určitou iteraci a nikoliv např. dvou sousedních úseček z téže iterace pro bod přesně mezi nimi.
[113]p. překl.: Doslovný překlad, míněno týmiž čísly jako zmíněné částečné úsečky, tj. v určité iteraci jeden čtverec, označený tímtéž číslem jako jedna částečná úsečka v téže iterace, nikoliv např. případ dvou zanořených čtverců z po sobě následujících iterací, ty stejné číslo až na výjiímky (viz zanořené čtverce, označené 1) mít nebudou. Ve vztahu k předchozí poznámce by pak zamítnutý případ sousedních úseček z téže iterace implikoval na ploše v téže iteraci sousední čtverce, a ty by tedy, oproti Hilbertovu vyjádření, uvnitř sebe neležely.
[114]p. překl.: Německé *schliessen in der Grenze . . . ein* bychom na první pohled přeložili jednoduše tak, že zanořené čtverce budou určitý bod svírat 've své hranici'. Oba překlady by v tomto případě

je jednoznačné a spojité. Opačným směrem odpovídají každému bodu čtverce jeden, dva nebo čtyři body křivky. Pozoruhodné je navíc, že lze vhodnou obměnou oněch částí křivky ve čtverci nalézt *jednoznačné a spojité zobrazení, jehož inverzní zobrazení bude všude nejvýše* TROJ*značné*. Výše nalezené zobrazovací funkce jsou navíc jednoduchými příklady funkcí všude spojitých a nikde diferencovatelných. Mechanický význam diskutovaného zobrazení je následující: *Nějaký konkrétní bod se může spojitě pohybovat takovým způsobem, že v konečném čase projde všemi body určité části plochy.* Zároveň lze — opět vhodnou obměnou oněch částí křivky ve čtverci — také zajistit, *aby v nekonečně mnoha všude hustě rozmístěných bodech čtverce existoval nějaký určitý směr pohybu jak dopředu, tak dozadu.*

Co se týče analytického vyjádření zobrazovacích funkcí, plyne ihned z jeho spojitosti podle obecné věty, dokázané K. WEIERSTRASSEM[115], že tyto funkce lze rozvinout do nekonečných, na celém intervalu absolutně a stejnoměrně konvergujících řad s krokem délky celé racionální funkce.

KÖNIGSBERG V PRUSKU, 4. března 1891.

dávaly smysl – v námi zvoleném prvním překladu se nabízí, že by nekonečně mnoho zanořených čtverců svíralo určitý bod ve svém středu. V uvedeném druhém případě by mohly určitý bod původní části plochy (ten, korespondující s bodem Hilbertovy křivky v iteraci o jedničku větší) sevřít na své společné hranici např. jen dva zanořené čtverce ve dvou po sobě následujících iteracích Hilbertovy křivky. V tomto případě však, i kdybychom uvažovali dva zanořené čtverce nekonečně malé, by nebyl proveden limitní přechod a každé dva takové čtverce by na naší původní části plochy sevřely jen spočetně mnoho bodů. Šlo by o hustou množinu bodů a nikoliv souvislou. V tomto smyslu by navíc Němec použil spíše výraz *an der Grenze*, 'na hranici' a nikoliv 'v hranici'.

[115]Srov. Sitzungberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 9. července 1885.

9.3 Hermann Minkowski – Über Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind (1893) [přednáška z kongresu v Chicagu]

Hermann Minkowski – O vlastnostech celých čísel, zjištěných na základě geometrického znázornění v prostoru [Minkowski 1893].[116]

V teorii čísel, stejně jako v každé jiné oblasti analýzy, předchází často nějakému objevu geometrické pozorování, zatímco nakonec jsou sděleny třeba již jen analytické důkazy. Už proto bych nebyl schopen vyčerpat své téma; to také není mým cílem. Chci zde pojednat jen o té geometrické představě, která má nejbližší vztah k celým číslům, o *číselné mřížce*. Pod tento pojem spadají ty body x, y, z (předpokládáme v prostoru rovnoběžné souřadnice x, y, z), pro které x i y i z jsou celá čísla; pro větší názornost si pod x, y, z představme obyčejné pravoúhlé souřadnice.

Objekt, který vypadá jako výřez z číselné mřížky, je např. ten, který se udává při důkazu pravidla pro násobení $(ab)c = a(bc)$. V dalším bych rád zmínil důležité vztahy na co největším celku, které dostal Dirichlet (Crelles Journal, sv. 47, Über ein die Division betreffendes Problem; Werke, sv. II) geometrickým způsobem. Chci se zde však omezit na ty otázky, u kterých vstoupí do hry pojem nekonečna, kdy budeme totiž pozorovat celou mřížku, nejen výřezy z ní. (Následující část v zásadě opakuje leccos z mé knihy "Geometrie der Zahlen" (1896, u B. G. Teubnera), přičemž podotýkám, že v ní se na systémy *tří* celých čísel neomezuji.)

I. Nejdůležitějším pojmem, který se váže k číselné mřížce, je pojem *objemu* nějakého tělesa; tento pojem pak tvoří základ pro pojem trojného integrálu. Každý bod číselné mřížky se vezme jako střed krychle, která má stěny rovnoběžné se souřadnicovými rovinami a která má hranu délky 1; ke krychli nechť vždy patří také její hranice. Tak obdržíme síť krychlí N, která vyplní prostor bez mezer a jejíž jednotlivé krychle budou ve svých vnitřních bodech navzájem různé. Nechť je nyní K taková libovolná bodová množina, která se celá rozdělí do konečného počtu krychlí z N. Prodloužíme tuto množinu K od libovolného počátečního bodu p v prostoru do všech směrů v libovolném poměru $\Omega : 1$. Z K tak vznikne K_Ω^p. Potom nechť a_Ω^p je počet všech *těch* krychlí z N, v kterých bude každý jednotlivý bod *vnitřním* bodem K_Ω^p, a nechť je u_Ω^p počet krychlí z N, které obsahují *alespoň jeden* bod z K_Ω^p. Potom, podle toho, co ukázal C. Jordan (Journal de Mathématiques, sv. 4, č. 8, 1892, s. 77), oba výrazy $\Omega^{-3} \cdot a_\Omega^p$ a $\Omega^{-3} \cdot u_\Omega^p$ konvergují pro do nekonečna rostoucí Ω, nezávisle na p, k určité limitě A a U, *vnitřnímu* a *vnějšímu* objemu K. O *objemu* K hovoříme *pouze tehdy*, pokud $A = U$.

II. Hlubší vlastnosti číselné mřížky nyní souvisejí se zobecněním pojmu *délky úsečky*, u kterého zůstane zachována jen věta, že v trojúhelníku není nikdy součet dvou stran menší než strana třetí.

Uvažujme funkci $S(ab)$ dvou libovolně proměnných bodů a a b zprvu jen s následujícími vlastnostmi: (1) $S(ab)$ má být vždy kladná, když bude b různý od a, a nulová, pokud budou b a a identické; (2) pokud budou a, b, c, d čtyři body, z nichž b bude různé od a, a bude mezi nimi vztah $d - c = t(b - a)$ s kladným t, potom má být vždy $S(cd) = tS(ab)$; zmíněný vztah lze pojmout ve smyslu barycentrického kalkulu a značí pak, že cd a ab jsou úsečky stejného směru s délkami (v klasickém smyslu) v poměru $t : 1$. Na rozdíl od obyčejné délky nazveme $S(ab)$ *radiální vzdálenost* [*Strahldistanz*].

[116] Mathematical Papers read at the international Mathematical Congress held in connection with the world's Columbian Exposition Chicago, 1893, pp. 201–207, a francouzský překlad R. Laugela v Nouvelles Annales de Mathématiques, 3^e série, č. XV, 1896 pod názvem: Sur les propriétés des nombres eniters qui sont dérivées de l'intuition de l'espace.

Nechť o je nulový bod; zřejmě budou dány všechny hodnoty $S(ab)$ a stejně tak bude dána množina bodů u, pro kterou bude $S(ou) \leq 1$; tato bodová množina se nazývá *základní těleso* radiálních vzdáleností [*Eichkörper* der Strahldistanzen], k němuž bude muset patřit v každém směru od o nějaká úsečka konečné, nenulové délky, vycházející z o.

Nechť je nyní pro libovolné tři body a, b, c vždy

$$S(ac) \leq S(ab) + S(bc), \tag{3}$$

potom se radiální vzdálenosti nazývají *souhlasné* [*einhellig*]. Jejich základní těleso má dále tu vlastnost, že pro každé dva v něm ležící body u, v patří tomuto tělesu celá úsečka uv a naopak je každé těleso, nikde konkávní, s nulovým bodem uvnitř něj základní těleso pro zcela určité souhlasné radiální vzdálenosti.

