ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

REÁLNÁ ČÍSLA A TEORIE REÁLNÝCH ČÍSEL V DĚJINÁCH MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pavlína Černá
Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň 2019

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně
s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 25. dubna 2019

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucí mé bakalářské práce paní Mgr. Martině Kašparové, Ph.D. za cenné rady, vedení a odborný dohled při vypracování bakalářské práce. Další poděkování patří mé rodině, která mi byla oporou nejen při studiu.

OBSAH

ANOTACE

Tato práce se zabývá vývojem reálných čísel v dějinách matematiky. U vybraných čísel jsou uvedeny postupy, které tvořily základ jejich vývoje. Dále jsou představeny teorie, o které se opírá řada konstrukcí reálných čísel. V jednotlivých kapitolách lze nalézt nejen teorie, ale i praktické příklady slavných matematiků. Práce má mimo jiné poukázat na význam reálných čísel používaných dodnes.

KLÍČOVÁ SLOVA

Odmocniny, iracionální čísla, číslo π, číslo e, číslo ϕ, Eukleidův zlatý poměr, Eudoxova teorie proporcí, Chajjámovy řetězové zlomky, teorie souměřitelnosti a nesouměřitelnosti, Kösslerova teorie reálných čísel.

ANNOTATION

This work deals with the development of real numbers in the history of mathematics. Selected numbers show the procedures that formed the basis of their development. Then there are presented theories, which serve as basis for a number of real number constructions. Individual chapters include not only theories but also practical examples of famous mathematicians. The thesis also points out the importance of real numbers used until today.

KEYWORDS

Roots, irrational numbers, number π, number e, number ϕ, Euclid's golden ratio, Eudox's theory of proportionality, Tchaijam's chain fractions, theory of commensurability and incommensurability, Kössler's theory of real numbers.

Úvod

Bakalářskou práci jsem zpracovala na téma Reálná čísla a teorie reálných čísel v dějinách matematiky.

Práce je členěna do jednotlivých kapitol, ve kterých nalezneme nejen konstruktivní, ale i axiomatické zavedení reálných čísel.

V první kapitole představuji některé příklady reálných čísel, které si nejspíše pamatujeme ze školy. Nejdříve si připomeneme počítání s odmocninami. Právě při odmocňování mohou vycházet iracionální čísla. V této části jde především o to, jak se naši předkové vyrovnali s úlohami, při kterých vycházela iracionální čísla a jak je aproximovali. V Mezopotámii existovaly tabulky, na kterých byla uvedena přibližná hodnota druhé a třetí odmocniny. Ukážeme si i algoritmus pro výpočet druhé odmocniny. Další z iracionálních čísel jsem uvedla číslo π. Nejvýznamnějším badatelem π byl Archimédes. Sestavil odhad tohoto čísla pomocí vepsaných a opsaných mnohoúhelníků v kružnici. Na závěr této kapitoly uvádím Eulerovo číslo a číslo φ, které můžeme spojit s pojmem „zlatý řez“.

Druhá kapitola obsahuje postupné uznávání iracionalit a první teorie reálných čísel. V Řecku byla objevena nesouměřitelnost, která vedla k první krizi v matematice. Východiskem bylo směřování ke geometrickým veličinám a vytvoření Eudoxovy teorie proporcí, první "teorie reálných čísel". Omar Chajjám vytvořil teorii proporcí, ekvivalentní s Eudoxovou teorií, založenou na řetězových zlomcích. K postupnému zrovnoprávnění iracionalit s desetinnými čísly došel Simon Stevin.

Ve třetí kapitole jsem představila vývoj problematiky reálných čísel od 17. století. V tomto období docházelo ke zpřesňování pojmu reálné číslo v souvislosti s úvahami o konvergenci. Jedná se o konstrukce reálných čísel, se kterými matematická analýza pracuje dodnes.

V poslední kapitole jsem uvedla Kösslerovu teorii, neboť Miloš Kössler působil jako matematik na našem území.

Cílem této bakalářské práce je seznámení čtenáře s vývojem reálných čísel. Ukážeme si na příkladech výpočty s úvahami našich předků. Představím zde některé teorie, díky kterým reálné číslo vzniklo.

1 ODMOCNINY, π A DALŠÍ IRACIONÁLNÍ ČÍSLA V DĚJINÁCH MATEMATIKY

1.1 ODMOCNINY

Tato podkapitola byla zpracována podle (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003, str. 230 - 232).

Definice 1.1.1 (n-tá odmocnina)

„Nechť n je libovolné přirozené číslo, a nezáporné číslo, pak takové (jediné) nezáporné číslo b, pro které platí $b^n = a$*, se nazývá n-tá odmocnina čísla a.“*

(Polák, 1991, str. 73)

Při počítání s odmocninami odmocňujeme číslo, které je nezáporné. Nejčastěji se setkáváme s druhou odmocninou. Odmocninu definujeme pomocí mocnin.

Příklad 1.1.1

Vypočítejte druhou odmocninu z čísel $4;\ 9;\ 3{,}24$.

Při výpočtu druhé odmocniny z nezáporných čísel $4;\ 9;\ 3{,}24$ je výsledkem také číslo nezáporné. Pokud toto číslo umocníme na druhou, dostaneme číslo, které jsme odmocnili.

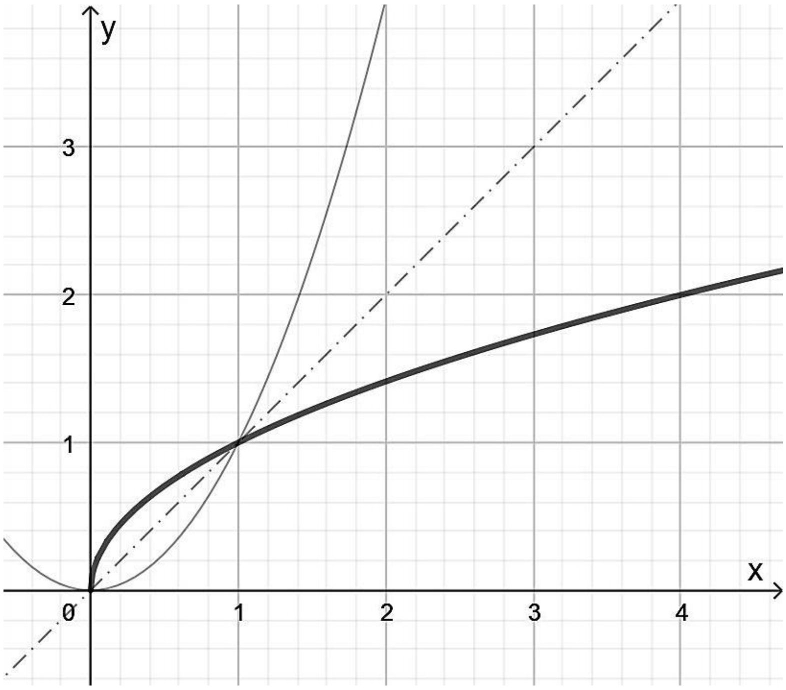
$$\sqrt{4} = 2, \text{ platí } 2^2 = 4$$

$$\sqrt{9} = 3, \text{ platí } 3^2 = 9$$

$$\sqrt{3{,}24} = 1{,}8, \text{ platí } 1{,}8^2 = 3{,}24$$

Na následujícím obrázku lze názorně vidět, že graf funkce druhé odmocniny se nachází v prvním kvadrantu soustavy souřadné. Jedná se o inverzní funkci k funkci druhé mocniny.

