FAKULTA EKONOMICKÁ
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Sbírka příkladů z mikroekonomie

Jiří Pešík, David Martinčík

Sbírka příkladů z mikroekonomie

Jiří Pešík, David Martinčík

ISBN 978-80-261-0478-0

Vydala Západočeská univerzita v Plzni, 2014

Contents

1. Metodologie a optimalizace

1.1 Metodologie moderní ekonomie

Z pohledu metodologie obsahuje ekonomie řadu různých směrů, mezi kterými existují významné rozdíly. Tyto rozdíly jsou pak jedním z hlavním důvodů, proč se různé ekonomické teorie liší svými teoretickými i praktickými implikacemi.

1.1.1 Metodologický pozitivismus

Ekonomie hlavního proudu (někdy označovaná původním anglickým výrazem *mainstream*) je dnes založena především na používání modelů, často založených na pokročilých matematických metodách.

Používání modelů je ekonomy z jiných směrů často kritizováno. Jednotlivé modely jsou pak nejčastěji kritizovány z důvodu jejich předpokladů, které nejsou v souladu s realitou a jsou (dle názoru kritiků) značně zjednodušující. Odpovědí na tuto kritiku byl článek Miltona Friedmana z roku 1953 *Metodologie pozitivní ekonomie*. V něm Friedman vysvětluje, že neexistuje objektivní měřítko toho, *jak moc* jsou předpoklady v souladu s realitou. Naopak samotnou podstatou modelu je určité zjednodušení reality. Zásadní objevy ve vědě by měly spočívat v tom, že vysvětlují *mnoho* pomocí *mála*, nikoli *mnoho* pomocí *mnoha*.

Friedman navrhuje jiné měřítko kvality modelu, a to schopnost modelu poskytovat kvantitativní predikce. Modely lze mezi sebou objektivně porovnávat pomocí jejich schopnosti predikovat ekonomické jevy. Doplňujícím měřítkem je pak složitost modelu a především nákladnost získání potřebných dat. Z alternativních modelů může být zvolen ten s méně přesnými predikcemi, pokud dodatečné náklady na používání druhého modelu nevyvažují zpřesnění predikcí.

Friedman ve svém článku uvádí dnes již legendární příklad s hráčem biliáru. Podle Friedmana by bylo možné na základě matematického modelu používajícího fyzikální a mechanické zákony určit optimální tah a na jeho základě predikovat příští tah profesionálního biliárového hráče. Tento přístup by generoval dostatečně dobré predikce, ačkoli profesionální hráč se rozhoduje čistě na základě svojí intuice.

Cvičení 1.1 Vyhledejte ve Friedmanově stati další příklady, které používá k ilustraci svého pojetí ekonomie. ■

Cvičení 1.2 Vyhledejte další autory, kteří obhajovali použití modelů v ekonomii. ■

R Friedmanův metodologický pozitivismus je rozpracováním dělení ekonomie na pozitivní, normativní a aplikovanou (*political economy as an art*), které roku 1891 publikoval John Neville Keynes, otec slavného Johna Maynarda Keynese. Podle Friedmana je hlavním cílem pozitivní ekonomie konstrukce modelů, které dávají predikce co nejvíce v souladu s realitou. Tato ekonomie tedy zcela rezignuje na explanaci ekonomických jevů (například obecného vysvětlení toho, jak fungují trhy).

1.1.2 Axiomaticko-deduktivní metoda

Starší z ekonomických směrů, rakouská škola, využívá axiomaticko-deduktivní metodologický přístup. K objasnění tohoto pojmu si nejprve definujme pojem axiom.

Definice 1.1.1 — Axiom. Axiom je takové tvrzení, které je považováno za platné, aniž by bylo potřeba jeho platnost dokazovat.

Rakouská škola je postavená na axiomu existence a účelovosti lidského jednání. Z tohoto axiomu jsou pak logicky odvozovány (dedukovány) další poznatky.

R Název rakouská škola je dán faktem, že ve 2. polovině 19. století její zakladatelé a počáteční generace jejích autorů pocházeli z Rakouska. Ve 20. století (mimo jiné v důsledku obsazení Rakouska nacistickým Německem) se tento myšlenkový směr přesunul do ostatních zemí, především do Spojených států amerických.

Ekonomové rakouské školy obhajují axiom lidského jednání tím, že důsledkem jakéhokoli pokusu o jeho popření je jeho potvrzení, protože je nutně účelovým lidským jednání. Tento axiom je platný vždy za veškerých myslitelných podmínek. Z axiomu lidského jednání lze odvodit např. existenci preferenčních škál, na kterých jsou potřeby každého jednotlivce seřazeny od nejakutnější po nejméně akutní. Logicky však nelze odvodit žádný mechanismus, který by umožňoval porovnání preferenčních škál dvou jedinců, díky čemuž rakouská škola odmítá jakékoli utilitaristické teorie.
Z existence preferenčních škál lze pak odvodit další poznatky, jako třeba fungování směny na trhu. Ekonomové rakouské školy pracují s faktem, že pokud je tvrzení logicky bezchybně odvozeno z axiomu lidského jednání, pak je nutně platné vždy a za každých okolností.
Rakouská škola odmítá používání matematických modelů, proti nimž používá celou řadu různých argumentů. Vytrvale upozorňuje na fakt, že mainstreamová ekonomie je uzavřená ve svém světě modelů a je zcela odtržena od reality, přičemž řada ekonomů si toho faktu buď není vědoma, nebo (v horším případě) si toho vědoma je, ale nepovažuje to za problém. Rakouská škola rovněž tvrdě kritizuje státní zásahy do ekonomiky, které považuje jak za morálně neobhajitelné, tak za kontraproduktivní.

R Zatímco dřívější autoři připouštěli existenci určitého *minimálního* státu, jejich nástupci (např. Rothbard) poukazují na problém jeho neudržitelnosti a nemožnosti jeho definice. Není možné objektivně definovat minimální stát, protože každý jedinec má jinou představu o tom, jaké funkce by takový stát měl vykonávat a s jakými prostředky by měl hospodařit. Není tedy možné dojít ke společenskému konsenzu. Neudržitelnost minimálního státu spočívá v tom, že každý stát má tendenci neustále rozšiřovat svoji působnost a své kompetence. Podle Rothbarda neexistují žádné účinné meze, které by státu bránily v takovémto rozpínání.

Ekonomové rakouské školy dlouhodobě odmítají i existenci centrální banky a vyzývají k návratu ke svobodnému bankovnictví (tj. systému, kde mohou komerční banky emitovat vlastní bankovky a mince). Monetární intervence, které provádějí centrální banky, považují za hlavní příčinu hospodářských cyklů.

R Autoři rakouské školy obecně volají po návratu k penězům, které by byly kryty nějakou komoditou (v minulosti se používalo především zlato a stříbro). Dřívější autoři prosazovali systém částečně krytých peněz, v současné době se většina ekonomů rakouské školy přiklání k systému stoprocentních rezerv.

Cvičení 1.3 Vyhledejte v literatuře nejvýznamnější představitele této školy a jejich stěžejní díla. ■

Cvičení 1.4 Metodologii rakouské školy dále definuje přísný metodologický individualismus a metodologický subjektivismus. Vyhledejte v literatuře význam těchto pojmů. ■

1.1.3 Metodologický realismus

Dalším významným metodologickým přístupem je metodologický realismus, který prosazuje především postkeynesiánská ekonomie. Metodologický realismus je protikladem k metodologickému pozitivismu v tom smyslu, že se soustřed'uje především na předpoklady modelů, které se snaží dávat do co největšího souladu s realitou. Ekonomové náležící k tomuto směru např. rozesílali podnikům dotazníky, aby získali informace o jejich chování, a výsledky tohoto průzkumu pak zapracovávali do svých prací.

R Ačkoli se jedná o dotazníkové průzkumy, výrazně se liší od různých marketingových či manažerských výzkumů.

Postkenesiánská ekonomie, podobně jako ta mainstreamová, používá komplikované matematické modely. Vždy však zdůrazňuje vztah modelu (analytické úrovně myšlení) a reality, což bývá nazýváno retrodukcí. Pro nedostatečný akcent na tento vztah kritizují postkeynesiánci mainstream.

Cvičení 1.5 Vyhledejte v literatuře další metodologické přístupy v ekonomii. ■

V této cvičebnici se budeme zabývat neoklasickou mikroekonomií, která je součástí mainstreamové ekonomie. Všechny příklady proto řešte v kontextu tohoto ekonomického směru.

1.2 Optimalizace v ekonomii

Klíčovým pojmem pro neoklasickou ekonomii je optimalizace.

Definice 1.2.1 — Optimalizace. Optimalizací v ekonomii rozumíme výběrem nejlepšího prvku z množiny dostupných prvků vzhledem k určenému (a zpravidla objektivnímu) optimalizačnímu kritériu.

Objektivnost optimalizačního kritéria zaručuje možnost porovnání libovolných dvou dostupných alternativ a rozhodnutí, která z těchto alternativ je preferovaná (případně zda jsou obě varianty považovány za stejně hodnotné). Zásadním metodologickým rozdílem je, zda je možné pouze seřazení variant od nejvíce preferované po nejméně preferovanou či zda lze hodnoty optimalizačního kritéria vzájemně poměřovat (např. zda lze konstatovat, že varianta x je dvakrát lepší než varianta y). V případě spotřebitele se pak tento rozdíl odráží v existenci kardinalistické a ordinalistické teorie užitku (probírané v základním kurzu ekonomie).

V neoklasické mikroekonomii se jako optimalizační kritérium využívá matematická funkce jedné nebo více proměnných. Nezávisle proměnné funkce popisují jednotlivé prvky z množiny dostupných prvků (např. množství spotřebovávaných statků z určitého spotřebního koše) a hodnota závislé proměnné je mírou preference pro každou konkrétní variantu. Pro veškeré další úlohy budeme uvažovat tento typ optimalizace.

V mikroekonomii nejčastěji uvažujeme, že optimalizace provádí spotřebitel nebo firma. Typickou optimalizační úlohou v mainstreamové ekonomii je pak maximalizace užitku spotřebitele nebo maximalizace zisku firmy. Typickou úlohou v mikroekonomii je pak řešení optimalizačního problému – tj. určení nejlepší dostupné varianty.

V případě optimalizace můžeme obecně uvažovat výběr z konečně mnoha prvků, spočetně mnoha prvků nebo nespotřebně mnoha prvků.

Cvičení 1.6 Vymyslete příklad optimalizační úlohy pro výběr z konečně mnoha prvků a pro výběr z nespočetně mnoha prvků. ■

Mohutnost množiny dostupných variant není jedinou možností, jak rozdělovat optimalizační úlohy. V ekonomii dále rozeznáváme optimalizační úlohy:

- volná optimalizace,
- vázaná optimalizace,
- optimalizace se interakcí okolí.

1.2.1 Volná optimalizace

V případě volné optimalizace není množina volných prvků omezena žádnou další funkcí. Může být omezena definičním oborem (kladná spotřeba, kladná výroba atd.). Tento typ optimalizačních úloh se nevyužívá příliš často, protože množství dostupných zdrojů zpravidla bývá omezené a tím pádem bývá omezené i množství existujících cenných statků.

Podle počtu nezávisle proměnných optimalizační funkce pak volíme metodu pro řešení optimalizační úlohy.

- V případě funkce jedné proměnné se využívá derivace prvního a druhého řádu.
- V případě funkcí více proměnných se využívají parciální derivace a následně determinant Hessovy matice.

Definice 1.2.2 — Derivace funkce. První derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x je definovaná jako

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.1}$$

R Derivace funkce $f(x)$ podle jakékoli jiné proměnné je 0. Druhou derivací funkce funkce $f(x)$ pak rozumíme derivaci první derivace a značíme ji $f''(x)$.

Řešení optimalizační úlohy je pak možné na základě jedné ze základních vět matematické analýzy.

Věta 1.2.1 Má-li funkce v bodě a lokální extrém, pak $f'(a) = 0$. Jestliže $f''(a) > 0$, má funkce v bodě a lokální minimum. Jestliže $f''(a) < 0$, má funkce v bodě a lokální maximum.

R Podmínku $f'(a) = 0$ označujeme jako podmínku prvního řádu (často označováno jako *first order conditions* – FOC). Její splnění je nutnou (nikoli však postačující) podmínkou k existenci extrému v bodě a. V případě druhé derivace (a obecně u podmínek, které nám zaručují existenci požadovaného extrému v bodě a) pak hovoříme o podmínkách druhého řádu. V případě maximalizační úlohy pak vyžadujeme, aby daný extrém byl maximem, v případě minimalizační úlohy pak hledáme minimum.

V případě problému spotřebitele, který se snaží maximalizovat svůj užitek ze spotřeby statku X, pak rozlišujeme mezi dvěma typy užitkových funkcí – funkcí celkového a mezního užitku.

Definice 1.2.3 — Užitková funkce. Funkce celkového užitku spotřebitele ze spotřeby statku X je funkcí spotřebovaného množství statku a pro každé uvažované spotřebovávané množství udává velikost subjektivního užitku spotřebitele ze spotřeby. Funkci budeme značit $TU(x)$.
Funkce mezního užitku $MU(x)$ udává zvýšení užitku při spotřebě dodatečné jednotky spotřebního statku. Jinak řečeno, mezní užitek se rovná diferenci celkového užitku při spotřebě $x+1$ a x kusů daného statku, tj.

$$MU(x) = \triangle TU(x) = TU(x+1) - TU(x) \tag{1.2}$$

Předpokládejme nyní, že spotřebitel je schopen vnímat i takové změny ve spotřebovávaném množství, které se limitně blíží nule. Pro takto malé změny pak můžeme aproximovat funkci mezního užitku pomocí derivace funkce celkového užitku, tj.

$$MU(x) \approx TU'(x) = \frac{\partial TU((x)}{\partial x}. \tag{1.3}$$

■ **Příklad 1.1** Spotřebitel má možnost neomezené spotřeby volného statku (cena statku P je rovna 0). Označme si množství spotřebovaného statku jako x (logicky platí, že $x > 0$). Užitková funkce spotřebitele je

$$TU(x) = -x^2 + 15x. \tag{1.4}$$

Určete optimální množství spotřebovaného statku.
Hledáme takovou hodnotu x, pro kterou funkce $TU(x)$ dosahuje maxima. Určíme si derivaci užitkové funkce, tj. funkci mezního užitku $MU(x)$ jako:

$$\frac{\partial TU(x)}{\partial x} = TU'(x) = MU(x) = -2x + 15\,. \tag{1.5}$$

Protože

$$\frac{\partial^2 TU(x)}{\partial x^2} = TU''(x) = MU'(x) = -2 < 0\,, \tag{1.6}$$

jedná se o lokální maximum. Optimální množství spotřebovaného statku určíme z rovnice

$$MU(x) = -2x + 15 = 0 \tag{1.7}$$

Optimální množství spotřebovaných statků je tedy $x = 7{,}5$. ■

V příkladě 1.1 jsme uvažovali, že celkový užitek začne od určitého objemu spotřeby klesat, což je dáno parabolickou užitkovou funkcí. V drtivé většině ekonomických úloh se předpokládá, že celkový užitek s rostoucím objemem spotřeby neustále roste, ačkoli tempo jeho růstu klesá. Mezní užitek tedy stále klesá, ale nikdy nedosáhne záporných hodnot. Tento předpoklad v řadě případů značně zjednodušuje řešení složitějších úloh, protože zaručuje, že kombinace hodnot proměnných splňující podmínky prvního řádu skutečně jsou extrémem žádaného typu. Není tedy nutné kontrolovat splnění podmínek druhého řádu. Toto bude platit pro všechny následující příklady v této sbírce.

1.2.2 Vázaná optimalizace

V případě vázané optimalizace uvažujeme, že subjekt může provádět optimalizaci pouze při splnění určité podmínky (nebo sady podmínek). V typickém případě spotřebitele uvažujeme, že celkový objem finančních prostředků, které jsou vynaloženy na nákup spotřebních statků, nesmí překročit disponibilní množství finančních prostředků.

> **R** Pro zjednodušení budeme uvažovat, že maximalizační úloha má právě dvě nezávisle proměnné. Vyšší množství nezávisle proměnných by výrazně zvýšilo výpočetní náročnost. Navíc by již nebylo možné úlohu graficky zobrazit (například pomocí indiferenčních křivek).

Obecně si můžeme maximalizovanou funkci označit jako $f(x,y)$. Dále uvažujme funkci $g(x,y)$, která reprezentuje podmínku úlohy. Při hledání řešení úlohy uvažujeme jenom takové kombinace x a y, pro které platí, že

$$g(x,y) = c\,. \tag{1.8}$$

Matematicky můžeme maximalizační úlohy s vázanou optimalizací zapsat jako

$$\begin{aligned} &\max_{x,y} && f(x,y) \\ &\text{za podmínky} && g(x,y) = c \end{aligned} \tag{1.9}$$

a minimalizační úlohu jako

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} && f(x,y) \\ &\text{za podmínky} && g(x,y) = c\,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

K řešení tohoto typu úloh se používá **metoda Lagrangeových multiplikátorů**. Pro pochopení jejího principu je nejprve potřeba si připomenout pojem gradient.

Definice 1.2.4 — Gradient. Gradient funkce f v bodě (x_0, y_0) je definován jako vektor prvních parciálních derivací funkce podle všech jejích proměnných, tj.

$$\nabla_{x,y} f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right) \tag{1.11}$$

Přínos gradientu pro řešení optimalizační úlohy je patrný z následující věty. V ní se již vyskytuje Lagrangeův multiplikátor, který budeme značit jako λ.

Věta 1.2.2 V bodě lokálního extrému funkce $f(x,y)$ je gradient maximalizované funkce $f(x,y)$ rovnoběžný s gradientem podmínky $g(x,y)$ (ale obecně mohou být různě dlouhé).
Uvažujme konstantu λ, kterou použijeme ke změně velikosti gradientu funkce $g(x,y)$. Pak v bodě optima (x_0, y_0) platí rovnost

$$\nabla_{x,y} f(x_0,y_0) = \lambda \cdot \nabla_{x,y} g(x_0,y_0) \tag{1.12}$$

R Věta je pouze nutnou (a nikoli postačující) podmínkou k existenci extrému. Dále nám neříká, jakým způsobem rozhodnout o tom, zda se jedná o minimum či maximum. Jak již bylo řečeno, v našich úlohách budou body splňující tuto podmínku vždy extrémy požadovaného typu, od hledání podmínek druhého řádu tedy můžeme abstrahovat.

Lagrangeův multiplikátor λ tedy slouží ke změně velikosti (v případě opačného zamínka pak v převrácení směru) gradientu podmínky $g(x,y)$ tak, aby v bodě extrému byl totožný s gradientem maximalizované (resp. minimalizované) funkce $f(x,y)$.
Ve většině současných učebnic ekonomie se používá tzv. Lagrangeova funkce. Optimální řešení získáme jednoduše tak, že položíme parciální derivace Lagrangeovy funkce podle všech proměnných (včetně λ) rovny 0. Získáme tak soustavu třech rovnic o tří neznámých, kterou je potřeba vyřešit.

Definice 1.2.5 — Lagrangeova funkce. Lagrangeova funkce je zápis podmínek pro optimální řešení do jedné funkce ve tvaru

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,[g(x,y) - c] \tag{1.13}$$

Úlohu pak jednoduše převedeme na řešení problému $\nabla_{x,y,\lambda} \mathscr{L}(x,y,\lambda) = 0$, tj. řešíme soustavu rovnic

$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

Pro sestavení Lagrangeovy funkce přepíšeme rovnici podmínky do tzv. implicitního tvaru:

$$g(x,y) - c = 0\,. \tag{1.14}$$

Lagrangeovu funkci jednoduše získáme tak, že k optimalizované funkci $f(x,y)$ přičteme (nebo od ní odečteme) rovnici podmínky v implicitním tvaru násobenou Lagrangeovým multiplikátorem λ.
Metoda Lagrangeových multiplikátorů je založená na hledání bodů, kde je splněna právě tato rovnost. Postup metody si ilustrujeme na příkladě (prozatím bez ekonomické interpretace).

■ **Příklad 1.2** Vyřešte následující úlohu

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} && f(x,y) = x^2 + y^2 \\ &\text{za podmínky} && x \cdot y = 3\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Úloha má následující velice jednoduchou geometrickou interpretaci: Pohybujeme se po hyperbole $y = \frac{3}{x}$ a hledáme bod (nebo body), které jsou nejblíže k počátku souřadnicové osy.
Sestavíme si Lagrangeovu rovnici pro daný případ.

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x \cdot y - 3) \tag{1.16}$$

a její parciální derivace položeny rovno 0 jsou

$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial x} = 2x + \lambda \cdot y = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial y} = 2y + \lambda \cdot x = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = x \cdot y - 3 = 0$$

Nyní již řešíme soustavu rovnic, tj. s metodou Lagrangeových multiplikátorů jsme v podstatě hotovi.
První dvě rovnice si zapíšeme maticově

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Triviální řešení soustavy $x = 0$, $y = 0$ nesplňuje třetí rovnost $x \cdot y - 3 = 0$. Víme, že soustava má jedno řešení, právě když je determinant roven nule, tj. musí platit

$$4 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2\,. \tag{1.18}$$

Nejprve dosadíme do původní soustavy rovnic $\lambda = 2$. Z první rovnice získáme $x = y$ a substitucí do třetí

$$x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \tag{1.19}$$

Máme tedy dva body obsahující optimum: $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Při dosazení $\lambda = -2$ neexistuje řešení v oboru reálných čísel. ■

V dalších kapitolách si pak vyřešíme řadu příkladů se standardní ekonomickou interpretací. Nejprve se ale podívejme na poslední typ optimalizace.

1.2.3 Optimalizace s interakcí okolí

Okolím rozumíme nějaký jiný subjekt nebo množinu subjektů, které mohou reagovat na potencionální nebo skutečně provedená rozhodnutí. Jedná se o nejsložitější skupinu optimalizačních úloh, které se ale v praxi vyskytují velmi často. Těmito skupinami úloh se zabývá teorie her.
Teorie her je disciplína aplikované matematiky, která se zabývá modelováním situací (her), ve kterých dochází ke konfliktu nebo naopak spolupráci mezi inteligentními a racionálními účastníky. V současné době existuje nepřeberné množství knih a vědeckých prací, které se zabývají teorií her, vývojem nových typů her a popisem jejich zákonitostí. Asi nejznámějším (a současně nejdůležitějším) pojmem v teorii her je Nashova rovnováha.

Definice 1.2.6 — Nashova rovnováha. Nashova rovnováha je taková kombinace strategií, při které žádný z hráčů nemůže *samostatnou* změnou své strategie zlepšit svoji pozici.

Zajímavé bývá srovnání Nashovy a Hicksovy rovnováhy. Nashova rovnováha říká, jakou strategii subjekty skutečně zvolí. Hicksova rovnováha pak udává takovou strategii, která je pro množinu hráčů jako celek *nejvýhodnější* (ale samozřejmě z pohledu jednoho hráče nejvýhodnější být nemusí).

Definice 1.2.7 — Hicksova rovnováha. Hicksova rovnováha je taková kombinace strategií, při které je součet užitků všech hráčů maximální.

V definici Nashovy rovnováhy je důležité, že subjekt nemůže zvýšit svůj užitek samostatnou změnou strategie. Hra ale může mít obecně více Nashových rovnováh a je možné, že pokud svou strategii změní více hráčů a přesunou se do jiné Nashovy rovnováhy, jejich užitek se zvýší.

R Hned v příkladu 1.3 ale uvidíme, že Hicksova rovnováha se může lišit od Nashovy. V tomto případě (a obecně v řadě dalších případů) je možné, že by hráči mohli určitou volbou strategií maximalizovat celkový užitek, ale minimálně jeden z hráčů bude mít tendenci zvolenou strategii změnit. Tato změna pak může vyvolat následnou změnu strategie jiného hráče atd.

Pro úplnost ještě dodejme, že v ekonomii často používaný termín Paretova rovnováha má i vlastní definici v rámci teorie her.

Definice 1.2.8 — Paretova rovnováha. Paretova rovnováha je taková kombinace strategií, při které nelze zvýšit užitek jednoho hráče, aniž by byl snížen užitek jiného hráče.

Teorie her se nejčastěji v ekonomii používá k modelování rozhodování oligopolů.

Příklad 1.3 Dva oligopoly uzavřou kartelovou dohodu, podle které budou oba držet vysoké ceny. Oligopoly se nyní rozhodují, zda dohodu dodržet (D) nebo nedodržet (N). Pokud obě firmy dohodu dodrží, dosáhnou obě zisku 30 mil. Kč. Pokud právě jedna z firem dohodu poruší a sníží ceny, ovládne většinu trhu a získá zisk 60 mil. Kč, druhá bude ve ztrátě 5 mil. Kč. Pokud obě firmy dohodu poruší, bude zisk obou firem 10 mil. Kč.

R Jedná se o variantu jednoho z nejznámějších typů her, který se označuje jako vězňovo dilema. Původní interpretace popisuje situaci dvou osob ve vyšetřovací vazbě, které se rozhodují, zda se mají přiznat ze spáchaného zločinu nebo ne.

Náš případ lze zobrazit na následující tabulce.

	Nedodržet	Dodržet
Nedodržet	10, 10	60, -5
Dodržet	-5, 60	30, 30

Uvažujme nyní situaci oligopolu 1.
- Pokud se druhý oligopol dohodu dodrží, je pro hráče 1 výhodnější dohodu porušit, protože dosáhne dvojnásobného zisku.
- Pokud oligopol 2 dohodu poruší, bude pro oligopol 1 opět výhodnější dohodu porušit, protože namísto ztráty 5 mil. Kč dosáhne zisku 10 mil. Kč.

Vzhledem k symetrii platí pro hráče 2 analogická úvaha.
Závěr: Pro oba oligopoly je vždy výhodnější dohodu porušit. Kombinace strategií, kdy oba hráči dohodu poruší, je Nashovou rovnováhou. Paradoxní je, že takto oba hráči dosáhnou o 20 mld. Kč nižšího zisku, než při dodržení dohody. Kombinace, oba hráči dohodu dodrží, je Hicksovou rovnováhou. ■

Cvičení 1.7 Vyhledejte v tisku reálné příklady porušení kartelových dohod. ■

Cvičení 1.8 Zamyslete se nad tím, proč se v realitě kartelové dohody vyskytují. Své současné úvahy pak porovnejte s dalšími příklady v této kapitole. ■

Příklad 1.4 Letecká společnost ztratila dva naprosto stejné kufry dvou cestujících Adama a Bohouše, kteří se neznají. Společnost hradí škodu od 2000 Kč do 50000 Kč. Každý z cestujících má napsat, na kolik si ztraceného kufru cení (v tisících Kč). Letecká společnost oběma nahradí nižší ze sdělených částek.
1. Nalezněte užitkovou matici.
2. Nalezněte užitkovou matici v případě, že letecká společnost odmění cestujícího, který nabídne nižší částku, tím, že k domluvené částce 2000 Kč přidá a naopak cestujícího s vyšší částkou potrestá tím, že mu od výše uvedené částky 2000 Kč odečte. Nabídnou-li stejně, nepřičítá ani neodečítá se nic.

