



Bakalářská práce
Návrh řízení kvadrotéry s inverzním
kyvadlem/Stabilization of quadrotor with inverted
pendulum

Autor práce: Tomáš Kolár
Vedoucí práce: Ing. Miroslav Flídr, Ph.D
Akademický rok 2018/2019

ZADÁNÍ

PROHLÁŠENÍ

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne

.....

vlastnoruční podpis

Abstrakt

Práce pojednává o principech řízení, kterými lze dosáhnout stability sférického inverzně uloženého kyvadla na kvadrotéře. Systém je rozdělen do dvou subsystému, kde je každý ze systémů navržen zvlášť. Na základě matematických modelů je navrženo vhodné řízení. Kvadrotéra je řízena kaskádou PID regulátorů, zatímco pro inverzní sférické kyvadlo je realizován LQ regulátor. Navržené subsystémy jsou nakonec spojeny v jeden. Výsledky jsou ověřeny a prezentovány pomocí simulace a 3D vizualizace.

Klíčová slova

kvadrotéra, kyvadlo, řízení, PID, rámce, regulátor, systém, model

Abstract

This thesis deals with principle of control, which can be used to achieve the stability of the spherical inverted pendulum on the quadrotor. The system is divided into two subsystems where each of the systems is designed separately. Based on mathematical models, appropriate management is proposed. The quadrotor is controlled by a cascade of PID controllers, while an LQ controller is implemented for the inverse spherical pendulum. The two subsystems are composed into single one. The results are verified and presented using simulation and 3D visualization.

Keywords

quadrotor, pendulum, control, PID, frame, regulator, system, model

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval panu Ing. Miroslavovi Flídrovi, Ph.D za trpělivost, spolupráci a odborné vedení při tvorbě práce a dále panu Ing. Tomášovi Myslivcovi a Ing. Zdeňkovi Boučkovi za poskytnuté rady a připomínky. Také bych chtěl prokázat vděk své rodině za veškerou poskytnutou podporu během tvorby práce i celého zatímního studia.

Obsah

1	Úvod	13
2	Kvadroptéra	15
2.1	Konstrukce	15
2.2	Souřadnicové rámce a reprezentace pozice	16
2.2.1	Pravidlo pravé ruky	16
2.2.2	Lokální souřadnicový systém a souřadnicový systém kvadroptéry . .	17
2.2.3	Maticе rotace	17
2.3	Návrh modelu	21
2.3.1	Translační kinematika	21
2.3.2	Rotační kinematika	22
2.3.3	Translační dynamika	23
2.3.4	Rotační dynamika	23
2.3.5	Dynamika aktuátorů	25
2.3.6	Stavový popis a linearizace	26
2.3.7	Řiditelnost systému	28
2.4	Návrh řízení kvadroptéry	28
2.4.1	Obecná strategie řízení	29
2.4.2	PID regulátor	29
2.5	Simulační ověření	33
3	Inverzní kyvadlo s pohyblivým pivotem	36
3.1	Návrh systému	36
3.1.1	Pohybové rovnice	37
3.1.2	Linearizace a stavový popis	38
3.1.3	Stabilita systému	39
3.1.4	Řiditelnost systému	40

3.2	Návrh řízení - stavová zpětná vazba	40
3.2.1	LQ regulátor	42
3.3	Simulační ověření	43
4	Složený systém	47
4.1	Návrh systému	48
4.1.1	Dynamika	48
4.1.2	Vstup kyvadla - zrychlení	49
4.1.3	Vstup kvadrotéry - síla	50
4.2	Řízení složeného systému	51
4.3	Simulační ověření	51
5	Závěr	57
A	Přehled možných kombinací rotačních matic	59

Seznam obrázků

2.1	Souřadnicové rámce	17
2.2	Znázornění úhlů kolem souřadnicového systému	18
2.3	Rotace o úhel ϕ kolem osy x	19
2.4	Rotace o úhel θ kolem osy y	19
2.5	Rotace o úhel ψ kolem osy z	19
2.6	Příklad - první rotace o úhel ϕ kolem osy x_L	20
2.7	Příklad - druhá rotace o úhel θ kolem osy y_L	20
2.8	PID regulátor	30
2.9	Kaskáda regulátorů	31
2.10	Vizualizační model kvadroptéry	33
2.11	Blokové schéma zapojení systému kvadroptéry v Simulinku	34
2.12	Simulace stabilizovaného nelineárního modelu kyvadla	35
3.1	Rozdělení Gaussovy roviny podle stability pólů	39
3.2	PID regulátor	41
3.3	Simulace nestabilizovaného nelineárního modelu kyvadla	44
3.4	Simulace stabilizovaného nelineárního modelu kyvadla	45
3.5	Simulace stabilizovaného nelineárního modelu kyvadla na pulsy síly	46
4.1	Spojení systémů kyvadla a kvadroptéry	47
4.2	Lokální a tělesové souřadnicové rámce s napojeným systémem kyvadla	49
4.3	Vyjádření síly v tělesovém rámci	49
4.4	Vyjádření rozložení síly tahu v tělesovém rámci	50
4.5	Blokové schéma zapojení subsystémů	51
4.6	Simulační schéma zapojení kvadroptéry s kyvadlem	52
4.7	Simulace stabilizovaného nelineárního modelu složeného systému na počítačnické podmínky kyvadla	53

4.8	Simulace stabilizovaného nelineárního modelu složeného systému na počítačnické podmínky kyvadla	54
4.9	Odezva stabilizovaného nelineárního modelu složeného systému na pulsy síly	55
4.10	Odezva stabilizovaného nelineárního modelu složeného systému na pulsy síly	56

Seznam tabulek

2.1	Tabulka hodnot parametrů kvadroptéry	34
3.1	Tabulka hodnot parametrů kyvadla	43
4.1	Tabulka hodnot parametrů pro složený systém	52

Seznam symbolů a zkratek

symbol	popis
b	koeficient tahu
d	koeficient odporu
l	délka ramene kvadroptéry od jejího středu
g	gravitační zrychlení
m	hmotnost kvadroptéry
L_F	lokální souřadnicový rámec
B_F	souřadnicový rámec kvadroptéry (tělesový)
x_L	tranlační proměnná v ose x lokálního rámce
y_L	tranlační proměnná v ose y lokálního rámce
z_L	tranlační proměnná v ose z lokálního rámce
x_b	tranlační proměnná v ose x tělesového rámce
y_b	tranlační proměnná v ose y tělesového rámce
z_b	tranlační proměnná v ose z tělesového rámce
R_x	elementární rotační matice pro osu x
R_y	elementární rotační matice pro osu y
R_z	elementární rotační matice pro osu z
\mathbf{x}_b	vektor translačních proměnných v tělesovém rámci
\mathbf{x}_L	vektor translačních proměnných v lokálním rámci
R_L^b	rotační matice z lokálního na tělesový rámec
R_b^L	rotační matice z tělesového na lokální rámec
I	jednotková matice o rozměrech i
$\boldsymbol{\omega}_b$	vektor úhlových rychlostí v tělesovém rámci
T	transformační matice pro úhly
ϕ	úhel kolem osy x lokálního rámce
θ	úhel kolem osy y lokálního rámce
ψ	úhel kolem osy z lokálního rámce
p	úhlová rychlost kolem osy x tělesového rámce
q	úhlová rychlost kolem osy y tělesového rámce
r	úhlová rychlost kolem osy z tělesového rámce
$c()$	$\cos()$
$s()$	$\sin()$
$t()$	$\tan()$

symbol	popis
J	matice momentů setrvačnosti kvadroptéry
J_x	moment setrvačnosti v ose x
J_y	moment setrvačnosti v ose y
J_z	moment setrvačnosti v ose z
F_T^b	matice vnějších sil v tělesovém rámci
F_x	vnější síla v ose x v tělesovém rámci
F_y	Vnější síla v ose y v tělesovém rámci
F_z	vnější síla v ose z v tělesovém rámci
F_t	celkový tah generovaný kvadroptérou
τ_B	matice točivých momentů v tělesovém rámci
τ_x	točivý moment v ose x
τ_y	točivý moment v ose y
τ_z	točivý moment v ose z
J_p	moment setrvačnosti motoru
ω_i	úhlová rychlost i -tého motoru
x	stavový vektor
Q_c	matice říditelnosti
u_i	i -tý vstup
P	proporcionální složka regulátoru
I	integrační složka regulátoru
D	derivační složka regulátoru
K_p	zesílení proporcionální složky
K_i	zesílení integrační složky
K_d	zesílení derivační složky
r	průmět kyvadla v ose x do roviny XY
s	průmět kyvadla v ose y do roviny XY
ζ	relativní výška pohyblivého bodu kyvadla
L	Lagrangeián
T	kinetická energie
V	potenciální energie
λ	vlastní číslo
K	zesílení
Q	váhová matice stavu
R	váhová matice ceny
LQR	linear quadratic regulator

Kapitola 1

Úvod

Kvadrokoptéra neboli dron je helikoptéra se čtyřmi rotory. První takový funkční stroj vyrobil pan Etienne Oehmichen roku 1920. Dnes je vývoj soustředěn především na malé bezpilotní kvadroptéry, které vynikají svými manévrovacími schopnostmi. Používají je hasiči, policie i armáda. Jejich využití však není vůbec omezeno. Některé články pojednávají o využití dronů ve velkých skladech a to například k počítání zboží či převozu balíků, jiné se soustředí na mapování golfových hřišť pomocí kamer.

Manévrovatelnost kvadroptéry je zásadní vlastností a změnou oproti klasickým létajícím objektům jako jsou letadla či helikoptéry. Tato skutečnost dává možnost návrhu i realizaci řešení hned několika s ní spojených problémů. Existují projekty, které se zabývají pro příklad převozem nákladu za využití kvadroptér. Formulace tohoto problému uvažuje náklad, tedy kyvadlo, zavěšené pod kvadroptérou. Klasickou úlohou je pak stabilizace nákladu při zrychlování či zpomalování kvadroptéry. Tento problém lze při určitých zjednodušeních transformovat na klasický vozík se zavěšeným kyvadlem, jež se pohybuje pouze ve dvoudimenzionálním prostoru.

Jednou z dalších řešitelných úloh je stabilizace kyvadla nad tělem kvadroptéry, tzv. inverzního sférického kyvadla. Nejznámějším řešitelem obdobného problému je Raffaello D'Andrea, což je švýcarský inženýr a podnikatel, který je zároveň vedoucím výzkumu dynamických systémů a řízení na ETH Zurich. Ten se věnuje převážně řízení kvadroptér, přičemž jeho nejznámější práce jsou realizace kvadroptéry s inverzním kyvadlem, ovládání kvadroptér pomocí gest nebo řízení trajektorie letu skupiny kvadroptér. Problém řízení kvadroptéry s inverzním kyvadlem a s ním spojené podproblémy jsou obsahem této práce.

Cílem této práce je navrhnout matematický model kvadroptéry s inverzním kyvadlem, navrhnout vhodné řízení ke stabilizaci tohoto složeného systému a vytvořit vizuální simulaci výsledků. Veškerý obsah je potom rozdělen do tří hlavních částí.

První část se zabývá kvadrotérou jako samostatným systémem. Tato kapitola obsahuje deklaraci souřadnicových rámců a jejich vzájemných vztahů. Krátká část je věnována rotačním maticím. Model je navržen na základě matematicko-fyzikálních rovnic a z nich vycházejících vztahů. Systém je linearizován v pracovním bodě, kde je navrženo řízení pomocí kaskády PID regulátorů.

Druhá část je věnována inverznímu kyvadlu s pohyblivým závěsem. Sférické inverzní kyvadlo je klasický typ úlohy automatického řízení, o kterém pojednávají například články [4], [3] nebo teze [6]. I když takový systém nemá ve světě příliš velké uplatnění, tvoří zajímavou úlohu ke zdokonalení jejího řešitele v oboru řízení systémů. Systém je navržen Lagrangeovou metodou a jeho stabilizace je provedena pomocí stavové zpětné vazby s využitím optimalizační úlohy LQR.

Třetí část práce pojednává o složeném systému, kde jsou připojeny předchozí dva subsystémy k sobě. Důležitou součástí je diskutování možnosti spojení dvou subsystémů a předpokladů, za kterých tak lze učinit.

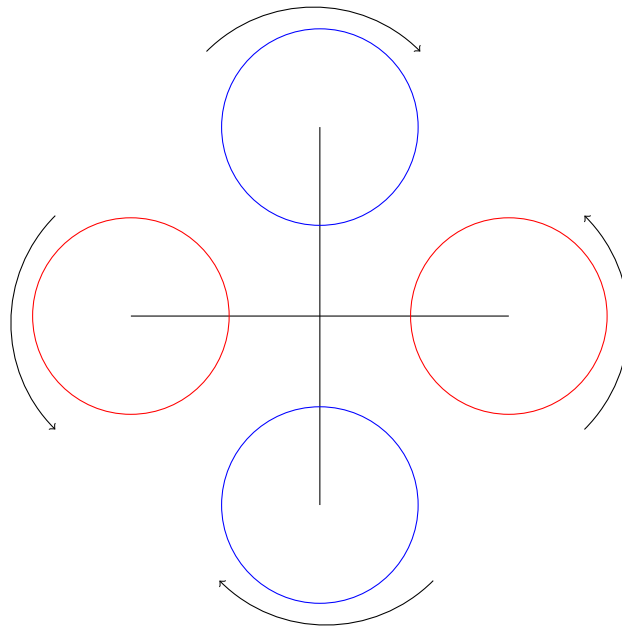
Navržené systémy jsou modelovány v programu MATLAB, který nabízí široké možnosti simulací v celém oboru řízení systémů. Vizualizace výsledků je rovněž provedena v tomto programu.

Kapitola 2

Kvadroptéra

2.1 Konstrukce

Jednou z nejčastěji používaných konstrukcí kvadroptér je konstrukce se čtyřmi statickými rotory. Existují ale také kvadroptéry s dynamickými rotory, které poskytují širší možnost řízení pro svou schopnost změny náklonu samostatných rotorů. Klasicky jsou rotory umístěny do vrcholů čtverce a to z důvodu snadné říditelnosti. Všechny rotory mají nastaveny lopatky tak, aby vyvíjely tah směrem nahoru. Jeden pár protilehlých rotorů se ovšem točí jedním směrem, zatímco druhý pár opačným. Toto provedení zamezuje rotačnímu účinku, který motory vytváří vůči celé konstrukci. V praxi je následkem totožné orientace rotorů točivý pohyb kvadroptéry kolem osy z opačným směrem než je pohyb lopatek rotorů.



U reálného modelu kvadrotéry se k měření vlastního translačního zrychlení a úhlovým zrychlením využívá tzv. inerciální měřicí jednotka (IMU). To je elektronické zařízení, které měří veličiny pomocí kombinace akcelerometrů a gyroskopů, někdy také magnetometrů, a hlásí je řídicímu systému. Inerciální měřicí jednotky se také typicky používají v letadlech. V této práci se předpokládá úplná znalost všech stavů a uvažuje se měření bez poruch, jež by mohly z jednotek přicházet.

2.2 Souřadnicové rámce a reprezentace pozice

Souřadnicové rámce nebo souřadnicové systémy umožňují jednoznačně popsat polohu bodu pomocí čísel jakožto souřadnic čili koordinát. Aby bylo vůbec možné popsat pohyb tuhého tělesa v prostoru, je třeba deklarovat pevné a pohyblivé souřadnicové rámce, které mezi sebou mají jisté vazby. Ke kvadrotéře se přistupuje jakožto k tuhému tělesu ve vesmíru popsanému souřadnicovými rámci letounu vůči předem danému lokálnímu souřadnicovému rámci. Obecně se definuje celá řada souřadnicových rámců, kde mezi nejznámější patří *Earth-Fixed Coordinate Frame (EFCF)*, *Earth-Centered*, *Earth-Fixed (ECEF)* nebo *ECR*) či *Aircraft-Body Coordinate Frame (ABCF)* viz kniha [5]. Existuje také více přístupů k popisu vztahů mezi těmito rámci. Třemi nejpoužívanějšími jsou popisy pomocí Eulerových úhlů, matice rotace a quaternionů. Zde se transformace mezi rámci popisuje pomocí rotačních matic.

2.2.1 Pravidlo pravé ruky

Před definováním samotných souřadnicových rámců je třeba deklarovat pozitivní směry ve všech osách souřadnicového rámce a dále také pro všechny úhly.