Obrázek 1.1 - Graf druhé odmocniny

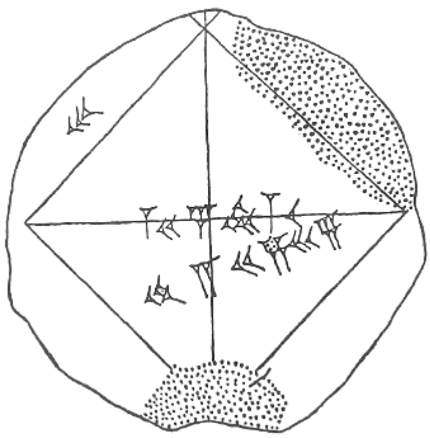


Zdroj: vlastní zpracování, 2019

Graf druhé mocniny a druhé odmocniny a osy prvního a třetího kvadrantu prokazuje inverzní chování obou těchto funkcí na nezáporném intervalu.

Již v Mezopotámii existovaly speciální tabulky, které obsahovaly přibližné hodnoty druhých a třetích odmocnin. Na následujícím obrázku můžeme vidět jednu z nejznámějších tabulek YBC 7289, kde je zaznamenána mimo jiné i aproximace (přibližná hodnota) čísla $\sqrt{2}$.

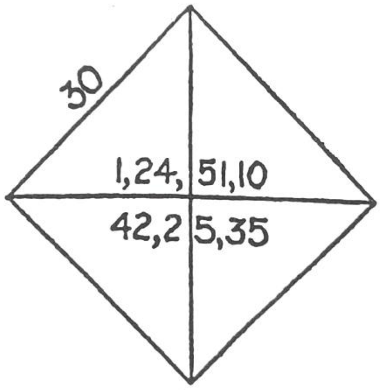
Obrázek 1.2 - Mezopotámská tabulka YBC 7289



Zdroj: Převzato z (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003, str. 328)

Pro lepší představivost čtenáře této bakalářské práce byla Mezopotámská tabulka YBC 7289 transformována prostřednictvím arabských čísel, jak lze vidět na obrázku viz níže.

Obrázek 1.3 - Mezopotámská tabulka YBC 7289 vyjádřená arabskými čísly



Zdroj: Převzato z (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003, str. 328)

Na mezopotámské tabulce vidíme čtverec ze stranou délky 30. Na úhlopříčce ve čtverci je klínopisem zaznamenáno v šedesátkové soustavě číslo 1, 24, 51, 10 a 42, 25, 35. První číslo zapíšeme ve tvaru $1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3}$. Po sečtení dostaneme hodnotu 1,414213, která odpovídá přibližně $\sqrt{2}$. Druhé z čísel představuje délku úhlopříčky čtverce o straně 30.

K sestavení tabulek druhých odmocnin zřejmě používali následující jednoduchý algoritmus.

Metoda výpočtu druhé odmocniny přirozeného čísla

Přirozené číslo, které není druhou mocninou přirozeného čísla, označme A.

Číslo A lze zapsat ve tvaru

$$A = x^2 + y,$$

kde $x, y \in N$ a pro číslo x platí

$$x^2 < A < (x+1)^2.$$

Pro $\sqrt{A}$ lze provést odhad:

$$\sqrt{A} = \sqrt{x^2 + y} < \sqrt{x^2 + y + \frac{y^2}{4x^2}} = x + \frac{y}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2 + y}{x} + x\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{x} + x\right).$$

Budeme-li předpokládat A ve tvaru

$$A = x^2 - y,$$

kde x, $y \in N$ a pro číslo x platí

$$(x-1)^2 < A < x^2,$$

dospějeme ke stejnému odhadu $\sqrt{A}$.

Lepší aproximace může být dosaženo na základě využití tzv. metody průměru.

Označme $x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x} + x\right)$, tj. vypočtený odhad $\sqrt{A}$. Z výpočtu víme, že $\sqrt{A} < x_1$. Označme x_2, kde $\sqrt{A} < x_2 < x_1$, lepší odhad $\sqrt{A}$ a $y = x_1 - x_2$. Tuto hodnotu určíme v závislosti na A a x_1.

$${x_2}^2 = (x_1 - y)^2$$

$${x_2}^2 = {x_1}^2 - 2x_1y + y^2$$

Protože $\sqrt{A} < x_2$, je také $A < {x_2}^2$ a můžeme předpokládat

$$A = {x_1}^2 - 2x_1y.$$

Odtud je $y = \frac{{x_1}^2 - A}{2x_1}$ a $x_2 = x_1 - y = x_1 - \frac{{x_1}^2 - A}{2x_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{x_1} + x_1\right)$ druhý odhad $\sqrt{A}$.

Příklad 1.1.2

Mezopotámským postupem vypočtěte $\sqrt{5}$.

Číslo, jehož druhou odmocninu chceme určit, zapíšeme jako součet největšího možného čtvercového čísla, které je menší než odmocňované číslo, a zbytku.

$A = 5$ zapíšeme jako součet $2^2 + 1$,

$$5 = 2^2 + 1,$$

číslo 2^2 je pro 5 největší čtvercové číslo, protože

$$2^2 < 5 < (2+1)^2,$$

výsledek $\sqrt{5}$ můžeme pro $A = 5$ a $x = 2$ odhadnout takto:

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} < \sqrt{2^2 + 1 + \frac{1^2}{4 \cdot 2^2}} = 2 + \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^2 + 1}{2} + 2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + 2\right) = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

$x_1 = \frac{9}{4}$ je první odhad $\sqrt{5}$.

Vypočítejme nyní ještě druhý odhad $\sqrt{5}$.

Po dosazení do vztahu $x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{x_1} + x_1\right)$ dostaneme $x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{\frac{9}{4}} + \frac{9}{4}\right) = \frac{161}{72} = 2{,}236\overline{1}$, druhý odhad $\sqrt{5}$.

1.2 ČÍSLO PÍ (π)

Tato podkapitola byla zpracována podle (Bentley, 2013, str. 140 - 149).

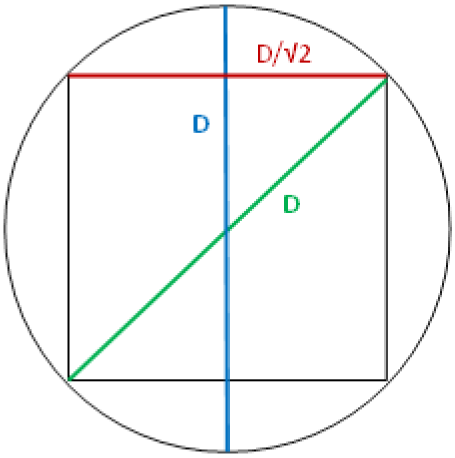
Ve světě existuje mnoho kulovitých tvarů, k jejichž popisu kulovitosti a kruhovitosti postačí jedno jediné číslo a tím je číslo pí. Pí (π) neboli Ludolfovo číslo je poměr mezi obvodem a průměrem kružnice. Tyto dva rozměry spolu úzce souvisí a v dávné minulosti bylo velkou výzvou nalézt pevný vztah mezi nimi. Bylo tedy otázkou, jakým číslem je nutné vynásobit průměr, aby byl vypočten obvod kružnice. Velmi častým řešením bylo nakreslení kruhu, změření jeho obvodu a průměru a následné vydělení prvního čísla (velikost obvodu) druhým číslem (velikost průměru). Po provedení této operace by bylo možné říci, že výsledek je o něco větší než tři. To znamená, že pro zjištění obvodu kružnice musí být průměr pronásoben číslem, které je o něco větší než tři. Otázkou však zůstávalo, o kolik větší. I v současnosti mnoho lidí věří, že číslo π lze vyjádřit pomocí racionálního čísla, tj. pomocí zlomku. Pokud však zlomek vyjádříme desetinným rozvojem, lze zjistit, že se v něm opakuje číselný vzor. V desetinném rozvoji čísla π se žádný vzor neopakuje, proto nelze číslo π vyjádřit racionálním číslem. π je iracionální číslo. Jeho hodnota je sice blízká zlomku $\frac{22}{7}$, ale jako je tomu u všech iracionálních čísel, neexistuje zlomek, který by je mohl přesně vyjádřit. Desetinný rozvoj těchto čísel běží do nekonečna bez jakéhokoliv číselného vzoru. Stejným způsobem lze hovořit o číslech: $\sqrt{2}$; φ. Tato čísla lze označit jako přirozené konstanty.