Symbolem $E(ab)$ označíme polovinu hrany takové krychle, jež má stěny rovnoběžné se souřadnicovými rovinami, jejímž středem je bod a a na jejímž povrchu se nachází bod b. Takové funkce $E(ab)$ tedy představují nejjednodušší souhlasná $S(ab)$. Úplné analytické řešení podmínek (1), (2), (3) jsem uvedl v první kapitole své "Geometrie der Zahlen". Ukazuje se především, že funkce $S(ab)$ souřadnic a a b je dle nerovnice (3) *spojitá*, dále že existují dvě kladná čísla g a G taková, že pro všechna a a b platí

$$gE(ab) \leq S(ab) \leq GE(ab),$$

a konečně, že základní těleso zabírá určitý objem J. Význam čísel g a G je zřejmě takový, že krychle $E(ou) \leq \frac{1}{G}$ je celá obsažena v základním tělese, a to je zase celé obsaženo v krychli $E(ou) \leq \frac{1}{g}$.

Ty $S(ab)$, pro které je vždy

$$S(ba) = S(ab), \tag{4}$$

nazveme *oboustranné*. To nastává právě tehdy, když má základní těleso nulový bod ve svém středu.

III. V číselné mřížce existují zřejmě body r, pro které $E(or) \leq \frac{G}{g}$. Za předpokladu nějaké *souhlasné* $S(ab)$ bude pro tyto mřížkové body r následně $S(or) \leq G$. Tato poslední podmínka může platit pouze pro takové body r, pro které $E(or) \leq \dfrac{G}{g}$, a této podmínce opět jistě vyhovuje jen konečný počet mřížkových bodů. Z *těchto* mřížkových bodů musí být potom zjištěna *nejmenší* radiální vzdálenost M, která existuje z bodu o do všech ostatních mřížkových bodů, a která je pokaždé $\leq G$. Pokud potom pro libovolný první mřížkový bod a zkonstruujeme těleso $S(au) \leq \frac{1}{2}M$, pro libovolný další mřížkový bod c těleso $S(uc) \leq \frac{1}{2}M$, jsou tato tělesa dle nerovnice (3) zcela rozdílná ve svých vnitřních bodech. Pokud předpokládáme, že radiální vzdálenosti jsou navíc *oboustranné*, je dané těleso identické s $S(cu) \leq \frac{1}{2}M$, a různá tělesa $S(au) \leq \frac{1}{2}M$ pro různé mřížkové body se tak sobě nanejvýš dotýkají na svých hranicích.

Nechť je nyní Ω nějaké kladné a sudé celé číslo, a zkonstruujme zde popsaná tělesa pro všech $(\Omega + 1)^3$ mřížkových bodů

$$x, y, z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{\Omega}{2},$$

obsažených v krychli $E(ou) \leq \dfrac{\Omega}{2}$. Z výrazu $S(au) \leq \frac{1}{2}M \leq \frac{1}{2}G$ plyne $E(au) \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{G}{g}$, a všechna tato tělesa budou tedy obsažena v krychli $E(ou) \leq \dfrac{1}{2}\left(\Omega + \dfrac{G}{g}\right)$, která má objem $\left(\Omega + \dfrac{G}{g}\right)^3$. Protože leží všechna mimo sebe a každé má objem $\left(\dfrac{M}{2}\right)^3 J$, plyne z toho nerovnice

$$\left(\Omega + \frac{G}{g}\right)^3 \geq (\Omega + 1)^3 \left(\frac{M}{2}\right)^3 J;$$

zde jsou M a J určitá čísla a pro Ω můžeme volit libovolné hodnoty, dostaneme tedy:

$$1 \geq \left(\frac{M}{2}\right)^3 J, \tag{5}$$

musí tedy existovat alespoň jeden takový mřížkový bod q různý od o, pro který platí $S(oq) \leq \dfrac{2}{\sqrt[3]{J}}$.

Takto získaná věta o nikde konkávních tělesech se středním bodem patří dle mého názoru k nejplodnějším v celé teorii čísel. Nalezl jsem ji, ovlivněn studiem článků Dirichleta a Hermita o kvadratických formách (Crelles Journal, sv. 40, s. 209 a s. 261; Dirichletovy práce, sv. II, s. 27; Oeuvres d'Hermite, č. I, s. 100), nejprve pro elipsoidy (Crelles Journal, sv. 107, s. 291; tyto sebrané spisy, sv. 1, s. 255); ještě zajímavější jsou však důsledky, které má tato věta pro lineární formy a ze kterých nyní některé zdůrazním.

V nerovnici (5) vystupuje rovnítko právě tehdy, když tělesa $S(au) \leq \frac{1}{2}M$ okolo jednotlivých mřížkových bodů a vyplňují prostor *bez mezer*. Toho lze dosáhnout jen, když je celá hranice základního tělesa tvořena konečným počtem rovin, a to nejvýše $2\left(2^3 - 1\right)$ rovinami; každá rovinná stěna tělesa $S(au) \leq M$ musí totiž potom mimo svůj okraj obsahovat ještě alespoň jeden mřížkový bod x, y, z, a pro takové mřížkové body na dvou podle o nesymetrických stěnách nedávají x, y, z stejné zbytky modulo 2, ani nemůže být pro žádný tento bod $x, y, z \equiv 0, 0, 0 \pmod 2$. V (5) nevystoupí rovnítko nikdy např. pro osmistěn.

IV. Nechť jsou ξ, η, ζ tři lineární formy proměnných x, y, z s determinantem D různým od nuly, nechť jsou buď všechny tři reálné, nebo ξ reálná a η, ζ dvě formy se sdruženými imaginárními koeficienty; nechť je dále p libovolné reálné číslo. Těleso K_p definované jako

$$\left(\frac{|\xi|^p + |\eta|^p + |\zeta|^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1$$

představuje potom, pokud je $p \geq 1$, těleso, nikde konkávní; pro objem J_p tohoto tělesa nalezneme:

$$J_p = \frac{2^3}{\lambda_p^3 |D|}, \lambda_p^3 = \frac{3^{-\frac{3}{p}}\Gamma\left(1 + \frac{3}{p}\right)}{\left\{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right\}^3} \text{ neboli } = \frac{2}{\pi}\frac{3^{-\frac{3}{p}}\Gamma\left(1 + \frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)2^{-\frac{2}{p}}\Gamma\left(1 + \frac{2}{p}\right)};$$

ukazuje se dále, že pro těleso K_p, pokud je p konečné, nepřipadá v (5) rovnítko v úvahu. Získáme tak větu:

Nechť je $p \geq 1$, potom existují vždy nějaká celá čísla x, y, z, která nejsou všechna nulová a pro která platí

$$\left(\frac{|\xi|^p + |\eta|^p + |\zeta|^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} < \lambda_p |D|^{\frac{1}{3}}.$$

Podržíme-li pevná x, y, z, je výraz na levé straně rovnice 6) klesající pro všechny hodnoty $p \geq 0$ (dokonce pro všechna p, když není žádné z čísel $|\xi|, |\eta|, |\zeta|$) nulové), pokud právě není $|\xi| = |\eta| = |\zeta|$, neboť v tom případě by tento výraz nezávisel na p. Potom bude každé těleso K_p obsaženo ve všech ostatních tělesech s menším p a funkce $\dfrac{1}{J_p}$ a λ_p proměnné p budou tedy rostoucí; pro $p = \infty$ konverguje λ_p^3 k 1, resp. k $\dfrac{2}{\pi}$. Pro $p = \infty$ přejde K_p do rovnoběžnostěnu $-1 \le \xi \le 1, -1 \le \eta \le 1, -1 \le \zeta \le 1$ nebo do eliptického válce $-1 \le \xi \le 1, \eta^2+\zeta^2 \le 1$; K_1 oproti tomu představuje osmistěn nebo dvojkužel. Nakonec bude z levé funkce v rovnici 6) pro $p = 0$ geometrický střed $\sqrt[3]{|\xi\eta\zeta|}$, a tak můžeme přidat větu:

Vždy existují celá čísla x, y, z, která nejsou všechna nulová a pro která platí $|\xi\eta\zeta| < \lambda_1^3 |D|$, tím spíš $< |D|$.

Tyto a jim analogické věty pro n lineárních forem s n proměnnými lze užít především v teorii algebraických čísel, při důkazu Dirichletových vět o komplexních jednotkách, konečného počtu ideálních tříd a předně umožnily důležitý důkaz, že v diskriminantu každého algebraického číselného tělesa vystupuje vždy alespoň jedno prvočíslo.