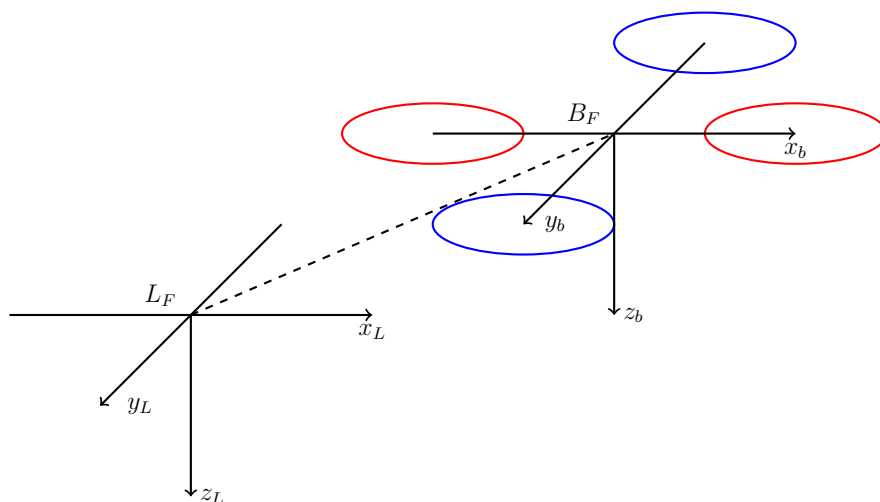
Tyto pozitivní směry lze určit pravidlem pravé ruky. Pravidlo pravé ruky je v matematice a fyzice běžnou mnemotechnickou pomůckou pro pochopení orientace os ve třírozměrném prostoru. Palec pravé ruky reprezentuje pozitivní směr osy x , ukazovák osy y a prostředníček ukazuje pozitivním směrem v ose z .

Typicky se využívají dvě intuitivní nastavení pozitivních směrů os. Jsou to nastavení ruky, kdy osa z (palec) směřuje směrem dolů nebo nahoru. Podle toho se mění uspořádání zbylých dvou os souřadnicového systému. Volba kladného směru osy z směrem dolů se často využívá v letectví a to z důvodu pozitivního směřování gravitačního zrychlení. V práci je také z tohoto důvodu zvolena varianta, kdy kladný směr osy z je směr dolů.

2.2.2 Lokální souřadnicový systém a souřadnicový systém kvadrotéry

Lokální souřadnicový systém, respektive jeho počátek, může být zvolen v testovacím prostředí (např. v laboratoři) a využit k pozorování dynamických stavů kvadrotéry vzhledem k počátku lokálního souřadnicového systému (tím může být určité místo na podlaze) a k určení pozice kvadrotéry ve třídímním prostoru. Tento lokální rámec (v práci také vztažný) bude v práci značen písmenem L_F - *Local frame*, který tvoří souřadnice $\begin{bmatrix} x_L & y_L & z_L \end{bmatrix}^T$.

Souřadnicový rámec kvadrotéry je fixován na její tělo, kde počátky jednotlivých os tohoto systému leží ve středu kvadrotéry a to tak, že osa x_b prochází skrz před a zad letounu a ukazuje tedy pozitivním směrem vpřed. Osa z_b prochází skrz symetrické tělo letounu a směřuje dolů. Osa y_b je určena pravidlem pravé ruky a směřuje tak skrz jedno z postranních ramen letounu. Souřadnicový systém kvadrotéry (v práci také tělesový rámec) je značen písmenem B_F - *Body frame*. Ten je tvořen souřadnicemi $\begin{bmatrix} x_b & y_b & z_b \end{bmatrix}$.



Obrázek 2.1: Souřadnicové rámce

2.2.3 Matice rotace

Otáčení pomocí rotačních matic je obecně jedním ze způsobů popisu rotace tuhého tělesa kolem vztažného souřadnicového systému. Popisuje se rotace soustavy souřadnic do nově vzniklé polohy určené nově vzniklým souřadnicovým systémem. Z předchozí definice o

souřadnicových rámcích 2.2.2 vychází, že zde se popisuje rotace mezi lokálním a tělesovým rámcem. Jakýkoliv vektor \vec{v} lze obecně vyjádřit jako

$$\vec{v} = a_b \vec{x}_b + b_b \vec{y}_b + c_b \vec{z}_b = a_L \vec{x}_L + b_L \vec{y}_L + c_L \vec{z}_L \quad (2.1)$$

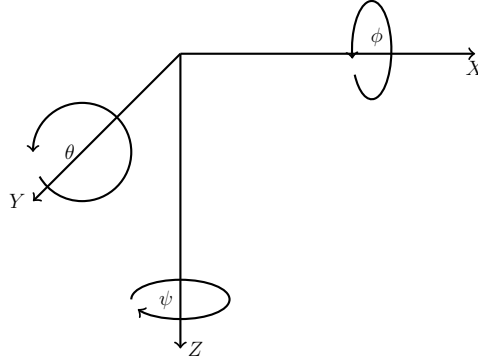
kde dolní indexy značí dané souřadnicové rámce. Produktem roznásobení rovnice (2.1) jednotlivými vektory x_b, y_b, z_b jsou tyto tři rovnice

$$\begin{aligned} a_b(\vec{x}_b, \vec{x}_b) + b_b(\vec{y}_b, \vec{x}_b) + c_b(\vec{z}_b, \vec{x}_b) &= a_L(\vec{x}_L, \vec{x}_b) + b_L(\vec{y}_L, \vec{x}_b) + c_L(\vec{z}_L, \vec{x}_b) \\ a_b(\vec{x}_b, \vec{y}_b) + b_b(\vec{y}_b, \vec{y}_b) + c_b(\vec{z}_b, \vec{y}_b) &= a_L(\vec{x}_L, \vec{y}_b) + b_L(\vec{y}_L, \vec{y}_b) + c_L(\vec{z}_L, \vec{y}_b) \\ a_b(\vec{x}_b, \vec{z}_b) + b_b(\vec{y}_b, \vec{z}_b) + c_b(\vec{z}_b, \vec{z}_b) &= a_L(\vec{x}_L, \vec{z}_b) + b_L(\vec{y}_L, \vec{z}_b) + c_L(\vec{z}_L, \vec{z}_b), \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde rovnice (2.2) má maticový tvar zápisu

$$\begin{bmatrix} a_b \\ b_b \\ c_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{x}_L, \vec{x}_b) & (\vec{y}_L, \vec{x}_b) & (\vec{z}_L, \vec{x}_b) \\ (\vec{x}_L, \vec{y}_b) & (\vec{y}_L, \vec{y}_b) & (\vec{z}_L, \vec{y}_b) \\ (\vec{x}_L, \vec{z}_b) & (\vec{y}_L, \vec{z}_b) & (\vec{z}_L, \vec{z}_b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_L \\ b_L \\ c_L \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Přesná definice matice rotace, respektive Eulerova věta, říká: *Jakékoliv rotace tuhého*

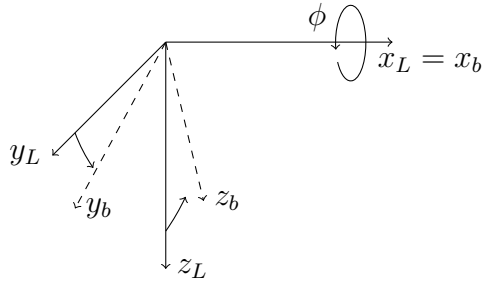


Obrázek 2.2: Znázornění úhlů kolem souřadnicového systému

tělesa lze dosáhnout třemi elementárními rotacemi kolem souřadnicového systému, který prochází skrz tuhé těleso. V praxi to znamená, že pro tuhé těleso lze definovat rotační matici \mathbf{R} na základě elementární rotačních matic \mathbf{R}_i takovou, že postupně otáčí těleso do požadovaného natočení. Takové elementární rotace lze určit z předchozí rovnice (2.3).

V převážné většině článků jsou elementární rotace reprezentovány maticemi \mathbf{R}_ϕ , \mathbf{R}_θ a \mathbf{R}_ψ nebo obdobně \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y a \mathbf{R}_z . Obdobnost značení spočívá v pojmenování úhlů natočení kolem daných os viz obrázek 2.2.

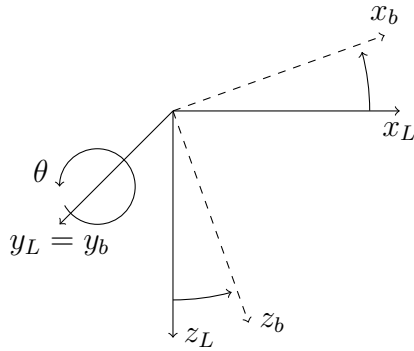
Exaktní formy elementárních matic rotace $\mathbf{R}_x(\phi)$, $\mathbf{R}_y(\theta)$ a $\mathbf{R}_z(\psi)$ jsou potom dány takto:



$\mathbf{R}_x(\phi)$ odpovídá elementární rotační matici pro úhel ϕ kolem osy x

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

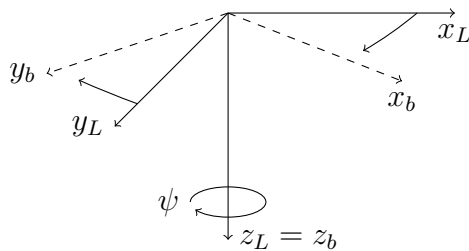
Obrázek 2.3: Rotace o úhel ϕ kolem osy x



$\mathbf{R}_y(\theta)$... elementární rotační matice pro úhel θ kolem osy y

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Obrázek 2.4: Rotace o úhel θ kolem osy y



$\mathbf{R}_z(\psi)$... elementární rotační matice pro úhel ψ kolem osy z

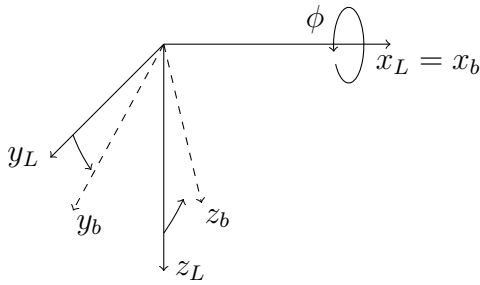
$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Obrázek 2.5: Rotace o úhel ψ kolem osy z

Zavádí se názvy jednotlivých natočení o daný úhel a to následovně

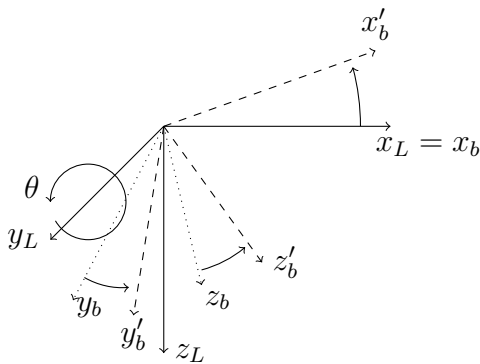
- Natočení o úhel ϕ je *náklon* neboli "*roll*".
- Natočení o úhel θ je *sklon* neboli "*pitch*".
- Natočení o úhel ψ je *otočení* neboli "*yaw*".

Příklad 1 Pro snazší pochopení rotování kolem rámců je uveden příklad rotace kolem dvou os.



První rotace je provedena o úhel roll ϕ . Osa x_b tak zůstává beze změny a je nadále shodná s původní osou x_L lokálního rámcu.

Obrázek 2.6: Příklad - první rotace o úhel ϕ kolem osy x_L



Následná rotace rotuje již přerotovaným souřadným systémem B_F o úhel pitch θ .

Obrázek 2.7: Příklad - druhá rotace o úhel θ kolem osy y_L

Nicméně, jak definice elementárních rotačních matic $\mathbf{R}_x(\phi)$, $\mathbf{R}_y(\theta)$ a $\mathbf{R}_z(\psi)$, tak jejich vzájemné násobení, závisí zčásti na volbě uživatele. Uživatelé v různých kontextech a literaturách používají různé sady konvencí. Všech dvanáct možných sekvencí rotace je popsáno v dodatku A.

2.3 Návrh modelu

Návrh matematického modelu kvadrotéry využívá Newton-Eulerovy rovnice pro 3D pohyb tuhého tělesa. Cílem této sekce je získat hlubší pochopení kinematiky a s ní navázané dynamiky kvadrotéry a poskytnout tak model, který je dostatečně spolehlivý pro simulaci a řízení.

2.3.1 Translační kinematika

Stavové veličiny rychlosti jsou měřitelné v rámci B_F , ovšem stavové veličiny pozice jsou součástí rámců L_F . Z tohoto důvodu je třeba transformovat veličiny mezi rámci a to pomocí rotačních matic. Definuje se

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{R}_L^b \mathbf{x}_L = \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{x}_L, \quad (2.7)$$

kde $\mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} x_b & y_b & z_b \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}_L = \begin{bmatrix} x_L & y_L & z_L \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ a rotační matice \mathbf{R}_L^b , která slouží k převodu lokálních rámců na tělesové rámce a je dána jako součin elementárních rotačních matic pro jednotlivé úhly

$$\mathbf{R}_L^b = \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{R}_L^b = \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) & s(\psi)c(\theta) & -s(\theta) \\ c(\psi)s(\phi)s(\theta) - c(\phi)s(\psi) & s(\phi)s(\psi)s(\theta) + c(\phi)c(\psi) & c(\theta)s(\phi) \\ c(\phi)c(\psi)s(\theta) + s(\phi)s(\psi) & c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

kde c a s značí funkce $\cos()$ a $\sin()$. Jelikož inverzní matice k \mathbf{R}_L^b je definována vztahem

$$(\mathbf{R}_L^b)^T \mathbf{R}_L^b = \mathbf{I}, \quad (2.10)$$

kde \mathbf{I} je diagonální jednotková matice, platí, že obrácená transformace (tělesové rámce na lokální) se definuje

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{R}_b^L \mathbf{x}_b = \mathbf{R}_x(\phi)^T \mathbf{R}_y(\theta)^T \mathbf{R}_z(\psi)^T \mathbf{x}_b = (\mathbf{R}_L^b)^T \mathbf{x}_b, \quad (2.11)$$

kde \mathbf{R}_b^L je transformační matice z tělesového na lokální rámec - tedy

$$\mathbf{R}_b^L = \mathbf{R}_x(\phi)^T \mathbf{R}_y(\theta)^T \mathbf{R}_z(\psi)^T = (\mathbf{R}_L^b)^T, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{R}_b^L = \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) & c(\psi)s(\phi)s(\theta) - c(\phi)s(\psi) & c(\phi)c(\psi)s(\theta) + s(\phi)s(\psi) \\ s(\psi)c(\theta) & s(\phi)s(\psi)s(\theta) + c(\phi)c(\psi) & c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi) \\ -s(\theta) & c(\theta)s(\phi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

2.3.2 Rotační kinematika

Rotační kinematika plyne ze stejných obecných výsledků. Vzhledem k tomu, že úhlové rychlosti jsou definovány v tělese a Eulerovy úhly jsou v mezilehlých souřadnicových rámcích, lze použít odvozenou rotační matici $\mathbf{R}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{b}}$ k určení vztahu mezi úhlovou rychlostí a časovými deriváty Eulerových úhlů. Úhlové rychlosti jsou vektory směřující kolem každé osy otáčení.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\phi)\mathbf{R}(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

kde $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{b}} = [p \ q \ r]^T$, z čehož je po úpravách

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s(\theta) \\ 0 & c(\phi) & c(\theta)s(\phi) \\ 0 & -s(\phi) & c(\theta)c(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

kde \mathbf{T} je transformační matice pro úhly z lokálních na tělesové rámce. Inverzí transformační matice \mathbf{T} je dosaženo opačné transformace viz 2.16

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & t(\theta)s(\phi) & t(\theta)c(\phi) \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & \frac{s(\phi)}{c(\theta)} & \frac{c(\phi)}{c(\theta)} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

a tedy platí i

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t(\theta)s(\phi) & t(\theta)c(\phi) \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & \frac{s(\phi)}{c(\theta)} & \frac{c(\phi)}{c(\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Vsuvka 1 Gimball lock

V rovnici (2.31) je u některých elementů matice jmenovatelem $\cos \theta$. To je důvodem vzniku problému, který je znám jako Gimbal lock. Gimbal lock je ztráta jednoho stupně volnosti v třídeminzionálním mechanismu, ke kterému dochází, když jsou právě dvě ze tří os systému uvedeny do paralelního uspořádání. V takovém případě se zablokuje systém do rotace v tzv. degenerovaném dvoudimenzionálním prostoru. Tento problém je při realizaci letu kvadroptéry třeba ošetřit. Ošetření tohoto problému je v praxi nedílnou součástí při navrhování řízení systému. Ke stabilizaci kyvadla nad kvadroptérou se ale uvažuje jen relativně malá výchylka. Pro simulování stabilizace tak není nutně potřeba ošetřovat tento problém.