Jedním z nejvýznamnějších badatelů čísla π byl nepochybně *Archimédes* (287 př. n. l. - 212 př. n. l.), který se narodil tři století po *Pythagorovi* (okolo 570 př. n. l. - 510 př. n. l.)

a krátce před smrtí *Eukleida* (325 př. n. l. - 260 př. n. l.). Tento vynálezce se zabýval pákami, kladkami, šnekovými čerpadly, zařízeními na drcení válečných lodí a mimo jiné také koulemi a kruhy. Na toto téma sepsal mnoho svitků, např. „O kouli a válci“, „O spirálách“, „O měření kruhu“ a mnoho dalších. *Archimédes* byl dle Římanů nadán větším geniálním myšlením, než si lze u lidské bytosti představit. Jako první si uvědomil, že číslo π je iracionální a jeho hodnota není rovna $\frac{22}{7}$. Dále tvrdil, že přesná hodnota π nebude možná nikdy zjištěna, proto vytvořil odhad π pomocí aproximace kruhu mnohoúhelníky.

K aproximaci kruhů využil *Archimédes* pravidelné mnohoúhelníky. Jeden mnohoúhelník kruhu opsal druhý vepsal. Následně prozkoumával poměr mezi průměrem kruhu a obvodem obou mnohoúhelníků. Zjistil, že hodnota π leží někde mezi těmito poměry (tedy mezi poměrem obvodu opsaného mnohoúhelníka a průměrem kruhu a poměrem obvodu vepsaného mnohoúhelníka a průměrem kruhu). Na následujícím schématu lze názorně vidět Archimédovu myšlenku aproximace kruhu mnohoúhelníky.

Obrázek 1.4 - Odhad π aproximací kruhu mnohoúhelníky



Zdroj: vlastní zpracování dle (Bentley, 2013)

Pro lepší pochopení uvažujme kruh s vepsaným a opsaným čtvercem, viz obrázek. Pokud by byla strana většího (opsaného) čtverce označena jako D, jeho obvod by byl roven $4D$. Vzdálenost dvou protějších stran, zároveň i průměr kružnice, je roven rovněž D. Poměr obvodu opsaného čtverce a průměru kruhu se rovná $4D/D$, tedy konečný výsledek je 4. Průměr kruhu tvoří úhlopříčku vepsaného čtverce. Pomocí Pythagorovy věty lze dopočítat rozměr strany vepsaného čtverce, který je $D/\sqrt{2}$, pak obvod menšího čtverce je roven $4D/\sqrt{2}$.

Druhý poměr je vypočten stejným postupem, tedy $(4D/\sqrt{2})\ /\ D\ =\ 4/\sqrt{2}\ \doteq\ 2,8284$. Z těchto dvou výpočtů lze usoudit, že číslo π je menší než 4 a větší než $2,8284$.

Archimédes v prvním kroku kruhu opsal a vepsal pravidelný šestiúhelník. Poměr obvodu a průměru kruhu zpřesnil pomocí pravidelných mnohoúhelníků, které získal půlením stran nebo vnitřních úhlů předchozího mnohoúhelníku. Ve druhém kroku pracoval s pravidelným 12ti-úhelníkem, dále s 24ti-úhelníkem, 48ti-úhelníkem a na konec s pravidelným 96ti-úhelníkem. Délky stran 2n-úhelníku vypočítal z délek stran n-úhelníku pomocí rekurentních předpisů, které odvodil. Dopracoval se k odhadu, že číslo π leží mezi $3\frac{10}{70}$ a $3\frac{10}{71}$ jinými slovy řečeno mezi $\frac{22}{7}$ a $\frac{223}{71}$. Geometrický postup výpočtu π pomocí vepsaných a opsaných mnohoúhelníků byl natolik přesný, že nikdo po dalších pět století nenašel jiný způsob pro nalezení čísla π.

Výpočtem čísla π se zabývalo několik matematiků. Například *Brahmagupta* (598 - 668) dospěl k tomu, že π je přibližně rovno $\sqrt{10}$. Tato aproximace čísla π, je správná na jedno desetinné místo. O 160 let později se matematik *al-Chórézmí* (780 - 846) přiblížil na 4 desetinná místa, tj. 3,1416. Tito a jiní matematici přesto používali po celá staletí Archimédovu metodu.

Většinu svého života věnoval nizozemský matematik *Ludolf von Ceulen* (1540 - 1610) výpočtu čísla π. Mnohoúhelník, který použil, měl pozoruhodných 4 611 686 018 427 387 904 stran. Tím dosáhl správného vyjádření π na 34 desetinných míst: 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 9. V té době si někteří matematici uvědomili, že π lze nalézt pomocí jednodušších výpočtů. Matematik *John Wallis* (1616 - 1703) zjistil, že specifické posloupnosti obsahují násobky převrácené hodnoty Ludolfova čísla.

Dvojnásobek převrácené hodnoty čísla π vyjádřil jako podíl dvou nekonečných součinů:

$$2/\pi\ =\ (1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots)\ /\ (2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots)$$

Matematik *James Gregory* (1638 - 1675) objevil řadu, která je v mnohých případech připisována jako objev *Leibnizovi* (1646 - 1716):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Použití těchto posloupností pro výpočet čísla π jsou na jednu stranu možné, avšak na druhou stranu příliš náročné. Pro přiblížení ke skutečné hodnotě π je totiž zapotřebí několik desítek tisíc členů. *Gregory* však objevil řadu, pro kterou postačí pouze devět členů a k π konverguje mnohem rychleji.

$$\pi/6 = (1/\sqrt{3}) \cdot (1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{1}{7 \cdot 3 \cdot 3} + \dots$$

Po objevu řad čísel propočetli matematici číslo π na stovky desetinných míst. V roce 1874 objevil *W. Shanks* (1812 - 1882) 707 desetinných míst tohoto čísla. Kritika výpočtu byla však zaznamenána matematikem *De Morganem* (1806 - 1871), který objevil jistou nesrozumitelnost v desetinném rozvoji. Zjistil, že po přibližně pětistém desetinném místu následuje podezřele velmi málo číslic sedm. Vždy matematici věřili, že číslo π obsahuje stejný počet číslic od 0 až 9, které jsou rozložené bez jakéhokoliv vzoru, avšak nikoli náhodně. Jedná se o zvláštní paradox tohoto iracionálního čísla – nenáhodné číslo s vlastnostmi náhodného čísla bez opakujícího se vzoru se stejným počtem jednotlivých číslic. Tuto záhadu se podařilo objasnit až matematikem *D. F. Fergusonem*, který vypočítal číslo na 620 desetinných míst. Po výpočtu zjistil, že *Shanks* udělal chybu. Všechny číslice za 528. místem desetinného rozvoje byly špatné. S rozvojem výpočetních technologií a počítačů bylo Ludolfovo číslo vypočteno v roce 1999 superpočítačem Hitachi na 206 158 430 000 míst.

1.3 ČÍSLO E

Tato podkapitola byla zpracována podle (Bentley, 2013, str. 112 - 125).

Číslo e, které známe pod názvem Eulerovo číslo, patří k iracionálním číslům. Přibližná hodnota čísla e činí $2,718\,281\,828\,459$. *Jakob Bernoulli* (1700 - 1782), švýcarský matematik, objevil číslo e. Zabýval se tím, jak se přibližují hodnoty různých řad čísel. Jednou z úvah, kterou se zabýval, bylo složené úrokování. Čím častěji přičítal úrok k původní částce, tím byla cílová částka vyšší.

Složený úrok počítal pomocí řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

U stého členu v řadě došel k hodnotě $2,704$.

