

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Plzeň 2019

Tomáš Volín



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

STATICKÉ A DYNAMICKÉ MODELY TŘENÍ
V SIMULACÍCH POHYBU MECHANICKÝCH SOUSTAV

Tomáš VOLÍN

Prohlášení

Předkládám k posouzení tuto diplomovou práci. Prohlašuji, že jsem ji vypracoval samostatně a využil jsem jen uvedených pramenů a literatury.

V Plzni dne 31. května 2019

Tomáš Volín

Poděkování

Rád bych poděkoval panu Ing. Štěpánu Dykovi, Ph.D., vedoucímu mé bakalářské práce, za jeho cenné rady, trpělivost a čas, který mi při vedení práce a během studia věnoval. Dále bych chtěl poděkovat své rodině za podporu během studia.

Tomáš Volín

Obsah

1	Úvod	8
1.1	Cíle práce	9
2	Vybrané modely tření	10
2.1	Statické modely tření	10
2.1.1	Coulombův model tření	11
2.1.2	Hladký Coulombův model tření	11
2.1.3	Rozšířený hladký Coulombův model	12
2.1.4	Karnoppův model	12
2.2	Dynamické modely tření	13
2.2.1	Dahlův model	13
2.2.2	LuGre model	14
2.2.3	Elasto-plastický model	14
3	Testovací modely	16
3.1	Hmotný bod kmitající na pásu	16
3.2	Stop-start model	19
3.3	Hmotný bod tažený na pružině po drsném povrchu	21
4	Modelování interakce třecích členů olopatkovaných disků	23
4.1	Model trojice lopatek se třecími členy buzený kvazistatickou silou	23
4.2	Model trojice lopatek se třecími členy buzený harmonickou silou	26
4.3	Kvalitativní analýza odezvy trojice lopatek na harmonické buzení	27
4.3.1	Bifurkační diagramy	27
4.3.2	Fázové trajektorie	31
5	Závěr	34
	Literatura	35
	Seznam obrázků	36
	Seznam tabulek	37

Abstrakt

Tato práce je zaměřena na statické a dynamické modely třecích sil a na implementaci těchto modelů v prostředí MATLAB. Nejprve jsou modely třecích sil otestovány na zkušebních příkladech (samobuzený kmitající hmotný bod na pásu, hmotný bod na drsném povrchu buzený periodickou silou a hmotný bod tažený po drsném povrchu konstantní rychlostí) a následně jsou aplikovány na model kmitání trojice lopatek provázaných třecími členy. Je zde analyzována odezva tohoto systému při použití různých modelů třecích sil a druhů buzení. Pozornost je věnována posouzení vhodnosti použití jednotlivých statických a dynamických modelů třecích sil. Výsledky jsou vyhodnoceny s ohledem na kvalitativní aspekty odezvy, výpočetní čas a vliv řešičů obyčejných diferenciálních rovnic.

Klíčová slova: třecí síla, model trojice lopatek se třecími členy, Coulombův model, Karnoppův model, Dahlův model, LuGre model, elasto-plastický model.

Abstract

This work is focused on the static and dynamic models of friction forces and their implementation in MATLAB. First of all, these models are tested on benchmark models (self excited point mass on a belt, a point mass on a rough surface excited by periodic force and a point mass dragged over rough surface with constant speed) and then they are applied on the model of tripple blades with friction dampers. The response is analyzed while using various friction models and different ways of excitation. The attention is focused on the evaluation of the suitability of the static and dynamic friction force models. The results are evaluated with regard on qualitative aspect of the response, computing time and the influence of the ordinary differential equations solver.

Key words: friction force, model of tripple blades with friction dampers, Coulomb's model, Karnopp's model, LuGre model, Dahl's model, elasto-plastic model.

1 Úvod

Tření¹ je jev doprovázející pohyb mechanických systémů, kde dochází k přímému kontaktu ploch. V mnohých případech je tření nežádoucí, neboť způsobuje únavu a poškození materiálu doprovázené generováním vysokých teplot. Naopak lze tření využít pro správnou funkci řady systémů. Jako příklad lze uvést mechanické brzdy automobilů, které vlivem tření zastaví pohyb disků kol. Dalším využitím je třecí spojka, v níž tření umožňuje přenést kroutící moment od motoru na diferenciál. Jiným příkladem pak mohou být spojovací prvky typu hřeb, kdy tření mezi hřebem a spojenými částmi udržuje soustavu pohromadě.

Při řešení problémů zahrnujících tření, ať již v negativním nebo pozitivním smyslu, je třeba zvolit vhodný matematický model tření. Tření jako takové je velmi komplexní jev, který byl zkoumán po staletí mnohými vědci. Jedna z prvních prací pojednávající o tření se objevila v šestnáctém století na základě studií Leonarda da Vinci, který konstatoval, že třecí síla je přímo úměrná normálové síle, ale působí v opačném směru než relativní rychlost mezi dvěma tělesy. Později se k da Vincimu připojil Amontons a na jejich práci navázal Coulomb, který ji rozšířil o poznatek, že třecí síla není závislá na velikosti relativní rychlosti a sestavil první matematický model. Zavedl pouze jeden parametr, kterým je koeficient tření. Coulombův model lze považovat za základ modernějších modelů. Nedokáže však simulovat mnoho dílčích jevů. V okolí nulové relativní rychlosti je nespojitý, což způsobuje problémy s výpočetní stabilitou a časovou náročností výpočtů.

Další výzkum tření naznačil, že na těleso v klidu působí větší třecí síla než na těleso v pohybu. Zavádí se tak dva různé koeficienty tření. Jeden pro případ, kdy je těleso v klidu, reprezentující statickou třecí sílu a druhý, kdy je těleso v pohybu, reprezentující dynamickou (kinetickou) třecí sílu. Tento poznatek vede k fenoménu ulpívání (stiction), který je charakteristický nárůstem třecí síly při nulové relativní rychlosti mezi kontaktními plochami. Ulpívání brání tělesu v pohybu, dokud není vyvinuta dostatečná síla, která překoná statickou složku třecí síly. Tento jev znesnadňuje modelování a simulace mechanických systémů. Navíc je třeba zvolit vhodný model, který dokáže jednak simulovat ulpívání, ale také přechod mezi statickou a dynamickou složkou tření.

Tímto přechodem se zabýval Stribeck, který pro malé rychlosti experimentálně dokázal, že třecí síla klesá se zvyšující se relativní rychlostí. Tento spojitý pokles třecí síly si protiče s nespojitostí třecí charakteristiky při použití pouhých dvou koeficientů. Jev je pak popsán tzv. Stribeckovou křivkou. Přechodem mezi koeficienty se dále

¹Inspirace k úvodu byla čerpána z [6].

zabýval Rabinowicz, který experimentálně ukázal, že tření není pouze funkcí relativní rychlosti, ale také výchylky. Bylo dokázáno, že největších hodnot třecí síla dosahuje pro malé výchylky. Dále bylo experimentálně dokázáno, že pokud se aplikuje síla na dvě tělesa, která se dotýkají, dojde vždy k výchylce vlivem povrchové elasticity. Tento jev malých posuvů v mezi elastických deformací, kdy působící síla je menší než síla potřebná k pohybu tělesa, se nazývá předskluzová výchylka (pre-sliding displacement).

Vysvětlení tohoto jevu spočívá v elastické deformaci drsnosti kontaktních povrchů. Teorie adheze říká, že za přítomnosti normálového zatížení má drsný povrch tendenci přilnout. Při aplikování síly k vynucení pohybu, má toto pouto snahu se rozpojit. Než se tak stane, drsnost povrchu by se nejprve měla elasticky a pak i plasticky deformovat, což způsobí relativní vychýlení kontaktních povrchů. Jakmile se spojení mezi drsnostmi přeruší, dojde posunu mezi plochami.

1.1 Cíle práce

Cílem této bakalářské práce je analyzovat různé statické a dynamické modely třecích sil na testovacích modelech a aplikovat je na model třecích členů olopatkovaného disku. Na základě odezvy pak bude porovnána vhodnost použití statických a dynamických modelů třecích sil. Cíle lze formulovat do následujících kroků:

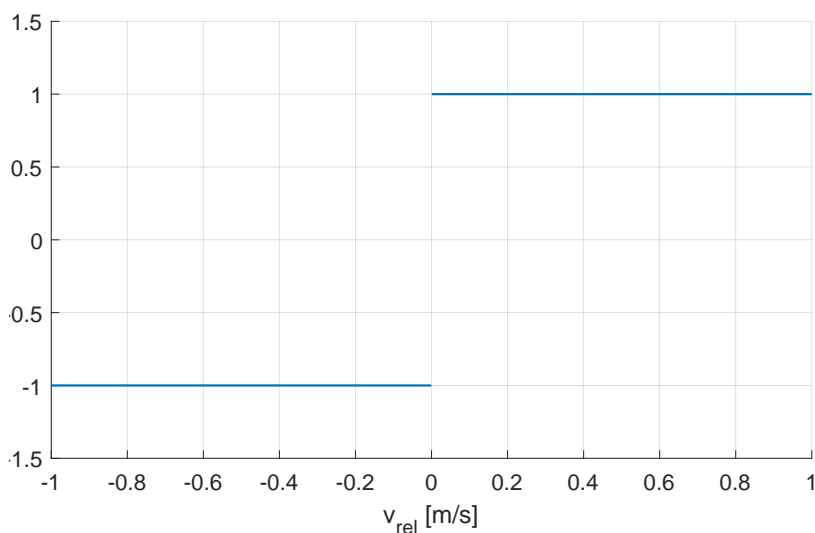
- úvod a analýza současného stavu problematiky,
- implementace testovacích úloh a kvalitativní porovnání výsledků,
- aplikace na kmitání trojice lopatek se třecími členy,
- analýza výsledků s ohledem na výpočetní čas, vliv řešičů a kvalitativní aspekty odezvy,
- závěr, celkové zhodnocení práce.

2 Vybrané modely tření

Tření je komplexní jev, hrající významnou roli ve studiu mechanických systémů. V této kapitole budou uvedeny základní statické a dynamické modely třecí síly. Prvotní podklady pro zkoumání byly čerpány ze článku [1], kde byly vybrány čtyři statické a tři dynamické modely tření a hodnoty parametrů. Tyto modely byly mezi sebou porovnávány s ohledem na přesnost výpočtu, citlivost na volbu řešiče a výpočetní náročnost. V této kapitole budou stručně popsány.

2.1 Statické modely tření

Statické modely tření vyjadřují závislost třecí síly jako funkci relativní rychlosti v kontaktním bodě. Popisují vliv třecích sil v mechanických vazbách na makroskopické úrovni, přičemž většina nezahrnuje ulpívání (stiction). Ulpívání je vlastnost třecí síly, která brání v relativnímu pohybu hmoty a teprve po vyvinutí dostatečné síly, kdy dojde k překonání statické třecí síly, dojde k relativnímu pohybu hmoty po povrchu nebo více hmot vůči sobě.



Obr. 2.1: Coulombův model: závislost třecí síly na relativní rychlosti

2.1.1 Coulombův model tření

Coulombův model je základním modelem tření. Tento model je silným zjednodušením skutečných působících třecích sil, nicméně v řadě případů poskytuje dostatečně přesnou aproximaci třecích sil. Třecí síla je v tomto případě dána jako

$$F = F_d \frac{v}{|v|}, \quad (2.1)$$

$$F_d = \mu_d F_n, \quad (2.2)$$

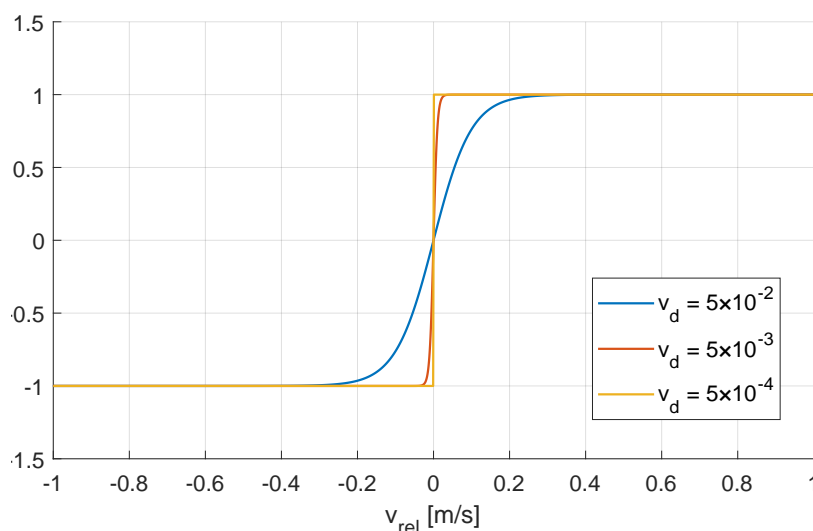
kde F_d je dynamická složka třecí síly, μ_d je dynamický třecí koeficient, F_n je normálová síla a v je relativní rychlost mezi tělesy. Na obr. 2.1 je vykreslena třecí síla podle Coulombova modelu. Dynamická složka třecí síly byla zvolena pro vykreslení $F_d = 1$ [N].

