

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Plzeň 2019

Tomáš Honzík

Zadání

Magnetická levitace:

Pokyny pro vypracování BP:

1. Seznamte se s principy magnetické levitace permanentního magnetu v řízeném magnetickém poli.
2. Vytvořte zjednodušený matematický model soustavy magnetické levitace tvořené řízenými solenoidovými cívkami, permanentními magnety a senzorem polohy levitujícího permanentního magnetu. Vzniklý nelineární model linearizujte v rovnovážném stavu.
3. Pro linearizovaný model navrhňte stabilizující zpětnovazební zákon řízení a proveďte jeho ověření metodou simulace.
4. Navržený systém realizujte a na reálné soustavě ověřte funkční vlastnosti provedeného návrhu.

Doporučená literatura:

Rote, D.M.; Yigang Cai (2002). "Review of dynamic stability of repulsive-force maglev suspension systems". IEEE Transactions on Magnetics. 38 (2): 1383.

Mundher H.A.YaseenaHaider J.Abdb. „Modeling and control for a magnetic levitation system based on SIMLAB platform in real time“. Results in Physics, Volume 8, March 2018, Pages 153-159

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne

.....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval panu prof. Ing. Miloši Schlegelovi, CSc. za odborné vedení a své rodině za podporu ve studiu.

Abstract

This thesis deals with the principles of magnetic levitation. Then it deals with specific realization of controlled magnetic levitation formed by permanent magnets and solenoid coils. The mathematical model is derived for this system, and is linearized at the equilibrium point. Based on the model, feedback control is designed and the results are verified by simulation and real system realization.

Key words

magnetic levitation, feedback control, LQR, dynamic system model, linear system

Abstrakt

Tato práce pojednává o principech, jimiž je možné docílit magnetické levitace. Dále se pak zabývá konkrétní realizací řízené magnetické levitace tvořené permanentními magnety a solenoidovými cívkami. Pro tuto soustavu je odvozen matematický model a model linearizovaný v rovnovážném bodě. Na základě matematického modelu je navržena zpětnovazební regulace. Výsledky jsou ověřeny metodou simulace i realizací na reálné soustavě.

Klíčová slova

magnetická levitace, zpětnovazební řízení, LQR, model dynamického systému, lineární systém

Obsah

Seznam obrázků

Úvod	1
1 Úvod do problematiky	2
1.1 Definice magnetické levitace	2
1.2 Fyzikální podklad pro magnetickou levitaci	3
1.2.1 Magnetická indukce	3
1.2.2 Zdroj magnetického pole	4
1.2.3 Magnetizace	5
1.2.4 Permeabilita	6
1.2.5 Indukované výřivé proudy	7
1.3 Principy fungování magnetické levitace	8
1.3.1 Mechanická stabilizace	8
1.3.2 Časově proměnné pole	9
1.3.3 Diamagnetická levitace	10
1.3.4 Řízené pole	11
1.4 Řešená úloha	12
2 Matematický model	14
2.1 Vytvoření nelineárního matematického modelu	14
2.1.1 Výběr stavových proměnných	14
2.1.2 Model levitujícího permanentního magnetu	18
2.1.3 Model statických permanentních magnetů	19
2.1.4 Model solenoidových cívek	20
2.1.5 Model senzorů	21
2.1.6 Soustava diferenciálních rovnic	24
2.2 Vytvoření linearizovaného modelu	27
2.2.1 Nalezení rovnovážného stavu	28
2.2.2 Stavový popis	28
2.2.3 Rozložení prvků v podstavě	29
2.2.4 Matice A	30
2.2.5 Matice B	32
2.2.6 Matice C	33
2.2.7 Matice D	34
2.2.8 Eliminace stavových proměnných	34

2.2.9	Určení parametrů systému	34
3	Návrh regulátoru	37
3.1	Stavová zpětná vazba	37
3.2	Linear-Quadratic Regulator	38
3.2.1	Návrh parametrů Q a R	38
3.2.2	Symetrie systému	39
3.3	Rekonstruktor stavu	40
4	Simulace	43
4.1	Neřízený systém	44
4.2	Řízený systém	47
5	Reálná soustava	53
5.1	Popis architektury	53
5.2	Nasazení navrženého regulátoru	53
5.3	Analýza odchylka modelu	53
5.3.1	Odchylka magnetického pole	54
5.4	Shrnutí nevhodnosti navrženého regulátoru	60
5.5	Nasazení empiricky určeného PID regulátoru	60
	Výsledky Práce	62
	Diskuze	64
	Závěr	65
	Seznam značení	
	A Příloha	
	Literatura	

Seznam obrázků

1.1	Magnetická levitace - ilustrační foto	2
1.2	Magnetická pseudolevitace - ilustrační foto	3
1.3	Vizualizace pomocí siločar	4
1.4	Graf hustoty magnetické indukce	4
1.5	Proudová smyčka	5
1.6	Magnet padající zkrz měděnou trubku	7
1.7	Stabilizace tyčkou	8
1.8	Stabilizace gyroskopickým efektem	9
1.9	Stabilizace opěrem v horizontálním směru	9
1.10	Tavení magnetickou levitací	10
1.11	Levitace pyrolytického grafitu	11
1.12	Levitace nad supravodičem	11
1.13	Transrapid daglev (Šanghaj)	12
1.14	Magnetická levitace květináče	12
1.15	Nákres soustavy	13
2.1	Rotace v pořadí $\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi$	15
2.2	Rotace v pořadí $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$	15
2.3	Souřadný systém	18
2.4	Schéma modelu senzoru	24
2.5	Schéma rozložení	29
2.6	Experimentální odhad m_2	35
2.7	Experimentální odhad m_0	36
3.1	Stavová zpětná vazba	37
3.2	Dynamický kompenzátor	41
4.1	Snímek z animace v Simscape	43
4.2	Test rovnovážného stavu	44
4.3	Test nestability systému	45
4.4	Test vychýlení z a a ψ	46
4.5	Regulace malé počáteční výchylky	47
4.6	Regulace velké počáteční výchylky	48
4.7	Průběh regulace na základě zašumělých senzorů	49
4.8	Rekonstrukce stavu	50
4.9	Průběh výstupů senzorů	50
4.10	Test robustnosti s přímo měřeným stavem	51

4.11	Test robustnosti s rekonstruktorem stavu	52
5.1	Foto sestaveného zařízení	53
5.2	Rozmístění dipólů	54
5.3	Pole obou modelů	55
5.4	Odchylka velikosti magnetické indukce	56
5.5	Odchylka orientace magnetické indukce	57
5.6	Souhrnná odchylka obou polí	58
5.7	Demonstrace odchylky modelu	59
5.8	Levitace docílená empiricky určeným PID	60
5.9	Robustnost - při přidání závaží	61

Úvod

V průběhu této práci se budeme věnovat jevu zvaném magnetická levitace. Nastíníme si základní principy na kterých může být magnetické levitace dosaženo a hlavní část práce budeme odvozovat matematický model soustavy která umožňuje dosáhnout magnetické levitace zpětnovazebně řízeným polem. U matematického modelu nalezneme rovnovážný bod ve kterém dochází k magnetické levitaci pro jehož okolí odvodíme model linearizovaný, který nám usnadní návrh regulační smyčky. Nejprve budeme zkoumat matematický model systému metodou simulace a následně ověříme správnost modelu a návrhu regulace na reálné soustavě.

1 Úvod do problematiky

1.1 Definice magnetické levitace

Magnetická levitace je obecně známý jev, který si umí každý dobře představit, pro úplnost si však tento jev definujeme. Existuje celá řada definic, my si uvedeme vlastní která je s nimi v souladu:

Definice 1 (Magnetická levitace) *Magnetickou levitací nazýváme stav, kdy je gravitační zrychlení plně rušeno výhradně za pomoci silového působení magnetického pole s tím, že žádné další síly tomuto jevu nenapomáhají. Za magnetickou pseudolevitaci pak dále označujeme stav, kdy sice dochází ke kompenzaci tíhové síly magnetickým polem, ovšem na levitující těleso dále působí jiné (zpravidla mechanické) síly, které jej stabilizují.*



Obrázek 1.1: Magnetická levitace - ilustrační foto

Zdroj vlastní



Obrázek 1.2: Magnetická pseudolevitace - ilustrační foto

Zdroj vlastní

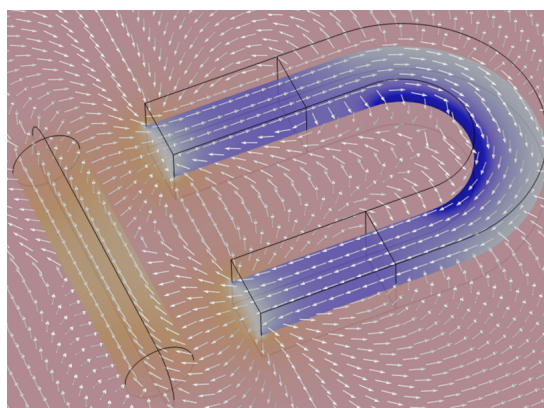
1.2 Fyzikální podklad pro magnetickou levitaci

Pro úvod do principů magnetické levitace je důležité uvést nejprve základní zákonitosti elektromagnetismu, které se této problematice přímo týkají. Nutno podotknout, že elektromagnetismus jako takový je rozsáhlý vědní obor a my se zde budeme zabývat pouze zjednodušenými principy, které přímo souvisejí s problematikou magnetické levitace.

1.2.1 Magnetická indukce

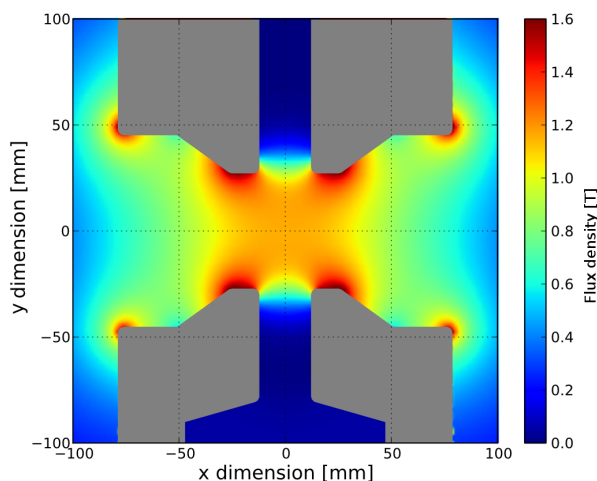
Magnetické pole, respektive jeho silové účinky budeme popisovat pomocí magnetické indukce. Magnetická indukce je vektorová veličina, značí se písmenem B a její základní jednotkou je tesla $[T]$ [15].

Magnetická indukce je funkcí polohy v prostoru, takže tvoří tzv. vektorové pole, to můžeme vizualizovat například pomocí siločar, které dobře popisují orientaci magnetické indukce v prostoru, nebo barevným grafem hustoty magnetické indukce, který zase lépe zachycuje velikost magnetické indukce v jednotlivých místech.



Obrázek 1.3: Vizualizace pomocí siločar

An Introduction to the Theory of Magnetostatics. COMSOL Multiphysics® Modeling Software [online]. Copyright © 2019 by COMSOL Inc. All rights reserved [cit. 19.05.2019]. Dostupné z: <https://www.comsol.com/multiphysics/magnetostatics-theory>



Obrázek 1.4: Graf hustoty magnetické indukce

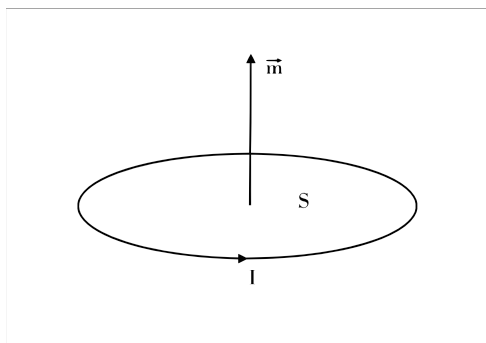
Performance of the new 2D ACAR spectrometer in Munich - INSPIRE-HEP. HEP - INSPIRE-HEP [online]. Dostupné z: <http://inspirehep.net/record/1190544/plots>

1.2.2 Zdroj magnetického pole

Magnetické pole vzniká pohybem elektrického náboje. Zdrojem magnetického pole je tedy každý elektrický vodič jímž protéká elektrický proud.

Elementárním zdrojem magnetického pole může být malá uzavřená proudová smyčka ve tvaru kružnice viz obrázek 1.5, taková smyčka generuje magnetické pole symetrické podle svislé osy procházející středem kruhu a intenzita tohoto pole je závislá na proudu I procházející smyčkou a obsahem plo-

chy kruhu S . Pokud budeme velikost smyčky zmenšovat $S \rightarrow 0$, získáme tzv. magnetický dipól, jehož pole je plně definováno vektorovou veličinou tzv. magnetickým momentem se základní jednotkou $[I \cdot S]$, který definuje orientaci a intenzitu tohoto pole [15].



Obrázek 1.5: Proudová smyčka

Zdroj vlastní

Na atomární úrovni každý elektron obíhající jádro atomu tvoří malou proudovou smyčku a atom samotný tedy může být zdrojem elementárního magnetického pole [15]. Silové interakce mezi magnetickými dipóly budeme rozebírat v kapitole 2.1.3.

1.2.3 Magnetizace

Vzhledem k tomu, že ve většině látek jsou magnetické dipóly nebo jejich shluky tzv. domény nahodile orientované, jejich působení se navzájem ruší a z vnějšího pohledu je generované magnetické pole nulové.

Při působení vnějšího magnetického pole jsou některé látky schopny jednotlivé dipóly zorientovat souhlasně tak, že výsledný magnetický moment je nenulový, a dochází tak k zesílení vnějšího magnetického pole. Některé látky jsou navíc schopné udržet si svou uspořádanou orientaci i po pomnutí účinků vnějšího magnetického pole.

Naopak existují látky jejichž atomy mají nulový magnetický moment, takže u nich k obdobnému jevu nedochází, a u některých dokonce dochází ke jevu, kdy se na základě působení vnějšího pole naopak změní uspořádání elektronového obalu atomu tak, že je výsledný magnetický moment opačně orientovaný oproti zdroji vnějšího pole, a dochází tak k zeslabení tohoto pole.

Všechny tyto změny, ke kterým dochází v látkách při vystavení vlivu vnějšího magnetického pole nazýváme magnetizace [23].

1.2.4 Permeabilita

Nejzákladnější vlastností definující silovou interakci látky s vnějším magnetickým polem je permeabilita. Permeabilita je vlastností všech látek i prostředí, značí se řeckým písmenem μ a její základní jednotkou je $[Hm^{-1}]$ nebo $[NA^{-2}]$. Magnetické pole se šíří i ve vakuu a permeabilita vakua představuje základní konstantu hodnoty permeability a značí se μ_0 .

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Hm^{-1} \quad (1.1)$$

Konstanta permeability vakua má z hlediska silové interakce speciální význam. Jak by se dalo očekávat, silové působení mezi vakuem a zdrojem magnetického pole je nulové, stejně tak je téměř nulové (zanedbatelné) pro látky nebo prostředí s permeabilitou blízkou vakuu ($\mu \sim \mu_0$).

Kromě permeability jako takové můžeme pracovat i s bezrozměrnou veličinou tzv. relativní permeabilitou, která se vztahuje právě na zmíněnou absolutní permeabilitu vakua a má tvar:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (1.2)$$

Relativní permeabilita vakua je tedy rovna 1 a látky s relativní permeabilitou $\mu_r \sim 1$ považujeme za nemagnetické, patří mezi ně např. vzduch.

Látky s relativní permeabilitou $\mu_r \in (0, 1)$ magnetické pole ve svém objemu zeslabují a nazýváme je diamagnetika. Vzájemné silové působení mezi zdrojem magnetického pole a diamagnetikem je odpudivého charakteru.

Speciálním případem diamagnetik jsou látky s relativní permeabilitou $\mu_r = 0$ tzv. dokonalá diamagnetika, která prakticky úplně vytěsňují magnetické pole ze svého objemu a vykazují relativně silnou odpudivou interakci se zdrojem magnetického pole.

Látky s relativní permeabilitou $\mu_r > 1$ magnetické pole ve svém objemu zesilují a jsou označovány jako paramagnetické. Silová interakce mezi paramagnetickou látkou a zdrojem magnetického pole je přitažlivého charakteru.

Látky s relativní permeabilitou $\mu_r \gg 1$ nazýváme feromagnetické. Feromagnetické látky magnetické pole ve svém objemu velmi zesilují a silová interakce se zdrojem vnějšího magnetického pole je silně přitažlivého charakteru. Feromagnetické látky mají navíc tu vlastnost, že jejich relativní permeabilita není konstantní, ale může se měnit v závislosti na intenzitě vnějšího magnetického pole [24].

Pro představu zde je tabulka několika látek s rozdílnými relativními permeabilitami:

Materiál	Relativní permeabilita - μ_r
Pyrolitický grafit	0,999 6
Voda	0,999 991
Vakuum	1
Plynný kyslík	1,000 001 86
Vzduch	1.000 000 37
Neodymium magnet	1.05
Železo	300 – 10 000
Permalloy	50 000 – 140 000

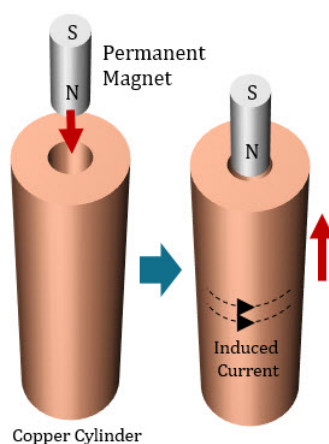
[24]

1.2.5 Indukované výřivé proudy

Doposud jsme se bavili o vlastnostech látek, které souvisí s působením vnějšího magnetického pole, hmota ovšem nemusí silově interagovat pouze s magnetickým polem jako takovým, ale i s jeho časovou změnou.