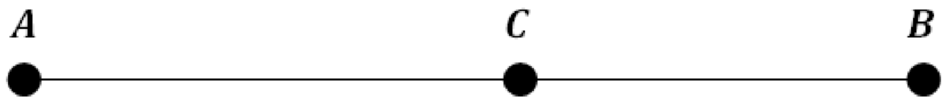
Při dosazení vyššího přirozeného čísla n, se hodnota více blížila číslu e. Dnes bychom zapsali jako $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$. *Bernoullimu* bylo jasné, že číslo e má souvislost s mocninami a s logaritmy. Pomocí čísla e můžeme sestrojit logaritmickou křivku, která se nachází například ve schránkách měkkýšů, okvětních plátcích rostlin, nebo v galaxii.

1.4 ČÍSLO Φ

Tato podkapitola byla zpracována podle (Bentley, 2013, str.72 - 85).

Několik matematiků a filosofů se v minulosti domnívalo, že existuje magické číslo, které slouží k popisu několika geometrických tvarů. Dnes je toto číslo nazývané fí (φ). Jeho hodnota je přibližně $1{,}618\,033\,988\,749\,894\,848\,2\ldots$. Rozvoj tohoto iracionálního čísla pokračuje do nekonečna, jako je tomu u ostatních iracionálních čísel a to bez opakujícího se číselného vzoru. Číslem fí se zabýval *Hippasus* (6. st. př. n. l. - 5. st. př. n. l.) dále jeho kolega *Theodorus*. Avšak jako první, kdo zapsal postup, jak φ najít, byl *Eukleides* (325 př. n. l. - 265 př. n. l.). Ten nepoužíval označení „zlatý řez“, ale vysvětlil, jak se má vypočítat. Tvrdil, že zlatý řez vznikne tehdy, když na úsečce AB je nalezen bod C takovým způsobem, aby poměr $AB : AC$ se rovnal poměru $AC : CB$, jak lze vidět na následujícím schématu.

Obrázek 1.5 - Eukleidův zlatý poměr



Zdroj: vlastní zpracování dle (Bentley, 2013)

Výše uvedeným poměrům odpovídá i nynější definice zlatého řezu. Zlatý řez je speciálním případem úměry, kdy $|AB| : |AC| = |AC| : |CB|$, kdy poměr délek celé úsečky a její delší části se rovná poměru délek delší části a kratší části úsečky. (Reichl, Všetička, 2006 - 2019)

Z předchozí úměry vyjádříme hodnotu φ. (Převzato od autorů Reichl, Všetička, 2006 -2019).

Úsečka AB je bodem C rozdělena na dvě úsečky. Označíme úsečku AB písmenem a. Větší z úseček AC, BC písmenem x, pak dle zlatého řezu vznikne úměra

$$a : x = x : (a - x).$$

Úměru lze vyjádřit i pomocí zlomků:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

S jednoduchými úpravami lze získat tvar kvadratické rovnice:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \qquad /\cdot x(a - x)$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

Po vyřešení uvedené kvadratické rovnice lze získat kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

Pomocí částečného odmocnění získáme kořeny $x_1,\ x_2$:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot a$$

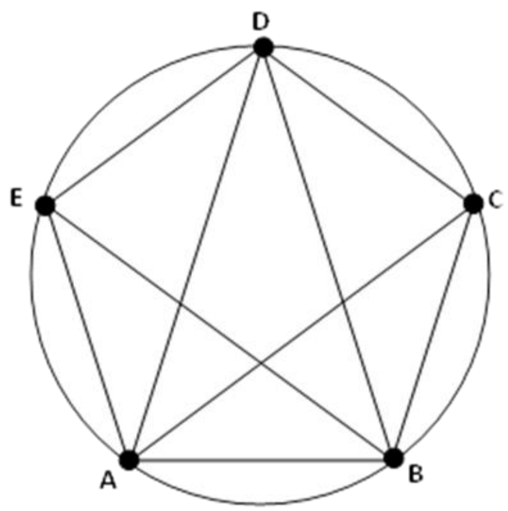
Řešení $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot a$ je kladné, kořen $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot a$ je záporný. Symbolem φ se označuje převrácená hodnota kladného kořenu.

$$\varphi = \frac{1}{x_1} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{5}}{-1 - \sqrt{5}} = \frac{2(-1 - \sqrt{5})}{-4}$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618034$$

Můžeme doplnit, že *Eukleides* objasnil, kde lze nalézt poměr uvnitř několika geometrických tvarů. Úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku se protínají tak, že jedna druhou rozdělují v poměru zlatého řezu, jak ukazuje následující schéma.

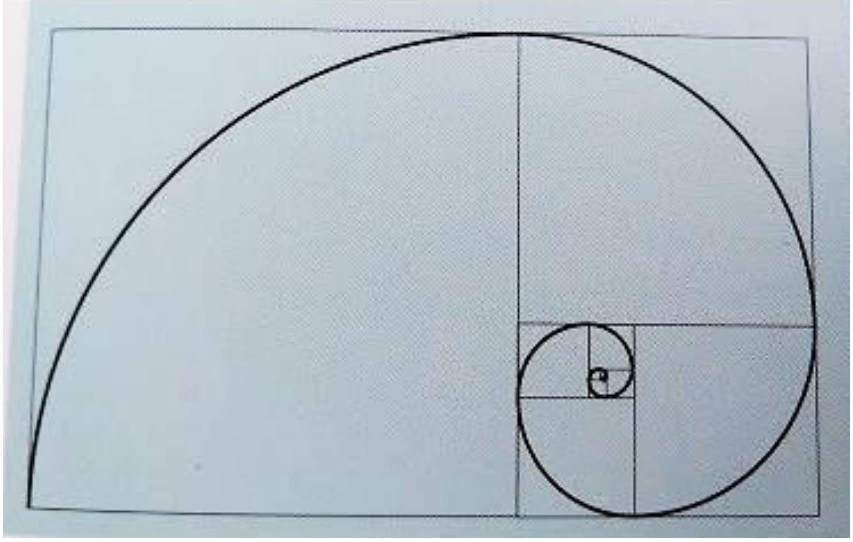
Obrázek 1.6 - Zlatý poměr v pravidelném pětiúhelníku



Zdroj: vlastní zpracování dle (Bentley, 2013)

Číslo φ bylo nalezeno nejen v pentagramech, ale také v tzv. rovnoúhlé spirále. Jako první si této souvislosti povšiml filosof a „otec analytické geometrie a kartézských souřadnic" *Descartes* (1596 - 1650).

Obrázek 1.7 - Rovnoúhlá spirála a číslo φ



Zdroj: vlastní zpracování dle (Bentley, 2013)

Rovnoúhlá spirála se také často nazývá jako logaritmická spirála, jak ji pojmenoval *Jakob Bernoulli* (1654 - 1705). Spirálu lze narýsovat dělením obdélníku na čtverce, kdy poměr jednotlivých stran čtverců je roven zlatému řezu. V každém čtverci bude čtvrtina kružnice o poloměru, který je roven délce strany čtverce.

Později mnoho matematiků, biologů a filosofů se snažilo najít podobné spirály v přírodě na hlemýždích ulitách nebo mořských mušlích. Řada výzkumníků se domnívá, že φ je přítomné v samotných základech světa.

Číslem se zabývali i badatelé *Leonardo da Vinci* (1452 - 1519) či *Luco Pacioli* (1447 - 1517). Matematikové nazývali toto číslo jako iracionální, neboť nemohlo být vymezeno snadno pochopitelnými čísly, proto zůstalo navždy magickým a tajemným. V současnosti je nazýváno jako „zlaté číslo“, „zlatý řez“ nebo také „zlatý poměr“.

2 EUDOXOVA TEORIE PROPORCÍ, CHAJJÁMOVY ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

2.1 TEORIE REÁLNÝCH ČÍSEL A VÝVOJ MATEMATIKY JAKO VĚDY

Tato podkapitola byla zpracována podle (Bečvář, Fuchs, 1994, str. 22 - 32).