2.1.2 Hladký Coulombův model tření

Další možností popisu třecí síly je aproximace Coulombova modelu 2.1 hladkou funkcí. Existuje více způsobů, jak odstranit nespojitost funkce síly, a sice nahrazení lineární, exponenciální nebo trigonometrickou funkcí. V tomto případě byla použita funkce hyperbolického tangentu

$$F = F_d \tanh\left(\frac{v}{v_d}\right), \quad (2.3)$$

kde v_d [m/s] je volená tolerance rychlosti. Nyní však při $v = 0$ [m/s] je třecí síla nulová a není tak možné tímto modelem simulovat ulpívání. Na obr. 2.2 jsou vykresleny třecí síly podle hladkého Coulombova modelu, kde velikost $F_d = 1$ [N] a velikost toleranční rychlosti v_d se mění. V závislosti na volbě v_d se křivka grafu třecí síly přimyká ke svislé ose popisující tradiční Coulombův model, nyní však se spojitým přechodem mezi zápornou a kladnou hodnotou třecí síly.



Obr. 2.2: Hladký Coulombův model: vliv parametru v_d na průběh třecí síly

2.1.3 Rozšířený hladký Coulombův model

Tento model vychází z hladkého Coulombova modelu, kde je přidána funkce $g(v)$, popisující Stribeckův jev.

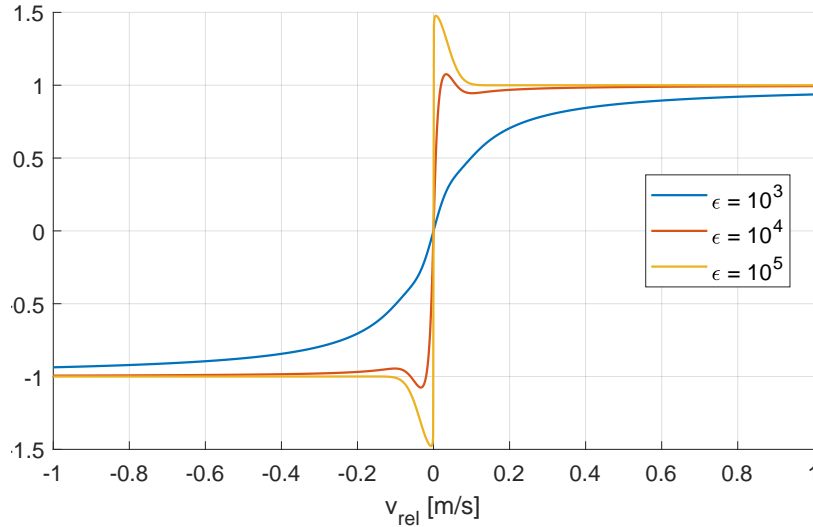
Matematicky je model popsán ve tvaru

$$F = \frac{2}{\pi} \operatorname{atan}(\epsilon v_{rel}) g(v) \quad (2.4)$$

kde funkce $g(v)$ je definována jako

$$g(v) = [F_d + (F_s - F_d)e^{-(v/v_{Stribeck})^\gamma}], \quad (2.5)$$

a kde F_s je statická složka třecí síly, ϵ je parametr ovlivňující tvar funkce atan , $v_{Stribeck}$ je rychlost, při které třecí síla v ustáleném stavu začne klesat a γ je tvarový parametr křivky $g(v)$. Na obr. 2.3 jsou zobrazeny třecí síly podle rozšířeného hladkého



Obr. 2.3: Rozšířený hladký Coulomb: vliv parametru ϵ na průběh třecí síly

Coulombova modelu, kde je velikost $F_d = 1$ [N] a statická složka třecí síly má hodnotu $F_s = 1,5$ [N]. Vlivem změny parametru ϵ se mění tvar křivky třecí síly a je možné vidět, že pro $\epsilon = 10^3$ se průběh třecí síly podobá hladkému Coulombovu modelu. Pro vyšší hodnoty průběh funkce již zobrazuje plynulý přechod mezi statickou a dynamickou třecí silou, neboli Stribeckův jev.

2.1.4 Karnoppův model

Tento model umožňuje simulovat vlastnost ulpívání popsanou v úvodu kapitoly 2. Ačkoliv je více způsobů jak Karnoppův model popsat, v této práci budeme využívat model (2.6), který je blíže popsán v [4]

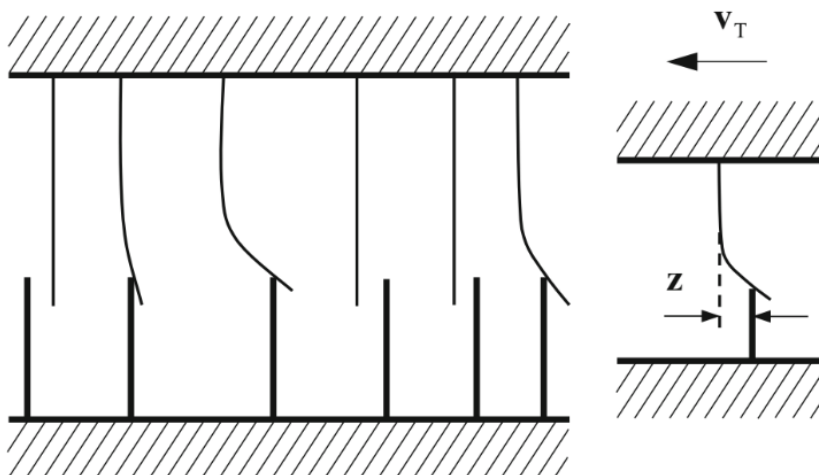
$$F = \begin{cases} \min(\max(-F_s, F_{ext}), F_s) & |v| \leq v_d \\ F_d \operatorname{sgn}(v) & |v| > v_d \end{cases}, \quad (2.6)$$

kde F_{ext} je výslednice akčních silových účinků, přičemž platí, že třecí síla je menší nebo rovna F_{ext} . Zjištění síly F_{ext} nemusí být snadné, ale pokud je její výslednice známá, pak Karnoppův model je relativně efektivní. Tolerance v_d nemá fyzikální význam a musí se najít vhodná hodnota pro zajištění přesnosti výpočtu. Experimentováním se osvědčilo volit v_d o řád menší než se volí $v_{Stribeck}$ u dalších modelů.

2.2 Dynamické modely tření

Dynamické modely oproti těm statickým pohlížejí na tření rovněž na mikroskopické úrovni. Umožňují simulovat ulpívání a navíc i schopnost hmoty vykonávat předskluzové výchylky (pre-sliding displacement).

Chování na mikro-úrovni může být demonstrováno na deformaci štětinky kartáče, viz obr. 2.4. Štětinka, která se setká s překážkou, se nejprve zdeformuje, kde spodní část zůstává na místě a horní pokračuje v pohybu. Při pohybu v opačném směru se štětinka nejprve narovná, než se její spodní konec opět dá do pohybu. Právě s ohledem na elastickou deformaci štětinky se zavádí vnitřní (stavová) proměnná z .



Obr. 2.4: Ilustrace deformace štětinky [6]

2.2.1 Dahlův model

Dahlův model vychází z Coulombova modelu, ale navíc je rozšířený o zpoždění třecí síly při změně směru pohybu.

Obecně je také znám jako štětínový model. Při zatížení se štětinka nejprve elasticky zdeformuje než se celý kartáč posune a po odlehčení se opět mají štětiny tendenci narovnat. Touto dynamickou vlastností tak vytvoří prodlevu při změně směru relativní rychlosti v . Třecí síla je u Dahlova modelu uvažována ve tvaru

$$F = \sigma_0 z, \quad (2.7)$$

kde σ_0 je tuhost štětiny a z je vnitřní proměnná představující její relativní deformaci. K modelu (2.7) je přidružena diferenciální rovnice popisující vývoj stavové proměnné ve tvaru

$$\dot{z} = v \cdot \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{F_d} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha, \quad (2.8)$$

kde α je parametr ovlivňující tvar třecí síly a nabývá hodnot $1 \leq \alpha \leq 2$.

2.2.2 LuGre model

Tento model [3, 9] je významným vylepšením Dahlova modelu. Název se skládá z akronymů názvů měst Lund a Grenoble, ve kterých na něm pracovaly skupiny vědců. Tvar modelu je dán v následujícím tvaru

$$F = \sigma_o z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v, \quad (2.9)$$

kde σ_o [N/m] je tuhost štětinky jako u Dahlova modelu, σ_1 [Ns/m] je mikro-tlumení a σ_2 [Ns/m] je viskózní tlumení. Vnitřní proměnná z je vyjádřena následovně

$$\dot{z} = v \cdot \left(1 - \frac{\sigma_o z}{g(v)} \operatorname{sgn}(v) \right), \quad (2.10)$$

kde $g(v)$ je funkce závisající na rychlosti, která zahrnuje jak Coulombův model tření, tak i Stribeckův jev a lze ji uvažovat v následujícím tvaru

$$g(v) = F_d + (F_s - F_d) e^{-(v/v_{\text{Stribeck}})^\gamma}. \quad (2.11)$$

Zde v_{Stribeck} je rychlost, kdy třecí síla v ustáleném stavu začne klesat a γ je tvarový parametr křivky $g(v)$. Pro většinu případů lze uvažovat $\gamma = 2$ [1].

2.2.3 Elasto-plastický model

Tento model se považuje za rozšíření LuGre modelu. Zavádí se nová proměnná Z_{ba} nazývaná "break away distance", neboli hraniční vzdálenost při jejímž překročení již nedochází pouze k elastickým deformacím. Třecí síla je dána formálně shodně jako u LuGre modelu

$$F = \sigma_o z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v, \quad (2.12)$$

nicméně vnitřní proměnná z je definována následovně

$$\dot{z} = v \cdot \left(1 - \alpha(z, v) \frac{\sigma_o z}{g(v)} \operatorname{sgn}(v) \right). \quad (2.13)$$

Zde $\alpha(z, v)$ je přidáný parametr pro zahrnutí předskluzové výchyly

$$\alpha(z, v) = \begin{cases} 0 & |z| < z_{ba} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \sin \left(\pi \frac{z - \frac{1}{2}(z_{max} + z_{ba})}{z_{max} - z_{ba}} \right) \right) & z_{ba} \leq |z| < z_{max} \\ 1 & |z| \geq z_{max} \end{cases}, \quad (2.14)$$

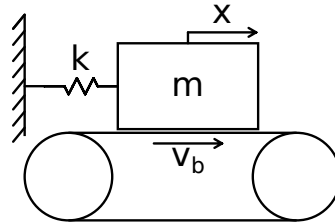
kde $z_{max} = \frac{g(v)}{\sigma_0}$.

3 Testovací modely

Pro ověření korektní implementace výše zvolených modelů tření byly vybrány tři vhodné testovací modely. Prvním testem byl hmotný bod (HB) kmitající na pásu. Dalším byl tzv. stop-start test a posledním byl HB tažený za pružinu po drsném povrchu. Tyto testovací modely jsou popsány podrobněji níže.