Na změnu magnetického pole reagují elektrické vodiče, u kterých při změně magnetického pole v jejich objemu dochází ke vzniku indukovaného elektrického proudu, který generuje magnetické pole, jež působí proti změně, která jej vyvolala. Pokud k tomuto jevu dochází ve vodiči s nenulovým odporem, indukovaný proud je tlumen a dochází k zahřání materiálu. [18]

Tento princip dobře demonstruje známý experiment, kdy necháme permanentní magnet propadnout zkrz měděnou trubku. Indukované pole brzdí padající magnet a zároveň jej okrádá o část kinetické energie, která se změní v teplo zahřívající trubku.



Obrázek 1.6: Magnet padající zkrz měděnou trubku

Induction Heating: What Is It How Does It Work? | RDO Induction L.L.C.. Industrial Induction Heating Systems Equipment | RDO Induction L.L.C.

[online]. Copyright © 2017 [cit. 19.05.2019]. Dostupné z: <https://rdoinduction.com/fundamentals-of-induction-heating.html>

1.3 Principy fungování magnetické levitace

1.3.1 Mechanická stabilizace

Docílit magnetické levitace pouze za použití permanentních magnetů není možné, jelikož jakákoliv konfigurace bude vždy nestabilní alespoň v jednom stupni volnosti. Samuel Earnshaw matematicky v roce 1842 dokázal obdobný princip pro elektrostatické náboje a jeho tzv. Earnshawovo pravidlo [5] je platné i pro soustavu permanentních magnetů.

Nejjednodušší způsob, jak tento problém obejít a docílit tak magnetické pseudolevitace je použití mechanické stabilizace, tedy zpravidla mechanickou fixací levitujícího permanentního magnetu ve směru nestabilních volností.

Mezi tyto pseudolevitace patří například odpuzující se magnety stabilizované provázky, dutý magnet stabilizovaný tyčkou, ale i rotující magnet (káča) který je stabilizován setrvačnou (odstředivou) silou, respektive tzv. gyroskopickým efektem.



Obrázek 1.7: Stabilizace tyčkou

Zdroj vlastní



Obrázek 1.8: Stabilizace gyroskopickým efektem

Magnetická levitace – Wikipedie. [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Magnetická_levitace



Obrázek 1.9: Stabilizace opěrem v horizontálním směru

IJARSMT - International Journal of Advanced Research in Science Management and Technology [online]. Copyright ©,0 [cit. 19.05.2019]. Dostupné z: <http://www.ijarsmt.com/docs/issues/drsanjay-purkar-naman-agrawal-naman-surana-257.pdf>

1.3.2 Časově proměnné pole

Magnetická levitace vyvolaná časově proměnným magnetickým polem je založena na vzniku výřivých proudů v elektricky vodivé látce, která zároveň nesmí mít příliš vysokou permeabilitu [22]. Měníme-li rychle magnetické pole, například puštěním střídavého proudu do cívky nebo rotací zdroje magnetického pole nesymetrického kolem osy otáčení, v levitujícím předmětu s dostatečnou vodivostí se indukuje magnetické pole, které vyvolá odpudivou silovou interakci se zdrojem proměnného magnetického pole. Vzhledem k tomu, že je toto pole indukováno přímo na základě zdroje, jeho orientace je neustále v dokonalém protikladu a dochází tak ke stabilní levitaci [22].

Hlavní nevýhodou této metody je, že i vodič s poměrně malým odporem jako například měď se při tomto procesu rychle zahřívá což je nepříznivé především kvůli energetickým ztrátám a dalším nežádoucím účinkům související-

cím se zahřátím levitujícího objektu.

Těchto vedlejších účinků se dá ovšem i využít, příkladem je tavení kovů pomocí magnetické levitace.



Obrázek 1.10: Tavení magnetickou levitací

Melting | TRUMPF. [online]. Copyright © 2019 [cit. 19.05.2019]. Dostupné z: https://www.trumpf.com/en_CA/applications/induction-heating/melting/

1.3.3 Diamagnetická levitace

Diamagnetická levitace není vázána Earnshawovým pravidlem a umožňuje stabilní konfigurace [22]. V určitém smyslu je nejlepším druhem magnetické levitace, jelikož nevyžaduje žádný přísun energie ke svému fungování. Problémem ovšem je, že běžně dostupné materiály vykazují jen velmi slabé diamagnetické vlastnosti, takže se nemohou znášet nad běžnými permanentními magnety, a k jejich levitaci je zapotřebí extrémně silného magnetického pole. Např. levitace vodních kapek, nebo malého živočicha jako je žába se podařilo docílit polem o velikosti okolo 16 tesla v laboratorních podmínkách [21]. Nejdostupnější způsob jak docílit diamagnetické magnetické levitace je patrně pomocí pyrolytického grafitu, který má dostatečně nízkou permeabilitu a zároveň malou hustotu, takže je schopen levitovat v poli tvořeném dostupnými permanentními magnety. Zdvihová síla v tomto případě je ovšem malá na to, aby bylo možné nadnášet větší množství dodatečného nákladu.

Větší zdvihovou sílu mají pochopitelně dokonalá diamagnetika, ty jsme však schopni v současnosti vytvořit pouze zchlazením supravodivých materiálů pod kritickou teplotu, která se u supravodičů I. typu pohybuje v blízkosti absolutní nuly a je potřeba je chladit tekutým heliem. Kritická teplota supravodičů II. typu je vyšší, takže ji lze dosáhnout chlazením pomocí tekutého dusíku, který je méně nákladný na výrobu [19], nicméně v obou případech kvůli

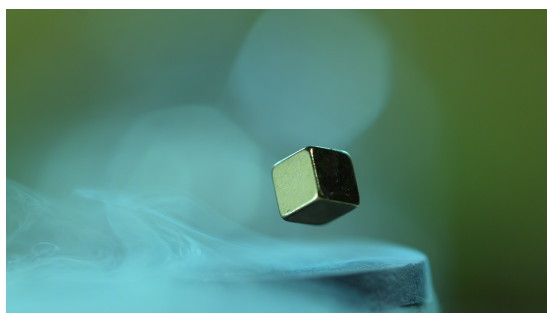
nutnosti výroby chladiv přicházíme o hlavní výhodu diamagnetické levitace totiž její nezávislost na přísunu energie.



Obrázek 1.11: Levitace pyrolytického grafitu

Chapter 1: Magnetism – Magnetic levitation without electricity. Science Toys | Science Toys [online]. Dostupné z:

https://scitoys.com/scitoys/scitoys/magnets/pyrolytic_graphite.html



Obrázek 1.12: Levitace nad supravodičem

[online]. Copyright © [cit. 19.05.2019]. Dostupné z: <http://ktf-usu.ru/images/79d51f4d7e4d54d54b55519c3b462d00.jpg>

1.3.4 Řízené pole

Magnetická levitace fungující na principu řízeného pole zpravidla využívá kombinace permanentních a elektromagnetů, kdy permanentní magnety mají za úkol působit zdvihovou silou a elektromagnety plní funkci stabilizační. Levitace se dosahuje pomocí zpětnovazebního řízení, které je závislé na informaci o výchylce z rovnovážného stavu, tato informace je získávána pomocí senzorů.

Energetická náročnost řízené levitace je dána především přesností regulace, pokud jsou odchylky od rovnovážného stavu rychle kompenzovány a její amplituda je malá, je zapotřebí pouze relativně malých zásahů ze strany elektromagnetů, které stojí energii. Tento způsob dosažení magnetické levitace má

zřejmě největší uplatnění v praxi, například u kolejové dopravy typu maglev. Jak je levitace dosáhnuta právě u maglevu je dobře shrnuto například v tomto článku [25]. Pro svou eleganci se magnetické levitace používá i k dekorativně orientovaným zařízením jako jsou třeba levitující glóby, nebo květináče.

Obdobným typem levitace, jako je na obrázku 1.14 se budeme ve zbytku práce zabývat podrobněji.



Obrázek 1.13: Transrapid maglev (Šanghaj)

Feds to spend \$27.8 million on D.C. to Baltimore maglev train study. [online]. Copyright ©2019 [cit. 19.05.2019]. Dostupné z:

<https://mashable.com/2015/11/09/maryland-maglev/?europa=true>



Obrázek 1.14: Magnetická levitace květináče

Floating Plant Pots? The Science Behind Making Things Levitate - The High Tech Society. The High Tech Society - Tech News, Reviews How To's

[online]. Dostupné z: <https://thehightechsociety.com/floating-plant-pots-science-behind-making-things-levitate/>

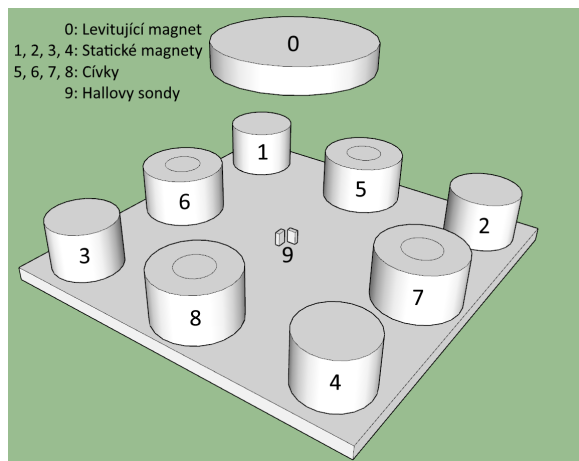
1.4 Řešená úloha

Ve zbytku práce se budeme zabývat konkrétním případem magnetické levitace. Jedná se o úlohu stabilizovat vznášející se permanentní magnet, jež levituje v poli tvořeném pevně ukotvených permanentních magnetů. Soustava se

kromě zmíněných pasivních prvků skládá ještě z pevně ukotvených solenoidových cívek umožňující akční zásahy do systému, z Hallových sond (senzorů) umožňujících sledování stavu levitujícího magnetu a číslicové výpočetní jednotky řídící proudy protékající cívkami.

V tomto případě využijeme konfigurace, kdy je levitující magnet nestabilní ve dvou stupních volnosti, a to v horizontálních souřadnicích x a y . Cílem bude tedy navržení optimálního regulátoru, respektive řídicího algoritmu, který bude generovat vhodné akční zásahy stabilizující celý systém, čímž bude docíleno magnetické levitace.

Úloha není řešena s cílem využití magnetické levitace ke konkrétnímu praktickému účelu, ale pro demonstraci potenciálu matematického modelování a zpětnovazebního řízení.



Obrázek 1.15: Nákres soustavy

Zdroj vlastní

2 Matematický model

2.1 Vytvoření nelineárního matematického modelu

Pro navržení optimálního regulátoru je zapotřebí v první řadě sestavit vhodný matematický model systému, který dobře popisuje jeho důležité fyzikální vlastnosti.

Naším úkolem je regulovat polohu a orientaci levitujícího magnetu, sčejžejní pro nás tedy bude popsat jeho dynamické chování na základě následujících vztahů:

1. Dynamika tuhého tělesa (z Newtonových pohybových zákonů)
2. Silové interakce magnetů odvozené pro magnetické dipóly (z Maxwellových rovnic)
3. Tíhové zrychlení (z Newtonova gravitačního zákona)

Na reálný systém mají pochopitelně vliv i další veličiny, které ovšem pro složitost odvození a předpokládaného malého vlivu na dynamiku zanedbáme. Mezi tyto vlivy by mohly patřit například aerodynamické vlastnosti nebo indukované vířivé proudy, vznikající ve vodičích pohybem magnetu a změnou polí cívek.

2.1.1 Výběr stavových proměnných

Jak už bylo řečeno, matematický model bude popisovat pohyb permanentního magnetu. Tento magnet volně umístěný ve 3D prostoru má celkem 6 stupňů volnosti, takže jeho libovolné polohy a orientace můžeme docílit kombinací třech ortogonálních translačních a třech ortogonálních rotačních operací. Z pohledu newtonovské mechaniky platí, že stav tělesa je plně definován jeho polohou a rychlostí pro každý stupeň volnosti. Zavádíme tedy pro systém celkem 12 stavových proměnných plně popisujících aktuální stav levitujícího magnetu.

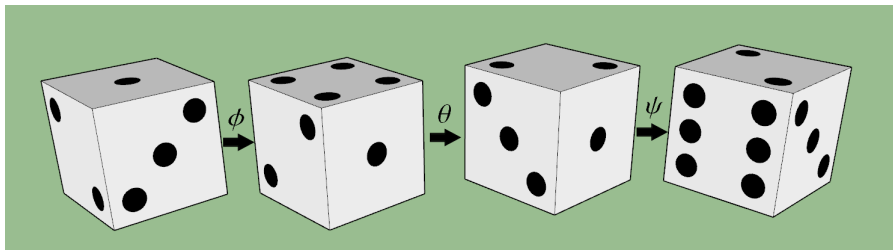
- a) 3 proměnné pro popis polohy: $\vec{x} = [x \ y \ z]^T$
- b) 3 proměnné pro popis translační rychlosti: $\dot{\vec{x}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$
- c) 3 proměnné pro popis orientace: $\vec{\Phi} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$
- d) 3 proměnné pro popis úhlové rychlosti: $\vec{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$

Popis polohy

Popis polohy je triviální, budeme ji popisovat standardním trojsložkovým vektorem v kartézských souřadnicích, stejně tak jako její časovou derivaci.

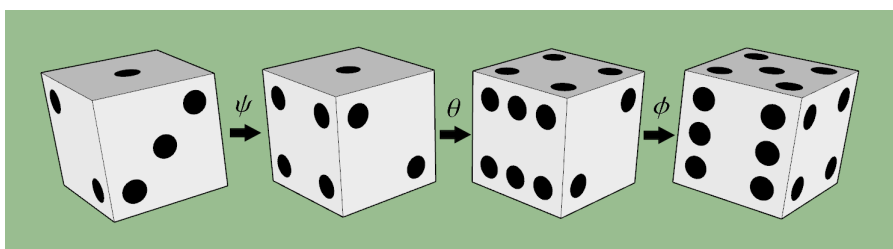
Popis orientace

Popis orientace v prostoru (dimenze větší než 2) je poněkud komplikovanější. Orientaci není možné vyjádřit obdobným způsobem jako polohu, tedy trojicí rotací kolem tří ortogonálních os, protože zatímco polohový vektor se dá rozložit na jednotlivé složky a translační operaci tak rozdělit do tří posunů ve směru jednotlivých os nezávisle na pořadí, pro rotaci stejná pravidla neplatí. Operace jednotlivých elementárních rotací nejsou komutativní tzn. aplikací identické trojice rotací v různém pořadí dosáhneme rozdílné orientace viz obrázek 2.1 a obrázek 2.2 pro orientaci popsanou trojicí úhlů $[\phi \theta \psi]^T = [\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}]^T$.



Obrázek 2.1: Rotace v pořadí $\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi$

Zdroj vlastní



Obrázek 2.2: Rotace v pořadí $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$

Zdroj vlastní

Z tohoto důvodu existuje celá řada způsobů, jak popisovat orientaci objektu ve 3D prostoru lišící se svým zápisem i výhodami a nevýhodami. Mezi nejznámější způsoby popisu orientace patří Eulerovy úhly, kvaterniony a rotační matice.

My zvolíme pro popis orientace Eulerovy úhly, jelikož se jedná o variantu patrně nejvíce intuitivní, k její hlavní nevýhodě, tzv. gimbal lock efektu, ne-

bude na okolí rovnovážného stavu docházet a navíc bude v tomto bodě velmi jednoduché rovnice nad Eulerovými úhly linearizovat.

Eulerovy úhly

Eulerovy úhly řeší problém s nekomutativností rotací tím způsobem, že zavádí jejich striktní pořadí. Je-li toto pořadí zachováno, uspořádaná trojice úhlů jednoznačně definuje natočení tělesa v prostoru. Existuje celkem 12 možných pořadí Eulerových úhlů, my budeme nadále používat pořadí $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, respektive $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$ [2].

Vztažné soustavy

Jelikož se orientace levitujícího magnetu vzhledem k pevné podstavě mění s časem, mění se spolu s ní i spousta vztahů potřebných k výpočtu dynamiky tělesa. Abychom výpočet usnadnili a zpřehlednili, je nezbytné zavést si kromě originální vztažné soustavy svázané s podstavou, ještě další vztažnou soustavu, jež bude kopírovat natočení levitujícího magnetu. Vztažnou soustavu spjatou se základnou, která je z pohledu okolního světa nehybná, označíme jako \mathcal{R}^w (world frame) a soustavu svázanou s pohybujícím se tělesem jako \mathcal{R}^b (body frame). Bázi \mathcal{R}^w bude tvořit $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ a bázi \mathcal{R}^b $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$.