V obou případech nalezněte Nashovu rovnováhu.
Užitková matice v případě bez penalizace má následující tvar (hodnoty jsou zadávány v tisících Kč):

Table 1.1: Užitková funkce

	2	**3**	**4**	**...**	**48**	**49**	**50**
2	2,2	2,2	2,2	...	2,2	2,2	2,2
3	2,2	3,3	3,3	...	3,3	3,3	3,3
4	2,2	3,3	4,4	...	4,4	4,4	4,4
...	...	...	...	...	...	...	...
48	2,2	3,3	4,4	...	48,48	48,48	48,48
49	2,2	3,3	4,4	...	48,48	49,49	49,49
50	2,2	3,3	4,4	...	48,48	49,49	50,50

Nashovy rovnováhy jsou zvýrazněny tučně. Hra tedy má Nashovu rovnováhu vždy na diagonále. Jedinou ostrou Nashovou rovnováhou je strategie (50, 50). Pokud cestující číslo 1 řekne určitou částku, pak druhý cestující maximalizuje svůj užitek tak, že řekne stejnou nebo libovolnou vyšší částku než první cestující. V opačném případě platí stejná úvaha. Celkový užitek obou hráčů lze postupně zvyšovat tak, že oba řeknou částku o 1 tisíc Kč větší, až se dostanou na hranici 50 tis. Kč, kterou určila letecká společnost jako maximální náhradu. Pro hráče by byla výhodná případná oboustranná spolupráce.
Pokud by jeden z cestujících nahlásil např. 10 tis. Kč, druhý dosáhne maximálního užitku při nahlášení částky 10 tis. Kč, ale i libovolné vyšší (až do částky 50 tis. Kč).

Table 1.2: Užitková funkce s Nashovými rovnováhami

	2	**3**	**4**	**...**	**48**	**49**	**50**
2	**2,2**	2,2	2,2	...	2,2	2,2	2,2
3	2,2	**3,3**	3,3	...	3,3	3,3	3,3
4	2,2	3,3	**4,4**	...	4,4	4,4	4,4
...	...	...	...	...	...	...	...
48	2,2	3,3	4,4	...	**48,48**	48,48	48,48
49	2,2	3,3	4,4	...	48,48	**49,49**	49,49
50	2,2	3,3	4,4	...	48,48	49,49	**50,50**

Užitková funkce v případě druhé varianty:
V tomto případě má hra právě jednu Nashovu rovnováhu. Pokud hráč jedna řekne určitou částku, druhý hráč dosáhne nejvyššího užitku tak, že řekne částku o jeden tisíc menší než první hráč. Např. pokud řádkový hráč řekne částku 3 tis. Kč, sloupcový hráč dosáhne maximálního užitku při nahlášení částky 2. tis. Kč. Sloupcový hráč získá 4 tis. Kč a řádkový nezíská nic. Pokud by sloupcový hráč nahlásil rovněž 3 tis. Kč, získali by oba tuto částku, sloupcový hráč by tedy získal o jeden tisíc méně. V tomto případě by ale byl maximalizován celkový užitek obou hráčů, protože by oba dohromady obdrželi 6 tis. Kč, což je o 2 tisíce více než při sobeckém tahu sloupcového hráče. Nashova rovnováha je strategie (2,2). Ani jeden z hráčů v tomto případě nemá možnost jít s

Table 1.3: Užitková funkce

	2	**3**	**4**	**...**	**48**	**49**	**50**
2	2,2	4,0	4,0	...	4,0	4,0	4,0
3	0,4	3,3	1,5	...	1,5	1,5	1,5
4	0,4	1,5	4,4	...	6,2	6,2	6,2
...	...	...	...	...	...	...	...
48	0,4	1,5	2,6	...	48,48	50,46	50,46
49	0,4	1,5	2,6	...	46,50	49,49	51,47
50	0,4	1,5	2,6	...	46,50	47,51	50,50

nahlášenou částkou dolů a přivlastnit si tak prémii, protože 2 tis. Kč je minimální částka, kterou je možno nahlásit.

Table 1.4: Užitková funkce s Nashovými rovnováhami

	2	**3**	**4**	**...**	**48**	**49**	**50**
2	**2,2**	4,0	4,0	...	4,0	4,0	4,0
3	0,4	3,3	1,5	...	1,5	1,5	1,5
4	0,4	1,5	4,4	...	6,2	6,2	6,2
...	...	...	...	...	...	...	...
48	0,4	1,5	2,6	...	48,48	50,46	50,46
49	0,4	1,5	2,6	...	46,50	49,49	51,47
50	0,4	1,5	2,6	...	46,50	47,51	50,50

■

Příklad 1.4 ukazuje, jak lze jednoduchou změnou pravidel kompletně změnit zvolenou strategii.
V teorii her existují dvě varianty volby jednoho hráče:

1. volba jedné možnosti (čistá strategie),
2. náhodná volba z několika možností, přičemž každé možnosti je apriori přiřazena pravděpodobnost, se kterou bude vybrána (smíšená strategie).

R Čistá strategie je jen speciálním případem smíšené strategie, kdy je jedné strategii apriori přiřazena pravděpodobnost 1 a všem ostatním strategiím pravděpodobnost 0.

■ **Příklad 1.5** Jednoduchým ilustračním příkladem pro smíšené strategie je známá hra kámen-nůžky-papír se dvěma hráči. Jedná se o tzv. hru s nulovým součtem.
Náš případ lze zobrazit na následující tabulce.

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	$0, 0$	$1, -1$	$-1, 1$
Nůžky	$-1, 1$	$0, 0$	$1, -1$
Papír	$1, -1$	$-1, 1$	$0, 0$

Jednoduchou úvahou se pokusme nalézt řešení formou **čisté strategie**.
Proveďme například následující posloupnost úvah (pro hráče 1):

1. Pokud hráč 1 bude hrát vždy kámen, hráč 2 může hrát vždy papír a vždy zvítězí.
2. Pokud hráč 1 bude hrát vždy nůžky, hráč 2 může hrát vždy kámen a vždy zvítězí.
3. Pokud hráč 1 bude hrát vždy papír, hráč 2 může hrát vždy nůžky a vždy zvítězí.

Je tedy hra neřešitelná?
V oblasti čistých strategií ano, ale uvažujme následující kombinaci strategií: Oba hráči budou hrát nůžky s pravděpodobností $\frac{1}{3}$, kámen s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ a papír s $\frac{1}{3}$. Pravděpodobnost vítězství každého hráče je v takovém případě $\frac{1}{3}$, pravděpodobnost prohry je $\frac{1}{3}$ a pravděpodobnost remízy $\frac{1}{3}$.
Jedná se ale o Nashovu rovnováhu?
Předpokládejme, že hráč 1 chce zlepšit svoji pozici jednou z následujících možností

1. Pokud hráč 1 bude hrát kámen s vyšší pravděpodobností než $\frac{1}{3}$, hráč 2 může hrát vždy papír a pravděpodobnost jeho vítězství je vyšší než $\frac{1}{3}$.
2. Pokud hráč 1 bude hrát nůžky s vyšší pravděpodobností než $\frac{1}{3}$, hráč 2 může hrát vždy kámen a pravděpodobnost jeho vítězství je vyšší než $\frac{1}{3}$.
3. Pokud hráč 1 bude hrát papír s vyšší pravděpodobností než $\frac{1}{3}$, hráč 2 může hrát vždy nůžky a pravděpodobnost jeho vítězství je vyšší než $\frac{1}{3}$.

Samostatná změna strategie hráče 1 vede ke změně strategie hráče 2, přičemž hráč 1 si díky změně pohorší.
Kombinace smíšených strategií, kdy oba hráči volí každou možnost s pravděpodobností $\frac{1}{3}$, je Nashova rovnováha. ■

Pro všechny naše hry tedy existuje Nashova rovnováha. Nabízí se otázka, jestli existuje i hra, pro kterou Nashova rovnováha neexistuje? V jednoduchých případech ne, protože platí následující dvě věty.

Věta 1.2.3 — von Neumann, 1928. Každá hra s konečným počtem opakování, dvěma hráči a nulovým součtem užitků má alespoň jednu Nashovu rovnováhu.

R Jedná se o značně pozměněnou interpretaci původní věty, protože pojem Nashovy rovnováhy byl definován Johnem Nashem až o 20 let později.

Předcházející věta pokrývá poměrně úzkou skupinu her (nepokrývá dokonce ani vězňovou dilema), platí ovšem i obecnější věta.

Věta 1.2.4 — Nashova, 1950. Každá hra s konečným počtem opakování má alespoň jednu Nashovu rovnováhu.

Cvičení 1.9 Vymyslete hru s ekonomickou interpretací, kde je Hicksova, Nashova i Paretova rovnováha odpovídá stejné kombinaci čistých strategií. ■

Cvičení 1.10 Vymyslete hru s ekonomickou interpretací, která nemá žádnou čistou rovnováhu. ■

Obě předcházející hry byly rovněž zvláštní tím, že se oba hráči rozhodovali najednou a neznali rozhodnutí předcházejících hráčů. Hry tohoto typu označujeme jako **statické hry**. Teorie her ale umí řešit i **dynamické hry**, ve kterých se jednotliví hráči rozhodují postupně a mají možnost reagovat na rozhodnutí všech předcházejících hráčů. Před popisem tohoto typu her si ale vyzkoušejme jednoduchou logickou úvahu.

Cvičení 1.11 Uvažujme problém oligopolů jako dynamickou hru, tj. druhý oligopol má k dipozici informaci o tom, zda první oligopol dohodu poruší nebo ne. Jaký to bude mít vliv na chování prvního a druhého oligopolu? ■

■ **Příklad 1.6** Dva obchodní řetězce uvažují o výstavbě supermarketu v menším městě. Z marketingové studie vyplývá, že vzhledem k počtu obyvatel je projekt stavby výhodný pouze v případě, že ve městě nebude postaven žádný další supermarket.

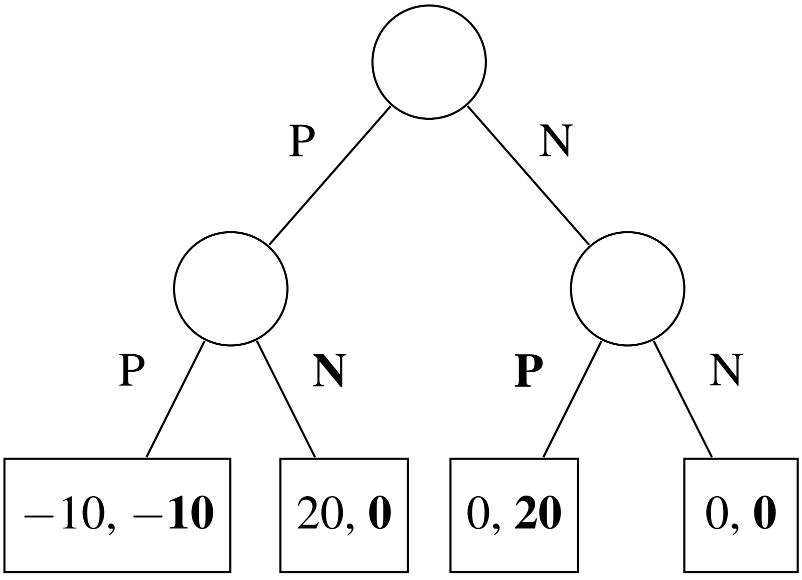
Pro přehlednost si můžeme nejprve hru rozepsat jako statickou, tj.

	Postavit	Nepostavit
Postavit	$-10, -10$	20, 0
Nepostavit	0, 20	0, 0

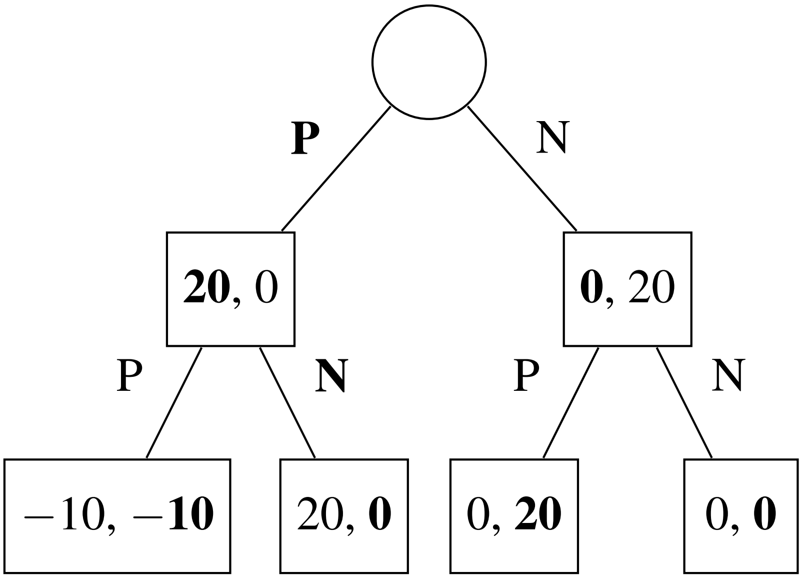
V tomto případě má hra dvě Nashovy rovnováhy, při kterých vždy jedna z firem supermarket postaví a druhá ne. Pokud se totiž jedna z firem rozhodne supermarket postavit, pak druhá preferuje nulovou ztrátu před ztrátou 10 milionů, které by čelila při stavbě supermarketu. Naopak pokud se jedna z firem rozhodne supermarket nepostavit, druhá jej určitě postaví a vydělá na tom 20 milionů. V tomto případě ale v podstatě nevíme, která ze dvou firem supermarket postaví.

Nyní předpokládejme, že ve městě existuje vhodný pozemek pro tuto stavbu, který je v rukou místního obyvatele, jedna ze dvou firem však má na tento pozemek předkupní právo. V takovém případě je tato firma schopna realizovat svůj projekt rychleji a je tedy tou, která se rozhoduje jako první. Současně se informace o rozhodnutí první firmy dostane ke druhé firmě a ta na něj může reagovat.

Tento problém je nejpřehlednější zaznamenat ve formě rozhodovacího stromu. V rozhodovacím stromu vidíme, že nejprve se rozhoduje první hráč o tom, zda supermarket postavit (P) nebo nepostavit (N). Pro každou z variant pak analyzujeme rozhodování druhého hráče. V dolní části stromu jsou rozepsány jejich potenciální užitky.



Tento typ úloh lze řešit metodou zpětné indukce. Uvažujeme-li, že hra má n hráčů, pak při zpětné indukci určíme optimální volbu n-tého hráče pro každé z možných rozhodnutí hráče $n-1$. Pokud víme, jak se rozhodne hráč n, pak pro každé možné rozhodnutí hráče $n-1$ můžeme přímo do rozhodovacího stromu zapsat jeho užitky. Na základě toho pak můžeme určit jeho optimální volbu pro všechna možná rozhodnutí předchozího hráče atd. Postup končí, jakmile dosáhneme prvního hráče.



Nyní se v pozici prvního hráče rozhodujeme, zda supermarket postavit. Víme, že pokud jej postaví, druhý hráč jej již stavět nebude. První hráč má tedy možnost získat zisk 20 milionů a této možnosti nepochybně využije.

Pokud první hráč supermarket postaví, pro druhého hráče je výhodnější ho nepostavit. Naopak pokud první hráč supermarket nepostaví, druhý hráč jej stavět určitě bude. ∎

V této hře je výhodnější hrát jako první, naopak při hře kámen-nůžky-papír je výhodnější hrát jako poslední. Při hře typu vězňovo dilema je jedno, zda se hráči rozhodují najednou či postupně.

Cvičení 1.12 Navrhněte hru s ekonomickou interpretací, kdy je vždy výhodnější hrát jako poslední. ■

Cvičení 1.13 Navrhněte dynamickou hru s ekonomickou interpretací pro tři hráče, kdy je vždy výhodnější hrát jako prostřední. Porovnejte výsledek se situací, kdyby se všichni hráči rozhodovali najednou. ■

1.3 Statická a dynamická optimalizace

Velmi často také rozlišujeme mezi statickými a dynamickými optimalizačními úlohami. V případě dynamické optimalizace vstupuje do úlohy čas a chování subjektu v minulosti má vliv na jeho situaci a možnosti volby v budoucnosti. Subjekt je tedy, kromě omezujících podmínek či okolí, ovlivňován i svými vlastními předchozími rozhodnutími.

R Rozdělení úloh na statické a dynamické se velice často používá v dalších disciplínách, jako např. teorie zásob, kybernetika atd.

V případě dynamických her uvažujeme několik (případně i nekonečně mnoho) opakujících se herních kol. Hráči opět volí strategie jako u statických her, mohou ale navíc reagovat na strategii ostatních hráčů v minulých kolech. V případě dynamických her je ale obrovské množství možných strategií v závislosti na tom, jak a na kolik předchozích rozhodnutí soupeřů každý hráč reaguje. Postup si ukážeme opět na příkladu duopolu.

■ **Příklad 1.7** Uvažujme nyní, že dva oligopolní výrobci se rozhodují o stanovení ceny každý měsíc. Před prvním kolem hráči uzavřou dohodu a každý měsíc pak stanoví cenu podle toho, jestli dohodu dodrží nebo ne. Pokud by hráči nereagovali na chování soupeřů v minulých kolech, mohly by existovat strategie *Vždy dodržet dohodu* a *Vždy nedodržet dohodu*. Obecně je možné, aby hráč v kole t reagoval na libovolné rozhodnutí v kolech 0 až $t-1$. Pro zjednodušení povolíme hráčům pouze strategii *Jednou a dost*, kdy hráč bude dodržovat dohodu až do první zrady svého soupeře. Po první zradě soupeře již smlouvu nikdy dodržovat nebude.
Pro každý měsíc platí následující pravidla:

- pokud dohodu dodrží oba hráči, zisk každého hráče za daný měsíc je 10,
- pokud dohodu poruší oba hráči, zisk každého hráče za daný měsíc je 5,
- pokud dohodu poruší právě jeden hráč, jeho zisk je 18 a zisk hráče, který dohodu dodržel, získá 2.

Ukážeme si nejprve případ s 10 opakujícími se koly.

	VN	VD	J!
VN	$5\cdot 10=50$, $5\cdot 10=50$	$18\cdot 10=180$, $2\cdot 10=20$	$9\cdot 5=63$ $2+9\cdot 5=47$
VD	$2\cdot 10=20$, $18\cdot 10=180$	$10\cdot 10=100$, $10\cdot 10=100$	$10\cdot 10=100$, $10\cdot 10=100$
J!	$2+9\cdot 5=47$, $18+9\cdot 5=63$	$10\cdot 10=100$, $10\cdot 10=100$	$10\cdot 10=100$, $10\cdot 10=100$

Z tabulky vidíme, že pokud jeden z hráčů bude hrát podle strategie *Jednou a dost*, pak je pro druhého výhodné hrát buď stejnou strategii nebo strategii *Vždy dodržet dohodu*. Obě strategie vedou k tomu, že oba hráči budou ve všech kolech dodržovat dohodu. Kartelová dohoda tedy bude stabilní.
Problém je v tom, že hráčům jsme povolili pouze omezenou množinu strategií. Pokud bychom připustili více strategií, pak v posledním kole by pro hráče nebylo výhodné dohodu dodržovat, protože soupeř by jim to v dalším kole již nemohl oplatit. Pokud je však jasné, že hráči v posledním kole tak jako tak dohodu poruší, neexistuje důvod dohodu dodržovat v předposledním kole a tak dále.
Je možné uvažovat i nekonečně (ale spočetně) mnoho herních kol. Protože by však byl celkový zisk pro všechny strategie nekonečný, nešlo by je vzájemně porovnat. Proto uvažujme diskontní faktor δ ($\delta \in (0,1)$), kterým je diskontován užitek ze všech kol. Užitek a_t v kole t má pak diskontovanou hodnotu $\delta^t \cdot a_t$. Pokud kombinace strategií zaručuje užitek a_t pro $t = 1,2,3\ldots$, pak celkový užitek ze strategie je $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot a_t$.
Uvažujme nyní, že nějaká kombinace strategií zajistí konstantní užitek a. V předchozím případě to byla například kombinace strategií *Jednou a dost*. Je zřejmé, že se jedná o geometrickou řadu a protože $|\delta| < 1$, je tato řada konvergentní. Její součet je $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot a = \frac{a}{1-\delta}$. Pokud je užitek v několika kolech jiný, lze rovněž využít předchozí vzorec. Uvažujme, že se užitek liší v nultém kole od a o Δ_0, tj. $\Delta_0 = a_0 - a$. Pak je součet užitků dán vzorcem $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot a_t = \frac{a}{1-\delta} + \delta^0 \cdot \Delta_0 = \frac{a}{1-\delta} + \Delta_0$.

R Obecně pokud by se užitek lišil v n kolech ($n \in \mathbb{N}$), pak lze určit rozdíly $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ a součet užitků je dán vzorcem $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot a_t = \frac{a}{1-\delta} + \delta^0 \cdot \Delta_0 + \delta^1 \cdot \Delta_1 + \delta^2 \cdot \Delta_2 + \ldots + \delta^n \cdot \Delta_n$.

Uvažujme nyní model chování oligopolů v nekonečném časovém horizontu. Uvažujme stejné strategie jako v předchozím případě.

	VN	VD	J!
VN	$\frac{5}{1-\delta}, \frac{5}{1-\delta}$	$\frac{18}{1-\delta}, \frac{2}{1-\delta}$	$\frac{5}{1-\delta} + 15, \frac{5}{1-\delta} - 3$
VD	$\frac{2}{1-\delta}, \frac{18}{1-\delta}$	$\frac{10}{1-\delta}, \frac{10}{1-\delta}$	$\frac{10}{1-\delta}, \frac{10}{1-\delta}$
J!	$\frac{5}{1-\delta} - 3, \frac{5}{1-\delta} + 15$	$\frac{10}{1-\delta}, \frac{10}{1-\delta}$	$\frac{10}{1-\delta}, \frac{10}{1-\delta}$

Výběr strategie záleží na velikosti diskontního faktoru δ. Pokud budou hráči dostatečně trpěliví, pak se Nashovou rovnováhou stanou strategie *Jednou a dost* a *Vždy dodržet dohodu*. Kartelová dohoda tedy bude stabilní. ■

V předchozích hrách jsme uvažovali omezenou množinu strategií. Firma však může rozhodovat přímo o objemu vyrobené produkce. V takovém případě existuje velké množství existujících strategií. Protože řešení takové hry předchozími postupy by bylo velmi komplikované, používá se spojitá aproximace. Budeme tedy předpokládat, že objem vyrobené produkce q_i i-tou firmou je z množiny reálných čísel. Pak můžeme odvodit rovnováhy firem pomocí derivací.

■ **Příklad 1.8** V Cournotově modelu uvažujeme dvě firmy. Produkci firem označíme q_i ($i \in \{1,2\}$)). Celková produkce odvětví je $Q = q_1 + q_2$. Tržní cena závisí na množství nabízeného zboží. Pokud je produkce firem příliš vysoká a překročí určitou maximální úroveň Q_0, je cena zboží nulová. Uvažujme lineární vztah $P(Q) = P_0(1 - \frac{Q}{Q_0})$, který platí pro $0 < Q < Q_0$. Uvažujme lineární nákladovou funkci $C(q_i) = c \cdot q_i$, fixní náklady jsou nulové. Zisk i-té firmy je dán rovnicí

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i \cdot P(Q) - c \cdot q_i\,.$$

Tuto funkci chceme maximalizovat, položíme tedy první parciální derivaci rovnu 0. V případě první firmy

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0\,.$$

Parciální derivace má tvar

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \left[q_1 \cdot P_0 \left(1 - \frac{q_1+q_2}{Q_0}\right) - c \cdot q_1\right]}{\partial q_1} = \\
&\frac{\partial \left(q_1 \cdot P_0 - q_1^2 + \frac{P_0}{Q_0} q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{P_0}{Q_0} - c \cdot q_1\right)}{\partial q_1} = \\
&\qquad\qquad P_0 - 2 \cdot q_1 \cdot \frac{P_0}{Q_0} - q_2 \cdot \frac{P_0}{Q_0} - c = 0\,. \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Z rovnosti si vyjádříme q_1:

$$\begin{aligned}
-2 \cdot q_1 \cdot \frac{P_0}{Q_0} &= -P_0 + q_2 \cdot \frac{P_0}{Q_0} + c \\
q_1 &= \frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{q_2}{Q_0} - \frac{c}{P_0}\right).
\end{aligned}$$

Snadno bychom pomocí druhé parciální derivace podle q_1 ověřili, že zisk je v pro vypočítané q_1 maximální.
Obdobným způsobem lze určit nabízené množství druhou firmou:

$$q_2 = \frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{q_1}{Q_0} - \frac{c}{P_0}\right)$$

Nashovu rovnováhu získáme jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{q_2}{Q_0} - \frac{c}{P_0}\right) \\
q_2 &= \frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{q_1}{Q_0} - \frac{c}{P_0}\right)
\end{aligned}$$

Soustavu lze řešit například substitucí - do první rovnice si dosadíme za q_2 ze druhé rovnice a upravíme

$$q_1 = \frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{\frac{Q_0}{2}(1 - \frac{q_1}{Q_0} - \frac{c}{P_0})}{Q_0} - \frac{c}{P_0}\right)$$
$$q_1 = \frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{q_1}{2\cdot Q_0} + \frac{c}{2\cdot P_0} - \frac{2\cdot c}{2\cdot P_0}\right)$$
$$q_1 = \frac{Q_0}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{q_1}{2\cdot Q_0} - \frac{c}{2\cdot P_0}\right)$$
$$q_1 = \frac{Q_0}{4} + \frac{q_1}{4} - \frac{c\cdot Q_0}{4\cdot P_0}$$
$$\frac{4\cdot q_1}{4} - \frac{q_1}{4} = \frac{Q_0}{4}\left(1 - \frac{c}{P_0}\right)$$
$$\frac{3\cdot q_1}{4} = \frac{Q_0}{4}\left(1 - \frac{c}{P_0}\right)$$
$$q_1 = \frac{Q_0}{3}\left(1 - \frac{c}{P_0}\right)$$

Je zřejmé, že platí $q_1 = q_2$ a tedy $q_1 = q_2 = \frac{Q_0}{3}(1 - \frac{c}{P_0})$.
Lze dokázat, že funkce zisku obou firem by byla $\pi_i = \frac{Q_0 \cdot P_0}{9}(1 - \frac{c}{P_0})^2$.
Dvojice firem bude vyrábět více zboží a nabízet ho za nižší cenu, než by prováděl monopolní výrobce. ∎

Cvičení 1.14 Vyhledejte v literatuře Stackelbergův model a porovnejte ho s Cournotovým. V čem se liší? ∎

2. Teorie spotřebitele

V rámci teorie spotřebitele budeme analyzovat chování spotřebitele na trzích výrobního zboží. Budeme tedy řešit problém parciální rovnováhy, tj. budeme hledat rovnovážný stav na jednom z trhů. Komplexnějšímu pohledu na ekonomickou realitu se budeme věnovat v rámci kapitoly 4 (viz strana 63).