3.1 Hmotný bod kmitající na pásu

V prvním testovacím modelu je HB přichycen pružinou k pevnému rámu, viz obrázek 3.1. HB dále doléhá na pás, který se pohybuje konstantní rychlostí v_b . Následkem působení třecí síly mezi tělesem a pásem dojde k pohybu HB ve směru rychlosti pásu. Po chvíli vratná síla pružiny přemůže působící třecí sílu a HB se začne pohybovat v opačném směru, tedy proti směru rychlosti pásu. Nyní se vratná síla v pružině zmenší a HB je opět unášen pásem. Tento jev se periodicky opakuje a těleso takto kmitá na pásu. Model je popsán diferenciální rovnicí



Obr. 3.1: Schématický nákres testovacího modelu

$$m\ddot{x} + kx = F_t(v_{rel}), \quad (3.1)$$

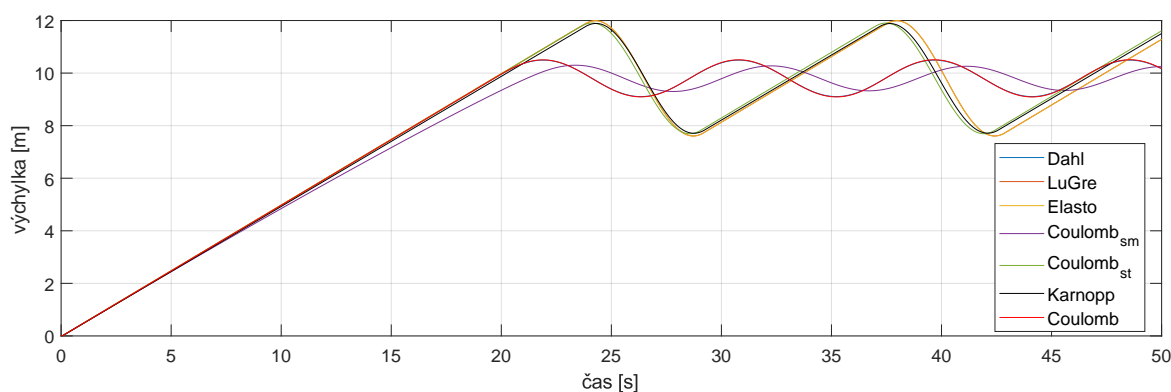
$$v_{rel} = v_b - \dot{x}, \quad (3.2)$$

kde v_b je rychlost pásu, k je tuhost pružiny, m je hmotnost tělesa, x je výchylka HB a $F_t(v_{rel})$ je zvolený model třecí síly závisující na relativní rychlosti mezi HB a pásem. Jedná se o pohybovou rovnici kmitání bez uvažování tlumení závěsu HB. Velikost rychlosti v_d pro hladký Coulombův a Karnoppův model slouží ke zpřesnění modelu, ale nemusí být shodná s $v_{Stribeck}$.

Na obr. 3.2 jsou znázorněny výchylky HB na pružině v závislosti na čase. Lze si všimnout, že se LuGre model a elasto-plastický (značen zkráceně "elasto" v legendě) model překrývají. Stejně tak se velmi podobají výchylky Coulombova a Dahlova modelu.

Použité hodnoty parametrů					
Značení	Hodnota	Jednotka	Značení	Hodnota	Jednotka
m	20	kg	μ_d	0,5	-
k	10	Nm	μ_s	0,6	-
v	0,5	m/s	F_d	98,1	N
σ_0	98 100	Nm	F_s	117,72	N
σ_1	780	Ns/m	α	1	-
σ_2	0	Ns/m	γ	1	-
z_{ba}	10^{-4}	m	v_d	0,001	m/s
$v_{Stribeck}$	0,05	m/s			

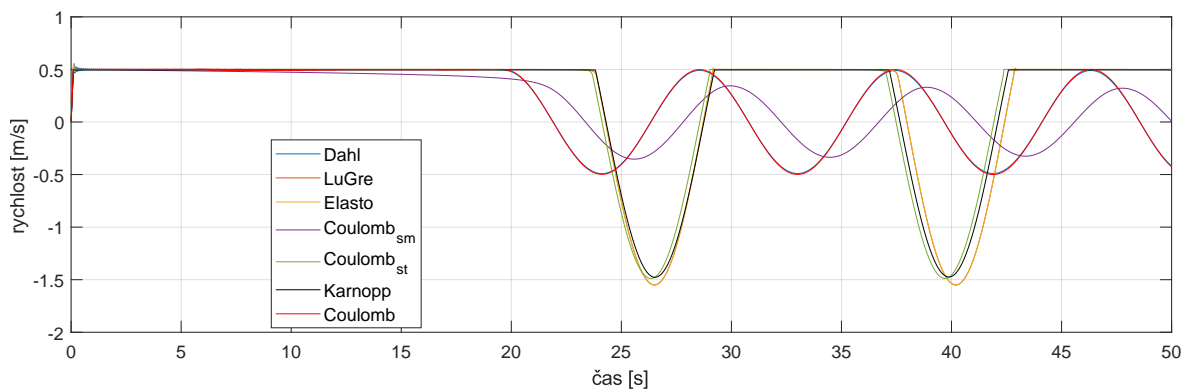
Tab. 3.1: Tabulka hodnot parametrů pro 1. testovací model



Obr. 3.2: Srovnání závislosti výchylky na čase pro různé modely třecích sil

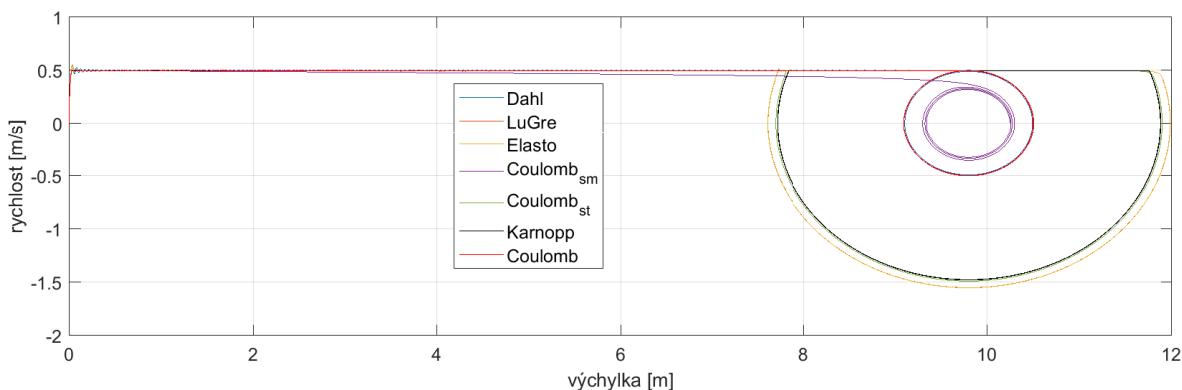
Graf hladkého Coulombova modelu ($Coulomb_{sm}$) má podobný průběh jako Dahlův model, nicméně vlivem toleranční rychlosti v_d je graf posunut. Karnoppův a rozšířený hladký Coulombův ($Coulomb_{st}$) model přibližně popisují ulpívání, které ostatní statické modely nepopisují a jejich odezvy jsou tak bližší odezvám dynamických modelů.

Na obr. 3.3 jsou znázorněny rychlosti HB v závislosti na čase. Podobně jako na



Obr. 3.3: Srovnání závislosti rychlosti na čase pro různé modely třecích sil

obr. 3.2 se LuGre model překrývá s elasto-plastickým modelem a Coulombův model se překrývá s Dahlovým modelem. Karnoppův a rozšířený hladký Coulombův model, vykazuje ostrý přechod v okamžiku, kdy HB není unášen pásem. LuGre a elasto-plastický model mají plynulejší přechod simulující fázi prokluzu. Na obr. 3.4 jsou znázorněny



Obr. 3.4: Srovnání fázových trajektorií pro různé modely třecích sil

fázové trajektorie HB, kde Dahlův a Coulombův model se překrývají v menší fázové trajektorii. LuGre s Elasto-plastickým modelem se překrývají ve větší fázové trajektorii. Grafy Karnoppova a rozšířeného hladkého Coulombova modelu se překrývají a je zde názorně vidět, jak se tyto statické modely simulující ulpívání přibližují dynamickým modelům, ale ne dokonale.

Model	Řešič								
	ode45			ode113			ode15s		
	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Dahl	2,89	3,06	3,31	2,44	2,62	2,58	0,80	1,03	1,11
LuGre	2,85	2,93	2,91	2,31	2,32	2,12	0,27	0,36	0,44
elasto-plastický	3,32	3,41	3,06	2,30	2,40	2,16	0,26	0,35	0,41
hl. Coulomb	0,42	0,44	0,44	0,43	0,44	0,42	0,25	0,26	0,28
roz. hl. Coulomb	91,08	90,19	100,00	51,50	58,78	70,76	0,20	0,30	0,33
Karnopp	0,19	0,21	0,24	0,22	0,24	0,27	0,18	0,21	0,27

Tab. 3.2: Tabulka normalizovaných výpočetních časů pro 1. testovací model

Na tomto testu byly také změřeny časy pro výpočet odezvy HB při použití různých modelů tření. Časy byly měřeny jak pro různé druhy řešičů, tak pro jejich různé relativní tolerance (RelTol). Výpočetní časy jednotlivých modelů třecích sil použitých na první testovací model byly normalizovány vzhledem k nejdelšímu výpočetnímu času podle následujícího vztahu

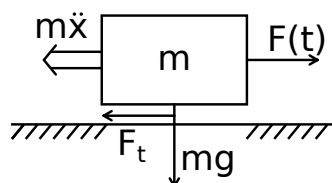
$$\psi_i = \frac{T_i}{T_{max}} \cdot 100, \quad (3.3)$$

kde T_i je porovnávaný čas vztážený k největšímu času T_{max} . Z tabulky 3.2 lze vyčíst, že nejefektivnějším řešičem je ode15s, nicméně například u implementace klasického

Coulombova modelu metoda nekonverguje. Dále lze vyčíst, že Karnoppův model je nejrychlejší. Rozšířený hladký Coulombův model je pak druhým nejefektivnějším při použití řešiče *ode15s*, ale při použití ostatních řešičů jeho efektivita rapidně klesá.

3.2 Stop-start model

Další testovací model spočívá v tahání HB po drsném povrchu periodickou silou $F(t)$ viz obr. 3.5. Síla $F(t)$ je nespojitá funkce, jejíž průběh je možné vidět na obr. 3.6. Vlivem



Obr. 3.5: Stop-start model

této síly a po překonání statické třecí síly dojde k vychýlení HB. V okamžiku, kdy síla $F(t)$ přestane působit na HB, dojde k pozvolnému zastavení HB vlivem působení třecí síly. Model je popsán ve tvaru diferenciální rovnice

$$m\ddot{x} = F - F_t(v_{rel}), \quad (3.4)$$

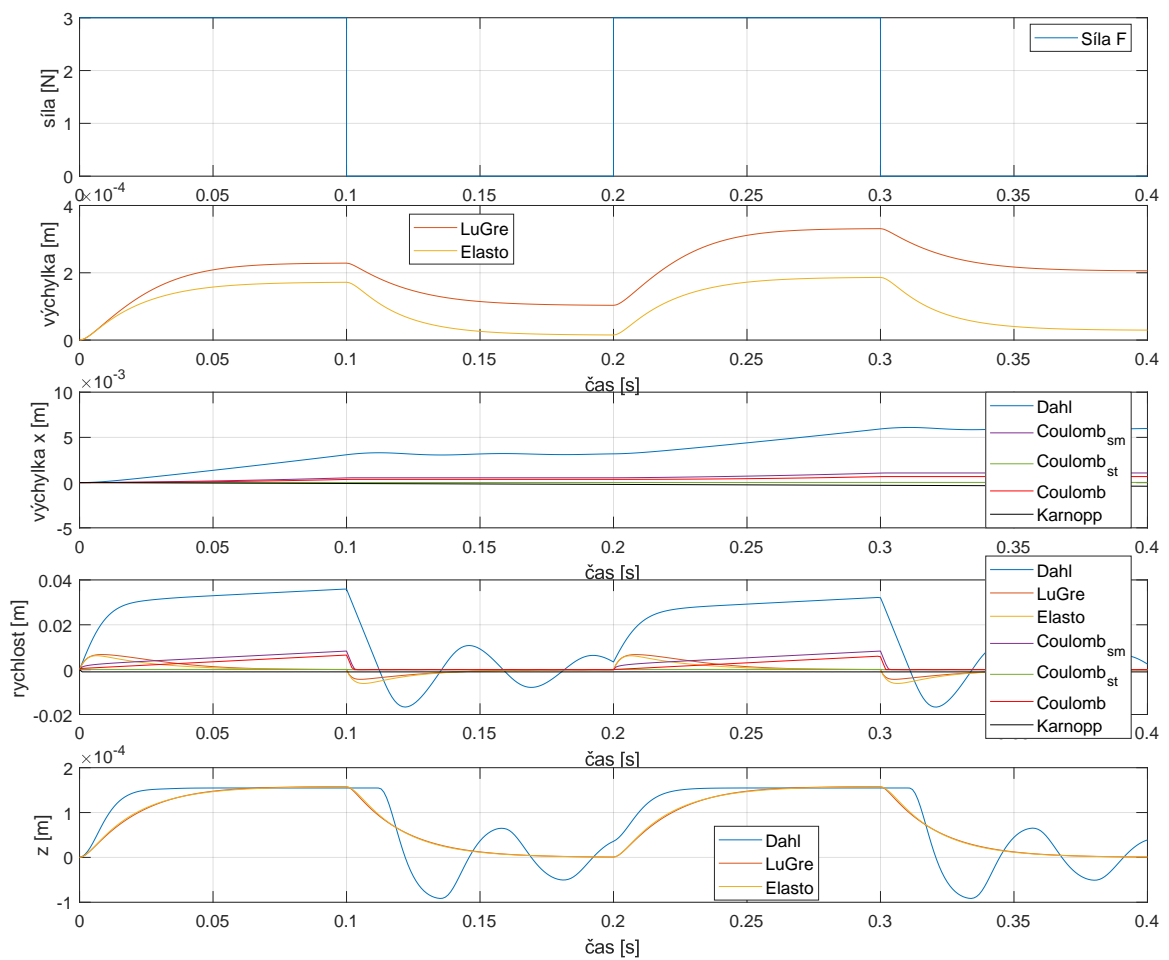
kde m je hmotnost HB, \ddot{x} je zrychlení působící proti směru pohybu, $F(t)$ je síla, kterou je taženo za HB a $F_t(v_{rel})$ je zvolený model třecí síly působící proti směru pohybu.