V. Nechť a a b jsou nějaká dvě reálná čísla a t libovolné číslo > 1. Použití vět z III. na rovnoběžnostěn

$$-1 \le x - az \le 1, \quad -1 \le y - bz \le 1, \quad -1 \le \frac{z}{t} \le 1$$

vede k tomu, že vždy budou existovat celá čísla x, y, z, pro která

$$0 < z \le t^{\frac{2}{3}}, \quad |x - az| < \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \quad |y - bz| < \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}.$$

Tento výsledek, ovšem jen pro případ celočíselných hodnot t, dokázal už Kronecker (Berichte der Berliner Akademie, 1884, s. 1073; Werke, sv. III, 1, s. 36) zdánlivě triviálním, přesto ale velmi úspěšným principem (viz Dirichlet, *Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen*; Werke, sv. I, s. 636), že když máme menší počet oborů než počet systémů čísel, potom alespoň dva z těchto systémů čísel spadají do jednoho a téhož oboru; toto je jeden z mála případů, kdy už tento jednodušší princip vede ke zcela stejným důsledkům, jako aritmetická věta z části III.

Pozorování osmistěnu

$$|x - az| + \left|\frac{z}{t}\right| \le 1, \quad |y - bz| + \left|\frac{z}{t}\right| \le 1$$

(za předpokladu $t \ge 3$), ukazuje existenci celých čísel x, y, z, pro která budou při $z > 0$ oba výrazy na levé straně $< \left(\dfrac{3}{t}\right)^{\frac{1}{3}}$, a pro tato čísla pak lze ještě najít:

$$\left|\frac{x}{z} - a\right| < \frac{2}{3z^{\frac{3}{2}}}, \quad \left|\frac{y}{z} - b\right| < \frac{2}{3z^{\frac{3}{2}}}.$$

Tyto věty představují způsob, jak úspěšně zobecnit výsledky z teorie řetězových zlomků.

VI. Uvažujme libovolnou souhlasnou a oboustrannou $S(ab)$, potom bude 2^3 nejmenší horní hranice pro $M^3 J$. Omezíme-li se na takové $S(ab)$, jejichž základní těleso vznikne po všech možných lineárních transformacích z *jednoho* daného tělesa, lze v této omezené třídě funkcí vždy nalézt takové, pro které

$$M^3 J > 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

Důkaz této věty vyžaduje aritmetickou teorii spojitých grup všech lineárních transformací.

Nakonec musíme zmínit, že nerovnice $M^3 J \le 2^3$ vede pro těleso, nikde konkávní, se středem ještě na jedno důležité zobecnění, kterému se však zde již nebudu věnovat.

Bonn, červen 1893.

Kapitola 10

Anotace

10.1 Summary

This thesis presents the first Czech translation of David Hilbert's book *Grundlagen der Geometrie* (1899). In our succeeding text we first present the book from a historical perspective, and we introduce Hilbert's work together with the work of his colleagues, mainly at Göttingen University. We introduce what preceded Hilbert's book in the field of geometry. We also briefly discuss Hilbert's influence on other disciplines.

The most important paragraphs of our original contribution to research on Hilbert are:

1. Peano and Hilbert curves:
   In his article on the space-filling curve, Hilbert presents for the first time his positive view on Cantor's set theory that will be his motivation long afterwards in the axiomatization of real numbers and in the construction of his program in logic. We conduct a mathematical-historical survey of the connections between this article and the articles of Georg Cantor. However, Hilbert curves did not have a direct influence on *Grundlagen*.

2. Axioms of connection and the consistency of non-continuous geometry:
   We strive to clarify Hilbert's ideas from the first two chapters so that they can also be accessible to the reader without existing knowledge in the axiomatics of geometry. We stress Hilbert's consistency proof of the geometry commonly known as Euclidean one but more importantly of its non-continuous case. Our hypothesis is based on the idea that this was Hilbert's main reason for writing his book.

3. Independence of the triangle congruence axiom III 5:
   We present the topic in its historical framework. On the basis of Blumenthal's hypothesis, we followed Hermann Minkowski's influence on the other Hilbert's proof of the proposition of the straight line as the shortest connection line between two points. Using this, we support our original hypothesis of Minkowski's direct influence on this particular independence proof from *Grundlagen*. The difficulties of this step bring the fact that the influence was not in any way straightforward, and not even connected to any particular article.

10.2 Zusammenfassung

Diese Dissertation beinhaltet die erste tschechische Übertsetzung von David Hilberts Buch *Grundlagen der Geometrie* (1899). In unserem beigelegten Text präsentieren wir zuerst die historische Zusammenhänge betreffs des Buchs und stellen die Publikationen von Hilbert und von seinen Kollegen, die hauptsächlich an der Universität Göttingen wirkten, vor. Wir schreiben, was im Fachbereich der Geometrie vor Hilberts Buch passiert ist, und erörtern auch kurz den Einfluss von Hilbert auf die andere Fachbereiche.

Die wichtigste Parahgraphen von unseren originellen Leistungen in der Hilbertsforschung sind:

1. Peano- und Hilbertskurve:
   Hilbert präsentiert in seinem Artikel von einer raumerfüllenden Kurve seine positive Einstellung zu der Punktmengentheorie von Georg Cantor und diese wird Hilbert zu seiner Motivation lang danach in der Axiomatisierung der reellen Zahlen und bei der Konstruktion seines Programms für Logik. Wir geben eine historische Zusammenfassung von der Zusammenhänge zwischen diesem Artikel und den Artikeln von Georg Cantor an. Es zeigt sich aber, dass die Hilbertskurve keinen direkten Einfluss auf die *Grundlagen* gehabt hat.

2. Axiome der Stetigkeit und Wiederspruchsfreiheit der nicht-stetigen Geometrie:
   Wir bemühen uns, die Ideen von den ersten zweier Kapitel des Hilberts Buchs so zu erklären, damit die auch für die Leser ohne besondere Vorkentnisse in der Axiomatisierung der Geometrie lesbar werden. Wir geben den Nachdruck auf den Hilberts Wiederspruchsfreiheitsbeweis der Geometrie, die allgemein als euklidische bezeichtet wird, aber noch mehr auf den von ihrer nicht-stetigen Variante. Unsere Vermutung ist auf der Idee begrúndet, dass das war Hilberts Hauptzweck fürs Schreiben seines Buches.

3. Unabhängigkeit der Dreieckkongruenzaxioms III 5:
   Wir präsentieren das Thema im historishen Rahmen. Aufgrund der Blumenthals Vermutung haben wir den Einfluss von Hermann Minkowski verfolgt, und zwar konkret auf einen anderen Hilberts Artikel über eine Gerade als die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Mithilfe dieser Information begründen wir unseren originellen Vermutung von Minkowskis direkten Einfluss im konkreten Unabhängigkeitsbeweis des Dreieckkongruenzaxioms. Den Gefahr von diesem Schritt bringt die Tatsache, dass dieser Einfluss nicht unbedingt in einer Zeit auf einen bestimmten Artikel gerichtet wurde, sondern eine Zeit lang dauerte.

Archiválie

- Bibliothek der Julius-Maximilians Universität Würzburg:

  Nachlass Ferdinand Lindemann, Protokollbuch Colloquium 1884–1887.

- Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen:

  Cod. Ms. D. Hilbert 30 Blumenthal, Otto an David Hilbert ,

  Cod. Ms. D. Hilbert 67 Dehn, Max an David Hilbert,

  Cod. Ms. D. Hilbert 124 Haar, Alfred an David Hilbert,

  Cod. Ms. D. Hilbert 125 Hadamard, Jacques an David Hilbert,

  Cod. Ms. D. Hilbert 160 Hurwitz, Adolf an David Hilbert,

  Cod. Ms. D. Hilbert 258 Minkowski, Hermann an David Hilbert,

  Cod. Ms. Math. Arch. 76: 221–282. 284–321. 323–332. 332A David Hilbert,

  Cod. Ms. C. Reid C 9 Reid, Constance; Briefwechsel mit der Tochter Adolf Hurwitz'.

  —-

  Amtliches Namenverzeichnis, Verzeichnis der Vorlesungen, Winterhalbjahr 1924–1925, Dietrerische Universitäts-Buchdruckerei Göttingen 1924.

Literatura

[Abel 2011] [1]Abel, N. H., *O algebraických rovnicích.* Přel. P. Němec, ed. M. Větrovcová. Kanina, OPS a Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni 2011.

[Ackermann 1924] Ackermann, W., Begründung des 'tertium non datur' mittels Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit. *Mathematische Annalen*, 93, 1924, s. 1–36.

[Ackermann 1928] Ackermann, W., Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. *Mathematische Annalen*, 99, 1928, s. 118–133.