2.1 Marshallova úloha

Základním problémem, který budeme v rámci teorie spotřebitele řešit, je Marshallova úloha. Při této úloze uvažujeme spotřebitele, který má určité (konstantní a exogenně dané) množství peněžních prostředků a ty chce utratit za zboží a služby.
Pro zjednodušení budeme pracovat s předpokladem, že spotřebitel se rozhoduje mezi dvěma druhy zboží – zbožím X a zbožím Y.

Definice 2.1.1 Marshallovou úlohou myslíme maximalizaci užitku při konstantním a pevně daném důchodu (jehož výši označujeme jako I), tj.

$$\begin{aligned} \max_{X,Y} \quad & U(X,Y) \\ \text{za podmínky} \quad & P_X \cdot X + P_Y \cdot Y = I\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

K Marshallově úloze se váže pojem Marshallovy poptávky.

Definice 2.1.2 — Marshallova poptávka. Marshallova poptávka spotřebitele po statku X je množství peněžních prostředků spotřebitele a cen P_X a P_Y a udává množství statku X, které spotřebitel poptává, jestliže minimalizuje své peněžní výdaje.

Nejprve si určíme obecné optimum spotřebitele, tj. nebudeme uvažovat žádnou konkrétní užitkovou funkci.

■ **Příklad 2.1** Určete podmínku, která zaručuje maximalizaci užitku spotřebitele pro Marshallovu úlohu.

Nejprve sestavíme Lagrangeovu funkci. Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L} = U(X,Y) + \lambda (P_X \cdot X + P_Y \cdot Y - I)\,. \tag{2.2}$$

Určíme si její parciální derivace a položíme je rovny nule:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} &= MU_X(X,Y) + \lambda \cdot P_X = 0\,,\\
\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} &= MU_Y(X,Y) + \lambda \cdot P_Y = 0\,,\\
\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} &= P_X \cdot X + P_Y \cdot Y - I = 0\,.
\end{aligned}$$

$MU_X(X,Y)$ je funkce mezního užitku ze spotřeby (viz definice 1.2.3 na straně 9).
Pokud si z prvních dvou rovnic vyjádříme λ:

$$\lambda = -\frac{MU_X(X,Y)}{P_X} = -\frac{MU_Y(X,Y)}{P_Y}\,, \tag{2.3}$$

úpravou této rovnice získáme podmínku maximalizace užitku:

$$\frac{MU_X(X,Y)}{MU_Y(X,Y)} = \frac{P_X}{P_Y}\,, \tag{2.4}$$

tedy poměr mezních užitků se rovná poměru cen zboží.
Spotřebitel tedy maximalizuje svůj užitek, pokud se poměr mezních užitků rovná poměru cen zboží a pokud se objem výdajů na spotřební zboží rovná jeho důchodu. ■

Definice 2.1.3 — Stínová cena. Stínová cena je hodnota, o kterou se změní hodnota maximalizované funkce při zvýšení hodnoty omezení o 1.

Zjistili jsme, že Lagrangeův multiplikátor λ je dán výrazem

$$\lambda = -\frac{MU_X(X,Y)}{P_X} = -\frac{MU_Y(X,Y)}{P_Y}\,, \tag{2.5}$$

tedy poměr mezního přínosu a mezního nákladu z jednotky dalšího statku. Jinak řečeno, je to přírůstek užitku při zvýšení důchodu spotřebitele. Jedná se tedy o stínovou cenu důchodu.
Nyní budeme optimalizovat užitek spotřebitele s konkrétní užitkovou funkcí.

■ **Příklad 2.2** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí ve tvaru

$$U = X^c \cdot Y^d \tag{2.6}$$

s parametry c a d. Určete Marshallovy poptávky spotřebitele po statcích X a Y.
Příklad lze zjednodušit zlogaritmováním užitkové funkce (pozitivně monotónní transformace):

$$\ln U(X,Y) = c \cdot \ln X + d \cdot \ln Y \tag{2.7}$$

R Pozitivně-monotónní transformací máme na mysli fakt, že pořadí funkčních hodnot užitkové funkce pro všechny varianty spotřebních košů zůstane stejné. Změní se sice absolutní hodnota jednotlivých užitků, ale v tomto případě pouze požadujeme, aby tato hodnota byla maximální, nezajímáme se o její konkrétní výši.

Řešíme následující problém

$$\begin{aligned} &\max_{X,Y} && c\cdot\ln X + d\cdot\ln Y \\ &\text{za podmínky} && P_X\cdot X + P_Y\cdot Y = I\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L} = c\cdot\ln X + d\cdot\ln Y + \lambda(P_X\cdot X + P_Y\cdot Y - I)\,. \tag{2.9}$$

Určíme si její parciální derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} &= \frac{c}{X} + \lambda\cdot P_X = 0 \\ \frac{\partial\mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} &= \frac{d}{Y} + \lambda\cdot P_Y = 0 \\ \frac{\partial\mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} &= P_X\cdot X + P_Y\cdot Y - I = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic si vyjádříme proměnné c a d:

$$\begin{aligned} c &= -\lambda\cdot P_X\cdot X\,, \\ d &= -\lambda\cdot P_Y\cdot Y\,. \end{aligned}$$

Rovnice můžeme sečíst a upravit:

$$\begin{aligned} c+d &= -\lambda\cdot P_X\cdot X + \lambda\cdot P_Y\cdot Y\,, \\ c+d &= -\lambda(P_X\cdot X + P_Y\cdot Y)\,. \end{aligned}$$

Protože víme, že $P_X\cdot X + P_Y\cdot Y = I$, můžeme si proměnnou λ vyjádřit jako

$$\lambda = -\frac{c+d}{I} \tag{2.10}$$

a dosadit ji do původních rovnic

$$\begin{aligned} c &= \frac{c+d}{I}\cdot P_X\cdot X \\ d &= \frac{c+d}{I}\cdot P_Y\cdot Y \end{aligned}$$

Nyní si vyjádříme X a Y, čímž již získáme Marshallovy poptávky.

$$\begin{aligned} M_X(I,P_X,P_Y) &= X = \frac{c}{c+d}\cdot\frac{I}{P_X}\,, \\ M_Y(I,P_X,P_Y) &= Y = \frac{d}{c+d}\cdot\frac{I}{P_Y}\,. \end{aligned}$$

Výrazy $\frac{c}{c+d}$ a $\frac{d}{c+d}$ určují podíly výdajů na statky X a Y. ■

R Pokud do funkcí poptávek dosadíme konkrétní ceny a důchod, získáme její funkční hodnotu, která se nazývá poptávané množství. Jediný rozdíl mezi poptávkou a poptávaným množstvím je tedy dosazení konkrétních hodnot. V dalším textu nebudeme proto tyto pojmy rozlišovat a budeme používat pouze pojem poptávka, přičemž z kontextu vždy vyplyne zda se jedná o funkci nebo její funkční hodnotu.

Příklad 2.3 Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U(X,Y) = X \cdot Y\,, \tag{2.11}$$

dále platí $P_X = 4$, $P_Y = 10$, $I = 160$. Určete poptávky po statcích X a Y.
Pro zjednodušení provedeme monotónní transformaci

$$U(X,Y) = X^{\frac{1}{2}} \cdot Y^{\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

a poté druhou transformaci

$$\ln U(X,Y) = \frac{1}{2} \cdot \ln X + \frac{1}{2} \cdot \ln Y \tag{2.13}$$

Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} \cdot \ln X + \frac{1}{2} \cdot \ln Y + \lambda(4X + 10Y - 160)\,. \tag{2.14}$$

Určíme si její parciální derivace

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} &= \frac{1}{2X} + 4\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} &= \frac{1}{2Y} + 10\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} &= 4X + 10Y - 160 = 0
\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic si vyjádříme λ:

$$\lambda = -\frac{1}{20Y} = -\frac{1}{8X}$$

Dosadíme zpět a upravíme

$$\begin{aligned}
X &= \frac{5Y}{2} \\
Y &= \frac{2X}{5}
\end{aligned}$$

Vidíme, že spotřebitel bude vždy nakupovat oba statky v konstantním poměru. Dosadíme druhou rovnici do rozpočtového omezení:

$$4X + \frac{20X}{5} = 160\,. \tag{2.15}$$

Po úpravě

$$X = 20\,. \tag{2.16}$$

Spotřebitel tedy nakupuje 20 kusů statku X a 8 kusů statku Y. ■

2.1.1 Nepřímá funkce užitku

Zatímco užitková funkce je nám dobře známá ze základního kurzu mikroekonomie, při řešení Marshallovy úlohy můžeme odvodit i nepřímou funkci užitku. Ta nám rovněž udává velikost užitku spotřebitele, ale v závislosti na jiných proměnných.

Definice 2.1.4 — Nepřímá funkce užitku. Nepřímá funkce užitku je funkcí důchodu spotřebitele a cen zboží P_X a P_Y a udává velikost užitku spotřebitele ze spotřeby.

V následujícím příkladě využijeme Marshallovy poptávky, které jsme si odvodili v příkladu 2.2.

■ **Příklad 2.4** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U = X^{\frac{1}{2}} \cdot Y^{\frac{1}{2}}. \tag{2.17}$$

Určete nepřímou funkci užitku.
Užitková funkce je analogická k příkladu 2.2. Jediný rozdíl je v tom, že uvažujeme konkrétní hodnoty parametrů $c = \frac{1}{2}$ a $d = \frac{1}{2}$. Marshallovy poptávky tedy mají tvar

$$M_X(I, P_X, P_Y) = X = \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{P_X},$$
$$M_Y(I, P_X, P_Y) = Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{P_Y}.$$

Nepřímou funkcí užitku získáme dosazením Marshallových poptávek do užitkové funkce:

$$U(X, Y, I) = X^{\frac{1}{2}} \cdot Y^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{I}{P_X}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{I}{P_Y}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}$$

Provedeme úpravu předchozí rovnice

$$\sqrt{\frac{I^2}{4P_X \cdot P_Y}} = \frac{I}{2 \cdot \sqrt{P_X \cdot P_Y}} = V(P_X, P_Y, I). \tag{2.19}$$

Funkce $V(P_X, P_Y, I)$ udává velikost užitku spotřebitele a je funkcí ceny statků a důchodu spotřebitele, jedná se tedy o nepřímou funkci užitku. ■

2.1.2 Elasticita poptávky a daně

Dalším známým pojmem ze základního kurzu mikroekonomie je elasticita poptávky. Kromě cenové elasticity ale můžeme určovat i důchodovou a křížovou elasticitu. Nejprve si tyto elasticity definujme. Je zřejmé, že struktura vzorce je vždy stejná, mění se pouze proměnné, ke kterým se elasticita vztahuje.

Definice 2.1.5 — Cenová elasticita poptávky. Bodová cenová elasticita poptávky zboží X je měřítkem citlivosti poptávky po zboží X na změnu P_X

$$e_{P_X,X} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial P_X}}{\frac{Q}{P_X}} = \frac{\frac{\partial M_X}{\partial P_X}}{\frac{M_X}{P_X}} \tag{2.20}$$

Definice 2.1.6 — Důchodová elasticita poptávky. Bodová důchodová elasticita poptávky zboží X je měřítkem citlivosti poptávky po zboží X na změnu důchodu

$$e_{I,X} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial I}}{\frac{Q}{I}} = \frac{\frac{\partial M_X}{\partial I}}{\frac{M_X}{I}} \tag{2.21}$$

Definice 2.1.7 — Křížová elasticita poptávky. Bodová křížová elasticita poptávky zboží X je měřítkem citlivosti poptávky po zboží X na změnu P_Y

$$e_{P_Y,X} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial P_Y}}{\frac{Q}{P_Y}} = \frac{\frac{\partial M_X}{\partial P_Y}}{\frac{M_X}{P_Y}} \tag{2.22}$$

Nyní si tyto definice procvičme na následujícím příkladě.

■ **Příklad 2.5** Marshallova poptávka po statku X má tvar

$$M_X(P_X,P_Y,I) = 25 + 0{,}5I - 0{,}2P_X + 1{,}5P_Y\,. \tag{2.23}$$

Pro $I = 15$, $P_X = 75$ a $P_Y = 5$ určete cenovou, křížovou a důchodovou elasticitu poptávky. Dále rozhodněte, zda se jedná o statek normální, podřadný či Gifennův a zda statky X a Y jsou substituty a komplementy.
Určíme současnou poptávku spotřebitele:

$$M_X(P_X,P_Y,I) = 25 + 7{,}5 - 15 + 7{,}5 = 25 \tag{2.24}$$

Nejprve určíme cenovou elasticitu poptávky.
Dosadíme do vzorce:

$$e_{P_X,X} = \frac{-0{,}2}{\frac{25}{75}} = -\frac{20}{\frac{100}{3}} = -\frac{6}{10} \tag{2.25}$$

Poptávka je neelastická a nejedná se o Giffenův statek.
Dosadíme do vzorce:

$$e_{I,X} = \frac{0{,}5}{\frac{25}{15}} = \frac{5}{\frac{50}{3}} = \frac{3}{10} \tag{2.26}$$

Jedná se o normální statek.
Dosadíme do vzorce:

$$e_{P_Y,X} = \frac{1{,}5}{\frac{25}{5}} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} \tag{2.27}$$

Statky jsou substituty. ■

Na mikroekonomické analýze můžeme demonstrovat i širší makroekonomické souvislosti. V následujícím příkladě si ukážeme, jak se změní životní situace spotřebitele při zavedení dvou různých druhů zdanění.

▪ **Příklad 2.6** Vláda plánuje zdanit spotřebitele a rozhoduje se, zda použít přímou (důchodovou) nebo nepřímou (spotřební) daň. Daňové sazby vláda stanoví tak, aby v případech obou daní byl daňový výnos stejný. Rozhodněte, která z daní bude mít více negativní dopad na spotřebitele.
Původní rozpočtové omezení spotřebitele je

$$P_X \cdot X + P_Y \cdot Y = I\,. \tag{2.28}$$

Uvažujme zavedení spotřební daně se sazbou $t > 0$ na statek X. Rozpočtové omezení má nyní tvar

$$(t + P_X) \cdot X + P_Y \cdot Y = I\,. \tag{2.29}$$

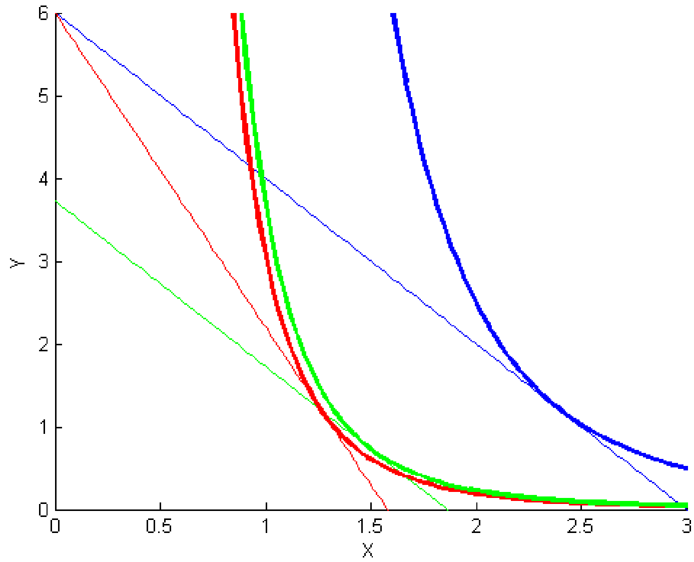
Označme si nová optimální množství zboží jako $X^\star$ a $Y^\star$ a daňový výběr jako

$$R^\star = t \cdot P_X \cdot X^\star\,. \tag{2.30}$$

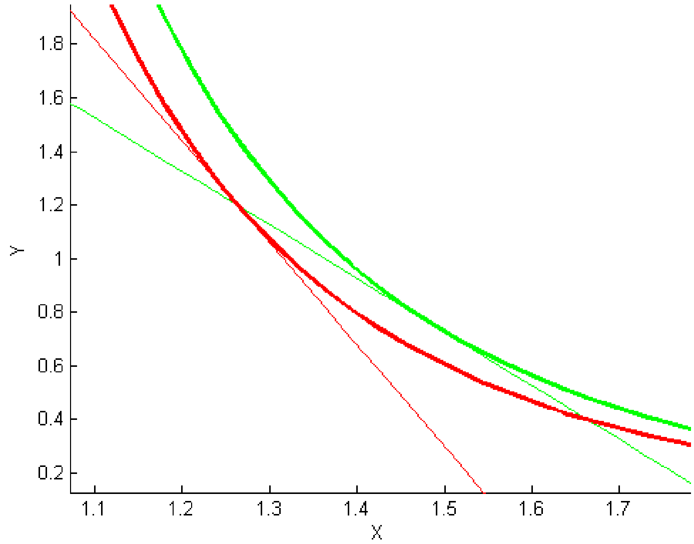
Rozpočtové omezení pro přímou daň je

$$(t + P_X) \cdot X + P_Y \cdot Y = I - R^\star = I - t \cdot P_X \cdot X^\star\,. \tag{2.31}$$

Je zřejmé, že linie rozpočtu obou daní se protínají v bodě optima při nepřímé dani $(X^\star, Y^\star)$. Mezní míra substituce v bodě $(X^\star, Y^\star)$ je $-\frac{P_X(1+t)}{P_Y}$. Při důchodové dani je směrnice linie rozpočtu $-\frac{P_X}{P_Y}$, mezní míra substituce bude tedy v optimu $-\frac{P_X}{P_Y}$. Indiferenční křivka označující užitek při nepřímém zdanění musí protínat linii rozpočtu při přímém zdanění. Existuje tedy indiferenční křivka s vyšším užitkem, která tečuje linii rozpočtu při přímém zdanění.
Závěr: Spotřebitel dosahuje vyšší úrovně užitku při přímé dani než při nepřímé dani.



▪



2.1.3 Engelovy křivky a další typy poptávek

V této subkapitole se budeme věnovat dvěma důležitým pojmům – Engelově křivce a homogennosti poptávky.
Definujme si nejprve pojem homogenosti funkce. Definice tohoto pojmu je velmi obecná, protože se jedná o jednu ze standardních vlastností funkcí v matematické analýze. V této části si rozebereme význam homogenosti funkce v teorii spotřebitele. Tento pojem však nabývá ještě většího významu v teorii firmy, proto se k němu v budoucnosti vrátíme.

Definice 2.1.8 — Homogennost funkce. Říkáme, že funkce je homogenní stupně a v proměnných $x_1, x_2, \cdot, x_n$, jestliže pro všechna $c \in \mathbb{R}$

$$f(c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n, y_1, y_2, \ldots y_n) = c^a \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_n). \tag{2.32}$$

Tento pojem si v příkladu ilustrujeme na Marshallových poptávkách.
Nyní si definujme pojem Engelových křivek.

Definice 2.1.9 — Engelova křivka. Engelova křivka vyjadřuje množství nakupovaného zboží v závislosti na výši důchodu spotřebitele.

Konkrétní tvar Engelových křivek pro daného spotřebitele můžeme odvodit z jeho Marshallových poptávek.

■ **Příklad 2.7** Uvažujme spotřebitele s užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y + X + Y. \tag{2.33}$$

1. Určete Marshallovy poptávky po statcích X a Y.
2. Rozhodněte, zda je Marshallova poptávka po zboží X homogenní ve všech třech proměnných. Pokud ano, určete stupeň homogennosti.
3. Určete rovnici Engelovy křivky pro statek X.

Uvažujte, že $I = 100$, $P_X = 5$ a $P_Y = 10$.
Marshallovy poptávky jsou dány funkcemi

$$M_X(P_X, P_Y, I) = \frac{I - P_X + P_Y}{2P_X} \tag{2.34}$$

a

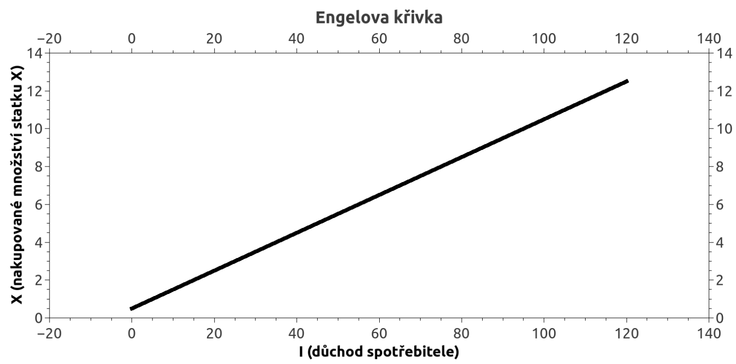
$$M_Y(P_X,P_Y,I) = \frac{I+P_X-P_Y}{2P_Y} \tag{2.35}$$

Pro naši Marshallovu poptávku platí rovnost

$$M_X(c\cdot P_X, c\cdot P_Y, c\cdot I) = \frac{c\cdot I - c\cdot P_X + c\cdot P_Y}{c\cdot 2\cdot P_X}$$
$$= \frac{c\,(I-P_X+P_Y)}{c\cdot 2\cdot P_X}$$
$$= \frac{I+P_X-P_Y}{P_Y}$$
$$= c^a\cdot M_X(P_X,P_Y,I)$$

v případě, že $a=0$. Marshallova poptávka je tedy homogenní funkcí stupně 0 ve všech proměnných.
Do rovnice Marshallovy poptávky dosadíme P_X a P_Y:

$$X = \frac{I-P_X+P_Y}{2P_X} = \frac{I-5+10}{10} = \frac{I}{10}+\frac{1}{2}. \tag{2.36}$$



■

R Poznatek o homogennosti Marshallových poptávek má obrovský význam pro samotnou podstatu neoklasické mikroekonomie. Uvažujme následující situaci: V ekonomice dojde v extrémně krátkém čase ke zdvojnásobení všech cen i příjmů všech subjektů. Na základě homogennosti pak můžeme porovnat Marshallovy poptávky po této změně a před touto změnu a platí, že:

$$M_X(2\cdot P_X, 2\cdot P_Y, 2\cdot I) = M_X(P_X,P_Y,I)\,. \tag{2.37}$$

Tj. ekonomické subjekty nebudou na tuto změnu nijak reagovat a budou se držet současného vzorce chování.

Vzpomeňme si nyní na kvantitativní rovnici směny. Jestliže by v ekonomice došlo ke změně cen bez změny objemu peněžní zásoby, bude docházet k tendencím k návratu k původní cenové hladině.

Důležitým závěrem tedy je, že v neoklasické ekonomii neuvažujeme peníze ve smyslu kvantitativní rovnice směny. Uvažujeme pouze poměrové ceny.

Tento problém je obecně nazýván jako klasická dichotomie a formuloval ho izraelský ekonom Don Patinkin v roce 1954.

Na závěr této části si definujeme další dva typy poptávek.
Cournotova poptávka je ve skutečnosti dobře známou poptávkou ze základního kurzu mikroekonomie, tedy funkce vyjadřující nakupované množství statku v závislosti na ceně tohoto konkrétního statku.

Definice 2.1.10 — Cournotova poptávka. Cournotova poptávka vyjadřuje množství nakupovaného zboží v závislosti na jeho ceně.

R Cournotova poptávka nemá žádnou souvislost s výše analyzovaným Cournotovým modelem.

Význam křížové poptávky je intuitivně zřejmý.

Definice 2.1.11 — Křížová poptávka. Křížová poptávka po statku X vyjadřuje množství nakupovaného zboží statku X v závislosti na ceně statku Y.

■ **Příklad 2.8** Uvažujme spotřebitele s užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y + X + Y. \tag{2.38}$$

1. Určete Marshallovy poptávky po statcích X a Y.
2. Rozhodněte, zda je Marshallova poptávka po zboží X homogenní ve všech třech proměnných. Pokud ano, určete stupeň homogennosti.
3. Určete rovnici Cournotovy poptávky pro statek X.
4. Určete rovnici křížové poptávky pro statek X.

Uvažujte, že $I = 100$, $P_X = 5$ a $P_Y = 10$.
Marshallovy poptávky jsou dány funkcemi

$$M_X(P_X, P_Y, I) = \frac{I - P_X + P_Y}{2P_X} \tag{2.39}$$

a

$$M_Y(P_X, P_Y, I) = \frac{I + P_X - P_Y}{2P_Y}. \tag{2.40}$$

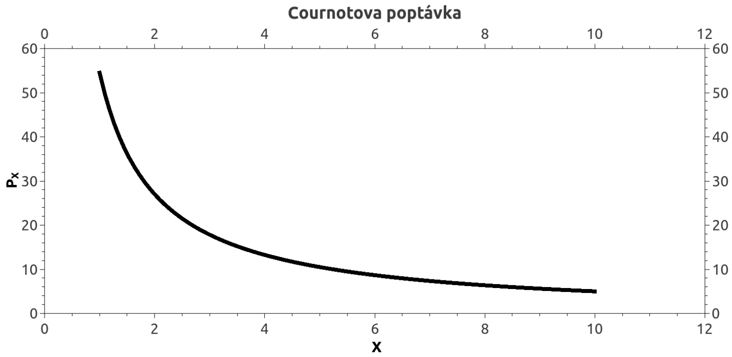
Pro odvození Cournotovy poptávky si do rovnice Marshallovy poptávky dosadíme za I a P_Y:

$$X = \frac{I - P_X + P_Y}{2P_X} = \frac{100 - P_X + 10}{2P_X} = \frac{55}{P_X} - \frac{1}{2}. \tag{2.41}$$

Křížovou poptávku získáme tím, že si do rovnice Marshallovy poptávky dosadíme za I a P_X.

$$X = \frac{I - P_X + P_Y}{2P_X} = \frac{100 - 5 + P_Y}{10} = \frac{95}{10} - \frac{P_Y}{10} = 9{,}5 - \frac{P_Y}{10} \tag{2.42}$$

■



2.2 Hicksova úloha

Alternativou k Marshallově úloze je Hicksova úloha. Přesněji řečeno, Hicksova úloha je duální úlohou k Marshallově úloze (viz pojem dualita úloh v teorii optimalizace). Zatímco v případě Marshallovy úlohy jsme maximalizovali užitek spotřebitele při daném fixním příjmu, u Hicksovy úlohy minimalizujeme výdaje spotřebitele na dosažení určité požadované (a fixní) hodnoty užitku.