Amplituda síly F , kterou bylo za HB taháno byla 3 a 6 [N]. Hodnoty zbylých parametrů jsou uvedeny v tabulce 3.3.

Použité hodnoty parametrů					
Značení	Hodnota	Jednotka	Značení	Hodnota	Jednotka
m	1	kg	F_d	5,88	N
σ_0	39 000	Nm	α	1	-
σ_1	395	Ns/m	γ	1	-
σ_2	0	Ns/m	$v_{Stribeck}$	0,01	m/s

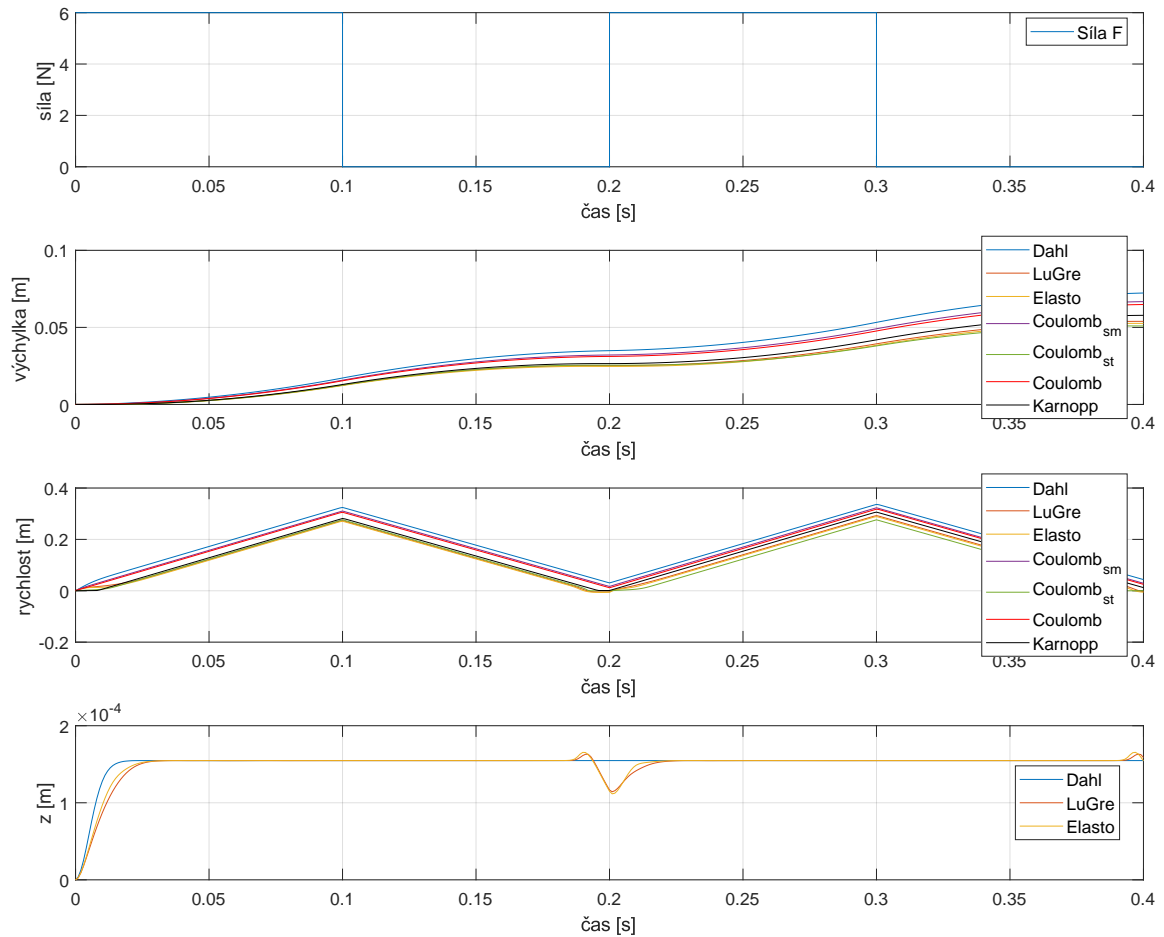
Tab. 3.3: Tabulka hodnot parametrů pro 2. testovací model

Na obr. 3.6 jsou zobrazeny závislosti výchylek, rychlostí a vnitřních proměnných z v závislosti na síle $F = 3$ [N] v časovém úseku $[0 - 0,4]$ [s]. Grafy výchylek LuGre a elasto-plastického modelu jsou vyňaty od ostatních modelů a uvedeny zvlášť, neboť výchylky od Dahlova modelu jsou o řád větší a nebylo by možné si všimnout jevu ulpívání, kdy dochází k předskluzovým výchylkám na mikroskopické úrovni. Graf výchylek pro LuGre a elasto-plastického modelu lze číst tak, že nejprve dojde k deformaci štětiček kartáče při působení síly $F(t)$ na časovém intervalu $[0 - 0,1]$ [s] a po jejím odebrání na časovém intervalu $[0,1 - 0,2]$ [s] se mají štětiny opět snahu narovnat.



Obr. 3.6: Stop Start test $F = 3$ N

Nicméně HB se nevrátí do své výchozí polohy, neboť došlo i k vychýlení na makroskopické úrovni. Patrnost těchto jevů se se zvyšováním působící tažné síly postupně vytrácí. Přibližně kolem hodnoty $F = 5$ [N] již charakteristiky grafů jednotlivých modelů tření začínají splývat. Obr. 3.7 zobrazuje odezvu uvažovaného systému při am-

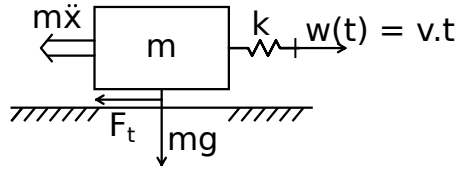


Obr. 3.7: Stop Start test $F = 6$ N

plitudě budící síla $F = 6$ [N]. Je možné si všimnout, že průběhy grafů již nejsou tak rozdílné jako v předešlém případě.

3.3 Hmotný bod tažený na pružině po drsném povrchu

Další testovací model představuje HB tažený po drsném povrchu [3], viz obr. 3.8. Rozdíl oproti předešlému testu je v tom, že HB je tažen bez pravidelného zastavování a je přichycen za pružinu, jejíž volný konec se pohybuje konstantní rychlostí v . Nejprve dojde k napínání pružiny, neboť třecí síla udržuje těleso v počáteční poloze. Po překonání třecí síly se těleso posune, nastane úbytek tažné síly vzhledem k smrštění pružiny a zastavení



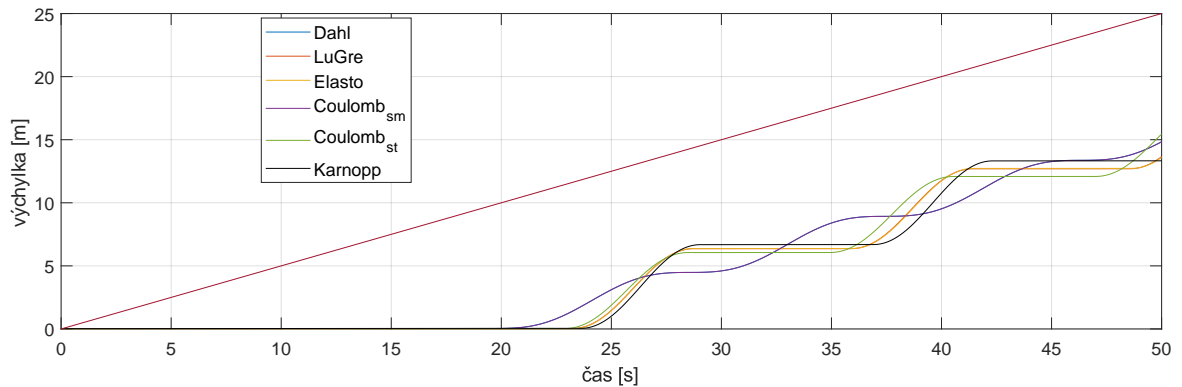
Obr. 3.8: Schéma testu hmotného bodu taženém za pružinu

tělesa do chvíle, než se pružina opět dostatečně napne. Model je popsán jako

$$m\ddot{x} + kx = -F_t(v_{rel}) + kw(t) \quad (3.5)$$

$$w(t) = vt = \dot{x}t, \quad (3.6)$$

kde m je hmotnost HB, $k = 10$ [N/m] je tuhost pružiny, $F_t(v_{rel})$ je zvolený model třecí síly a $w(t)$ je funkce vychýlení volného konce pružiny závislá na čase a rychlosti v . Hodnoty ostatních parametrů použitých v tomto testu jsou stejné jako u předešlého modelu, viz tab. 3.3. Na obrázku 3.9 jsou znázorněny výchylky HB při použití různých



Obr. 3.9: Graf srovnání výchylek pro různé modely třecích sil

modelů třecí síly. Výchylky LuGre a elasto-plastického modelu se těsně překrývají. Grafy rozšířeného hladkého Coulombova a Karnoppova modelu kopírují tvar dynamických modelů s menšími rozdíly. Grafy pro Dahlův a hladký Coulombův model se pak prakticky překrývají.

4 Modelování interakce třecích členů olopatkovaných disků

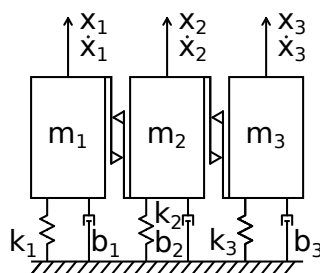
V této kapitole budou aplikovány dříve analyzované modely třecích sil na model kmitání tří lopatek se třecími členy. Tento model vychází z modelu olopatkovaného disku se třecími členy popsaného v pracích [5, 7]. Jedná se o silně idealizovaný model, kde se již nicméně projeví vliv třecích sil.

Pojem kmitání lze chápat jako proces, při kterém dochází ke střídavé změně fyzikálních veličin doprovázející pohyb (výchylka, rychlost, zrychlení). Současně také dochází k ustavičné přeměně kinetické energie na potenciální a naopak. Jako klasický příklad kmitání lze uvést pohyb kyvadla. Podklady byly čerpány z [5, 7, 2, 8].

Třecí členy olopatkovaného disku, pracujícího ve vysokých otáčkách, slouží k utlumení kmitání, které jinak způsobuje únavu materiálu a následné možné poškození součásti zařízení. Další neblahý vliv kmitání je ve vyzařování hluku, což například u dopravních prostředků zhoršuje kvalitu přepravy a u pracovních strojů může mít neblahý vliv na lidský sluch.