Vzhledem k tomu, že Eulerovy úhly, jež používáme, jednoznačně definují orientaci \mathcal{R}^b vzhledem k \mathcal{R}^w , přirozeně lze na základě jejich hodnot přepočít libovolnou vektorovou veličinu vyjádřenou v jedné vztažné soustavě do soustavy druhé. Výpočet rotace vektoru vyjádřeného ve \mathcal{R}^w podle samostatných ϕ, θ, ψ je triviální jelikož se dá představit jako rotace ve 2D podprostoru a lze vyjádřit přenásobením daného vektoru jednou z následujících rotačních matic zleva [17]:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ pro rotaci } \phi \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ pro rotaci } \theta \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ pro rotaci } \psi \quad (2.3)$$

Jelikož jsme si zavedli striktní pořadí elementárních rotací $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$, lze tedy výslednou operaci popsat maticí vzniklou pronásobením elementárních rotačních matic v opačném pořadí:

$$\mathbf{C}_b^w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\phi) & s(\phi) \\ 0 & -s(\phi) & c(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & -s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(\psi) & s(\psi) & 0 \\ -s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

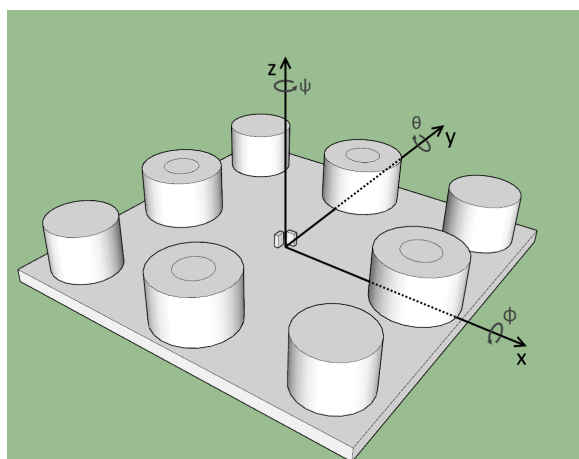
$$\mathbf{C}_b^w = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & c(\theta)s(\psi) & -s(\theta) \\ -c(\phi)s(\psi) + s(\phi)s(\theta)c(\psi) & c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\theta)s(\psi) & s(\phi)c(\theta) \\ s(\phi)s(\psi) + c(\phi)s(\theta)c(\psi) & -s(\phi)c(\psi) + c(\phi)s(\theta)s(\psi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Matice \mathbf{C}_b^w tedy převádí libovolný vektor vyjádřený v souřadnicích \mathcal{R}^w do souřadnic \mathcal{R}^b . Inverzní operace, čili převod souřadnic \mathcal{R}^b na \mathcal{R}^w , lze docílit totožnou pouze transformovanou maticí:

$$\mathbf{C}_w^b = \mathbf{C}_b^w{}^T = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & -c(\phi)s(\psi) + s(\phi)s(\theta)c(\psi) & s(\phi)s(\psi) + c(\phi)s(\theta)c(\psi) \\ c(\theta)s(\psi) & c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\theta)s(\psi) & -s(\phi)c(\psi) + c(\phi)s(\theta)s(\psi) \\ -s(\theta) & s(\phi)c(\theta) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Počátek soustavy souřadnic

Jako počátek soustavy souřadnic si zavedeme pro \mathcal{R}^w bod, který se nachází uprostřed základny a pro \mathcal{R}^b těžiště levitujícího magnetu. Orientace souřadnic \mathcal{R}^w bude (viz obrázek 2.3) a \mathcal{R}^b bude souhlasně orientovaná pro nulové Eulerovy úhly $[\phi \ \theta \ \psi]^T = [0 \ 0 \ 0]$.



Obrázek 2.3: Souřadný systém

Zdroj vlastní

2.1.2 Model levitujícího permanentního magnetu

Vlastnosti levitujícího magnetu se dají rozdělit do dvou základních kategorií, do vlastností mechanických, pro které budeme magnet považovat za tuhé těleso ve tvaru válce a do vlastností magnetických, které odvodíme pro magnetický dipól nacházející se v těžišti tělesa.

Levitující magnet necht' je z mechanického hlediska homogenní tuhé těleso ve tvaru válce s poloměrem R , výškou h a hustotou ρ , z čehož i vyplývající hmotností m a tenzorem momentu setrvačnosti \mathbf{I} , který je ve vztažné soustavě \mathcal{R}^b konstantní:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}mh^2 + \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mh^2 + \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Z hlediska magnetického, necht' je magnet definován vektorem magnetického momentu \vec{m}_0 , respektive jeho konstantní velikostí $\|\vec{m}_0\|$ a orientací kopírující orientaci tuhého tělesa. Ve vztažné soustavě \mathcal{R}^b je jeho podoba konstantní a má tvar:

$$\vec{m}_0^b = \|\vec{m}_0\| \cdot [0 \ 0 \ 1]^T \quad (2.8)$$

Pro další výpočty budeme potřebovat znát tvar tohoto magnetického momentu výhradně ve vztažné soustavě \mathcal{R}^w . Odvodíme jej na základě vztahu 2.6 přenásobením maticí \mathbf{C}_w^b :

$$\vec{m}_0 = \|\vec{m}_0\| \cdot [q_{0x} \ q_{0y} \ q_{0z}]^T$$

kde

$$\begin{aligned} q_{0x} &= \sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) \\ q_{0y} &= -\sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) \\ q_{0z} &= \cos(\phi)\cos(\theta) \end{aligned}$$

2.1.3 Model statických permanentních magnetů

Všechny čtyři statické permanentní magnety jsou napevno umístěné v konstrukci a jejich polohu i orientaci tedy budeme z hlediska vztažné soustavy \mathcal{R}^w považovat za konstantní.

Magnetické vlastnosti každého ze čtyř statických magnetů, necht' jsou definovány vektorem magnetického momentu, který je ve \mathcal{R}^w konstantní jak velikostí tak svojí orientací a má jednoduchý tvar:

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_2 = \vec{m}_3 = \vec{m}_4 = \|\vec{m}_1\| \cdot [0 \ 0 \ 1]^T \quad (2.9)$$

Tvar ve vztažné soustavě \mathcal{R}^b nebudeme potřebovat.

Každý ze čtyř magnetů působí na levitující magnet silou a momentem síly. Magnetické pole každého ze statických magnetů budeme popisovat rovnicí magnetické indukce pro magnetický dipól ve tvaru [15]:

$$\vec{B}_p(\vec{r}_p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{r}_p(\vec{m}_p \cdot \vec{r}_p)}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{\vec{m}_p}{\|\vec{r}_p\|^3} \right) \quad (2.10)$$

kde p je index p -tého magnetického dipólu (magnetu) a vzhledem k tomu, že nás bude zajímat hodnota magnetické indukce statického magnetu vždy v místě těžiště levitujícího magnetu, polohový vektor \mathbf{r}_p bude v našich rovnicích vždy představovat relativní polohu levitujícího magnetu vzhledem ke statickému magnetu p a r_p bude rovno jejich vzdálenosti.

Dále pro silové působení mezi levitujícím magnetem a p -tým statickým magnetem platí [15]:

$$\vec{F}_p = \nabla(\vec{m}_0 \cdot \vec{B}_p) \quad (2.11)$$

$$\vec{F}_p(\vec{r}_p, \vec{m}_0, \vec{m}_p) = \frac{3\mu_0}{4\pi\|\vec{r}_p\|^5} \left[(\vec{m}_0 \cdot \vec{r}_p)\vec{m}_p + (\vec{m}_p \cdot \vec{r}_p)\vec{m}_0 + (\vec{m}_0 \cdot \vec{m}_p)\vec{r}_p - \frac{5(\vec{m}_0 \cdot \vec{r}_p)(\vec{m}_p \cdot \vec{r}_p)}{\|\vec{r}_p\|^2}\vec{r}_p \right] \quad (2.12)$$

$$\vec{F}_p = [F_x \ F_y \ F_z]^T$$

$$F_x = \frac{3\mu_0 m_0 m_2}{4\pi} \left[\frac{z_0 q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{(x_0 - x_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} - 5 \frac{z_0 (x_0 - x_p) [(x_0 - x_p) q_{0x} + (y_0 - y_p) q_{0y} + z_0 q_{0z}]}{\|\vec{r}_p\|^7} \right] \quad (2.13)$$

$$F_y = \frac{3\mu_0 m_0 m_2}{4\pi} \left[\frac{z_0 q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{(y_0 - y_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} - 5 \frac{z_0 (y_0 - y_p) [(x_0 - x_p) q_{0x} + (y_0 - y_p) q_{0y} + z_0 q_{0z}]}{\|\vec{r}_p\|^7} \right] \quad (2.14)$$

$$F_z = \frac{3\mu_0 m_0 m_2}{4\pi} \left[\frac{2z_0 q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{[(x_0 - x_p) q_{0x} + (y_0 - y_p) q_{0y} + z_0 q_{0z}]}{\|\vec{r}_p\|^7} - 5 \frac{z_0^2 [(x_0 - x_p) q_{0x} + (y_0 - y_p) q_{0y} + z_0 q_{0z}]}{\|\vec{r}_p\|^7} \right] \quad (2.15)$$

a moment síly je definovaný jako [15]:

$$\vec{\tau}_p = [T_x \ T_y \ T_z]^T = \vec{m}_0 \times \vec{B}_p \quad (2.16)$$

$$T_x = \frac{\mu_0 m_0 m_2}{4\pi} \left[\frac{3(z_0 - z_p)^2 q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^3} - \frac{3(y_0 - y_p)(z_0 - z_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} \right] \quad (2.17)$$

$$T_y = \frac{\mu_0 m_0 m_2}{4\pi} \left[\frac{3(x_0 - x_p)(z_0 - z_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{3(z_0 - z_p)^2 q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^3} \right] \quad (2.18)$$

$$T_z = \frac{\mu_0 m_0 m_2}{4\pi} \left[\frac{3(y_0 - y_p)(z_0 - z_p) q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{3(x_0 - x_p)(z_0 - z_p) q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} \right] \quad (2.19)$$

Statické permanentní magnety spolu s gravitací určují dynamiku neřízeného systému.

2.1.4 Model solenoidových cívek

Silová působení solenoidových cívek budeme modelovat stejně jako pro permanentní magnety s tím rozdílem, že magnetický moment se může měnit v čase na základě protékajícího proudu řízeného vstupem u . Cívky budou rozděleny do dvou dvojic tím způsobem, že bude každá cívka zapojena do série s

cívkou umístěnou naproti. Navíc v obou dvojicích budou cívky zapojeny tak, že bude proud procházet opačným směrem a pro jejich magnetické momenty tak bude platit následující vztah:

$$\begin{aligned} -\vec{m}_5 = \vec{m}_8 &= K_s \cdot u_1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T \\ -\vec{m}_7 = \vec{m}_6 &= K_s \cdot u_2 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T \end{aligned} \quad (2.20)$$

kde K_s je konstanta daná součinem počtu závitů a průměrné plochy uvnitř závitů a u_{1-2} jsou řízené proudy protékající cívkami:

$$\begin{aligned} \|m_5\| &= nIA \\ \|m_5\| &= K_s u_1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Výsledný magnetický moment cívky bude podléhat saturaci způsobené omezeným příkonem zdroje elektrického napětí a akční zásahy na tomto omezeném intervalu jsou navíc kvantizovány, jelikož součástka řídicí proudy operuje na základě 9bitové digitální informace.

Úkolem cívek je působit na nestabilní systém tím způsobem, aby se stal stabilním. Schopnost kompenzace odchylek od rovnovážného stavu je ekvivalentní s říditelností, tedy existencí řízení $u(t)$, které vychýlený systém dokáže dopravit zpět do nulového (rovnovážného) stavu.

Definice 2 (Řiditelnost) "Spojitý lineární dynamický systém je říditelný, jestliže $\forall x(t_0) \neq 0, x(t_0) \in R^n$ existuje řízení $u(t)$ na konečném časovém intervalu $t \in [t_0, t_1]$, které způsobí změnu daného počátečního stavu systému $x(t_0)$ v koncový stav $x(t_1) = 0$." [3]

Řiditelnost systému definovaného stavovým popisem $\{A, B, C, D\}$ se dá snadno ověřit porovnáním dimenze stavu s hodnotí matice říditelnosti:

Věta 1 "Spojitý lineární dynamický systém je říditelný \iff hodnota matice říditelnosti Q_r je rovna dimenzi vektoru stavu $x(t)$ " [3]:

$$h[Q_r] = h[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = \dim x(t) = n \quad (2.22)$$

2.1.5 Model senzorů

Pro úspěšné řízení magnetické levitace bychom v ideálním případě potřebovali znát stav levitujícího magnetu v každém časovém okamžiku. Měřit kompletní stav přímo není ovšem technicky triviální, budeme se proto muset spokojit

s výstupem systému, který zajišťuje jeho pozorovatelnost, respektive rekonstruovatelnost. Jelikož pozorovatelnost je silnější vlastnost než-li rekonstruovatelnost, tedy každý pozorovatelný systém je i zároveň rekonstruovatelný, budeme dále pracovat pouze s pozorovatelností.

Definice 3 (Pozorovatelnost) "Spojitý lineární dynamický systém je **pozorovatelný**, jestliže pozorováním vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ na konečném časovém intervalu $t \in [t_0, t_1]$ lze určit počáteční stav systému $x(t_0)$." [3]

Pozorovatelnost systému definovaného stavovým popisem $\{A, B, C, D\}$ se dá snadno ověřit porovnáním dimenze stavu s hodnotí matice pozorovatelnosti:

Věta 2 "Spojitý lineární dynamický systém je **pozorovatelný** \iff hodnota matice pozorovatelnosti Q_p je rovna dimenzi vektoru stavu $x(t)$ " [3]:

$$h[Q_p] = h \begin{bmatrix} C^T & C^T A & \dots & C^T A^{n-1} \end{bmatrix}^T = \dim x(t) = n \quad (2.23)$$

Hallova Sonda

Pro získání vhodného výstupu ze systému použijeme Hallovy sondy.

Hallova sonda je analogový senzor, jehož výstupem je napětí, které je na omezeném intervalu lineárně úměrné indukčnímu toku procházející jeho senzorickou ploškou.

Budeme-li uvažovat, že ploška našich senzorů je velmi malá, bude magnetická indukce napříč ploškou téměř homogenní a můžeme předpokládaný procházející indukční tok aproximovat kolmou složkou magnetické indukce v místě středu plošky násobenou samotnou plochou senzorické plošky S .

Dostáváme:

$$U_{out} = K_h \cdot B \quad (2.24)$$

Kde U_{out} budeme značit výstupní napětí hallovy sondy, které je dáno konstantou K_h zahrnující velikost plochy S a další fyzikální vlastnosti senzoru, zatímco B je hodnota kolmé složky magnetické indukce v místě středu senzoru.

Budeme tedy vyšetřovat bodovou hodnotu magnetické indukce vždy v místě senzoru. Magnetická indukce v každém bodu prostoru v rámci našeho levitujícího zařízení je funkcí polohy a orientace levitujícího magnetu a proudů proudících v solenoidových cívkách, dále je její hodnota dána vlivem statických magnetů, který je konstantní.

Proud proudící v cívkách ze senzorů zjišťovat nepotřebujeme, jelikož o něm sami budeme rozhodovat, nabízí se tedy zvolit umístění a orientaci senzorů tím způsobem, aby nebyli ovlivněni působením cívek a ideálně ani působením statických permanentních magnetů. Jelikož všechny magnety a cívky statické základny leží v jedné rovině a jejich magnetické momenty jsou na tuto rovinu vždy kolmé, hodnoty magnetické indukce v této ploše jsou nulové ve složkách B_x a B_y , magnetická indukce je zde plně soustředěna do složky B_z (rovnice 2.10 při dosazení nulového z).

Jelikož hallový sondy měří pouze indukční tok kolmý na jejich plošku, při osazení do zmíněné plochy tak, aby na ni byla ploška senzoru kolmá, bude rušení ze strany cívek a statických magnetů minimální (teoreticky nulové).

Vhodným umístěním senzorů můžeme měřit tedy čistě pole generované levitujícím magnetem. Hodnota magnetické indukce v místě osazení senzoru o souřadnicích:

$$\vec{x}_h = [x_h \ y_h \ z_h]^T$$

bude rovna:

$$\vec{B}(\vec{x}_0, \vec{m}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3[\vec{x}_h - \vec{x}_0](\vec{m}_0 \cdot [\vec{x}_h - \vec{x}_0])}{\|\vec{x}_h - \vec{x}_0\|^5} - \frac{\vec{x}_0}{\|\vec{x}_h - \vec{x}_0\|^3} \right\} \quad (2.25)$$

Pro zajištění pozorovatelnosti řízeného stavu magnetu je zapotřebí alespoň dvou Hallových sond ve výše definovaném prostoru, tak aby zároveň nebyly jejich plošky navzájem rovnoběžné. Pro celkové zpřehlednění a zjednodušení rovnic umístíme sondy měřící indukci ve směru y na osu y a sondy měřící indukci ve směru x na osu x .

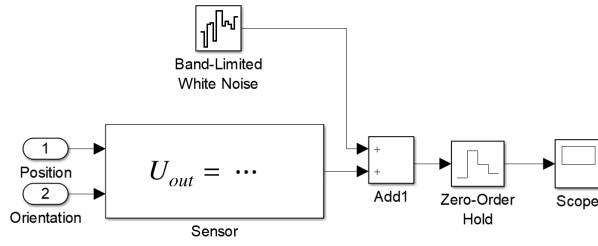
Tímto způsobem můžeme odvodit očekávaný výstup senzoru na ose x :

$$U_{out}^x = K_h \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \left(\frac{3[x_h - x](q_{0x}[x_h - x] - q_{0y}y - q_{0z}z)}{\|\vec{x}_h - \vec{x}_0\|^5} - \frac{q_{0x}}{\|\vec{x}_h - \vec{x}_0\|^3} \right) = h_1 \quad (2.26)$$

a obdobně určíme očekávaný výstup senzoru na ose y :

$$U_{out}^y = K_h \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \left(\frac{3[y_h - y](-q_{0x}x + q_{0y}[y_h - y] - q_{0z}z)}{\|\vec{x}_h - \vec{x}_0\|^5} - \frac{q_{0y}}{\|\vec{x}_h - \vec{x}_0\|^3} \right) = h_2 \quad (2.27)$$

Senzory jsou zatíženy šumem, který se dá dobře modelovat bílým šumem. Akčkoliv je výstup senzoru analogový, dochází k jeho zpracování digitální výpočetní jednotkou v diskretních časových okamžicích, tudíž výstup modelu senzoru budeme diskretizovat metodou zero-order-hold. Výsledný model senzoru se dá znázornit následujícím schématem na obrázku:



Obrázek 2.4: Schéma modelu senzoru

Rekonstrukcí skutečného stavu levitujícího magnetu z výstupů senzorů se budeme zabývat v rámci již linearizovaného modelu v kapitole 3.3.