Definice 2.2.1 Hicksovou úlohou myslíme minimalizaci výdajů na nákup zboží při dané požadované úrovni užitku, tj.

$$\begin{aligned} &\min_{X,Y} && P_X \cdot X + P_Y \cdot Y \\ &\text{za podmínky} && U(X,Y) = C\,. \end{aligned} \tag{2.43}$$

V případě Hicksovy úlohy tedy hraje důležitou roli požadovaná výše užitkové funkce ze spotřeby, která musí dosáhnout hodnoty C, aby bylo řešení úlohy platné.

■ **Příklad 2.9** Určete podmínku, která v Hicksově úloze zaručuje minimalizaci výdajů. Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L} = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y + \lambda(U(X,Y) - C)\,. \tag{2.44}$$

Určíme si její parciální derivace a položíme je rovny nule:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} &= P_X + \lambda \cdot MU_X(X,Y) = 0\,, \\ \frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} &= P_Y + \lambda \cdot MU_Y(X,Y) = 0\,, \\ \frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} &= U(X,Y) - C = 0\,. \end{aligned}$$

Pokud si z obou rovnic vyjádříme λ:

$$\lambda = -\frac{P_X}{MU_X(X,Y)} = -\frac{P_Y}{MU_Y(X,Y)}\,. \tag{2.45}$$

Úpravou této rovnice získáme podmínku maximalizace užitku:

$$\frac{MU_X(X,Y)}{MU_Y(X,Y)} = \frac{P_X}{P_Y}\,, \tag{2.46}$$

tedy poměr mezních užitků se rovná poměru cen zboží. Druhou podmínkou optima je pak dodržení rozpočtového omezení. ■

Definice 2.2.2 — Hicksova poptávka. Hicksova poptávka spotřebitele po statku X je funkcí požadované úrovně užitku spotřebitele a cen P_X a P_Y a udává množství statku X, které spotřebitel poptává, jestliže minimalizuje své peněžní výdaje.

■ **Příklad 2.10** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y\,. \tag{2.47}$$

Určete Hicksovy poptávky spotřebitele po statcích X a Y.
Řešíme následující problém

$$\begin{aligned} \min_{X,Y} \quad & P_X \cdot X + P_Y \cdot Y \\ \text{za podmínky} \quad & X \cdot Y = C\,. \end{aligned} \tag{2.48}$$

R V tomto případě nelze provést pozitivně-monotónní transformaci užitkové funkce, protože vystupuje v omezující podmínce.

Vyjádřením proměnných X a Y z úlohy získáme Hicksovy poptávky po statcích X a Y. Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L} = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y + \lambda(X \cdot Y - C)\,. \tag{2.49}$$

Určíme si její parciální derivace a položíme je rovny nule:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} &= P_X + \lambda \cdot Y = 0\,, \\ \frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} &= P_Y + \lambda \cdot X = 0\,, \\ \frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} &= X \cdot Y - C = 0\,. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic si vyjádříme proměnnou λ:

$$\lambda = -\frac{P_X}{Y} = -\frac{P_Y}{X}$$

Do první rovnice dosadíme $\lambda = -\frac{P_Y}{X}$:

$$P_X - Y\frac{P_Y}{X} = 0 \tag{2.50}$$

Provedeme úpravu:

$$P_X = Y\frac{P_Y}{X} \tag{2.51}$$

a podle třetí rovnice dosadíme $Y = \frac{C}{X}$:

$$P_X = \frac{P_Y}{X} \cdot \frac{C}{X} \tag{2.52}$$

Protože $P_X > 0$, $P_Y > 0$, $X > 0$ a $Y > 0$, je Hicksova poptávka ve tvaru

$$X = \sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}} \tag{2.53}$$

Do druhé rovnice dosadíme $X = \sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}}$ a $\lambda = -\frac{P_X}{Y}$:

$$P_Y - \frac{P_X}{Y}\sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}} = 0 \tag{2.54}$$

Provedeme úpravu:

$$\frac{1}{Y} = \frac{P_Y}{P_X\sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}}} \tag{2.55}$$

Tím získáme Hicksovu poptávku po Y:

$$Y = \sqrt{C\frac{P_X}{P_Y}} \tag{2.56}$$

Hicksova poptávka spotřebitele po statku X je

$$H_X = \sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}} \tag{2.57}$$

a poptávka po Y je

$$H_Y = \sqrt{C\frac{P_X}{P_Y}}. \tag{2.58}$$

■

2.2.1 Výdajová funkce a nepřímá funkce užitku

K Hicksově úloze se váže výdajová funkce, která poskytuje informaci o výdajích spotřebitele na základě požadované dosažené úrovně užitku.

Definice 2.2.3 — Výdajová funkce. Výdajová funkce spotřebitele je funkcí požadované úrovně užitku a cen poptávaných statků a udává objem výdajů, které spotřebitel optimalizující výdaje utratí za spotřební statky.

■ **Příklad 2.11** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y. \tag{2.59}$$

S využitím znalosti Hicksových poptávek určete výdajovou funkci spotřebitele po statcích X a Y.

Uvažujme, že $X^\star$ a $Y^\star$ jsou optimální množství nakupovaného zboží při požadované úrovni užitku C. Pak odvodíme výdajovou funkci jako

$$\begin{aligned} E(P_X, P_Y, C) &= P_X \cdot X^\star + P_Y \cdot Y^\star \\ &= P_X \cdot H_X + P_Y \cdot H_Y \\ &= P_X \cdot \sqrt{C \frac{P_Y}{P_X}} + P_Y \cdot \sqrt{C \frac{P_X}{P_Y}} \\ &= \sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y} + \sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y} \\ &= 2\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y} \end{aligned}$$

Výdajová funkce spotřebitele je

$$E(P_X, P_Y, C) = 2\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y} \tag{2.60}$$

■

■ **Příklad 2.12** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y. \tag{2.61}$$

Z výdajové funkce určete nepřímou funkci užitku spotřebitele.
Při požadované úrovni užitku C jsou výdaje spotřebitele dány výdajovou funkcí. Jestliže je důchod spotřebitele I a spotřebitel vynakládá celý svůj důchod, pak musí platit

$$I = E(P_X, P_Y, C) = 2\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y} \tag{2.62}$$

Z rovnice (2.62) si vyjádříme požadovanou úroveň užitku C:

$$C = \frac{I^2}{4 \cdot P_X \cdot P_Y}. \tag{2.63}$$

Pravá část tedy udává velikost užitku racionálního spotřebitele v závislosti na důchodu a cenách zboží, přičemž rovnost platí obecně. Tím jsme odvodili nepřímou funkci užitku

$$V(P_X, P_Y, I) = \frac{I^2}{4 \cdot P_X \cdot P_Y} \tag{2.64}$$

■

2.2.2 Shephardova poučka

Máme-li k dispozici výdajovou funkci, můžeme z ní snadno zpětně odvodit Hicksovy poptávky. Postup, jakým toto odvozením provedeme, nám říká Shephardova poučka.

Věta 2.2.1 — Shephard, 1953. Hicksovu poptávku spotřebitele po statku X získáme derivací výdajové funkce podle P_X, tj.

$$H_X(P_X, P_Y, C) = \frac{\partial E(P_X, P_Y, C)}{\partial P_X} \tag{2.65}$$

Aplikaci poučky provedeme na následujícím příkladě.

■ **Příklad 2.13** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y\,. \tag{2.66}$$

Z výdajové funkce $E(P_X, P_Y, C) = 2\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y}$ určete Hicksovy poptávky spotřebitele. Nejprve určíme derivaci výdajové funkce podle P_X:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(P_X, P_Y, C)}{\partial P_X} &= \left[2\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y}\right]'_{P_X} \\ &= \frac{2C \cdot P_Y}{\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}} \\ &= H_X(P_X, P_Y, C)\,.\end{aligned} \tag{2.67}$$

Nyní budeme derivovat výdajovou funkci podle P_Y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(P_X, P_Y, C)}{\partial P_Y} &= \left[2\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y}\right]'_{P_Y} \\ &= \frac{2C \cdot P_X}{\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{C\frac{P_X}{P_Y}} \\ &= H_Y(P_X, P_Y, C)\,.\end{aligned} \tag{2.68}$$

■

2.3 Slutského rozklad

Dojde-li ke změně ceny spotřebního zboží, dochází ve většině případů k poklesu nakupovaného množství zboží konkrétním spotřebitelem. Při podrobnějším zkoumání tohoto jevu však dojdeme k závěru, že spotřebitel má dva důvody k tomu, aby snížil nakupované množství zboží:

- zboží se pro něj stalo relativně dražším a spotřebitel má větší tendenci nahrazovat ho dostupnými substituty,
- při konstantní nominální hodnotě jeho důchodu dochází k reálnému poklesu jeho hodnoty, protože jedna z položek jeho spotřebního koše má vyšší cenu a ostatní položky mají stále stejnou cenu (tj. spotřebitel již není schopen nakupovat původní spotřební koš).

Na základě této úvahy můžeme definovat substituční a důchodový efekt.

Definice 2.3.1 — Substituční efekt. Substituční efekt poptávky po zboží X je změna poptávky po zboží X daná vlivem změny poměru cen P_X a P_Y, přičemž uvažujeme konstantní reálnou hodnotu důchodu.

Definice 2.3.2 — Důchodový efekt. Důchodový efekt poptávky po zboží X je změna poptávky po zboží X daná vlivem změny reálného důchodu v důsledku změny P_X.

■ **Příklad 2.14** Marshallova poptávka spotřebitele po statku X je dána vztahem

$$M_X(P_X, I) = 10 + \frac{I}{10 \cdot P_X}. \tag{2.69}$$

Původně byla výše důchodu spotřebitele $I = 120$ a cena zboží $P_{X,0} = 3$. Nyní cena zboží klesne na $P_{X,1} = 2$. Určete velikost substitučního a důchodového efektu.
Při výpočtu využijeme tzv. pomocnou *nominální* hodnotu důchodu, kterou si označíme jako I_P.
Ve výchozí situaci platí

$$I = P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0. \tag{2.70}$$

V situaci, kdy došlo ke změně poměru cen, ale uvažujeme konstantní reálnou hodnotu důchodu, platí

$$I_P = P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0. \tag{2.71}$$

R Používáme Slutského definici konstantního reálného důchodu. Hodnota reálného důchodu je tedy konstantní tehdy, jestliže je spotřebitel schopen stále nakupovat stejný spotřební koš. Naopak Hicksova definice konstantního reálného důchodu nám definuje konstantní reálných důchod na základě schopnosti spotřebitele dosáhnout stejné úrovně užitku.

Odečtením obou rovnic získáme:

$$I_P - I = X_0 \cdot (P_{X,1} - P_{X,0}). \tag{2.72}$$

Jestliže $\Delta I = I_P - I$ a $\Delta P_X = P_{X,1} - P_{X,0}$, pak lze rovnici přepsat jako

$$\Delta I = X_0 \cdot (P_{X,1} - P_{X,0}) = X_0 \cdot \Delta P_X. \tag{2.73}$$

Ve výchozí situaci platí:

$$M_X(P_{X,0}, P_Y, I) = 10 + \frac{I}{10 \cdot P_{X,0}} = 10 + \frac{120}{30} = 14. \tag{2.74}$$

Určíme hodnotu pomocného důchodu:

$$I_P = X_0 \cdot (P_{X,1} - P_{X,0}) + I = 14 \cdot (2 - 3) + 120 = 106. \tag{2.75}$$

Nyní určíme velikost poptávky pro $P_{X,1}$, P_Y a I_P:

$$M_X(P_{X,1}, P_Y, I_P) = 10 + \frac{106}{20} = 15{,}3. \tag{2.76}$$

Velikost substitučního efektu je

$$M_X(P_{X,1}, P_Y, I_P) - M_X(P_{X,0}, P_Y, I) = 15{,}3 - 14 = 1{,}3. \tag{2.77}$$

Pro koncovou situaci platí:

$$M_X(P_{X,1}, P_Y, I) = 10 + \frac{I}{10 \cdot P_{X,0}} = 10 + \frac{120}{20} = 16. \tag{2.78}$$

Velikost důchodového efektu je

$$M_X(P_{X,1}, P_Y, I) - M_X(P_{X,1}, P_Y, I_P) = 16 - 15{,}3 = 0{,}7\,. \tag{2.79}$$

■

2.4 Přímo projevené preference

Teorie přímo projevených preferencí je doplňkem k teorii spotřebitele. Jejím autorem je americký ekonom Paul A. Samuelson. Cílem této teorie je porovnání životní situace jednoho spotřebitele ve více časových obdobích a určení, zda došlo k jejímu zlepšení nebo zhoršení. Teorie využívá pět typů indexů, které si postupně definujeme. Pro zjednodušení budeme opět uvažovat dva druhy spotřebního zboží – X a Y.

2.4.1 Množstevní indexy

Nejprve si popíšeme množstevní indexy. V případě množstevních indexů dosazujeme do jednoho indexu vždy nakoupená množství zboží ze dvou různých období. Cena zboží se vždy dosazuje do jednoho indexu pouze z jednoho období a slouží jako váha. Podle toho, zda se jedná o Laspeyresův nebo Paascheho index, pak volíme ceny ze základního nebo běžného období. Základní období budeme značit indexem 0 a současné období indexem 1.

Pomocí této logiky můžeme snadno sestavit vzorce pro oba indexy. Nejprve si definujeme Laspeyresův množstevní index.

Definice 2.4.1 — Laspeyresův množstevní index. Laspeyresův množstevní index L_Q je dán vztahem

$$L_Q = \frac{P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0} \tag{2.80}$$

Změníme-li váhy z cen základního období na ceny běžného období, získáme Paascheho množstevní index.

Definice 2.4.2 — Paascheho množstevní index. Paascheho množstevní index P_Q je dán vztahem

$$P_Q = \frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0} \tag{2.81}$$

Následující věta nám dává návod, jak pomocí množstevních indexů rozhodnout o životní situaci spotřebitele.

Věta 2.4.1 Na základě množstevních indexů lze provést následující rozhodnutí o životní situaci spotřebitele:

- Jestliže $L_Q < 1$, došlo k poklesu životní úrovně spotřebitele.
- Jestliže $L_Q > 1$, nelze o změně životní úrovně rozhodnout.
- Jestliže $P_Q < 1$, nelze o změně životní úrovně rozhodnout.
- Jestliže $P_Q > 1$, došlo k růstu životní úrovně spotřebitele.

Početní příklady jsou u množstevních indexů jednoduché – stačí pouze dosadit do vzorce.

R Není nutné se tyto vzorce učit zpaměti, postačí pamatovat si informaci o tom, že Laspeyresův index využívá jako váhy ceny základního období a Paascheho index ceny běžného období. Pak už je jednoduché si vzorce indexů odvodit.

■ **Příklad 2.15** Spotřebitel nakupuje dva druhy statků: X a Y. Původně byla cena P_X 4 Kč a P_Y 4 Kč a spotřebitel nakupoval 4 kusy statku X a 4 kusy statku Y. V dalším roce klesla P_X na 2 Kč a P_Y stoupla na 9 a spotřebitel nakupoval 5 kusů X a 2 kusy Y. Porovnejte životní situaci spotřebitele za použití Laspeyresova a Paascheho množstevního indexu.
Dosadíme do vzorce:

$$L_Q = \frac{4 \cdot 5 + 4 \cdot 2}{4 \cdot 4 + 4 \cdot 4} = \frac{28}{32} < 1\,. \tag{2.82}$$

Protože $L_Q < 1$, došlo k poklesu životní úrovně spotřebitele.
Dosadíme do vzorce:

$$L_Q = \frac{2 \cdot 5 + 9 \cdot 2}{2 \cdot 4 + 9 \cdot 4} = \frac{28}{44} < 1\,. \tag{2.83}$$

Protože $P_Q < 1$, nelze s využitím tohoto indexu rozhodnout o změně situace spotřebitele.
■

2.4.2 Cenové indexy

Alternativou k množstevním indexům jsou cenové indexy. U množstevních indexů využíváme nakupovaná množství jako váhy a měníme dosazované ceny zboží.
Abychom mohli provést rozhodnutí o tom, jestli se životní situace spotřebitele zlepšila nebo zhoršila, musíme hodnotu cenového indexu porovnávat s tzv. indexem výdajů. Tento index je poměrem celkových výdajů spotřebitele v základním a běžném období, sestavení vzorce v následující definici je tedy velmi intuitivní.

Definice 2.4.3 — Index výdajů. Index výdajů je dán vztahem

$$M = \frac{I_1}{I_0} = \frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0}\,. \tag{2.84}$$

U cenových indexů opět platí, že u Laspeyresova indexu volíme váhy ze základního období a u Paascheho indexu váhy z běžného období. Sestavení obou vzorců by tedy nemělo činit problém.

Definice 2.4.4 — Laspeyresův cenový index. Laspeyresův cenový index L_P je dán vztahem

$$L_P = \frac{P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0}. \tag{2.85}$$

Definice 2.4.5 — Paascheho cenový index. Paascheho cenový index P_P je dán vztahem

$$P_P = \frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1}. \tag{2.86}$$

K cenovým indexům bychom mohli sestavit analogickou větu k větě 2.4.1, která nám říká, kdy se situace spotřebitele zlepšila, kdy zhoršila a kdy o ní nelze rozhodnout. U těchto indexů to však není nutné, protože nám postačí právě věta 2.4.1. V následujícím příkladě si ukážeme, jak pomocí ekvivalentní úpravy snadno převést porovnání cenového indexu a indexu výdajů na porovnání množstevního indexu a čísla 1.

■ **Příklad 2.16** Spotřebitel nakupuje dva druhy statků: X a Y. Původně byla cena P_X 1 Kč a P_Y 3 Kč a spotřebitel nakupoval 4 kusy statku X a 1 kus statku Y. V dalším roce klesla P_X i P_Y na 2 Kč a spotřebitel nakupoval 4 kusy X a 2 kusy Y. Porovnejte životní situaci spotřebitele za použití Laspeyresova a Paascheho cenového indexu.
Dosadíme do vzorce:

$$L_P = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{1 \cdot 4 + 3 \cdot 1} = \frac{10}{7}. \tag{2.87}$$

Dále určíme hodnotu cenového indexu M:

$$M = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 2}{1 \cdot 4 + 3 \cdot 1} = \frac{12}{7}. \tag{2.88}$$

Víme tedy, že index výdajů má vyšší hodnotu než Laspeyresův cenový index, tj:

$$L_P < M.$$

Rozepišme si nyní vzorce pro oba indexy:

$$\frac{P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0} < \frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0}$$

Vidíme, že jmenovatele zlomků na obou stranách nerovnosti jsou stejné a můžeme je tedy zkrátit. Protože jmenovatel $(P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0)$ obsahuje pouze nezáporné hodnoty, je tato úprava platná a neměníme při ní znaménko nerovnosti. Po této úpravě nám zbývá následující nerovnost:

$$P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0 < P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0.$$

Upravme si nyní nerovnici tak, abychom na levé straně měli jedničku, tj. celou rovnici vydělíme výrazem $(P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0)$:

$$1 < \frac{P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0}$$

Ale zde ve výrazu na pravé straně nerovnice snadno poznáme, že se jedná po Paascheho množstevní index, tj. výraz je identický s P_Q, což můžeme snadno dosadit

$$P_Q > 1 \tag{2.89}$$

a podle věty 2.4.1 pak můžeme vyslovit závěr, že situace spotřebitele se zlepšila.
Nyní použijeme Paascheho cenový index. Dosadíme do vzorce:

$$P_P = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 2}{1 \cdot 4 + 3 \cdot 2} = \frac{12}{10}. \tag{2.90}$$

Hodnota Paascheho cenový indexu je menší, než hodnota výdajového indexu, tj. platí nerovnost:

$$P_P < M \tag{2.91}$$

Abychom mohli výsledek interpretovat, do nerovnosti si dosadíme výrazy definující Paascheho cenový index a index výdajů:

$$\frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1} < \frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0} \tag{2.92}$$

Protože výrazy v čitatelích obou dvou zlomků jsou totožné, můžeme celou nerovnost vydělit výrazem $P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1$. Protože uvažujeme pouze kladná množství nakupovaného zboží a kladné ceny, nezmění nám tato operace znaménko nerovnosti. V čitatelích obou zlomků nyní máme čísla 1, jmenovatele se nezměnily.

$$\frac{1}{P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1} < \frac{1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0} \tag{2.93}$$

Proveďme nyní ještě jednu úpravu. Vynásobme obě strany nerovnosti hodnotou ve jmenovateli zlomku vlevo, tj. výrazem $P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1$ (opět nedochází ke změně v nerovnosti). Tím získáme na levé straně nerovnosti jedničku. Na pravé straně pak vidíme, že daný zlomek odpovídá množstevnímu indexu, protože obsahuje pouze ceny ze základního období a množství ze základního i běžného období. Na základě toho, že ceny jsou ze základního období, můžeme navíc konstatovat, že se jedná o Laspeyresův množstevní index.

$$1 < \frac{P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0}$$

$$L_Q > 1$$

Protože Laspeyresův množstevní index je větší než 1, musíme na základě věty 2.4.1 konstatovat, že o změně situace spotřebitele v případě tohoto indexu nelze rozhodnout. ■

3. Teorie firmy

V dřívější kapitole jsme zkoumali rozhodování spotřebitele, který je poptávajícím na trzích zboží a služeb. Nyní se zaměříme na výrobce, který na těchto trzích své produkty nabízí. Formálně je v neoklasické mikroekonomii teorie firmy velmi blízká teorii spotřebitele, protože rozhodovací úlohy jsou formulovány obdobně a jejich formální řešení používá stejných matematických postupů. V případě teorie firmy budeme mít dvě různé typy úloh:

- minimalizaci nákladů, kdy má firma pevně stanovený objem produkce a řeší, jak tento objem vyrobit s minimálními náklady,
- maximalizaci zisku, kdy firma volí objem vyrobené zboží a způsob, jak tento objem vyrobit, aby při tom dosáhla co nejvyššího zisku.

Úloha minimalizace nákladů je významná především z toho důvodu, že její výsledek můžeme dále použít při řešení úlohy maximalizace zisku. Nejprve se ale budeme zabývat produkční funkcí firmy, která je základem neoklasického popisu firmy je klíčovou součástí všech následujících úloh.

3.1 Produkční funkce firmy

Ze základního kurzu mikroekonomie víme, že produkční funkce nám udává *maximální* možný objem výroby při daném množství výrobních faktorů. V této kapitole budeme uvažovat dva výrobní faktory: práci a kapitál (kapitálový statek).

R Ze základního kurzu víme, že kromě toho existuje ještě třetí výrobní faktor, který nazýváme půda (přírodní zdroje). V praktických příkladech je ale velmi komplikované rozlišovat mezi půdou a kapitálovým statkem. Uvažujeme-li kapitálový statek jako výrobní faktor, který je výsledkem předcházejícího výrobního procesu, pak v řadě případů je i půda kapitálovým statkem. Intuitivním příkladem je zde orná půda. Půdu v drtivé většině není možné ihned použít k zemědělské činnosti, ale je potřeba ji připravit (např. odstraněním současné vegetace apod.). Takto upravená půda už ale je výsledkem předchozího výrobního procesu a lze na ni pohlížet jako na kapitálový statek.

Pojem maximální je v textu v souvislosti s faktem, že *neefektivní* firma může se stejným objemem výrobních faktorů vyrobit menší množství zboží než efektivní firma. Problematiku výrobní efektivnosti firem však přenecháme dalším předmětům a budeme předpokládat efektivní firmu, pro kterou platí, že hodnota produkční funkce je rovná skutečně vyrobenému množství zboží.
Dále budeme předpokládat, že firma vyrábí jeden druh finálního produktu a všechny vyrobené kusy jsou homogenní. Uvažujeme, že i nakupované výrobní faktory se mezi sebou kvalitativně neliší.

3.1.1 Mezní míra substituce

Mezní míra substituce (nebo také mezní míra substitute ve výrobě) je jedním ze základních pojmů v teorii firmy a je užitečná i při řešení následujících optimalizačních úloh.

Definice 3.1.1 — Mezní míra technické substituce. Mezní míra technické substituce udává, o kolik jednotek musí firma zvýšit použití jednoho výrobního faktoru, pokud sníží použití druhého výrobního faktoru při zachování objemu výstupu a je definována vztahem

$$MRTS = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{\frac{\partial Q(K,L)}{\partial L}}{\frac{\partial Q(K,L)}{\partial K}}. \tag{3.1}$$

Ukažme si výpočet mezní míry technické substituce na konkrétním příkladě.

■ **Příklad 3.1** Výroba firmy je charakterizovaná produkční funkcí

$$Q(K,L) = 8L \cdot K^2 \tag{3.2}$$

Určete mezní míru technické substituce při $L = 2$ a $K = 4$.
Určíme mezní produktivitu práce jako

$$MP_L = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial L} = 8K^2 \tag{3.3}$$

a mezní produktivitu kapitálu jako

$$MP_K = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial K} = 16L \cdot K \tag{3.4}$$

Provedeme dosazení do vzorce pro $MRTS$:

$$MRTS = -\frac{8K^2}{16L \cdot K} = -\frac{8 \cdot 16}{16 \cdot 2 \cdot 4} = -1 \tag{3.5}$$

■

3.1.2 Výnosy z rozsahu

Dalším pojmem, dobře známým ze základního kurzu mikroekonomie, jsou výnosy z rozsahu. Máme-li k dispozici produkční funkci firmy a je-li tato funkce homogenní ve všech proměnných (viz definice 2.1.8 na straně 32), pak můžeme snadno určit typ výnosů z rozsahu pro danou firmu. Použijeme k tomu následující větu.