4.1 Model trojice lopatek se třecími členy buzený kvazistatickou silou

V této kapitole bude provedena analýza vlivu volby modelu třecí síly na odezvu trojice lopatek vzájemně vázaných třecími členy. Model spočívá v uvažování tří HB reprezentující redukovanou hmotu lopatek a třecích členů, viz. obr. 4.1, o hmotnostech m_1, m_2, m_3 . Viskózní a elastické vlastnosti lopatek jsou modelovány prostřednictvím pružin o tuhostech k_1, k_2, k_3 a tlumiči b_1, b_2, b_3 . Mezi HB působí třecí vazby. Po vychýlení



Obr. 4.1: Schéma modelu tří lopatek s třecími členy

jednoho HB budící silou dojde vlivem třecích vazeb k vychýlení i zbylých dvou HB. V tomto případě bylo působeno budící silou na první ze tří lopatek. Matematický model je popsán jako

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_T + \mathbf{f}_{konst}(t), \quad (4.1)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{B} je matice proporcionálního tlumení ve tvaru

$$\mathbf{B} = \beta\mathbf{K}, \quad (4.2)$$

\mathbf{K} je matice tuhosti, $\mathbf{q}(t)$ je vektor zobecněných souřadnic. Matice \mathbf{M} , \mathbf{B} a \mathbf{K} jsou diagonální ve tvaru

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Dále \mathbf{f}_T je vektor třecích sil, $\mathbf{f}_{konst}(t)$ je funkce kvazistatické síly, která působí na první ze tří hmot a je popsána následovně

$$\mathbf{f}_{konst}(t) = \begin{bmatrix} F_0(1 - e^{\epsilon_0 t}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

kde F_0 je amplituda budící síly a ϵ_0 je parametr ovlivňující tvar funkce budící síly. Vlivem třecích vazeb mezi členy dojde také k vychýlení dalších dvou hmot. Vektor třecích sil je pak dán ve tvaru

$$\mathbf{f}_T = \begin{bmatrix} -F_t^{(1)} \\ F_t^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -F_t^{(2)} \\ F_t^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

kde $F_t^{(1)}$ je třecí síla působící mezi první a druhou hmotou a $F_t^{(2)}$ je třecí síla mezi druhou a třetí hmotou. Konkrétní tvar těchto třecích sil závisí na zvoleném modelu.

Model (4.1) byl řešen v programu MATLAB převedením na ODR 1. řádu zavedením stavového vektoru

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

kde \mathbf{q} je vektor zobecněných souřadnic a $\dot{\mathbf{q}}$ je vektor zobecněných rychlostí. Dále se integruje rovnice (4.7)

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (4.7)$$

kde \mathbf{A} je systémová matice

$$\mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

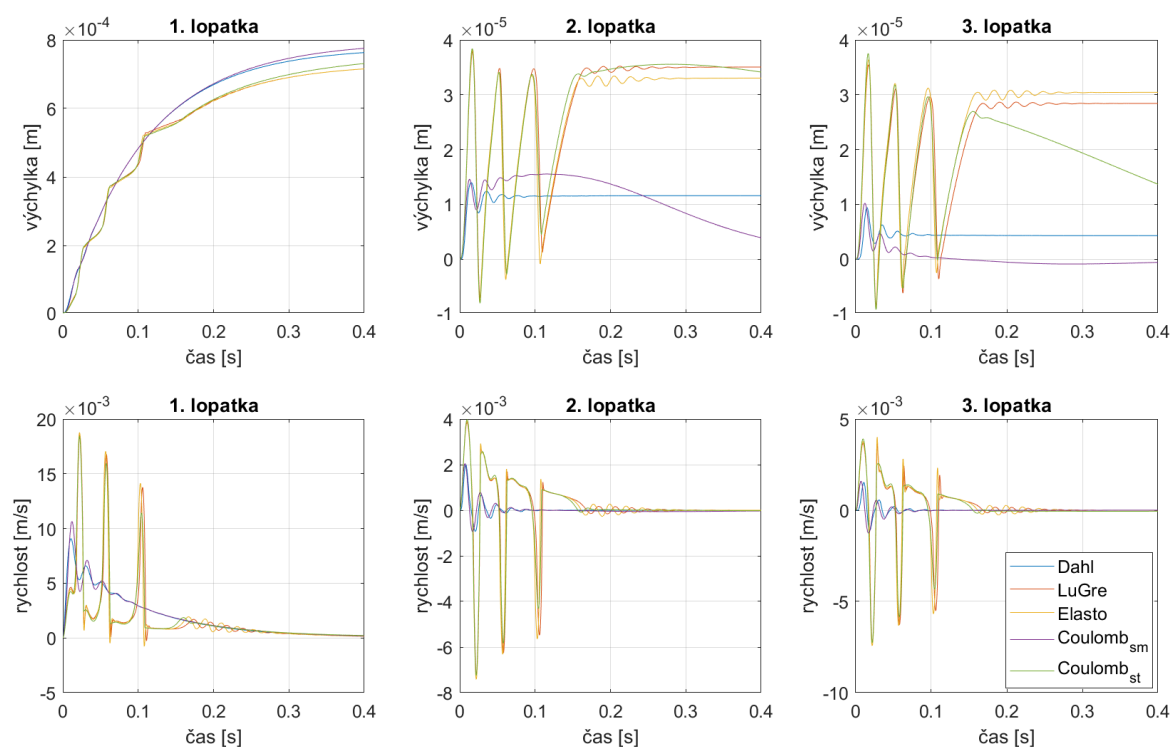
a \mathbf{F} je vektor buzení ve stavovém prostoru

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_T + \mathbf{f}_{konst}(v)) \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Hodnoty parametrů pro tento model jsou uvedeny v tabulce 4.1.

Použité hodnoty parametrů					
Značení	Hodnota	Jednotka	Značení	Hodnota	Jednotka
m	0,6383	kg	ϵ_0	10	-
k	$6,3 \cdot 10^4$	N/m	F_0	50	N
β	10^{-3}	-	F_d	1	N
ϵ	10^4	-	F_s	4	N
σ_0	10^5	Nm	γ	2	-
σ_1	900	Ns/m	α	1	-
σ_2	0	Ns/m	$v_{Stribeck}$	10^{-2}	m/s

Tab. 4.1: Hodnoty parametrů použitých pro model buzený kvazistatickou silou



Obr. 4.2: Srovnání výchylek a rychlostí lopatek buzených kvazistatickou silou

Na obr. 4.2 jsou zobrazeny výchylky a rychlosti hmot na konci lopatek při působení síly pouze na první lopatku. První hmota se dá do pohybu a vlivem působení třecích členů se vychýlí i zbylé dvě hmoty. Na grafu výchylek 1. lopatky je možné vidět rozdílné chování u modelů simulující ulpívání. Dahlův a hladký Coulombův model se v tomto případě prakticky překrývají a jejich průběh je plynulý. Oproti tomu LuGre, elasto-plastický a rozšířený hladký Coulombův model se od sebe místy liší a jejich průběh je více skokový.

4.2 Model trojice lopatek se třecími členy buzený harmonickou silou

Dalším zobecněním výše uvedeného modelu je uvážení harmonické budící síly. Pohybová rovnice se změní formálně tak, že \mathbf{f}_{konst} se změní na \mathbf{f}_{harm} a matematický model nabývá zvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_T + \mathbf{f}_{harm}(t). \quad (4.10)$$

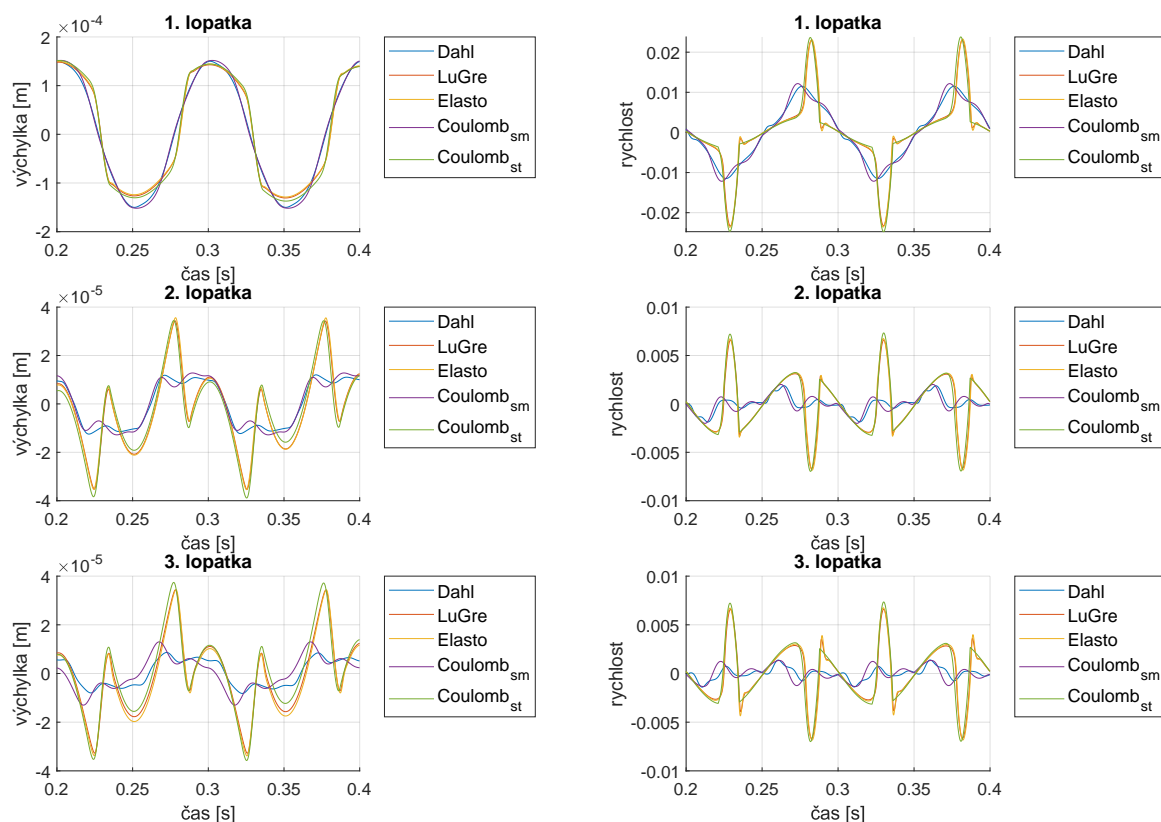
Vektor harmonického buzení je uvažován ve tvaru

$$\mathbf{f}_{harm} = \begin{bmatrix} F_H \cos(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

kde F_H je volená amplituda a ω je budící frekvence v [rad/s], pro kterou platí

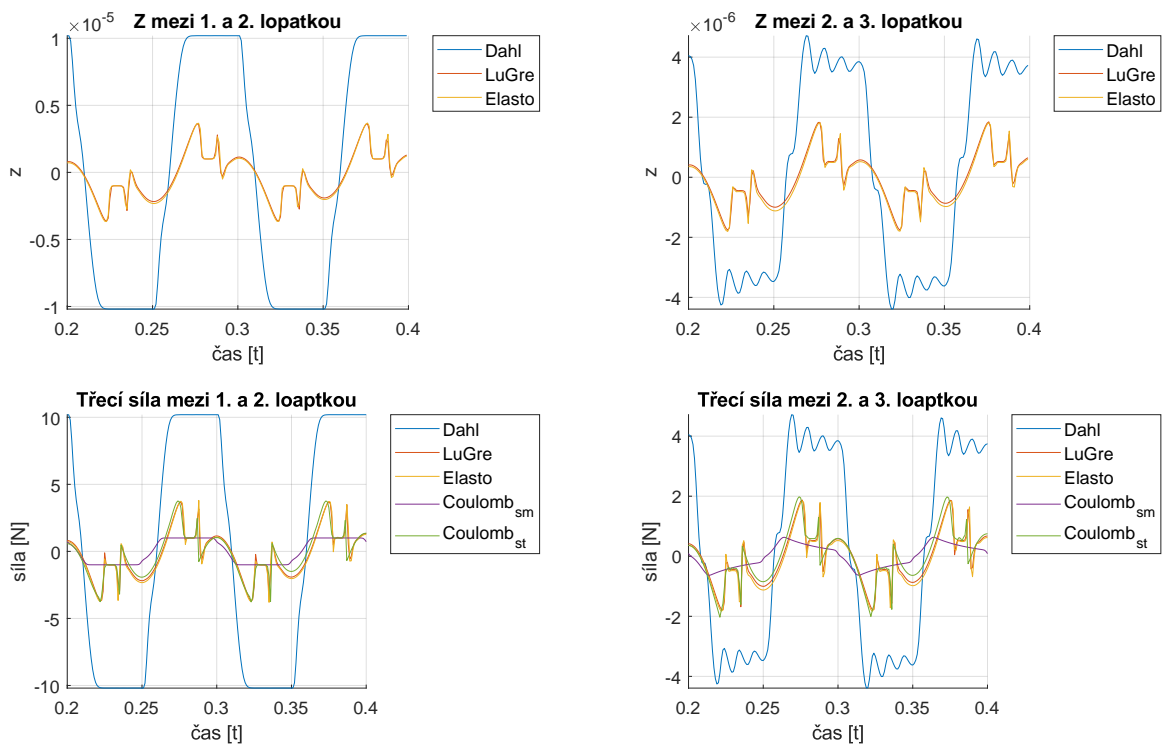
$$\omega = 2\pi f, \quad (4.12)$$

kde f je budící frekvence v [Hz]. Pro testování byly použity hodnoty $F_H = 10$ [N] a $f = 10$ [Hz]. Na obrázku 4.3 jsou zobrazeny výchylky a rychlosti všech tří lopatek



Obr. 4.3: Srovnání výchylek a rychlostí lopatek

buzených harmonicky, přičemž je ukázán pouze časový interval s ustáleným chováním systému a přechodové stavy nejsou zobrazeny. Na obrázku 4.4 jsou zobrazeny průběhy stavové proměnné z a třecích sil při použití různých modelů tření.