Bližší informace o fungování Hallových sond lze nalézt například v tomto článku [6].

2.1.6 Soustava diferenciálních rovnic

Soustavu diferenciálních rovnic popisujících chování systému odvodíme pomocí Newton-Eulerovy metody, jelikož je relativně snadné dát dohromady všechny přímé síly a momenty sil působících na levitující magnet.

Nejzákladnějším vztahem potřebným k odvození rovnic popisujících dynamiku systému je druhý Newtonův zákon, který objasňuje vztah mezi působící silou a zrychlením, respektive druhou časovou derivací polohy tělesa. Výpočet polohy bude probíhat výhradně ve vztažné soustavě pevně spojené s podstavou \mathcal{R}^w :

$$\ddot{\vec{x}}_m = m\vec{g} + \sum_{n=1}^8 \vec{F}_n \quad (2.28)$$

kde \vec{g} je gravitační zrychlení a \vec{F}_n je síla, kterou působí n-tý prvek statické soustavy (magnet nebo cívka) na levitující magnet.

Obdobně platí souvislost mezi úhlovým zrychlením, respektive časovou derivací úhlové rychlosti a působícím momentem síly, s tím rozdílem, že pro usnadnění bude výpočet prováděn výhradně ve vztažné soustavě rotující spolu s tělesem \mathcal{R}^b :

$$\mathbf{I}\dot{\vec{\omega}} = -\vec{\omega} \times \mathbf{I}\vec{\omega} + \sum_{n=1}^8 \mathbf{C}_b^w \vec{\tau}_n \quad (2.29)$$

kde τ_n je moment síly, kterým působí n-tý prvek (magnet nebo cívka) na levitující magnet. Do rovnice dynamiky rotace tělesa navíc vstupuje gyroskopický člen, který je definovaný vztahem $-\vec{\omega} \times \mathbf{I}\vec{\omega}$ [16].

Kvůli komplikacím vyvolaných nekomutativnostmi rotací, které byly diskutovány v kapitole 2.1.1 neplatí to, že by byla úhlová rychlost přímou časovou derivací Eulerových úhlů, souvislost mezi úhlovou rychlostí a hledanou derivací se však dá odvodit na základně následujícího vztahu [16]:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\phi) & s(\phi) \\ 0 & -s(\phi) & c(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & -s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\phi) & s(\phi) \\ 0 & -s(\phi) & c(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Po vhodné úpravě dostáváme tvar:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega_1 + (\omega_2 \sin \phi + \omega_3 \cos \phi) \tan \theta \\ \dot{\theta} &= \omega_2 \cos \phi - \omega_3 \sin \phi \\ \dot{\psi} &= (\omega_2 \sin \phi + \omega_3 \cos \phi) \sec \theta \end{aligned} \quad (2.31)$$

Z rovnic 2.31 je dobře patrný problém gimbal lock efektu, neboť pro θ blízké bodům $\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ rostou nebo klesají $\dot{\phi}$ a $\dot{\psi}$ nad všechny meze, což přirozeně zapříčiní velké chyby numerických výpočtů, a v samotných bodech nejsou tyto derivace vůbec definované.

Pro modelování dynamiky rotace tělesa použijeme tedy soustavu šesti diferenciálních rovnic, narozdíl od modelování translace, kde si vystačíme se třemi. Celkem tedy dostáváme devět diferenciálních rovnic, jejichž řešením je dynamické chování magnetu v čase.

Výsledná soustava devíti diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{3\mu_0 m_0 m_2}{4\pi m} \sum_{p=1}^4 \left[\frac{z_0 q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{(x_0 - x_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} - 5 \frac{z_0 (x_0 - x_p) [(x_0 - x_p) q_{0x} + (y_0 - y_p) q_{0y} + z_0 q_{0z}]}{\|\vec{r}_p\|^7} \right] + \\ &+ \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=5} - \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=6} + \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=7} - \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=8} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{3\mu_0 m_0 m_2}{4\pi m} \sum_{p=1}^4 \left[\frac{z_0 q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{(y_0 - y_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} - 5 \frac{z_0 (y_0 - y_p) [(x_0 - x_p) q_{0x} + (y_0 - y_p) q_{0y} + z_0 q_{0z}]}{\|\vec{r}_p\|^7} \right] + \\ &+ \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=5} - \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=6} + \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=7} - \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=8} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{z} = & \frac{3\mu_0 m_0 m_2}{4\pi m} \sum_{p=1}^4 \left[\frac{2z_0 q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{[(x_0 - x_p)q_{0x} + (y_0 - y_p)q_{0y} + z_0 q_{0z}]}{\|\vec{r}_p\|^7} - \right. \\
& \left. - 5 \frac{z_0^2 [(x_0 - x_p)q_{0x} + (y_0 - y_p)q_{0y} + z_0 q_{0z}]}{\|\vec{r}_p\|^7} \right] - g + \\
& + \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=5} - \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=6} + \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=7} - \frac{3\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi m} \left[\dots \right]_{p=8}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 = & \frac{I_3 - I_2}{I_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{\mu_0 m_0 m_2}{4\pi I_1} \sum_{p=1}^4 \left\{ \right. \\
& \cos(\theta) \cos(\psi) \left[\frac{3(z_0 - z_p)^2 q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^3} - \frac{3(y_0 - y_p)(z_0 - z_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} \right] + \\
& + \cos(\theta) \sin(\psi) \left[\frac{3(x_0 - x_p)(z_0 - z_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{3(z_0 - z_p)^2 q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^3} \right] + \\
& + -\sin(\theta) \left[\frac{3(y_0 - y_p)(z_0 - z_p) q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{3(x_0 - x_p)(z_0 - z_p) q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} \right] \left. \right\} + \\
& + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_1} \left\{ \dots \right\}_{p=5} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_1} \left\{ \dots \right\}_{p=6} + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_1} \left\{ \dots \right\}_{p=7} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_1} \left\{ \dots \right\}_{p=8}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_2 = & \frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_1 \omega_3 + \frac{\mu_0 m_0 m_2}{4\pi I_2} \sum_{p=1}^4 \left\{ \right. \\
& (-c(\phi)s(\psi) + s(\phi)s(\theta)c(\psi)) \left[\frac{3(z_0 - z_p)^2 q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^3} - \frac{3(y_0 - y_p)(z_0 - z_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} \right] + \\
& + (c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\theta)s(\psi)) \left[\frac{3(x_0 - x_p)(z_0 - z_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{3(z_0 - z_p)^2 q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^3} \right] + \\
& + \sin(\phi) \cos(\theta) \left[\frac{3(y_0 - y_p)(z_0 - z_p) q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{3(x_0 - x_p)(z_0 - z_p) q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} \right] \left. \right\} + \\
& + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_2} \left\{ \dots \right\}_{p=5} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_2} \left\{ \dots \right\}_{p=6} + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_2} \left\{ \dots \right\}_{p=7} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_2} \left\{ \dots \right\}_{p=8}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_3 = & \frac{I_2 - I_1}{I_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{\mu_0 m_0 m_2}{4\pi I_3} \sum_{p=1}^4 \left\{ \right. \\
& (s(\phi)s(\psi) + c(\phi)s(\theta)c(\psi)) \left[\frac{3(z_0 - z_p)^2 q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^3} - \frac{3(y_0 - y_p)(z_0 - z_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} \right] + \\
& - (s(\phi)c(\psi) - c(\phi)s(\theta)s(\psi)) \left[\frac{3(x_0 - x_p)(z_0 - z_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{3(z_0 - z_p)^2 q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^3} \right] + \\
& + \cos(\phi) \cos(\theta) \left[\frac{3(y_0 - y_p)(z_0 - z_p) q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{3(x_0 - x_p)(z_0 - z_p) q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} \right] \left. \right\} + \\
& + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_3} \left\{ \dots \right\}_{p=5} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_3} \left\{ \dots \right\}_{p=6} + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_3} \left\{ \dots \right\}_{p=7} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_3} \left\{ \dots \right\}_{p=8}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\dot{\phi} = \omega_1 + (\omega_2 \sin \phi + \omega_3 \cos \phi) \tan \theta \tag{2.38}$$

$$\dot{\theta} = \omega_2 \cos \phi - \omega_3 \sin \phi \tag{2.39}$$

$$\dot{\psi} = (\omega_2 \sin \phi + \omega_3 \cos \phi) \sec \theta \tag{2.40}$$

kde trojice teček ... představuje substituci předcházejícího výrazu ohraničeného specifickým typem závorek s příslušným indexem p a $\|\vec{r}_p\|$ představuje vzdálenost p -tého prvku (magnetu, nebo cívký) od těžiště levitujícího magnetu.

2.2 Vytvoření linearizovaného modelu

Systém popsaný soustavou nelineárních diferenciálních rovnic poskytuje sice dobrý odhad chování reálného systému téměř v libovolném stavu, ovšem pro jeho analýzu pro potřeby nalezení vhodného regulátoru se jedná o způsob popisu nadmíru složitý. Omezíme-li se však na dostatečně malé okolí nějakého pracovního bodu, chová se každý systém téměř lineárně, a nabízí se tak nahrazení modelu za linearizovaný, na který se dá uplatnit matematický aparát lineárních systémů, čímž bychom si zásadně usnadnili návrh regulačního algoritmu.

V našem případě budeme linearizaci provádět v rovnovážném bodě, kde jsou veškeré síly v rovnováze a magnet zůstává v klidu, což je přesně stav, kdy dochází k dokonalé levitaci.

2.2.1 Nalezení rovnovážného stavu

Rovnovážný stav nalezneme, položíme-li derivace všech stavových proměnných rovny nule a vyřešíme vzniklou soustavu nelineárních rovnic. Nalezení tohoto řešení si podstatně usnadníme, budeme-li předpokládat, že se hledané řešení nachází na ose z pro nulové Eulerovy úhly. Pak už stačí pouze vyřešit rovnici 2.34 s jedinou neznámou z_0 .

Existují celkem 4 reálná řešení, tedy i 4 rovnovážné body. Nás bude zajímat pouze bod s nejvyšší hodnotou z_0 , jelikož ostatní 3 body jsou nestabilní v souřadnici z , a navíc architektura zařízení ani neumožňuje umístění levitujícího magnetu do těchto míst.

Řešení provedeme numericky pomocí MATLABu.

Řešení

$$\begin{aligned}\phi_r &= 0 & x_r &= 0 \\ \theta_r &= 0 & y_r &= 0 \\ \psi_r &= 0 & z_r &= 3.1145 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

2.2.2 Stavový popis

Výběr stavových proměnných byl již diskutován výše, pro zpřehlednění procesu linearizace si nyní stavové proměnné ucelíme do následující struktury:

$$\begin{aligned}x_1 &= x & \dot{x}_1 &= x_7 & &= f_1 \\ x_2 &= y & \dot{x}_2 &= x_8 & &= f_2 \\ x_3 &= z & \dot{x}_3 &= x_9 & &= f_3 \\ x_4 &= \phi & \dot{x}_4 &= x_{10} & &= f_4 \\ x_5 &= \theta & \dot{x}_5 &= x_{11} & &= f_5 \\ x_6 &= \psi & \dot{x}_6 &= x_{12} & &= f_6 \\ x_7 &= \dot{x} & \dot{x}_7 &= \text{rovnice 2.32} & &= f_7 \\ x_8 &= \dot{y} & \dot{x}_8 &= \text{rovnice 2.33} & &= f_8 \\ x_9 &= \dot{z} & \dot{x}_9 &= \text{rovnice 2.34} & &= f_9 \\ x_{10} &= \dot{\phi} & \dot{x}_{10} &= \text{rovnice 2.48} & &= f_{10} \\ x_{11} &= \dot{\theta} & \dot{x}_{11} &= \text{rovnice 2.49} & &= f_{11} \\ x_{12} &= \dot{\psi} & \dot{x}_{12} &= \text{rovnice 2.50} & &= f_{12}\end{aligned}\tag{2.41}$$

$$x(t) = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{12}]^T\tag{2.42}$$

Dynamiku systému popsaného těmito stavovými proměnnými můžeme chápat jako závislost elementárních změn jednotlivých stavových proměnných na změnu jejich časových derivací, jakož i změnu časových derivací proměnných ostatních.

Jelikož vytváříme linearizovaný systém, nahradíme jednotlivé závislosti jejich Taylorovými polynomy prvního stupně, kde nultý člen polynomu tvoří hodnoty rovnovážného stavu a člen první tvoří parciální derivace časové derivace i -té stavové proměnné podle j -té stavové proměnné. Výsledný popis linearizovaného systému pak bude mít tvar [3]:

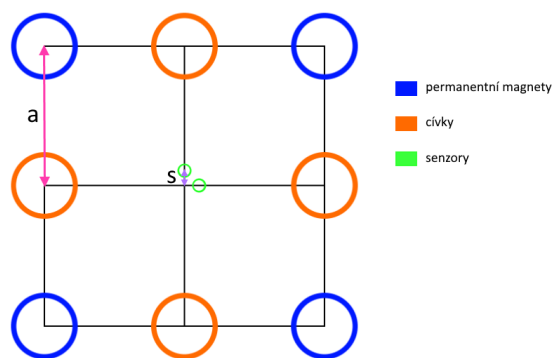
$$\begin{aligned}x(t) &= x_r + \Delta x(t) \\u(t) &= u_{konst} + \Delta u(t) \\y(t) &= y_r + \Delta y(t)\end{aligned}\tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t)\end{aligned}\tag{2.44}$$

kde znak Δ značí tzv. přírůstkové proměnné, neboli odchylku dané proměnné od výchozího rovnovážného stavu.

2.2.3 Rozložení prvků v podstavě

Permanentní magnety a cívky jsou v podstavě rozmístěny do čtverce o straně $2 \cdot a$ a senzory jsou ve vzdálenosti s od středu (viz obrázek 2.5). Hodnoty a a s využijeme k vyčíslení výsledků parciálních derivací v následujících kapitolách.



Obrázek 2.5: Schéma rozložení

Zdroj vlastní

2.2.4 Matice A

A je matice dynamiky, která je tvořena parciálními derivacemi (viz rovnice 2.45). Prvek matice na i-tém řádku a j-tém sloupci zde definuje změnu časové derivace i-té stavové proměnné na základě jednotkové změny proměnné j-té.

$$A = \left. \frac{\partial f[.]}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(.)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(.)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(.)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(.)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} \quad [3] \quad (2.45)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prvky a_{11} , a_{15} , a_{22} , a_{24} a a_{33} dostaneme snadno parciálními derivacemi příslušných rovnic podle příslušných stavových proměnných.

$$a_{11} = \left. \frac{\partial f_7}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_2\| \cdot \|\vec{m}_0\|}{4\pi m} \cdot \left(\frac{4}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{20a^2}{\|\vec{r}_p\|^7} + \frac{140a^2 z_r^2}{\|\vec{r}_p\|^9} - \frac{20z_r^2}{\|\vec{r}_p\|^7} \right) = 662.0$$

$$a_{15} = \left. \frac{\partial f_7}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_2\| \cdot \|\vec{m}_0\|}{4\pi m} \cdot \left(\frac{4z_r}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{20z_r a^2}{\|\vec{r}_p\|^7} \right) = -4.907$$

$$a_{22} = \left. \frac{\partial f_8}{\partial y} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_2\| \cdot \|\vec{m}_0\|}{4\pi m} \cdot \left(\frac{4}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{20a^2}{\|\vec{r}_p\|^7} + \frac{140a^2 z_r^2}{\|\vec{r}_p\|^9} - \frac{20z_r^2}{\|\vec{r}_p\|^7} \right) = 662.0$$

$$a_{24} = \left. \frac{\partial f_8}{\partial y} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_2\| \cdot \|\vec{m}_0\|}{4\pi m} \cdot \left(\frac{4z_r}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{20z_r a^2}{\|\vec{r}_p\|^7} \right) = 4.907$$

$$a_{33} = \left. \frac{\partial f_9}{\partial z} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_2\| \cdot \|\vec{m}_0\|}{4\pi m} \cdot \left(\frac{12}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{120z_r^2}{\|\vec{r}_p\|^7} + \frac{140z_r^4}{\|\vec{r}_p\|^9} \right) = \dots$$

Vzhledem k tomu, že dynamiku orientace máme rozepsanou do šesti diferenciálních rovnic, je pro linearizaci zapotřebí provést několik úvah.