[Al-Chwárizmí 2009] Al-Chvárizmí, *Aritmetický a algebraický traktát.* Přel. P. Bogan, ed. P. Vopěnka a M. Větrovcová. Nymburk, OPS a Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni 2009, 2010.

[Bečvář – Bečvářová 2011] Bečvář, J. – Bečvářová, M. (eds.), *32. mezinárodní konference historie matematiky, Jevíčko, 26. 8. až 30. 8. 2011.* Praha, Matfyzpress 2011.

[Bečvářová – Netuka 2010] Bečvářová, M. – Netuka, I., *Jarník's note of the lecture course Punktmengen und reelle Funktionen by P. S. Aleksandrov (Göttingen1928).* Praha, Matfyzpress, 2010.

[Bečvářová 2016] Bečvářová, M., *Matematika na Německé univerzitě v Praze v letech 1882–1945.* Praha, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum 2016.

[Bedürftig – Murawski 2015] Bedürftig, T. – Murawski, R., *Philosophie der Mathematik.* Berlin, De Gruyter 2015.

[Belna 1996] Belna, J.-P., *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege.* Paris, Vrin 1996.

[Benis-Sinaceur – Panza – Sandu 2015] Benis-Sinaceur, H. – Panza, M. – Sandu, G., *Functions and Generality of Logic, Reflections on Dedekind's and Frege's Logicisms.* Cham–Heidelberg–New York–Dordrecht–London, Springer 2015.

[Bernays 1970] Bernays, P., *Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik.* In: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen. Sv. 3.* Berlin–Heidelberg, Springer 1970, s. 196–216.

[Blumenthal 1903] Blumenthal, O., Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. *Mathematische Annalen*, 56, 1903, s. 509–548.

[1]Literatura je řazena dle primárně dle příjmení a sekundárně data vydání publikace. Výjimkami jsou jednak edice Hilbertových *Grundlagen der Geometrie*, a přednášky *Mathematische Probleme* z kongresu v Paříži roku 1900, seřazené pohromadě, a jednak pozdější edice prací Hilberta, Minkowského, Dedekinda, Peana a Poincarého, které řadíme podle data jejich první publikace.

[Blumenthal 1935] Blumenthal, O., *Lebensgeschichte.* In: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen. Sv. 3.* Berlin–Heidelberg, Springer 1970 (originál 1935), s. 388–429.

[Blumenthal 2012] Blumenthal, O., David Hilbert. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 20, 2012, č. 3, s. 175–180.

[Bolzano 1882] Bolzano, B., Ryze analytický důkaz poučky, že mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden reálný kořen rovnice. Přel. F. J. Studnička. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, 11, č. 1, s. 1–38.

[Bolzano 1930] Bolzano, B., *Functionenlehre.* Eds. K. Rychlík, K. Petr. Praha, Královská česká společnost nauk 1930.

[Bolzano 1932] Bolzano, B., *Von dem besten Staate.* Ed. A. Kowalewski. Praha, Královská česká společnost nauk 1932.

[Bolzano 1934] Bolzano, B., *O nejlepším státě.* Ed. M. Jašek. Plzeň, M. Jašek 1934.

[Bolzano 1952] Bolzano, B., *O nejlepším státě.* Přel. V. Bláha. Praha, Vyšehrad 1952.

[Bolzano 1967] Bolzano, B., *Anti-Euklid.* Ed. K. Večerka. In: Večerka, K. (ed.), *Sborník pro dějiny přírodních věd, sv. 11.* Praha, Nakladatelství ČSAV 1967, s. 201–216.

[Bolzano 1981] Bolzano, B., *Von der mathematischen Lehrart.* Stuttgart–Bad Cannstatt, Frommann-Holzboorg 1981.

[Bolzano 2012] Bolzano, B., *O matematické metodě.* Přel. M. Vlasáková. Praha, Filosofia 2012.

[Born 1910] Born, M., Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Standpunkte der Elektronentheorie. Aus dem Nachlaß von Hermann Minkowski. *Mathematische Annalen*, 68, 1910, s. 526–551.

[Born 1975] Born, M., *Mein Leben, Die Erinnerungen des Nobelpreisträgers.* München, Nymphenburger Verlagshandlung 1975.

[Brouwer 1925] Brouwer, L. E. J., Zur Begründung der intuitionistischen Mahtematik I. *Mathematische Annalen*, 93, 1925, s. 244-257.

[Brown – Rechenberg 2005] Brown, L. M. – Rechenberg, H., *P. A. M. Dirac (1930) and J. von Neumann (1932), books on quantum mechanics.* In: Grattan-Guinness, I. (ed.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940.* Boston, Elsevier 2005, s. 882–900.

[Coreth – Ehlen – Ricken 2006] Coreth, E. – Ehlen, P. – Haeffner, G. – Ricken, F., *Filosofie 20. století.* Olomouc, Olomouc 2006.

[Courant 1924] Courant, R. – Hilbert, D., *Methoden der mathematischen Physik.* Berlin, Springer 1924, 1931.

[Crilly 2005] Crilly, T., *Paul Urysohn and Karl Menger, papers on dimension theory (1923–1926).* In: Grattan-Guinness, I. (ed.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940.* Boston, Elsevier 2005, s. 844–855.

[Dauben – Scriba 2002] Dauben, J. W. – Scriba, C. J., *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development.* Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser 2002.

[Daum 1908] Daum, A. W., *Wissenschaftspopularisierung im 19. Jahrhundert.* München, Oldenbourg 1908.

[Dedekind 1872] Dedekind, R., *Stetigkeit und Irrationalzahlen* In: Dedekind, R., *Gesammelte mathematische Werke. Sv. 3.* Braunschweig, Vieweg 1932, s. 315–332.

[Dedekind 1888] Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen?* In: Dedekind, R., *Gesammelte mathematische Werke. Sv. 3.* Braunschweig, Vieweg 1932, s. 335–391.

[Dedekind 1895] Dedekind, R., Über die Begründung der Idealtheorie. *Göttinger Nachrichten*, 1895, s. 106–113.

[Dedekind 1932] Dedekind, R., *Gesammelte mathematische Werke.* Hrsg. R. Fricke, E. Noether und O. Öystein. Braunschweig, Vieweg 1932.

[Dedekind 1932a] Dedekind, R., *Aus den Briefen an R. Lipschitz.* In: Dedekind, R., *Gesammelte mathematische Werke. Sv. 3.* Braunschweig, Vieweg 1932, s. 464–482.

[Dedekind 2008] Dedekind, R., *La création des nombres.* Ed. H. Benis-Sinaceur. Paris, Vrin 2008.

[Dickson 1919] Dickson, L. E., *History of the Theory of Numbers.* New York, Chelsea Publishing Company 1919–1923.

[Dostálová 2010] Dostálová, L., *Hilbertův program: proměna matematické praxe před a po Gödelových větách o neúplnosti.* In: Bečvář, J. – Bečvářová, M., *Matematika v proměnách věků VI.* Praha, Matfyzpress 2010, s. 175–185.

[Dubucs 1992] Dubucs, J., *Correspondence Frege / Hilbert (1900).* In: Rivenc, F. – Rouilhan, P., *Logique et fondements des mathématiques – Anthologie (1850–1914).* Paris, Payot 1992, s. 215–220.

[Epple 1999] Epple, M., *Grundlagen der Analysis 1860–1910.* In: Jahnke, H. N. (ed.), *Geschichte der Analysis.* Heidelberg, Spektrum 1999, s. 388–429.

[Eukleidés 1907] Eukleidés, *Základy.* Ed. F. Servít. Praha, JČMF 1907.

[Eukleidés 2007] Eukleidés, *Základy, knihy I–XII (komentované P. Vopěnkou).* Kanina, OPS a Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni 2007–2011.

[Ewald 2006] Ewald, W. (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundation of Mathematics.* Oxford, Clarendon Press 2006.

[Ewing 1996] Ewing, J., Mathematics. A Century Ago – A Century from Now. *Notices of the AMS*, 43, 1996, č. 6, s. 663–672.

[Fiala 2005] Fiala, J., *Analytická filosofie - úvod.* Nymburk, OPS a Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni 2005.

[Fiala 2006a] Fiala, J., *Analytická filosofie - úvod.* Nymburk, OPS 2006.

[Fiala 2006b] Fiala, J., Bolzanův pokus o zdůvodnění třírozměrného prostoru. In: Trlifajová, K. (ed.), *Osamělý myslitel Bernard Bolzano.* Praha, Filosofia 2006, s. 101–136.

[Fiala 2010] Fiala, J., *Henri Poincaré a filosofie vědy.* In: Poincaré, H., *Číslo – prostor – čas.* Přel. J. Fiala, ed. J. Fiala, M. Větrovcová. Kanina, OPS a Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni 2010, s. 179–215.