2.3.3 Translační dynamika

Pohybové rovnice kvadrotéry jsou definovány v lokálním referenčním rámci. Zrychlení kvadrotéry v tomto rámci se pak rovná součtu gravitační síly a síly tahu motorů. Síla odporu okolí je zanedbána. Vektor tahu v tělesovém rámci je transformován do lokálního rámce pomocí matice rotace 2.2.3. Výsledná síla generovaná čtyřmi motory v lokálním rámci je definována jako součet součinů součinitele tahu a úhlových rychlostí každého z motorů.

$$m\ddot{\mathbf{x}}_L = \mathbf{F}_g - \mathbf{F}_T^L, \quad (2.18)$$

kde m je hmotnost kvadrotéry, $\mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & mg \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ je vektor gravitační síly a \mathbf{F}_T^L je vektor síly celkového tahu. Pro sílu tahu platí

$$\mathbf{F}_T^L = \mathbf{R}_b^L \sum_{i=1}^4 F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

b je součinitel tahu, což je bezrozměrná veličina vyjadřující schopnost motoru vyvíjet určitý tah a ω_i značí úhlové rychlosti motorů. Dynamické rovnice translace lze po úpravách zapsat

$$\begin{aligned} \ddot{x}_L &= -\frac{F_T}{m} [s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] \\ \ddot{y}_L &= -\frac{F_T}{m} [c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)] \\ \ddot{z}_L &= g - \frac{F_T}{m} [c(\phi)c(\theta)] \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.3.4 Rotační dynamika

Pohybové rovnice jsou definovány v tělesovém rámci, protože rotace mohou být vypočteny kolem středu kvadrotéry, a ne kolem středu lokálního souřadného rámce. Protože se předpokládá, že kvadrotéra je symetrická, je její matice setrvačnosti také symetrická. Motory vytvářejí točivý moment, který je v důsledku tahu dán jako úměrný součinu součinitele tahu a čtverce úhlové rychlosti rotoru. Eulerova rovnice udává celkový točivý moment aplikovaný na kvadrotéru jako

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\tau}_m - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}), \quad (2.21)$$

kde

$$\boldsymbol{\tau}_m = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lb(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ lb(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix}, (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\dot{\psi}(J_z - J_y) \\ \psi\dot{\phi}(J_z - J_y) \\ \dot{\theta}\dot{\phi}(J_y - J_z) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

$\boldsymbol{\tau}_m = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T \in \mathbb{R}^3$ je vektor točivých momentů vytvořených motory. Pro tělesa, která se mohou volně pohybovat ve trojrozměrném prostoru, mohou být jejich momenty setrvačnosti popsány tzv. symetrickou maticí setrvačnosti 3x3 se sadou vzájemně kolmých hlavních os, pro které je tato matice diagonální a momenty kolem os působí nezávisle na sobě. \mathbf{J} je tedy diagonální matice setrvačnosti. Taková matice se zapisuje jako

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

kde J_x , J_y a J_z odpovídají momentům setrvačnosti v daných osách a \mathbf{J} je celková matice setrvačnosti kvadrotéry. Celková rotační dynamika je tak popsána jako

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{J_y - J_z}{J_x} \dot{\theta}\dot{\psi} + \frac{\tau_\phi}{J_x} \\ \ddot{\theta} &= \frac{J_x - J_y}{J_y} \dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{\tau_\theta}{J_y} \\ \ddot{\psi} &= \frac{J_x - J_y}{J_z} \dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{\tau_\psi}{J_z} \end{aligned}. \quad (2.24)$$

Momenty setrvačnosti je třeba změřit u konkrétní reálné kvadrotéry. J_p , celkový moment setrvačnosti motorů, je shledán malým a z tohoto důvodu nejsou gyroskopické momenty uvažovány. Navíc se zde vyskytují četné aerodynamické jevy, které ovlivňují let kvadrotéry, jako např. při letu blízko země (nebo během fáze přistání), kdy tvoří motory vzdušné proudy ovlivňující celkový pohyb kvadrotéry. Všechny tyto jevy jsou zanedbány. Tyto jevy lze vhodně zvoleným řízením částečně eliminovat.

2.3.5 Dynamika aktuátorů

Aktuátor nebo také akční člen je obvykle část mechatronické soustavy, která převádí informační část procesu na technickou. Ze systému tak vychází příkaz o změně směru, který je aktuátorem převeden na mechanickou energii potřebnou k vychýlení ze současného směru pohybu stroje. Takový aktuátor se stává vstupem systému. Zvažují se tedy vstupy, které lze aplikovat na systém za účelem řízení tohoto systému. Zde jsou akční členy čtyři ovládané rotory. Celkový tah F_T je produkován zrychlením všech čtyř rotorů stejným směrem. Momenty tahu v jednotlivých osách $\begin{bmatrix} \tau_\phi & \tau_\theta & \tau_\psi \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ jsou vyvíjeny zpomalením, respektive zrychlením dvou různých párů rotorů a to následovně

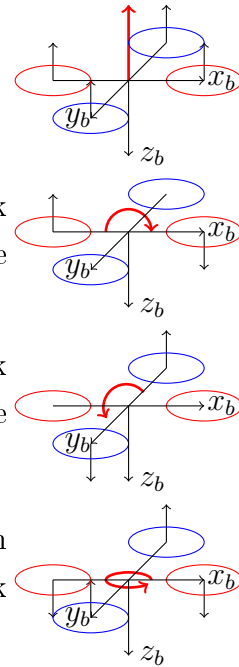
$$\begin{bmatrix} F_T^b \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -lb & 0 & lb \\ lb & 0 & -lb & 0 \\ d & -d & d & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

kde l je vzdálenost mezi rotorem a středem dronu a d je součinitel odporu a ω_i jsou úhlové rychlosti motorů. Součinitel odporu je bezrozměrná veličina, která určuje závislost odporu prostředí na tvaru tělesa.

K definování řídicích vstupů do systému kvadrotéry jsou použity rovnice tahu a momentu.

Řídicími vstupy jsou:

- u_1 - výsledný tah čtyř rotorů
- u_2 - rozdíl tahu mezi motory na ose x , který má za následek změny úhlu natočení a následný pohyb v příčném směru v ose x .
- u_3 - rozdíl tahu mezi motory na ose y , který má za následek změny úhlu natočení a následný pohyb v bočním směru v ose y .
- u_4 - rozdíl točivého momentu mezi rotory ve směru hodinových ručiček a proti směru hodinových ručiček, což má za následek moment, který otáčí kvadrotorem kolem svislé osy z .



Pohybové rovnice (2.20) a (2.24) s nově zavedenými řídicími vstupy z rovnice (2.25) a to takto

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_L &= -\frac{u_1}{m}[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] \\
\ddot{y}_L &= -\frac{u_1}{m}[c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)] \\
\ddot{z}_L &= g - \frac{u_1}{m}[c(\phi)c(\theta)] \\
\dot{\phi} &= \frac{J_y - J_z}{J_x}\dot{\theta}\dot{\psi} + \frac{u_2}{J_x} \\
\dot{\theta} &= \frac{J_x - J_y}{J_y}\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{u_3}{J_y} \\
\dot{\psi} &= \frac{J_x - J_y}{J_z}\dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{u_4}{J_z}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

2.3.6 Stavový popis a linearizace

Stavový popis modelu umožňuje deklarovat vazbu derivace stavové veličiny případně derivace vektoru stavu na libovolný vstup nebo výstup. Rovnice, dle které se stavový popis vyjadřuje, je dána

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{2.27}$$

Z hlediska dynamických vlastností je vliv vstupu na výstup většinou zanedbatelný a považuje se často za nulový. Jak již bylo řečeno, v této práci se předpokládá úplná znalost stavu a matice \mathbf{C} a \mathbf{D} jsou tedy nepodstatné. Protože stavová rovnice vyjadřuje vztah mezi derivací a stavem a vstupem, mají matice \mathbf{A} , \mathbf{B} tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & s & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & s & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & s & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & s & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & s & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & s & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix},$$

kde f_i jsou funkce pohybových rovnic, x_i jsou stavové veličiny pohybových rovnic a u_i jsou zavedené vstupy. Pro systém kvadroptéry je odpovídající sada rovnic f_i a stavových veličin x_i rovna

$$\begin{aligned}
f_1 &= \dot{x}_1 = \ddot{x}_L = -\frac{u_1}{m}[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] \\
f_2 &= \dot{x}_2 = \ddot{y}_L = -\frac{u_1}{m}[c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)] \\
f_3 &= \dot{x}_3 = \ddot{z}_L = g - \frac{u_1}{m}[c(\phi)c(\theta)] \\
f_4 &= \dot{x}_4 = \dot{\phi} = \frac{J_y - J_z}{J_x}\dot{\theta}\dot{\psi} + \frac{u_2}{J_x} \\
f_5 &= \dot{x}_5 = \dot{\theta} = \frac{J_x - J_y}{J_y}\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{u_3}{J_y} \\
f_6 &= \dot{x}_6 = \dot{\psi} = \frac{J_x - J_y}{J_z}\dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{u_4}{J_z}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Nelineární systém je takový, jehož alespoň jeden prvek je nelineární. Odezva na výstupu tohoto prvku tak není násobkem hodnoty na vstupu. Zcela zásadní vlastností

nelineárních systémů je to, že v nich obecně neplatí princip superpozice. V praxi to znamená, že při analýze nelineárních systémů nelze použít ty techniky, které v sobě předpokládají platnost principu superpozice. Z tohoto důvodu se nelineární systémy linearizují. Linearizace se definuje jako nahrazení části průběhu funkce přímkou. Jedná se o aproximaci lineární funkcí.

Pro provedení linearizace je nejprve potřeba zvolit uspořádání stavového vektoru, které se může lišit volbou návrháře systému. Uspořádání vektoru stavu je zvoleno následujícím způsobem

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_L & y_L & z_L & \phi & \theta & \psi & \dot{x}_L & \dot{y}_L & \dot{z}_L & \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{12} \quad (2.29)$$

Dalším krokem je volba rovnovážného bodu, ve kterém bude systém linearizován. Primárním požadavkem je, aby kvadroptéra stála v prostoru na jednom místě - bez pohybu. Rovnovážný bod je tak zvolen jako

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_L & \bar{y}_L & \bar{z}_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{12} \quad (2.30)$$

Pro tento rovnovážný bod lze zjednodušit úhlové rychlosti z rovnice určující transformaci mezi úhlovými rychlostmi a deriváty úhlů platí

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t(\theta)s(\phi) & t(\theta)c(\phi) \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & \frac{s(\phi)}{c(\theta)} & \frac{c(\phi)}{c(\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Pro malé výchylky úhlů je možné zjednodušit rovnice zavedením rovnosti mezi úhlovými rychlostmi jednotlivých rámců $\begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$. Ta vychází z předpokladu, že úhly $\begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ a tedy platí

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

A lze redefinovat stavový vektor jako

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_L & y_L & z_L & \phi & \theta & \psi & \dot{x}_L & \dot{y}_L & \dot{z}_L & p & q & r \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{12}. \quad (2.33)$$

Tento rovnovážný bod určuje stavový popis kvadroptéry, který lze zapsat následovně

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & & & & \\ g & 0 & & & & \\ \mathbf{0}_{2 \times 4} & & \mathbf{0}_{10 \times 6} & & & \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 8} \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

2.3.7 Řiditelnost systému

Základní úlohou řízení dynamických systémů je určení řízení, které způsobí změnu daného počátečního stavu systému. Lze-li takové řízení určit, obvykle existuje takových řízení více a mezi generovanými trajektoriemi lze vybírat. Pro zjištění, zda vůbec existuje nějaké řízení systému, se zavádí pojem řiditelnost stavu, kdy výchozím stavem je libovolný počáteční stav systému a koncovým stavem je počátek stavového prostoru. Jsou-li všechny stavy systému řiditelné, říká se, že systém je řiditelný. V praxi se řiditelnost systému určuje pomocí tzv. *matice řiditelnosti* viz teze [1]. Ta má tvar

$$h[\mathbf{Q}_c] = h[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \dim \mathbf{A} = n. \quad (2.35)$$

Pakliže má matice řiditelnosti stejnou hodnost (počet nezávislých řádků) jako matice dynamiky systému, je systém řiditelný.

Pro systém kvadroptéry je na základě deklarovaných matic \mathbf{A} , \mathbf{B} z rovnice (2.34) sestavena matice řiditelnosti $\mathbf{Q}_c \in \mathbb{R}^{12 \times 48}$, kde počet nezávislých řádků odpovídá hodnotě matice dynamiky a systém je sledán jako řiditelný.

2.4 Návrh řízení kvadroptéry

Řízení celého systému lze rozdělit na celkem tři subsystémy. Nejnižší regulační smyčka řídí úhlové rychlosti (p , q , r) v každé ose kvadroptéry. Tato smyčka musí běžet na vysoké frekvenci kvůli rychlé dynamice kvadroptéry. Následující smyčka vyšší úrovně řídí orientaci kvadroptéry (úhly *roll*, *pitch*, *yaw*). Smyčka nejvyšší úrovně určuje řízení translace v osách

(x, y, z) . Z rovnice (2.26) je patrné, že úhly přímo závisí na vstupech a naopak nezávisí na poloze kvadroptéry, zatímco translační veličiny závisí na úhlech - tedy nepřímo na vstupech. Z tohoto důvodu se obvykle volí k řízení systému tzv. kaskáda PID regulátorů viz článek [7]. Tato část popisuje zvolenou strategii řízení a to právě pomocí kaskády PID, kde, v návaznosti na předchozí definované závislosti, řídicí systém nejnižší úrovně ovládá úhlové rychlosti $\begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$, vyšší úroveň tvoří PID pro úhly $\begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$ a na vnější úrovni je řízena translační poloha kvadroptéry $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$.

2.4.1 Obecná strategie řízení

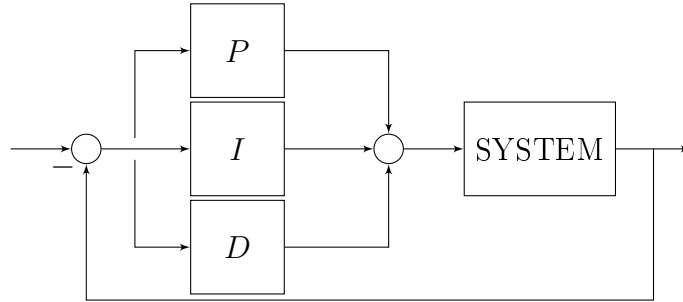
Řízení kvadroptéry je klasický *underactuated problem* systém nebo také poddimenzovaný, co se týče vstupů vůči výstupům. Kvadroptéra je schopna se pohybovat v šesti stupních volnosti (tři translační a tři rotační). Má ovšem pouze čtyři řídicí vstupy (rychlosti každého motoru). Zatímco kvadroptéra se může pohybovat přímo na svislé ose z , aniž by se změnil jakýkoli jiný stav, pro vodorovný pohyb v osách x a y je potřeba změnit náklon celé kvadroptéry. Vzhledem k tomu, že není možné ovládat šest stupňů volnosti pouze pomocí čtyř řídicích vstupů, navrhuje se místo toho regulátory pro stabilizaci kolem požadovaných pozic x , y , z a požadovaného směru. Obecně je vhodné navrhovat regulátory v kaskádě navzájem $5 - 10\times$ pomalejší, o čím vyšší úroveň regulátoru se jedná.

2.4.2 PID regulátor

PID regulátor patří mezi spojité regulátory. Skládá se z proporcionální, integrační a derivační části. Do regulátoru vstupuje regulační odchylka $e(t)$ a vystupuje akční veličina $x(t)$, která se přivádí jako vstup $u(t)$ do řízeného systému. Přenos takového regulátoru lze obecně psát jako

$$F_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)}. \quad (2.36)$$

Vstup u je, jak již bylo zmíněno, tvořen složkami P , I a D , kde proporcionální část regulátoru P je prostý zesilovač a tato složka je tedy přímo úměrná regulační odchylce. Integrační složka I zlepšuje kvalitu regulace na základě minulosti stavů. Složka derivace D tvoří tu část regulátoru, která zrychluje regulační děj na základě budoucích stavů, ale také zesiluje šum.



Obrázek 2.8: PID regulátor

Složky regulátoru potom mají tvar

$$\begin{aligned} P &= k_P e(t), \\ I &= k_I \int_0^t e(t-1) dt, \\ D &= k_D \dot{e}(t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Z blokového schématu viz 2.8 platí, že regulační odchylka $e(t)$ je rozdílem požadovaného výstupu $x_d(t)$ a skutečného výstupu $x(t)$

$$e(t) = x_d(t) - x(t). \quad (2.38)$$

Celková rovnice PID regulátoru pro vstup $u(t)$ je tedy dána následovně

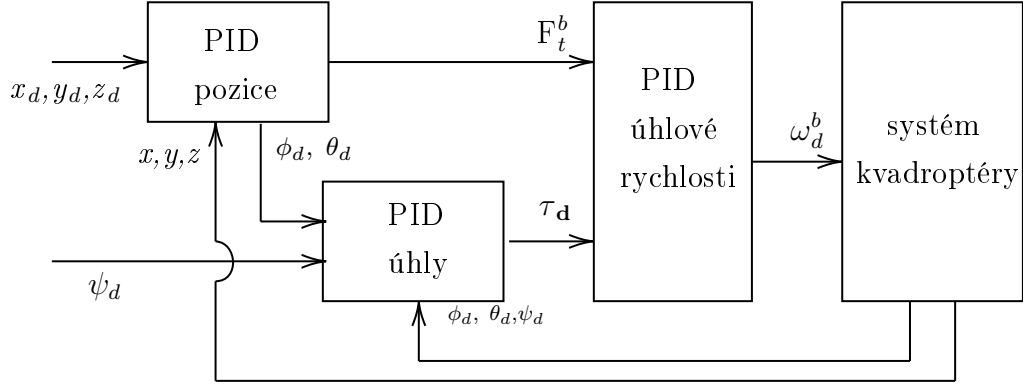
$$u(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(t-1) dt + k_D \dot{e}(t), \quad (2.39)$$

ve tvaru přenosu

$$U(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s = k_R \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s}, \quad (2.40)$$

kde $T_{1,2}$ jsou časové konstanty regulátoru.