Věta 3.1.1 Uvažujme funkci homogenní stupně a ve všech proměnných. Výnosy z rozsahu jsou
- rostoucí, pokud $a > 1$,
- klesající, pokud $a < 1$,
- konstantní, pokud $a = 1$.

Důkaz tohoto tvrzení je zcela zřejmý. Uvažujme, že firma změní množství všech výrobních faktorů zapojených do výroby x-krát. Je-li funkce homogenní stupně a, pak se objem vyráběného zboží změní x^a-krát. Tj. pokud $a = 1$, poměr nového a původního vyrobeného množství zboží je stejný jako poměr nového a původního množství výrobních faktorů. Pro $a > 1$, resp. $a < 1$ lze větu odůvodnit zcela analogicky.

■ **Příklad 3.2** Výroba firmy je charakterizovaná Cobb-Douglasovou produkční funkcí

$$Q(K,L) = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

1. Rozhodněte, zda je funkce homogenní ve všech proměnných.
2. Pokud ano, určete typ výnosů z rozsahu.

Nejprve určíme, zda je funkce homogenní ve všech proměnných:

$$\begin{aligned} Q(c \cdot K, c \cdot L) &= (cK)^{\frac{1}{2}} \cdot (cL)^{\frac{1}{2}} \\ &= c^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \\ &= c^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} \\ &= c^1 K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} \\ &= c^1 \cdot Q(K,L) \end{aligned}$$

Produkční funkce je homogenní stupně jedna ve všech proměnných.
Produkční funkce $Q(K,L) = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}$ má konstantní výnosy z rozsahu. ■

V případě Cobb-Douglasovy produkční funkce lze dokonce obecně dokázat, že velikost výnosů z rozsahu je daná součtem exponentů množství práce a kapitálu. Je-li součet exponentů roven 1, pak jsou výnosy z rozsahů konstantní. Je-li součet exponentů menší než 1, jsou výnosy z rozsahu klesající a konečně je-li součet exponentů větší než 1, jsou výnosy z rozsahu rostoucí.
Procvičme si výpočet na dalším příkladě.

■ **Příklad 3.3** Výroba firmy je charakterizovaná produkční funkcí

$$Q(K,L) = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}} \tag{3.7}$$

1. Rozhodněte, zda je funkce homogenní ve všech proměnných.
2. Pokud ano, určete typ výnosů z rozsahu.

Nejprve určíme, zda je funkce homogenní ve všech proměnných:

$$\begin{aligned} Q(c \cdot K, c \cdot L) &= (cK)^{\frac{1}{2}} + (cL)^{\frac{1}{2}} \\ &= c^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \\ &= c^{\frac{1}{2}} \left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= c^{\frac{1}{2}} \cdot Q(K,L) \end{aligned}$$

Produkční funkce je homogenní stupně $1/2$ ve všech proměnných. Funkce má klesající výnosy z rozsahu. ∎

3.2 Minimalizace nákladů

Podobně jako v předchozích subkapitolách, začneme i zde formální definicí úlohy.

Definice 3.2.1 — Úloha minimalizace nákladů firmy. Úloha minimalizace nákladů firmy znamená nalezení

$$\begin{aligned} \min_{L,K} \quad & w \cdot L + r \cdot K \\ \text{za podmínky} \quad & Q(K,L) = Q_0 . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Důležité je, že uvažujeme pevně (a exogenně) dané množství zboží, které má firma vyrobit. V naší formulaci úlohy toto množství značíme Q_0. Je zřejmé, že w označuje cenu práce a r cenu kapitálu. Uvažujeme, že ceny jsou fixní, tj. trh práce i trh kapitálu jsou dokonale konkurenční. Firma tedy řeší otázku, kolik práce a kolik kapitálu má nakoupit, aby vyrobila požadované množství zboží Q_0 a současně aby suma jejích celkových výdajů byla minimální.

R Podíváme-li se pozorněji na formulaci Hicksovy úlohy (definice 2.2.1 na straně 35), pak můžeme konstatovat, že pouhou změnou názvu proměnných bychom úlohu minimalizace nákladů firmy zaměnili za úlohu minimalizace výdajů spotřebitele. Matematicky se tedy jedná o naprosto totožnou úlohu.

Formálně se tedy opět jedná o vázanou optimalizační úlohu a můžeme opět použít metodu Lagrangeových multiplikátorů.
K řešení úloh minimalizace nákladů lze ale použít i mezní míru technické substituce, kterou jsme si definovali v předchozí subkapitole.

Věta 3.2.1 Firma minimalizuje náklady na výrobu, jestliže se poměr *mezních* cen výrobních faktorů rovná poměru *mezních* produktivit výrobních faktorů, tj. musí platit

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r} \tag{3.9}$$

Ekvivalentně lze podmínku zapsat jako

$$MRTS = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{w}{r} \tag{3.10}$$

V následujícím příkladě si ukážeme, že obě metody vedou ke stejnému výsledku.

∎ **Příklad 3.4** Výroba firmy je charakterizovaná Cobb-Douglasovou produkční funkcí

$$Q(K,L) = 2K \cdot L \tag{3.11}$$

Firma nakupuje práci za cenu $w = 3$ a kapitál za cenu $r = 6$ a plánuje vyrobit $Q = 900$ kusů zboží. Spočítejte minimální objem nákladů na výrobu.
Úlohu lze řešit dvěma způsoby:

- s využitím $MRTS$,
- metodou Lagrangeových multiplikátorů.

Konkrétně v našem případě:

$$\begin{aligned} &\min_{L,K} && w \cdot L + r \cdot K \\ &\text{za podmínky} && 2K \cdot L = 900\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Určíme mezní produktivity faktorů

$$MP_L = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial L} = 2K \tag{3.13}$$

$$MP_K = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial K} = 2L \tag{3.14}$$

Dosadíme do rovnosti:

$$\frac{2K}{2L} = \frac{3}{6} \tag{3.15}$$

Z rovnice plyne, že $L = 2K$.
Nyní využijeme rovnici podmínky a dosadíme $L = 2K$:

$$2K \cdot L = 4K^2 = 900\,. \tag{3.16}$$

Protože $K > 0$ a $L > 0$, rovnice má jediné řešení $K = 15$. Protože $L = 2K$, $L = 30$.
Nyní určíme objem nákladů:

$$3 \cdot 30 + 6 \cdot 15 = 180 \tag{3.17}$$

Firma může vyrobit 900 kusů zboží s minimálními náklady 180.
Nyní použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L} = 3L + 6K + \lambda\,(2K \cdot L - 900) \tag{3.18}$$

Určíme její parciální derivace a položíme je rovny nule:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial L} &= 3 + \lambda \cdot 2 \cdot K = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial K} &= 6 + \lambda \cdot 2 \cdot L = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= 2K \cdot L - 900 = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic si vyjádříme proměnnou λ:

$$\lambda = -\frac{3}{2K} = -\frac{6}{2L}$$

Dosadíme do první rovnice

$$3 - \frac{6}{2L} \cdot 2 \cdot K = 0\,. \tag{3.19}$$

Opět zjišťujeme, že

$$K = \frac{L}{2}. \tag{3.20}$$

Dosadíme do derivace derivace podle λ:

$$L^2 = 900 \tag{3.21}$$

Protože $L > 0$, řešením je $L = 30$. Z toho plyne, že $K = 15$ a minimální náklady jsou 180. ■

3.2.1 Podmíněné poptávky

Podmíněná poptávka je již novým pojmem, který se v základním kurzu mikroekonomie standardně nevyskytuje. Začněme tedy jeho definicí.

Definice 3.2.2 — Podmíněná poptávka. Podmíněná poptávka firmy po výrobním faktoru X udává množství výrobního faktoru X nakupovaného firmou v závislosti na ceně všech výrobních faktorů a požadovaném objemu produkce.

R Již jsme si řekli, že úloha minimalizace nákladů firmy je obdobou Hicksovy úlohy. Můžeme dále konstatovat, že podmíněné poptávky po výrobních faktorech jsou obdobou Hicksových poptávek.

Podmíněné poptávky po výrobních faktorech odvodíme metodou Lagrangeových multiplikátorů.

■ **Příklad 3.5** Výroba firmy je charakterizovaná produkční funkcí

$$Q(K,L) = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}} \tag{3.22}$$

Určete podmíněné poptávky po výrobních faktorech.
Sestavíme Lagrangeovu funkci:

$$\mathscr{L} = w \cdot L + r \cdot K + \lambda \left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}} - Q_0 \right) \tag{3.23}$$

Určíme její parciální derivace a položíme je rovny nule:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial L} = w + \lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot L^{-\frac{1}{2}} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial K} = r + \lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot K^{-\frac{1}{2}} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}} - Q_0 = 0.$$

Z prvních dvou rovnic si vyjádříme proměnnou λ:

$$\lambda = -2w \cdot L^{\frac{1}{2}} = -2r \cdot K^{\frac{1}{2}}.$$

Do parciální derivace podle L dosadíme $\lambda = -2r \cdot K^{\frac{1}{2}}$:

$$w - 2r \cdot K^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot L^{-\frac{1}{2}} = 0 \tag{3.24}$$

Provedeme několik úprav:

$$\frac{w}{r} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.25}$$

Z parciální derivace podle λ si vyjádříme $L^{\frac{1}{2}} = Q_0 - K^{\frac{1}{2}}$ a dosadíme:

$$\frac{w}{r} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{Q_0 - K^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.26}$$

Výraz upravíme na

$$Q_0 \cdot \frac{w}{r} - K^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{w}{r} = K^{\frac{1}{2}}, \tag{3.27}$$

$$K^{\frac{1}{2}} = Q_0 \frac{\frac{w}{r}}{1 + \frac{w}{r}}. \tag{3.28}$$

Vyjádřením K jako (a úpravou $\frac{\frac{w}{r}}{1+\frac{w}{r}} = \frac{w}{r+w}$) získáme rovnost

$$K = \left(Q_0 \cdot \frac{w}{r+w}\right)^2, \tag{3.29}$$

což je podmíněná poptávka po kapitálu.
Zbývá odvodit podmíněnou poptávku po L. Do druhé parciální derivace dosadíme $K = \left(Q_0 \cdot \frac{w}{r+w}\right)^2$ a $\lambda = -2w \cdot L^{\frac{1}{2}}$:

$$r - 2w \cdot L^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\left(Q_0 \cdot \frac{w}{r+w}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 0. \tag{3.30}$$

Provedeme několik úprav a získáme

$$r = \frac{w \cdot L^{\frac{1}{2}}}{Q_0 \cdot \frac{w}{r+w}}. \tag{3.31}$$

A vyjádříme podmíněnou poptávku po práci jako

$$L = \left(Q_0 \cdot \frac{r}{r+w}\right)^2. \tag{3.32}$$

■

3.2.2 Izokvanty

Izokvanta je opět pojem dobře známý ze základního kurzu mikroekonomie. Uvažujme souřadnicovou osu, kde na osách máme množství výrobních faktorů zapojených do výroby. Pro všechny kombinace množství výrobních faktorů, které leží na jedné izokvantě, platí, že vyrobené množství produkce je shodné. Ve trojrozměrném zobrazení produkční funkce si lze izokvanty představit jako vrstevnice (hladiny) produkční funkce. Novým pojmem pro nás možná bude dlouhodobá stezka expanze produktu.

Definice 3.2.3 — Dlouhodobá stezka expanze produktu. Dlouhodobá stezka expanze produktu je množina optimálních kombinací výrobních faktorů při jejich konstantních cenách a při různých úrovních výstupu.

Rovnici izokvant i dlouhodobou stezku expanze produktu můžeme snadno odvodit z produkční funkce, což si ukážeme v následujícím příkladě.v následujícím příkladě.

Příklad 3.6 Výroba firmy je charakterizovaná produkční funkcí

$$Q(K,L) = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}} \tag{3.33}$$

1. Určete rovnice izokvant.
2. Ověřte, zda jsou izokvanty konvexní a klesající.
3. Určete rovnici dlouhodobé stezky expanze produktu.
4. Zakreslete dlouhodobou stezku expanze produktu.

Produkční funkce je zadána výrazem

$$Q(K,L) = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\,. \tag{3.34}$$

Rovnici izokvanty pro určité Q_0 určíme vyjádřením K z produkční funkce.

$$K^{\frac{1}{2}} = Q_0 - L^{\frac{1}{2}}\,. \tag{3.35}$$

Pro $K > 0$ a $L > 0$ získáme rovnici izokvanty

$$K = \left(Q_0 - L^{\frac{1}{2}}\right)^2\,. \tag{3.36}$$

Určíme, zda pro $K > 0$ a $L > 0$ je izokvanta klesající.
Využijeme první parciální derivaci:

$$\frac{\partial K}{\partial L} = 2\left(Q_0 - L^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot L^{-\frac{1}{2}}\right)\,. \tag{3.37}$$

Provedeme několik jednoduchých úprav výrazu vyjadřujícího, že směrnice izokvanty je negativní:

$$\begin{aligned}
&2\left(Q_0 - L^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot L^{-\frac{1}{2}}\right) < 0\,,\\
&-Q_0\cdot L^{-\frac{1}{2}} + 1 < 0\,,\\
&Q_0 > L^{\frac{1}{2}}\,,
\end{aligned}$$

což pro $K > 0$ platí vždy, izokvanta je tedy klesající funkcí.
Nyní ověříme, zda je izokvanta konvexní.

$$\frac{\partial^2 K}{\partial L^2} = \left[-L^{-Q_0 \cdot \frac{1}{2}} + 1\right]_L' = \frac{1}{2} \cdot L^{-\frac{3}{2}} Q_0 \,. \tag{3.38}$$

Zbývá ověřit, že

$$\frac{1}{2} \cdot L^{-\frac{3}{2}} Q_0 > 0 \,. \tag{3.39}$$

Ale to pro $Q_0 > 0$ a $K > 0$ platí vždy, izokvanta je tedy konvexní.
Při odvozování vyjdeme z rovnic podmíněné poptávky po kapitálu $K = \left(Q_0 \cdot \frac{w}{r+w}\right)^2$ a pro práci $L = \left(Q_0 \cdot \frac{r}{r+w}\right)^2$.
Z obou rovnic si vyjádříme Q_0:

$$\sqrt{K} \cdot \frac{r+w}{w} = Q_0 = \sqrt{L} \cdot \frac{r+w}{r} \,. \tag{3.40}$$

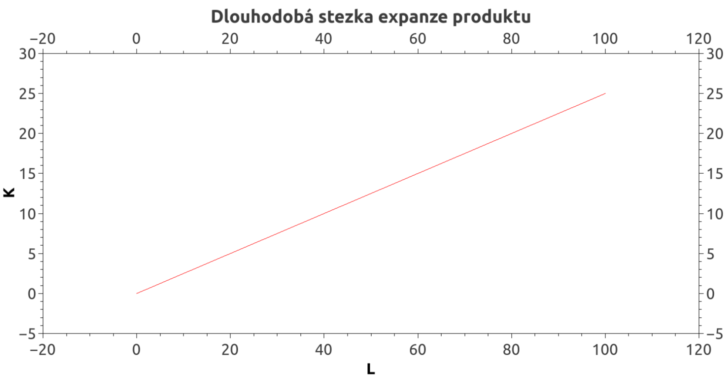
Provedeme jednoduchou úpravu

$$\sqrt{K} = \frac{w}{r} \cdot \sqrt{L} \,. \tag{3.41}$$

Rovnice dlouhodobé stezky expanze produktu má tvar

$$K = \left(\frac{w}{r}\right)^2 \cdot L \,. \tag{3.42}$$

Z rovnice dlouhodobé stezky expanze produktu je patrné, že firma bude využívat oba výrobní faktory vždy v konstantním poměru, který je dán druhou mocninou poměru jejich cen. Tento výsledek není náhodný, protože stejná zákonitost platí pro všechny homogenní produkční funkce.



■

3.2.3 Nákladové funkce

Dalším známým pojmem ze základního kurzu mikroekonomie je nákladová funkce, která určuje výši nákladů firmy na výrobu v závislosti na objemu vyráběného zboží. Náklady firmy samozřejmě závisí i na cenách výrobních faktorů (které stále považujeme za fixní). Nákladovou funkci firmy můžeme snadno odvodit z podmíněných poptávek, jak je ukázáno v následujícím příkladu.

R Opět se můžeme vrátit k naší analogii s Hicksovou úlohou. Nákladové funkce firmy jsou obdobou výdajové funkce spotřebitele a postup odvození je opět analogický.

Nejprve si ze základního kurzu připomeňme definici funkce průměrných nákladů.

Definice 3.2.4 — Funkce průměrných nákladů. Funkci průměrných nákladů určíme ze vztahu

$$LAC(w,r,Q) = \frac{LTC(w,r,Q)}{Q}. \tag{3.43}$$

Ani funkce mezních nákladů pro nás není novým pojmem.

Definice 3.2.5 — Funkce mezních nákladů. Funkci mezních nákladů určíme ze vztahu

$$LMC(w,r,Q) = \frac{\partial LTC(w,r,Q)}{\partial Q}. \tag{3.44}$$

■ **Příklad 3.7** Výroba firmy je charakterizovaná produkční funkcí

$$Q(K,L) = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}. \tag{3.45}$$

S využitím znalosti podmíněných poptávek po výrobních faktorech určete funkci celkových, průměrných a mezních nákladů.
Podmíněná poptávka po kapitálu má tvar $K = \left(Q_0 \cdot \frac{w}{r+w}\right)^2$ a podmíněná poptávka po práci $L = \left(Q_0 \cdot \frac{r}{r+w}\right)^2$.
Celkové náklady jsou dány platbami za výrobní faktory, tj.

$$w \cdot L + r \cdot K. \tag{3.46}$$

Dosadíme podmíněné poptávky

$$\begin{aligned} & w \cdot \left(Q \cdot \frac{r}{r+w}\right)^2 + r \cdot \left(Q \cdot \frac{w}{r+w}\right)^2 \\ &= \frac{w \cdot Q^2 \cdot r^2}{(r+w)^2} + \frac{r \cdot Q^2 \cdot w^2}{(r+w)^2} \\ &= \frac{r \cdot Q^2 \cdot w(r+w)}{(r+w)^2} \\ &= \frac{Q^2 \cdot r \cdot w}{r+w} \\ &\qquad = LTC(w,r,Q) \end{aligned}$$

Pro určení funkce průměrných nákladů jednoduše dosadíme do vzorce v definici 3.2.4.

$$LAC(w,r,Q) = \frac{\frac{Q^2 \cdot r \cdot w}{r+w}}{Q} = \frac{Q \cdot r \cdot w}{r+w} \tag{3.47}$$

Vzorec pro funkci mezních nákladů pak máme v definici 3.2.5.

$$LMC(w,r,Q) = \left[\frac{Q^2 \cdot r \cdot w}{r+w}\right]'_Q = \frac{2Q \cdot r \cdot w}{r+w} \tag{3.48}$$

■

3.2.4 Shephardova poučka

U úlohy minimalizace nákladů se opět setkáváme se Shephardovou poučkou, se kterou jsme se seznámili u Hicksovy úlohy. Shephardova poučka nám říká, jak z nákladové funkce zpětně odvodit funkce podmíněných poptávek po výrobních faktorech.

Věta 3.2.2 — Shephard, 1953. Podmíněnou poptávku po práci získáme derivací nákladové funkce podle ceny práce w, tj.

$$L(w,r,Q) = \frac{\partial LTC(w,r,Q)}{\partial w} \tag{3.49}$$

Pro kapitál platí poučka analogicky.

Poučku využijeme v řešení následujícího příkladu.

■ **Příklad 3.8** Funkce dlouhodobých celkových nákladů firmy je dána vztahem

$$LTC(w,r,Q) = \frac{Q^2 \cdot r \cdot w}{r+w} \tag{3.50}$$

Odvoďte podmíněné poptávky po výrobních faktorech.
Určíme derivaci nákladové funkce podle w

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial LTC(w,r,Q)}{\partial w} \\
&= \frac{Q^2 \cdot r(r+w) - (Q^2 \cdot r \cdot w)}{(r+w)^2} \\
&= \frac{Q^2 \cdot r^2 + Q^2 \cdot r \cdot w - Q^2 \cdot r \cdot w}{(r+w)^2} \\
&= \left(Q_0 \cdot \frac{r}{r+w}\right)^2 \\
&\qquad = L(w,r,Q_0)
\end{aligned}$$

Podmíněná poptávka po práci má tvar $\left(Q_0 \cdot \frac{r}{r+w}\right)^2$.

Určíme derivaci nákladové funkce podle r

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial LTC(w,r,Q)}{\partial r} \\
&= \frac{Q^2 \cdot w(r+w) - (Q^2 \cdot r \cdot w)}{(r+w)^2} \\
&= \frac{Q^2 \cdot w \cdot r + Q^2 \cdot w^2 - Q^2 \cdot r \cdot w}{(r+w)^2} \\
&= \left(Q_0 \cdot \frac{w}{r+w}\right)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = K(w,r,Q_0)
\end{aligned}
$$

Podmíněná poptávka po kapitálu má tvar $\left(Q_0 \cdot \frac{w}{r+w}\right)^2$. ■

3.3 Maximalizace zisku

Komplexnější pohled na hospodaření firmy nám nabízí úloha maximalizace zisku. Zatímco u minimalizace nákladů máme pevně stanoveno, kolik zboží má firma vyrobit, při úloze maximalizace zisku musíme o vyráběném objemu zboží rozhodnout. Stále však máme na paměti naše úvahy o minimalizaci nákladů a tento objem zboží chceme vyrobit co nejlevněji.

Velmi jednoduchá je situace v případě, že už máme k dispozici nákladovou funkci firmy. V nákladové funkci je již obsažena informace o tom, jaké jsou minimální náklady na výrobu určitého množství zboží. To nám zaručuje, že maximální rozdíl mezi hodnotou tržeb a hodnotou nákladové funkce je maximálním možným ziskem a že tento zisk nemůže být navýšen tak, že by se dané množství zboží vyrobilo jinou (a levnější) kombinací výrobních faktorů.

Klíčovým pojmem v teorii firmy je funkce zisku, kterou si nyní definujeme.

Definice 3.3.1 — Funkce zisku. Funkce zisku π udává zisk firmy v závislosti na ceně práce w, ceně kapitálu r a prodejní ceně zboží P.

Úlohu maximalizace zisku můžeme řešit dvěma způsoby:
- dvoustupňovou metodou,
- jednostupňovou (přímou) metodou.

Dvoustupňová metoda předpokládá, že budeme nejprve řešit úlohu minimalizace nákladů (případně využijeme řešení této úlohy), a poté se budeme zabývat maximalizací zisku. Přímá metoda předpokládá, že při řešení maximalizace zisku vyjdeme přímo z produkční funkce. Dvoustupňová metoda je tedy výpočetně náročnější, při použití přímé metody však nezískáme informace o nákladové funkci $LTC(w,r,Q)$. Probereme si tedy obě metody.

3.3.1 Dvoustupňová metoda

Nejprve si dvoustupňovou metodu formálně definujme.

Definice 3.3.2 — Dvoustupňová metoda. Dvoustupňová metoda maximalizace zisku firmy předpokládá nejprve minimalizaci nákladů (tj. odvození funkce LTC). Poté řešíme úlohu:

$$\begin{aligned} \max_{Q} \quad & \pi = P \cdot Q - LTC(w,r,Q) \\ \text{za podmínky} \quad & Q \geq 0\,. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Na úvod si vypočteme následující jednoduchý příklad.

■ **Příklad 3.9** Funkce celkových nákladů firmy je dána vztahem

$$LTC = 20000 + Q^2\,. \tag{3.52}$$

Určete objem výroby, který maximalizuje zisk π, při ceně zboží $P = 500$. Dále určete zisk firmy.
Protože známe funkci LTC, můžeme vyjít z funkce zisku pro dvoustupňovou optimalizaci:

$$\pi(Q) = P \cdot Q - LTC(w,r,Q)\,, \tag{3.53}$$

kde hodnoty P, w a r považujeme za konstanty.
Funkce zisku má tvar

$$\pi(Q) = 500 \cdot Q - 20000 - Q^2\,. \tag{3.54}$$

Určíme první derivaci funkce zisku

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \pi' = P - MC = 500 - 2 \cdot Q\,, \tag{3.55}$$

Položíme derivaci rovnu 0:

$$500 - 2 \cdot Q = 0\,. \tag{3.56}$$

Optimální množství vyrobeného zboží je $Q = 250$.
Dosadíme $Q = 250$ do funkce zisku:

$$\pi = 500 \cdot 250 - 20000 - 250^2 = 42500\,. \tag{3.57}$$

Zisk firmy je 42500. ■

Protože odvozování nákladové funkce firmy jsme se věnovali v předchozí subkapitole, v následujícím příkladě se zaměříme na druhou část úlohy. Nákladová funkce firmy je součástí zadání příkladu.
Naším úkolem bude určit funkci nabídky firmy, přičemž funkci nabídky budeme chápat jako funkci udávající množství zboží, které bude firma nabízet na dokonale konkurenčním trhu, v závislosti na ceně zboží, ceně práce a ceně kapitálu.

■ **Příklad 3.10** Výroba firmy je charakterizovaná produkční funkcí

$$Q = f(K,L) = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}} \tag{3.58}$$

Firma nakupuje práci za cenu w, kapitál za cenu r a prodává své výrobky za cenu P. Dvoustupňovou metodou a s využitím znalosti funkce

$$LTC = \frac{Q^2 \cdot r \cdot w}{w + r} \tag{3.59}$$

určete funkci nabídky a funkci zisku firmy.
Určíme parciální derivaci funkce zisku podle Q a položíme rovnu 0:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = P - LMC(w, r, Q) = 0\,, \tag{3.60}$$

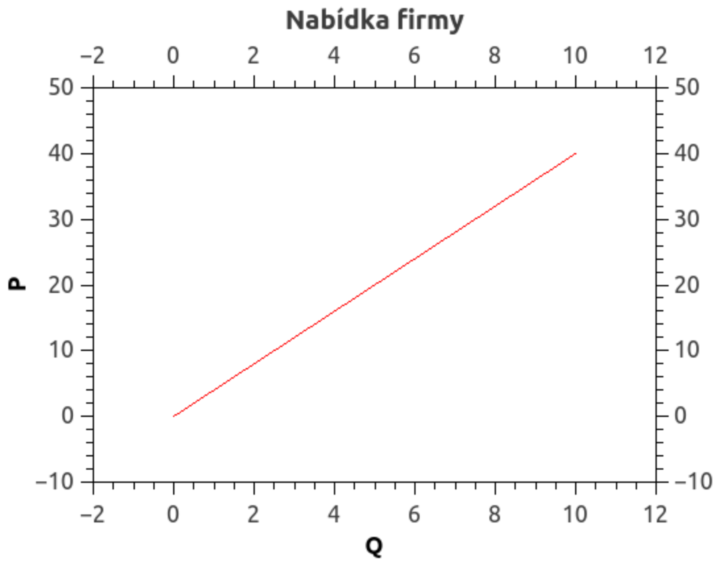
Je zřejmé, že

$$P = LMC(w, r, Q) = \left[\frac{Q^2 \cdot r \cdot w}{r + w}\right]_Q' = \frac{2Q \cdot r \cdot w}{r + w}\,. \tag{3.61}$$

Z parciální derivace určíme funkci nabídky Q.

$$\frac{1}{Q} = \frac{2 \cdot r \cdot w}{P(r + w)}\,, \tag{3.62}$$

$$Q = \frac{P \cdot (w + r)}{2 \cdot r \cdot w}\,. \tag{3.63}$$



■

3.3.2 Přímá metoda

V této subkapitole se budeme věnovat přímé metodě. Nejprve si ji formálně definujme.

