

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Bakalářská práce

Vlnové řízení vícehmotového pružného systému

Martin Kučera

Vedoucí: Miloš Schlegel

2019

PROHLÁŠENÍ

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd na Západočeské univerzitě v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne

.....
vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ

Nejprve bych chtěl poděkovat svému vedoucímu Prof. Ing. Miloši Schlegelovi CSc., bez jehož odborných rad a ochoty pomoci bych se neobešel. Dále bych chtěl poděkovat zejména rodině, bez jejíž podpory by tato práce vůbec nevznikla.

Abstrakt

Předmětem této práce je použití principů vlnového řízení k ustálení řetězce pružinami spojených vozíků o obecné délce n . Nejprve se seznámíme s konceptem samotného vlnového řízení a jeho principy. Zjistíme, jak je možné využít znalosti o šířících se vlnách při vytváření zákona řízení pro regulátor. Poté se zaměříme na samotnou soustavu, která bude nejprve obecná pro jakékoliv n . Po odvození obecného předpisu pro soustavu vytvoříme modely systému již pro konkrétní počet vozíků a ostatní parametry. Pro nově vzniklé soustavy navrhne regulátor, který bude splňovat požadavky na vlnové řízení. Pomocí simulace nakonec ověříme funkčnost takto navržených regulátorů.

Klíčová slova

Dynamický systém, vlnové řízení, vícehmotový systém

Abstract

The subject of this bachelor thesis is the use of wave-based control principle to stabilize a string of trolleys connected by springs. At the beginning, the length of this string is generalized for an arbitrary integer n . We will get familiar with the wave-based concept and learn how to use knowledge of spreading waves to create a control law for a controller. We will create a model of the system, first for a general, then for a specific n . Finally, we will design controllers for those particular models and verify their ability to stabilize the system.

Keywords

Dynamic system, wave-based control, multi-mass system

Obsah

1 Úvod.....	6
2 Základní definice.....	7
3 Odvození obecných vlastností systému z nekonečných řetězců.....	13
3.1 Obecný stavový popis soustavy.....	13
3.2 Vlnová přenosová funkce.....	16
3.3 Odvození přenosu z vlnového modelu.....	18
4 Realizace zpětnovazební smyčky.....	21
4.1 Aproximace vlnové přenosové funkce.....	21
4.2 Odvození zákona řízení a sestavení zpětnovazební smyčky.....	22
4.3 Stabilita zpětnovazební smyčky.....	25
5 Simulace konkrétních systémů.....	29
6 Závěr.....	34

1 Úvod

V této práci se budeme zabývat aplikací principu vlnového řízení na soustavu vozíků propojených pružinami a tlumiči, nejprve o obecné délce n , později o konkrétní. Ukážeme si, že v případě pružného systému je použití tohoto způsobu řízení velmi vhodné. V kapitole 2 si nejprve uvedeme některé základní definice, které budeme potřebovat k pochopení problémů vyvstávajících z dané problematiky. Zároveň si popíšeme postup návrhu stavového regulátoru, se kterým později budeme srovnávat kvalitu vlnového řízení. V kapitole 3 se seznámíme s principem vlnového řízení. Z nekonečných řetězců si odvodíme obecný popis soustavy a charakteristickou přenosovou funkci. Kapitola 4 obsahuje postup pro získání řídicího zákona a správnou implementaci regulátoru. V poslední kapitole 5 použijeme navržený regulátor na řízení systému s konkrétním počtem vozíků a ověříme tak jeho funkčnost. Navíc porovnáme kvalitu řízení založeného na vlnovém principu s řízením soustavy stavovým regulátorem.

2 Základní definice

V práci se budeme zabývat vlnovým řízením lineárního systému. Nejprve si tedy musíme zavést některé důležité definice z této oblasti, které budeme v průběhu práce potřebovat.

Definice 1 - Systém [1].

Systém je daná množina prvků spolu s jejich chováním a množina vazeb mezi těmito prvky a mezi prvky a okolím.

Systém lze také popsat jako množinu prvků a vztahů mezi těmito prvky, které dohromady vytvářejí ucelenou strukturu se smysluplným chováním.

Definice 2 - Lineární systém [2].

Systém je lineární, pokud v něm platí princip superpozice. To znamená, že v něm platí následující dvě podmínky:

1. Aditivita – Pokud u_1 a u_2 jsou libovolné vstupy a y_1 a y_2 jim odpovídající výstupy, pak odezvou systému na součet vstupů u_1 a u_2 je součet výstupů y_1 a y_2 .
2. Homogenita – Pokud u_1 je libovolný vstup a y_1 jemu odpovídající výstup, pak odezvou systému na k -násobek vstupu u_1 je k -násobek výstupu y_1

Definice 3 - Laplaceova a zpětná Laplaceova transformace [2].

Jestliže nějaká funkce času $f(t)$ vyhovuje podmínkám:

1. $f(t)$ je jednoznačná a po úsecích hladká v každém konečném časovém intervalu
2. $f(t) = 0$ pro $t < 0$
3. $f(t)$ je exponenciálního řádu: , $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$ pro nějaké $\sigma_0 > 0$

potom Laplaceova transformace $f(t)$, formálně značená , $F(p) = L\{f(t)\}$ je definovaná:

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad , \text{ kde } p \text{ je komplexní proměnná, } p = \sigma + j\omega$$

a existuje $\forall p$ taková, že $\text{Re}(p) > \sigma_0$

Zpětná Laplaceova transformace $F(p)$, značená $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$ je definovaná:

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_G F(p) e^{pt} dp = \sum_i \text{res } F(p_i) e^{p_i t} \quad (\text{Cauchyho věta})$$

kde $\text{res } F(p_i)$ označuje residuum $F(p_i)$ – hodnotu funkce komplexní proměnné v pólu p_i .

Definice 4 – Přenosová funkce [1, 2]

Přenosová funkce $F(p)$ spojitého lineárního dynamického systému je funkcí komplexní proměnné p a je definována s použitím Laplaceovy transformace časových funkcí jako poměr Laplaceových obrazů výstupní veličiny $Y(p)$ a vstupní veličiny $U(p)$ při nulových počátečních podmínkách:

$$F(p) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} \Big|_{n.p.p.} = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

Pro fyzikální realizovatelnost musí být splněna podmínka $n \geq m$ (přenos je ryzí). Pokud by byla porušena podmínka pro ryzost systému, došlo by k porušení principu kauzality. Nekauzální systémy není možno sestrojít.

Podmínka ryzosti systému: $\lim_{s \rightarrow \infty} G(p) = \text{konst} < \infty$

Pro $n > m$ e přenosová funkce nazývá striktně ryzí a platí: $\lim_{s \rightarrow \infty} G(p) = 0$

Definice 5 – Nuly a póly systému [2]

Přenosovou funkci systému lze zapsat ve tvaru součinu kořenových činitelů

$$F(p) = \frac{b_m (p - n_1)(p - n_2) \dots (p - n_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} = \frac{b(p)}{a(p)}$$

Kořeny polynomu v čitateli označujeme jako nuly přenosu $n_j, j = 1, 2, \dots, m$

Kořeny polynomu ve jmenovateli označujeme jako póly přenosu $p_j, j = 1, 2, \dots, n$

Póly a nuly v přenosové funkci mohou být reálné, ryze imaginární či komplexně sdružené a také jednoduché či násobné.

Póly a nuly rozlišujeme na stabilní a nestabilní. Tuto vlastnost určuje reálná složka příslušného pólu nebo nuly. Pokud je reálná složka záporná, jedná se o stabilní pól respektive nulu. V opačném případě (reálná složka je kladná) hovoříme o nestabilním pólu respektive nule.

Pokud systém obsahuje reálné stabilní nuly a póly, můžeme definovat časové konstanty

$$T_i = -\frac{1}{p_i}, \quad i=1,2,\dots,n$$

$$\tau_j = -\frac{1}{n_j}, \quad i=1,2,\dots,m$$

Přenosovou funkci potom můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)\dots(\tau_m p + 1)}{a_0(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)\dots(T_n p + 1)}$$

Statickým zesílením potom nazýváme podíl $\frac{b_0}{a_0}$

Definice 6 – Nyquistova frekvenční charakteristika [2]

Frekvenční přenos $F(j\omega)$ je komplexní funkce reálného argumentu.

Pro každé reálné $\omega_i, \omega_i \in [0, \infty)$ je frekvenční přenos $F(j\omega_i)$ komplexní číslo

$F(j\omega_i) = \text{Re } F(j\omega_i) + j \text{Im } F(j\omega_i)$, které může být převedeno na polární tvar

$$F(j\omega_i) = |F(j\omega_i)| e^{j\phi(\omega_i)}, |F(j\omega_i)| = \sqrt{[\text{Re } F(j\omega_i)]^2 + [\text{Im } F(j\omega_i)]^2}$$

$$\phi(\omega_i) = \text{arctg} \frac{\text{Im } F(j\omega_i)}{\text{Re } F(j\omega_i)}$$

Při změnách ω v intervalu $\omega_i \in [0, \infty)$ bude $F(j\omega)$ opisovat křivku v komplexní rovině. Tuto křivku nazýváme Nyquistovou křivkou.

Nyquistova frekvenční charakteristika zobrazuje v komplexní rovině $(\text{Re } F, j \text{Im } F)$ v závislosti na úhlové frekvenci, $\omega_i, \omega_i \in [0, \infty)$ současně amplitudové zesílení $|F(j\omega)|$ a fázový posun $\phi(\omega)$ harmonického signálu na výstupu systému vzhledem k signálu na vstupu systému.

Definice 7 – Stavová reprezentace LDS [2]

Stavovou reprezentaci lineárního dynamického SISO systému n -tého řádu zapisujeme v následujícím maticovém tvaru.

$$S(A, B, C^T, D): \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + B u(t), \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \dots \text{vektor počátečního stavu}$$

$$y(t) = C^T \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + D u(t)$$

Matici A nazýváme maticí dynamiky. Matice je čtvercová a její řád odpovídá řádu systému. Má v sobě uloženou veškerou informaci o dynamice systému. Matice B se skládá z n řádků a jednoho sloupce. Obsahuje v sobě informaci o vstupech do systému. Matice C^T se skládá z jednoho řádku a n sloupců. Tato matice nám říká, které vstupy jsme schopni pozorovat. Poslední matice D určuje přímé působení vstupu na výstup. V případě SISO systému se jedná o jednorozměrnou matici, tedy číslo.