Pro vývoj matematiky jako vědy bylo důležitým historickým mezníkem předsókratovské období, které je časově vymezeno jako období 6. – 4. stol. př. n. l. V tomto období, jinými slovy nazývané jako „Hrdinský věk řecké matematiky", se vyvíjel vědecký pohled na svět a vznikl i jeho přírodovědecký a matematický výklad. Je však nutné podotknout, že původ klasické řecké matematiky vyšel z poznatků z Mezopotámie a starověkého Egypta. K rozvoji matematiky nepochybně přispěly i první řecké filosofické školy. V těchto třech stoletích bylo objeveno mnoho matematických přístupů, poznatků, metod, které byly postupně v dalších letech přetvářeny a uceleně sepsány do několika teorií. Významnými osobnostmi byly: *Archimédes, Apollónios, Aristoteles, Platón* a další. Dále také *Eukleidés* a jeho dílo „Základy" (řecky Stoicheia, latinsky Elementa) – nejstarší dochované dílo řecké matematiky. V oblasti geometrie se proslavil *Thalés*, který převzal znalosti z geometrie z Egypta, kde byla neustálá potřeba něco přeměřovat a posunul geometrii směrem k abstrakci. Dalším významným matematikem byl *Pythágoras*, který budoval vědu na „základních principech". V mnohých tvrzeních lze nalézt názor, že babylónská a egyptská matematika byla založena na praktické a konkrétním rázu a řecká matematika začala tvrzení dokazovat. Zcela nepochybné se stává tvrzení, že v období 6. – 4. stol. př. n. l. byly empirické a teoretické poznatky přetvořeny v exaktní vědu. Postupně vznikaly pojmy: číslo, poměr, bod, přímka, rovina. Byly formulovány i axiómy, logické principy odvozování a výstavba matematického světa ze základních elementů. V tehdejším období byla matematika chápána jako úspěch a vrchol lidského myšlení. Kolem roku 300 př. n. l. shrnul *Eukleidés* ve svém díle Základy důležité poznatky od svých předchůdců: *Aristotela, Hippokrata, Eudoxa, Archyta, Theaitéta* a dalších. Jeho dílo je zasvěceno vysvětlení základních prvků a důkazů v matematice. V následujících kapitolách lze nalézt teorie, které s vývojem matematického myšlení a vědy jako takové nepochybně souvisí.

2.2 TEORIE SOUMĚŘITELNOSTI A NESOUMĚŘITELNOSTI

Tato podkapitola byla zpracována podle (Bečvář, Fuchs, 1994, str. 57 - 59).

Pythagorejští matematici a myslitelé se původně domnívali, že všechno je možné vyjádřit pomocí přirozených čísel a jejich poměrů. Avšak s dalším vývojem a objevem iracionálních čísel musel být tento pohled změněn.

O odmocnině ze dvou a iracionalitě

Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo, vyjádřené podílem dvou nesoudělných přirozených čísel m a n

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Pomocí jednoduché úpravy lze zapsat následující

$$\sqrt{2} \cdot n = m$$

$$2 \cdot n^2 = m^2.$$

Ze zápisu je zřejmé, že druhá mocnina čísla m je sudá, tudíž číslo m musí být tedy sudé, $m = 2a$.

Po dosazení do původního vyjádření

$$2 \cdot n^2 = (2a)^2$$

$$n^2 = 2a^2.$$

Z toho plyne, že i číslo n je sudé. Na základě tohoto výpočtu dochází ke sporu s původním předpokladem nesoudělnosti čísel m a n.

Problematiku nesouměřitelnosti můžeme vysvětlit na základě původní pythagorejské geometrické myšlenky. Pythagorejští matematici vycházeli z předpokladu, že každé dvě úsečky a, b mají určitou „společnou míru“ (lze také nazvat jako úsečku m), jejímiž násobky jsou obě zmíněné úsečky. Tedy, $a = p \cdot m$ a $b = q \cdot m$. Na základě „společné míry“ Pythagorejci tvrdili, že jsou úsečky souměřitelné. Dále by na základě tohoto předpokladu bylo možné tvrdit, že každé tři úsečky jsou souměřitelné nebo konečný počet úseček je souměřitelný. Podobně by se dalo uvažovat i o dvojici, trojici či konečném počtu přirozených čísel, které by byly násobky určité jednotky. Dále by bylo možné tvrdit, že jejich největší společný dělitel je jejich největší možná „společná míra“. Pak by obě čísla byla násobkem svého největšího společného dělitele a žádného jiného většího čísla. Důkaz nesouměřitelnosti úseček demonstrujeme i na základě tvrzení, že strana a úhlopříčka čtverce souměřitelné nejsou. Bude se do jisté míry jednat o modifikaci předchozí příkladu o odmocnině ze dvou.

Příklad 2.2.2

Nesouměřitelnost strany a úhlopříčky čtverce s využitím Pythagorovy věty

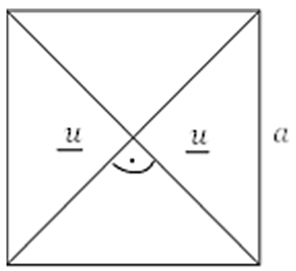
Předpokladem důkazu nesouměřitelnosti je fakt, že strana čtverce, kterou označíme a a úhlopříčka čtverce u nejsou sudá čísla. S využitím Pythagorovy věty vypočítáme úhlopříčku u, jako:

$$u^2 = a^2 + a^2$$

$$u^2 = 2a^2$$

Výsledné u^2 je ze součtu dvou stejných čísel sudé. Číslo u je tedy rovněž sudé. Pokud bude daná jednotková úhlopříčka, lze dále v dalším výpočtu použít i polovinu této úhlopříčky.

Obrázek 2.1 - Jednotková a poloviční úhlopříčka ve čtverci



Zdroj: vlastní zpracování dle (Bečvář, Fuchs, 1994)

Výpočet strany čtverce provedeme následujícím způsobem.

$$a^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2$$

Číslo a^2 je sudé, to znamená, že je sudé číslo a. A to je ve sporu s výše uvedeným předpokladem, že strana a a úhlopříčka u nejsou zároveň obě sudé. Důkazů existuje několik, nejen výše dva uvedené příklady.

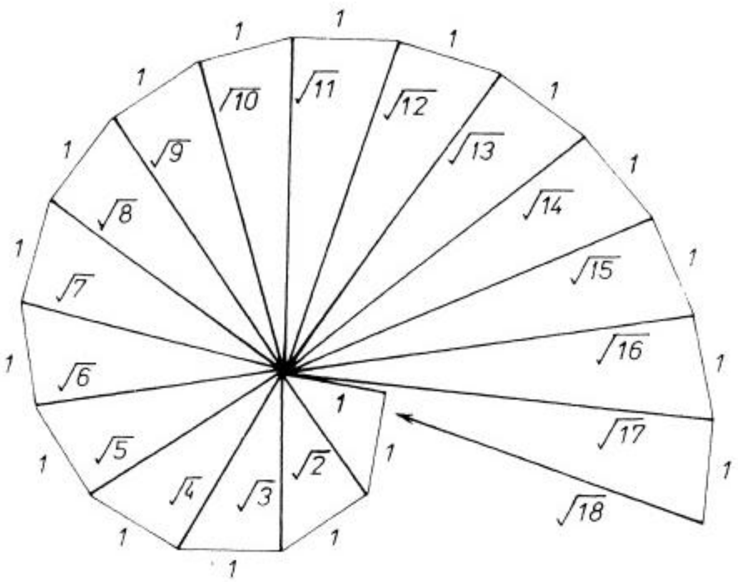
2.3 ZKOUMÁNÍ IRACIONALIT

Tato podkapitola byla zpracována podle (Bečvář, Fuchs, 1995, str. 15 - 19).