Jak již bylo řečeno, řízení kvadroptéry se obvykle navrhuje za pomoci kaskády PID regulátoru. Kaskáda regulátorů se klasicky používá u systémů s velkým dopravním zpožděním. Dopravní zpoždění se za využití kaskády regulátorů dělí na více částí a tím se zlepšuje kvalita a rychlost regulace. Kaskádní regulace je ovšem u kvadroptér nezbytná i kvůli tomu, že polohové veličiny jsou závislé na úhlech natočení a tedy stabilizace úhlů tvoří vnitřní regulátor, zatímco vnější regulátor reguluje translační veličiny. Zapojení regulátorů lze blokovým schématem vyjádřit viz obrázek 2.9



Obrázek 2.9: Kaskáda regulátorů

Zpočátku je třeba implementovat regulátor pro stabilizaci kvadroptéry ve stabilní poloze. To znamená, že všechny požadované úhly jsou nulové a pro účely ladění je nastavena požadovaná výška. Dále se tyto požadované hodnoty polohy a letové výšky mohou lišit v závislosti na vstupech vnější regulační smyčky. Vzhledem k tomu, že zjednodušený model odstraní všechny vazby v pohybových rovnicích, lze řízení polohy realizovat s nezávislým řídicím vstupem pro úhel. PID regulátory s vlastními veličinami úhlů θ a ϕ mají tvar

$$\begin{aligned}\theta_d(t) &= k_P(x_{L_d} - x_L) + k_I \int_0^t (x_{L_d} - x_L) dt + k_D(\dot{X}_d^G - \dot{X}^G), \\ \phi_d(t) &= k_P(y_{L_d} - y_L) + k_I \int_0^t (y_{L_d} - y_L) dt + k_D(\dot{Y}_d^G - \dot{Y}^G).\end{aligned}\quad (2.41)$$

Ovládání výšky je analogií řízení celkového tahu kvadroptéry. To je důležité, protože tento řídicí vstup také ovlivňuje pohyb podél osy x a y . To je vidět v translačních rovnicích pohybu, kde u_1 je vstup ve směrech x a y . Ve zjednodušeném modelu je vertikální zrychlení nezávislé na náklonu. To však neplatí, když se kvadroptéra otáčí, protože komponenty vertikálního zrychlení jsou také v rovinách x a y .

$$u_1(t) = \frac{1}{\cos(\phi) \cos(\theta)} \left(k_P e_z(t) + k_I \int_0^t e_z(t) dt + k_D \frac{e_z(t) - e_z(t-1)}{dt} + mg \right), \quad (2.42)$$

kde $u_1(t)$ je celkový tah všech motorů v čase a $e_z(t)$ je chybová hodnota pro osu z v čase.

Co se týče stabilizace úhlů v druhé vrstvě regulátorů, jejich rovnice mají tvar

$$\begin{aligned}
 p_d(t) &= k_P e_\phi(t) + k_I \int_0^t e_\phi(t) dt + k_D \frac{e_\phi(t) - e_\phi(t-1)}{dt}, \\
 q_d(t) &= k_P e_\theta(t) + k_I \int_0^t e_\theta(t) dt + k_D \frac{e_\theta(t) - e_\theta(t-1)}{dt}, \\
 r_d(t) &= k_P e_\psi(t) + k_I \int_0^t e_\psi(t) dt + k_D \frac{e_\psi(t) - e_\psi(t-1)}{dt},
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

kde $p_d(t)$, $q_d(t)$ a $r_d(t)$ jsou požadované úhlové rychlosti kolem os x_b , y_b a z_b v radiánech za sekundu.

Tyto rovnice se stávají požadovanými momenty tvořenými motory a tvoří třetí vrstvu regulátorů. Lze tedy psát

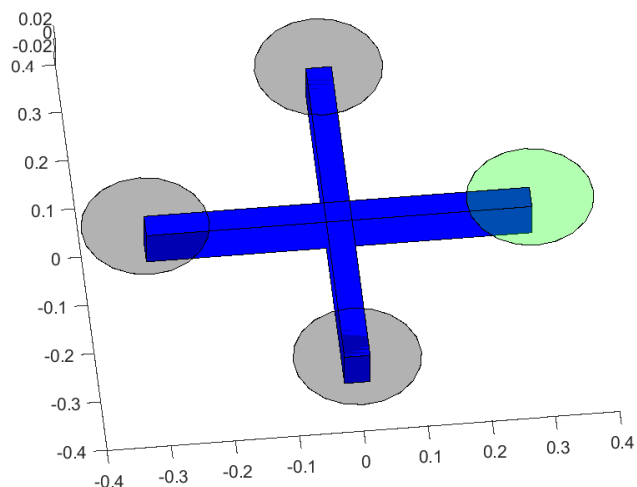
$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= k_P e_p(t) + k_I \int_0^t e_p(t) dt + k_D \frac{e_p(t) - e_p(t-1)}{dt}, \\
 u_3(t) &= k_P e_q(t) + k_I \int_0^t e_q(t) dt + k_D \frac{e_q(t) - e_q(t-1)}{dt}, \\
 u_4(t) &= k_P e_r(t) + k_I \int_0^t e_r(t) dt + k_D \frac{e_r(t) - e_r(t-1)}{dt}.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

S ohledem na řídicí vstupy je možné vypočítat jednotlivé otáčky motoru potřebné pro každý motor. Tyto rychlosti jsou u reálné kvadrotéry zaslány do ESC. ESC neboli electronic speed controller (elektronický kontrolér rychlosti) je elektrotechnické zařízení regulující podle řídicího signálu proud tekoucí centrálním okruhem. ESC poté posílá příkazy připojenému motoru, aby se točil požadovanou rychlostí a vytvořil požadovaný moment tahu. Požadované otáčky motoru lze vypočítat inverzí řídicí matice, jež byla vypočtena výše viz rovnice (2.44), pro kterou tak platí

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -lb & 0 & lb \\ lb & 0 & -lb & 0 \\ d & -d & d & -d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4b} & 0 & \frac{1}{2lb} & \frac{1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & -\frac{1}{2lb} & 0 & -\frac{1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & 0 & -\frac{1}{2lb} & \frac{1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2lb} & 0 & -\frac{1}{4d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \tag{2.45}$$

2.5 Simulační ověření

Nezbývá než ověřit správnost všech odvozených pohybových rovnic, což lze učinit za pomoci simulačního experimentu. Cílem této sekce je poskytnout vizuální náhled na navržený model kvadrotéry a verifikovat odvozené vztahy určující celkovou dynamiku kvadrotéry. To je provedeno na základě předem daných požadavků (tyto požadavky jsou později specifikovány). Simulační model kvadrotéry je nadefinován jako soustava bodů a



Obrázek 2.10: Vizualizační model kvadrotéry

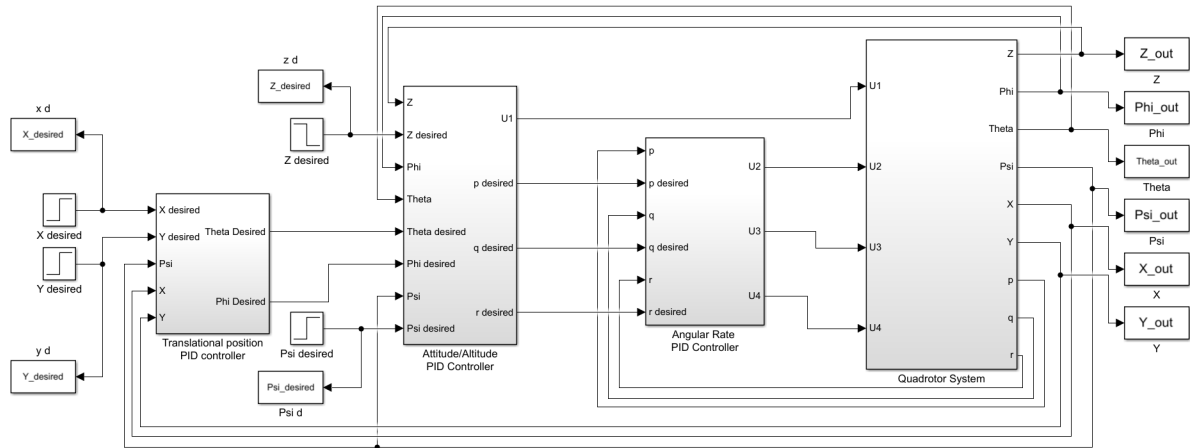
ploch vytvořených mezi body tak, aby napodoboval zjednodušený vzhled reálné kvadrotéry.

Model je sestaven v programu SIMULINK viz obrázek 2.11, kde jsou do bloků vloženy zjištěné rovnice a vztahy popisující celkový pohyb kvadrotéry. Pro potřeby simulace byly zvoleny následující parametry kvadrotéry viz tabulka 2.1, na kterých jsou pohybové rovnice závislé. U reálné kvadrotéry je potřeba všechny parametry změřit. Tyto parametry společně s kompletní strukturou modelu byly přebrány z projektu [7].

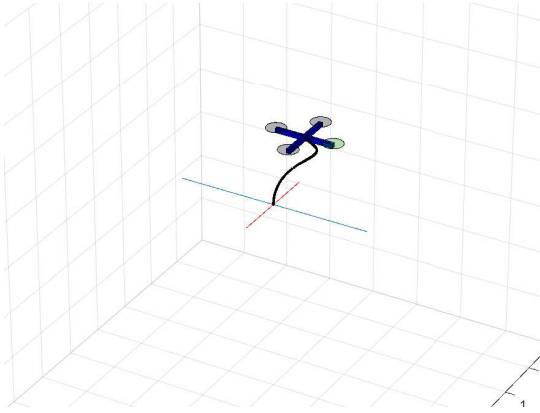
parametr	hodnota	popis
m	0.65 kg	Celková hmotnost kvadroptéry
g	9.87 m/s ²	Gravitační zrychlení kvadroptéry
l	0.784 m	Délka ramene kvadroptéry od jejího středu
b	$3.13 \cdot 10^{-5}$	Koeficient tahu
d	$7.5 \cdot 10^{-7}$	Koeficient tření
J_x	$7.5 \cdot 10^{-3}$	Moment setrvačnosti v ose x
J_y	$7.5 \cdot 10^{-3}$	Moment setrvačnosti v ose y
J_z	$1.3 \cdot 10^{-2}$	Moment setrvačnosti v ose z
J_p	$6.5 \cdot 10^{-5}$	Moment setrvačnosti motoru

Tabulka 2.1: Tabulka hodnot parametrů kvadroptéry

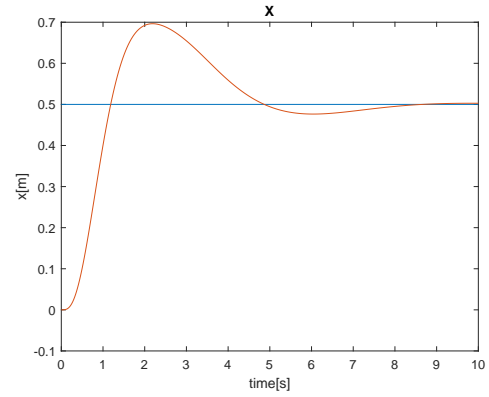
Cílem simulačního experimentu bude zjistit, zda se simulační model kvadroptéry chová dle předpokladů. Primárním předpokladem a požadavkem na systém je, aby dokázal za relativně krátký čas změnit svou polohu z počátečního do požadovaného bodu. Počáteční podmínky systému kvadroptéry jsou nastaveny $\begin{bmatrix} x_L & y_L & z_L \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Kvadroptéra se nachází v počátečních lokálního rámce a tedy ve startovací pozici je tělesový a lokální rámec shodný. Předpokládá se, že kvadroptéra stojí klidně v počátečním bodě a vyrovnává gravitační sílu. Požadovaná nová poloha je dána $\begin{bmatrix} x_{L_d} & y_{L_d} & z_{L_d} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & -1 \end{bmatrix}^T$.



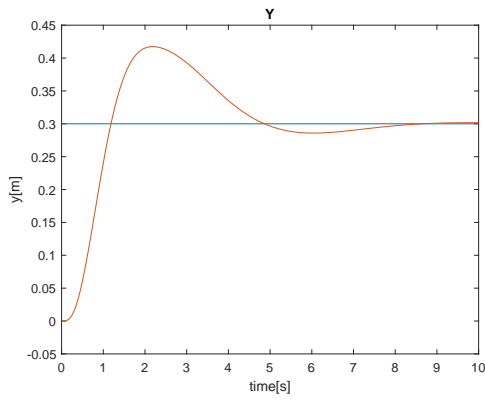
Obrázek 2.11: Blokové schéma zapojení systému kvadroptéry v Simulinku



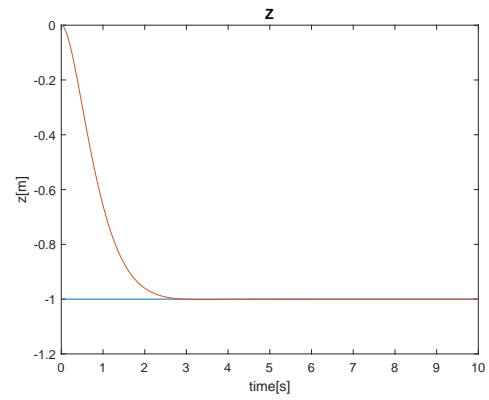
(a) 3D graf stabilizace kyvadla



(b) Průběh proměnné x



(c) Průběh proměnné y



(d) Průběh proměnné z

Obrázek 2.12: Simulace stabilizovaného nelineárního modelu kyvadla

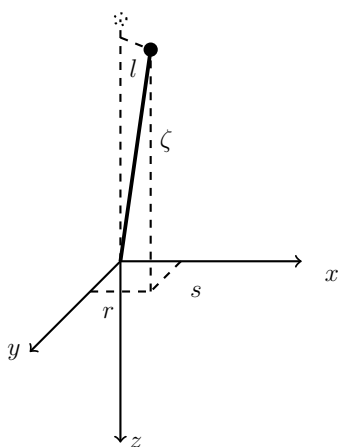
Na grafu 2.12 je vidět 3D vizualizace kvadroptéry společně s opsanou trajektorií, kterou vykonala z počátku do požadovaného místa. Grafy průběhů pozičních veličin se ustalují na požadovaných hodnotách za relativně krátký čas, čímž jsou splněny předpoklady.

Kapitola 3

Inverzní kyvadlo s pohyblivým pivotem

Kyvadlo je těleso, které se může volně pohybovat kolem bodu tzv. pivotu vždy ve stejné vzdálenosti, jež je délka ramene (závěsu) kyvadla. Pokud je takové těleso vychýleno z rovnovážné polohy, koná kývavý pohyb. Při tomto pohybu se mění potenciální energie kyvadla na kinetickou energii kyvadla a naopak. Inverzní kyvadlo je takové, které je umístěné nad bodem otáčení. Stabilizace takového kyvadla je klasickým problémem automatického řízení. Kyvadlo má dva stupně volnosti, které lze popsat buď pomocí průmětů úhlů náklonu do rovin XZ a YZ , nebo průmětem výchylky translační polohy hmotného pohyblivého bodu kyvadla vzhledem k jeho pivotu - tedy průmětem hmotného bodu do roviny XY dle článků [2] nebo [3].

3.1 Návrh systému



Jelikož kyvadlo vykonává pohyb ve 3D prostoru a pořád ve stejné vzdálenosti od středu otáčení, je jeho definiční obor popsán rovnicí koule

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2, \quad (3.1) \text{ Z}$$

kde l je obecně poloměr otáčení, který tak odpovídá délce závěsu kyvadla (v práci je značena l_p) jehož hmotnost se v práci zanedbává.

tohoto důvodu se také o 3D kyvadle mluví jako o kyvadle sférickém. Pohyb kyvadla je zde popisován translačními souřadnicemi $\begin{bmatrix} r & s & \zeta \end{bmatrix}^T$, kde výšková souřadnice ζ je definována

z rovnice koule a to

$$\zeta := \sqrt{l_p^2 - r^2 - s^2}. \quad (3.2)$$

Dále je třeba zdůraznit, že všechny vnější síly a tření jsou zanedbány a model kyvadla je tak popsán jako "ideální". Kyvadlo se na základě těchto závěrů pohybuje zcela bez odporu a jeho pohyb není v čase tlumený.