Ze stavové reprezentace lze určit přenosovou funkci. Nejprve na stavovou a výstupní rovnici použijeme Laplaceovu transformaci. Dostaneme následující podobu rovnic

$$pX(p) - x_0 = AX(p) + BU(p), Y(p) = C^T X(p) + DU(p)$$

Přepsáním stavové rovnice do vhodného tvaru a následným vyjádřením $X(p)$ dostáváme

$$(pI - A)X(p) = x_0 + BU(p) \rightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}x_0 + (pI - A)^{-1}BU(p)$$

Dále dosadíme $X(p)$ do výstupní rovnice

$$Y(p) = C^T(pI - A)^{-1}x_0 + C^T(pI - A)^{-1}BU(p) + DU(p)$$

Přenos je definovaný jako poměr Laplaceových transformací výstupu a vstup za nulových počátečních podmínek ($x_0 = 0$)

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = C^T(pI - A)^{-1}B + D$$

Definice 8 – Stavová zpětná vazba [1]

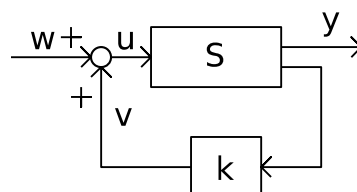
Uvažujme lineární stacionární spojitý dynamický systém S

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Měříme stavové veličiny a tuto informaci zpracujeme lineárním statickým zpětnovazebním regulátorem.

Stavová zpětná vazba (uvažujeme kladnou zpětnou vazbu)



Dosadíme rovnice zpětné vazby do stavové rovnice systému S

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + Bk)x + Bw \\ y &= (C + Dk)x + Dw\end{aligned}$$

Dynamické vlastnosti celého systému jsou určeny vlastními čísly matice

$$A_c = A + Bk$$

Návrh stavového regulátoru pomocí Butterworthových filtrů

Po návrhu regulátoru založeném na principu vlnového řízení budeme porovnávat přechodové charakteristiku soustav, které budou řízené dříve zmíněným regulátorem a posléze stavovým regulátorem. V následujících odstavcích si ukážeme postup při návrhu stavového regulátoru podle konkrétního kritéria.

Budeme nyní předpokládat, že jsme schopni změřit celý stav systému a pomocí této informace navrhnout zpětnovazební stavový regulátor. Vzhledem k pozdějšímu postupu při návrhu stavového regulátoru k pružnému systému si zmíníme dvě návrhové metody, které jsou si velmi podobné, postup při jejich použití je ale odlišný.

První metoda je založená na přímém přiřazení pólů. Nejprve vyjádříme požadované póly pomocí charakteristického polynomu a^* , který poté položíme roven hodnotě charakteristickému polynomu matice A_c . Vyřešením diofantické rovnice pro n neznámých získáme koeficienty $k_1 - k_n$ stavového regulátoru, kde n je řád systému.

Druhá metoda je velmi podobná. Místo přiřazení samotných pólů však budeme přiřazovat celou Jordanovu formu. Na první pohled by se mohlo zdát, že se jedná o stejnou úlohu. V některých případech však přiřazení samotných pólů může změnit spektrální vlastnosti matice dynamiky. Použitím metody přiřazení Jordanovy formy můžeme tento problém obejít.

Pro návrh stavového regulátoru budeme později používat právě tuto metodu a budeme se řídit následujícím algoritmem

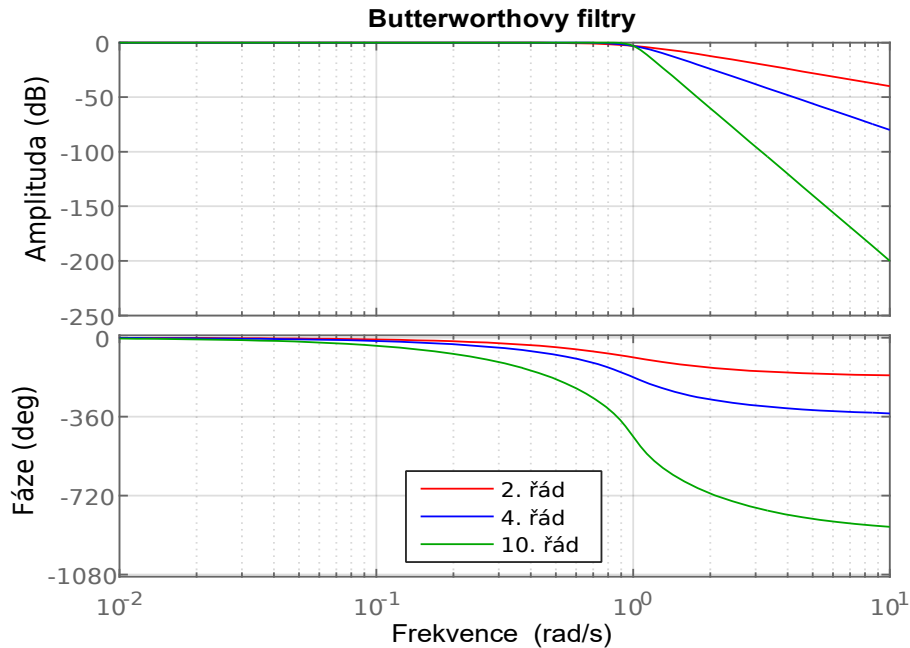
- 1) Zvolíme náhodnou matici H s rozměry $(1, n)$
- 2) Vyřešíme maticovou rovnici $AX - XL + BH$ pro matici X
- 3) Hledanou stavovou vazbu získáme ve tvaru $k = HX^{-1}$

Značení: n – řád matice dynamiky A , L – přiřazovaná Jordanova forma, k – hledaná zpětná vazba

Problémem zůstává vhodná volba požadovaných pólů, respektive přiřazované Jordanovy formy. Pravděpodobně budeme požadovat páry kmitavých pólů, které nejsou ani příliš, ani nedostatečně tlumeny. V jiných případech bychom využili některé návrhové požadavky, v této úloze ale žádné nemáme.

Jeden ze způsobů, který se nabízí při nulových návrhových požadavcích, a který využijeme pro nalezení stavového regulátoru je následující. Jordanovu formu budeme

přirázovat takovým způsobem, aby charakteristický polynom výsledné matice dynamiky odpovídal charakteristickému polynomu Butterworthova filtru n -tého řádu. Butterworthův filtr je příznačný pro tvar svojí amplitudové frekvenční charakteristiky, jejíž průběh je maximálně plochý.



(Obr. D1) Bodeho diagram Butterworthových filtrů

(Obr. D1) znázorňuje průběh fáze a amplitudy v závislosti na frekvenci signálu v systémech různých řádů. Pohledem na graf snadno ověříme plochý průběh amplitudové charakteristiky, typické pro Butterworthův filtr. Později použijeme právě tento filtr pro návrh stavového regulátoru u systému s jedním vozíkem. Z předpisu pro charakteristický polynom konkrétního filtru si vyjádříme dvojice komplexně sdružených pólů, jejichž hodnoty využijeme v přiřazované Jordanově formě.

V práci budeme zkoumat systémy skládající se z jednoho, dvou a pěti vozíků. Uvedeme si zde tedy tvary charakteristických polynomů pro potřebné Butterworthovy filtry.

$$a_2^* = p^2 + 1.4142 p + 1$$

$$a_4^* = (p^2 + 0.7654 p + 1)(p^2 + 1.8478 p + 1)$$

$$a_{10}^* = (p^2 + 0.3129 p + 1)(p^2 + 0.9080 p + 1)(p^2 + 1.4142 p + 1)(p^2 + 1.7820 p + 1) \cdot (p^2 + 1.9754 p + 1)$$

(D2)

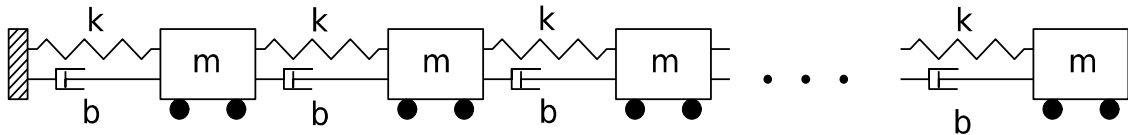
3 Odvození obecných vlastností systému z nekonečných řetězců

V této kapitole budeme vycházet nejprve z polonekonečného homogenního řetězce tvořeného vozíky. Jednotlivé vozíky jsou spojeny pružinou a tlumičem, které mají stejné parametry v kterémkoliv místě řetězce. Sestavíme pohybové rovnice, zavedeme vektor stavu a odvodíme stavový popis n -hmotové soustavy.

Poté se od polonekonečného systému přesuneme k řetězci, který se nekonečně šíří oběma směry. Pomocí analýzy určíme obecnou přenosovou funkci libovolného vozíku na sousední (v libovolném směru).

3.1 Obecný stavový popis soustavy

Při odvozování obecného popisu soustavy budeme vycházet z následujícího modelu systému



(Obr. 1) Polonekonečný uniformní systém

Aktuátor je vyznačen jako šrafovaná zeď, která se sama o sobě nemůže hýbat. K jejímu pohybu dochází pouze na pokyn regulátoru, který mění pozici aktuátoru tak, aby došlo k pohlcení reziduálních vibrací.

Předpokládáme, že řetězec vozíků je nekonečný a uniformní, tj. každý vozík má hmotnost m , každá pružina tuhost k a všechny tlumiče koeficient tlumení b .