[Fiala 2011] Fiala, J., *Papírová geometrie v devíti jednáních.* In: Bečvář, J. – Bečvářová, M. (eds.), *32. mezinárodní konference historie matematiky, Jevíčko, 26. 8. až 30. 8. 2011.* Praha, Matfyzpress 2011, s. 11–32.

[Frege 1884] Frege, G., *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau, Koebner 1884.

[Frege 1893] Frege, G., *Die Grundgesetze der Arithmetik begriffsschriftlich abgeleitet.* Jena, H. Pohle 1893.

[Frege 2010] Frege, G., *Pojmopis.* Přel. a ed. J. Fiala. Praha, OIKOYMENH 2010.

[Frege 2011] Frege, G., *Logická zkoumání, Základy aritmetiky.* Přel. a ed. J. Fiala. Praha, OIKOYMENH 2011.

[Frei 1895] Frei, G. (ed.), *Der Briefwechsel David Hilbert – Felix Klein (1886–1918).* Göttingen, Vadenhoeck & Rupprecht 1985.

[Freundenthal 1957] Freudenthal, H., Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, zugleich eine Besprechung der 8. Auflage von Hilberts "Grundlagen der Geometrie". *Nieuw Archief voor Wiskunde, 4*, 1957, č. 5, s. 105–142.

[Gauss 1840] Gauss, C. F., Recension der „Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig Seeber". *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 20, 1840, s. 312–320.

[Gauss 1986] Gauss, C. F., *Disquisitiones arithmeticae.* Transl. A. A. Clarke. New York, Springer 1986.

[Gentzen 1935] Gentzen, G., Untersuchungen über das logische Schließen. *Mathematische Zeitschrift*, 39, 1935, s. 176–210.

[Gentzen 1936] Gentzen, G., Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, 112, 1936, s. 493–565.

[Grattan-Guinness 2000] Grattan-Guinness, I., A Sideways Look at Hilbert's Twenty-Three Problems of 1900. *Notices of the AMS*, 47, 2000, s. 752–757.

[Grattan-Guinness 2005] Grattan-Guinness, I. (ed.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940.* Boston, Elsevier 2005.

[Gray 2011] Gray, J. *Plato's Ghost.* London, Springer 2011.

[Hadwiger 1955] Hadwiger, H., *Altes und Neues über konvexe Körper.* Basel, Birkhäuser 1955.

[Halas 2018] Halas, Z., Poznámky k axiomatizaci planimetrie. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie,* 63, 2018, č. 1, s. 51–67.

[Hales 2000] Hales, T. C., Cannonballs and Honeycombs. *Notices of the AMS*, 47, 2000, č. 4, s. 440–449.

[Hausdorff 1914] Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, Veit & Co. 1914.

[Heijenoort 1967] Heijenoort, J. v. (ed.), *From Frege to Gödel.* Cambridge, Harvard University Press 1967.

[Helmholtz 1868] Helmholtz, H. v., *O faktoch tvoriacich základ geometrie (1868)*. In: Helmholtz, H. v., *Výber z teoretických prác*. Bratislava, Veda 1979, s. 112–127.

[Helmholtz 1870] Helmholtz, H. v., *O pôvode a význame geometrických axióm (1870)*. In: Helmholtz, H. v., *Výber z teoretických prác*. Bratislava, Veda 1979, s. 98–109.

[Hermite 1850] Hermite, Ch., Extraits de lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40, 1850, s. 261–315.

[Hilbert – Ackermann 1928] Hilbert, D. – Ackermann W., *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin, Springer 1928.

[Hilbert – Bernays 1934] Hilbert, D. – Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*. Berlin, Springer 1934, 1938.

[Hilbert – Cohn-Vossen 1996] Hilbert, D. – Cohn-Vossen, S., *Anschauliche Geometrie*. 2. Aufl. Berlin, Springer 1996.

[Hilbert – Hurwitz] Hilbert, D. – Hurwitz, A., Über die diophantische Gleichungen vom Geschlecht Null. *Acta Mathematica*, 14, 1890, s. 217–224.

[Hilbert – Neumann – Nordrheim 1928] Hilbert, D. – von Neumann, J. – Nordheim, L., Über die Grundlagen der Quantenmechanik. *Mathematische Annalen*, 98, 1928, s. 1–30.

[Hilbert 1888] Hilbert, D. Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten. *Mathematische Annalen*, 32, 1888, s. 154–161.

[Hilbert 1891] Hilbert, D., Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen*, 38, 1891, s. 459–460.

[Hilbert 1895] Hilbert, D., *Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte*. In: Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart, Teubner 1923, s. 112–118.

[Hilbert 1897] Hilbert, D., Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. In: Hilbert, D. *Gesammelte Abhandlungen. Sv. 1*. Berlin–Heidelberg, Springer 1970 (originál 1897), s. 63–302.

[Hilbert 1899] Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. 14. Aufl. Ed. M. Toepell. Stuttgart–Leipzig, Teubner 1999.

[Hilbert 1899a] Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. 1. Aufl. Stuttgart, Teubner 1899.

[Hilbert 1899b] Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. 1. Aufl. In: Volkert., K. (ed.), *David Hilbert – Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899)*. Berlin–Heidelberg, Springer 2015, s. 75–168.

[Hilbert 1899c] Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. 6. Aufl. Stuttgart, Teubner 1923.

[Hilbert 1899d] Hilbert, D., *Les principes fondamentaux de la géometrie*. Trad. L. Laugel. Paris, Gauthier-Villars 1900.

[Hilbert (relativquad.) 1899] Hilbert, D., Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. *Mathematische Annalen*, 51, 1899, s. 1–127.

[Hilbert 1900] Hilbert, D., *Mathematische Probleme*. In: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen. Sv. 3*. Berlin–Heidelberg, Springer 1970, s. 290–329.

[Hilbert 1900a] Hilbert, D., Mathematische Probleme. *Nachrichten von der Königlichen Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. 1900, s. 253–297.

[Hilbert 1900b] Hilbert, D., Mathematische Probleme. *Archiv der Mathematik und Physik*. 3, 1901, č. 1, s. 44–6š, 213–237.

[Hilbert 1900c] Hilbert, D., *Sur les problémes des Mathématiques*. In Duporcq, E. (ed.), *Compte rendu du deuxième congrès international*. Paris Gauthier-Villars, 1902, s. 58–114.

[Hilbert 1900d] Hilbert, D., Problèmes mathématiques. *L'Enseignement Mathématique*, 2, 1900, č. 1, s. 349–355.

[Hilbert 1900e] Hilbert, D., *Die Hilbertschen Probleme*. Ed. P. S. Alexandrov. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1971.

[Hilbert (Zahlbegriff) 1900] Hilbert, D., *Über den Zahlbegriff*. In: Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart, Teubner 1923, s. 237–242.

[Hilbert 1902] Hilbert, D., *Über die Grundlagen der Geometrie*. In: Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart, Teubner 1923, s. 163–218.

[Hilbert 1903] Hilbert, D., *Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskysche Geometrie*. In: Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart, Teubner 1923, s. 144–162.

[Hilbert 1904] Hilbert, D., *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*. In: Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart, Teubner 1923, s. 243–258.

[Hilbert 1909] Hilbert, D., *Hermann Minkowski*. In: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen. Sv. 3*. Berlin–Heidelberg, Springer 1970, s. 339–364.

[Hilbert 1910] Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, sechste Mitteilung. *Göttinger Nachrichten*, 1910, s. 388–404.

[Hilbert 1918] Hilbert, D. *Axiomatisches Denken*. In: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen. Sv. 3*. Berlin–Heidelberg, Springer 1970, s. 146–156.

[Hilbert 1919] Hilbert, D., *Adolf Hurwitz*. In: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen. Sv 3*. Berlin–Heidelberg, Springer 1970, s. 370–377.

[Hilbert 1922a] Hilbert, D., *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung*. In: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen. Sv. 3*. Berlin–Heidelberg, Springer 1970, s. 157–177.

[Hilbert 1922b] Hilbert, D., *Die logischen Grundlagen der Mathematik*. In: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen. Sv. 3*. Berlin–Heidelberg, Springer 1970, s. 178–192.

[Hilbert 1925] Hilbert, D., Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95, 1925, s. 161–190.

[Hilbert 1930] Hilbert, D., *Naturerkennen und Logik*. In: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen. Sv. 3*. Berlin–Heidelberg, Springer 1970, s. 378–387.

[Hilbert 1931] Hilbert, D., *The grounding of elementary number theory*. In: Ewald, W. (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundation of Mathematics*. Oxford, Clarendon Press 2006, s. 1148–1157.