3.1.1 Pohybové rovnice

Pohybové rovnice kyvadla lze vyjádřit pomocí Lagrangeovy funkce. Lagrangeova funkce nebo také Lagrangeián dynamického systému představuje výchozí bod Lagrangeovy formulace klasické mechaniky. Je pojmenována po Josephovi Louisovi Lagrangeovi.

V klasické mechanice je Lagrangeián definován jako rozdíl zobecněné kinetické energie T systému a jeho zobecněné potenciální energie V , tedy

$$L = T - V. \quad (3.3)$$

Přímou substitucí lagrangeiánu do Eulerova-Lagrangeovy rovnice je získán systém parciálních diferenciálních rovnic představujících pohybové rovnice zkoumaného systému. Kinetická energie T je dána součtem rychlostí pivotu a pohyblivého bodu kyvadla takto

$$T = \frac{1}{2} \left((\dot{x} + \dot{r})^2 + (\dot{y} + \dot{s})^2 + \left(\dot{z} + \frac{r\dot{r} + s\dot{s}}{\zeta} \right)^2 \right), \quad (3.4)$$

kde r je průmět pohyblivého bodu kyvadla v ose x a souřadnice s je průmět pohyblivého bodu kyvadla v ose y .

Potenciální energie V je součtem potenciálních energií pivotu a pohyblivého bodu kyvadla

$$U = g(z + \zeta). \quad (3.5)$$

Lagrangeián udává rozdíl mezi popsány energiemi

$$L = T - V, \quad (3.6)$$

$$L = \frac{1}{2} \left((\dot{x} + \dot{r})^2 + (\dot{y} + \dot{s})^2 + \left(\dot{z} + \frac{r\dot{r} + s\dot{s}}{\zeta} \right)^2 \right) - g(z + \zeta). \quad (3.7)$$

Pro výpočet zrychlení požadovaných stavových proměnných je využito vzorců (3.8)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

odkud jsou po úpravách získána zrychlení kyvadla

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= \frac{1}{(l_p^2 - s^2)\zeta^2} \left(-r^4 \ddot{x} - (l_p^2 - s^2)^2 \ddot{x} - 2r^2 (s\dot{r}\dot{s} + (-l_p^2 + s^2) \ddot{x}) + \right. \\
& r^3 (\dot{s}^2 + s\ddot{s} - \zeta(g + \ddot{z})) + r (-l_p^2 s\ddot{s} + s^3 \ddot{s} + s^2 (\dot{r}^2 - \zeta(g + \ddot{z})) + l_p^2 (-\dot{r}^2 - \dot{s}^2 + \zeta(g + \ddot{z}))) \\
\ddot{s} &= \frac{1}{(l_p^2 - r^2)\zeta^2} \left(-s^4 \ddot{y} - (l_p^2 - r^2)^2 \ddot{y} - 2s^2 (r\dot{r}\dot{s} + (-l_p^2 + r^2) \ddot{y}) + \right. \\
& s^3 (\dot{r}^2 + r\ddot{r} - \zeta(g + \ddot{z})) + s (-l_p^2 r\ddot{r} + r^3 \ddot{r} + r^2 (\dot{s}^2 - \zeta(g + \ddot{z})) + l_p^2 (-\dot{r}^2 - \dot{s}^2 + \zeta(g + \ddot{z})))
\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.1.2 Linearizace a stavový popis

Linearizace kyvadla bude provedena pro nestabilní stacionární bod nad pivotem - tedy $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} r & s & \zeta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_p \end{bmatrix}^T$, který je roven nulové odchylce v obou možných směrech pohybu a kyvadlo je tak uloženo do požadované inverzní polohy. Stavové veličiny jsou z předchozích výpočtů rovny

$$\begin{aligned}
f_1 &= \dot{x}_1 = \dot{r} = x_3 \\
f_2 &= \dot{x}_2 = \dot{s} = x_4 \\
f_3 &= \dot{x}_3 = \ddot{r} = \frac{1}{(l_p^2 - s^2)\zeta^2} \left(-r^4 \ddot{x} - (l_p^2 - s^2)^2 \ddot{x} - 2r^2 (s\dot{r}\dot{s} + (-l_p^2 + s^2) \ddot{x}) + \right. \\
& r^3 (\dot{s}^2 + s\ddot{s} - \zeta(g + \ddot{z})) + r (-l_p^2 s\ddot{s} + s^3 \ddot{s} + s^2 (\dot{r}^2 - \zeta(g + \ddot{z})) + l_p^2 (-\dot{r}^2 - \dot{s}^2 + \zeta(g + \ddot{z}))) \\
f_4 &= \dot{x}_4 = \ddot{s} = \frac{1}{(l_p^2 - r^2)\zeta^2} \left(-s^4 \ddot{y} - (l_p^2 - r^2)^2 \ddot{y} - 2s^2 (r\dot{r}\dot{s} + (-l_p^2 + r^2) \ddot{y}) + \right. \\
& s^3 (\dot{r}^2 + r\ddot{r} - \zeta(g + \ddot{z})) + s (-l_p^2 r\ddot{r} + r^3 \ddot{r} + r^2 (\dot{s}^2 - \zeta(g + \ddot{z})) + l_p^2 (-\dot{r}^2 - \dot{s}^2 + \zeta(g + \ddot{z})))
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Dynamiku kyvadla tak tvoří diferenciální rovnice druhého řádu, kde tyto pohybové rovnice kyvadla lze zapsat opět pomocí stavového popisu. Stavový popis systému má tvar

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{-1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

V matici \mathbf{B} není uvažována složka zrychlení \ddot{z} , protože se předpokládá stabilní poloha v ose $z = konst$ a tedy $\ddot{z} = 0$.

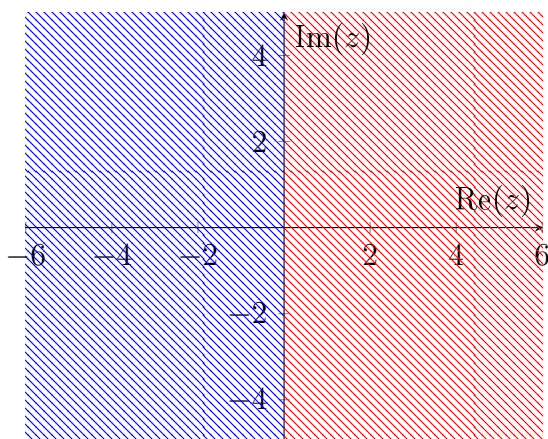
3.1.3 Stabilita systému

Jednou ze základních vlastností systému je jeho stabilita případně nestabilita. Stabilita se definuje řadou kritérií. Obecně lze stabilitu popsat jako schopnost systému vrátit se do původního nebo ustáleného stavu po skončení všech poruch (rušivých faktorů). K posouzení stability se využívá tzv. kritérium stability podle vlastních čísel. Vlastní čísla jsou obecně čísla komplexní. Kyvadlo má vždy kladnou délku $l > 0$ a gravitační konstanta g je také kladná. To znamená, že vlastní čísla systému jsou vždy komplexně sdružená pro jakoukoliv hodnotu l . Vlastní čísla mají obecný tvar

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \lambda_{3,4} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3.12)$$

Lze je rozdělit na reálnou a imaginární část. Toto kritérium využívá k posouzení stability reálnou část vlastních čísel. Pro vlastní čísla jakéhokoliv systému mohou nastat pouze tyto tři situace:

- Reálná část všech vlastních čísel je menší než nula $Re(\lambda_1 - n) < 0$ - pak platí, že systém je asymptoticky stabilní.
- Reálná část alespoň jednoho vlastního čísla nebo reálná část páru komplexně sdružených vlastních čísel má nulovou reálnou část $Re(\lambda_n) = 0$ - pak platí, že systém je na mezi stability.
- Reálná část alespoň jednoho vlastního čísla nebo reálná část páru komplexně sdružených vlastních čísel má kladnou reálnou část $Re(\lambda_n) > 0$ - pak platí, že systém je nestabilní.



Obrázek 3.1: Rozdělení Gaussovy roviny podle stability pólů

Na grafu 3.1 značí modrá barva možné umístění stabilních pólů, červená barva značí nestabilní umístění pólů a pro póly umístěné na imaginární ose Im , tedy mají reálnou část $Re = 0$, je systém na mezi stability.

Z uvedené definice platí, že systém je nestabilní. Otáčení kyvadla lze rozdělit na dva subsystémy, kde jeden subsystém řeší polohu kyvadla v rovině XZ a druhý v rovině YZ , přičemž každý z nich je logicky nestabilní v této poloze. Subsystémy sférického kyvadla s pohyblivým pivotem mají identický tvar

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix} F_x \quad , \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{Ml} \end{bmatrix} F_y \quad . \quad (3.14)$$

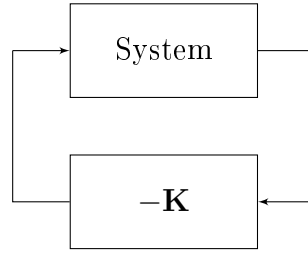
3.1.4 Řiditelnost systému

Z části 2.3.7 definice říditelnosti platí, že má-li matice říditelnosti stejnou hodnotu jako matice dynamiky, je systém říditelný. Na základě definovaných matic \mathbf{A} , \mathbf{B} kyvadla viz (3.11) je sestrojena matice říditelnosti \mathbf{Q}_c , jejíž hodnota $h(\mathbf{Q}_c) = 4$ odpovídá řádu systému a je dokázáno, že systém je říditelný.

3.2 Návrh řízení - stavová zpětná vazba

Realizace zpětné stavové vazby slouží k řízení systému jím samotným - využívá se zpětné vazby. Řízení stavovou zpětnou vazbou se zdá být jako nejúčinnější princip řízení stability systému kvůli síle pojmu *stav*, který v sobě obsahuje úplnou informaci o minulosti soustavy. Primární potřebou pro realizaci takového řízení je proto úplná znalost všech stavů, což je splněno díky předpokladu ze sekce 2.1. Systému se přiřazuje požadované chování, které se určuje zvolenými póly. Stavovou zpětnou vazbu je možné zapsat obecně pomocí následující rovnice, kde se vstup u definuje jako

$$u = -\mathbf{K}x. \quad (3.15)$$



Obrázek 3.2: PID regulátor

a tedy lze substitucí vstupu u z rovnice (3.15) do klasické rovnice systému zapsat tyto rovnice systému jako

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}x - \mathbf{BK}x, \\ \dot{x} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})x,\end{aligned}$$

kde se definuje požadavek

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} \sim \mathbf{L}, \quad (3.16)$$

přičemž matice \mathbf{L} je matice určující požadované umístění pólů a má obecný tvar

$$\mathbf{L}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l}. \quad (3.17)$$

Obecně je požadavkem stabilizace systému a tedy je potřeba volit požadované umístění pólů v levé polorovině Gaussovy roviny. Pro každý pár komplexně sdružených vlastních čísel, jež určují polohu pólů, se v matici \mathbf{L} nachází jeden tzv. *Jordanův blok*. Pro dva páry komplexně sdružených vlastních čísel se tedy v matici \mathbf{L} nachází dva Jordanovy bloky. Matice \mathbf{L} má specifikovaný tvar

$$\mathbf{L}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Problémem je stanovení matice \mathbf{L} . Ta vyžaduje znalost o budoucím umístění pólů, jež bude ideální pro řízení systému. Volba umístění pólů ovšem ovlivňuje celkovou stabilizaci systému včetně jejích nákladů na akční zásahy a rychlost regulace.

3.2.1 LQ regulátor

Teorie optimálního řízení se zabývá provozováním dynamického systému při minimálních nákladech. Způsob, kdy je dynamika systému popsána množinou lineárních diferenciálních rovnic a cena akčních zásahů kvadratickou funkcí, se nazývá optimalizační úloha LQ. Řešení poskytuje tzv. lineární-kvadratický regulátor (LQR). LQ je kritérium minimalizující náklady řízení regulace zpětnou stavovou vazbou. Umožňuje pomocí váhových matic přiřadit "důležitost" rychlosti regulace proti velikosti nákladů na zásahy u stavových veličin. Kriteriaální funkce pro časově spojitý systém je dána ve tvaru

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T \mathbf{Q}x + u^T \mathbf{R}u + 2x^T \mathbf{N}u) dt, \quad (3.19)$$

kde

$$u = -\mathbf{K}x, \quad (3.20)$$

a \mathbf{K} je definováno jako

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{N}^T), \quad (3.21)$$

kde \mathbf{P} je řešením tzv. Riccatiho algebraické rovnice

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - (\mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{N}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{N}^T) + \mathbf{Q} = 0. \quad (3.22)$$

Program MATLAB nabízí funkci řešící tuto problematiku $lqr(A, B, Q, R)$, kde uživatel přiřazuje váhy stavovým veličinám přes váhové matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} .

Zde je primárním problémem řízení stavů pozice. Větší váha u těchto stavových veličin v matici \mathbf{Q} způsobuje zkrácení doby náběhu, zatímco větší váhy u stavových veličin v matici \mathbf{R} zpomalují dobu náběhu a omezují velikost akčních zásahů. Přiřazování vah je ovšem problematika sama o sobě a váhy jsou tak většinou přiřazovány v řádech 10^n pro zjednodušení. Matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} mají specifikovaný tvar

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

kde Q_i a R_i značí váhy přiřazené daným stavům ve váhových maticích.

3.3 Simulační ověření

Vyzkoumané vztahy a rovnice pohybu jsou ověřeny simulačním experimentem. Simulační ověření bylo provedeno v programu SIMULINK. Simulační model vychází z rovnic odvozených v sekci 3. Pro viditelné ověření výsledků je simulováno chování kyvadla během několika simulačních experimentů.

Vizualizaci kyvadla ztvárňuje plný bod jakožto pohyblivý bod kyvadla a úsečka spojující pivot s pohyblivým bodem jakožto závěs kyvadla. Pivot kyvadla je umístěn do počátku jeho vlastního souřadnicového systému. Na systému kyvadla jsou provedeny celkem tři simulační experimenty.

První z nich reprezentuje pohyb padajícího neregulovaného kyvadla, které je vychýlené z nestabilního stacionárního bodu. Zde se zkoumá samotná dynamika kyvadla a průběhy veličin při neřízeném pádu.

Druhý experiment znázorňuje již stabilizované kyvadlo, které je opět vychýleno z nestabilního stacionárního bodu pomocí počátečních podmínek na průměty r a s . Tento experiment by měl dokázat správnost navrženého řízení a případně zjistit rychlost regulace. Předpokladem je stabilizace kyvadla do polohy nad pivotem.

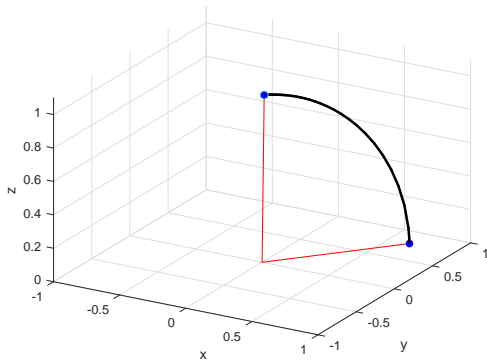
Třetí a poslední experiment se věnuje stabilizaci regulovaného systému, kde jsou do vstupů kyvadla přivedeny impulsy reprezentující vnější vlivy. Předpokladem tohoto experimentu je dostatečně rychlá reakce na tyto vlivy a následná stabilizace kyvadla do svislé polohy nad pivot.

Simulační parametry kyvadla jsou zvoleny viz tabulka 3.1.

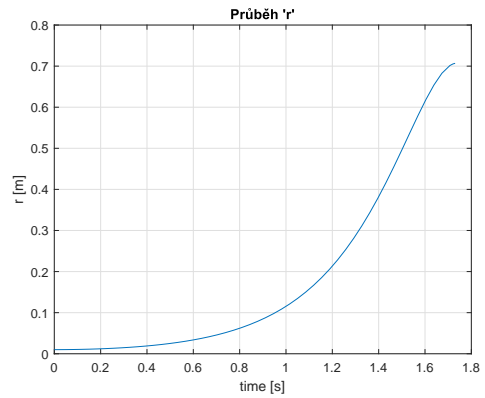
parametr	hodnota	popis
g	9.87 m/s^2	Gravitační zrychlení
l	1 m	Délka závěsu
m	1 kg	Hmotnost pivotu

Tabulka 3.1: Tabulka hodnot parametrů kyvadla

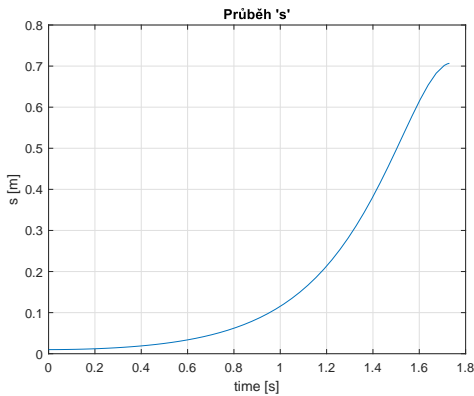
Samovolně pohybuující se kyvadlo modelované bez odporu a tření by se mělo chovat jako klasické matematické kyvadlo. Kyvadlo je uvedeno do polohy mimo stacionární bod a to s počáteční podmínkou $\begin{bmatrix} r & s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}^T$. Na grafu 3.3 je vidět 3D vizualizace pohybu kyvadla a dále také průběhy veličin průmětů do os. Neregulované kyvadlo začíná padat a vzdálenosti r a s se zvětšují, až dosáhnou velikosti $r, s = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Proměnná ζ naopak klesá téměř do nuly, což symbolizuje pád kyvadla. Jak již bylo zmíněno, kyvadlo může opisovat trajektorii pláště jedné z polokoulí díky zavedeným zjednodušením a simulační experiment tak musí být ukončen těsně před stavem, kdy se $\zeta = 0$.