Vzhledem ke tvaru rovnovážného stavu budou vztažné soustavy \mathcal{R}^w a \mathcal{R}^b navzájem ekvivalentní:

$$[\phi \ \theta \ \psi]^T = [0 \ 0 \ 0]^T \implies \mathcal{R}^w = \mathcal{R}^b \quad (2.46)$$

Pokud pro tento stav \mathcal{R}^w splývá s \mathcal{R}^b , nemusíme dále rozlišovat souřadnice proměnných v rozdílných vztažných soustavách a bude na základě vztahu 2.31 platit i následující:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = \omega_1 &\implies \ddot{\phi} = \dot{\omega}_1 \\ \dot{\theta} = \omega_2 &\implies \ddot{\theta} = \dot{\omega}_2 \\ \dot{\psi} = \omega_3 &\implies \ddot{\psi} = \dot{\omega}_3 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Za těchto předpokladů můžeme pro odvození lineárního systému sloučit rovnice 2.35 - 2.40 a získáváme pouze 3 rovnice:

$$\begin{aligned} f_{10} = \ddot{\phi} = & \frac{(I_3 - I_2)}{I_1} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{\mu_0 m_2 m_0}{4\pi I_1} \sum_{n=1}^4 \left[\frac{3(z_0 - z_p)^2 q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^3} - \frac{3(y_0 - y_p)(z_0 - z_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} \right] + \\ & + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_1} \left[\dots \right]_{p=5} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_1} \left[\dots \right]_{p=6} + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_1} \left[\dots \right]_{p=7} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_1} \left[\dots \right]_{p=8} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} f_{11} = \ddot{\theta} = & \frac{(I_1 - I_3)}{I_2} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{\mu_0 m_2 m_0}{4\pi I_2} \sum_{n=1}^4 \left[\frac{3(x_0 - x_p)(z_0 - z_p) q_{0z}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{3(z_0 - z_p)^2 q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^3} \right] \\ & + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_2} \left[\dots \right]_{p=5} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_2} \left[\dots \right]_{p=6} + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_2} \left[\dots \right]_{p=7} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_2} \left[\dots \right]_{p=8} \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} f_{12} = \ddot{\psi} = & \frac{(I_2 - I_1)}{I_3} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{\mu_0 m_2 m_0}{4\pi I_3} \sum_{n=1}^4 \left[\frac{3(y_0 - y_p)(z_0 - z_p) q_{0x}}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{3(x_0 - x_p)(z_0 - z_p) q_{0y}}{\|\vec{r}_p\|^5} \right] \\ & + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_3} \left[\dots \right]_{p=5} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_1}{4\pi I_3} \left[\dots \right]_{p=6} + \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_3} \left[\dots \right]_{p=7} - \frac{\mu_0 m_0 K_s u_2}{4\pi I_3} \left[\dots \right]_{p=8} \end{aligned} \quad (2.50)$$

které už lze snadno linearizovat:

$$a_{42} = \left. \frac{\partial f_{10}}{\partial y} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_2\| \cdot \|\vec{m}_0\|}{4\pi I_1} \cdot \left(-\frac{12z_r}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{60a^2 z_r}{\|\vec{r}_p\|^7} \right) = 58353$$

$$a_{44} = \left. \frac{\partial f_{10}}{\partial \phi} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_2\| \cdot \|\vec{m}_0\|}{4\pi I_1} \cdot \left(\frac{12z_r^2}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{4}{\|\vec{r}_p\|^3} \right) = -1057$$

$$a_{51} = \left. \frac{\partial f_{11}}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_2\| \cdot \|\vec{m}_0\|}{4\pi I_2} \cdot \left(\frac{12z_r}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{60a^2 z_r}{\|\vec{r}_p\|^7} \right) = -58353$$

$$a_{55} = \left. \frac{\partial f_{11}}{\partial \theta} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_2\| \cdot \|\vec{m}_0\|}{4\pi I_2} \cdot \left(-\frac{12z_r^2}{\|\vec{r}_p\|^5} + \frac{4}{\|\vec{r}_p\|^3} \right) = -1057$$

2.2.5 Matice B

Matice B definuje reakci systému na akční zásah, respektive řízení u . Prvek matice na i -tém řádku a j -tém sloupci definuje změnu časové derivace i -té stavové proměnné na základě jednotkové změny j -tého vstupu systému (řízení) u_j .

$$B = \left. \frac{\partial f[\cdot]}{\partial u} \right|_{x_r, u_{konst}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} \quad [3] \quad (2.51)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{42} \\ b_{51} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = \left. \frac{\partial f_7}{\partial u_1} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_0\| K_s}{4\pi m} \cdot \left(\frac{2a}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{10az_r^2}{\|\vec{r}_p\|^7} \right) = -0.8870$$

$$b_{22} = \left. \frac{\partial f_8}{\partial u_2} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_0\| K_s}{4\pi m} \cdot \left(\frac{2a}{\|\vec{r}_p\|^5} - \frac{10az_r^2}{\|\vec{r}_p\|^7} \right) = -0.8870$$

$$b_{42} = \left. \frac{\partial f_{10}}{\partial u_2} \right|_{x_r, u_{konst}} = -\frac{3\mu_0 \|\vec{m}_0\| K_s}{4\pi I_1} \cdot \left(\frac{6az_r}{\|\vec{r}_p\|^5} \right) = -161.0$$

$$b_{51} = \left. \frac{\partial f_{11}}{\partial u_1} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{3\mu_0 \|\vec{m}_0\| K_s}{4\pi I_2} \cdot \left(\frac{6az_r}{\|\vec{r}_p\|^5} \right) = 161.0$$

2.2.6 Matice C

V kapitole 2.1.5 jsme popsali matematický model senzorů, respektive závislost jejich výstupů na stavu levitujícího magnetu.

Systém bude mít tedy 2 výstupy $\{h_1, h_2\}$, senzory umístíme dle schématu 2.5 tak, že respektujeme pravidla diskutovaná v kapitole 2.1.5. Souřadnice senzorů budou mít následující tvar:

$$\vec{x}_{h1} = [s \ 0 \ 0]^T$$

$$\vec{x}_{h2} = [0 \ s \ 0]^T \quad (2.52)$$

Výstup h_1 bude odpovídat rovnici 2.26 s příslušnými souřadnicemi s a výstup h_2 rovnici 2.27 s příslušnými souřadnicemi x_{h2} .

Matice C definuje závislost změny výstupů systému na základě změny jeho stavu. Získáme ji obdobným způsobem jako matici A a B s tím, že parciálně derivujeme výstupy podle stavových proměnných:

$$C = \left. \frac{\partial h[\cdot]}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n(\cdot)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_n(\cdot)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} \quad [3] \quad (2.53)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \left. \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \cdot \frac{3z_r(z_r^2 - 4s^2)}{(s^2 + z_r^2)^{7/2}} = -1.0727$$

$$c_{13} = \left. \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \cdot \frac{3s(s^2 - 4z_r^2)}{(s^2 + z_r^2)^{7/2}} = \dots$$

$$c_{15} = \left. \frac{\partial h_1}{\partial x_5} \right|_{x_r, u_{konst}} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \left[\frac{3s^2}{(s^2 + z_r^2)^{5/2}} - \frac{1}{(s^2 + z_r^2)^{3/2}} \right] = -0.0112$$

$$c_{22} = \left. \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \right|_{x_r, u_{konst}} = c_{11}$$

$$c_{23} = \left. \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \right|_{x_r, u_{konst}} = c_{13}$$

$$c_{24} = \left. \frac{\partial h_2}{\partial x_4} \right|_{x_r, u_{konst}} = -c_{15}$$

2.2.7 Matice D

Matice D definuje závislost změny výstupu systému (výstupů sensorů) na změnu řízení. V důsledku vhodného zvolení polohy a orientace našich sensorů nebude mít řízení žádný přímý vliv na výstup sensorů a matice D bude nulová. V případě, že bychom nedodrželi pravidla osazení sensorů diskutovaná v kapitole 2.1.5, magnetické pole generované cívkami by se přímo projevovalo na výstupech sensorů a matice D by obsahovala nenulové prvky.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.8 Eliminace stavových proměnných

Z matic A a B můžeme vyvodit závěr, že pro linearizovaný systém nebude mít stavová proměnná ψ žádný význam, jelikož zůstává vždy konstantní (rovná počáteční podmínce). U souřadnice z dále pozorujeme, že nijak neinteraguje s jinými stavovými proměnnými než sama se sebou, nelze ji ovlivnit řízením, a zároveň je sama o sobě stabilní, respektive není nestabilní.

Z hlediska návrhu regulátoru pro nás tedy tyto dvě zmíněné stavové proměnné, jakož i jejich časové derivace, nebudou zvláště zajímavé a můžeme je vypustit, čímž se nám zmenší matice $\{A, B, C\}$.

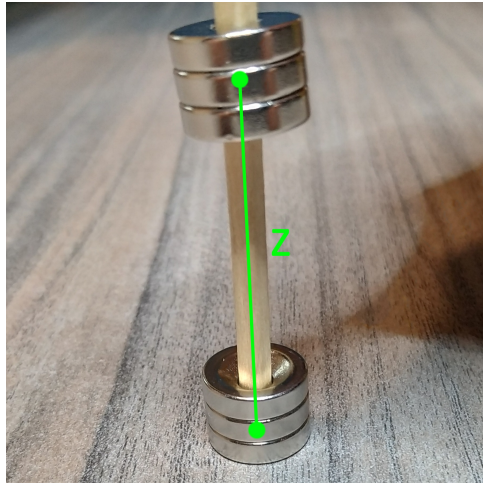
Redukovaný stavový systém

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & 0 & 0 & a_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & b_{42} \\ b_{51} & 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.9 Určení parametrů systému

Postup měření hmotností, vzdáleností, odporů apod. není patrně třeba blíže popisovat, horší je to se změřením magnetických momentů permanentních

magnetů. Zatímco magnetický moment cívky se dá určit ze vztahu 2.21, magnetický moment permanentních magnetů je neznámý a je zapotřebí jej experimentálně změřit nebo alespoň odhadnout. Magnetické momenty statických permanentních magnetů se pokusíme odhadnout na základě vztahu pro jejich translační sílu (viz rovnice 2.34). Experiment provedeme za pomoci dvou magnetů, u kterých mechanicky zafixujeme všechny stupně volnosti kromě souřadnice z (viz následující obrázek 2.6):



Obrázek 2.6: Experimentální odhad m_2

Zdroj vlastní

Na vznášející se magnet působí pouze síla ve směru souřadnice z a je rovna síle gravitační. Ze znalosti hmotnosti magnetu můžeme upravit rovnici 2.34 a vypočítat magnetický moment:

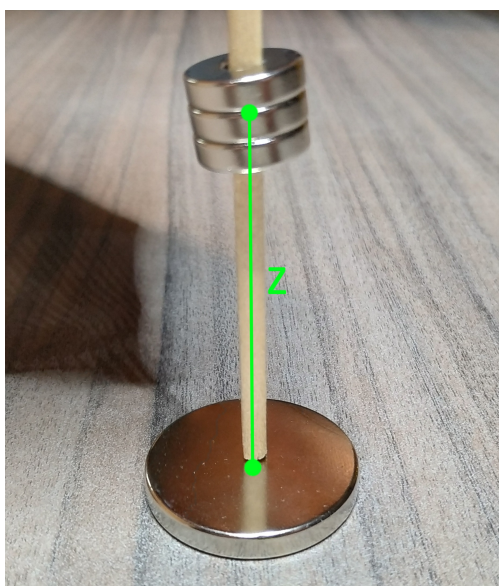
$$z = \sqrt[4]{\frac{6\mu_0 \|\vec{m}_2\|^2}{4\pi mg}} \quad (2.54)$$

$$\|\vec{m}_2\| = \sqrt{\frac{z^4 4\pi mg}{6\mu_0}} = 1.5321 \quad (2.55)$$

Magnetický moment většího levitujícího magnetu odhadneme obdobným způsobem s dodatečnou znalostí magnetického momentu magnetu menšího (viz obrázek 2.7):

$$z = \sqrt[4]{\frac{6\mu_0 \|\vec{m}_2\| \cdot \|\vec{m}_0\|}{4\pi mg}} \quad (2.56)$$

$$\|\vec{m}_0\| = \frac{z^4 4\pi mg}{6\mu_0 \|\vec{m}_2\|} = 3.3906 \quad (2.57)$$



Obrázek 2.7: Experimentální odhad m_0

Zdroj vlastní

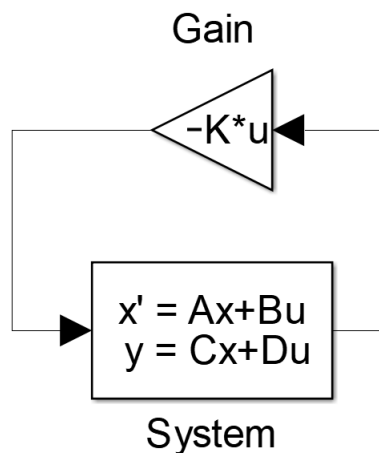
Výpočet je prováděn na základě vztahů pro magnetický dipól, jímž magnetické vlastnosti magnetů pouze aproximujeme a mechanická fixace není dokonalá, což může způsobit blíže nedefinovanou nepřesnost měření.

3 Návrh regulátoru

3.1 Stavová zpětná vazba

Lineární stavový regulátor generuje řízení, jež je rovno lineární kombinaci měřených (nebo rekonstruovaných) stavových proměnných systému. Lze ho definovat konstantní maticí K o rozměrech $m \times n$, kde m je řád systému (počet stavových proměnných) a n je počet vstupů systému. Generovaný akční zásah je tedy roven [4]:

$$u(t) = -K \cdot x(t) \tag{3.1}$$



Obrázek 3.1: Stavová zpětná vazba

Zdroj vlastní

Při znalosti stavu lze stavovou zpětnou vazbou přiřadit póly říditelného systému téměř do libovolných míst komplexní roviny [1]. Je zřejmé, že od našeho stavového regulátoru budeme vyžadovat stabilizaci systému, tedy přesunutí nestabilních pólů do levé poloroviny komplexní roviny. Stabilita systému ovšem rozhodně není jediný požadavek na vlastnosti naší uzavřené smyčky, krom jiného pro nás bude zájmat rychlost regulace a nároky na akční zásahy, jež jsou omezené a stojí energii. Pokud bychom se spokojili s přemístěním nestabilních pólů do stabilní poloroviny, v praxi by náš regulátor pravděpodobně nefungoval správně například z důvodu nerealizovatelných akčních zásahů, nebo příliš malé robustnosti.

Nalezením optimální stavové zpětné vazby se zabývá teorie optimálního řízení. Neexistuje optimální regulátor ve všech aspektech, jelikož při úkolu regulace narážíme na problém, kdy jsou jednotlivé požadavky na uzavřenou smyčku mezi sebou do určité míry v konfliktu. Typicky požadavek na co nejrychlejší odezvu regulace bývá v přímém konfliktu s požadavkem na co nejmenší akční zásahy a spotřebovanou energii.

Z těchto důvodů jde v teorii optimálního řízení zpravidla o úkol nalézt optimální regulátor (stavovou zpětnou vazbu), která je optimální ve smyslu určité kriteriální funkce.

3.2 Linear-Quadratic Regulator

Linear-Quadratic Regulator (LQR) je metoda pro nalezení optimální stavové zpětné vazby $u = -Kx$ minimalizací kriteriální funkce [11]:

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt \quad (3.2)$$

kde Q je pozitivně semidefinitní, R pozitivně definitní matice a N může být nulová. Často se používá právě zjednodušený tvar kriteriální funkce s nulovou maticí N , se kterým budeme pracovat i my:

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.3)$$

Kriteriální funkce je n -dimenzionální kvadratická s jedním globálním minimem. Nalezení minima se provádí pomocí tzv. Riccatiho diferenciální rovnice [13]. My výpočet provedeme numericky pomocí Matlab funkce $lqr(A, B, Q, R)$ [11].

3.2.1 Návrh parametrů Q a R

Matice Q a R se ve většině případů volí jako diagonální matice. Při použití diagonálních matic se kriteriální funkce stává velmi přehlednou a intuitivní. Jednotlivé prvky v matici Q pak představují míru penalizace odchylky příslušné stavové proměnné a prvky v matici R míru penalizace velikosti příslušného akčního zásahu. Návrhář tak může navrhnout a později ladit stavovou zpětnou vazbu tak, aby byla optimální přímo na základě požadavků na uzavřenou smyčku.

My začneme s jednotkovými maticemi $Q = I, R = I$ a poté na základě simulací ladíme jednotlivé parametry tak, aby řízení bylo za simulačních podmínek v realizovatelném rozsahu a zároveň byl regulátor co nejvíce robustní

(např. na přidání závaží na levitující magnet). Při simulacích bylo patrné, že kritické jsou především poloha a orientace ve srovnání s jejich derivacemi (rychlostmi), proto parametry matice Q příslušící rychlostem zvolíme menší.

Rychlost odezvy pro nás při návrhu není příliš důležitá, z principu bude při použití LQR vždy poměrně velká, protože příliš pomalý nájezd na regulovanou hodnotu by v případě našeho systému implikoval i velký energetický výdej, další výhodou LQR je tedy i to, že automaticky odfiltruje matice K , které by generovali regulační manévry tohoto typu nezávisle na parametrech Q a R .

Výsledné matice Q , R a K

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$K = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -1.3678 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0071 & -0.0508 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0002 \\ -0.0000 & -1.3678 & -0.0071 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0508 & -0.0002 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Odvození LQR a podrobnější popis návrhu a použití lze nalézt v článku [13].

3.2.2 Symetrie systému

Lineární dynamický systém definovaný dvojicí (A, B) , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ nazýváme **vstupně-výstupně symetrický** podle matice symetrie T pokud platí [10]:

$$\begin{aligned} TA &= AT \\ TB &= BG \end{aligned} \quad (3.6)$$

kde G je permutační matice ve tvaru:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

a neuvažujeme triviální řešení pro matici $T = I$ nebo $T = 0$.

Pro zachování symetrie uzavřeného systému se stavovou zpětnou vazbou určenou pomocí LQR je zapotřebí, aby parametrizující matice Q a R splňovali podmínky:

$$\begin{aligned} Q &= T^T Q T \\ R &= G^T R G \end{aligned} \quad (3.8)$$

Náš systém je vstupně-výstupně symetrický podle matic:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

a jelikož matice Q a R odvozené v předchozí kapitole 3.2.1 odpovídají podmínce 3.8, navržená stavová zpětná vazba nenarušuje symetrii systému.