Obr. 4.4: Srovnání průběhů stavové proměnné z a třecí síly F_t

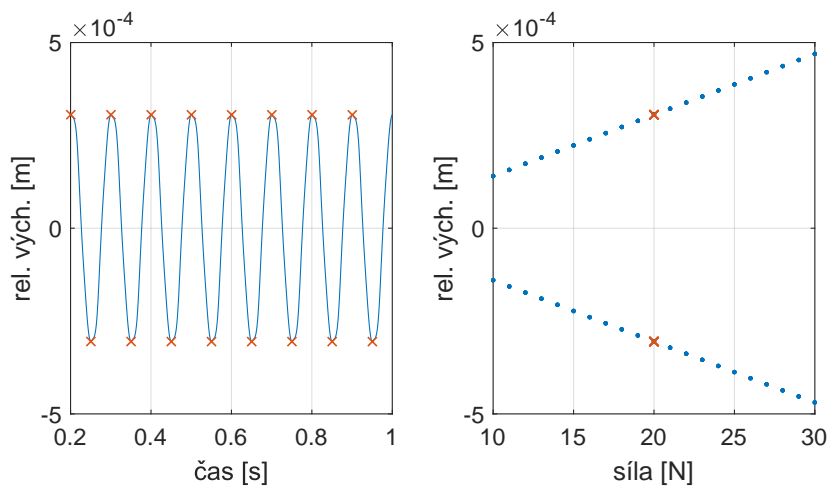
4.3 Kvalitativní analýza odezvy trojice lopatek na harmonické buzení

V této kapitole bude odezva systému na harmonické buzení vyhodnocena pomocí tzv. diskrétní bifurkačních diagramů relativních výchylek a relativních rychlostí mezi lopatkami v závislosti na změně amplitudy budící síly a velikosti budící frekvence. Další formou hodnocení změny kvality odezvy budou fázové trajektorie jednotlivých lopatek.

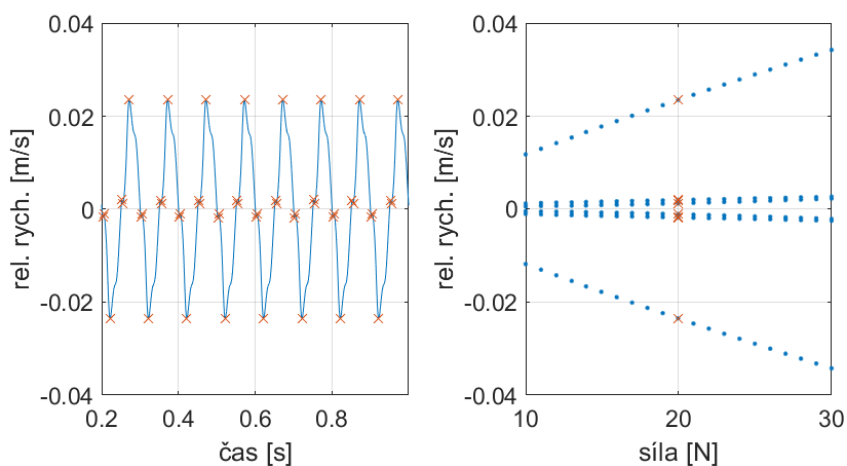
4.3.1 Bifurkační diagramy

Jako bifurkační diagramy zde budou označována zobrazení extrémů funkce při změně vybraného parametru. V tomto případě budou hledány extrémy relativních výchylek a relativních rychlostí mezi lopatkami při změně amplitudy budící síly a na velikosti budící frekvence. Pro jeden bifurkační diagram je třeba napočítat odezvu systému vícekrát podle rozsahu a velikosti změny voleného parametru.

Na obr. 4.5 jsou na levém grafu zobrazeny relativní výchylky mezi 1. a 2. lopatkou v závislosti na čase při amplitudě budící síly $F_H = 25$ [N] a na pravém grafu odpovídající bifurkační diagram. Na bifurkačním diagramu jsou extrémy funkce na levém grafu znázorněny oranžovými křížky pro extrémní kladné a záporné hodnoty. V jednom řezu bifurkačního diagramu pro amplitudu budící síly pak můžeme vidět právě dva body, čímž rozumíme, že funkce relativních výchylek má pro tuto budící sílu právě dva extrémy na jedné periodě.

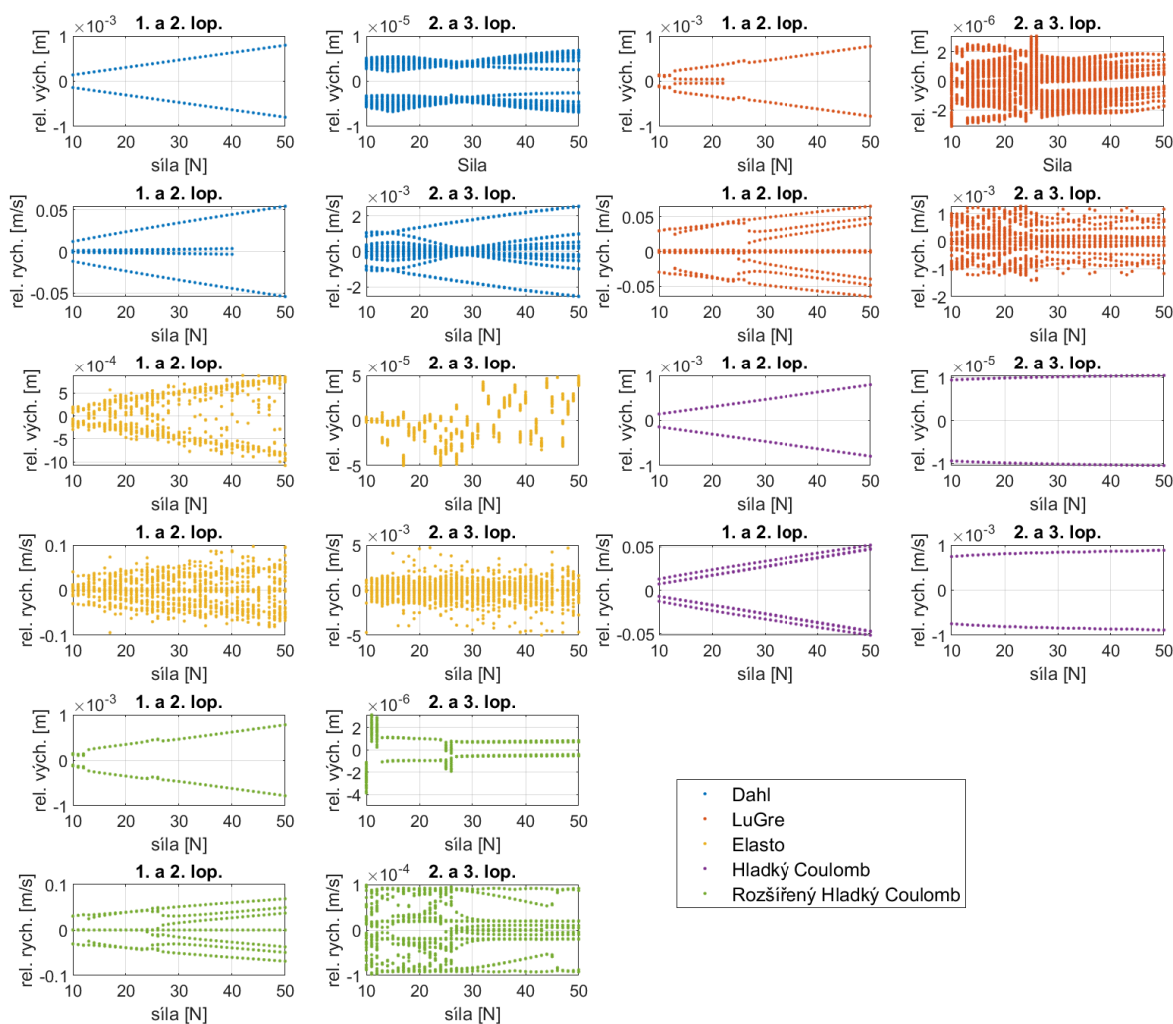


Obr. 4.5: Příklad nalezení extrémů funkce relativních výchylek a jejich zobrazení v bifurkačním diagramu při použití Dahlova modelu třecí síly



Obr. 4.6: Příklad nalezení extrémů funkce relativních rychlostí a jejich zobrazení v bifurkačním diagramu při použití Dahlova modelu třecí síly

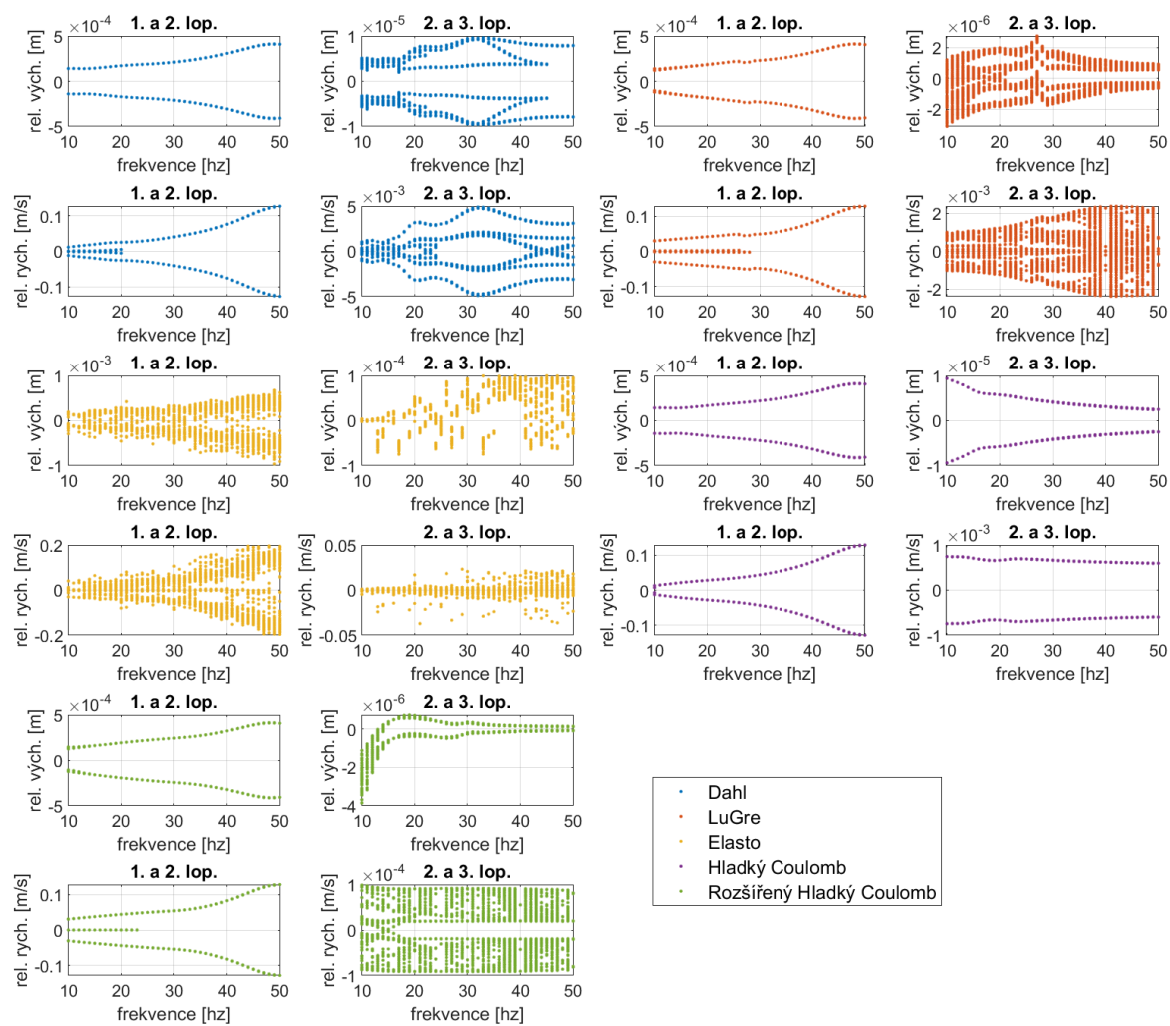
Pokud se v jednom řezu bifurkačního diagramu vyskytuje více bodů, můžeme usoudit, že funkce relativních výchylek bude mít také více extrémů na jedné periodě. Příklad tohoto případu je zobrazen na obr. 4.6, kde je v levo vykreslen graf relativních rychlostí při amplitudě budící síly $F_H = 25$ [N] a napravo grafu je příslušný bifurkační diagram s označením tohoto řezu.