Pozn.: Pokud nebude výslovně uvedeno jinak, v celé práci budeme uvažovat následující hodnoty

$$k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad \omega_n = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} = 10 \text{ Hz}, \quad b = 0.1$$

Použitím Newton-Eulerovy metody můžeme sestavit pohybové rovnice pro jednotlivé vozíky v řetězci. Pro řetězec obecné délky n dostáváme tři podoby pohybové rovnice. Pokud je F_i celková síla působící na i -tý vozík, pak platí následující:

$$\begin{aligned} F_1 &= -k(x_1 - x_0) + k(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_1 \ddot{x}_1 \\ F_i &= -k(x_i - x_{i-1}) + k(x_{i+1} - x_i) - b(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + b(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) = m_i \ddot{x}_i \\ F_n &= -k(x_n - x_{n-1}) + b(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) = m_n \ddot{x}_n \end{aligned} \quad (1)$$

Rovnice F_1 popisuje síly působící na první vozík, reprezentuje tedy rozhraní mezi aktuátorem a systémem. Rovnice F_i platí pro jakýkoliv i -tý vozík, který není hraniční. Poslední rovnice F_n platí pouze pro vozík, který je poslední v pořadí, nepůsobí na něj totiž zprava žádné síly.

Z odvozených rovnic (1) si můžeme vyjádřit druhé derivace výchylky.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \frac{-k}{m_1}(x_1 - x_0) + \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1) - \frac{b}{m_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + \frac{b}{m_1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \ddot{x}_i &= \frac{-k}{m_i}(x_i - x_{i-1}) + \frac{k}{m_i}(x_{i+1} - x_i) - \frac{b}{m_i}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + \frac{b}{m_i}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) \\ \ddot{x}_n &= \frac{-k}{m_n}(x_n - x_{n-1}) - \frac{b}{m_n}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})\end{aligned}\quad (2)$$

Zavedeme stavové proměnné $z_1 - z_{2n}$, stavový vektor a jeho derivaci

$$\begin{array}{cccc} z_1 = x_1 & z_{n+1} = \dot{x}_1 & \dot{z}_1 = \dot{x}_1 = z_{n+1} & z_{n+1} = \dot{x}_1 \\ z_2 = x_2 & z_{n+2} = \dot{x}_2 & \dot{z}_2 = \dot{x}_2 = z_{n+2} & z_{n+2} = \dot{x}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_n = x_n & z_{2n} = \dot{x}_n & \dot{z}_n = \dot{x}_n = z_{2n} & z_{2n} = \dot{x}_n \end{array}\quad (3)$$

Do derivace vektoru stavu (3) dosadíme rovnice (2)

$$\begin{aligned}\dot{z}_{n+1} = \ddot{x}_1 &= \frac{-k}{m_1}(x_1 - x_0) + \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1) - \frac{b}{m_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + \frac{b}{m_1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \dot{z}_{n+i} = \ddot{x}_i &= \frac{-k}{m_i}(x_i - x_{i-1}) - \frac{b}{m_i}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + \frac{k}{m_i}(x_{i+1} - x_i) + \frac{b}{m_i}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) \\ \dot{z}_{2n} = \ddot{x}_n &= \frac{-k}{m_n}(x_n - x_{n-1}) - \frac{b}{m_n}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})\end{aligned}\quad (4)$$

Nejprve musíme pomocí rovnic určit podobu matice dynamiky A . Použijeme vektor stavů a vytvoříme jeho Jacobiho matici. Postupně každou rovnici zderivujeme podle všech proměnných. Matice dynamiky A se skládá ze členů $a_{i,j}$, kde člen $a_{i,j}$ má hodnotu derivace i -té rovnice podle j -té proměnné.

Protože předpokládáme, že se jedná o SISO systém, bude matice B tvořena pouze jedním sloupcem. Vstup systému nalezneme v 1. rovnici ze soustavy rovnic (2). Předpokládáme, že vstup systému je posun aktuátoru o požadovanou vzdálenost. Tuto vzdálenost jsme schopni přepočítat na sílu, kterou vyvolá posunutí aktuátoru v pružině na rozhraní systému. Dostáváme následující vztah pro vstup systému

$$u = \frac{kx_0}{m}$$

Matice B je tedy nulový sloupec s výjimkou indexu $n+1$, který má hodnotu $\frac{k}{m}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & \dots & \frac{-2b}{m} & \frac{b}{m} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & \dots & \frac{b}{m} & \frac{-2b}{m} & \frac{b}{m} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{b}{m} & \frac{-2b}{m} & \frac{b}{m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{b}{m} & \frac{-b}{m} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{k}{m} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Podoba matice C závisí na našem požadavku respektive schopnosti umístění senzorů snímajících aktuální polohy jednotlivých vozíků. Pro účely řízení (odvodíme v pozdějších kapitolách) nám bude stačit jeden senzor polohy umístěný v samotném systému a jeden senzor umístěný na aktuátoru.

Matice C tedy může obsahovat pouze jediný řádek s 1 na indexu odpovídajícímu prvnímu vozíku a výrazem $\frac{b}{km}$ na indexu $n+1$. Prozatím se budeme držet předpokladu, že zkoumaný systém bude SISO. Matice D je tím pádem číslo a její hodnota je 0, protože systém neobsahuje přímé působení vstupu na výstup.

$$C = \left(1 \quad 0 \quad \dots \quad \frac{b}{km} \quad \dots \quad 0 \right) \quad D = 0 \quad (6)$$

Pro pozdější simulaci a řízení modelu budeme potřebovat znát přenosovou funkci mezi aktuátorem a prvním vozíkem. Pro její spočítání využijeme vzorec odvozený v (Def. 7). Protože nás prozatím zajímá pouze přenosová funkce mezi aktuátorem a prvním vozíkem, bude systém pouze druhého řádu.

Nejprve dosadíme potřebné hodnoty do (5) a (6). Dostaneme následující stavovou reprezentaci systému

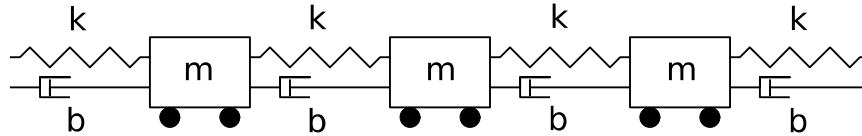
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -0.1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1000} \end{pmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Dosazením příslušných matic (5), (6) do vzorce pro výpočet přenosové funkce získáme následující

$$C^T (pI - A)^{-1} B + D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1000 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -0.1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{0.1 p + 100}{p^2 + 0.1 p + 100} \quad (8)$$

3.2 Vlnová přenosová funkce

V této části se pokusíme najít charakteristickou přenosovou funkci popisující přenos signálu z jednoho vozíku na sousední vozík. K určení potřebné přenosové funkce však použijeme další, odlišnou metodu než v předchozím případě. Získaný přenos budeme později potřebovat pro modelování konkrétních systémů.



(Obr. 2) Nekonečný uniformní systém

Stejně jako v předchozím případě (Obr. 1) mají všechny vozíky stejnou hmotnost a všechny pružiny stejnou tuhost. Tento systém se však od předchozího liší tím, že se nekonečně šíří oběma směry.

Naším cílem je odvodit přenosovou funkci $G(s)$ mezi i -tým vozíkem a jeho sousedem. Náš první předpoklad tedy vypadá následovně (pracujeme s Laplaceovými obrazy)

$$X_{i+1}(p) = G(p) X_i(p) \rightarrow X_{i+n}(p) = G^n(p) X_i(p) \quad (9)$$

Z dříve odvozených rovnic (1) již známe podobu pohybové rovnice pro i -tý vozík, pro lepší přehlednost ji však přepíšeme na následující tvar

$$m \ddot{x}_i = k(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) + b(\dot{x}_{i-1} - 2\dot{x}_i + \dot{x}_{i+1}) \quad (10)$$

Převedením (10) do prostoru Laplaceových obrazů pomocí Laplaceovy transformace dostaneme

$$m p^2 X_i(p) = k(G^{-1}(p) - 2 + G(p))X(p) + bp(G^{-1}(p) - 2 + G(p))X(p) \quad (11)$$

Nyní se pokusíme vyřešit rovnici (11) pro $G(p)$. Obě strany rovnice vynásobíme hodnotou X_i^{-1}

$$m p^2 = k(G^{-1}(p) - 2 + G(p)) + bp(G^{-1}(p) - 2 + G(p))$$

Všechny prvky rovnice převedeme na jednu stranu a celou rovnici vynásobíme $G(p)$, abychom se zbavili členu $G^{-1}(p)$

$$G(p) p^2 - \frac{k}{m}(1 - 2G(p) + G^2(p)) - \frac{bp}{m}(1 - 2G(p) + G^2(p)) = 0$$

Jednotlivé členy přeskupíme

$$G^2(p) \left(\frac{k+bp}{m} \right) - G(p) \left(\frac{2k+2bp+mp^2}{m} \right) + \frac{k+bp}{m} = 0 \quad (12)$$

Rovnici (12) můžeme vyřešit standardním postupem pro řešení kvadratické rovnice, dostáváme následující dvě řešení

$$G_a(p) = 1 + \frac{1}{2} p^2 \left(\frac{m}{k+bp} \right) - \frac{1}{4} p \sqrt{\frac{m}{k+bp} \left(1 + \frac{mp^2}{4(k+bp)} \right)} \quad (13)$$

$$G_b(p) = 1 + \frac{1}{2} p^2 \left(\frac{m}{k+bp} \right) + \frac{1}{4} p \sqrt{\frac{m}{k+bp} \left(1 + \frac{mp^2}{4(k+bp)} \right)} \quad (14)$$

Dvě různá řešení (13) a (14) naznačují, že obecné řešení pro výchylku *i-tého* vozíku bude vypadat následovně

$$X_i(p) = C_i(p) G_a(p) + D_i(p) G_b(p) \quad (15)$$

Rovnice (15) nám říká, že výchylku X_i získáme jako součet dvou dílčích řešení. $C_i(p)$ a $D_i(p)$ jsou funkce komplexní proměnné p . Jejich přesnou podobou se nyní nebudeme zajímat, řešení (15) proto přepíšeme do následující podoby (16). Z tohoto tvaru je lépe patrné, že celkovou podobu výchylky budeme hledat jako superpozici dvou samostatných vln.