Na základě problematiky souměřitelnosti a nesouměřitelnosti byly objeveny první iracionality. Řečtí matematici si uvědomili, že iracionalit bude jistě existovat mnoho. Velkou pozornost iracionalitám věnoval *Theaitétos* (417 př. n. l. - 369 př. n. l.), který provedl jejich klasifikaci. Domníváme se, že k odhalení iracionálních čísel vedla jistá představa o figurálních číslech, kam řadíme mimo jiné čtvercová a obdélníková čísla. Za obdélníkové číslo je myšleno přirozené číslo takové, které není čtvercové, jehož rozklad na součin se skládá ze dvou čísel, kdy jeden činitel je menší než druhý. Menší číslo musí být větší než 1. Pokud by byla provedena odmocnina ze čtvercového čísla, bude výsledkem číslo přirozené. Při výpočtu odmocniny z obdélníkového čísla vyjde číslo iracionální.

Theodorus provedl výpočet odmocnin až do čísla 17, u kterého se zastavil. Jistým vysvětlením je „odmocninový šnek“, který ukazuje, proč je vhodné zastavit se u čísla 17. Číslo 18 by totiž narušilo další průběh „odmocninového šneka“.

Obrázek 2.2 - Odmocninový šnek



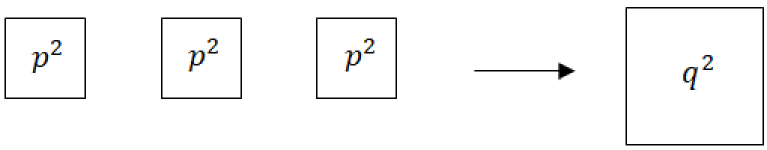
Zdroj: Převzato z (Bečvář, Fuchs, 1997, str. 16)

Otázkou pro dnešní výzkumníky zůstává, jak byla iracionalita čísel $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$;…dokazována. Většina z nich se domnívá, že byl proveden důkaz o nesouměřitelnosti stran čtverců na základě porovnání jejich obsahů $3, 5, 6, \ldots 17$ jednotek a strany čtverce s jednotkovou úsečkou. Lze se domnívat, že důkaz se podobal následujícímu postupu.

Nechť je dán jednotkový čtverec (jeho strana $a = 1$) a čtverec o trojnásobném obsahu (jeho strana $b = \sqrt{3}$. Nechť je dále předpoklad, že strany obou čtverců jsou souměřitelné a jejich největší společnou mírou je úsečka m. Je možné tedy zapsat, že $a = pm$, $b = qm$, kde p, q jsou přirozená čísla. Jestliže m je největší společnou mírou úseček a, b, pak jsou čísla p, q nesoudělná. Menší čtverec o obsahu 1 se skládá z p^2 malých čtverečků a větší čtverec o obsahu 3 se skládá z q^2 malých čtverečků. Na čtverce nahlížejme jako na čtvercová čísla. Platí pro ně tedy zřejmě vztah

$$q^2 = 3 \cdot p^2 = p^2 + p^2 + p^2.$$

Obrázek 2.3 - Znázornění čtverců jako čtvercových čísel



Zdroj: vlastní zpracování dle (Bečvář, Fuchs, 1997)

2.4 PRVNÍ KRIZE MATEMATIKY

Tato podkapitola byla zpracována podle (Bečvář, Fuchs, 1994, str. 61 - 62).

Objev a nalezení nesouměřitelnosti způsobily pythagorejským matematikům velký šok. Pro nesouměřitelnost existovaly tři výrazy pocházející z řečtiny (asymetron – neexistuje společná míra; alogon – nelze vyjádřit poměrem a areton – není možné vyjádřit celým číslem). Bylo zjištěno, že svět geometrických veličin, který byl reprezentován prostřednictvím délek úseček, byl mnohem širší než svět čísel, který zahrnoval přirozená a kladná racionální čísla. Řada odborníků se domnívá, že byl tento objev nejdříve utajován. Došlo totiž k potlačení původní pythagorejské domněnky, že existuje vzájemný vztah geometrických veličin s čísly. A to na základě objevu, že existují úsečky, které nemají „společnou míru“. O této „krizi v matematice“ se zmiňoval především francouzský matematik a historik *P. Tannery* (1843 - 1904), který osvětloval, že byly v té době potlačeny základy téměř celé matematiky. Zjištění nesouměřitelnosti bylo určitou motivací a inspirací pro další matematiky a výzkumníky. Ti se začínali zabývat iracionalitou, veličinami, které nebyly souměřitelné s určitou základní veličinou. Například *Theodóros* (465 př. n. l. - 398 př. n. l.) prokázal, že odmocniny z čísel $3, 5, 17,$ nejsou racionální.

Jednalo se o ta čísla, která nebyla čtvercová. Podobně i *Archytás* (428 př. n. l. - 347 př. n. l.) objasnil, že odmocniny z obdélníkových čísel ve tvaru $n(n+1)$ nejsou racionální. Racionalitou se zabýval i *Theaitétos* (414 př. n. l. - 369 př. n. l.). Jeho výsledky byly přeneseny do Eukleidovy knihy Základy. Jinou problematikou se zabýval *Eudoxos* (408 př. n. l. - 355 př. n. l.), který vypracoval teorii proporcí, představující teorii reálných čísel. Tato teorie bude vysvětlena blíže v následující podkapitole.

2.5 TEORIE PROPORCÍ

Tato podkapitola byla zpracována podle (Bečvář, Fuchs, 1997, str. 20 - 27).

Zjištění nesouměřitelnosti úseček vedlo k první krizi v matematice, jak již bylo výše zmíněno. Jistým východiskem z této situace byla řecká geometrická algebra spolu s Eudoxovou teorií proporcí, která je postavena na 18 definicích a 25 větách uvedených v 5. Eukleidově knize Základy. Eudoxovu teorii proporcí (poměrů a úměr) lze chápat jako teorii reálných čísel, která byla základem pro studium podobnosti geometrických útvarů. Za základní vlastnost podobnosti lze označit rovnost poměrů odpovídajících si úseček. Po objevu nesouměřitelnosti nebylo možné si vystačit s definicí úměry aritmetických veličin (tj. přirozených čísel), proto byla zařazena Eudoxova teorie do Eukleidovy knihy.

Nyní si ukážeme, k čemu směřovala Eudoxova teorie proporcí.

V prvních definicích je zaveden násobek, díl a poměr geometrických veličin, jako jsou délky (velikosti úseček), obsahy (velikosti rovinných útvarů) a objemy (velikosti prostorových útvarů). Uvažujme x, y, a, b jako čísla vyjadřující velikosti úseček ($|AB| = x, |AC| = y, \dots|$).

Násobek a díl geometrické veličiny

Po vynásobení geometrické veličiny x přirozeným číslem k dostaneme veličinu y,

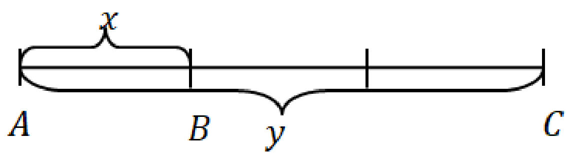
$$k \cdot x = y.$$

Veličina y je násobkem veličiny x. Veličina x je dílem veličiny y.

Příklad 2.5.1

Mějme geometrickou veličinu x, kde $|AB| = x$, a přirozené číslo $k = 3$. Sestrojte úsečku AC (geometrickou veličinu y) tak, abychom po vynásobení geometrické veličiny x přirozeným číslem k, dostali úsečku AC.

Obrázek 2.4 - Násobek a díl geometrické veličiny



Zdroj: vlastní zpracování, 2019

Úsečku AC jsme dostali jako trojnásobek úsečky AB (tj, $3 \cdot x = y$). Úsečka AB je dílem úsečky AC.