Obr. 4.7: Srovnání bifurkačních diagramů při změně amplitudy síly

Na obr. 4.7 jsou zobrazeny bifurkační diagramy pro Dahlův, LuGre, elasto-plastický, hladký Coulombův a rozšířený hladký Coulombův model v závislosti na změně amplitudy budící harmonické síly. Relativní výchylky Dahlova a hladkého Coulombova modelu mají podobnou charakteristiku pro relativní rychlosti a relativní výchylky mezi 1. a 2. lopatkou, nicméně se výrazně liší mezi 2. a 3. lopatkou. LuGre a rozšířený hladký Coulombův model mají podobnou charakteristiku relativních výchylek a relativních rychlostí mezi 1. a 2., avšak rozdílnou mezi 2. a 3. lopatkou. Elasto-plastický model pak vykazuje komplexní neperiodické chování.

Na obr. 4.8 jsou zobrazeny bifurkační diagramy pro Dahlův, LuGre, elasto-plastický,

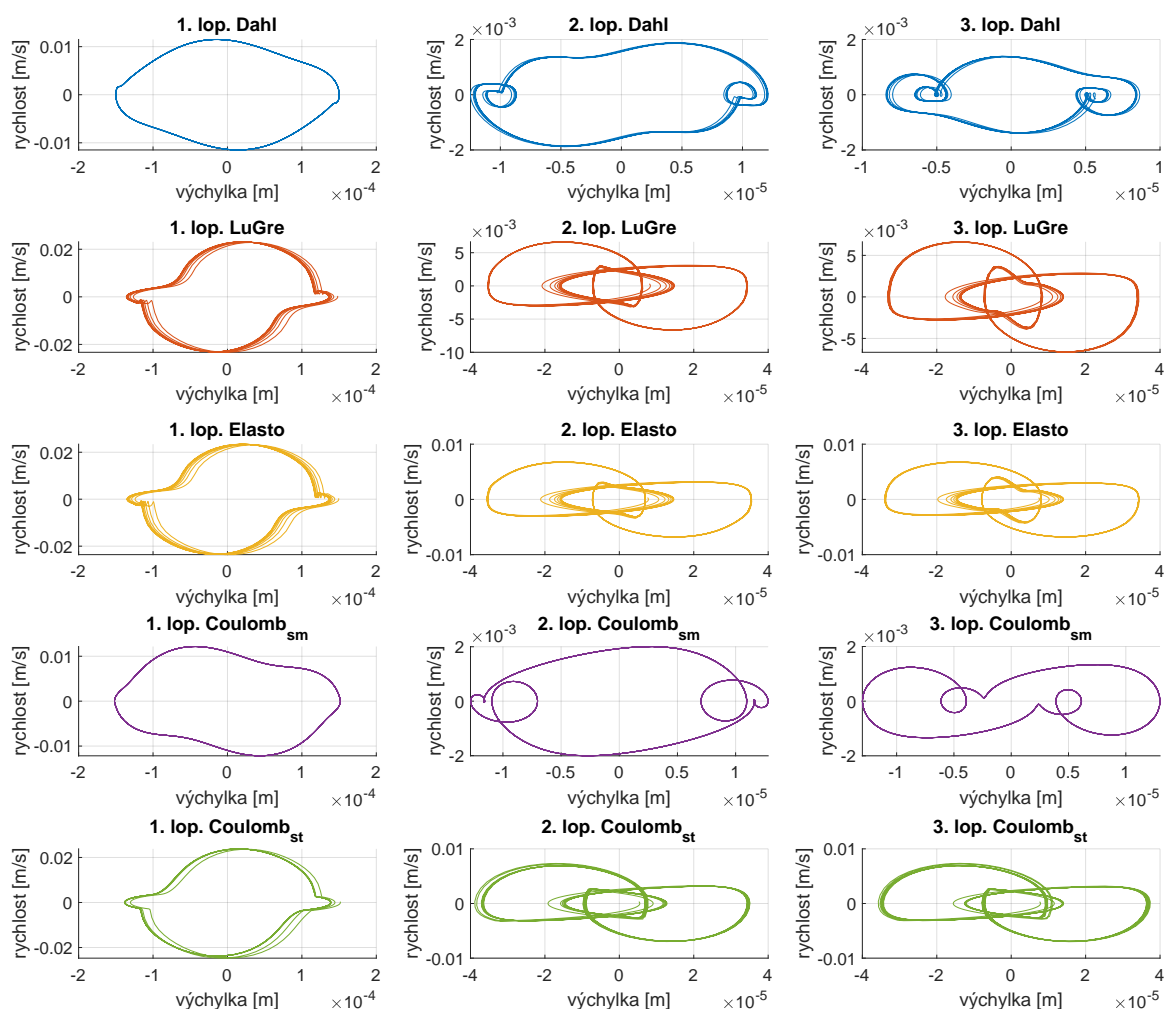


Obr. 4.8: Srovnání bifurkačních diagramů při změně frekvence

hladký Coulombův a rozšířený hladký Coulombův model v závislosti na změně frekvence budící harmonické síly. Dahlův a hladký Coulombův model vykazují podobnou charakteristiku relativních výchylek a relativních rychlostí mezi 1. a 2. lopatkou. LuGre a rozšířený hladký Coulombův model také vykazují podobné chování relativních výchylek a relativních rychlostí mezi 1. a 2. lopatkou. Elasto-plastický model opět vykazuje komplexní neperiodické chování.

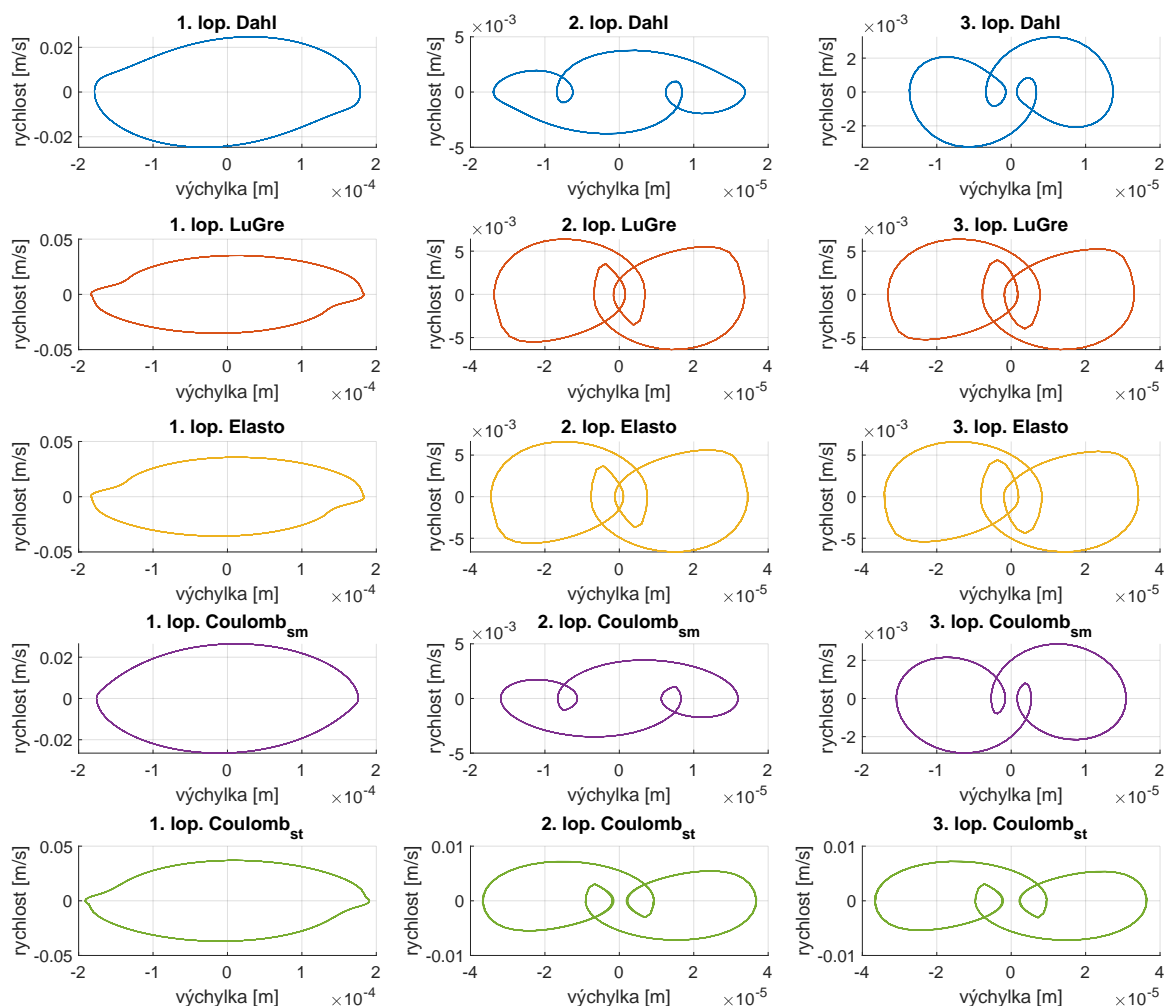
4.3.2 Fázové trajektorie

Dalším nástrojem pro vyhodnocení kvalitativních změn odezvy je zobrazení fázových trajektorií ve vybraných řezech pro amplitudu budící síly a frekvenci. V tomto případě se jedná o grafy závislosti rychlostí na výchylce jednotlivých lopatek. Na obr. 4.9 jsou zobrazeny fázové trajektorie pro Dahlův, LuGre, elasto-plastický, hladký Cou-