Podmínka 3.8 v našem případě odpovídá požadavku na shodnou penalizaci dvojic $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_5, x_6\}$, $\{x_7, x_8\}$ a $\{u_1, u_2\}$.

3.3 Rekonstruktor stavu

Jak již bylo naznačeno v kapitole 2.1.5, nejsme schopni přímo měřit stav levitujícího magnetu měnící se v čase. Pokud je ovšem systém pozorovatelný, je možné z konečně dlouhého průběhu, respektive z konečného počtu vzorků jeho výstupů určit i kompletní stav systému.

Toho lze docílit vyřešením výstupní rovnice [3]:

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(j) + Du(k) \quad (3.10)$$

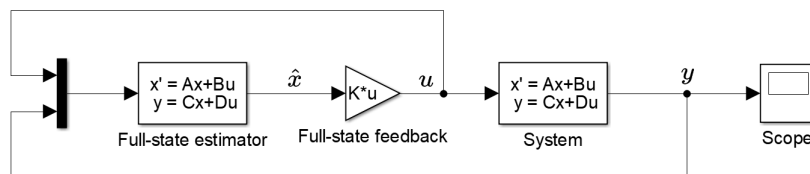
Pro řízení v reálném čase je ovšem řešení této rovnice problematické zejména z důvodu své výpočetní náročnosti (pro každou změnu akčního zásahu musíme hledat řešení rovnice), navíc délka (počet vzorků) výstupu narůstá s časem, takže by bylo navíc zapotřebí dynamicky měnit část průběhu ze které při řešení vycházet.

Pro řízení v reálném čase existuje daleko elegantnější způsob určení reálného stavu totiž použitím identického rekonstruktoru stavu.

Rekonstruktor stavu je virtuální dynamický systém, který má v sobě zabudovanou dynamiku samotného řízeného systému, ale dále je navíc ovlivňován rozdílem očekávaného výstupu od výstupu reálně měřeného. Pro nulovou odchylku predikovaného a reálného výstupu má rekonstruktor totožnou dynamiku jako řízený systém. V případě nenulové odchylky má rekonstruktor při vhodném návržení tu vlastnost, že konverguje k tomu, aby zmíněná odchylka byla nulová a dochází tak k vysledování (rekonstrukci) reálného stavu.

Zásadní výhodou rekonstruktoru stavu oproti explicitnímu řešení rovnice 3.10 je jeho relativně malá a zároveň konstantní výpočetní i paměťová náročnost.

Kombinaci stavové zpětné vazby a rekonstruktoru stavu se souhrně říká dynamický kompenzátor [4].



Obrázek 3.2: Dynamický kompenzátor

Zdroj vlastní

Náš rekonstruktor stavu bude lineární systém definovaný čtveřicí matic A_r , B_r , C_r , D_r ve tvaru [1]:

$$\begin{aligned} A_r &= A - K_r \cdot C \\ B_r &= [B \quad K_r] \\ C_r &= I \\ D_r &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Kde K_r je přírůstková matice kterou navrhne také metodou LQR pomocí MATLAB funkce [1]:

$$K_r = (lqr(A^T, C^T, Q_r, R_r))^T \quad (3.12)$$

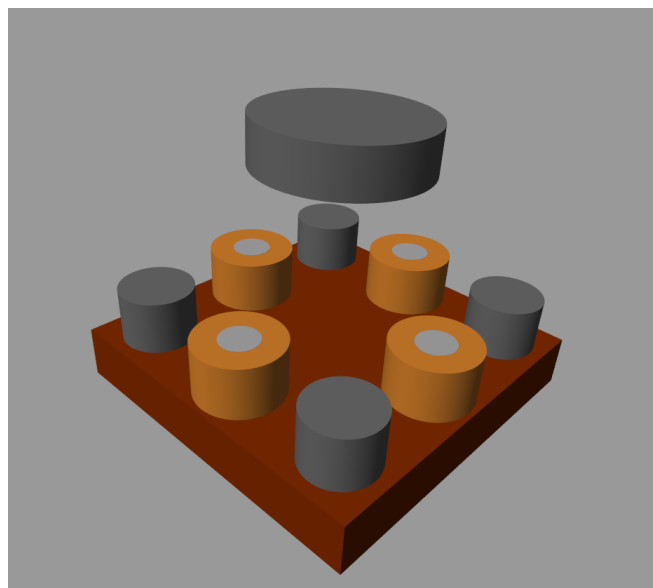
Parametrizující matice Q_r a R_r zvolíme tak, aby dynamika konvergence k reálnému stavu byla dostatečně rychlejší než dynamika reálného systému, ale zároveň ne příliš kvůli robustnosti rekonstrukce:

$$\begin{aligned} Q_r &= 10 \cdot I \\ R_r &= 0.01 \cdot I \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$K_r = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} -0.0097 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0097 \\ 0.0000 & -0.2566 \\ 0.2566 & -0.0000 \\ -0.2687 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.2687 \\ 0.0000 & -5.3480 \\ 5.3480 & -0.0000 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

4 Simulace

Simulaci sestaveného matematického modelu systému budeme provádět pomocí nástroje MATLAB Simulink. Dynamika systému je modelována pomocí nelineárních diferenciálních rovnic odvozených v kapitole 2 a řídicí algoritmus je modelován na základě vypočtů v kapitole 3. Celý simulační program je k dispozici v příloze práce, simulovat lze libovolně parametrizovaný systém a výsledky simulací jde zobrazit jak grafy, tak animací vytvořenou v Simscape Multibody.



Obrázek 4.1: Snímek z animace v Simscape

Zdroj vlastní Zdroj vlastní

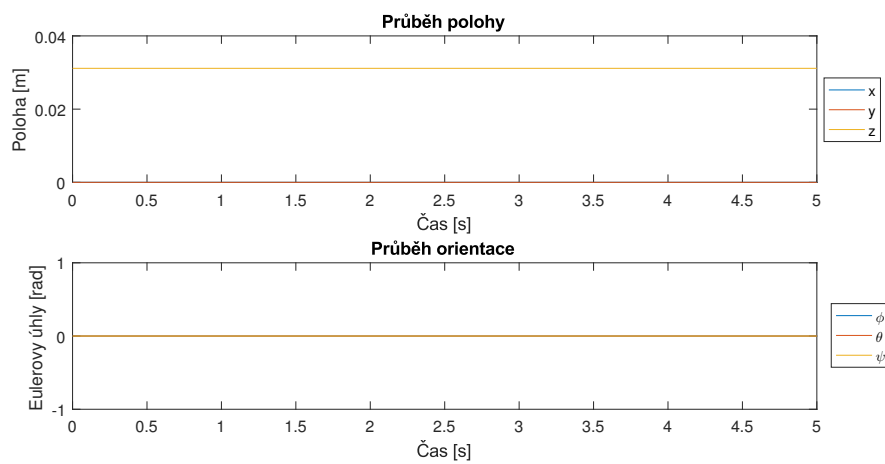
4.1 Neřízený systém

Simulace 1 - rovnovážný stav

Pro ověření správně určeného rovnovážného stavu, začneme simulací s počátečními podmínkami v rovnovážném stavu.

Počáteční podmínky:

$$x_0 = [0 \ 0 \ z_r \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$



Obrázek 4.2: Test rovnovážného stavu

Zdroj vlastní

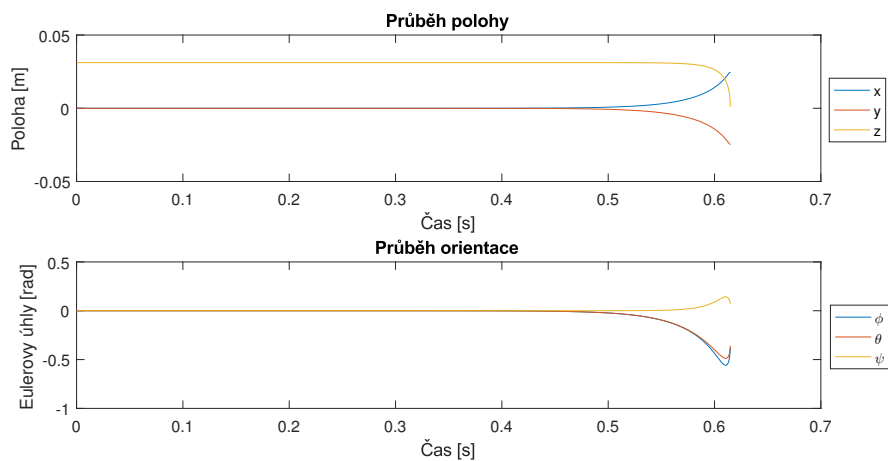
Systém dle očekávání zůstává v klidu.

Simulace 2 - nestabilita

V další simulaci vychýlíme počáteční podmínky nepatrně od rovnovážného stavu v souřadnicích x a y.

Počáteční podmínky:

$$x_0 = [10^{-9} \quad -10^{-9} \quad z_r \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$



Obrázek 4.3: Test nestability systému

Zdroj vlastní

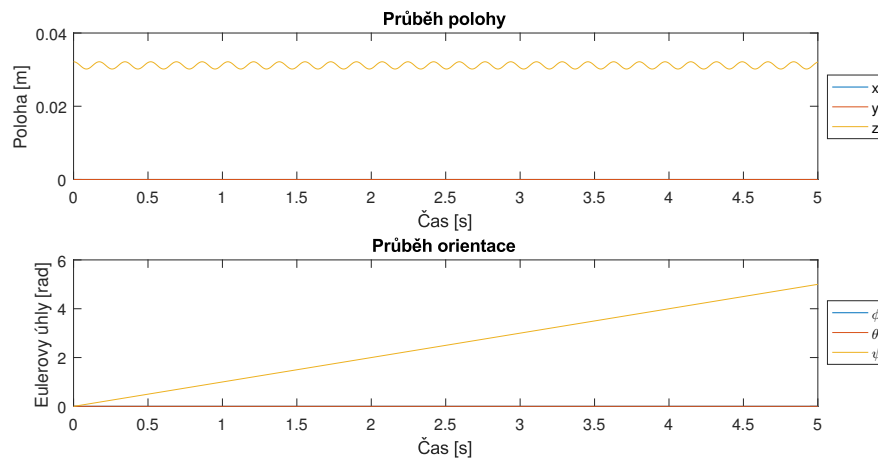
Ač jsme vychýlili magnet o pouhý nanometr ve směru x a y, kvůli nestabilitě systému a naprosté absenci klidového tření vychýlení exponenciálně roste až je simulace ukončena před okamžikem, kdy by došlo ke střetu s jedním z magnetů v podstavě.

Simulace 3 - eliminace

V kapitole 2.2.8 jsme za účelem návrhu regulátoru ze stavového popisu eliminovali souřadnice z a ψ , jelikož na okolí rovnovážného stavu neovlivňují stabilitu systému. Tuto vlastnost ověříme v následující simulaci.

Počáteční podmínky:

$$x_0 = [0 \ 0 \ (z_r + 0.001) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$



Obrázek 4.4: Test vychýlení z a ψ

Zdroj vlastní

Dle očekávání libovolné vychýlení z nebo ψ neovlivní zbylé stavové souřadnice (za předpokladu že jsou v rovnovážném bodě) a magnet nadále levituje s netlumenou oscilací ve směru osy z , kolem které se zároveň otáčí.

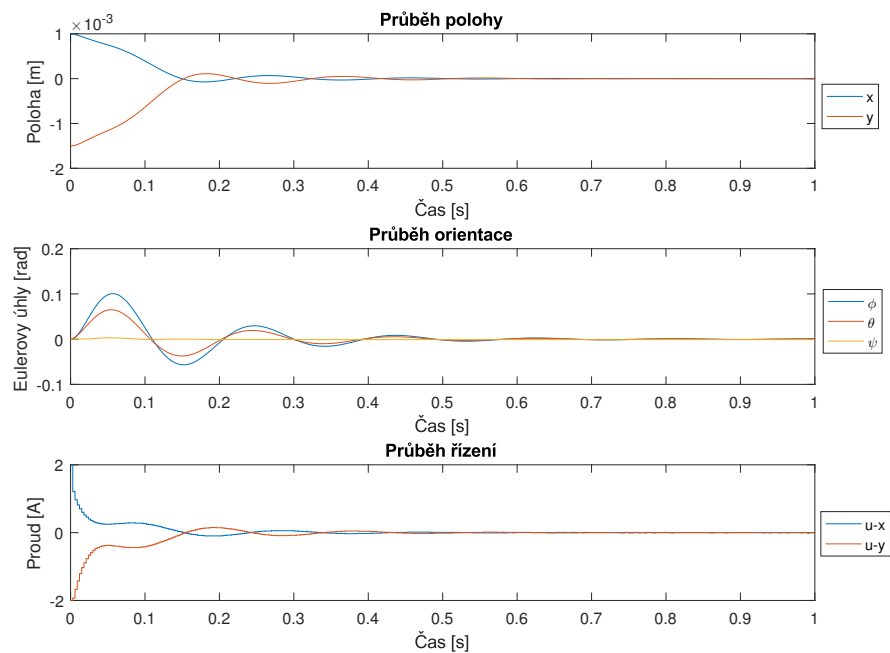
4.2 Řízený systém

Následující simulace již zahrnují aktivní řízení.

Simulace 4 - regulace s přímo měřeným stavem

Pro první řízenou simulaci uvážíme, že stav levitujícího magnetu můžeme přímo přesně měřit. Při umístění magnetu do rozumné vzdálenosti od rovnovážného bodu proběhne regulace velmi elegantně a rychle konverguje k nulové odchylce a nulovému řízení. Počáteční podmínky:

$$x_0 = [0.001 \quad -0.0015 \quad z_r \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$



Obrázek 4.5: Regulace malé počáteční výchylky

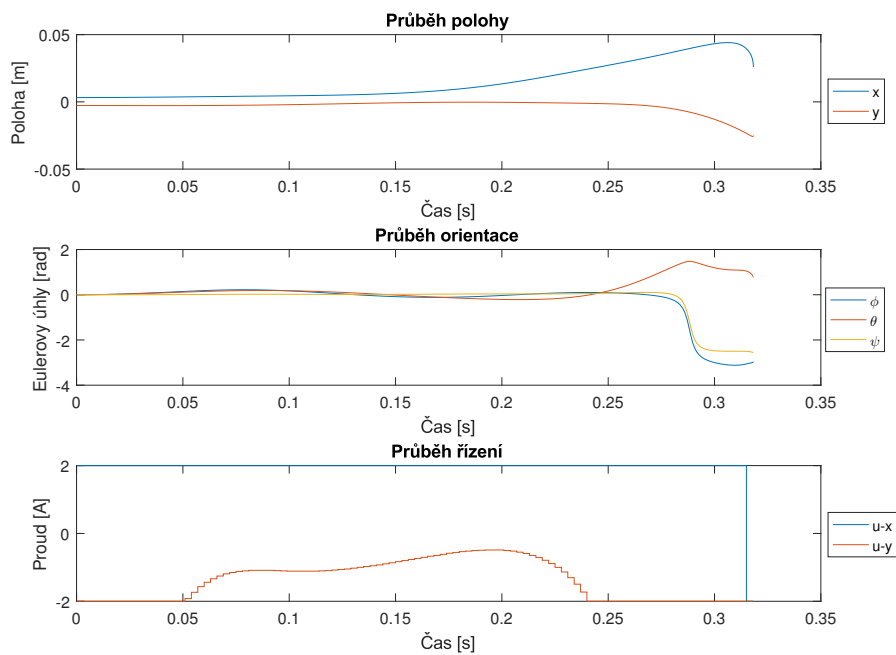
Zdroj vlastní

Simulace 5 - velká výchylka

Při zvyšování počáteční odchylky se přirozeně zvyšuje i obtížnost stabilizovatelnosti systému regulátorem, jež je navržen pro linearizovaný systém a navíc podléhá saturaci. Pokud umístíte magnet příliš daleko od rovnovážného bodu není možné systém stabilizovat.

Počáteční podmínky:

$$x_0 = [0.0032 \quad -0.0027 \quad z_r \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$



Obrázek 4.6: Regulace velké počáteční výchylky

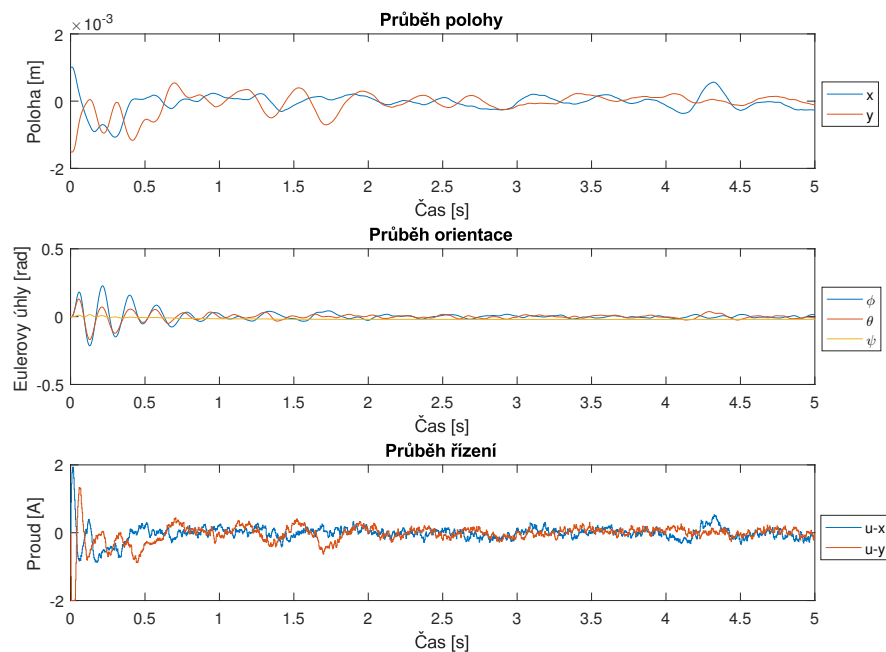
Zdroj vlastní

Pro zvýšení kritické odchylky se kterou si regulátor ještě zvládne poradit by bylo zapotřebí osadit zařízení cívkami, které by za stejných proudů vytvářely silnější magnetické pole.