<u>**Poměr**</u>

Poměr dvou geometrických veličin x, y, zapíšeme

$$x : y.$$

Poměr mohou tvořit pouze veličiny x, y, které splňují tzv. Archimédův axiom. To znamená, že pro libovolné x, y, vždy existuje přirozené číslo k takové, že platí následující nerovnost:

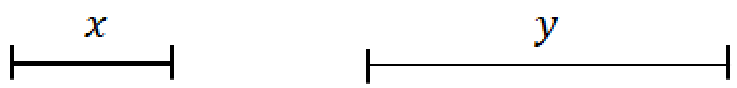
$$k \cdot x > y,$$

tj. vždy existuje přirozené číslo k takové, že k - násobek jedné úsečky je větší než druhá úsečka.

Příklad 2.5.2

Uvažujme následující úsečky o velikostech x, y.

Obrázek 2.5 - Úsečky x a y



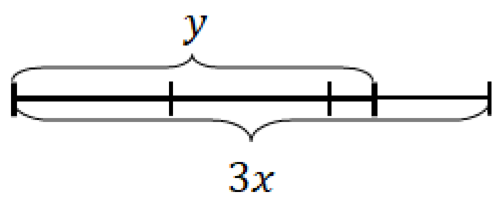
Zdroj: vlastní zpracování, 2019

Přesvědčíme se, že splňují Archimédův axiom.

Protože je zřejmé, že $y > x$, existuje přirozené číslo, a to číslo je k = 1, takové, že násobek druhé úsečky je větší než první úsečka.

Na druhou stranu z následujícího obrázku vidíme, že existuje přirozené číslo k takové, že platí $k \cdot x > y$, tj. násobek první úsečky je větší než druhá úsečka. Úsečky splňují Archimédův axiom.

Obrázek 2.6 - Porovnání délek úseček



Zdroj: vlastní zpracování, 2019

Poměr nemohou tvořit nekonečně malé veličiny, např. úhly, které svírají kružnice s tečnami v bodech na kružnicích.

Rovnost poměrů (úměra)

Dnes bychom řekli, že dva poměry $a : b$, $x : y$ jsou si rovny, $a : b = x : y$, tj. tvoří úměru, když

$$a \cdot y = b \cdot x.$$

Rovnost poměrů je v Základech definována složitěji, viz dále. Jedním z důvodů, proč rovnost poměrů nedefinovali pomocí rovnosti dvou součinů, byl geometrický pohled na věc. Součin dvou délek je obsah, ale součin dvou obsahů nebo objemů nedává žádný geometrický smysl.

Příklad 2.5.3

Rozhodněte, zda dvojice poměrů $\sqrt{2} : 2,\ 1 : \sqrt{2}$ tvoří úměru.

Pokusme se to objasnit dle Eudoxovy definice.

Podle definice v Eudoxově teorii jsou si dva poměry $a : b,\ x : y$ rovny, pokud pro libovolná dvě přirozená čísla *k, l* platí následující tři tvrzení.

<u>1. tvrzení</u>

Poměr prvních dvou veličin je menší než poměr libovolných dvou přirozených čísel právě tehdy, když také poměr druhých dvou veličin je menší než poměr těchto dvou přirozených čísel, tj.

$$\forall k, l \in N:\ \ a : b < k : l \Leftrightarrow x : y < k : l.$$

Uvažujme $a : b = \sqrt{2} : 2, x : y = 1 : \sqrt{2}$ a $k = 5, l = 7$.

Podle Eudoxovy definice má platit:

$$\sqrt{2} : 2 < 5 : 7 \Leftrightarrow 1 : \sqrt{2} < 5 : 7.$$

Poměr $\sqrt{2} : 2$ je menší než $5 : 7$, pak také $1 : \sqrt{2}$ musí být menší než $5 : 7$, aby se mohly poměry dle definice rovnat. O vztazích $\sqrt{2} : 2 < 5 : 7$, $1 : \sqrt{2} < 5 : 7$, které odpovídají vztahům $7 \cdot \sqrt{2} < 10$, $7 < 5 \cdot \sqrt{2}$, uměli pravděpodobně rozhodnout geometricky.

Vztahy $\sqrt{2} : 2 < k : l$ a $1 : \sqrt{2} < k : l$ musí současně platit, nebo neplatit pro libovolná dvě přirozená čísla, ne pouze pro $k = 5$ a $l = 7$, jak jsme ukázali.

<u>2. tvrzení</u>

Poměr prvních dvou veličin je větší než poměr libovolných přirozených čísel právě tehdy, když také poměr druhých dvou veličin je větší než poměr těchto přirozených čísel, tj.

$$\forall k, l \in N:\ \ a : b > k : l \Leftrightarrow x : y > k : l.$$

Nechť je opět $a : b = \sqrt{2} : 2$, $x : y = 1 : \sqrt{2}$. Zvolme $k = 7$, $l = 10$.

Podle Eudoxe má platit

$$1 : \sqrt{2} > 7 : 10,$$

pokud

$$\sqrt{2} : 2 > 7 : 10$$

a obráceně, tj.

$$\sqrt{2} : 2 > 7 : 10 \Leftrightarrow 1 : \sqrt{2} > 7 : 10.$$

Opět platí $10 \cdot \sqrt{2} > 14$ a $10 > 7 \cdot \sqrt{2}$. Vztahy $\sqrt{2} : 2 > k : l$ a $1 : \sqrt{2} > k : l$ platí pro zvolená přirozená čísla $k = 7$ a $l = 10$.

3. tvrzení

Poměr prvních dvou veličin je roven poměru libovolných dvou přirozených čísel právě tehdy, když také poměr druhých dvou veličin je roven poměru těchto přirozených čísel, tj.

$$\forall k, l \in N\colon \ a : b = k : l \Leftrightarrow x : y = k : l.$$

Oba výroky spojené ekvivalencí jsou nepravdivé, tudíž ekvivalence je pravdivá. Avšak v našem příkladu není poměr $\sqrt{2} : 2$ ani poměr $1 : \sqrt{2}$ roven žádnému poměru dvou přirozených čísel, protože $\sqrt{2} : 2$ je iracionální číslo.

Příklad 2.5.4

Rozhodneme, zda poměry $\sqrt[3]{2} : \sqrt{6}$, $\sqrt{3} : \sqrt{8}$ se rovnají dle Eudoxovy definice rovnosti poměrů.

Podle první podmínky musí platit

$$\forall k, l \in N\colon \ a : b < k : l \Leftrightarrow x : y < k : l.$$

Například lze zjistit, že $\sqrt[3]{2} : \sqrt{6} < k : l$ pro $k = 7$, $l = 10$. Platí také, že

$$\sqrt{3} : \sqrt{8} < 7 : 10.$$

První podmínka je tedy pro $k = 7$, $l = 10$ splněna.

Zvolíme-li přirozená čísla $k = 3$ a $l = 5$, tj. porovnáme-li dané poměry s poměrem přirozených čísel $3 : 5$, pak

$$\sqrt[3]{2} : \sqrt{6} < 3 : 5, \text{ ale } \sqrt{3} : \sqrt{8} > 3 : 5.$$

Zadané poměry se tedy nerovnají, protože není splněna první podmínka.

Rovnost dvou poměrů je definována pomocí vztahů (<, >, =) mezi poměrem dvou libovolných veličin a poměrem dvou přirozených čísel. O platnosti těchto vztahů (<, >, =) tedy museli umět rozhodnout.

Pro souměřitelné veličiny a, b, platí, že existují čísla $k,\ l \in N$ tak, že $a = k \cdot x$ a $b = l \cdot x$.

Potom $a : b = k \cdot x : l \cdot x$, resp. $a : b = k : l$.

Poměr dvou délek je roven poměru dvou přirozených čísel.

Veličina $\boldsymbol{a}$ je souměřitelná s veličinou $\boldsymbol{b}$, můžeme ji vyjádřit vztahem $a = \frac{k}{l} \cdot b$.