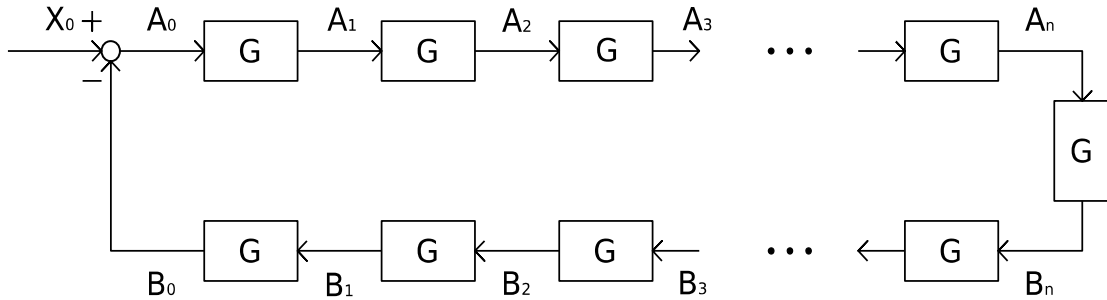
$$X_i(p) = A_i(p) + B_i(p) \quad (16)$$

Nyní se zaměříme na jednotlivá řešení $A_i(p)$ a $B_i(p)$. V (Def. 4) jsme si uvedli podmínku pro splnění principu kauzality. Pokud aplikujeme tuto podmínku na obě přenosové funkce $A_i(p)$ a $B_i(p)$, zjistíme, že z těchto dvou přenosových funkcí je pouze $G_a(p)$ kauzální.

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} G_a(p) &= \lim_{p \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} p^2 \left(\frac{m}{k+bp} \right) - \frac{1}{4} p \sqrt{\frac{m}{k+bp} \left(1 + \frac{mp^2}{4(k+bp)} \right)} = 0 \\ \lim_{p \rightarrow \infty} G_b(p) &= \lim_{p \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} p^2 \left(\frac{m}{k+bp} \right) + \frac{1}{4} p \sqrt{\frac{m}{k+bp} \left(1 + \frac{mp^2}{4(k+bp)} \right)} = \infty \end{aligned} \quad (17)$$

3.3 Odvození přenosu z vlnového modelu

S využitím znalosti přenosové funkce Ga (13) sestavíme model nekonečného řetězce. Vlastnosti modelu vyplývají z charakteristiky vlnové přenosové funkce. Úvahou poté odvodíme důležité vztahy, které využijeme k získání přenosových funkcí v soustavách s konkrétními počty vozíků.



(Obr. 3) Reprezentace uniformního systému z (Obr. 1) pomocí vlnové přenosové funkce

Na (Obr. 3) vidíme model, který popisuje chování vlny v systému z (Obr. 1). Každý blok reprezentuje vozík, jehož přenosová funkce je stejná jako Ga (13). V následujících odstavcích budeme předpokládat, že tento model přesně popisuje dynamiku vln šířících se napříč systémem.

Nejprve se zaměříme na hranice modelu. Levá hranice, suma na (Obr. 3), reprezentuje rozhraní mezi aktuátorem a samotným systémem. X_0 značí aktuální posunutí aktuátoru vzhledem k původní poloze. Protože s aktuátorem budeme během řízení úmyslně hýbat takovým způsobem, aby účinně pohlcoval přichozí vlny, můžeme jeho posunutí brát jako vstup systému. Pro vstup systému tedy platí

$$X_0(p) = A_0(p) + B_0(p) \quad (18)$$

Pro další úvahy je vhodné si vyjádřit vlnu A_0 , která po průchodu sumou způsobuje vychýlení prvního vozíku. Vlna poté dál putuje systémem, odrazí se na konci modelu a putuje zpět k aktuátoru.

$$A_0(p) = X_0(p) - B_0(p) \quad (19)$$

Ošetření pravé hranice je poněkud složitější než v případě levé hranice. Systém je složen z konečného množství vozíků, musíme tedy přijít na to, jak se vlna cestující doprava odrazí od volné hranice (napravo už není žádný další vozík) zpět do systému. Budeme nyní předpokládat, že systém nekončí n -tým vozíkem, ale pokračuje dál. Abychom imitovali přítomnost volné hranice, pružina napravo od n -tého vozíku nesmí vyvolávat žádnou sílu. Tento případ nastává pouze ve chvíli, kdy je vychýlení n -tého i následujícího vozíku stejné vzhledem k jejich počátečním polohám. Použitím vztahu (16) dostáváme následující požadavek

$$A_n(p) + B_n(p) = A_{n+1}(p) + B_{n+1}(p) \quad (20)$$

Pokud se podíváme na (Obr. 3), snadno si domyslíme vztah, který bude reprezentovat přenos vlny z jednoho vozíku na druhý. Pro lepší přehlednost nyní zavedeme následující značení $G_a(p) \equiv G$

$$\begin{aligned} A_{i+1}(p) &= G A_i(p) \\ B_{i+1}(p) &= G^{-1} B_i(p) \end{aligned} \quad (21)$$

Dosadíme (21) do (20)

$$A_n(p) + B_n(p) = G A_n(p) + G^{-1} B_n(p) \quad (22)$$

Provedeme několik úprav a dostaneme hledaný vztah pro odraz vlny od volné hranice

$$\begin{aligned} G A_n(p) + G B_n(p) &= G^2 A_n(p) + B_n(p) \\ G B_n(p) - B_n(p) &= G^2 A_n(p) - G A_n(p) \\ B_n(p)(G-1) &= G A_n(p)(G-1) \\ B_n(p) &= G A_n(p) \end{aligned} \quad (23)$$

Takto odvozený vztah je v souladu s modelem systému (Obr. 3)

Nyní známe všechny potřebné spojitosti k odvození obecného předpisu pro přenosovou funkci mezi aktuátorem a libovolným vozíkem. Dosazením poměrně jasných vztahů, které můžeme vyčíst z (Obr. 3) do rovnice (18) spočítáme rovnici pro výchylku aktuátoru a posledního vozíku

$$\begin{aligned} X_0 &= A_0 + B_0 \\ X_n &= A_n + B_n = G^n A_0 + G^{n+1} A_0 \end{aligned} \quad (24)$$

S využitím znalostí (24) lze spočítat libovolnou přenosovou funkci mezi kterýmkoliv vozíkem a aktuátorem. Pokud budeme uvažovat přenosovou funkci mezi aktuátorem a posledním n -tým vozíkem, dostaneme následující vztah

$$F_{n,0} = \frac{X_n}{X_0} = \frac{G^n A_0 + G^{n+1} A_0}{A_0 + G^{2n+1} A_0} = \frac{G^n (1+G)}{1+G^{2n+1}} \quad (25)$$

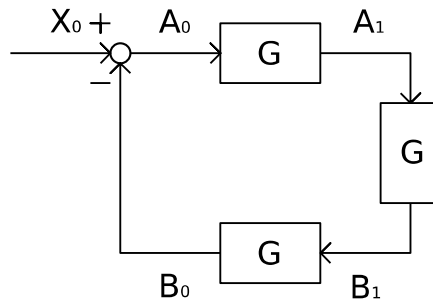
Na okamžik se pozastavíme nad získanou přenosovou funkcí. Protože víme, že n je nutně přirozené číslo (v systému nemůže být zlomek vozíku) a ve jmenovateli (25) se vyskytuje jeho dvojnásobek, můžeme celou přenosovou funkci ještě více zjednodušit. Pro jakékoliv přirozené n totiž platí, že exponent $2n+1$ bude liché číslo. Každý dvojčlen ve tvaru $a^n + b^n$ lze pro liché n přepsat na tvar

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1}) \quad (26)$$

Použitím pravidla (26) na jmenovatel přenosové funkce (25) dostáváme

$$F_{n,0}(p) = \frac{G^n(1+G)}{1+G^{2n+1}} = \frac{G^n(1+G)}{(1+G)(1-G+G^2-\dots+G^{2n})} = \frac{G^n}{1-G+G^2-\dots+G^{2n}} \quad (27)$$

Uvažujme systém, který se skládá pouze z aktuátoru a jednoho vozíku, připojeného pružinou. Takovýto systém lze ilustrovat následujícím modelem



(Obr. 4) Reprezentace jednohmotového systému

Nyní ukážeme, že přenosová funkce, kterou jsme dříve získali z obecného modelu soustavy (6) je totožná s přenosovou funkcí získanou dosazením (13) do (27).

$$F_{1,0}(p) = \frac{G^n}{1-G+G^2-\dots+G^{2n}} = \frac{G}{1-G+G^2} = \frac{0.1p+100}{p^2+0.1p+100} \quad (28)$$

4 Realizace zpětnovazební smyčky

V této kapitole se budeme zabývat návrhem regulátoru, který bude založen na principu vlnového řízení. Abychom mohli realizovat funkční zpětnovazební smyčku, musíme nejdříve nalézt aproximaci vlnové přenosové funkce a poté odvodit zákon řízení pro regulátor.

4.1 Aproximace vlnové přenosové funkce

Nyní se pokusíme nalézt vhodnou aproximaci vlnové přenosové funkce G_a (13). Funkce G_a není příliš vhodná pro potřeby řízení zejména díky jejímu neceločíselnému řádu. Volba aproximace, která bude mít podobné klíčové vlastnosti jako funkce G_a a zároveň nebude mít některé její nedostatky, je dalším krokem k úspěšnému návrhu funkční zpětnovazební smyčky.

Přenosová funkce G_a (13) je kauzální, pokud šíření vlny spojené s touto přenosovou funkcí budeme pozorovat směrem zleva doprava. To ale neplatí pro G_b (14), která je v tomto směru nekauzální. Nyní si představíme, že otočíme směr pozorování šířící se vlny. Budeme tedy předpokládat, že vlna má zdroj někde napravo od místa pozorování a šíří se směrem vlevo. Přenosová funkce G_b se v tuto chvíli stává kauzální a funkce G_a se stává nekauzální. Dříve jsme zjistili, že celkovou výchylku X_i získáme jako superpozici dvou dílčích řešení A_i a B_i , jejichž podoba je spjata s příslušnými přenosovými funkcemi G_a a G_b . Jednotlivé komponenty řešení proto můžeme spojit se dvěma vlnami, přičemž se každá šíří opačným směrem. První vlna, spojená s komponentou A_i , se šíří směrem zleva doprava. Druhá vlna, spojená s komponentou B_i , se šíří zprava doleva. Rovnici (16) tedy můžeme chápat jako rozdělení celkové výchylky X_i na výchylku A_i , způsobenou vlnou šířící se doprava, a výchylku B_i , způsobenou vlnou šířící se doleva. Tato skutečnost je důležitá zejména v pozdějších úvahách, kdy již nebudeme pracovat s nekonečným řetězcem vozíků, ale s řetězcem konečné délky, pro který budeme navrhovat řízení.