Simulace 6 - řízení na základě senzorů

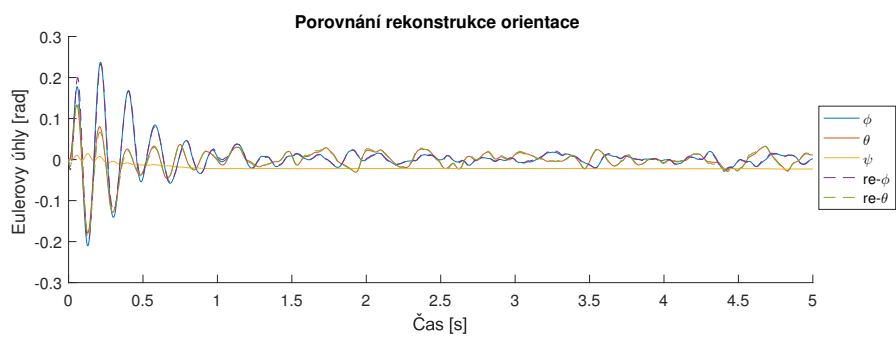
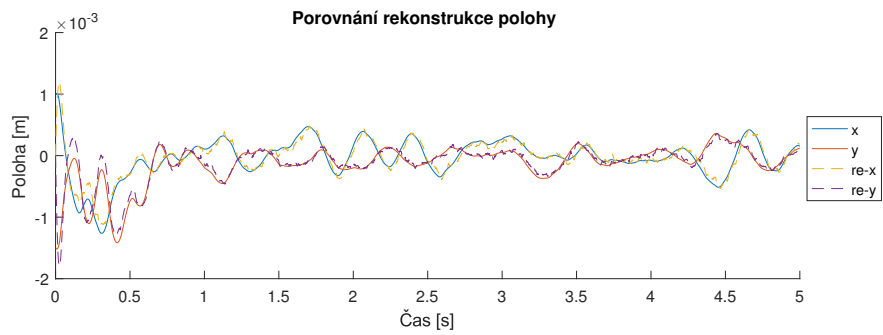
Rekonstruujeme-li reálný stav na základě výstupů ze senzorů, nemůžeme očekávat lepší výsledky než-li při simulaci, kdy jsme počítali s přímým měřením stavu. Konvergence k nulové odchylce není z důvodu zašumělého výstupu senzorů možná, a tak systém po odeznění přechodového děje stochasticky osciluje na okolí rovnovážného bodu. Střední hodnota odchylky při ustálených oscilacích je dána především intenzitou zmíněného šumu.

$$x_0 = [0.001 \quad -0.0015 \quad z_r \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$



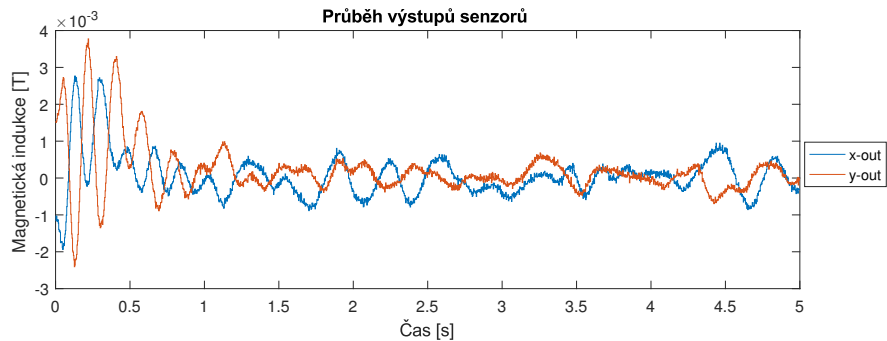
Obrázek 4.7: Průběh regulace na základě zašumělých senzorů

Zdroj vlastní



Obrázek 4.8: Rekonstrukce stavu

Zdroj vlastní



Obrázek 4.9: Průběh výstupů senzorů

Zdroj vlastní

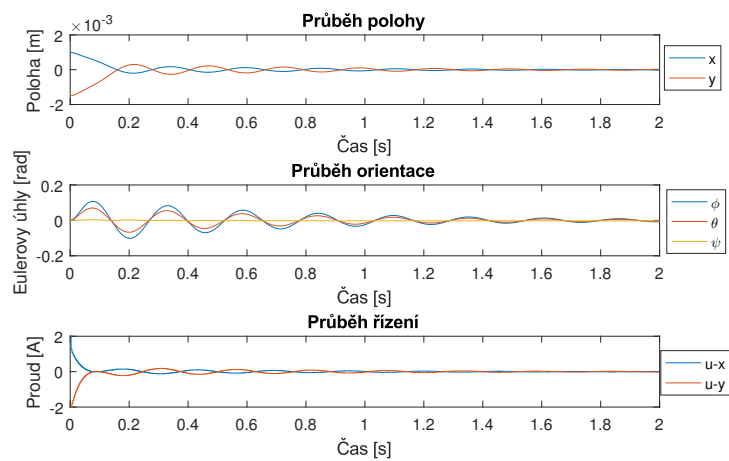
Simulace 7 - robustnost (s přímo měřeným stavem)

Nyní otestujeme robustnost stavové zpětné vazby s přímo měřeným stavem na odchylku modelu systému. Odchylku modelu budeme simulovat jednoduchým způsobem, totiž zvýšením hmotnosti m a matice setrvačnosti I , což by mohlo představovat přidání závaží na levitující magnet:

$$\begin{aligned} m_t &= 1.5 \cdot m \\ I_t &= 2 \cdot I \end{aligned} \tag{4.1}$$

Počáteční podmínky:

$$x_0 = [0.001 \quad -0.0015 \quad z_r \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$



Obrázek 4.10: Test robustnosti s přímo měřeným stavem

Zdroj vlastní

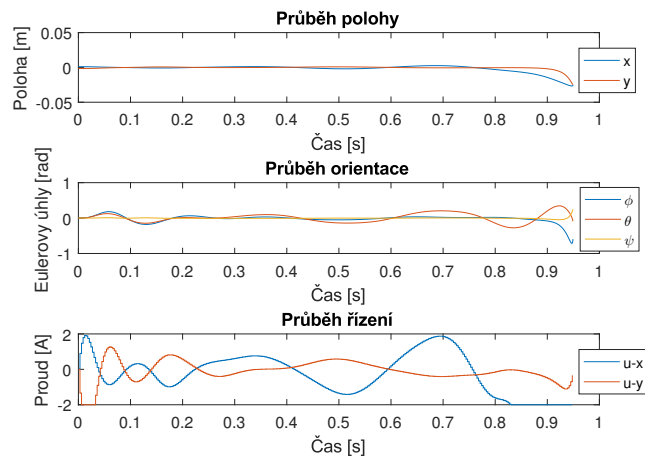
I s uvedenou chybou modelu systému se podařilo, byť s o něco horším průběhem, stavovou zpětnou vazbou docílit stabilizace.

Simulace 8 - robustnost (s rekonstruktorem stavu)

Dynamický kompenzátor, jež vychází z omezeného výstupu systému je na chybu modelu mnohem náchylnější a i když zvolíme velmi malou odchylku modelu a uvážíme nezašumělý výstup senzorů, stabilizace není úspěšná. Z této a předchozí simulace lze usoudit, že nejproblematictější složkou našeho dynamického kompenzátoru je rekonstrukce stavu. Robustnější rekonstrukce je zároveň v přímém konfliktu s požadavkem na rychlost výsledování stavu, která je nezbytná pro úspěšnou stabilizaci systému.

$$\begin{aligned} m_t &= 1.02 \cdot m \\ I_t &= 1.04 \cdot I \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$x_0 = [0.001 \quad -0.0015 \quad z_r \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$



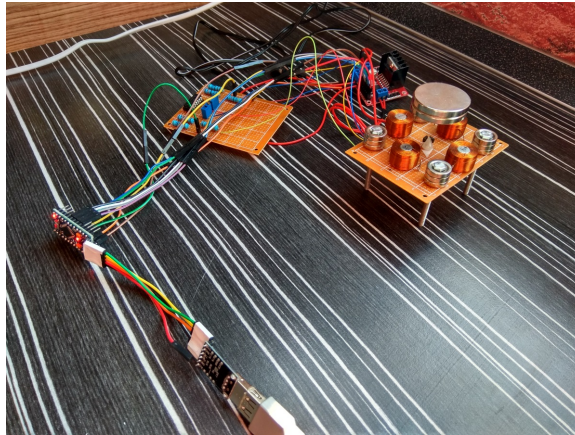
Obrázek 4.11: Test robustnosti s rekonstruktorem stavu

Zdroj vlastní

5 Reálná soustava

5.1 Popis architektury

Zařízení na kterém budeme předešlé výpočty testovat postavíme na základě tohoto projektu [7]. Ve zkratce se zařízení kromě prvků již diskutovaných (magnety, cívky, senzory a výpočetní jednotka) skládá ze zdroje elektrického napětí, operačního zesilovače s kaskádou odporů a potenciometrů, který slouží k zesílení signálů Hallových sond a H můstku, který řídí proudy protékající cívkami na základě digitální informace z výpočetní jednotky (Arduino mini).



Obrázek 5.1: Foto sestrojeného zařízení

Zdroj vlastní

5.2 Nasazení navrženého regulátoru

Regulační algoritmus se bohužel nepodařilo úspěšně nasadit na reálnou soustavu. Důvodem je patrně příliš velká odchylka matematického modelu od reality, která neumožní správné vysledování stavu a zapříčiní nevhodné akční zásahy dynamickým kompenzátorem. Odchylku modelu blíže analyzujeme v následující kapitole.

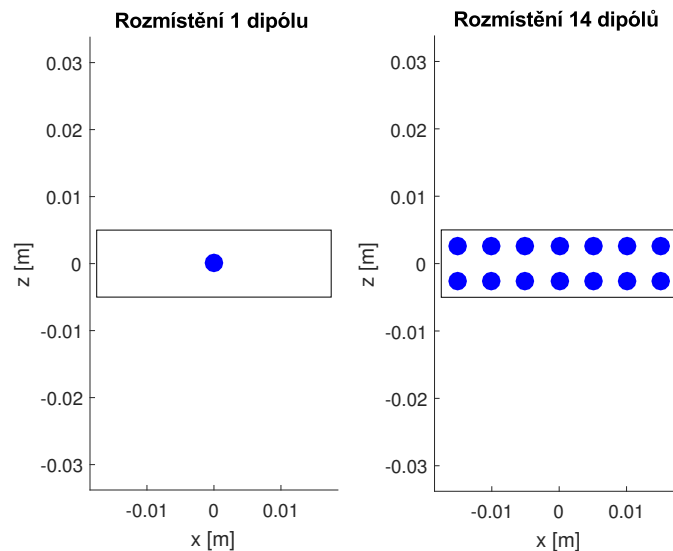
5.3 Analýza odchylka modelu

Vlastnosti systému jsou definovány na základě Newtonových pohybových zákonů a silové interakce magnetických dipólů. Pro náš systém není důvod se

domnívat, že by nepřesnost matematického modelu měla být způsobena mechanickými vlastnostmi tuhého tělesa. Naopak co se týče popisu magnetického pole jednotlivých magnetů a cívek, je zřejmé, že popis odvozený dle vzorce pro magnetický dipól bude pouze hrubou aproximací reálného pole, jelikož celkové pole magnetu (nebo cívky) je generováno v celém jeho objemu, nikoliv pouze v jednom bodě (těžišti).

5.3.1 Odchylka magnetického pole

Pro ilustraci principu rozdílnosti reálného pole a pole generovaného magnetickým dipólem se omezíme na 2D prostor vzniklý svislým řezem prostoru původního, pro který srovnáme pole generované jedním a 14 dipóly uspořádaných v mřížce dle následujícího obrázku 5.2 (sestavení přesného popisu magnetického pole magnetu je nad rámec této práce):



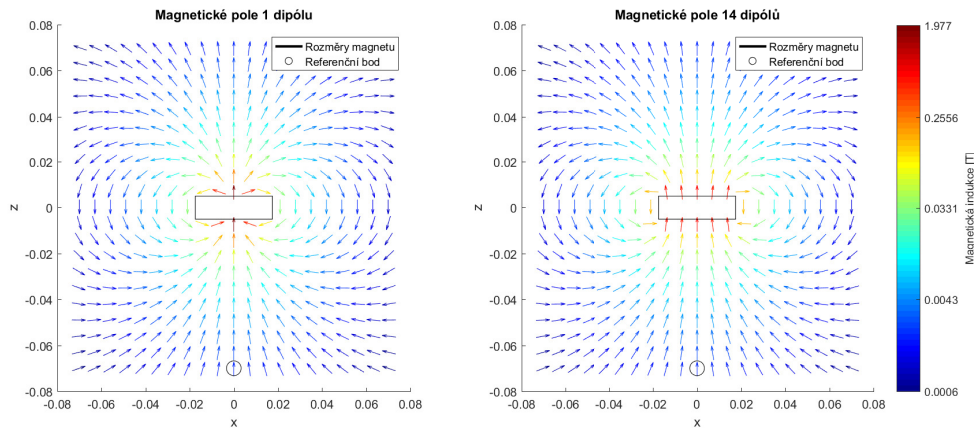
Obrázek 5.2: Rozmístění dipólů

Zdroj vlastní

Magnetické momenty každého ze soustavy 14 magnetických dipólů byly určeny tak, aby se pro referenční vzájemnou polohu ze které byl experimentem 2.7 určen magnetický moment m_0 obě pole shodovala. Nalezení těchto momentů, které si označíme jako m_{14} bylo docíleno numerickou metodou půlením intervalů a výsledkem je:

$$m_{14} = m_0 \cdot 0.07525 \dots \quad (5.1)$$

Na následujících grafech jsou znázorněna pole obou modelů. Jednotlivé šipky definují bodovou velikost a orientaci magnetické indukce v jejich středu, orientace je dána orientací šipky a velikost barvou. Pro lepší rozložení barevného gradientu je stupnice barev logaritmická:



Obrázek 5.3: Pole obou modelů

Zdroj vlastní

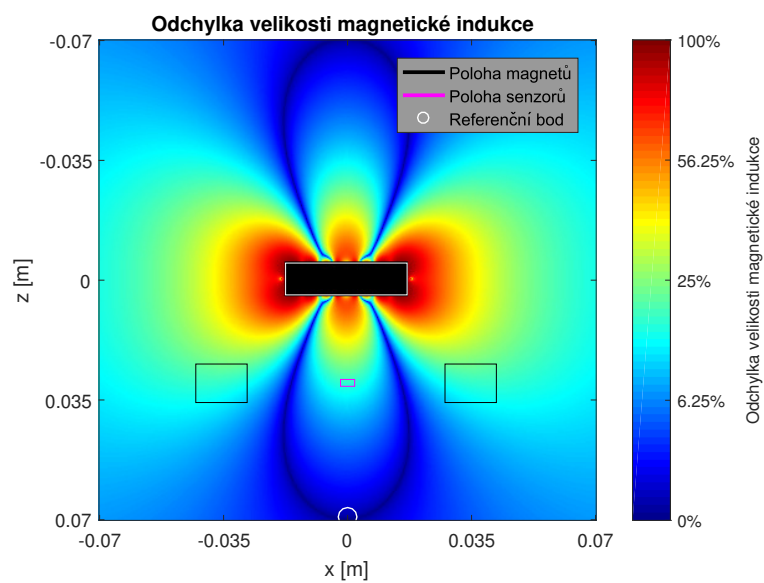
V grafech jsou černým obdélníkem označeny fyzické rozměry magnetu a černým kruhem ve spodní části je označena referenční vzájemná poloha, pro kterou byly v experimentu 2.7 magnetické momenty určeny.

Pro vizualizaci vzájemných odchylek polí vypočteme obdobným způsobem mřížku bodových hodnot magnetických indukcí pro obě magnetické pole s větší četností (400×400) a pro každý bod porovnáme velikosti indukcí obou polí dle vztahu pro odchylku e definovanou:

$$e = \frac{|B_1 - B_{14}|}{\max(B_1, B_{14})} \quad (5.2)$$

Kde B_1 je pro daný bod velikost magnetické indukce pole generovaného jedním dipólem a B_{14} pole generovaného soustavou 14 dipólů.