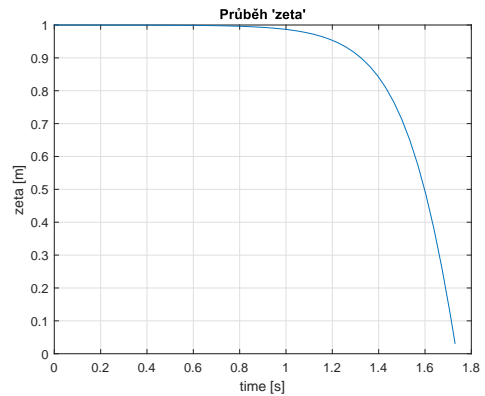
(a) 3D graf kyvadla



(b) Průběh proměnné r



(c) Průběh proměnné s



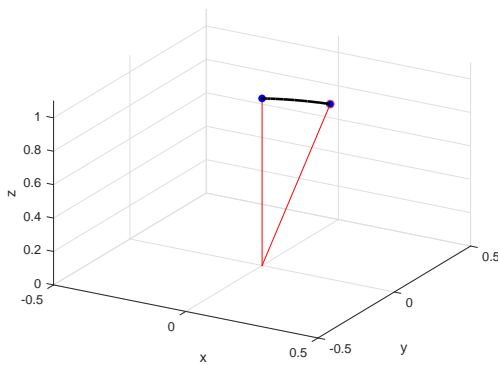
(d) Průběh proměnné $zeta$

Obrázek 3.3: Simulace nestabilizovaného nelineárního modelu kyvadla

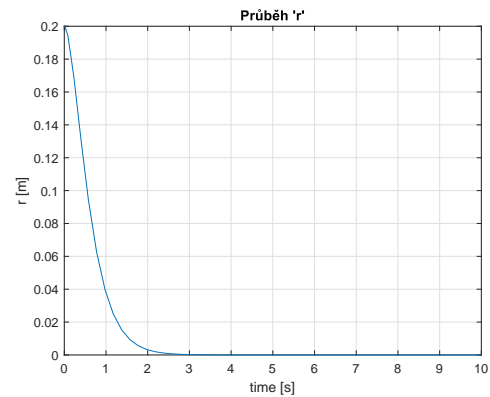
Druhý experiment řeší systém kyvadla s regulací. Regulace byla provedena pomocí LQR, kde váhové matice řízení jsou nastaveny viz 3.24, kde jsou váhy stanoveny na jednotkové všem stavům stejně.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

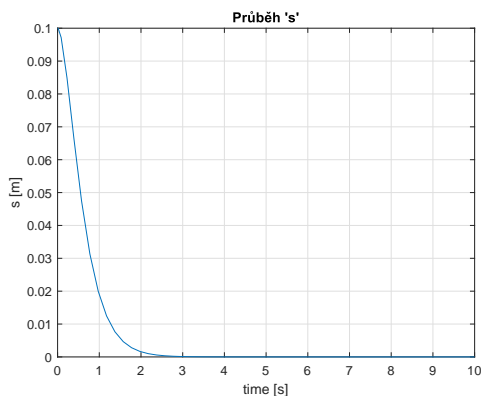
Stabilizace pomocí LQR byla navržena na zlinearizovaném modelu a poté otestována i na nelineárním modelu. Výsledky simulací při použití nelineárního modelu jsou vidět na grafu 3.4. Kyvadlo by se mělo na základě minulosti vlastních stavových veličin stabilizovat do rovnovážného stavu. Experiment je proveden s nastavenými počátečními podmínkami na stav $\begin{bmatrix} r & s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}^T$ a umístěným pivotem do bodu $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.



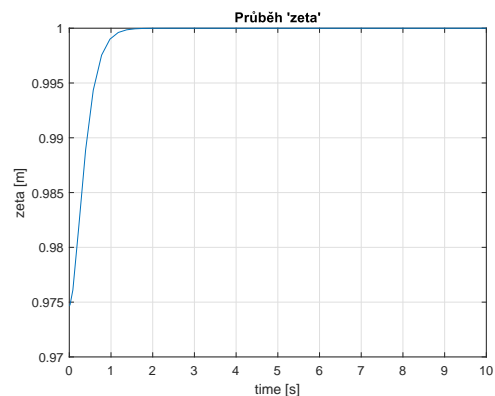
(a) 3D graf stabilizace kyvadla



(b) Průběh proměnné r



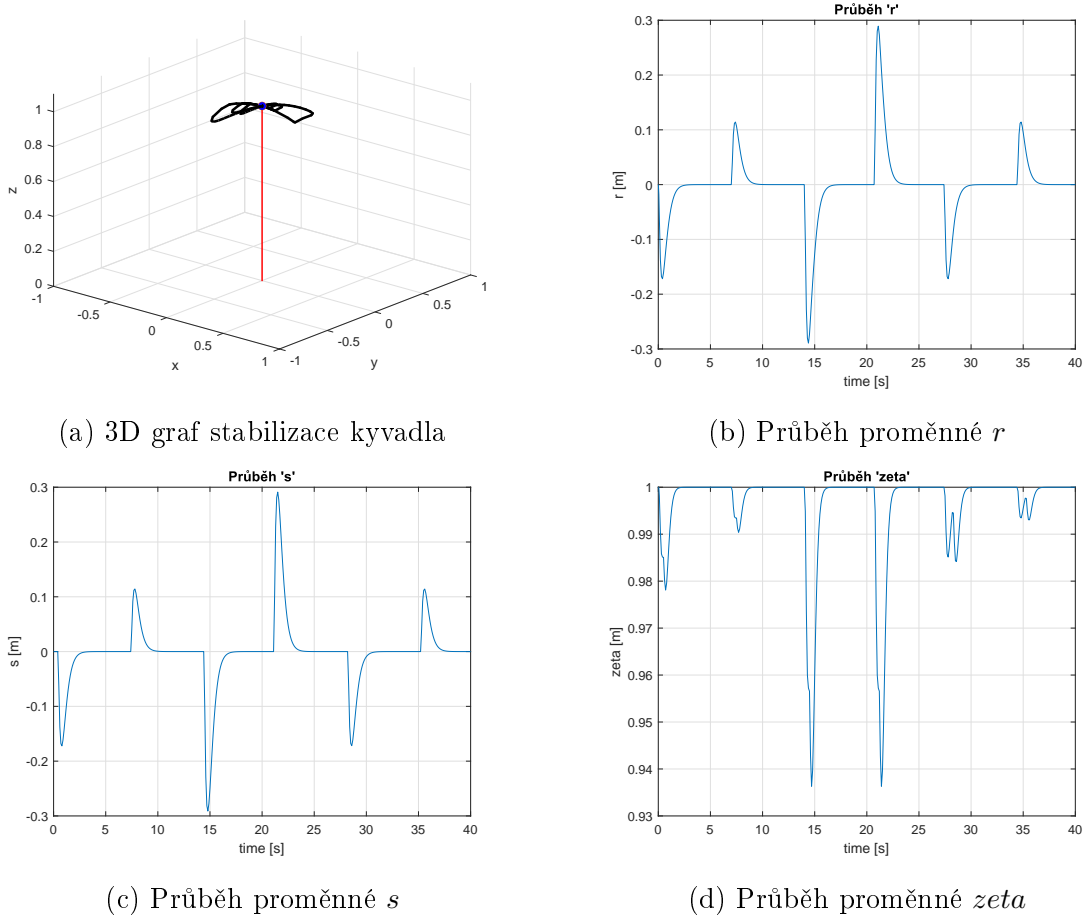
(c) Průběh proměnné s



(d) Průběh proměnné $zeta$

Obrázek 3.4: Simulace stabilizovaného nelineárního modelu kyvadla

Poslední třetí simulační experiment reprezentuje chování regulovaného systému jako reakci na vnější vlivy (pulsy síly). Tento experiment předpokládá počáteční umístění pohyblivého bodu kyvadla do nestabilního stacionárního bodu, kdy $r, s = 0$. Vychýlení z počátečního stavu tak zapříčiňují pouze vstupující vnější pulsy. Snahou systému by mělo být regulovat výchylky kyvadla a vracet systém vždy do požadovaného stacionárního bodu. Reakce systému na vnější pulsy síly jsou vyobrazené na grafu 3.5. Všechny si-



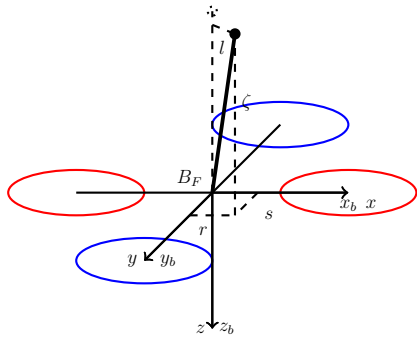
Obrázek 3.5: Simulace stabilizovaného nelineárního modelu kyvadla na pulsy síly

mulační experimenty proběhly dle předpokladů. Nejprve byla ověřena celková správnost dynamiky kyvadla. Následně byl zvolen regulátor, který dokázal stabilizovat systém do požadovaného koncového stavu. Kyvadlo lze obecně stabilizovat nekonečnou množinou regulátorů \mathbf{K} . Každý jeden naplňuje kriteriální úlohu LQ podle uživatelem přiřazených vah ve váhových maticích. Lze tedy tvrdit, že LQ kritériem nelze navrhnout nevhodný regulátor. Regulátor bude vždy ideální vzhledem k danému kritériu.

Kapitola 4

Složený systém

Kompletní systém je složen ze dvou předchozích subsystémů (kvadrotéry viz sekce 2 a inverzního kyvadla viz sekce 3). Praktická realizace stabilizace kyvadla nad kvadrotérou vyžaduje uvažovat subsystémy jako jeden systém, kde na sebe vzájemně působí jeho části. Při realizaci takového systému by tedy bylo třeba opět navrhovat systém a to jako jeden celek. V praxi bývá kvadrotéra vůči kyvadlu relativně malá a lehká. Při vychýlení kyvadla ze stabilní polohy tak kyvadlo mění těžiště kvadrotéry, čímž se mění i její náklon. Naopak kvadrotéra působí na kyvadlo silou, kterou vyvolává její zrychlení v osách.



Obrázek 4.1: Spojení systémů kyvadla a kvadrotéry

Pro jednoduchost modelu je zpětné silové působení kyvadla na kvadrotéru zanedbáno a provázanost složeného systému pak spočívá pouze v pohyblivosti pivotu kyvadla, jež je napojen do středu kvadrotéry viz obrázek 4.1. Nyní lze s pivotem hýbat na základě pohybu kvadrotéry a do systému sférického kyvadla jsou tudíž zavedeny vstupy, tvořené zrychlením kvadrotéry. Toto ovšem platí pouze pro vstupy $\begin{bmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} \end{bmatrix}$, protože se předpokládá pouze rovinný pohyb v rovině a to v rovině XY , jež vychází z předpokladu dvou stupňů volnosti.

4.1 Návrh systému

Poslední navržený systém je v tuto chvíli neintuitivně tím nejsnazším, jelikož oba dílčí subsystémy již byly navrženy v předchozích kapitolách. Dynamické rovnice obou subsystémů jsou provázány z jedné strany silou, která je požadavkem subsystému kyvadla pro kvadroptéru. Z druhé strany je vstupem do subsystému kyvadla zrychlení kvadroptéry jakožto reakce na požadavek síly.

4.1.1 Dynamika

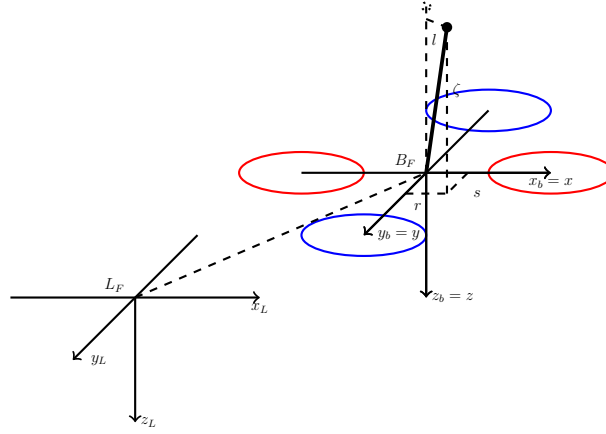
Dynamika složeného systému vychází z rovnic popisující dynamiku kvadroptéry ve vztažném rámci L_F

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_L &= -\frac{F_T}{m} [s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] \\
 \ddot{y}_L &= -\frac{F_T}{m} [c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)] \\
 \ddot{z}_L &= g - \frac{F_T}{m} [c(\phi)c(\theta)] \\
 \ddot{\phi} &= \frac{J_y - J_z}{J_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{\tau_x}{J_x} \\
 \ddot{\theta} &= \frac{J_x - J_y}{J_y} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{\tau_y}{J_y} \\
 \ddot{\psi} &= \frac{J_x - J_y}{J_z} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{\tau_z}{J_z}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

a z rovnic dynamiky kyvadla

$$\begin{aligned}
 \ddot{r} &= \frac{1}{(L^2 - s^2)\zeta^2} \left(-r^4 \ddot{x} - (L^2 - s^2)^2 \ddot{x} - 2r^2 (s\dot{r}\dot{s} + (-L^2 + s^2) \ddot{x}) + r^3 (\dot{s}^2 + s\ddot{s} - \zeta(g + \ddot{z})) + \right. \\
 &\quad \left. r(-L^2 s\ddot{s} + s^3 \ddot{s} + s^2 (\dot{r}^2 - \zeta(g + \ddot{z})) + L^2 (-\dot{r}^2 - \dot{s}^2 + \zeta(g + \ddot{z}))) \right) \\
 \ddot{s} &= \frac{1}{(L^2 - r^2)\zeta^2} \left(-s^4 \ddot{y} - (L^2 - r^2)^2 \ddot{y} - 2s^2 (r\dot{r}\dot{s} + (-L^2 + r^2) \ddot{y}) + s^3 (\dot{r}^2 + r\ddot{r} - \zeta(g + \ddot{z})) + \right. \\
 &\quad \left. s(-L^2 r\ddot{r} + r^3 \ddot{r} + r^2 (\dot{s}^2 - \zeta(g + \ddot{z})) + L^2 (-\dot{r}^2 - \dot{s}^2 + \zeta(g + \ddot{z}))) \right).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Kyvadlo má v tuto chvíli stále vlastní nijak nespécifikovaný souřadnicový rámec, jelikož nebylo dosud třeba ho příliš řešit. Spécifikován nebyl z toho důvodu, že vhodným umístěním souřadnicového rámce kyvadla do tělesového souřadnicového rámce kvadroptéry, viz 4.2, se rámce kyvadla a kvadroptéry stávají souhlasnými. Následkem souhlasného umístění dvou rámců je, že průmět pohyblivého bodu kyvadla (tedy jeho výchylka) je v tuto chvíli výchylkou od počátku souřadnicového rámce kvadroptéry B_F . Z tohoto závěru

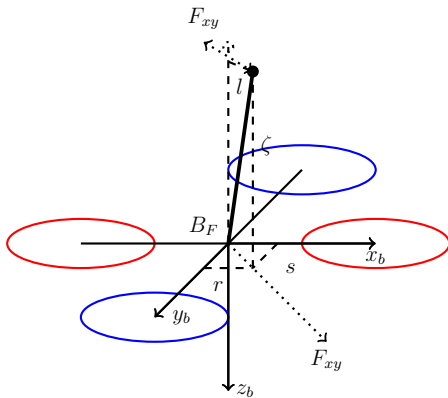


Obrázek 4.2: Lokální a tělesové souřadnicové rámce s napojeným systémem kyvadla

vychází rovnost $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_b & y_b & z_b \end{bmatrix}^T$, a lze tedy psát dynamiku kyvadla