Definice 3.3.3 — Přímá metoda. Přímou metodou při maximalizaci zisku firmy máme na mysli řešení následující úlohy:

$$\begin{aligned} \max_{K,L} \quad & \pi = P \cdot Q(K,L) - w \cdot L - r \cdot K \\ \text{za podmínek} \quad & K \geq 0, L \geq 0. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Z formální definice je zřejmé, že se jedná o úlohu volné optimalizace, protože naše podmínky omezují pouze obor hodnot možných řešení, nemáme ale zadanou podmínku explicitně jako rovnici. Pří přímé metodě rovněž odvodíme poptávky po výrobních faktorech, jedná se však o jiné funkce než v případě nepřímé metody.

Definice 3.3.4 — Poptávka po výrobním faktoru. (Nepodmíněná) poptávka po výrobním faktoru udává množství výrobního faktoru, které firma nakupuje a je odvozena přímou metodou. Poptávka po výrobním faktoru je funkcí ceny finálního produktu P a cen výrobních faktorů w a r.

■ **Příklad 3.11** Výroba firmy je charakterizovaná produkční funkcí

$$f(K,L) = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}. \tag{3.65}$$

Firma nakupuje práci za cenu w, kapitál za cenu r a prodává své výrobky za cenu P. Odvoďte funkci poptávky po kapitálu, poptávky po práci a funkci zisku π.
V našem případě platí

$$\pi(K,L) = P \cdot (K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}) - w \cdot L - r \cdot K. \tag{3.66}$$

Vzhledem k obecným předpokladům na produkční funkci stačí určit optimum na základě podmínek prvního řádu:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0, \\ &\left[P \cdot \left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\right) - w \cdot L - r \cdot K\right]'_K = 0, \\ &P \cdot MP_K - r = 0, \\ &P \cdot K^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} - r = 0. \end{aligned}$$

V optimu musí platit

$$P \cdot MP_K = r, \tag{3.67}$$

tedy mezní platba za výrobní faktor r se rovná meznímu příjmu z výrobního faktoru $P \cdot MP_K$.
Vyjádříme s nyní K, abychom získali poptávku po kapitálu.

$$\begin{aligned} K^{-\frac{1}{2}} &= \frac{r \cdot 2}{P} \\ K &= \frac{P^2}{4 \cdot r^2} \end{aligned}$$

Analogicky odvodíme poptávku po práci:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0,$$
$$\left[P \cdot \left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\right) - w \cdot L - r \cdot K\right]_L^{\prime} = 0,$$
$$P \cdot MP_L - r = P \cdot L^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} - w = 0,$$
$$L^{-\frac{1}{2}} = \frac{w \cdot 2}{P},$$
$$L = \frac{P^2}{4 \cdot w^2}.$$

Poptávka po kapitálu je dána vztahem $K = \frac{P^2}{4 \cdot r^2}$ a poptávka po práci vztahem $L = \frac{P^2}{4 \cdot w^2}$.

R V případě aditivně separabilní produkční funkce (součet funkcí jednotlivých proměnných K a L) nejsou poptávky po výrobních faktorech funkcí ceny druhého výrobního faktoru a formálně jsou tedy shodné s poptávkami po výrobních faktorech ze základního kurzu.

Zisk odvodíme dosazením funkcí poptávek K a L do funkce zisku.

$$\pi(K,L) = P \cdot (K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}) - w \cdot L - r \cdot K$$
$$= P \cdot ((\frac{P^2}{4 \cdot r^2})^{\frac{1}{2}} + (\frac{P^2}{4 \cdot w^2})^{\frac{1}{2}}) - w \cdot (\frac{P^2}{4 \cdot w^2}) - r \cdot (\frac{P^2}{4 \cdot r^2})$$
$$= P \cdot (\frac{P}{2 \cdot r} + \frac{P}{2 \cdot w}) - w \cdot (\frac{P^2}{4 \cdot w^2}) - r \cdot (\frac{P^2}{4 \cdot r^2})$$
$$= \frac{P^2}{2 \cdot r} + \frac{P^2}{2 \cdot w} - \frac{P^2}{4 \cdot w} - \frac{P^2}{4 \cdot r}$$
$$= \frac{2 \cdot P^2 - P^2}{4 \cdot r} + \frac{2 \cdot P^2 - P^2}{4 \cdot w}$$
$$= \frac{2 \cdot P^2 - P^2}{4 \cdot r} + \frac{2 \cdot P^2 - P^2}{4 \cdot w}$$
$$= \frac{P^2}{4 \cdot r} + \frac{P^2}{4 \cdot w}$$
$$= \frac{P^2 \cdot w + P^2 \cdot r}{4 \cdot w \cdot r}$$
$$= \frac{P^2 \cdot (w + r)}{4 \cdot w \cdot r}.$$

Funkci zisku jsme opět odvodili jako $\pi = \frac{P^2 \cdot (w+r)}{4 \cdot w \cdot r}$. Funkce zisku je stejná jako při výpočtu dvoustupňovou metodou. ∎

3.3.3 Funkce zisku

Obdobně jako tomu bylo u funkce nákladů, můžeme i z funkce zisku zpětně pomocí derivace odvodit některé další funkce. Způsob, jakým to lze provést, nám ukazují následující tři věty. První nám říká, jak z funkce zisku odvodit funkci nabídky.

Věta 3.3.1 Funkci nabídky lze z funkce zisku odvodit pomocí vztahu

$$\frac{\partial \pi(w,r,P)}{\partial P} = \frac{\partial\,(P\cdot Q - w\cdot L - r\cdot KQ)}{\partial P} = Q(w,r,P)\,, \tag{3.68}$$

tj. zderivujeme funkce zisku podle ceny.

Další dvě věty pak ukazují odvození poptávek po výrobních faktorech.

Věta 3.3.2 Funkci poptávky po práci lze z funkce zisku odvodit pomocí vztahu

$$\frac{\partial \pi(w,r,P)}{\partial w} = \frac{\partial\,(P\cdot Q - w\cdot L - r\cdot KQ)}{\partial w} = -L(w,P)\,. \tag{3.69}$$

Věta 3.3.3 Funkci poptávky po kapitálu lze z funkce zisku odvodit pomocí vztahu

$$\frac{\partial \pi(w,r,P)}{\partial r} = \frac{\partial\,(P\cdot Q - w\cdot L - r\cdot KQ)}{\partial r} = -K(r,P)\,. \tag{3.70}$$

V následujícím příkladě je použito pravidlo o derivaci podílu, které si zde pro připomenutí uvedeme.

Věta 3.3.4 — Derivace podílu. Uvažujme funkce $f(x)$ a $g(x)$. Jejich podíl

$$\frac{f(x)}{g(x)} \tag{3.71}$$

derivujeme podle vzorce

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'_x = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\,. \tag{3.72}$$

Následující příklad je triviální aplikací výše uvedených vět.

■ **Příklad 3.12** Z funkce zisku, která je dána vztahem

$$\pi(w,r,P) = \frac{P^2\cdot(w+r)}{4\cdot w\cdot r}\,, \tag{3.73}$$

určete funkci nabídky poptávky po kapitálu a poptávky po práci.
Nejprve odvodíme funkci nabídky, tj. derivujeme funkci zisku podle ceny.

$$\frac{\partial \pi(w,r,P)}{\partial P} = \left[\frac{P^2\cdot(w+r)}{4\cdot w\cdot r}\right]'_P$$
$$= \frac{2P\,(r+w)}{4r\cdot w} = \frac{P\,(r+w)}{2r\cdot w} = Q(w,r,P)$$

Nyní derivujeme funkci zisku podle ceny práce a získáme tak funkci poptávky po práci. Pro získání finálního tvaru bychom museli (v souladu s výše uvedenou větou) násobit výsledek derivace číslem -1. Ekonomické odůvodnění spočívá ve faktu, že při růstu ceny práce bude nakupované množství práce klesat.

$$\frac{\partial \pi(w,r,P)}{\partial w} = \left[\frac{P^2 \cdot (w+r)}{4 \cdot w \cdot r}\right]_w' = \frac{4P^2 \cdot w \cdot r - 4P^2(w+r) \cdot r}{16 \cdot w^2 \cdot r^2}$$
$$= P^2 \frac{4w \cdot r - 4w \cdot r - 4r^2}{16 \cdot w^2 \cdot r^2} = P^2 \frac{-1}{4 \cdot w^2} = -L(w,r,P)$$

Nyní zbývá odvodit poptávku po kapitálu. Funkci zisku tedy derivujeme podle ceny kapitálu.

$$\frac{\partial \pi(w,r,P)}{\partial r} = \left[\frac{P^2 \cdot (w+r)}{4 \cdot w \cdot r}\right]_r' = \frac{4P^2 \cdot w \cdot r - 4P^2(w+r) \cdot w}{16 \cdot w^2 \cdot r^2}$$
$$= P^2 \frac{4w \cdot r - 4w \cdot r - 4w^2}{16 \cdot w^2 \cdot r^2} = P^2 \frac{-1}{4 \cdot r^2} = -K(w,r,P)$$

■

V dalším příkladě se opět vracíme k pojmu homogenity funkce.

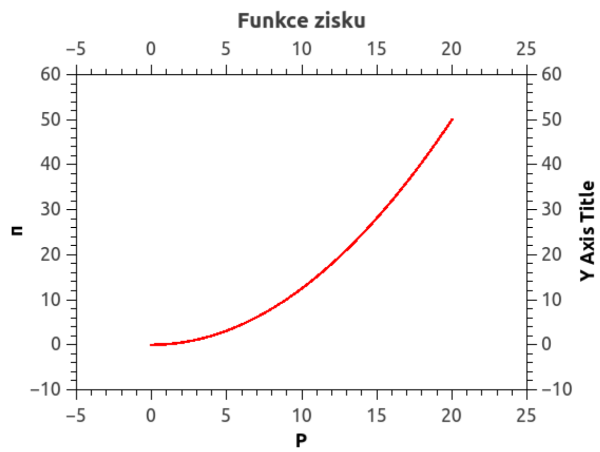
■ **Příklad 3.13** Funkce zisku je dána vztahem

$$\pi(w,r,P) = \frac{P^2 \cdot (w+r)}{4 \cdot w \cdot r}. \tag{3.74}$$

Určete stupeň homogenity funkce ve všech proměnných. Dále zakreslete funkci vyjadřující velikost zisku v závislosti na ceně při $w = 3$ a $r = 6$.

$$\pi(c \cdot w, c \cdot r, c \cdot P) = \frac{(c \cdot P)^2 \cdot (c \cdot w + c \cdot r)}{4 \cdot (c \cdot w) \cdot (c \cdot r)} = \frac{c^2 \cdot P^2 \cdot c(w+r)}{4 \cdot c \cdot w \cdot c \cdot r} = \frac{c^3 \cdot P^2(w+r)}{4 \cdot c^2 \cdot w \cdot r}$$
$$= c\frac{P^2(w+r)}{4 \cdot w \cdot r} = c^1 \cdot \pi(w,r,P)$$

Funkce zisku je homogenní stupně 1 ve všech proměnných.



■

4. DSGE modely

Jednou z nejmodernějších součástí ekonomie je výzkum DSGE modelů, neboli dynamických stochastických modelů všeobecné rovnováhy. Tento typ modelů je v současné době používán řadou centrálních bank a dalších ekonomických institucí k predikcím vývoje ekonomiky a k řízení měnové a fiskální politiky.

R DSGE modely v současnosti nahrazují dříve používané nestrukturní VAR modely. Zatímco nestrukturní VAR modely byly založeny na soustavě ekonometrických rovnic, DSGE modely zpravidla obsahují mikroekonomickou strukturu. Nelze však říci, že by došlo k úplnému vytlačení nestrukturních VAR modelů z pole zájmu ekonomů. Hlavním důvodem je to, že predikční schopnosti DSGE modelů nejsou o mnoho lepší.

4.1 Základní DSGE model

Nejprve si popíšeme několik fundamentálních pojmů, které se vážou k DSGE modelům. Při konstrukci modelů obvykle rozlišujeme dva pojmy – centralizovaný a decentralizovaný model.

Definice 4.1.1 — Decentralizovaný model. Model s domácnostmi a firmami, které jsou navzájem propojené prostřednictvím explicitně definovaných trhů. Pro rovnováhu v modelu je nutné uvažovat splnění podmínek parciální rovnováhy na jednotlivých trzích.

Decentralizované modely jsou bližší verzi teorie všeobecné rovnováhy tak, jak je vyučována v základních kurzech mikroekonomie.

Definice 4.1.2 — Centralizovaný model. Pouze jeden reprezentativní subjekt bez explicitního vyjádření trhů.

Centralizované modely jsou často označovány jako modely s benevolentním diktátorem. Tento diktátor vlastně určuje spotřebu, odvedenou práci, úspory a další rozhodnutí

domácnosti, přičemž jediným zájmem tohoto diktátora je maximalizace užitku domácnosti (od toho plyne název benevolentní). Verze modelů s benevolentním diktátorem bývá zpravidla matematicky jednodušší, řešení modelů je ale u obou verzí stejné.
Výhodou mikroekonomické struktury DSGE modelů je robustnost vůči Lucasově kritice.

4.1.1 Lucasova kritika

Lucasova kritika je významný koncept formulovaný americkým ekonomem Robertem Lucasem v roce 1976. Lucas kritizoval především (tehdy široce používané) keynesiánské makroekonomické modely, které při predikcích změny ekonomického vývoje nezahrnovaly reakci ekonomických subjektů na tyto změny. Lucas tento koncept demonstroval na Phillipsově křivce, tj. funkci udávající vztah mezi inflací a nezaměstnaností. Dlouhodobě expanzivní monetární politika, která se snaží snížit nezaměstnanost, se ve skutečnosti může ukázat jako neúčinná, protože ekonomické subjekty zahrnují předpoklad budoucí vysoké inflace do svých očekávání a tomuto očekávání pak přizpůsobují i své chování.

R Lucasovu kritiku lze popsat i na následujícím extrémně zjednodušeném příkladě. Uvažujme územní oblast s vysokou úrovní policejní ochrany a nízkou kriminalitou. Jaký bude důsledek snížení rozpočtu policie pro danou oblast? Zločinci pravděpodobně v této oblasti rozšíří své působení, protože se sníží pravděpodobnost jejich dopadení a potrestání. Tito zločinci tedy aktivně reagují na tuto změnu a přizpůsobují této změně své chování.

Úsporná opatření, která snižují úroveň policejní ochrany v některých lokalitách s odůvodněním nízké kriminality, jsou tedy (v přeneseném slova smyslu) v rozporu s Lucasovou kritikou.

4.1.2 Stochastické šoky

Významnou součástí DSGE modelů jsou takzvané stochastické šoky. Pomocí těchto stochastických šoků jsou modelovány náhodné veličiny, které na jedné straně ovlivňují ekonomiku, na druhé straně ale nejsou endogenní součástí ekonomického systému a neumíme je vysvětlit pomocí ostatních ekonomických veličin. Typickým příkladem těchto veličin jsou technologické šoky, které na jedné straně ovlivňují produktivitu kapitálu i práce a tím i řadu dalších veličin, ale na druhou stranu nejsou pomocí těchto veličin jednoznačně vysvětlitelné (nebo toto vysvětlení neumějí ekonomové najít). Dalšími příklady náhodných šoků mohou být prudké změny ceny ropy nebo fiskální politika, která často odráží především aktuální politickou situaci.
Pro studium DSGE modelů je potřeba si osvojit především způsob, jakým jsou v modelu zaneseny náhodné šoky. DSGE modely rozšiřují neoklasickou ekonomii o řadu pojmů, které pocházejí především z teorie pravděpodobnosti a ze statistiky.
Začneme s velmi obecnou definicí náhodného procesu.

Definice 4.1.3 — Náhodný (stochastický) proces. Náhodný proces je systém náhodných proměnných a reprezentuje vývoj systému náhodných proměnných v čase.

Tuto abstraktní definici si ukažme na následujícím příkladě. Uvažujme hráče rulety. Hodnota čísla, které padne na ruletě, je náhodná veličina. Sledujeme-li ale celkovou výhru (nebo prohru) jednoho konkrétního hráče v průběhu jeho návštěvy kasína, pak vlastně sledujeme náhodný proces, který v sobě obsahuje náhodnou proměnnou aktuálně padlého čísla a aktuální sázku hráče (která může být např. výsledkem nějaké stochastické strategie). Další náhodnou veličinou je třeba počet pojistných událostí, které musí vyrovnat určitá komerční pojišťovna. Celkový zisk (nebo ztráta) pojišťovny v čase je pak náhodný proces.

Speciálním typem náhodných procesů jsou procesy, které byly formulovány v souvislosti s Box-Jenkinsonovou metodologií. Tato metodologie představuje alternativní pohled na teorii časových řad. Při klasické dekompozici se snažíme časovou řadu rozložit na její jednotlivé složky (trendovou, cyklickou, sezónní) a očistit hodnoty časové řady od vlivu náhodné složky. Naopak Box-Jenkinsonova metodologie se zaměřuje především na studium náhodné složky. Základním náhodným procesem v Box-Jenkinsonově metodologii je autoregresní proces prvního řádu, v literatuře často označovaný jako AR(1) proces.

Definice 4.1.4 — Autoregresní proces. Autoregresní náhodný proces je takový náhodný proces, jehož aktuální hodnota je kombinací hodnoty tohoto procesu v minulosti a náhodné veličiny.

Autoregresní proces prvního řádu si můžeme představit na základě následujícího jednoduchého příkladu: Uvažujme, že se nacházíme v automobilu jedoucím určitou rychlostí po rovné vozovce. Nyní si náhodně vybereme mezi brzdovým a plynovým pedálem a jeden z nich náhodně zvolenou silou sešlápneme. Rychlost vozu za 10 vteřin po této akci závisí jednak na jeho předchozí rychlosti a druhak na zvoleném pedálu a síle, se kterou jsme ho sešlápli.

V DSGE modelech reálné šoky (změny produktivity) ovlivňují výstup a úspory, čímž ovlivňují akumulaci kapitálu a tedy ukazují dopady původního šoku způsobem, který je vhodný pro popis krátkodobých fluktuací ekonomiky kolem dlouhodobého trendu - hospodářských cyklů.

4.1.3 Walrasův aukcionář

Pro konstrukci ekonomického modelu s dobrovolnou tržní směnou je nutná volba typu aukce, která určuje cenu zboží a výrobních faktorů na jednotlivých trzích a objem transakcí, ke kterým dochází. Typ aukce rozhoduje o tom, za jaké ceny a jaká množství zboží budou na trhu obchodována.

Aukce s využitím Walrasova aukcionáře je základním typem aukce v neoklasické ekonomii. Výhodou toho typu aukce je, že je matematicky snadno řešitelná. Ačkoliv se tento typ aukcí v realitě příliš často nevyskytuje, lze ukázat, že reálně používané typy aukcí (včetně např. i zcela běžná *posted-offer*) resp. jejich výsledky, konvergují k výsledku, který dává právě Walrasova aukce.

Uvažujme, že na trhu máme výrobce, kteří nabízejí (z pohledu spotřebitele) identické zboží. Dále máme na trhu spotřebitele, kteří jsou ochotni směňovat toto zboží za nějakou (ve všech případech kvalitativně shodnou) komoditu. Poptávající nemají žádné preference ohledně prodejce. To samé platí pro nabízející. Walrasův aukcionář funguje na následujícím principu: Od všech nabízejících zjistí jejich individuální nabídky a od všech poptávajících jejich individuální poptávky. Na základě těchto individuálních nabídek a poptávek Walrasův aukcionář snadno sestaví tržní poptávku a tržní nabídku a určí rovnovážnou cenu, při které se nabízené množství rovná poptávanému množství. Poté od každého nabízejícího vezme množství zboží, které odpovídá jeho individuální nabídce pro tržní cenu, a veškeré toto zboží pak rozdělí mezi poptávající tak, aby každý z nich dostal množství odpovídající jeho individuální poptávce pro tržní cenu. Současně od každého poptávajícího získá množství směnné komodity, která odpovídá násobku rovnovážné ceny a množství nakoupeného zboží. Současně každý výrobce obdrží množství směnné komodity, která odpovídá násobku rovnovážné ceny a prodaného množství zboží.

Důležitou vlastností Walrasova aukcionáře je to, že umožňuje obchodování pouze za jedinou rovnovážnou cenu, která je po všechny stejná, tj. dva subjekty se nemohou domluvit a provést transakci za jinou cenu. Rovněž v případě Walrasova aukcionáře nedochází k žádnému párování mezi nabízejícími a poptávajícími. Nemá tedy smysl řešení otázky, jakému subjektu prodal nabízející své zboží nebo od jakého prodejce poptávající zboží nakoupil.

Cvičení 4.1 Vyhledejte a popište další typy aukcí. ■

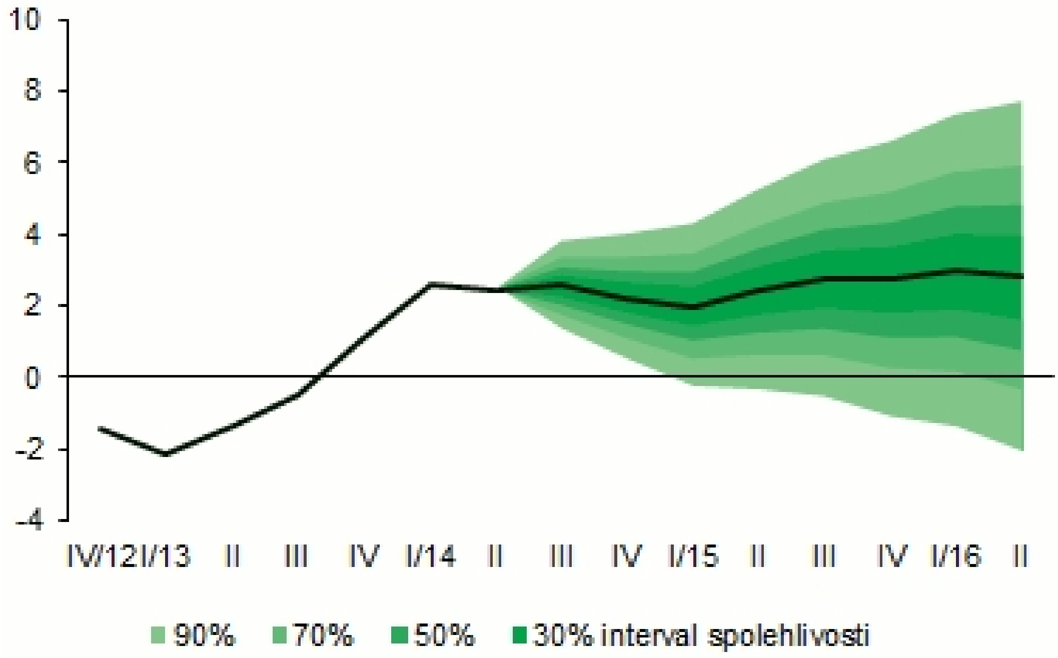
4.1.4 Základní DSGE model

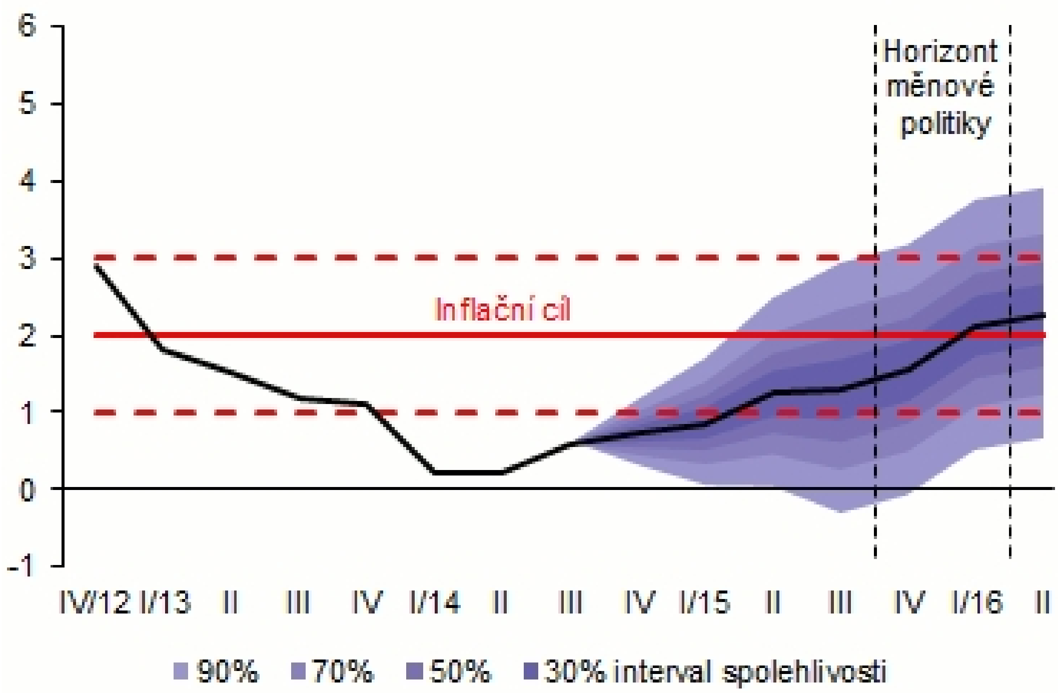
První dynamický model všeobecné rovnováhy formuloval anglický filosof a matematik Frank Plumpton Ramsey v roce 1928.