Nyní budeme předpokládat stejný případ, který je zobrazen na (Obr. 1). Jedná se tedy o polonekonečný systém, který se šíří směrem doprava od aktuátoru. Pokud je jediné počáteční vybuzení systému způsobeno aktuátorem, bude se vlna šířit směrem doprava. Protože je systém nekonečný, vlna se nebude moci odrazit zpět a bude nekonečně putovat v daném směru. Komponenta celkového řešení A_i je tedy jediná, která svojí hodnotou přispívá k výchylce X_i . Komponenta B_i má nulovou hodnotu, protože neexistuje zdroj vybuzení vpravo od libovolné výchylky X_i a vlna způsobená aktuátorem se nemá kde odrazit. Podobný případ platí pro systém, kde se aktuátor nachází vpravo a jediná vlna se šíří od aktuátoru směrem doleva. Komponenta B_i celkového řešení v tuto chvíli jako jediná přispívá k výchylce X_i , protože komponenta A_i nabývá nulové hodnoty.

Pro návrh modelu řízeného systému budeme potřebovat odvodit charakteristickou funkci systému, kterou popíšeme přenos výchylky X_i *i-tého* vozíku na výchylku X_{i+1} následujícího vozíku. Přenosová funkce G_a přesně popisuje přenos mezi vozíky, nicméně se jedná o funkci, jejíž řád není celočíselný. Tato přenosová funkce proto není příliš vhodná pro potřeby řízení. Z tohoto důvodu musíme najít jinou přenosovou

funkci, která v sobě bude obsahovat veškeré informace o dynamice systému a bude splňovat další podmínky důležité pro řízení.

Nalezení vhodné aproximace přenosové funkce G_a je znázorněno v [3]. Jedním z problémů, který nastává při řízení skutečného systému je požadavek na řízení v reálném čase. Hledaná aproximace by proto měla být výpočetně nenáročná na vyhodnocení, protože by mohlo dojít k destabilizaci celé soustavy následkem dlouhého výpočtu její hodnoty.

Výsledná podoba přenosové funkce nemusí být naprosto přesná, je dostačující, pokud s předchozím předpokladem pro výpočetní nenáročnost splňovala následující 3 podmínky.

1. Způsobí pohlcení příchozí vlny a přenesse tuto vlnu na následující vozík, aniž by způsobovala omezení v ustáleném stavu
2. Statické zesílení (zesílení v ustáleném stavu) přenosové funkce má hodnotu 1
3. Je s ní spojeno dopravní zpoždění nebo přechodový děj, který je přibližně druhého řádu

(30)

S přihlédnutím k podmínkám výše lze jako vhodnou aproximaci zvolit přenosovou funkci charakterizující kmitavý člen druhého řádu, který bude mít poloviční hodnotu kritického tlumení (kritické tlumení nastává pro $\xi = 1$)

$$G(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \rightarrow \frac{\omega_n^2}{p^2 + \omega_n p + \omega_n^2} \quad (31)$$

4.2 Odvození zákona řízení a sestavení zpětnovazební smyčky

Posledním problémem, který musíme vyřešit před návrhem zpětnovazební smyčky, je nalezení zákona řízení pro regulátor. V této části využijeme některé předchozí znalosti a úvahu k odvození hledaného předpisu. Při návrhu regulátoru budeme uvažovat nulové nebo velmi malé tlumení.

Z předchozí kapitoly je nám známo, že celková výchylka aktuátoru má hodnotu součtu dvou vln, z nichž se jedna šíří směrem zprava doleva a druhá zleva doprava (18). Bohužel nejsme schopni přímo měřit jednotlivé složky řešení A_0 a B_0 . Můžeme ale změřit jejich superpozici X_0 . Pro získání výchylky X_0 nám poslouží čidlo měřící změnu polohy. Samotná výchylka aktuátoru ale není dostatečnou informací k úspěšnému návrhu řízení pro soustavu. Další informace, kterou budeme potřebovat k úspěšnému řízení systému, je výchylka prvního vozíku. Na rozhraní mezi prvním vozíkem a aktuátorem totiž dochází k zanedbatelnému dopravnímu zpoždění. Můžeme tedy získat informaci potřebnou pro řízení téměř ihned po vybuzení systému vstupem. Výchylku vozíku získáme stejným způsobem jako výchylku aktuátoru, použijeme čidlo snímající změnu polohy.

$$X_0 = A_0 + B_0 \quad (32)$$

Nejdříve si opišeme vzorec pro výpočet výchylky prvního vozíku a poté použijeme vztahy (21) pro přepsání do vhodnějšího tvaru

$$X_1 = A_1 + B_1 = G A_0 + G^{-1} B_0 \quad (33)$$

Vynásobením rovnice (33) hodnotou G se zbavíme členu G^{-1} a dostaneme

$$G X_1 = G^2 A_0 + B_0 \quad (34)$$

Ze vztahu (34) si vyjádříme B_0 , dosadíme do (32) a vyjádříme si A_0

$$B_0 = G X_1 - G^2 A_0 = G (X_1 - G A_0) \quad (35)$$

$$X_0 = A_0 + G (X_1 - G A_0) \quad (36)$$

$$A_0 = X_0 - G (X_1 - G A_0) \quad (37)$$

Předchozí úvahou jsme dokázali, že ke správnému určení vln A_0 a B_0 nám stačí změřit pouze dvě hodnoty. První potřebná hodnota je výchylka aktuátoru X_0 . Druhou informací potřebnou k identifikaci obou vln je výchylka prvního vozíku X_1 . Znalost těchto dvou výchylek můžeme využít ke spočítání hodnot A_0 a B_0 pomocí vztahů (35) a (37).

Nyní máme téměř všechny potřebné údaje, které jsou nezbytné k úspěšnému řízení soustavy. Poslední otázkou, kterou musíme vyřešit, zůstává zákon řízení. K navržení předpisu pro regulátor je potřeba se zamyslet nad některými vlastnostmi řízeného systému. Budeme uvažovat ideální případ, kdy v systému nebude přítomné žádné tlumení. Bez přítomnosti správně fungujícího regulátoru bude soustava velmi dlouho kmitat, protože součástí soustavy není žádný tlumič. Z této vlastnosti systému můžeme vyčíst, že soustava musí být přesně na požadovaném místě po uvedení do klidu pomocí regulátoru. Pokud by soustava nebyla na požadovaném místě po skončení pohlcování vibrací regulátorem a na vstup by se přivedl signál, který by měl odchylku opravit, došlo by k dalšímu vybuzení systému.

Další vlastnost, kterou se regulátor musí řídit, lze odvodit z chování systému reprezentovaného pomocí schématu (Obr. 3). Zaměříme se na případ, kdy na vstup soustavy přivedeme přímo požadovanou odchylku. Předpokládáme tedy, že $W = A_0$. Vlna A_0 putuje systémem až na jeho konec, kde se odrazí. Při odrazu dochází ke změně směru šíření. Vlna se šíří zpět k aktuátoru, až se z ní po průchodu prvním vozíkem stává B_0 . Po zklidnění systému, které nastane díky aktivnímu pohlcování vibrací se však hodnota B_0 ustálí na stejné hodnotě, jakou měla A_0 ve chvíli vybuzení systému.

Tento fakt vyplývá z charakteristických vlastností (30) přenosové funkce G_a (13). První vlastnost nám říká, že se vlna šířící systémem nejdříve pohltí a poté přenese na následující vozík bez jakéhokoliv tlumení nebo vlivu na ustálený stav. Druhá vlastnost nám říká, že zesílení v ustáleném stavu má hodnotu 1. Vlna proto v průběhu putování

nemění svoji maximální amplitudu.

Pokud bychom hodnoty A_0 a B_0 dosadili do vztahu pro výpočet výchylky libovolného vozíku (16), dostaneme $X_i = A_i + B_i = 2W$. Tento výsledek je ale v rozporu s naší požadovanou výchylkou, která je poloviční. Problém lze vyřešit přivedením pouze poloviční hodnoty požadované výchylky.

Z předchozí úvahy dostáváme

$$A_i = B_i = \frac{1}{2} W \quad (38)$$

$$X_i = A_i + B_i = W \quad (39)$$

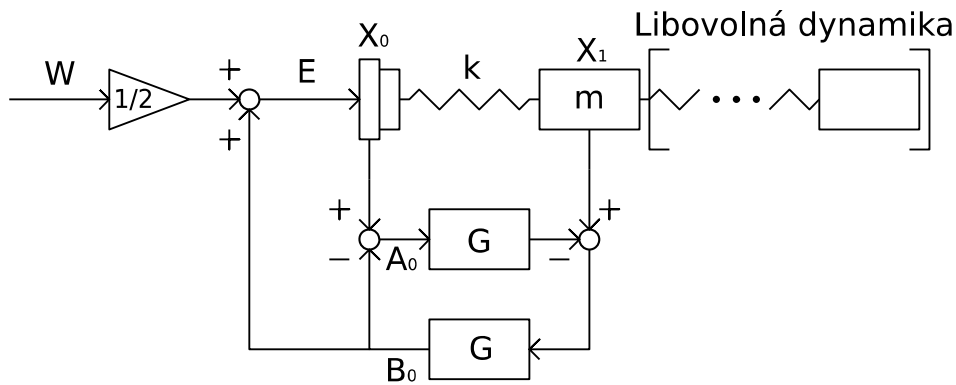
Zaměříme se na model systému (Obr. 4). Budeme uvažovat vybuzení systému libovolným vstupním signálem. Jeho konkrétní podoba není důležitá. Vybuzením vzniká vlna A_0 , která se šíří systémem, dokud se nevrátí jako odražená vlna B_0 . Protože se aktuátor nehýbe a nedochází k pohlcování vracející se vlny, dochází k opětovnému odražení B_0 zpět do soustavy. V systému není přítomné žádné tlumení, vlny se tedy budou šířit donekonečna tam a zpět.