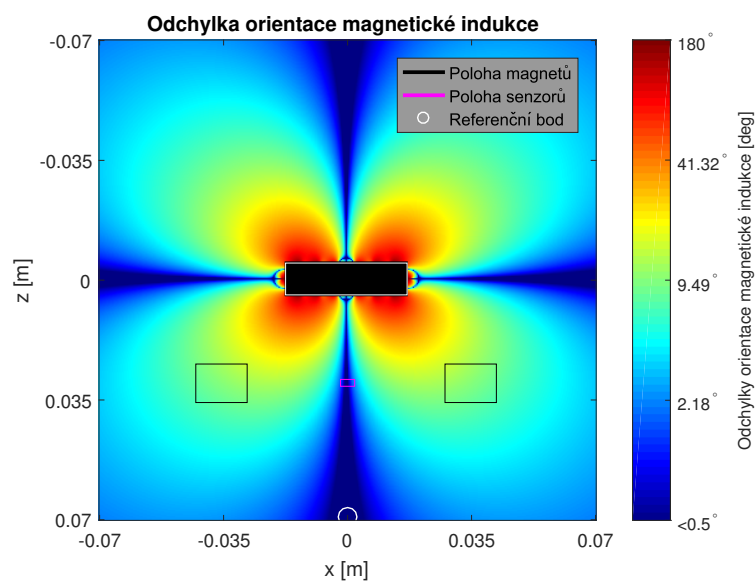
Každou vypočtenou odchylku zobrazíme pixelem s příslušnou barvou barevného gradientu s polynomiální stupnicí. V grafu dále označíme černými obdélníky relativní polohu dvou permanentních magnetů (respektive jejich řezy), se kterými levitující magnet interaguje a fialovým obdélníkem průmět umístění senzorů. Bílý kruh v dolní části grafu opět označuje referenční bod, pro který byly určeny magnetické momenty:



Obrázek 5.4: Odchylka velikosti magnetické indukce

Zdroj vlastní

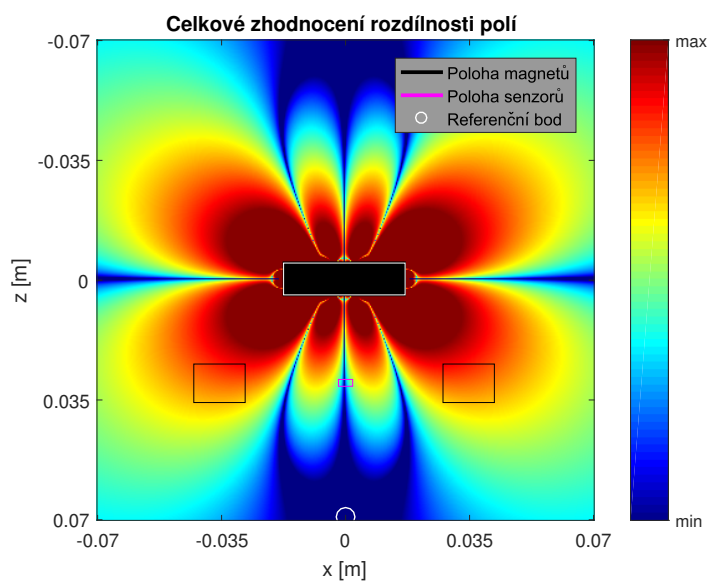
Stejným způsobem porovnáme i bodovou orientaci obou polí. Tentokrát bude odchylka definovaná jednoduše vzájemným úhlem orientací obou polí a stupnice barevného gradientu bude logaritmická:



Obrázek 5.5: Odchylka orientace magnetické indukce

Zdroj vlastní

Nakonec provedeme celkové zhodnocení rozdílnosti obou modelů. Tu provedeme normalizací odchylek orientace na interval $(0, 1)$ a následným součinem obou srovnání (velikosti a orientace). Výsledek vizualizujeme opět pomocí barevného gradientu s logaritmickou stupnicí a dostáváme souhrnný zhodnocující graf rozdílnosti obou polí:



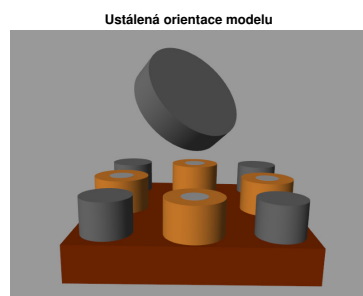
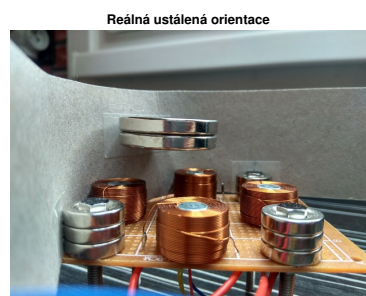
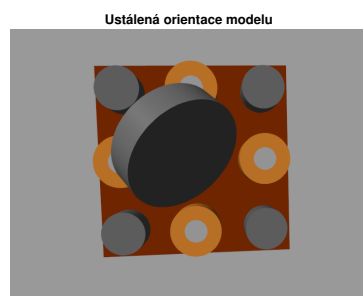
Obrázek 5.6: Souhrnná odchylka obou polí

Zdroj vlastní

Z posledních tří srovnávacích grafů je patrné, že vzájemná poloha magnetů podstavy a levitujícího magnetu není šťastná, jelikož se oba modely v těchto místech relativně hodně liší. O něco lépe je na tom umístění senzorů.

Skutečný rozdíl polí generovaných reálným magnetem a aproximací magnetickým dipólem bude pochopitelně jiný, než ilustrační příklad pro 14 dipólů, ale princip odlišnosti by měl být podobný. Další faktor, jež vstupuje do nepřesnosti modelu a nebyl ještě zmíněn, je i zakřivení magnetického pole feromagnetickými jádry cívek a silová interakce levitujícího magnetu s těmito jádry.

Nejlépe patrný důsledek rozdílného tvaru polí je daleko větší nárůst momentu síly u matematického modelu ve srovnání s reálnou soustavou pro stejné odchylky od rovnovážného bodu. Toho si lze všimnout porovnáním ustálené orientace vychýleného magnetu s fixní polohou. Na následujících dvojicích obrázků je srovnání ustálené orientace modelu a reálného magnetu při téměř stejné mechanicky fixované translační poloze. Velký rozdíl orientace je dobře patrný pouhým okem (přesné měření pro komplikovanost provedeno nebylo).



Obrázek 5.7: Demostrace odchyly modelu

Zdroj vlastní

5.4 Shrnutí nevhodnosti navrženého regulátoru

Zjistili jsme, že náš dynamický kompenzátor je velice náchylný na nepřesnost modelu zejména z důvodu nesprávného vysledování stavu. Dále jsme ukázali, že aproximace magnetického pole vzorcem pro magnetický dipól je pro danou konfiguraci poměrně nepřesná a vykazuje příliš odlišné silové působení ve srovnání s realitou. Blíže jsme zkoumali princip této odlišnosti porovnáním pole generované jedním a 14 magnetickými dipóly. Kombinace zmíněných problémů znemožňuje úspěšnou realizaci navržené regulace.

5.5 Nasazení empiricky určeného PID regulátoru

Na druhou stranu se na reálné soustavě podařilo docílit levitace a to s relativně malými oscilacemi a velkou robustností, pomocí čistě empiricky laděného výstupního PID regulátoru, respektive dvojici těchto regulátorů, zvláště pro osu x a pro osu y přímo na základě výstupu senzorů bez rekonstrukce stavu. Podobný typ regulace byl ovšem použit v originálním projektu [7], nejedná se tedy o vlastní přínos této práce.



Obrázek 5.8: Levitace docílená empiricky určeným PID

Zdroj vlastní



Obrázek 5.9: Robustnost - při přidání závaží

Zdroj vlastní

Naopak matematický model našeho systému se PID regulací přímo výstupů sensorů bez rekonstrukce stavu stabilizovat nepodařilo, což dále poukazuje na velkou odlišnost reality od modelu, který je dle všeho paradoxně daleko hůře stabilizovatelný.

Výsledky Práce

Podářilo se odvodit matematický model systému levitujícího permanentního magnetu. Model simuluje stav levitujícího magnetu, tedy jeho polohu a orientaci v prostoru. Silové interakce mezi levitujícím permanentním magnetem a množinou permanentních magnetů a cívek umístěných v podstavě byly odvozeny pro soustavu magnetických dipólů na základě Maxwellových rovnic, s tím, že permanentní magnety mají konstantní magnetické momenty a cívky mají magnetické momenty lineárně úměrné řízenému protékajícímu proudu. Reakce na tato silová působení byly odvozeny pro tuhé těleso (válec) na základě Newtonových pohybových zákonů. Model Halloových sond, respektive odhad jejich výstupů byl odvozen výpočtem bodové kolmé složky magnetické indukce v místě senzoru.

Matematický model byl linearizován na okolí rovnovážného bodu, ve kterém dochází k levitaci. Na základě lineárního modelu byla navržena stavová zpětnovazební regulační smyčka metodou LQR. Pokud jsme uvažovali přímé měření stavu, dosáhli jsme při simulaci velmi dobrých výsledků, kdy odchylka a řízení rychle konvergovali k prakticky nulovým hodnotám. Regulace nebyla dle očekávání úspěšná při příliš velké počáteční výchylce a to především kvůli omezené velikosti akčních zásahů a také zvětšující se odchylkou lineárního a nelineárního modelu se vzdáleností od rovnovážného bodu.

Pro řízení na základě výstupu senzorů byl odvozen rekonstruktor stavu. Při úvaze nulového šumu na senzorech bylo opět dosaženo dobrých regulačních výsledků, kdy po odeznění přechodového děje magnet levitoval s minimálními oscilacemi. Při přičtení bílého šumu na výstup senzorů se tyto oscilace zvyšovaly, jelikož rekonstruktor stavu nebyl schopen reálný stav vysledovat s takovou přesností a pokud byla intenzita šumu příliš velká, regulace skončila nezdarem. Jak se ukázalo, největší slabinou celého dynamického kompenzátoru byla citlivost rekonstruktoru stavu na přesnost modelu.

Co se týče realizace navrženého dynamického kompenzátoru na reálné soustavě, úspěšné stabilizace dosaženo nebylo. Důvodem byla patrně příliš velká odchylka matematického modelu s realitou a to konkrétně především aproximací magnetického pole jednotlivých magnetů vzorcem pro magnetický dipól. Tato nepřesnost se při určování dynamiky systému projeví ve všech třech maticích linearizovaného systému $\{A, B, C\}$, ze kterých návrh regulace vychází, což vyústí v kombinaci špatného vysledování stavu a nevhodných akčních zásahů. Odchylka modelu byla experimentálně ověřena porovnáním ustálené orientace simulovaného a reálného levitujícího magnetu při zafixo-

vání translační odchylky od rovnovážného stavu. Při translační výchylce od rovnovážného bodu dochází u reálného systému k daleko menšímu nárůstu momentu síly působící na levitující magnet ve srovnání s matematickým modelem.

Rozdílnost polí reálného magnetu a aproximace magnetickým dipólem jsme blíže zkoumali na ilustračním příkladu pro soustavu 14 dipólů. Zde se ukázalo, že rozdílnost obou polí je velmi závislá na relativní poloze a že poloha magnetů, se kterými dochází k silové interakci je v tomto ohledu relativně nešťastná.

Chyba na straně harwaru byla vyloučena úspěšným nasazením empiricky laděné PID regulátoru, obdobnému regulátoru použitého v projektu [7], na základě kterého bylo zařízení konstruováno.

Diskuze

Pro úspěšné nasazení odvozeného dynamického kompenzátoru na základě modelu by bylo zapotřebí zdokonalit popis magnetických polí, např. nahrazením aproximace pomocí jednoho magnetického dipólu celou množinou slabších dipólů rozmístěných v objemu tělesa. Výpočet takového modelu by byl ovšem relativně náročný, jelikož by bylo zapotřebí počítat kartézský součin silových interakcí všech dipólů v levitujícím magnetu se všemi dipóly podstavy.

Úspěšnost čistě empiricky určené regulace bez rekonstrukce stavu naznačuje, že je pro tento úkol odvozování regulátoru na základě přesného matematického modelu zbytečně náročné a bylo by patrně daleko snazší zdokonalovat kvalitu regulace dalším empirickým laděním a případně fyzickými úpravami zařízení jako takového.

Závěr

Definovali jsme si jev magnetická levitace, seznámili jsme se se základními principy, jimiž lze tohoto jevu docílit a detailně jsme rozebrali jeden z těchto způsobů využívající zpětnovazebního řízení. Pro systém, jež jsme zkoumali jsme sestavili matematický model představující soustavu nelineárních rovnic odvozených z Newtonových pohybových zákonů a zákonů pro silovou interakci magnetických dipólů. Tyto rovnice jsme za účelem nalezení vhodného stabilizujícího zpětnovazebního algoritmu linearizovali v nestabilním rovnovážném bodě a na základě linearizovaného systému jsme navrhli stavovou zpětnou vazbu pomocí metody LQR. Vzhledem k přímo neměřenému stavu jsme navrhli rekonstruktor využívající omezený výstup systému z dvojice senzorů. V rámci simulací se podařilo systém pomocí navrženého dynamického kompenzátoru stabilizovat, ale odchylka matematického modelu od reálného světa byla příliš velká, především v popisu magnetického pole jednotlivých magnetů a cívek, takže regulační algoritmus nasazený na reálné zařízení selhal. Selhání na straně zařízení jako takového jsme vyloučili, jelikož se na něm podařilo magnetické levitace docílit empiricky určeným PID regulátorem.

Seznam značení

LQR	linear quadratic regulator
PID	proporcionálně integračně derivační
B	magnetická indukce [T]
μ	permeabilita [Hm^{-1}]
μ_r	relativní permeabilita
\vec{m}	magnetický moment [Am^2]
F	síla [N]
m	hmotnost [kg]
g	gravitační zrychlení [ms^{-2}]
I	Matice setrvačnosti [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]
$s(\phi)$	$\sin(\phi)$
$c(\phi)$	$\cos(\phi)$

A Příloha

Zdrojový kód simulačního modelu je k dispozici na <https://github.com/thonzyk/6DOF-Magnetic-levitation>.

Literatura

- [1] BRUNTON, S. *Control Bootcamp* [online]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLMrJAKhIeNNR20Mz-VpzgfQs5zrYi085m>.
- [2] DIEBEL, J. Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors. 2006. Dostupné z: https://www.astro.rug.nl/software/kapteyn-beta/_downloads/attitude.pdf.
- [3] DOC. ING. JIŘÍ MELICHAR, C. Lineární systémy 1. Master's thesis, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2010. Dostupné z: <http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls1/LS1-Ucebni-texty-2010.pdf>. wordpress.
- [4] DOC. ING. JIŘÍ MELICHAR, C. Lineární systémy 2. Master's thesis, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2011. Dostupné z: <http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls2/LS2-Učebni-texty-2010.pdf>.
- [5] EARNSHAW, S. *On the Nature of the Molecular Forces which Regulate the Constitution of the Luminiferous Ether*. St John's College, Cambridge, 1839. Dostupné z: <http://www.mit.edu/~kardar/research/seminars/Casimir2010/pdf/EarnshawPaper.pdf>.
- [6] ELECTRONICTUTORIALS. *Hall Effect Sensor* [online]. Dostupné z: <https://www.electronics-tutorials.ws/electromagnetism/hall-effect.html>.
- [7] FUNELAB. *Arduino Air Bonsai Levitation* [online]. 2018. [cit. 2019/03/10]. Dostupné z: <https://www.instructables.com/id/Arduino-Air-Bonsai-Levitation/>.
- [8] J. PERAIRE, S. W. 3D Rigid Body Dynamics. 2009. Dostupné z: https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/MIT16_07F09_Lec29.pdf.
- [9] KAR W. YUNG, D. D. V. P. B. L. Analytic Solution for the Force Between Two Magnetic Dipoles. 1998. Dostupné z: <http://downloads.hindawi.com/archive/1998/079537.pdf>.
- [10] KÖNIGSMARKOVÁ, J. *Symetrické systémy*. 2017.
- [11] MATHWORKS. *Linear-Quadratic Regulator (LQR) design* [online]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/control/ref/lqr.html>.

- [12] MUNDHER H.A.YASEEN, H. J. *Modeling and control for a magnetic levitation system based on SIMLAB platform in real time*. Results in Physics, Volume 8, 2018. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2211379717320065?via%3Dihub#!>
- [13] MURRAY, R. M. Linear Quadratic Regulator. 2006. Dostupné z: <https://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds110/wi06/lqr.pdf>.
- [14] ROTE D. M., Y. C. *Review of dynamic stability of repulsive-force maglev suspension systems*. IEEE Transactions on Magnetics, 2002.
- [15] RUSŇÁK, K. Učební texty pro FYA2. 2005. Dostupné z: <https://portal.zcu.cz/portal/studium/courseware/kfy/fya2/studijni-materialy.html>.
- [16] TYTLER, C. *Modeling Vehicle Dynamics – Quadcopter Equations of Motion* [online]. Dostupné z: <http://charlestytler.com/quadcopter-equations-motion/>.
- [17] TYTLER, C. *Modeling Vehicle Dynamics – Euler Angles* [online]. [cit. 2019/03/10]. Dostupné z: <http://charlestytler.com/modeling-vehicle-dynamics-euler-angles/>.
- [18] WIKIPEDIA. *Eddy current* [online]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Eddy_current.
- [19] WIKIPEDIA. *Supravodivost* [online]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Supravodivost>.
- [20] WIKIPEDIA. *Magnetic Dipole* [online]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_dipole.
- [21] WIKIPEDIA. *Magnetic levitation* [online]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_levitation.
- [22] WIKIPEDIA. *Magnetická levitace* [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Magnetická_levitace.
- [23] WIKIPEDIA. *Magnetizace* [online]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Magnetizace>.
- [24] WIKIPEDIA. *Permeability* [online]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Permeability_\(electromagnetism\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Permeability_(electromagnetism)).
- [25] WILSON, C. *Maglev: Magnetic Levitating Trains* [online]. Dostupné z: <https://sites.tufts.edu/eeseniordesignhandbook/2015/maglev-magnetic-levitating-trains/>.