R DSGE modely ukazují, že dělení ekonomie na mikroekonomii a makroekonomii je extrémně zavádějící. Jsou to sice modely, které mají mikroekonomický základ v podobě popisu chování reprezentativní domácnosti a firmy ale slouží k modelování vývoje celé ekonomiky. Daleko smysluplnější je dělení ekonomie podle jednotlivých škol či použité metodologie.

Ramseyův model byl deterministický, obsahoval však řadu metod a přístupů, které jsou používány dodnes. Naneštěstí Ramsey zemřel rok po vydání svého článku a ten zůstal po řadu let (z několika důvodů) nepochopen. Je paradoxní, že Ramsey formuloval svůj model ke studiu dlouhodobého ekonomického růstu, zatímco DSGE modely jsou, jak již bylo řečeno, používány především pro krátkodobé prognózy (v řádu jednotek let) a ke studiu krátkodobých výkyvů ekonomiky. Prognózu České národní banky z listopadu 2014 vidíte na následujícím obrázku. Jedná se o tempo růstu HDP a míru inflace. Tato prognóza je samozřejmě výsledkem mnohonásobně složitějšího modelu, než jakým se budeme dále zabývat. K těmto účelům se obvykle používají modely s několika desítkami rovnic, které obsahují cenové, mzdové nebo informační rigidity, tyto modely jsou označované jako *nové keynesiánské* DSGE modely.

R DSGE modely zcela přesně naplňují cíl pozitivní ekonomie: dávat nositelům hospodářské politiky predikce vývoje ekonomiky jako podklad pro jejich rozhodování. Techniky odhadů těchto modelů na reálných datech jsou však velmi obtížnou záležitostí a proto se jimi nebudeme dále zabývat. Pouze konstatujeme fakt, že DSGE modely používají prakticky všechny centrální banky na světě a také řada vládních ministerstev. Jejich modely jsou však obvykle menší a méně propracované, neboť ministerstva jsou na rozdíl od centrálních bank omezeny svými rozpočty a nemohou si tedy najmout tak rozsáhlé analytické týmy.





V následujícím příkladě si popíšeme a vyřešíme učebnicovou verzi DSGE modelu.

■ **Příklad 4.1** Předpokládejme reprezentativního domácnost, který je příjemcem ceny na všech trzích a jehož účelová funkce je:

$$\max_{C,L} \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U\left(C_{t+k}, L_{t+k}\right) \tag{4.1}$$

vzhledem k omezení

$$w_{t+k}\left(1-L_{t+k}\right)+r_{t+k}K_{t+k}+\left(1-\delta\right)K_{t+k}=C_{t+k}+K_{t+k+1}\,. \tag{4.2}$$

Reprezentativní domácnost tedy maximalizuje očekávanou sumu diskontovaného užitku, závislého na spotřebě a volném čase (celkové množství času je normováno na hodnotu 1). Rozpočtové omezení, jemuž je vystaven, se skládá z pracovního příjmu $w_t(1-L_t)$, příjmu z vlastnictví kapitálu (kapitálových statků) r_tK_t a z výdajů na spotřebu C_t a z výdajů na nové kapitálové statky (tj. čisté investice) $K_{t+1}-K_t$ a z výdajů na náhradu opotřebovaných kapitálových statků (tj. obnovovací investice) $\delta \cdot K_t$.

R Rozpočtové omezení je možné též interpretovat jako identitu zdrojů produktu (produkt je tvořen výdaji na jeho jednotlivé složky) a užití produktu (odměny za služby jednotlivých výrobních faktorů):

$$\underbrace{\underbrace{K_{t+k+1}-K_{t+k}}_{\text{čisté investice}} + \underbrace{\delta K_{t+k}}_{\text{obnovovací investice}}}_{\text{hrubé (celkové) investice}} + C_{t+k} \equiv$$
$$\underbrace{w_{t+k}(1-L_{t+k})}_{\text{odměna za služby práce}} + \underbrace{r_{t+k}K_{t+k}}_{\text{odměna za služby kapitálu}}$$

Tento zápis předpokládá jednotkovou cenu spotřebního a kapitálového zboží. Cena práce w je tedy odpovídá reálné mzdě a vyjadřuje kolik jednotek vyrobené produkce si může spotřebitel koupit v situaci, když pracuje veškerý svůj disponibilní čas. Nájemní cena kapitálu r (cena služby kapitálu) je reálná úroková míra a vyjadřuje, kolik jednotek vyrobené produkce si může domácnost koupit, když dříve naakumulovala jednu jednotku kapitálu. Řešení získáme např. pomocí Langrangeovy funce.
Definujme Langrangeián takto:

$$\mathscr{L} = \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \{U(C_{t+k}, L_{t+k}) + \lambda_{t+k}[w_{t+k}(1-L_{t+k}) + \\ + r_{t+k}K_{t+k} + (1-\delta)K_{t+k} - C_{t+k} - K_{t+k+1}]\} \quad (4.3)$$

Pro pohodlí uveďme zvlášť rozepsané dva po sobě jdoucí členy pro období $t+k$ a $t+k+1$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \mathbb{E}_t\{&U(C_t, L_t) + \lambda_t[w_t(1-L_t) + r_tK_t + (1-\delta)K_t - C_t - K_{t+1}] + \cdots \\ &+ \beta^k U(C_{t+k}, L_{t+k}) + \beta^k \lambda_{t+k}[w_{t+k}(1-L_{t+k}) + r_{t+k}K_{t+k} + \\ &+ (1-\delta)K_{t+k} - C_{t+k} - K_{t+k+1}] + \cdots \\ &+ \beta^{k+1} U(C_{t+k+1}, L_{t+k+1}) + \beta^{k+1}\lambda_{t+k+1}[w_{t+k+1}(1-L_{t+k+1}) + r_{t+k+1}K_{t+k+1} + \\ &+ (1-\delta)K_{t+k+1} - C_{t+k+1} - K_{t+k+2}] + \cdots\}\end{aligned}$$

Podmínky prvního řádu získáme derivací podle všech proměnných C_{t+k}, L_{t+k} a K_{t+k+1}:

$$\forall C_{t+k};\forall k\geq 0:\mathbb{E}_t\beta^k\left[\frac{\partial U\left(C_{t+k},L_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}}-\lambda_{t+k}\right]=0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial U\left(C_{t+k},L_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}}-\lambda_{t+k}=0\Longrightarrow \lambda_{t+k}=\frac{\partial U\left(C_{t+k},L_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}} \tag{4.4}$$

$$\forall L_{t+k};\forall k\geq 0:\mathbb{E}_t\beta^k\left[\frac{\partial U\left(C_{t+k},L_{t+k}\right)}{\partial L_{t+k}}-w_{t+k}\lambda_{t+k}\right]=0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial U\left(C_{t+k},L_{t+k}\right)}{\partial L_{t+k}}-w_{t+k}\lambda_{t+k}=0\Longrightarrow \frac{\frac{\partial U\left(C_{t+k},L_{t+k}\right)}{\partial L_{t+k}}}{\frac{\partial U\left(C_{t+k},L_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}}}=w_{t+k} \tag{4.5}$$

$$\forall K_{t+k+1};\forall k\geq 0:\mathbb{E}_t\beta^k\left[\beta\left(r_{t+k+1}+1-\delta\right)\lambda_{t+k+1}-\lambda_{t+k}\right]=0$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}_t\beta\left[\left(r_{t+k+1}+1-\delta\right)\lambda_{t+k+1}\right]=\mathbb{E}_t\lambda_{t+k} \tag{4.6}$$

Spojením rovnic 4.4 a 4.6 získáme Eulerovu rovnici:

$$\forall k\geq 0:\frac{\partial U\left(C_{t+k},L_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}}=\mathbb{E}_t\beta\left(r_{t+k+1}+1-\delta\right)\frac{\partial U\left(C_{t+k+1},L_{t+k+1}\right)}{\partial C_{t+k+1}} \tag{4.7}$$

R Derivací podle λ_{t+k} získáme zpět pouze rozpočtové omezení $w_{t+k}\left(1-L_{t+k}\right)+r_{t+k}K_{t+k}+\left(1-\delta\right)K_{t+k}=C_{t+k}+K_{t+k+1}$. Celá formulace úlohy, resp. tato omezující podmínka rozhodování domácností předpokládá nulový zisk firem. Aby toto bylo splněno je nutné, aby produkční funkce 4.9 byla homogenní stupně jedna, tedy vykazovala konstantní výnosy z rozsahu. Potom platí, že veškerý produkt je vyčerpán výrobními faktory $w_{t+k}\left(1-L_{t+k}\right)+r_{t+k}K_{t+k}=Y_{t+k}$ a omezení domácností je pouze jinou interpretací rovnováhy trhu výrobků 4.13. Z tohoto důvodu zde derivaci podle λ_{t+k} neuvádíme.

Její interpretace je jednoduchá: Aby celková suma diskontovaného užitku byla maximální, musí se pro všechny budoucí časové okamžiky marginální užitek v čase $t+k$ rovnat očekávanému užitku v čase $t+k+1$ sníženému o diskontní faktor a zvýšenému o rozdíl výnosu z kapitálu a jeho depreciace. Pokud má být suma diskontovaného užitku skutečně maximální, tak nekonečně malá změna rozhodnutí domácnosti povede ke stejnému výsledku. Domácnost se tedy rozhodne pro snížení své spotřeby v čase $t+k$ o jednu nekonečně malou jednotku, to sníží její celkový dosažený užitek o $\frac{\partial U(C_{t+k},L_{t+k})}{\partial C_{t+k}}$. Tato nespotřebovaná jednotka se stává kapitálovým statkem, který v dalším období $t+k+1$ přinese čistý výnos $r_{t+k+1}-\delta$. Počet spotřebovaných jednotek je tedy $\left(r_{t+k+1}+1-\delta\right)$ a stačí ho jen vynásobit diskontovaným marginálním užitkem $\beta\frac{\partial U(C_{t+k+1},L_{t+k+1})}{\partial C_{t+k+1}}$ a získáme přírůstek užitku v období $t+k+1$. Pokud je počáteční snížení užitku stejné, jako jeho následní zvýšení, znamená to, že původní alokace byla optimální. A to je přesně to, co říká Eulerova rovnice 4.7.

Interpretace rovnice (4.5) je též jednoduchá: Domácnost se rozhodne snížit množství volného času o jednu nekonečně malou jednotku, to sníží její užitek o $\frac{\partial U(C_{t+k},L_{t+k})}{\partial L_{t+k}}$. To ale znamená o jednu jednotku práce více, což domácnosti umožní spotřebovat w_{t+k} dodatečných jednotek statků. Tento počet stačí vynásobit marginálním užitek ze spotřeby

$\frac{\partial U(C_{t+k},L_{t+k})}{\partial C_{t+k}}$ a získáme přírůstek užitku plynoucí ze zvýšené spotřeby. Pokud je snížení užitku v důsledku menšího množství volného času přesně kompenzováno zvýšením užitku z vyšší spotřeby, byla původní alokace optimální. Rozhodování domácností je popsáno rovnicemi (4.5) a (4.7).
Firmy maximalizují svůj zisk, přičemž jsou prace-takery na všech trzích:

$$\max_{N,K} \left[Y_{t+k} - w_{t+k}N_{t+k} - r_{t+k}K_{t+k}\right] \tag{4.8}$$

vzhledem k produkční funkci

$$Y_{t+k} = F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right). \tag{4.9}$$

Rozhodovací problém firem je statický a podmínky prvního řádu vyplývají z derivování funkce zisku:

$$F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right) - w_{t+k}N_{t+k} - r_{t+k}K_{t+k} \tag{4.10}$$

podle práce N_{t+k} a kapitálu K_{t+k}.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cdot)}{\partial N_{t+k}} &= \frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial N_{t+k}} - w_{t+k} = 0 \\ &\Longrightarrow \frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial N_{t+k}} = w_{t+k} \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cdot)}{\partial K_{t+k}} &= \frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial K_{t+k}} - r_{t+k} = 0 \\ &\Longrightarrow \frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial K_{t+k}} = r_{t+k} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Rovnice 4.11 a 4.12 udávají rovnost marginálního produktu příslušného výrobního faktoru a jeho ceny.
Trh výrobků je vyčištěn pokud je všechna vyrobená produkce použita na spotřebu nebo investice (hrubé):

$$Y_{t+k} = C_{t+k} + K_{t+k+1} - (1-\delta)K_{t+k}. \tag{4.13}$$

Trh práce je vyčištěn pokud se množství práce poptávané firmami rovná množství práce nabízené domácnostmi

$$N_{t+k} = 1 - L_{t+k}. \tag{4.14}$$

R Tato rovnice implikuje, že derivace užitkové funkce podle volného času se rovná záporné derivaci užitkové funkce podle práce: $\frac{\partial U(C_{t+k},L_{t+k})}{\partial (L_{t+k})} = -\frac{\partial U(C_{t+k},1-N_{t+k})}{\partial (N_{t+k})}$

Pro daný exogenní proces technologické úrovně A_{t+k}, je rovnováha popsána rovnicemi pro optimální rozhodování domácností (4.5), (4.7), rovnicemi pro optimální rozhodování firem (4.11), (4.12), produkční funkcí (4.9) a podmínkami rovnováhy na trzích 4.13

a (4.14). Po zjednodušení dostáváme systém pěti rovnic, které popisují optimální trajektorii spotřeby, kapitálu, zaměstnanosti, reálných mezd a reálné úrokové míry:

$$\frac{-\frac{\partial U(C_{t+k},1-N_{t+k})}{\partial(N_{t+k})}}{\frac{\partial U(C_{t+k},1-N_{t+k})}{\partial C_{t+k}}} = w_{t+k} \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial U\left(C_{t+k},1-N_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}} = \mathbb{E}_t\beta\left(r_{t+k+1}+1-\delta\right)\frac{\partial U\left(C_{t+k+1},1-N_{t+k+1}\right)}{\partial C_{t+k+1}} \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial F\left(N_{t+k},K_{t+k},A_{t+k}\right)}{\partial N_{t+k}} = w_{t+k} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial F\left(N_{t+k},K_{t+k},A_{t+k}\right)}{\partial K_{t+k}} = r_{t+k} \tag{4.18}$$

$$F\left(N_{t+k},K_{t+k},A_{t+k}\right) = C_{t+k}+K_{t+k+1}-(1-\delta)K_{t+k} \tag{4.19}$$

R Velikost produkce lze snadno dopočítat podle produkční funkce (4.9).

Pohodlně můžeme redukovat počet rovnic tím, že eliminujeme reálnou mzdu a reálnou úrokovou míru:

$$-\frac{\partial U\left(C_{t+k},1-N_{t+k}\right)}{\partial\left(N_{t+k}\right)} = \\ = \frac{\partial F\left(N_{t+k},K_{t+k},A_{t+k}\right)}{\partial N_{t+k}}\frac{\partial U\left(C_{t+k},1-N_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}} \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial U\left(C_{t+k},1-N_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}} = \\ = \mathbb{E}_t\beta\left(\frac{\partial F\left(N_{t+k+1},K_{t+k+1},A_{t+k+1}\right)}{\partial K_{t+k+1}}+1-\delta\right)\frac{\partial U\left(C_{t+k+1},1-N_{t+k+1}\right)}{\partial C_{t+k+1}} \tag{4.21}$$

$$F\left(N_{t+k},K_{t+k},A_{t+k}\right) = C_{t+k}+K_{t+k+1}-(1-\delta)K_{t+k} \tag{4.22}$$

Tím jsme získali 3 rovnice pro 3 neznámé: C, N, K.
Celou úlohu můžeme reformulovat do centralizované podoby, neboli ekonomiky jediného subjektu - Robinsona Crusoe. Jeho cílem je maximalizovat užitek při omezení disponibilním časem, produkční funkcí a zákonem pohybu kapitálu:

$$\max_{C,L}\mathbb{E}_t\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k U\left(C_{t+k},L_{t+k}\right)$$

vzhledem k

$$4.14: N_{t+k} = 1-L_{t+k}$$
$$4.9: Y_{t+k} = F\left(N_{t+k},K_{t+k},A_{t+k}\right)$$
$$4.13: Y_{t+k} = C_{t+k}+K_{t+k+1}-(1-\delta)K_{t+k}$$

První omezení lze dosadit do užitkové funkce a další dvě lze spojit v jediné. Tím dostáváme Lagrangeovu funkci:

$$\mathscr{L} = \mathbb{E}_t\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\{U\left(C_{t+k},1-N_{t+k}\right)+\lambda_{t+k}[F\left(N_{t+k},K_{t+k},A_{t+k}\right)+ \\ +(1-\delta)K_{t+k}-C_{t+k}-K_{t+k+1}]\} \tag{4.23}$$

Podmínky prvního řádu získáme derivací podle všech proměnných C_{t+k}, N_{t+k} a K_{t+k+1} a λ_{t+k} a výsledným řešením jsou opět rovnice:

$$4.20 : -\frac{\partial U\left(C_{t+k}, 1-N_{t+k}\right)}{\partial\left(N_{t+k}\right)} =$$

$$= \frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial N_{t+k}} \quad \frac{\partial U\left(C_{t+k}, 1-N_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}}$$

$$4.21 : \frac{\partial U\left(C_{t+k}, 1-N_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}} =$$

$$= \mathbb{E}_t \beta \left(\frac{\partial F\left(N_{t+k+1}, K_{t+k+1}, A_{t+k+1}\right)}{\partial K_{t+k+1}} + 1 - \delta \right) \frac{\partial U\left(C_{t+k+1}, 1-N_{t+k+1}\right)}{\partial C_{t+k+1}}$$

$$4.22 : F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right) = C_{t+k} + K_{t+k+1} - (1-\delta) K_{t+k}$$

Tato možnost redukce původního decentralizovaného modelu na model centralizovaný ukazuje na skutečnost, že v tomto typu modelů se firmy chovají tak, jak chtějí jejich vlastníci. To jsou domácnosti jejichž cílem je maximalizovat užitek a k tomu potřebují získat co největší důchod, tedy maximální zisk firem. Model tedy předpokládá, že firmy sledují cíle svých vlastníků, jinými slovy: firmy jsou řízeny jejich vlastníky. Samozřejmě vlastníci firem jsou vlastníci kapitálu a úroková míra je jejich odměnou. ■

4.2 Numerické řešení a simulace

Pro ekonomickou interpretaci DSGE modelů je důležité především nalezení stálého stavu neboli steady-state. Steady-state je takový stav ekonomiky, při kterém subjekty nemají tendenci měnit své chování. Stavem ekonomiky v tomto smyslu myslíme konkrétní hodnoty endogenních proměnných modelu. Pro větší přehlednost si zaveďme formální definici steady-state.

Definice 4.2.1 — Steady-state (stálý stav). Steady-state jsou takové hodnoty všech endogenních proměnných modelu $x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t}$, pro které by (bez vlivu stochastického šoku) platilo pro všechna t: $x_{1,t} = x_{1,t+1}, x_{2,t} = x_{2,t+1}, \ldots, x_{n,t} = x_{n,t+1}$.

Steady-state lze určit analyticky nebo numericky. K numerickému řešení lze využít zdarma dostupný software Octave a doplněk Dynare.

4.2.1 Model s exogenní nabídkou práce

V modelech s exogenní nabídkou práce uvažujeme, že domácnost tráví stále stejné množství disponibilního času prací, to bez ohledu na výši reálné mzdy a další ekonomické veličiny. Tyto modely jsou zpravidla jednodušší, protože v užitkové funkci bývá pouze množství spotřebovaného zboží. Na druhou stranu tyto modely nereflektují řadu ekonomických jevů, především pak změny v míře zaměstnanosti vyvolané dobrovolnou preferencí volného času domácnostmi.
Řešení modelů s exogenní nabídkou práce si ukážeme na modelu s neoklasickou užitkovou funkcí a benevolentním diktátorem.

■ **Příklad 4.2** Uvažujme model s benevolentním diktátorem, který maximalizuje očekávaný užitek domácnosti, který je dán velikostí jeho spotřeby. Benevolentní diktátor tedy řeší problém

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}. \tag{4.24}$$

za podmínky

$$k_{t+1} = a_t \cdot k_t^{\alpha} - c_t + (1-\delta) \cdot k_t. \tag{4.25}$$

Uvažujeme exogenní šok, který modelujeme jako autoregresní proces prvního řádu, šok je dán rovnicí:

$$\ln a_t = \rho \cdot \ln a_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.26}$$

Uvažujeme, že ε_t je náhodná proměnná, která pochází z rozdělení $\mathcal{N}(0, \sigma_e)$. Směrodatnou odchylku σ_e považujeme za pevně danou a je jedním z parametrů modelu.
Opět je potřeba odvodit podmínky prvního řádu. Sestavíme si Lagrangeovu funkci:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \cdot [a_t \cdot k_t^{\alpha} - c_t + (1-\delta) \cdot k_t - k_{t+1}] \tag{4.27}$$

R Zde je Lagrangeova funkce sestavena na první pohled jiným způsobem než v předchozí subkapitole. Po bližším prozkoumání snadno zjistíme, že λ_t v této subkapitole ve stejné jako $\beta^t * \lambda_t$ v předchozí subkapitole. Pokud bychom chtěli Lagrangeův multiplikátor interpretovat, tak korektní je vyjádření v této subkapitole, ovšem ke správnému řešení optimalizační úlohy dojdeme obojím způsobem. Lagrangeův multiplikátor pouze mění délku gradientu omezení a účelové funkce na stejnou délku - viz věta 1.2.2 na straně 11.

Nejprve si vypočítáme parciální derivace Lagrangeovy funkce podle spotřeby v čase t a $t+1$, tj. derivujeme podle c_t a c_{t+1}. Parciální derivace položíme rovny nule.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \mathbb{E}_0 \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma-1}}{1-\sigma} \cdot (1-\sigma) - \lambda_t = \mathbb{E}_0 \beta^t c_t^{-\sigma} - \lambda_t = 0, \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} \frac{c_{t+1}^{1-\sigma-1}}{1-\sigma} \cdot (1-\sigma) - \lambda_{t+1} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} c_{t+1}^{-\sigma} - \lambda_{t+1} = 0. \tag{4.29}$$

Z první parciální derivace si můžeme vyjádřit hodnotu Lagrangeova multiplikátoru v čase t jako

$$\lambda_t = \mathbb{E}_0 \beta^t c_t^{-\sigma} \tag{4.30}$$

a z druhé rovnice hodnotu Lagrangeova multiplikátoru v čase $t+1$ jako

$$\lambda_{t+1} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} c_{t+1}^{-\sigma}. \tag{4.31}$$

Nyní si vypočteme parciální derivaci Lagrangeovy funkce podle k_t. Pro větší názornost si ale nejprve rozepíšeme sumu $\sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \cdot [a_t \cdot k_t^{\alpha} - c_t + (1-\delta) \cdot k_t - k_{t+1}]$. Klíčová pro nás bude především dvojice po sobě jdoucích členů. Uvažujme nějaké $\tau \in \mathbb{N}$. Pak můžeme sumu od nuly do nekonečna rozepsat jako

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \cdot [a_t \cdot k_t^{\alpha} - c_t + (1-\delta) \cdot k_t - k_{t+1}] = \\
&\lambda_0 \cdot [a_0 \cdot k_0^{\alpha} - c_0 + (1-\delta) \cdot k_0 - k_1] + \\
&\lambda_1 \cdot [a_1 \cdot k_1^{\alpha} - c_1 + (1-\delta) \cdot k_1 - k_2] \\
&+ \ldots + \\
&\lambda_{\tau-1} \cdot \left[a_{\tau-1} \cdot k_{\tau-1}^{\alpha} - c_{\tau-1} + (1-\delta) \cdot k_{\tau-1} - k_{\tau}\right] + \\
&\lambda_{\tau} \cdot [a_{\tau} \cdot k_{\tau}^{\alpha} - c_{\tau} + (1-\delta) \cdot k_{\tau} - k_{\tau+1}] + \\
&\qquad\qquad \lambda_{\tau+1} \cdot \left[a_{\tau+1} \cdot k_{\tau+1}^{\alpha} - c_{\tau+1} + (1-\delta) \cdot k_{\tau+1} - k_{\tau+2}\right] + \ldots
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Nyní pro nás bude derivace podle proměnné k_t názornější:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_t} = \lambda_{t-1} \cdot (-1) + \lambda_t \cdot \left[a_t \cdot \alpha \cdot k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)\right] = 0\,. \tag{4.33}$$

Můžeme tedy zapsat rovnost:

$$\lambda_{t-1} = \lambda_t \cdot \left[a_t \cdot \alpha \cdot k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]\,. \tag{4.34}$$

V další fázi výpočtu se budeme snažit do derivace Lagrangeovy rovnice podle množství kapitálu dosadit za Lagrangeovy multiplikátory. V našem postupu je však dosazení nepraktické, protože nemáme vyjádřenou hodnotu Lagrangeova multipikátoru pro čas $t-1$. To lze však jednoduše vyřešit dvěma způsoby – další derivací Lagrangeovy rovnice podle k_{t+1} nebo podle c_{t-1}. Vybereme si první způsob:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_{t+1}} = \lambda_t \cdot (-1) + \lambda_{t+1} \cdot \left[a_{t+1} \cdot \alpha \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right] = 0\,. \tag{4.35}$$

Opět přepíšeme rovnost:

$$\lambda_t = \lambda_{t+1} \cdot \left[a_{t+1} \cdot \alpha \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]\,. \tag{4.36}$$

Díky derivace Lagrangeovy funkce podle spotřeby víme, že $\lambda_t = \mathbb{E}_0 \beta^t c_t^{-\sigma}$ a $\lambda_{t+1} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} c_{t+1}^{-\sigma}$. Dosadíme to tedy do naší derivace:

$$\mathbb{E}_0 \beta^t c_t^{-\sigma} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} c_{t+1}^{-\sigma} \cdot \left[a_{t+1} \cdot \alpha \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]\,. \tag{4.37}$$

V této rovnici ještě můžeme upravit očekávání domácnosti. Rovnice je vztahem mezi marginálním užitkem ze spotřeby v čase t a v čase $t+1$. Protože v čase t je objem spotřeby již známe, můžeme z levé strany rovnice odstranit symbol pro očekávání. Objem spotřeby v čase $t+1$ jistý není, proto zde symbol očekávání ponecháme, ale uvažujeme očekávaní formulované v čase t. Protože diskontní faktor je pevně daný a konstantní, přesuneme symbol racionálního očekávání až za tento faktor. Dále můžeme vzájemně zkrátit parametry β, tj. obě strany rovnice vydělíme β^t. Finální podoba Eulerovy rovnice je tedy tato:

$$c_t^{-\sigma} = \beta \cdot \mathbb{E}_t c_{t+1}^{-\sigma} \cdot \left[a_{t+1} \cdot \alpha \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]\,. \tag{4.38}$$

Poměrně častou proměnnou, která se v rámci DSGE modelů analyzuje, je celkový objem vyrobené produkce (tj. HDP ekonomiky). V našem modelu tuto proměnnou zatím nemáme, lze ji ale jednoduše doplnit. Označme si objem produkce vyrobený v čase t jako y_t. Objem vyrobené produkce tedy odpovídá produkční funkci, tj. proměnnou y_t definujeme jako

$$y_t = a_t \cdot k_t^{\alpha}. \tag{4.39}$$

Dále si definujme investice v čase t a označíme si je jako i_t. Investice představují rozdíl mezi množstvím kapitálu přeneseného z předcházejícího období a množství kapitálu v tomto období. Můžeme též vycházet se známé identity pro produkt v dvousektorové ekonomice, který odpovídá součtu spotřeby a investic, tj.

$$y_t = c_t + i_t \tag{4.40}$$

a pak platí, že

$$i_t = y_t - c_t. \tag{4.41}$$

V případě využití Dynare je pak jedno, kterou z těchto dvou forem vztahu využijeme. Sepišme si nyní všechny rovnice, které popisují náš model a které musíme přepsat do Dynare:

$$\begin{aligned}
c_t^{-\sigma} &= \beta \cdot \mathbb{E}_t c_{t+1}^{-\sigma} \cdot \left[a_{t+1} \cdot \alpha \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right] \\
y_t &= a_t \cdot k_t^{\alpha} \\
k_{t+1} &= a_t \cdot k_t^{\alpha} - c_t + (1-\delta) \cdot k_t \\
y_t &= c_t + i_t \\
\ln a_t &= \rho \cdot \ln a_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Kód pro software Dynare rozdělujeme do následujících částí:

- deklarace proměnných,
- deklarace parametrů a jejich hodnot,
- rovnice modelu,
- počáteční hodnoty pro numerické řešení,
- popis stochastických šoků,
- parametry simulace.