[Hilbert 1935] Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen.* Berlin–Heidelberg, Springer 1970.

[Hilbert 1992] Hilbert, D., *Natur und mathematisches Erkennen.* Ed. D. Rowe. Basel, Springer 1992.

[Hilbert 2004] Hilbert, D., *Lectures on the Foundation of Geometry.* Eds. M. Hallett, U. Majer. Heidelberg–Berlin–New York, Springer 2004.

[Holeček 2014] Holeček, T., *Studie k chápání logiky v Principia Mathematica Bertranda Russella a Alfreda N. Whiteheada.* Praha, Togga 2014.

[Holzhey – Röd 2006] Holzhey, H. – Röd, W., *Filosofie 19. a 20. století II., Novokantovství, idealismus, realismus a fenomenologie.* Praha, OIKOYMENH 2006.

[Hurwitz 1894a] Hurwitz, A., Über die angenährte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche. *Mathematische Annalen*, 44, 1894, s. 417–436.

[Hurwitz 1894b] Hurwitz, A., Über die Theorie der Ideale. *Göttinger Nachrichten*, 1894, s. 291–298.

[Hurwitz 1895] Hurwitz, A., Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlenkörper. *Göttinger Nachrichten*, 1895, s. 332–356.

[Hurwitz 1902] Hurwitz, A., Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 19, 1902, s. 357–408.

[Hurwitz 1908] Hurwitz, A., Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n-ten Potenzen ganzer Zahlen. *Mathematische Annalen*, 65, 1908, s. 424–427.

[Hurwitz 1919] Hurwitz, A., *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen.* Berlin, Springer 1919.

[Husserl 1996] Husserl, E. *Krize evropských věd a transcendentální fenomenologie.* Praha, Academia 1996.

[Hykšová 2001a] Hykšová, M., *Bolzano's inheritance research in Bohemia.* In: Fuchs, E. (ed.), *Mathematics throughout the ages.* Praha, Prometheus 2001, s. 67–91.

[Hykšová 2001b] Hykšová, M., Fraktály a objektově orientované programování. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie,* 46, 2001, č. 3, s. 232–253.

[Hykšová 2003] Hykšová, M., *Karel Rychlík (1885–1968).* Praha, Prometheus 2003.

[Jäckel 2004] Jäckel, E., *Německé století: historická bilance.* Praha, Argo 2004.

[Jahnke 1999] Jahnke, H. N. (ed.), *Geschichte der Analysis.* Heidelberg, Spektrum 1999.

[Jarník 1922] Jarnik, V., O funkci Bolzanově, *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky,* 51, 1922, č. 4, s. 248–264.

[Jašek 1922a] Jašek, M., Aus dem handschriftlichen Nachlass Bernard Bolzanos: das erste historisch nachweisbar Beispiel einer steligen nirgends differenzierbaren Funktion. *Věstník Královské české společnosti nauk*, 1922, č. 1, s. 1–32.

[Jašek 1922b] Jašek, M., Funkce Bolzanova. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 51, 1922, č. 2, s. 69–76.

[Jašek 1922c] Jašek, M., Über den wissenschaftlichen Nachlaß Bernard Bolzanos. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 31, 1922, s. 109–110.

[Jessen – Vogel 2002] Jessen, R. – Vogel, J. (eds.), *Wissenschaft und Nation in der europäischen Geschichte*. Frankfurt am Main, Campus 2002.

[Kant 2001] Kant, I., *Kritika čistého rozumu*. Přel. J. Loužil, J. Chotaš a I. Chvatík. Praha, OIKOYMENH 2001.

[Kater 1975] Kater, M. H., The Work Student: A Socio-Economic Phenomenon of Early Weimar Germany. *Journal of Contemporary History*, 10, 1975, s. 71–94.

[Kennedy 2002] Kennedy, H., *Giuseppe Peano*. Deutsche Übersetzung von Ruth Amsler. San Francisco, Peremptory Publications 2002.

[Kepler 2017] Kepler, J., *O šestiúhelníkové sněhové vločce: poutavé čtení o „ničem“*. Přel. P. Daniš a A. Šolcová. Praha, Matfyzpress 2017.

[Kiechle – Kreuzer – Wefelscheid 1999] Kiechle, H. – Kreuzer, A. – Wefelscheid, H., *Das Forschungsgebiet „Grundlagen der Geometrie“ seit Hilbert*. In.: Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. 14. Aufl. Stuttgart–Leipzig, Teubner 1999. s. 365–384.

[Klein – Müller 1901] Klein, F. – Müller, C. (eds.), *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Leipzig, Teubner 1901–1935.

[Klein 1871] Klein, F., Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. *Mathematische Annalen*, 4, 1871, s. 573–625.

[Klein 1872] Klein, F., *Vergleichende Betrachtungen über geometrische Forschungen*. Erlangen, Deichert 1872.

[Klein 1873] Klein, F., Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. *Mathematische Annalen*, 6, 1873, s. 112–145.

[Klein 1898] Klein, F., Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Vertheilung des Lobatschewsky-Preises. *Mathematische Annalen*, 50, 1898, s. 583–600.

[Klein 1908] Klein, F., *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus*. Leipzig, Teubner 1908.

[Klein 1926] Klein, F., *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Berlin, Springer 1926–1927.

[Korkin – Zolotarev 1877] Korkine, A. – Zolotareff, G., Sur les formes quadratiques positives. *Mathematische Annalen*, 11, 1877, s. 242–292.

[Koudela 2013] Koudela, L., *O pojetí křivky*, Kanina, OPS 2013.

[Kowalewski 1922] Kowalewski, G., Bolzanos Verfahren zur Herstellung einer nirgends differenzierbaren stetigen Funktion. *Berichte Säch. Akad.*, 74, 1922, s. 91–95.

[Kowalewski 1923] Kowalewski, G., Über Bolzanos nichtdifferenzierbare stetige Funktion. *Acta Mathematica*, 44, 1923, s. 315–319.

[Kowalewski 1950] Kowalewski, G., *Bestand und Wandel, meine Lebenserinnerungen, zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik*. München, Oldenbourg 1950.

[Kůrka – Matoušek – Velický 2011] Kůrka, P. – Matoušek, A. – Velický, B. et. al., *Spor o matematizaci světa.* Červený Kostelec, Pavel Mervart 2011.

[Kůrka 2011] Kůrka, P., *Matematické pojmy, objekty a názor.* In: Kůrka, P. – Matoušek, A. – Velický, B. et. al., *Spor o matematizaci světa.* Červený Kostelec, Pavel Mervart 2011, s. 119–132.

[Kůrka 2016] Kůrka, P., *Existence matematických objektů – obrana formalismu.* In: Trlifajová, K. – Frei, J. et al., *Spor o pravdu.* Praha, Filosofia 2016, s. 119–132.

[Lávička 2002] Lávička, M., *Geometrie 1: základy geometrie v rovině.* Plzeň, Západočeská univerzita 2002.

[Libický 1903] Libický, A., Recenze Grundlagen der Geometrie. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, 32, 1903, č. 2, s. 147–156.

[Lie 1935] Lie, M. S., *Über die Grundlagen der Geometrie I.* In: Lie, M. S., *Gesammelte Abhandlungen. Sv. 2.* Leipzig, Teubner 1935, s. 380–413.

[Lischke 1990] Lischke, R.-L., *Friedrich Althoff und sein Beitrag zur Entwicklung des Berliner Wissenschaftssystems an der Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert.* Berlin, Sigma 1990.

[Minkowski 1884] Minkowski, H., *Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten.* In: Minkowski, H., *Gesammelte Abhandlungen. Sv. 1.* Leipzig, Teubner 1911, s. 3–144.

[Minkowski 1887] Schwermer, J., Räumliche Anschauung und Minima positiv definitiver quadratischer Formen. Zur Habilitation von Hermann Minkowski. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 93, 1991, č. 2, s. 49–105.

[Minkowski 1887a] Minkowski, H., *Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis.* In: Schwermer, J., Räumliche Anschauung und Minima positiv definitiver quadratischer Formen. Zur Habilitation von Hermann Minkowski. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 93, 1991, č. 2, s. 85–88.

[Minkowski 1890a] Minkowski, H., Über die Geometrie der Zahlen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1, 1890, s. 64–65.

[Minkowski 1890b] Minkowski, H., Recenze na článek [Poincaré 1890]. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik,* 22, 1890, s. 907–914.

[Minkowski 1893] Minkowski, H., *Über Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind.* In: Minkowski, H., *Ausgewählte Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Geometrie; mit D. Hilberts Gedächtnisrede auf H. Minkowski.* Hrsg. E. Krätzel, B. Weissbach. Leipzig, Teubner 1989, s. 8–14.