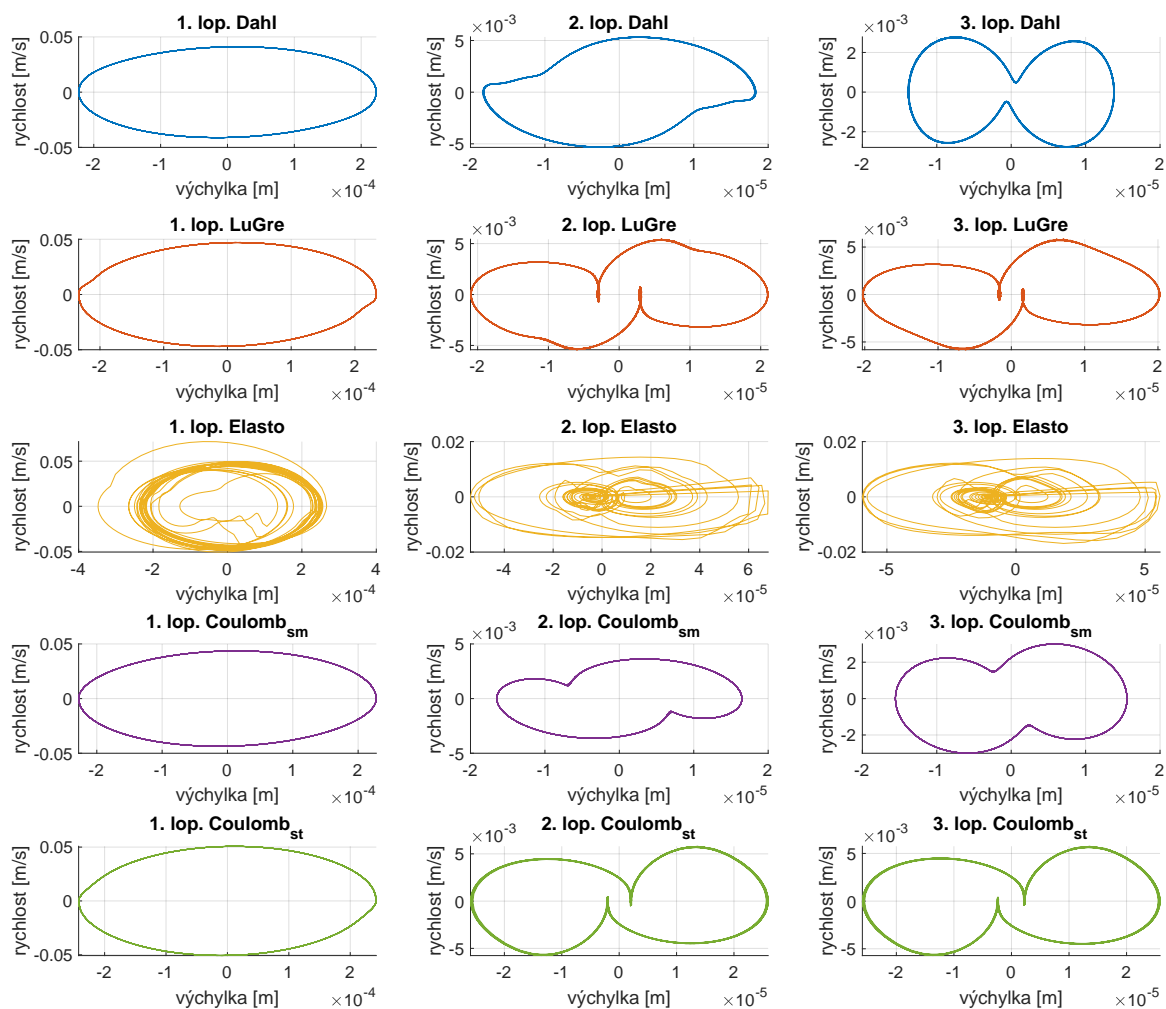
Obr. 4.9: Srovnání fázových trajektorií pro různé modely tření při frekvenci $f = 10$ Hz a amplitudě budící síly $F_H = 10$ N

lombův a rozšířený hladký Coulombův model. LuGre, elasto-plastický a rozšířený hladký Coulombův model vykazují podobné chování. Dahlův a hladký Coulombův model se také podobají, ale výrazný rozdíl nastává v kontaktu mezi 2. a 3. lopatkou. Fázové trajektorie zobrazené na obr. 4.10 a obr. 4.11 ilustrují chování lopa-



Obr. 4.10: Srovnání fázových trajektorií pro různé modely tření při frekvenci $f = 20$ Hz a amplitudě budící síly $F_H = 10$ N

tek při změně budící frekvence. Fázové trajektorie na 1. lopatce při použití LuGre, elasto-plastického a rozšířeného hladkého Coulombova modelu, které postihují simulaci ulpívání, se začínají podobat fázovým trajektoriím na 1. lopatce za použití Dahlova a hladkého Coulombova modelu, které ulpívání nepostihují. Z toho lze usoudit, že vliv ulpívání se zvyšováním budící frekvence zmenšuje. U elasto-plastického modelu navíc dojde při frekvenci $f = 30$ [Hz] k rychlým přeskokům ve fázové trajektorii.



Obr. 4.11: Srovnání fázových trajektorií pro různé modely tření při frekvenci $f = 30$ Hz a amplitudě budící síly $F_H = 10$ N

5 Závěr

Předkládaná bakalářská práce se zabývá analýzou statických a dynamických modelů třecích sil a jejich následnou implementací. Jsou zde porovnávány možnosti modelů s ohledem na simulaci ulpívání a předskluzových výchylek na testovacích modelech a následně na modelu tří lopatek provázaných třecími členy.

Prvním krokem bylo vybrat vhodné statické a dynamické modely třecích sil. Následně byly tyto modely implementovány v prostředí MATLAB a aplikovány na testovací příklady. Po ověření správné implementace byly statické a dynamické modely třecích sil aplikovány na model trojice lopatek provázaných třecími členy buzených zprvu kvazistatickou a poté harmonickou silou. Na závěr byla kvalita odezvy modelu trojice lopatek buzených harmonickou silou vyhodnocena pomocí bifurkačních diagramů a fázových trajektorií jednoho řezu.

Celkem bylo vybráno sedm modelů třecích sil, z toho byly čtyři statické a tři dynamické. Bylo ověřeno, že ze statických modelů třecích sil do jisté míry postihují jev ulpívání Karnoppův a rozšířený hladký Coulombův model. Z dynamických modelů, které postihují předskluzové výchylky, ulpívání zahrnují LuGre a elasto-plastický model. Dahlovův model, ačkoliv postihuje předskluzové výchylky, nepostihuje efekt ulpívání. Z testovacích modelů se ukazuje, že ulpívání se znatelněji projevuje na výsledcích oproti předskluzovým výchylkám. Z numerických řešičů se jako nejefektivnější ukázal *ode15s*.

Statické a dynamické modely třecích sil byly dále aplikovány na model trojice lopatek provázaných třecími členy, kde byla řešena odezva na kvazistatické a harmonické buzení první z lopatek. Vlivem působení třecích sil došlo k vychýlení i dalších dvou lopatek. U obou případů modely, které postihují ulpívání, způsobují skokové změny výchylek a rychlostí. Oproti tomu modely, které ulpívání nepostihují, mají plynulejší průběh.

Na základě odezvy z buzení trojice lopatek harmonickou silou byly sestaveny bifurkační diagramy a fázové trajektorie řezů. Z bifurkačních diagramů relativních výchylek a relativních rychlostí závislých na amplitudě budící síly a velikosti budící frekvence lze vyčíst podobné chování mezi 1. a 2. lopatkou pro LuGre a rozšířený hladký Coulombův model, tedy mezi dynamickým a statickým modelem simulujícím ulpívání. Podobnost chování lze pozorovat i mezi Dahlovým a hladkým Coulombovým modelem mezi 1. a 2. lopatkou. Z fázových trajektorií jednotlivých modelů vyplývá podobnost v chování LuGre, elasto-plastického a rozšířeného hladkého Coulombova modelu na 1., 2. a 3. lopatce. Ačkoliv tato podobnost na 1. lopatce zůstává při zvyšování budící frekvence, na 2. a 3. lopatce se rozšířený hladký Coulombův model začne znatelně odlišovat od zmíněných dynamických modelů. Elasto-plastický model oproti LuGre modelu vykazuje při stejném nastavení řešiče skokové změny stavových proměnných.

Z výsledků nashromážděných v této práci lze usoudit, že rozdíl mezi statickými a dynamickými modely třecích sil spočívá především v možnosti postihnout ulpívání a předskluzové výchylky. Dahlův model je příkladem dynamického modelu, jehož odezva se ve většině případů podobá odezvě Coulombova nebo hladkého Coulombova modelu. Oproti tomu odezvy Karnoppova a rozšířeného hladkého Coulombova modelu se blížily odezvám LuGre a elasto-plastického modelu. Rozdíly způsobené předskluzovými výchylkami nastávají většinou jen v přechodových stavech a často jsou zanedbatelné. Nejpresnější a nejspolehlivějším modelem se ukazuje být LuGre model. Nicméně rozšířený hladký Coulombův model podává srovnatelné výsledky s výsledky LuGre modelu, navíc je méně náročný na volbu parametrů a při řešení odpadá diferenciální rovnice stavové proměnné.

Literatura

- [1] Ettore Pennestri, Valerio Rossi, Pietro Salvini, Pier Paolo Valentini. *Review and comparison of dry friction force models*. Nonlinear Dyn (2016).
- [2] J. Kellner, V. Zeman. *Modelling of the bladed disk vibration with damping elements in blade shroud*. Applied and Computational Mechanics 4 (2010).
- [3] Carlos Canudas de Witt, Henrik Olsson, Karl Johan Åström, Pablo Lischinsky. *A New Model for Control of Systems with Friction..* Lund University (1995).
- [4] L. Borello, P. Maggiore, G. Villero, M. D. L. Dalla Vedova. *A comparison between dry friction discontinuous computational algorithms*. Department of Aerospace Engineering - Politecnico di Torino (1995).
- [5] M. Byrtus, M. Hajžman, L. Pešek, L. Půst. *Influence of internal friction dampers on global dynamics of discrete cyclic structure*. University of West Bohemia, Faculty of Applied Sciences (2018).
- [6] Filipe Marques, Paulo Flores, J. C. Pimenta Claro, Hamid M. Lankarani. *A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems*. Nonlinear Dyn (2016).
- [7] Jan Brůha. *Kmitání lopatek a olopatkování disků s třecími členy*. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd (2014).
- [8] Josef Kellner. *Kmitání turbínových lopatek a olopatkování disků*. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd (2009).
- [9] Karl Johan Åström, Carlos Canudas de Wit. *Revisiting the LuGre friction model*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (2008).

Seznam obrázků

2.1	Coulombův model: závislost třecí síly na relativní rychlosti	10
2.2	Hladký Coulombův model: vliv parametru v_d na průběh třecí síly . . .	11
2.3	Rozšířený hladký Coulomb: vliv parametru ϵ na průběh třecí síly	12
2.4	Ilustrace deformace štětinky [6]	13
3.1	Schématický nákres testovacího modelu	16
3.2	Srovnání závislosti výchylky na čase pro různé modely třecích sil	17
3.3	Srovnání závislosti rychlosti na čase pro různé modely třecích sil	17
3.4	Srovnání fázových trajektorií pro různé modely třecích sil	18
3.5	Stop-start model	19
3.6	Stop Start test $F = 3$ N	20
3.7	Stop Start test $F = 6$ N	21
3.8	Schéma testu hmotného bodu taženém za pružinu	22
3.9	Graf srovnání výchylek pro různé modely třecích sil	22
4.1	Schéma modelu tří lopatek s třecími členy	23
4.2	Srovnání výchylek a rychlostí lopatek buzených kvazistatickou silou . .	25
4.3	Srovnání výchylek a rychlostí lopatek	26
4.4	Srovnání průběhů stavové proměnné z a třecí síly F_t	27
4.5	Příklad nalezení extrémů funkce relativních výchylek a jejich zobrazení v bifurkačním diagramu při použití Dahlova modelu třecí síly	28
4.6	Příklad nalezení extrémů funkce relativních rychlostí a jejich zobrazení v bifurkačním diagramu při použití Dahlova modelu třecí síly	28
4.7	Srovnání bifurkačních diagramů při změně amplitudy síly	29
4.8	Srovnání bifurkačních diagramů při změně frekvence	30
4.9	Srovnání fázových trajektorií pro různé modely tření při frekvenci $f = 10$ Hz a amplitudě budící síly $F_H = 10$ N	31
4.10	Srovnání fázových trajektorií pro různé modely tření při frekvenci $f = 20$ Hz a amplitudě budící síly $F_H = 10$ N	32
4.11	Srovnání fázových trajektorií pro různé modely tření při frekvenci $f = 30$ Hz a amplitudě budící síly $F_H = 10$ N	33

Seznam tabulek

3.1	Tabulka hodnot parametrů pro 1. testovací model	17
3.2	Tabulka normalizovaných výpočetních časů pro 1. testovací model . . .	18
3.3	Tabulka hodnot parametrů pro 2. testovací model	19
4.1	Hodnoty parametrů použitých pro model buzený kvazistatickou silou .	25