V našem modelu máme následující proměnné: y_t, i_t, a_t, c_t , k_t a náhodnou proměnnou ε_t. Parametry modelu jsou α, β, δ, ρ, σ, σ_e.

V případě rovnic neuvádíme časové indexy. Pokud je časový index proměnné $t-1$, zapíšeme hned za název proměnné `(-1)`. Např. y_{t-1} bychom zapsali jako `y(-1)`. V případě indexu $t+1$ zapisujeme za název proměnné $(+1)$, tj. y_{t+1} bychom zapsali jako `y(+1)`. Vždy zapisujeme včetně znaménka plus. Dále platí konvence, že stavové proměnné (v našem případě je to proměnná k) zapisujeme posunuté o jednu jednotku času zpět, tj. k_{t+1} zapíšeme jako `k` a k_t jako `k(-1)`.

Počáteční hodnoty jsou důležité pro nalezení numerického řešení steady-state. Pokud nemůžeme získat přesnější výchozí hodnoty, je možné navýšit počet iterací, během kterých se Dynare snaží nalézt řešení. Počet těchto iterací se zadává jako parametr

příkazu steady. Při popisu stochastických šoků pouze specifikujeme, který parametr udává rozptyl náhodné proměnné (v případě více náhodných proměnných specifikujeme i jejich korelaci).
Pro analýzu chování modelu slouží příkaz stoch_simul, který vykreslí funkce impulsních odezev, Impulse Response Functions - IRFs. Tyto funkce ukazují trajektorii odezvy dynamického systému na jednotkový impuls náhodné proměnné. Ten je standardně definován jako přičtení jedné směrodatné odchylky v počátečním období. jinými slovy to lze vyjádřit takto: nejprve je systém ve steady-state, poté (v počátečním období) dojde ke zvětšení exogenní náhodné veličiny o odmocninu ze zadaného rozptylu, což systém vychýlí ze steady-state a v dalších obdobích se systém ke svému stedy-state vrací. Kvůli snazšímu porovnávání různých systémmů a různých šoků jsou v grafech znázorněny nikoliv absolutní ale procentní odchylky od steady-state.
Výsledný zápis do Dynare uložíme do souboru s příponou .mod.

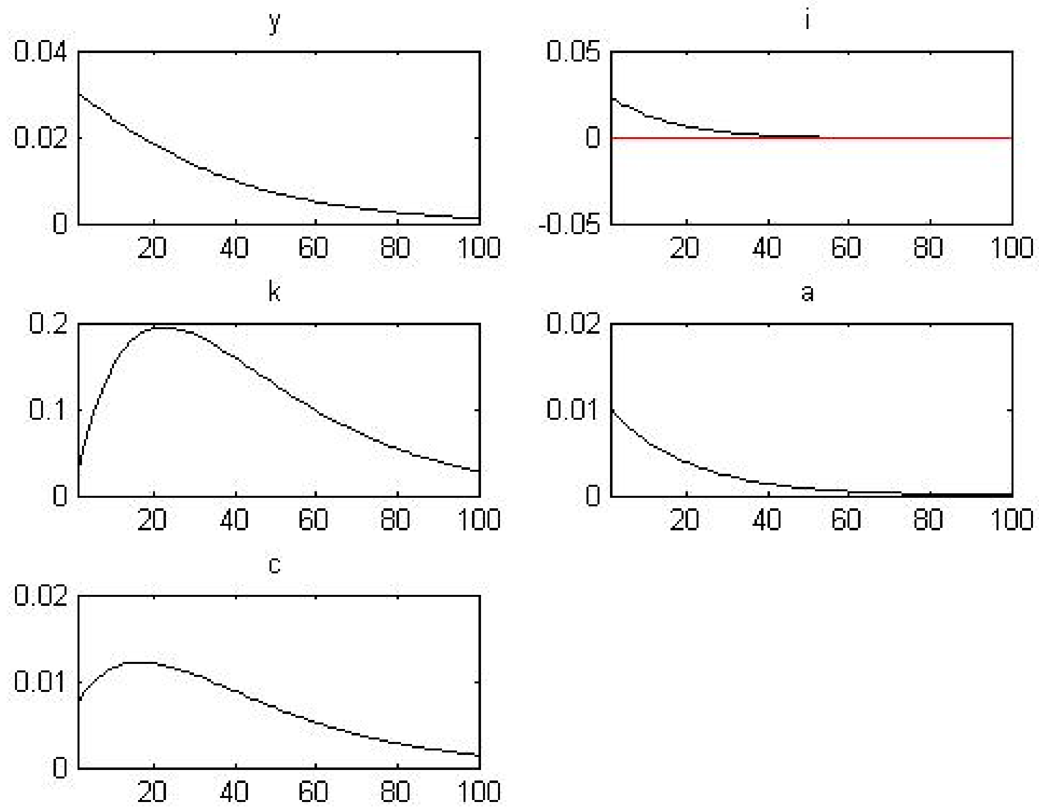
```
var y i k a c;
varexo e;

parameters alpha beta delta rho sigma sigmae;

alpha = 0.33;
beta = 0.99;
delta = 0.025;
rho = 0.95;
sigma = 1;
sigmae = 0.01;

model;

c^(-sigma) = beta*(c(+1)^(-sigma)*(alpha*a(+1)
        *k^(alpha -1) + (1-delta)));
y = a*k(-1)^(alpha);
k = i + (1-delta)*k(-1);
y = c + i;
log(a) = rho*log(a(-1)) + e;
end;

initval;

k = 29;
y = 3;
a = 1;
c = 2.5;
i = 1.5;
end;

shocks;
var e = sigmae^2;
end;

steady;
stoch_simul(irf=100);
```

■

Cvičení 4.2 Do výše popsaného modelu přidejte další stochastický šok, který bude ovlivňovat efektivitu investic. Proveďte simulaci v Dynare. Jak se liší výsledky simulace (tj. IRFs), pokud jsou tyto šoky

- nekorelované,
- korelované?

Proveďte ekonomickou interpretaci obou výsledků. ■



4.2.2 Model s endogenní nabídkou práce

V modelech s endogenní nabídkou práce uvažujeme, že reprezentativní domácnost má možnost volit množství odpracovaného času, podobně jako tomu bylo v modelu v subkapitole 4.1.4. V užitkové funkci reprezentativní domácnosti se tedy vyskytují dvě proměnné: množství volného času (resp. množství odpracovaného času) a množství spotřebovaného zboží.

Reprezentativní domácnost tedy čelí, kromě rozhodování o spotřebě a úsporách (tvorbě kapitálu), také následujícímu dilematu: Zvýšení množství odpracovaného času umožní zvýšit množství spotřebovaného zboží, na druhou stranu sníží jeho užitek z volného času. Pokud si chce domácnost užít větší množství volného času, musí omezit svoji spotřebu.

■ **Příklad 4.3** Uvažujeme reprezentativní domácnost maximalizujícího očekávanou diskontovanou sumu užitků v čase od 0 do nekonečna

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(c_t) - \psi \cdot n_t] . \tag{4.42}$$

za podmínky

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta) \cdot k_t = A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot n_t^{1-\alpha} . \tag{4.43}$$

Pro množství odpracovaného času n_t platí, že $n_t \in \langle 0; 1 \rangle$. Technologický šok je dán AR(1) procesem

$$z_t = \rho_z \cdot z_{t-1} + \varepsilon_t , \tag{4.44}$$

kde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Přepište model do Dynare a určte steady-state hodnoty pro endogenní proměnné. Uvažujte hodnoty parametrů $\alpha = 0.527$, $\beta = 0.99$, $\delta = 0.01$, $\psi = 1.92$, $\rho = 0.897$, $\sigma = 0.0119$, $A = 1$. Jako výchozí hodnoty pro steady-state použijte např. $k = 9$, $c = 0.9$, $n = 0.3$, $z = 0$, $\varepsilon = 0$.
Nejdříve sestavíme Lagrangeovu funkci:

$$\mathscr{L} = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(c_t) - \psi \cdot n_t] + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \cdot [A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot n_t^{1-\alpha} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta) \cdot k_t] \tag{4.45}$$

Pro řešení tohoto problému derivujeme Lagrangeovu funkci podle *vhodně zvolených* proměnných a položíme derivaci rovnu 0.
Nejrychlejším a nejefektivnějším způsobem, jak odvodit Eulerovu rovnici, je derivovat Lagrangeovu rovnici podle proměnných c_t, c_{t+1} a k_{t+1}. Efektivita tohoto způsobu řešení bude zřejmá během řešení.
Začneme derivací podle c_t a položíme ji rovnu nule

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_t} = \mathbb{E}_0 \beta^t u(c_t) - \lambda_t = 0\,. \tag{4.46}$$

Z této rovnice zjistíme, že:

$$\lambda_t = \mathbb{E}_0 \beta^t u'(c_t) \tag{4.47}$$

Derivace podle c_{t+1} je analogická

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_{t+1}} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} u'(c_{t+1}) - \lambda_{t+1} = 0\,. \tag{4.48}$$

Opět si vyjádříme příslušný Lagrangeův multiplikátor:

$$\lambda_{t+1} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} u'(c_{t+1}) \tag{4.49}$$

Nyní máme vyjádřené Lagrangeovy multiplikátory pro dvě bezprostředně následující časová období: t a $t+1$.
Nyní derivujeme Lagrangeovu funkci podle k_{t+1}

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) = 0 \tag{4.50}$$

Do této rovnice můžeme dosadit za Lagrangeovy multiplikátory λ_t a λ_{t+1}, které jsme si vyjádřili v předchozím kroku. Efektivita našeho postupu bude zřejmá, pokud si provedeme derivaci téže rovnice podle k_t:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_t} = -\lambda_{t-1} + \lambda_t \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_t^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) = 0\,. \tag{4.51}$$

V tomto případě bychom sice mohli dosadit za λ_t, nikoli však za λ_{t-1}.

Provedeme jednoduchou úpravu

$$\lambda_t = \lambda_{t+1} \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) \tag{4.52}$$

Do této rovnice nyní dosadíme za λ_t a λ_{t+1}:

$$\beta^t u'(c_t) = \beta^{t+1}\mathbb{E}_t u'(c_{t+1}) \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) \tag{4.53}$$

Jednoduchou úpravou získáme Eulerovu spotřební rovnici:

$$u'(c_t) = \beta\mathbb{E}_t u'(c_{t+1}) \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) \tag{4.54}$$

V případě této úlohy musíme optimalizovat i množství práce, které domácnost odpracuje. Určíme si tedy parciální derivaci Lagrangeovy funkce podle n_t

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial n_t} = -\beta^t \cdot \psi + \lambda_t \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot n_t^{-\alpha}\right] = 0 \tag{4.55}$$

a provedeme jednoduché úpravy:

$$\begin{aligned}
&\beta^t \cdot \psi = \mathbb{E}_0 \beta^t u'(c_t) \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot n_t^{-\alpha}\right] \\
&\psi = u'(c_t) \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot n_t^{-\alpha}\right]
\end{aligned}$$

Toto je další rovnice, která nám definuje optimální množství práce.
Shrňme si nyní klíčové rovnice našeho modelu:

$$\begin{aligned}
&c_t + k_{t+1} - (1-\delta) \cdot k_t = A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot n_t^{1-\alpha} \\
&u'(c_t) = \beta\mathbb{E}_t u'(c_{t+1}) \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) \\
&\psi = \mathbb{E}_0 u'(c_t) \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot n_t^{-\alpha}\right] \\
&z_t = \rho_z \cdot z_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Abychom mohli provést simulaci, zbývá učinit rozhodnutí o konkrétním tvaru užitkové funkce. Uvažujme nyní užitkovou funkci ze spotřeby jako $u(c_t) = \ln c_t$ a dosaďme si ji do našich rovnic:

$$\begin{aligned}
&c_t + k_{t+1} - (1-\delta) \cdot k_t = A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot n_t^{1-\alpha} \\
&\frac{1}{c_t} = \beta\mathbb{E}_t \frac{1}{c_{t+1}} \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) \\
&\psi = \mathbb{E}_0 \frac{1}{c_t} \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot n_t^{-\alpha}\right] \\
&z_t = \rho_z \cdot z_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Nyní převedeme rovnice do finálního tvaru, který můžeme přepsat do Dynare:

$$\begin{aligned}
&c_t + k_{t+1} - (1-\delta) \cdot k_t = A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot n_t^{1-\alpha} \\
&\frac{1}{c_t} = \beta\mathbb{E}_t \frac{1}{c_{t+1}} \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot \alpha \left(\frac{n_{t+1}}{k_{t+1}}\right)^{1-\alpha} + 1 - \delta\right] \\
&\psi = \frac{1}{c_t} \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot \left(\frac{k_t}{n_t}\right)^{\alpha} \cdot (1-\alpha)\right] \\
&z_t = \rho_z \cdot z_{t-1} + \varepsilon_t\,.
\end{aligned}$$

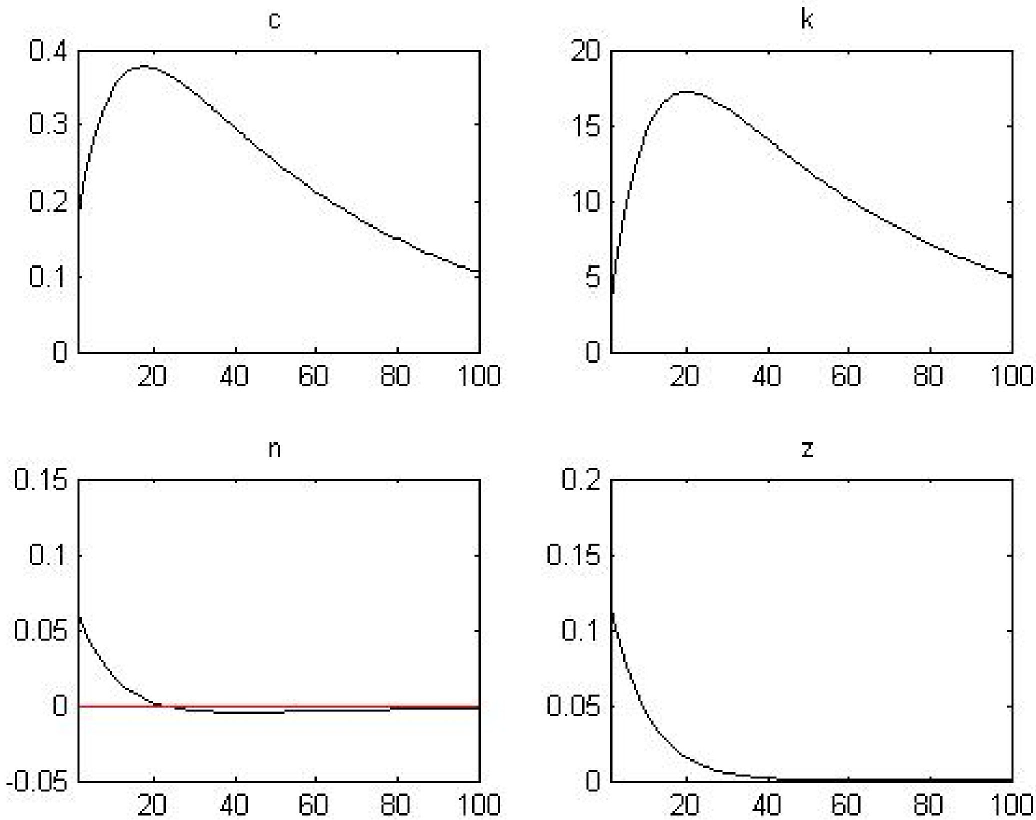
Při přepisu do Dynare musíme mít stále na paměti, že stavovou proměnnou k zapisujte s posunem o jedno časové období zpět.

```
var c k n z;
varexo e;
parameters beta psi delta alpha rho sigma A;
alpha = 0.527;
beta = 0.99;
delta = 0.01;
psi = 1.92;
rho = 0.897;
sigma = 0.119;
A = 1;
model;
(1/c) = beta*(1/c(+1))*
        (1+alpha*A*exp(z(+1))*(n(+1)/k)^(1-alpha)-delta);
psi*c = (1-alpha)*A*exp(z)*((k(-1)/n)^alpha);
c+k-(1-delta)*k(-1) = A*exp(z)*(k(-1))^alpha*(n)^(1-alpha);
z = rho*z(-1)+e;
end;
initval;
k = 200;
c = 0.76;
n = 0.3;
z = 0;
e = 0;
end;
steady(maxit = 10000);
shocks;
var e = sigma^2;
end;
stoch_simul(order = 1, irf=100);
```

■

Cvičení 4.3 Do rovnic modelu přidejte proměnnou y, který bude udávat objem vyrobené produkce. Proveďte novou simulaci a interpretujte, jak se objem produkce mění v důsledku stochastického šoku. ■

Cvičení 4.4 Analogicky ke cvičení 4.3 přidejte proměnnou i, která udává objem investic. ■


c
0.4
0.3
0.2
0.1
0
20
40
60
80
100
k
20
15
10
5
0
20
40
60
80
100
n
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
20
40
60
80
100
z
0.2
0.15
0.1
0.05
0
20
40
60
80
100

Použité zdroje

Knihy

[BS03] R. J. Barro and X. Sala-i-Martin. *Economic Growth*. The MIT Press, 2003.

[Beč05] J. Bečvář. *Lineární algebra*. Matfyzpress, 2005. ISBN: 9788086732572.

[Bla62] M. Blaug. *Economic theory in retrospect*. Cambridge New York: Cambridge University Press, 1962.

[FT91] D. Fudenberg and J. Tirole. *Game Theory*. MIT Press, 1991. ISBN: 9780262061414.

[GR04] H. Gravelle and R. Rees. *Microeconomics*. FT/Prentice Hall, 2004. ISBN: 9780582404878.

[Key91] J.N. Keynes. *The Scope and Method of Political Economy*. 1891.

[Mis06] von L. Mises. *Lidské jednání: pojednání o ekonomii*. Liberální institut, 2006. ISBN: 9788086389455.

[Pat56] D. Patinkin. *Money, interest and prices : an integration of monetary and value theory*. 1956.

[Rot05] M. N. Rothbard. *Zásady ekonomie*. Liberální institut, 2005. ISBN: 9788086389271.

[Rot70] M.N. Rothbard. *Power and Market*. Ludwig von Mises Institute, 1970. ISBN: 9781610163637.

[She53] R. Shephard. *Theory of Cost and Production Functions*. Princeton University Press, 1953.

[Soj10] M. Sojka. *Dějiny ekonomických teorií*. Havlíček Brain Team, 2010. ISBN: 9788087109212.

[Sou03] J. Soukup. *Mikroekonomická analýza*. Melandrium, 2003. ISBN: 9788086175300.

[VG95] H. R. Varian and L. Grega. *Mikroekonomie: Moderní přístup*. Victoria Publishing, 1995. ISBN: 9788085865257.

[Wal74] León M. E. Walras. *Éléments d'économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale*. 1874.

Články

[Adj+11] Stéphane Adjemian et al. “Dynare: Reference manual, version 4”. In: 1 (2011).

[Fri53] M. Friedman. “Methodology of Positive Economy”. In: *Essays In Positive Economics* (1953), pages 3–16.

[Jui04] M. Juillard. “DYNARE manual”. In: *Manuscript, CEPREMAP* (2004).

[KP82] Finn E. Kydland and Edward C. Prescott. “Time to Build and Aggregate Fluctuations”. In: *Econometrica* 50.6 (1982). ISSN 1468-0262, pages 1345–1370.

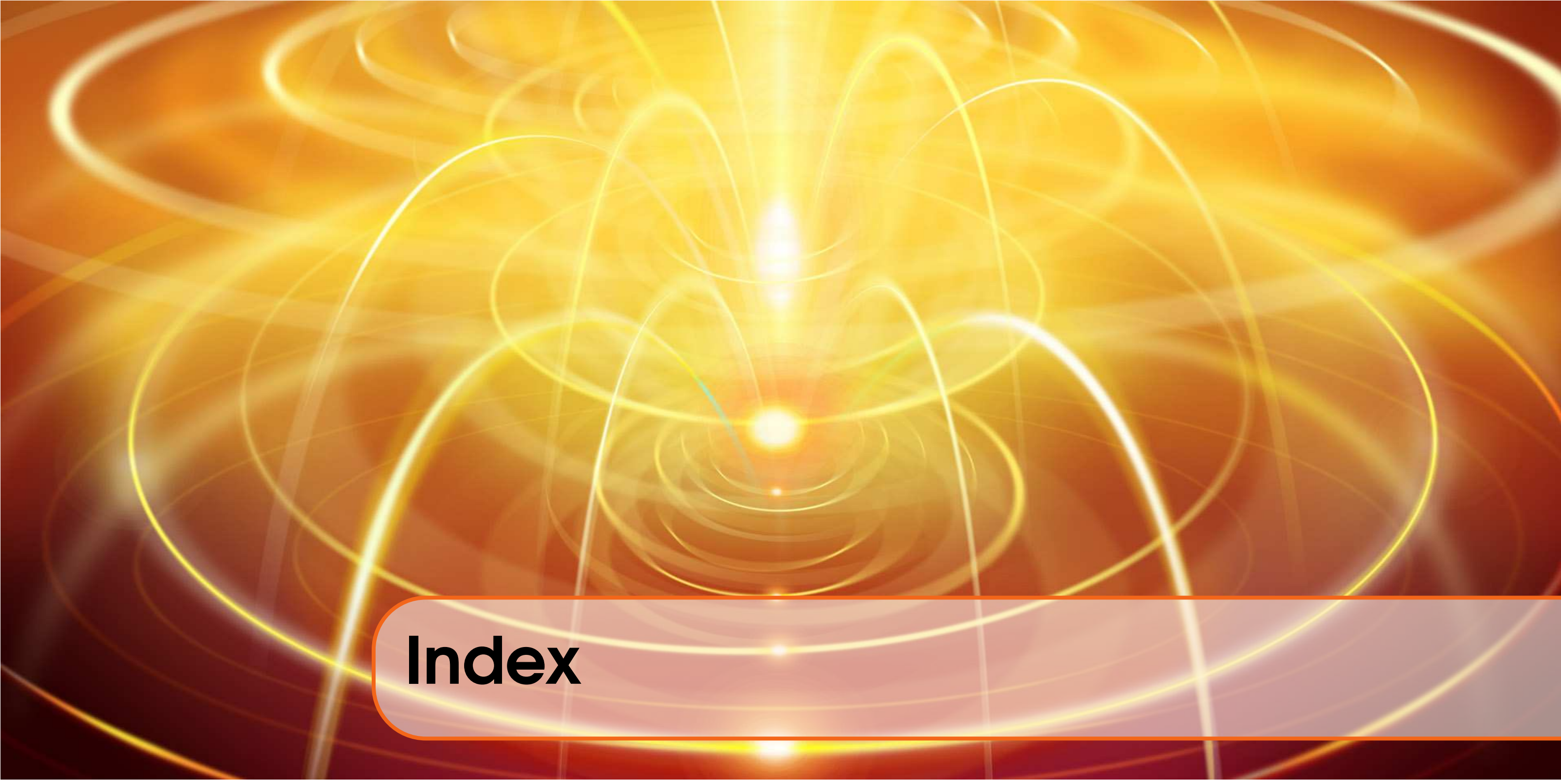
[Luc76] R. Lucas. “Econometric Policy Evaluation: A Critique”. In: *The Phillips Curve and Labor Markets* (1976), pages 19–46.

[Pat72] D. Patinkin. “Friedman on the quantity theory and Keynesian economics”. In: *The Journal of Political Economy* (1972), pages 883–905.

[Pat49] Don Patinkin. “The Indeterminacy of Absolute Prices in Classical Economic Theory”. In: *Econometrica* 17.1 (1949), pages 1–27.

[Pat54] Don Patinkin. “Dichotomies of the Pricing Process in Economic Theory”. In: *Economica* 21.82 (1954), pages 113–128.

[Ram28] F. P. Ramsey. “A mathematical theory of saving”. In: *The economic journal* (1928), pages 543–559.



Index

Jiří Pešík, David Martinčík

Sbírka příkladů z mikroekonomie

Plzeň 2014

Západočeská univerzita v Plzni

1. vydání

ISBN 978-80-261-0478-0