[Minkowski 1896] Minkowski, H., *Geometrie der Zahlen.* Leipzig, Teubner 1896.

[Minkowski 1899] Minkowski, H., Ein Kriterium für die algebraische Zahlen. *Göttinger Nachrichten*, 1899, s. 64–88.

[Minkowski 1901] Minkowski, H., *Über die Annäherung an eine reelle Größe durch rationale Zahlen.* In: Minkowski, H., *Ausgewählte Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Geometrie; mit D. Hilberts Gedächtnisrede auf H. Minkowski.* Hrsg. E. Krätzel, B. Weissbach. Leipzig, Teubner 1989, s. 38–72.

[Minkowski 1901] Minkowski, H., *Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen.* In: Minkowski, H., *Ausgewählte Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Geometrie; mit D. Hilberts Gedächtnisrede auf H. Minkowski.* Hrsg. E. Krätzel, B. Weissbach. Leipzig, Teubner 1989, s. 140–145.

[Minkowski 1907] Minkowski, H., *Diophantische Approximationen.* Leipzig, Teubner 1907.

[Minkowski 1909] Minkowski, H., Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift*, 10, 1909, s. 104–111.

[Minkowski 1911] Minkowski, H., *Gesammelte Abhandlungen.* Ed. D. Hilbert. Leipzig, Teubner 1911.

[Minkowski 1973] Minkowski, H., *Briefe an David Hilbert.* Hrsg. L. Rüdenberg, H. Zassenhaus. Berlin, Springer 1973.

[Minkowski 1989] Minkowski, H., *Ausgewählte Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Geometrie; mit D. Hilberts Gedächtnisrede auf H. Minkowski.* Hrsg. E. Krätzel, B. Weissbach. Leipzig, Teubner 1989.

[Moravcová 2006] Moravcová, D., *Výmarská republika.* Praha, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum 2006.

[Nádeník 1972] Nádeník, Z., O čtvrtém Hilbertově problému. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 17, 1972, č. 1. s. 16–23.

[Netuka 2011] Netuka, I., *Émile Borel a teorie míry.* In: Bečvář, J. – Bečvářová, M. (eds.), *32. mezinárodní konference historie matematiky, Jevíčko, 26. 8. až 30. 8. 2011.* Praha, Matfyzpress 2011, s. 33–76.

[Noether 1918] Noether, E., Invariante Variationsprobleme. *Göttinger Nachrichten*, 1918, s. 235–257.

[Noether 1933] Noether, E., Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper. *Mathematische Annalen*, 108, 1933, č. 2, s. 411–419.

[O'Connor – Robertson: Blumenthal] O'Connor, J. J. – Robertson, E. F., *Blumenthal's biography.* MacTutor History of Mathematics Archive [cit. 13. 4. 2017]. Dostupné z www: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Blumenthal.html

[Pasch 1882] Pasch, M., *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Leipzig, Leipzig 1882.

[Patočka 2006] Patočka, J., *Bolzanovo místo v dějinách filosofie.* In: Patočka, J., *Češi. Sv. 1.* Praha, OIKOYMENH 2006.

[Peano 1889a] Peano, G., *Arithmetices principia, nova methodo exposita.* Torino, Bocca 1889.

[Peano 1889b] Peano, G., *The principles of arithmetic, presented by a new method.* In: Heijenoort, J. v. (ed.), *From Frege to Gödel.* Cambridge, Harvard University Press 1967, s 83–97.

[Peano 1889c] Peano, G., *I principii di geometria, logicamente esposti.* Torino, Bocca 1889.

[Peano 1890] Peano, G., Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen*, 36, 1890, s. 157–160.

[Peano 1894] Peano, G. *Sui fondamenti della geometria*. In: Peano, G. *Opere Scelte 3*, Roma, G. Peano 1959, s. 115–157.

[Poincaré 1890] Poincaré, H., Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica*, 13, 1890, s. 1–270.

[Poincaré 1891] Poincaré, H., Les géometries non euclidiennes. *Rév. Gén. Sci. Pures et Appl.*, 2, 1891, s. 769–774.

[Poincaré 1903] Poincaré, H., Review of Hilbert's 'Foundations of Geometry'. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 10, 1903, s. 1–23.

[Poincaré 1904] Poincaré, H., *Matematické definice a vyučování*. In: Poincaré, H., *Číslo – prostor – čas*. Přel. J. Fiala, ed. J. Fiala, M. Větrovcová. Kanina, OPS a Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni 2010, s. 25–44.

[Poincaré 1905] Poincaré, H., *Nové logiky*. In: Poincaré, H., *Číslo – prostor – čas*. Přel. J. Fiala, ed. J. Fiala, M. Větrovcová. Kanina, OPS a Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni 2010, s. 75–90.

[Poincaré 1908] Poincaré, H., *Science et méthode*. Paris, Flammarion 1908.

[Poincaré 1912] Poincaré, H., Pourquoi l'espace a trois dimensions. *Revue de métaphysique et de morale*, 20, 1912, s. 483–504.

[Poincaré 1914] Poincaré, H., *Wissenschaft und Hypothese*. Hrsg. F. Lindemann, L. Lindemann. Leipzig, Teubner 1914.

[Poincaré 2010] Poincaré, H., *Číslo – prostor – čas*. Přel. J. Fiala, ed. J. Fiala, M. Větrovcová. Kanina, OPS a Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni 2010.

[Poonen 2008] Poonen, B., Undecidability in Number Theory. *Notices of the AMS*, 55, 2008, č. 3, s. 344–350.

[Reid 1970] Reid, C., *Hilbert*. Berlin, Springer 1970.

[Remmert 2006] Remmert, V., *Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung im Dritten Reich*. In: Hoffmann, D. – - Walker, M., *Physiker zwischen Autonomie und Anpassung*. Weinheim, WILEY-VCH 2006.

[Remmert 2010] Remmert, V. – Schneider, U., *Eine Disziplin und ihre Verleger, Disziplinenkultur und Publikationswesen der Mathematiky in Deutschland, 1871–1949*. Bielefeld, Transcript 2010.

[Riemann 1854] Riemann, B., *O hypotézách, které leží v základech geometrie (spolu s vysvětlením H. Weyla)*. Přel. P. Rys. Ústí nad Labem, Univerzita J. E. Purkyně 1999.

[Rivenc – Rouilhan 1992] Rivenc, F. – Rouilhan, P. (eds.), *Logique et fondements des mathématiques – Anthologie (1850–1914)*. Paris, Payot 1992.

[Russell – Whitehead 1910] Russell, B. – Whitehead, A. N., *Principia Mathematica*. Cambridge, Cambridge University Press 1910, 1912, 1913.

[Russell 1902] Russell, B., *Letter to Frege*. In: Heijenoort, J. v. (ed.), *From Frege to Gödel*. Cambridge, Harvard University Press 1967, s. 124–125.

[Russell 1903] Russell, B., *Principles of Mathematics*. London, Cambridge University Press 1903.

[Rychlík 1922] Rychlik, K., Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichen Nachlasse. *Věstník Královské české společnosti nauk 1921–1922*, 4, 1922, 6 strans.

[Segal 2003] Segal, S. L., *Mathematicians under the Nazis*. Princeton, Princeton University Press 2003.

[Schappacher 2005] Schappacher, N., *David Hilbert, Report On Algebraic Number Fields ('Zahlbericht') (1897)*. In: Grattan-Guinness, I. (ed.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940*. Boston, Elsevier 2005, s. 700–709.

[Schöllgen 1991] Schöllgen, G. (ed.), *Flucht in der Krieg?*. Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1991.

[Schmidt 1907] Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. *Mathematische Annalen*, 64, 1907, s. 161–174.

[Schmidt 1939] Schmidt, E., Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen. *Mathematische Zeitschrift*, 44, 1939, s. 689–788.

[Schwermer 2007] Schwermer, J., *Reduction Theory of Quadratic Forms: Toward Räumliche Anschauung in Minkowski's Early Work*. In: Goldstein, C. – Schappacher, N. – Schwermer, J. (eds.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*. Berlin, Springer 2007, s. 483–504.

[Schwermer 2010] Schwermer, J., Minkowski in Königsberg 1884: A Talk in Lindemann's Colloquium. *Bulletin of the AMS*, 47, 2010, č. 2, s. 355–362.

[Sieg – Ravaglia 2005] Sieg, W. – Ravaglia, M., *David Hilbert and Paul Bernays, Grundlagen der Mathematik*. In: Grattan-Guinness, I. (ed.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940*. Boston, Elsevier 2005, s. 981–999.