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{1}{(L^2 - s^2)\zeta^2} \left(-r^4 \ddot{x}_b - (l_p^2 - s^2)^2 \ddot{x}_b - 2r^2 (s\dot{r}\dot{s} + (-l_p^2 + s^2) \ddot{x}_b) + r^3 (\dot{s}^2 + s\ddot{s} - \zeta(g + \ddot{z}_b)) + \right. \\ & r (-l_p^2 s\ddot{s} + s^3 \ddot{s} + s^2 (\dot{r}^2 - \zeta(g + \ddot{z}_b)) + l_p^2 (-\dot{r}^2 - \dot{s}^2 + \zeta(g + \ddot{z}_b))) \\ \ddot{s} &= \frac{1}{(l_p^2 - r^2)\zeta^2} \left(-s^4 \ddot{y}_b - (l_p^2 - r^2)^2 \ddot{y}_b - 2s^2 (r\dot{r}\dot{s} + (-l_p^2 + r^2) \ddot{y}_b) + s^3 (\dot{r}^2 + r\ddot{r} - \zeta(g + \ddot{z}_b)) + \right. \\ & s (-l_p^2 r\ddot{r} + r^3 \ddot{r} + r^2 (\dot{s}^2 - \zeta(g + \ddot{z}_b)) + l_p^2 (-\dot{r}^2 - \dot{s}^2 + \zeta(g + \ddot{z}_b))) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.1.2 Vstup kyvadla - zrychlení



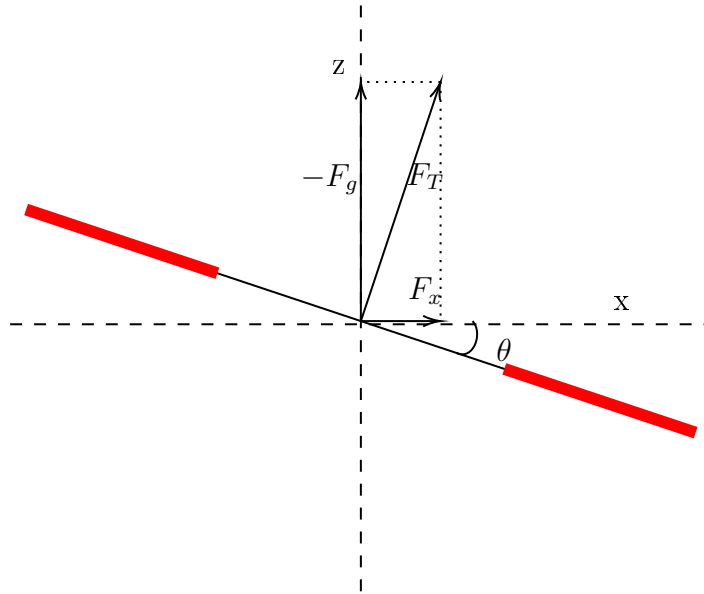
Nyní je třeba dopočítat zrychlení v tělesovém rámci, které bude vstupem pro systém kyvadla, čímž se kyvadlo stává ovladatelné kvadrotérou. Z přepočtených rychlostí a úhlových rychlostí z lokálního na tělesový souřadnicový rámec jsou zrychlení v tělesovém rámci definovány

$$\begin{aligned} \ddot{x}_b &= r\dot{y}_b - q\dot{z}_b - g[s(\theta)] \\ \ddot{y}_b &= p\dot{z}_b - r\dot{x}_b + g[s(\phi)c(\theta)]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Obrázek 4.3: Vyjádření síly v tělesovém rámci

4.1.3 Vstup kvadroptéry - síla

Síly působící na kyvadlo $\begin{bmatrix} F_x & F_y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ jsou tvořeny příslušnými zrychleními pivotu v osách. Ze spojení dvou subsystémů je nyní pivotem samotný střed kvadroptéry, a tedy síly působící na pohyblivý bod kyvadla při pohybu kvadroptéry jsou stejně velké, ale opačně namířené než síly, které vyvíjí kvadroptéra svým pohybem. Z předchozího umístění rámců do sebe navzájem vyplývá, že tyto síly jsou alokovány v souřadnicovém rámci kvadroptéry B_F .

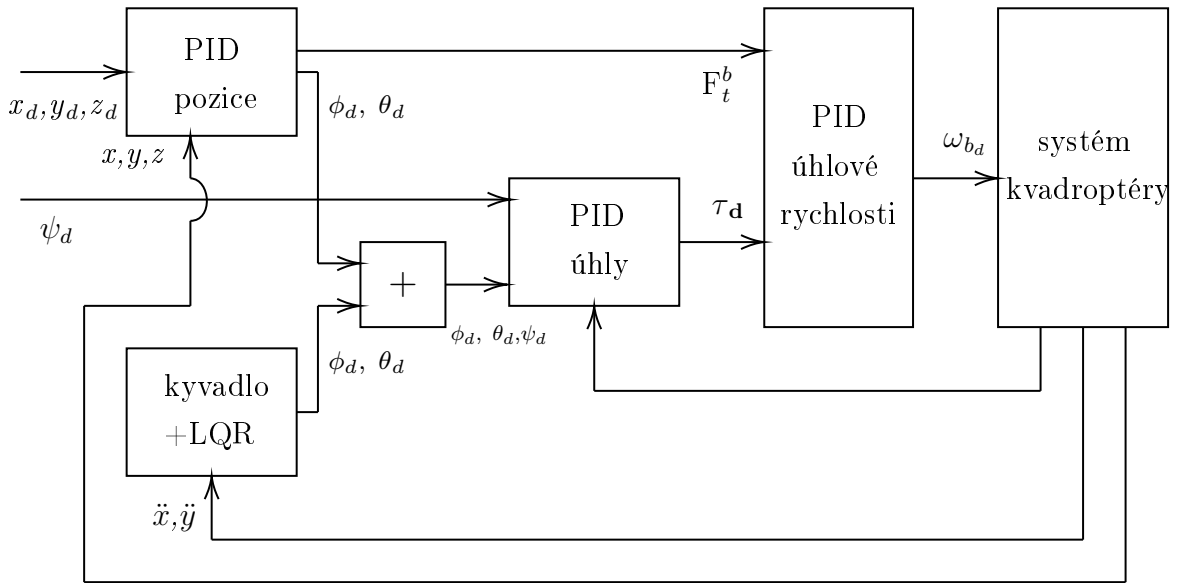


Obrázek 4.4: Vyjádření rozložení síly tahu v tělesovém rámci

Požadovaný úhel θ určuje náklon kvadroptéry a je roven $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_x}{-F_g} \right)$. Síla F_g je obecně známá, zatímco požadovanou sílu F_x , potřebnou ke stabilizaci kyvadla, definuje regulátor kyvadla. Úhel θ je pak požadovaným úhlem v tělesovém rámci a tvoří tak přímý vstup do systému kvadroptéry. Analogicky se síly dělí v rovině YZ pro sílu F_y a pro požadovaný úhel tak platí $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{-F_g} \right)$.

4.2 Řízení složeného systému

Řízení celého systému spočívá ve sledování odchylky kyvadla v rovině XY , kde tuto výchylku musí sledovat kvadroptéra. Řízení obou systémů již bylo navrženo a model tak lze pouze připojit dle 4.1.3 a 4.1.2. Blokové schéma zapojení subsystému je vidět na obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Blokové schéma zapojení subsystémů

4.3 Simulační ověření

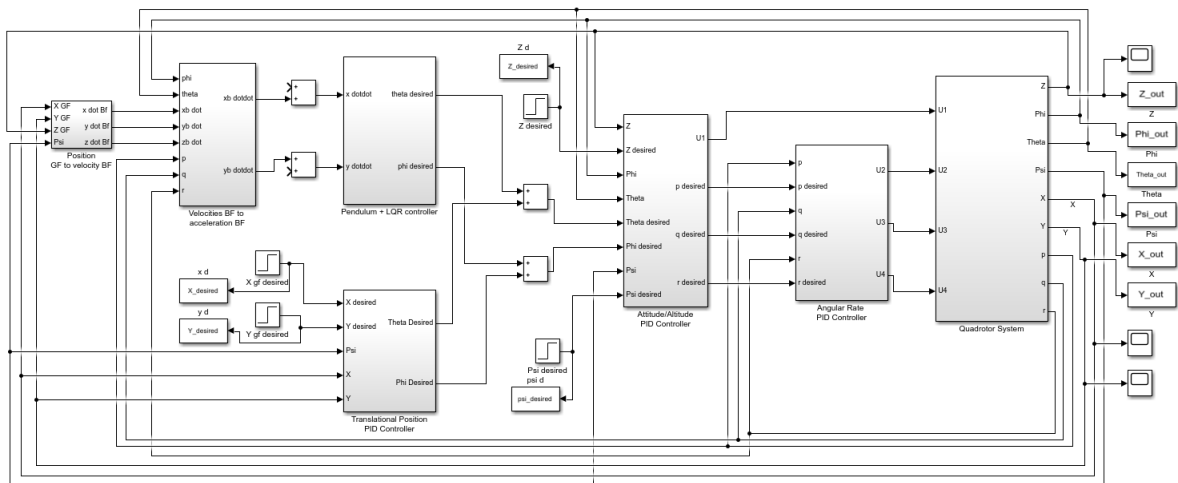
Simulační ověření složeného systému je provedeno, stejně jako je to u výchozích rovnic pohybu, spojením dvou simulačních subsystémů. Simulační model je tedy rovněž navržen v programu SIMULINK. Jelikož dosud nemělo kyvadlo blíže specifikovaný rámec a nyní se stalo pohyblivým vůči lokálnímu rámci, je pro vizualizaci nutné transformovat polo-hové souřadnice kyvadla do lokálního rámce. To je provedeno opět pomocí rotační matice 2.2.3. Síla $F_{x,y}$, kterou definuje regulátor kyvadla, potřebnou k jeho stabilizaci, přebírá simulační model kvadroptéry coby požadavek na změnu úhlu v daném směru. Simulační experimenty by měly dokázat, že kvadroptéra je schopná stabilizovat výchylku kyvadla a zároveň se vrátit do požadovaného stavu. Navržené řízení by mělo také umožňovat přesun kvadroptéry z počátečního na požadované místo, aniž by z kvadroptéry kyvadlo spadlo. A podstatným simulačním experimentem je také prokázání vhodné reakce systému na

vnější vlivy. Všechny tři definované situace je možné simulovat a tvoří tak sérii tří simulačních experimentů. Pro simulaci složeného systému byly zvoleny následující parametry vycházející ze subsystémů viz tabulka 4.1.

parametr	hodnota	popis
m	1.4 kg	Celková hmotnost kvadroptéry
g	9.87 m/s ²	Gravitační zrychlení kvadroptéry
l_q	0.56 m	Délka ramene kvadroptéry od jejího středu
b	$1.3858 \cdot 10^{-6}$	Součinitel tahu
d	$1.3328 \cdot 10^{-5}$	Součinitel odporu
J_x	0.05	Moment setrvačnosti v ose x
J_y	0.5	Moment setrvačnosti v ose y
J_z	0.24	Moment setrvačnosti v ose z
l_p	1 m	Délka závěsu

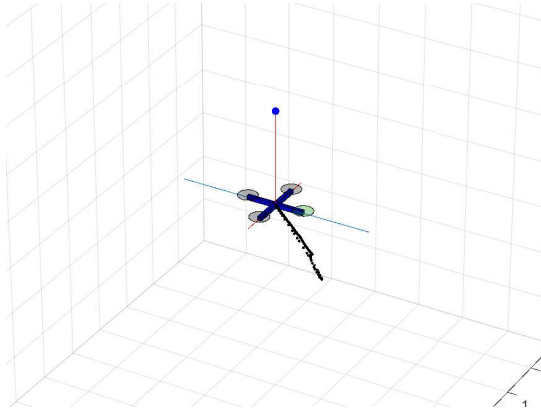
Tabulka 4.1: Tabulka hodnot parametrů pro složený systém

Simulační schéma kvadroptéry s připojeným kyvadlem viz obrázek 4.6 je navrženo na základě teoretického blokového schéma z části 4.2. Blokové schéma je rozšířeno o bloky subsystémů vytvářející potřebné vazby mezi subsystémy dle sekcí 4.1.3 a 4.1.2.

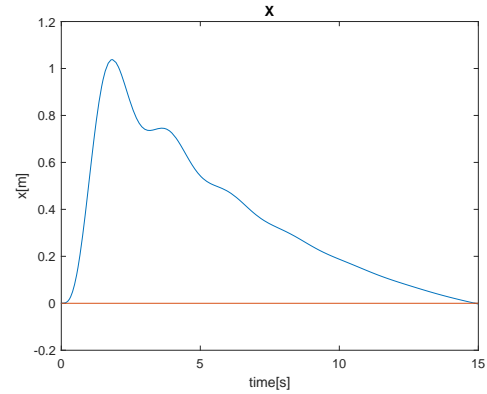


Obrázek 4.6: Simulační schéma zapojení kvadroptéry s kyvadlem

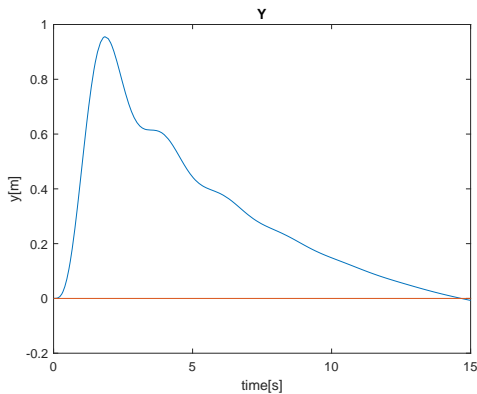
První simulační experiment by měl prokázat reakceschopnost systému kvadroptéry stabilizovat kyvadlo do svislé polohy při dané počáteční podmínce na stav kyvadla. Tato podmínka je zvolena $\begin{bmatrix} r & s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.07 \end{bmatrix}^T$, což odpovídá zhruba 6° vychýlení oproti svislému uložení kyvadla. Požadavek na kvadroptéru je dán $\begin{bmatrix} x_{L_d} & y_{L_d} & z_{L_d} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Tedy kvadroptéra by měla stabilizovat kyvadlo a poté se vrátit do počátečního bodu.



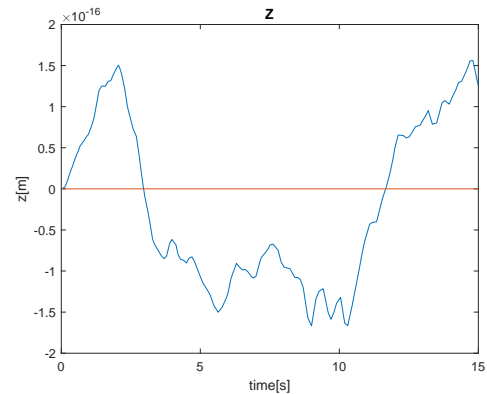
(a) 3D graf stabilizace kyvadla



(b) Průběh proměnné x



(c) Průběh proměnné y

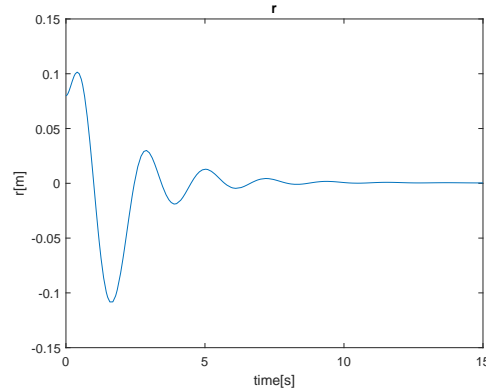


(d) Průběh proměnné z

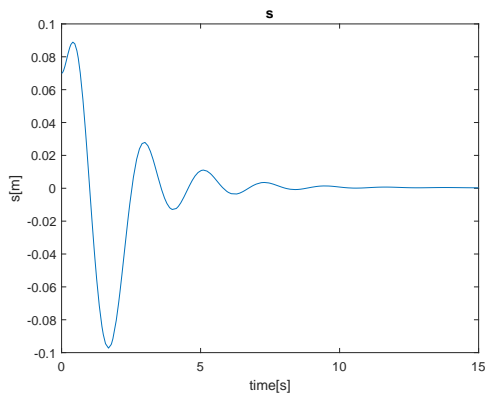
Obrázek 4.7: Simulace stabilizovaného nelineárního modelu složeného systému na počáteční podmínky kyvadla

Z grafů viz obrázek 4.7 a 4.8 je patrné, že kvadroptéra zareagovala na výchylku kyvadla. Průběh r, s dokazuje postupnou stabilizaci kyvadla do požadované polohy. Poté se dle předpokladů kvadroptéra vrací do požadovaného počátečního bodu. Zajímavý je vývoj proměnné z , na jejíž regulaci je kladen velký důraz a to kvůli zanedbávání pohybu v této ose u subsystému kyvadla. Regulace proměnných x, y se zdá být jako relativně pomalá a

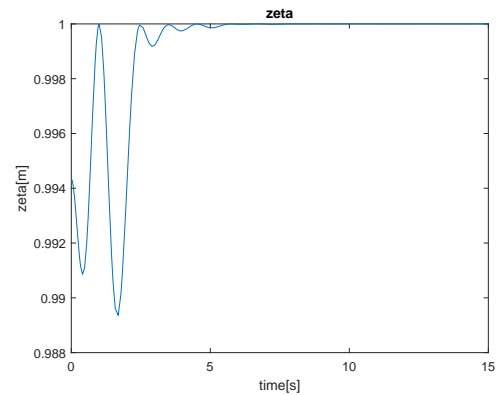
určitě by bylo možné nalézt rychlejší řízení. To by ovšem vyžadovalo přenastavení regulátorů všech vnitřních smyček tak, aby byl splněn požadavek na poměry rychlostí v kaskádě regulátorů $5 - 10\times$ pomalejší regulace s každou další vnější smyčkou viz definice z části 2.4.1. Tímto je prokázána stabilizace kyvadla nad kvadrotérou.