Z předchozí úvahy plyne, že správný pohyb aktuátoru je důležitý jak pro pohlcení vracející se vlny, tak pro dosažení požadované výchylky. Pohyb aktuátoru nemusí být nutně harmonický (záleží na charakteru vstupního signálu). Pro správné řízení musí být známa současná hodnota B_0 . Tato hodnota je zpracována a následně předána aktuátoru, který na ni reaguje vhodným pohybem. Pohyb levé hranice způsobí pohlcení vlny B_0 , která by se jinak odrazila zpět do systému. Nedochází tak k nekonečnému šíření vlny jako v případě nepohyblivé levé hranice. Aktuátor v průběhu pohlcování vlny B_0 průběžně mění svoji polohu v závislosti na hodnotě B_0 , dochází tak k postupnému pohlcení vibrací. Na konci procesu pohlcování se vlna A_0 ustálí na konečné hodnotě, projde systémem a vrátí se jako B_0 . Systém je v tuto chvíli v klidu, je ale vychýlen o požadovanou hodnotu W .

Z chování vln při průchodu systémem jsme schopni odvodit zákon řízení pro hledaný regulátor. V ideálním případě odpovídá vstup systému počáteční hodnotě vlny A_0 . K této hodnotě se přičítá aktuální hodnota vlny B_0 . Vstup regulátoru je tedy roven součtu poloviny požadované hodnoty a vlny B_0 . Dostáváme následující vztah pro zákon řízení.

$$C = \frac{1}{2} W + B_0 \quad (40)$$

Nyní máme všechny potřebné údaje, které potřebujeme k navržení funkční zpětnovazební smyčky. Příklad takovéto zpětnovazební smyčky, která využívá principy vlnového řízení ke stabilizaci soustavy je na (Obr. 5)



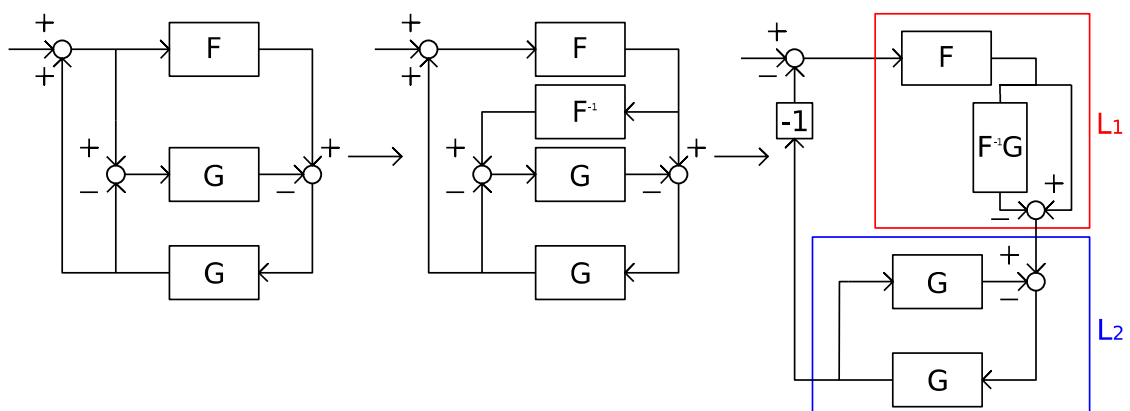
(Obr. 5) Schéma zpětnovazebního obvodu využívajícího princip vlnového řízení

Ideální regulátor je reprezentován sčítacím uzlem. V uzlu se k poloviční hodnotě požadované výchylky přidá aktuální hodnota vracející se vlny B_0 . Pro správnou funkci celé smyčky je potřeba spočítat přechodovou funkci mezi aktuátorem a prvním vozíkem, která je však odlišná pro různé počty vozíků. Naměřené hodnoty výchylek X_0 a X_1 putují zpětnou vazbou přes bloky G zpět do regulátoru. Bloky G obsahují aproximaci vlnové přenosové funkce (31).

4.3 Stabilita zpětnovazební smyčky

Prozatím jsme uvažovali o modelu, který obsahuje pouze ideální části. Reálný systém nikdy nebude přesně odpovídat našemu modelu. Jedním z důvodů jsou například nedokonalé součástky, které nebudou splňovat přesné parametry předpokládané v modelu. Na skutečnou soustavu mohou působit nepředvídatelné poruchy, které v modelu neuvažujeme.

Z těchto důvodů je potřeba prozkoumat stabilitu systému. Schéma zpětnovazebního obvodu využívajícího vlnové řízení (Obr. 5) nejprve pomocí algebry blokových schémat převedeme na tvar, ze kterého snadno odvodíme přenos otevřené zpětnovazební smyčky.



(Obr. 6) Převod z vlnového řízení na zpětnovazební smyčku

Přímo určit přenos otevřené zpětnovazební smyčky v modelu z (Obr. 5) je poměrně složité. Tento model proto nejprve převedeme na jeho ekvivalent, ve kterém poté snadno určíme hledaný přenos. Na (Obr. 6) je znázorněný postup přeuspořádání přenosových bloků pomocí algebry blokových schémat.

Po uspořádání nám ve schématu vznikají dva samostatné sériové přenosy L_1 a L_2 , jejichž hodnoty snadno spočítáme podle následujícího postupu. Celkový přenos otevřené zpětnovazební smyčky poté získáme jako součin těchto dílčích přenosů.

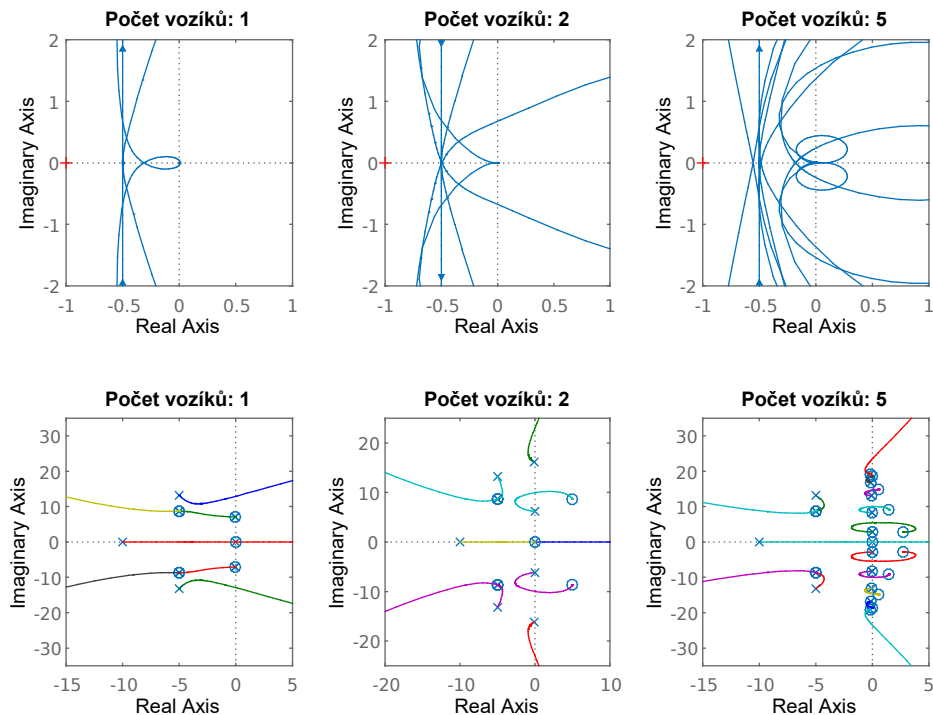
$$L_1 = F - F(F^{-1}G) = F - G$$

$$L_2 = \frac{G}{1 - G^2}$$

$$L = -(L_1 L_2) = \frac{G}{1 - G^2}(G - F) \quad (41)$$

Nyní známe přenos otevřené regulační smyčky, můžeme proto prozkoumat stabilitu řízeného systému pomocí Nyquistova kritéria. V poslední kapitole budeme zkoumat soustavy, které již nebudou obecné, ale budou se skládat z konečného počtu vozíků. Pro analýzu stability uzavřené smyčky a odezvy řízených systémů si zvolíme jeden, dva a pět vozíků.

Při aproximaci charakteristické přenosové funkce G_a (13) přenosovou funkcí G (31) a následné konverzi na zpětnovazební řízení může dojít k destabilizaci celé uzavřené smyčky vlivem přílišného tlumení. Pokusíme se tedy prozkoumat hodnoty tlumení, pro které se jednotlivé soustavy stávají nestabilní.



(Obr. 7) Nyquistovy frekvenční charakteristiky a metoda root locus

Na (Obr. 7) vidíme Nyquistovy frekvenční charakteristiky společně s polohami pólů, které jsme vytvořili pomocí metody geometrického místa kořenů. Při pohledu na polohy kořenů je patrné, že se všechny uzavřené smyčky mohou stát nestabilními pro určité hodnoty zesílení. Soustava s jedním vozíkem je nestabilní dokonce i pokud hodnota koeficientu tlumení nabývá hodnoty 0. V případě jednoho vozíku proto snížíme tuhost pružiny na polovinu ($k=50 \text{ N m}^{-1}$). U všech systémů budeme zpočátku uvažovat koeficient tlumení $b=0.001$ a budeme ho postupně zvyšovat, dokud nenalezneme mez, pro kterou se jednotlivé soustavy stávají nestabilní. Následují hodnoty bezpečnosti v zesílení a ve fázi pro počáteční konfigurace ($k=100 \text{ N m}^{-1}$ (50), $b=0.001$, $m=1$)

Systém s jedním vozíkem - $G_m=9.86 \text{ dB}$, $P_m=56.8^\circ$

Systém se dvěma vozíky - $G_m=6.02 \text{ dB}$, $P_m=45.1^\circ$

Systém s pěti vozíky - $G_m=5.07 \text{ dB}$, $P_m=38.3^\circ$

Nejlepších hodnot v obou bezpečnostních indexech dosahuje systém s jedním vozíkem, naopak nejmenší hodnoty nalezneme u soustavy s pěti vozíky. Pro zvyšující se počet vozíků pozorujeme pokles bezpečnostních indexů v zesílení i ve fázi. Obvykle požadujeme hodnoty $G_m=6 \text{ dB}$, $P_m=30^\circ$. První dvě soustavy požadavky splňují. Systém s pěti vozíky má dostatečnou bezpečnost ve fázi, ale už nedosahuje potřebné hodnoty u bezpečnosti v zesílení.