[Siegmund-Schultze 2001] Siegmund-Schultze, R., Rockefeller ant the internationalization of mathematics between the two World Wars, Birkhäuser, Basel, 2001.

[Siegmund-Schultze 2009] Siegmund-Schultze, R., *Mathematicians Fleeing from Nazi Germany*. Princeton, Princeton University Press 2009.

[Sierpinsky 1912] O krzywych, wypelniajacych kwadrat. *Prace matemetycno-fyzycne*, 23, 1912, s. 193–219.

[Sinaceur 1999] Sinaceur, H., *Corps et modèles, essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*. Paris, Vrin 1999.

[Singh 1926] Singh, A. N., On Some New Types of Non-Differentiable Functions. *Annals of Mathematics*, 28, 1926–1927, s. 472–476.

[Smadja 2012] Smadja, I., Local Axioms in Disguise: Hilbert on Minkowski Diagrams. *Synthese*, 186, 2012, s. 315–370.

[Šebestík 1992] Šebestík, J., *Logique et Mathématique chez Bernard Bolzano*. Paris, Vrin 1992.

[Šebestík 2003] Šebestík J., La dispute de Bolzano avec Kant: fragment d'un dialogue sur la connaissance mathématique. *Philosophiques*, 30, 2003, č. 1, s. 47–66.

[Špelda 2009] Špelda D., *Proměny historiografie vědy*. Praha, Filosofia 2009.

[Švejdar 2002] Švejdar, V., *Logika – neúplnost, složitost a nutnost*. Praha, Academia 2002.

[Toepell 1986] Toepell, M., *Über die Entstehung von David Hilberts "Grundlagen der Geometrie"*. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht 1986.

[Toepell 1999] Toepell, M., *Die projektive Geometrie als Forschungsgrundlage David Hilberts*. In.: Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. 14. Aufl. Stuttgart–Leipzig, Teubner 1999. s. 347–361.

[Tomiczková 2006] Tomiczkova, S., *Minkowského operace a jejich aplikace*. Disertační práce. Plzeň, Západočeská univerzita 2006.

[Trkovská 2015] Trkovská, D., *Historický vývoj geometrických transformací*. Praha, Katedra didaktiky matematiky MFF UK 2015.

[Trlifajová – Frei 2016] Trlifajová, K. – Frei, J. et. al., *Spor o pravdu*. Praha, Filosofia 2016.

[Trlifajová 2001] Trlifajová, K., *Studie o nekonečnu v matematice*. Disertační práce. Praha, Univerzita Karlova v Praze 2001.

[Trlifajová 2005] Trlifajová, K., Teologické zdůvodnění Cantorovy teorie množin. *Filosofický časopis*, 53, č. 2, 2005, s. 195–218.

[Trlifajová 2006] Trlifajová, K. (ed.), *Osamělý myslitel Bernard Bolzano*. Praha, Filosofia 2006.

[Trlifajová 2011] Trlifajová, K., *Logika jako matematizace myšlení*. In: Kůrka, P. – Matoušek, A. – Velický, B. et. al., *Spor o matematizaci světa*. Červený Kostelec, Pavel Mervart 2011, s. 86–102.

[Trlifajová 2016] Trlifajová, K., *Podoby pravdy v matematice*. In: Trlifajová, K. – Frei, J. et. al., *Spor o pravdu*. Praha, Filosofia 2016, s. 133–148.

[Učník – Chvatík – Williams 2015] Učník, L. – Chvatík, I. – Williams, A. (eds.), *Formalisation and the life-world: the fenomenological critique of mathematisation and the Question of responsibility*. Cham – New York – Berlin, Springer 2015.

[Veronese 1891] Veronese, G., *Grundzüge der Geometrie*. Leipzig, Teubner 1894. (originál *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementre*. Padova, Tipografia del Seminario 1891.)

[Větrovcová 2013] Větrovcová, M., *Korespondence Carla Friedricha Gausse*. Disertační práce. Plzeň, Západočeská univerzita 2013.

[Vlasáková 2006] Vlasáková, M., *Životaběh B. Bolzana*. In: Trlifajová, K. (ed.), *Osamělý myslitel Bernard Bolzano*. Praha, Filosofia 2006, s. 11–26.

[Vlasáková 2012] Vlasáková, M., *Bolzanovské inspirace v logice*. In: Bolzano, B., *O matematické metodě*. Přel. M. Vlasáková. Praha, Filosofia 2012, s. 7–21.

[Volkert 2015] Volkert., K. (ed.), *David Hilbert – Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899)*. Berlin–Heidelberg, Springer 2015.

[Von Neumann 1927] von Neumann, J., Zur Hilbertschen Beweistheorie. *Mathematische Zeitschrift*, 26, 1927, s. 1–46.

[Von Neumann 1932] von Neumann, J., *Mathematische Grundlagen der Quantummechanik*. Berlin, Springer 1932.

[Vopěnka – Větrovcová 2015] Vopěnka, P. – Větrovcová, M., *Uvedení do obecné topologie a jejích dějin do roku 1960.* Praha, Vyšehrad a Červený Kostelec, Pavel Mervart 2015.

[Vopěnka 2003] Vopěnka, P., *Trýznivé tajemství.* Praha, Práh 2003.

[Vopěnka 2004] Vopěnka, P., *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky.* Praha, Práh 2004.

[Vopěnka 2006] Vopěnka, P., *Návrat k Bolzanovi.* In: Trlifajová, K. (ed.), *Osamělý myslitel Bernard Bolzano.* Praha, Filosofia 2006, s. 68–72.

[Vopěnka 2014] Vopěnka, P., *Příležitostné rozpravy s matematikou.* Kanina, OPS 2014.

[Vopěnka 2015] Vopěnka, P., Neexistence množiny všech přirozených čísel. *Vesmír*, 94, 2015, s. 344–346.

[Weyl 1913] Weyl, H., *Die Idee der Riemannsche Fläche.* Leipzig, Teubner 1913.

[Weyl 1918a] Weyl, H., *Das Kontinuum. Kritische Untersuchung über die Grundlagen der Analysis.* Leipzig, Veit 1918.

[Weyl 1918b] Weyl, H., *Raum – Zeit – Materie.* Berlin, Springer 1918.

[Weyl 1928a] Weyl, H., Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 6, 1928, č. 1, s. 86–88.

[Weyl 1928b] Weyl, H., *Gruppentheorie und Quantummechanik.* Leipzig, Hirtzel 1928.

[Weyl 1944] Weyl, H., David Hilbert and His Mathematical Work. *Bulletin of the AMS*, 50, 1944, s. 612–654.

[Weyl (wikipedia)] Wikipedia., Heslo *Hermann Weyl.* Dostupné z www: http://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Weyl, citováno 24. 1. 2018.

[Zassenhaus 1973] Zassenhaus, H. J., *Über Friederich Althoff.* In: Minkowski, H., *Briefe an David Hilbert.* Hrsg. L. Rüdenberg, H. Zassenhaus. Berlin, Springer 1973, s. 22–26.

[Zassenhaus 1975] Zassenhaus, H. J., On the Minkowski-Hilbert Dialogue on Mathematization. *Canad. Math. Bull.*, 18, 1975, č. 3, s. 443–466.

[Zeman 2015] Zeman, J., *Bolzanova matematická vylepšení.* In: Bečvář, J. – Bečvářová, M. (eds.), *36. Mezinárodní konference Historie matematiky, Poděbrady, 21. až 25. 8. 2015.* Praha, 2015, s. 205–208.

[Zeman 2016] Zeman, J., *Bolzanovské stopy v Plzni – Martin Jašek (1879–1945).* In: *Sborník Konference Genius Loci Rokycany*, 2016. Rokycany a Plzeň, Muzeum Dr. Horáka v Rokycanech a Genius loci českého jihozápadu 2016, s. 82–86.

[Zeman 2018] Zeman, J., *Geometrické pojetí teorie forem v přednášce Hermanna Minkowského.* In: Bastl, B. – Lávička, M. (eds.) *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Plzeň, Vydavatelský servis 2018, s. 165–170.

[Zeman 2018a] Zeman, J., David Hilbert na univerzitě v Göttingen a jeho okruh přátel a kolegů. *Kuděj*, 19, 2018, č. 1, s. 43–63.

[Zeman 2019] Zeman, J., Hilbertova aritmetizace geometrie. *Filosofie dnes*, v tisku.

[Zermelo 1904] Zermelo, E., Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen*, 59, 1904, s. 514–516.

[Zermelo 1908a] Zermelo, E., Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. *Mathematische Annalen*, 65, 1908, s. 107–128.

[Zermelo 1908b] Zermelo, E., Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen*, 65, 1908, s. 261–281.