(a) Průběh proměnné r



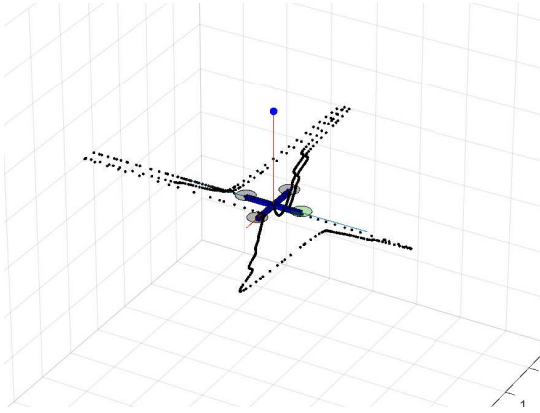
(b) Průběh proměnné s



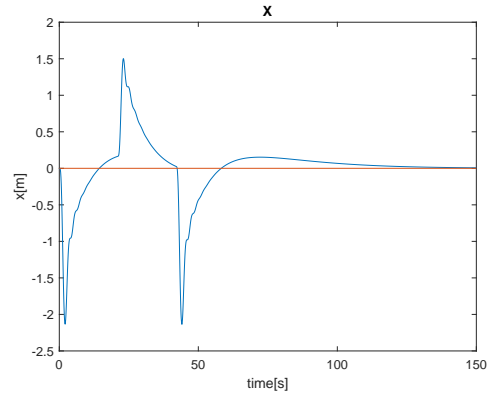
(c) Průběh proměnné ζ

Obrázek 4.8: Simulace stabilizovaného nelineárního modelu složeného systému na počítačnické podmínky kyvadla

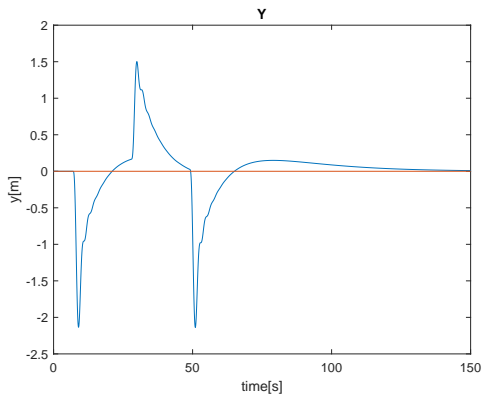
Následující druhý simulační experiment viz 4.9 a 4.10 se odráží od prvního experimentu. Tento simulační experiment bude ukazovat, zda je kvadrotéra schopná vyrovnávat výchyly kyvadla tvořené vnějšími vlivy. Pro tento účel bude do subsystému kyvadla přičten navíc vstup reprezentující pulsy síly. Požadovaná poloha kvadrotéry je v počátku souřadnicového systému $\begin{bmatrix} x_{L_d} & y_{L_d} & z_{L_d} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, stejně jako výchylka kyvadla vůči kvadrotéře $\begin{bmatrix} r & s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.



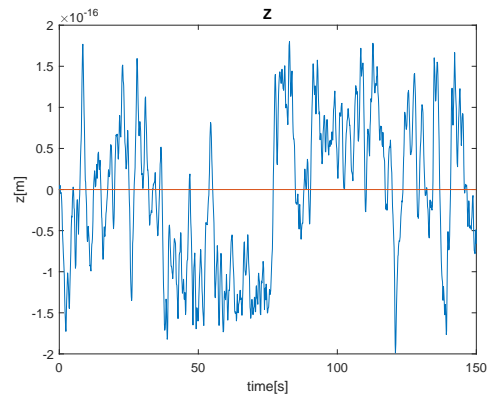
(a) 3D graf stabilizace kyvadla



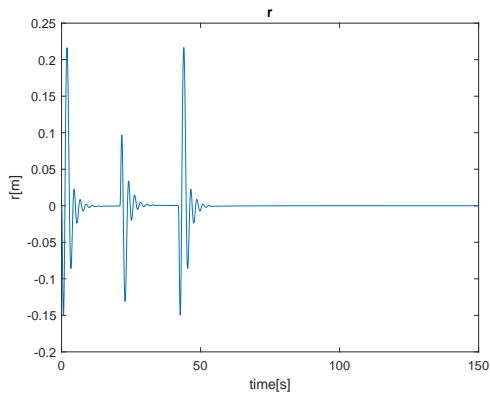
(b) Průběh proměnné x



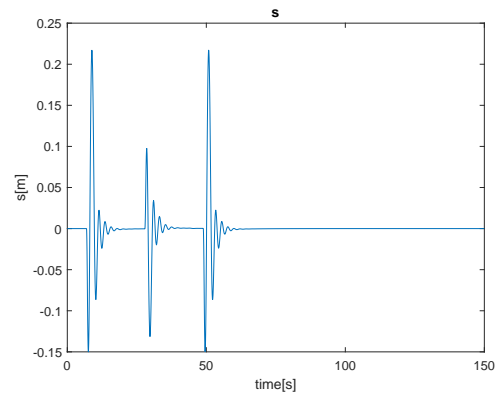
(c) Průběh proměnné y



(d) Průběh proměnné z



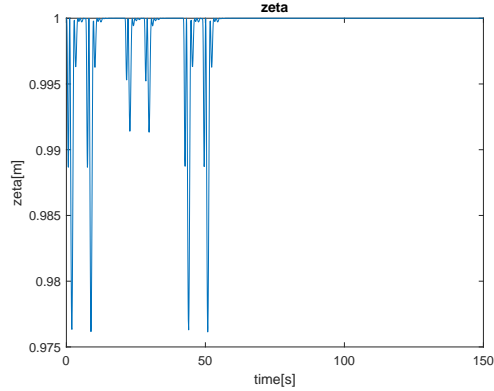
(e) Průběh proměnné s



(f) Průběh proměnné r

Obrázek 4.9: Odezva stabilizovaného nelineárního modelu složeného systému na pulsy síly

Simulační model se chová dle předpokladů a po každém příchozím pulsu se snaží kvadroptéra nejprve stabilizovat kyvadlo do rovnovážného stavu a poté se vrací na požadovanou pozici do počátku souřadného systému.



(a) Průběh proměnné ζ

Obrázek 4.10: Odezva stabilizovaného nelineárního modelu složeného systému na pulsy síly

Simulační experimenty měly rozšířit navržený složený systém o vizuální podobu řešeného problému a zároveň verifikovat tento navržený systém společně s navrženým řízením. Řízený systém byl podroben experimentu s počáteční podmínkou na výchylku kyvadla. Složený systém dokázal reagovat na výchylku kyvadla, tuto výchylku stabilizovat a poté se celý systém vrátil do požadované polohy v prostoru, čímž byla dokázána správnost navrženého řízení. Druhý experiment týkající se stabilizace složeného systému při působení vnějších sil na kyvadlo měl poukázat na robustnost řízení, protože pulsy sil, které vstupují do subsystému kyvadla, působí na neúplně stabilizovaný systém. Oba simulační experimenty odrážely určité možnosti nastavení, do kterého je možné složený systém v reálném světě uvést (první experiment - uživatel vkládá kyvadlo na kvadrotéru a druhý - uživatel působí silou a destabilizuje kyvadlo). Oba experimenty proběhly dle předpokladu a jsou důkazem vhodně navrženého řízení.

Kapitola 5

Závěr

Kvadroptéry jsou díky svému širokému využití velice atraktivním tématem a dávají možnost realizace několika přidruženým projektům. Jedním z takových projektů je stabilizace kvadroptéry s inverzním kyvadlem, což je tématem této práce. Hlavní myšlenkou práce bylo proniknutí do problematiky řízení kvadroptér a dále využití takové kvadroptéry pro řízení inverzně uloženého kyvadla, čehož se podařilo docílit.

Na úvod je odvozen vztah mezi lokálním a tělesovým souřadnicovým rámcem s využitím Eulerových úhlů a rotace mezi úhly za pomoci rotační matice \mathbf{R} . Tím jsou určeny kinematické rovnice kvadroptéry, které jsou dále rozšířeny o translační a rotační dynamiku a působící síly a momenty, které jsou popsány jako produkty aktuátorů. Na základě odvozených rovnic se zavádí linearizace a stavový popis systému kvadroptéry. Před návrhem řízení je prozkoumána a prokázána říditelnost systému kvadroptéry.

Samotný návrh řízení obsahuje obecný popis řízení klasických reálných kvadroptér a za použití kaskády PID regulátorů, která je podrobně popsána, je navrženo specifické řízení pro stabilizaci systému.

Řízený systém je následně podroben simulačnímu experimentu. Tato a následující simulace jsou prováděny za využití programu MATLAB a jeho rozšíření SIMULINK. Simulační experiment poskytuje 3D vizualizaci problému a verifikuje navržené řízení.

Navazující kapitola se zabývá systémem sférického kyvadla, které je inverzně uloženo. Inverzní sférické kyvadlo samo o sobě nemá ve světě příliš široké využití a stává se tak minimálně zajímavou úlohou v teorii řízení. Systém kyvadla lze navrhnout s využitím sledování úhlů nebo naopak pozičních průmětů do roviny, přičemž práce řeší návrh systému pomocí pozičních průmětů. Obě možnosti jsou však v reálném světě aplikovatelné, jelikož lze měřit náklon ve sférických kloubech nebo případně kamerou snímat výchylku pohyblivého bodu kyvadla do roviny. Nevýhodou volby translačních veličin může být nemožnost

sledování pohybu kyvadla v jedné z ploch polokoule, po kterých se kyvadlo může pohybovat. Pro potřeby řízení kyvadla nad pivotem to ovšem není podstatné. Systém je navržen Lagrangeovou metodou využívající rozdíl v energiích. Dále je provedena linearizace v požadovaném umístění kyvadla a zaveden stavový popis kyvadla. Kyvadlo je shledáno jako nestabilní v daném stacionárním bodě a na modelu je vyšetřena říditelnost, přičemž kyvadlo je rovněž shledáno jako říditelné. Návrh řízení je proveden skrze stavovou zpětnou vazbu a optimalizaci LQ - kompletně tedy skrze lineární kvadratický regulátor. Simulační část prezentuje výsledky 3D vizualizací a průběhy veličin a to na základě tří simulačních experimentů.

První z experimentů zkoumá pohyb neřízeného kyvadla pro zavedené počáteční podmínky na výchylku kyvadla. Druhý simulační experiment reprezentuje zavedený řízený systém, kde jsou opět zvoleny počáteční podmínky na výchylku kyvadla. Tento experiment potvrzuje možnost řízení kyvadla navrženým regulátorem. Poslední z trojice experimentů znázorňuje regulaci působení vnějších sil na systém kyvadla.

Oba navržené systémy jsou v další kapitole spojeny v jeden a stávají se tak subsystémy celkového složeného systému. V tuto chvíli se vychází z již odvozených rovnic obou subsystémů. Souřadnicové rámce kyvadla a kvadroptéry se umísťují do sebe a stávají se souhlasnými, což je podmínkou pro nenutnost přepočítávat vztahy mezi kyvadlem a kvadroptérou a zavádět tak další rámec. Řízení kvadroptéry bylo třeba navrhovat dostatečně rychle tak, aby bylo možné následně připojit subsystém kyvadla. Návrh řízení samotné kvadroptéry ovšem není přímo tématem této práce. Přes tento fakt je třeba upravit parametry pozičního regulátoru v návaznosti na připojenou dynamiku kyvadla, jelikož poziční regulátor musí být daleko slabší a pomalejší než regulátor kyvadla a to z toho důvodu, že primárním cílem je stabilizace kyvadla.

Složený systém s navrženým řízením je opět testován v simulačním prostředí. Simulační experimenty jsou provedeny obdobně jako u subsystému kyvadla. Experimenty prokazují chování složeného systému v prvním případě jako reakci na vychýlení kyvadla jakožto počáteční podmínku, a v druhém případě jako odezvu systému na působení vnějších sil na subsystém kyvadla. Zajímavým experimentem by také mohla být stabilizace složeného systému, kdy kvadroptéra opisuje trajektorii kružnice a stabilizuje pohyblivý bod kyvadla nad středem této kružnice.

Příloha A

Přehled možných kombinací rotačních matic

Následující tabulka slouží jako přehled všech dvanácti možných sekvencí násobení elementárních matic, jimiž lze dosáhnout kompletní rotace.

$$\begin{aligned} X_1 Z_2 X_3 &= \begin{bmatrix} c_2 & -c_3 s_2 & s_2 s_3 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_3 s_1 - c_1 c_2 s_3 \\ s_1 s_2 & c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 \end{bmatrix} \\ X_1 Z_2 Y_3 &= \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -s_2 & c_2 s_3 \\ s_1 s_3 + c_1 c_3 s_2 & c_1 c_2 & c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1 \\ c_3 s_1 s_2 - c_1 s_3 & c_2 s_1 & c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3 \end{bmatrix} \\ X_1 Y_2 X_3 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 s_3 & c_3 s_2 \\ s_1 s_2 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & -c_1 s_3 - c_2 c_3 s_1 \\ -c_1 s_2 & c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 \end{bmatrix} \\ X_1 Y_2 Z_3 &= \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 \\ c_1 s_3 + c_3 s_1 s_2 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -c_2 s_1 \\ s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 & c_3 s_1 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \\ Y_1 X_2 Y_3 &= \begin{bmatrix} c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & s_1 s_2 & c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1 \\ s_2 s_3 & c_2 & -c_3 s_2 \\ -c_3 s_1 - c_1 c_2 s_3 & c_1 s_2 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 \end{bmatrix} \\ Y_1 X_2 Z_3 &= \begin{bmatrix} c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3 & c_3 s_1 s_2 - c_1 s_3 & c_2 s_1 \\ c_2 s_3 & c_2 c_3 & -s_2 \\ c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1 & c_1 c_3 s_2 + s_1 s_3 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \\ Y_1 Z_2 Y_3 &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_1 s_2 & c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3 \\ c_3 s_2 & c_2 & s_2 s_3 \\ -c_1 s_3 - c_2 c_3 s_1 & s_1 s_2 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 Z_2 X_3 &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 & s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 & c_3 s_1 + c_1 s_2 s_3 \\ s_2 & c_2 c_3 & -c_2 s_3 \\ -c_2 s_1 & c_1 s_3 + c_3 s_1 s_2 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 \end{bmatrix} \\
Z_1 Y_2 Z_3 &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_3 s_1 - c_1 c_2 s_3 & c_1 s_2 \\ c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & s_1 s_2 \\ -c_3 s_2 & s_2 s_3 & c_2 \end{bmatrix} \\
Z_1 Y_2 X_3 &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 & c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1 & s_1 s_3 + c_1 c_3 s_2 \\ c_2 s_1 & c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3 & c_3 s_1 s_2 - c_1 s_3 \\ -s_2 & c_2 s_3 & c_2 c_3 \end{bmatrix} \\
Z_1 X_2 Z_3 &= \begin{bmatrix} c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & -c_1 s_3 - c_2 c_3 s_1 & s_1 s_2 \\ c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_1 s_2 \\ s_2 s_3 & c_3 s_2 & c_2 \end{bmatrix} \\
Z_1 X_2 Y_3 &= \begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -c_2 s_1 & c_1 s_3 + c_3 s_1 s_2 \\ c_3 s_1 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 & s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 \\ -c_2 s_3 & s_2 & c_2 c_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

kde čísla 1, 2, 3 znázorňují úhly ϕ, θ, ψ tj. úhly odpovídající první, druhé a třetí elementární rotaci. X, Y, Z jsou matice představující elementární rotace kolem os x, y, z pevného rámce. "s" a "c" představují sinus a cosinus.

Literatura

- [1] CSc. Doc. Ing. Jiří Melichar. Lineární systémy 1. Master's thesis, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2010. wordpress.
- [2] R. Figueroa, A. Faust, P. Cruz, L. Tapia, and R. Fierro. Reinforcement learning for balancing a flying inverted pendulum. In *Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation*, pages 1787–1793, June 2014.
- [3] M. Hehn and R. D'Andrea. A flying inverted pendulum. In *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 763–770, May 2011.
- [4] T. Ibuki, Y. Tadokoro, Y. Fujita, and M. Sampei. 3d inverted pendulum stabilization on a quadrotor via bilinear system approximations. In *2015 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, pages 513–518, Sep. 2015.
- [5] Quan Quan. *Introduction to Multicopter Design and Control*. Springer Singapore.
- [6] Francesco Sabatino. Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation. Master's thesis, KTH electrical engineering, Stockholm, Sweden, 2015.
- [7] Wil Selby. Arducopter - quadrotor autonomous control theory and implementation.