Nyní se podíváme na vliv hodnoty koeficientu tlumení b . Následující tabulka obsahuje hodnoty bezpečnosti v zesílení a ve fázi pro různé hodnoty b

N = 1		
b	Gm(dB)	Pm(°)
0.001	9,86	56,8
0.01	9,88	57
0.1	10,1	59
0.29	10,6	63,4

N = 2		
b	Gm(dB)	Pm(°)
0.001	6,02	45,1
0.01	6,03	46,1
0.1	6,11	52,4
1	6,93	63,2
1,99	7,87	77,9

N = 5		
b	Gm(dB)	Pm(°)
0.001	5,07	38,3
0.01	5,07	46,9
0.1	5,11	50,2
1	5,52	53,7
6,61	8,02	81,6

(Tab. 1) Vliv hodnoty koeficientu tlumení na bezpečnostní indexy

(Tab. 1) obsahuje změnu bezpečnosti v zesílení a ve fázi pro měnící se koeficient tlumení. Počáteční hodnota je tak zanedbatelná, že v soustavě v tu chvíli není prakticky

žádné tlumení, nemusíme proto zkoumat ještě nižší hodnoty, protože na indexy bezpečnosti to již nemá žádný vliv. U všech systémů je vidět, že koeficient tlumení se stoupající hodnotou vylepšuje jak bezpečnost v zesílení, tak bezpečnost ve fázi, až do kritické meze, kdy se systém stává nestabilní. Tato mez je u každého systému uvedena jako poslední.

Za zmínění také stojí vliv ostatních parametrů soustavy na hodnoty indexů bezpečnosti. Zafixujeme hodnotu a a hmotnosti m a budeme měnit hodnotu tuhosti k v rozumném rozmezí kolem původní hodnoty.

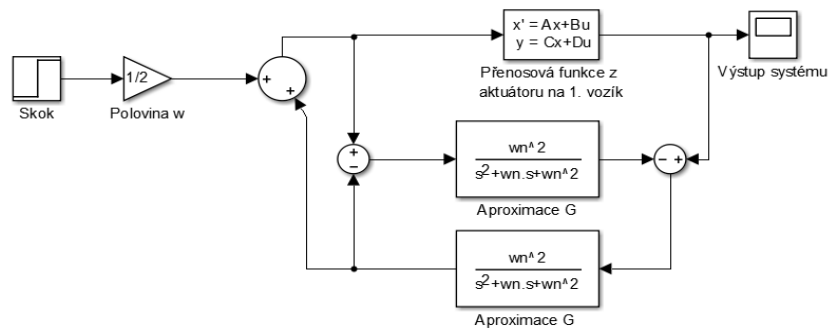
Při změně tuhosti pružiny dochází ke zlepšení obou indexů, pokud tuhost zmenšíme. Při zvětšení tohoto parametru klesají hodnoty bezpečnosti v zesílení i ve fázi.

V případě zvětšující se hmotnosti vozíků dochází k nárůstu obou bezpečnostních indexů. Snížení hmotnosti vede k poklesu hodnoty bezpečnosti v zesílení i ve fázi.

Z pohledu robustnosti vůči neurčitosti v zesílení i ve fázi jsme na počátku jistě ne zvolili nejlepší kombinaci parametrů systému. Bezpochyby bychom dokázali najít soustavu s lepší konfigurací, to je však u reálného systému téměř nemožné.

5 Simulace konkrétních systémů

V této kapitole upustíme od obecných předpisů a budeme se zabývat simulací konkrétních systémů. Jako budící signál budeme používat zejména skok a rampu. Pro simulace můžeme použít téměř jakýkoliv signál. Jediná podmínka, jejíž splnění požadujeme, je ustálení požadované výchylky na konstantní hodnotě. Pokud nedojde ke splnění podmínky, aktuátor bude stále vysílat další vibrace do systému, a nikdy tak nedojde k jejich úplné absorpci. Nejprve se zaměříme na nejjednodušší možný systém, který se skládá pouze z aktuátoru a jediného vozíku. Schéma systému popisuje následující model v systému Simulink

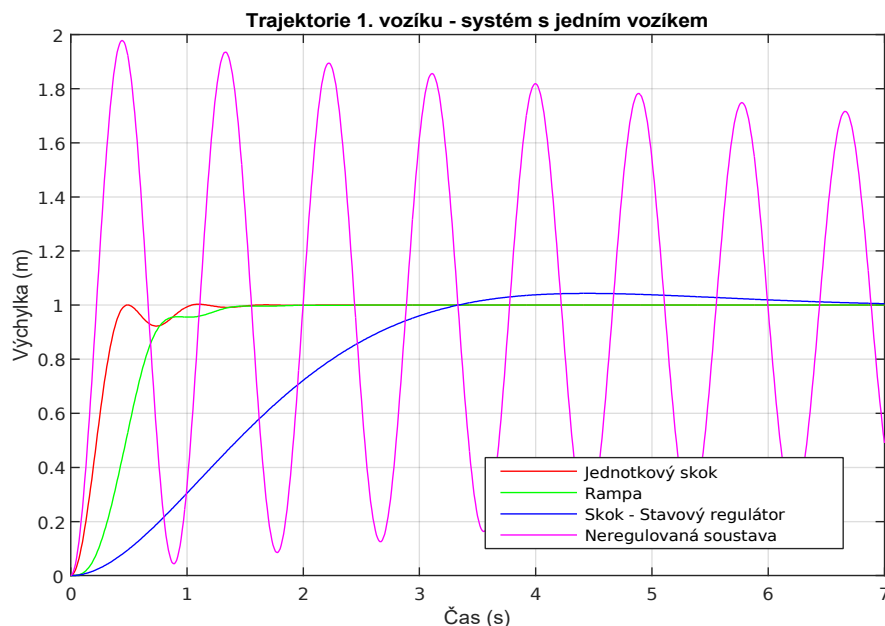


(Obr. 6) Schéma simulované soustavy

Stejné schéma použijeme i pro řízení ostatních soustav. Jediný rozdíl bude v přenosové funkci, která bude uložena v bloku State-Space.

Již dříve jsme si uvedli přenosovou funkci (26), která reprezentuje přenos signálu z aktuátoru na vozík. Model tedy sestavíme pomocí (Obr. 5) a za přenosovou funkci

$$\frac{X_1}{X_0} \text{ dosadíme hodnotu (26)}$$



(Obr. 7) Odezva jednohmotového systému na různé signály

(Obr. 7) popisuje chování jednoduchého systému sestávajícího z aktuátoru a jednoho vozíku. Systém byl z počátečního ustáleného stavu vybuzen dvěma různými signály. Nejprve jsme použili jednotkový skok. Z charakteru odezvy na jednotkový skok je dobře patrné, že pracujeme se systémem druhého řádu. Trajektorie obsahuje dobře tlumené kmity, neobsahuje ale sekundární kmity, které by indikovaly systém vyššího řádu. K utlumení soustavy dochází v čase kolem 2 sekund. V případě druhého vstupu, jímž je rampa se sklonem $2.5 m \cdot s^{-1}$, dochází k pomalejšímu náběhu na požadovanou hodnotu. Za zmínění stojí velikost překmitu. V případě vybuzení rampou je téměř zanedbatelný ve srovnání s případem, kdy systém vybudí jednotkový skok. Přestože má rampa podstatně pomalejší náběh na požadovanou hodnotu než jednotkový skok, dochází k ustálení soustavy přibližně po 2 sekundách, tedy po stejné době jako při vybuzení systému skokem. Soustava řízená stavovým regulátorem má velice pomalý náběh a překmit, který tvoří asi 10% požadované hodnoty. Tento systém se ustálí v čase kolem 7 sekund. Poslední křivka ukazuje chování systému, který je vybuzený jednotkovým skokem, ale neobsahuje zapojenou zpětnou vazbu. Soustava se sama ustálí za dobu kolem 100 sekund, protože uvažujeme poměrně malé tlumení.

U soustav vyšších řádů dochází u posledních vozíku k podobným trajektoriím při použití rampy i skoku jako budících signálů. Z tohoto důvodu se zaměříme na chování prvního vozíku. Pokud u těchto systémů prozkoumáme trajektorie prvního vozíku po vybuzení jednotkovým skokem a rampou, dojdeme k závěru, že vybuzení rampou vyvolává podstatně menší vibrace. V následujících simulacích je soustava buzena rampou se sklonem, který zajistí rozumný náběh na požadovanou hodnotu, nevyvolá však takové množství vibrací jako v případě jednotkového skoku. Odezvu také porovnáme s výstupem soustavy řízené stavovým regulátorem.

Nyní se budeme věnovat systému, který neobsahuje jeden, ale již dva vozíky. V tomto případě dochází ke komplikaci v podobě změny přenosové funkce $\frac{X_1}{X_0}$. Druhý vozík mění dynamiku celého systému, má tedy i vliv na podobu přenosu signálu z aktuátoru na první vozík. Využitím vztahů (24) a (25) si vyjádříme podobu výchylky X_0 a X_1 v systému se dvěma vozíky ($n = 2$).

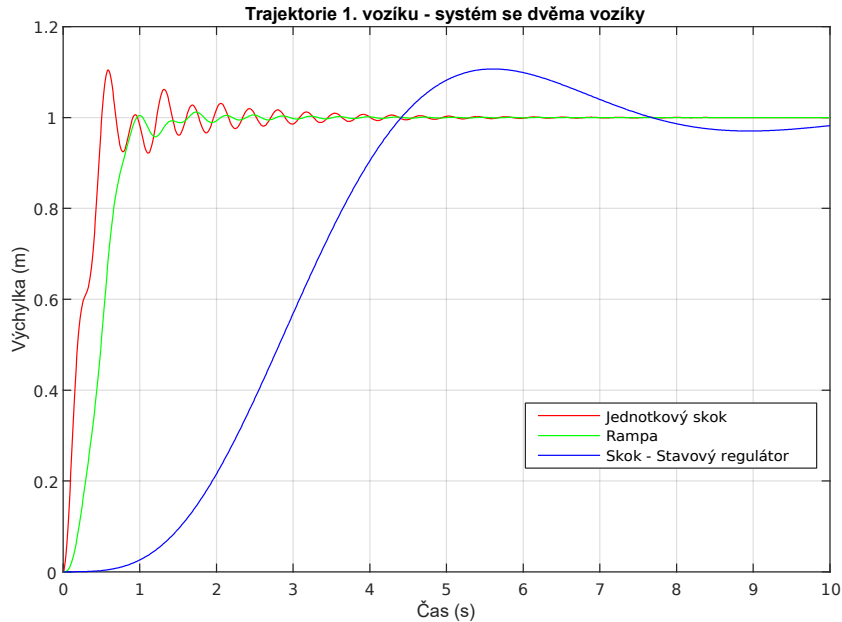
$$X_0 = A_0 + B_0 = A_0 + G^5 A_0$$

$$X_1 = A_1 + B_1 = G A_0 + G^4 A_0 \quad (42)$$

Přenos z aktuátoru na první vozík získáme jako podíl $\frac{X_1}{X_0}$, použitím pravidla (26) výsledek zjednodušíme a nakonec dosadíme přenosovou funkci G (11). Dostaneme následující hodnotu přenosové funkce mezi aktuátorem a prvním vozíkem

$$F_{1,0} = \frac{0.1 p^3 + 100 p^2 + 20 p + 10000}{p^4 + 0.3 p^3 + 300 p^2 + 20 p + 10000} \quad (43)$$

Pro simulaci dvoumotového systému použijeme stejné schéma (Obr. 5) jako v případě jednohmotové soustavy. Jediný rozdíl bude v podobě přenosové funkce mezi aktuátorem a prvním vozíkem, která v tomto případě bude mít hodnotu (43)



(Obr. 8) Odezva systému se dvěma vozíky na různé budící signály

U systému (Obr. 8) se dvěma vozíky nám vzrůstá doba potřebná k ustálení systému. V případě vybuzení pomocí jednotkového skoku trvá zhruba 6 sekund než se výchylka pohybuje v přijatelných mezích. V první periodě odezvy můžeme spatřit náznak sekundárního kmitu, který však velmi rychle vymizí, v dalších periodách již není patrný. I v případě vybuzení rampou se sklonem 3 m s^{-1} je doba ustálení delší než v případě systému s jedním vozíkem. V této situaci má doba ustálení hodnotu kolem 4 sekund. Doby ustálení se liší na rozdíl od předchozího případu, kdy byly téměř shodné pro oba vstupní signály. Soustava řízená stavovým regulátorem se v této situaci ustaluje v čase kolem 13 sekund.

Poslední simulaci provedeme na systému, který se bude skládat z pěti vozíků. Jedná se o systém 10. řádu, přenosová funkce z aktuátoru na první vozík tedy bude také 10. řádu. Stejně jako v předchozím případě si vyjádříme výchylky aktuátoru a prvního vozíku pomocí vztahů (24) a (25). Pro soustavu s pěti vozíky dostáváme

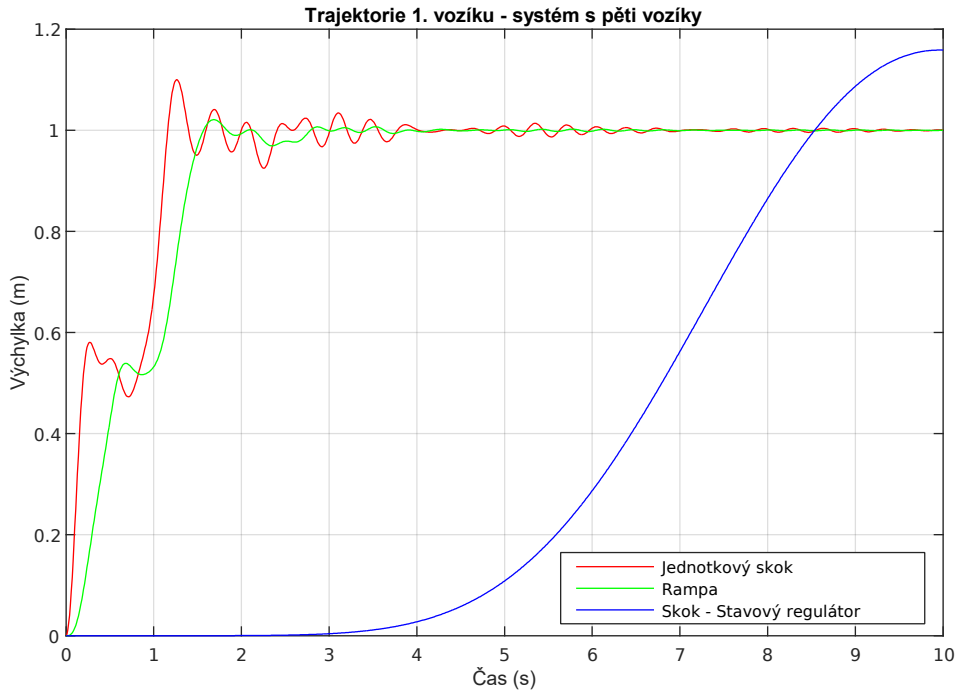
$$X_0 = A_0 + B_0 = A_0 + G^{11} A_0$$

$$X_1 = A_1 + B_1 = G A_0 + G^{10} A_0 \quad (44)$$

Použijeme dříve zmíněný postup pro získání přenosové funkce

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{G A_0 (1 + G^9)}{A_0 (1 + G^{11})} = \frac{G(1 - G + G^2 - \dots + G^8)}{1 - G + G^2 - \dots + G^{10}} \quad (45)$$

Přesnou podobu přenosové funkce (45) si nebudeme uvádět, je poměrně složitá (10. řád) a pro naše potřeby zde nemusí být zmíněna.



(Obr. 9) Odezva systému s pěti vozíky na různé budící signály

V případě vybuzení rampou se sklonem 2.5 m s^{-1} nedochází k vyvolání podstatných vibrací, regulátor tedy všechny reziduální vibrace vyruší kolem 4 sekund. Pokud ale soustavu vybudíme jednotkovým skokem, vyvolané oscilace jsou mnohem větší a jejich pohlcení trvá regulátoru mnohem déle, okolo 10 sekund. Při dalším zmenšení koeficientu tlumení narůstá doba potřebná k pohlcení reziduálních vibrací.

Pro větší počet vozíků dochází při malém tlumení ke stále větší době potřebné k ustálení soustavy. Pro velmi malé hodnoty tlumení se tato doba blíží době ustálení systému, který je řízený stavovým regulátorem. Rozdíl se snižuje se zvyšujícím se počtem vozíků, lze proto předpokládat, že i když se pro soustavy nízkého řádu stavový regulátor nevyrovná vlnovému řízení, pro systémy vyšších řádu by mohl být lepší volbou.

Při návrhu stavového regulátoru vysokého řádu však nastává problém v podobě výpočtu inverzní matice pro matici, která je téměř singulární. Již malé nepřesnosti v matici k mohou vést k destabilizaci celé smyčky.

6 Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s principem vlnového řízení vícehmotových pružných systémů a posléze navrhnout regulátor založený na tomto principu. Nejprve jsme odvodili obecný stavový popis pro zkoumaný systém na základě pohybových rovnic nekonečného řetězce. Analýzou nekonečného řetězce jsme získali předpis pro charakteristickou přenosovou funkci tohoto řetězce, která dokonale popisuje soustavu. Ukázali jsme si, jak sestavit vlnový model nekonečného systému pomocí charakteristické přenosové funkce, která je neceločíselného řádu.

Pomocí vztahů v odvozených z modelu jsme získali racionální přenos z aktuátoru na první vozík v řetězci. Tento vztah se ukázal jako velmi důležitý při návrhu vlnového řízení. Uvedli jsme si aproximaci charakteristické přenosové funkce, která je vhodná pro řízení v reálném čase z důvodu výpočetní nenáročnosti její hodnoty. S využitím některých znalostí o této aproximaci jsme odvodili požadavky na zapojení zpětnovazební smyčky a také řídicí zákon pro vlnový regulátor.

Při konverzi z vlnového na zpětnovazební řízení může vlivem nepřesnosti v aproximaci přenosové funkce dojít k destabilizaci smyčky vlivem tlumení. Proto jsme prověřili stabilitu zpětnovazebního řízení pro různé hodnoty tlumení a identifikovali meze, kdy se soustavy stávají nestabilními.

Nakonec jsme sestavili smyčku založenou na řízení pomocí vlnového principu a ověřili funkčnost regulátoru řídit soustavy s konkrétními počty vozíků. Řízení jsme porovnali s řízením soustavy pomocí stavového regulátoru navrženého podle Butterworthova filtru. Ve všech případech se vlnové řízení ukázalo být účinnější než stavový regulátor. Pro systémy vyšších řádu se však rozdíl zmenšuje a je tak možné, že stavový regulátor je u složitějších soustav lepší volbou.

Do budoucna by se problém stability mohl řešit například nalezením lepší aproximace charakteristické přenosové funkce, díky které by soustava byla robustnější vůči vlivu tlumení. Za zmínku stojí také implementace jiného regulátoru než stavového nebo návrh stavového regulátoru pomocí jiného kritéria.

Reference

- [1] Štecha, J. (2003). *Teorie dynamických systémů*. Praha: Vydavatelství ČVUT
- [2] Melichar, J., & Goubey, M. (2017). *Lineární systémy I*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni
- [3] O'Connor, W. J. (2007) *Wave-based analysis and control of lump-modelled flexible robots*. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/3450391>
- [4] Schlegel, M. (2017). *Tlumení vibrací konečně rozměrných řetězců metodou vlnového řízení*