Příklad 2.5.5

Rozhodněte, zda jsou souměřitelné veličiny:

<u>a) $a = 6$, $b = 15$</u>

Pro veličinu $a = 6$, platí

$$6 = 2 \cdot 3 = k \cdot x,$$

obdobně pro veličinu $b = 15$, platí

$$15 = 5 \cdot 3 = l \cdot x,$$

potom $6 : 15 = 2 : 5$. Dané veličiny jsou souměřitelné.

<u>b) $a = \sqrt{2}$, $b = 2$</u>

Pro veličinu $a = \sqrt{2}$, platí

$$\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2} = k \cdot x.$$

Pro veličinu $b = 2$, platí

$$2 = l \cdot \sqrt{2},$$

ovšem nenalezneme takové přirozené číslo l, aby platila rovnost. Dané veličiny $a = \sqrt{2}$, $b = 2$ nejsou souměřitelné.

c) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 5\sqrt{3}$

Pro veličinu $a = 2\sqrt{3}$, platí

$$2\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} = k \cdot x.$$

Pro veličinu $b = 5\sqrt{3}$, platí

$$5\sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3} = l \cdot x,$$

potom $2\sqrt{3} : 5\sqrt{3} = 2 : 5$. Dané veličiny $a = 2\sqrt{3}$, $b = 5\sqrt{3}$ jsou souměřitelné.

Porovnání dvou poměrů

Podle Eudoxe je jeden poměr větší než druhý poměr, tj. $a : b > x : y$, pokud existují přirozená čísla taková, že poměr veličin a, b,je větší než poměr přirozených čísel a zároveň poměr veličin x, y, je menší nebo roven poměru těchto přirozených čísel, tj.

$$\exists\, k, l \in N:\ a : b > k : l \wedge x : y \leq k : l.$$

V předchozím příkladu jsme zjistili, že $\sqrt[3]{2} : \sqrt{6} < 3 : 5$ a zároveň $\sqrt{3} : \sqrt{8} > 3 : 5$, proto $\sqrt[3]{2} : \sqrt{6} < \sqrt{3} : \sqrt{8}$.

Příklad 2.5.6

Porovnejte poměry $\sqrt{3} : 1$ a $\sqrt{26} : 3$.

Protože

$$\sqrt{3} : 1 > 17 : 10, \text{ neboť } \sqrt{3} \cdot 10 > 17$$

a

$$\sqrt{26} : 3 \leq 17 : 10, \text{ neboť } \sqrt{26} \cdot 10 \leq 51,$$

platí, že

$$\sqrt{3} : 1 \; > \sqrt{26} \; : \; 3.$$

Relace $<$ je pro poměry definována podobně jako relace $>$. Jeden poměr je menší než druhý poměr, tj. $a : b < x : y$, pokud existují přirozená čísla taková, že poměr veličin a, b je menší než poměr přirozených čísel a zároveň poměr veličin x, y je větší než poměr těchto přirozených čísel.

$$\exists\, k, l \in N\colon\ a : b < k : l \wedge x : y \geq k : l$$

Příklad 2.5.7

Porovnejte poměry $\sqrt{2}$: 2 a $\sqrt{3}$: 2.

Protože

$$\sqrt{2} : 2 < 4 : 5, \text{ neboť } \sqrt{2} \cdot 5 < 8$$

a

$$\sqrt{3} : 2 \geq 4 : 5, \text{ neboť } \sqrt{3} \cdot 5 \geq 8,$$

platí, že

$$\sqrt{2} : 2 < \sqrt{3} : 2.$$

S těmito poměry nešly provádět operace sčítání, odčítání, násobení, dělení. V knize Základy se objevují základní matematické principy, které se využívaly nejen v geometrii. Eudoxova teorie proporcí představovala jakousi první teorii reálných čísel, přesněji řečeno čísel, které jsou délkami úseček sestrojitelných pravítkem a kružítkem.

2.6 TEORIE ŘETĚZOVÝCH ZLOMKŮ

Tato podkapitola byla zpracována podle (Chinčin, 1952, str. 14 - 85) a (Juškevič, 1970, str. 216 - 218).

Omar Chajjám (1048 - 1131), perský matematik, pracoval s řetězovými zlomky. Přiblížil se tak k dalšímu vyjádření reálných čísel. Vytvořil teorii, která se značně podobá Eudoxově teorii proporcí.

Pokud a_0, a_1 jsou celá čísla, kde a_1 značí kladné číslo, pak při dělení čísla a_0 číslem a_1 dostaneme neúplný podíl x_0 s nejmenším nezáporným zbytkem a_2.

Platí

$$a_0 = x_0 \cdot a_1 + a_2.$$

Zapišme Eukleidův algoritmus pro vstupní hodnoty a_0 , a_1 , to nám pomůže zapsat racionální číslo $\left[\frac{a_0}{a_1}\right]$ pomocí řetězového zlomku.

$$a_0 = x_0 \cdot a_1 + a_2,$$

$$a_1 = x_1 \cdot a_2 + a_3,$$

$$a_2 = x_2 \cdot a_3 + a_4,$$

$$a_3 = x_3 \cdot a_4 + a_5$$

$$\ldots$$

$$a_n = x_n \cdot a_{n+1}$$

Pro $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ platí nerovnost $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n$.

Racionální číslo $\left[\frac{a_0}{a_1}\right]$ můžeme nyní zapsat pomocí řetězového zlomku ve tvaru

$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \ddots}}} \\ + \frac{1}{x_n}.$$

Tento algoritmus si nyní ukážeme na příkladech.

Příklad 2.6.1

Řetězovým zlomkem zapište racionální číslo a) $\frac{107}{46}$, b) $\frac{84}{19}$, c) $\frac{321}{138}$.

a) 107 a 46

Pomocí výše popsaného algoritmu dělíme čísla 107 a 46. Po vydělení získáme celé číslo 2 a zbytek 15, dále pokračujeme pomocí uvedeného algoritmu.

$107 = 2 \cdot 46 + 15$

$46 = 3 \cdot 15 + 1$

$15 = 15 \cdot 1$

Po té, co nám vyjde dělení beze zbytku, zapíšeme podíl dvou čísel do řetězového zlomku.

$$\frac{107}{46} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{15}}$$

b) 84 a 19

Stejný algoritmus použijeme pro podíl čísel 84 a 19.

$84 = 4 \cdot 19 + 8$

$19 = 2 \cdot 8 + 3$

$8 = 2 \cdot 3 + 2$

$3 = 1 \cdot 2 + 1$

$2 = 2 \cdot 1$

$$\frac{84}{19} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

c) 321 a 138

$321 = 2 \cdot 138 + 45$

$138 = 3 \cdot 45 + 3$

$45 = 15 \cdot 3$

$$\frac{321}{138} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{15}}$$

Všimněme si, že $\frac{107}{46}$, lze vyjádřit posloupností neúplných podílů $[2;\ 3, 15]$, $\frac{84}{19}$ posloupností $[4;\ 2,\ 2, 1, 2]$ a $321/138$ posloupností $[2;\ 3, 15]$. Posloupnosti podílů v a) a c) jsou stejné, neboť poměry $107/46$ a $321/138$ se sobě rovnají. Stejná posloupnost podílů tedy může posloužit jako charakteristická vlastnost rovnosti dvou poměrů. Toho si všiml *Omar Chajjám*, který dokončil „Komentáře k obtížím při zavedení v Eukleidově knize *Základy*". V této práci se kromě 5. postulátu zabývá Eudoxovou teorií proporcí.

Příklad 2.6.2

Poměry $\sqrt{2} : 2$ a $1 : \sqrt{2}$ převeďte na řetězové zlomky a porovnejte.

$\sqrt{2} : 2$ a $1 : \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 0 \cdot 2 + \sqrt{2}$

$2 = 1 \cdot \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 2 \cdot (2 - \sqrt{2}) + 3\sqrt{2} - 4$

$2 - \sqrt{2} = 2 \cdot (3\sqrt{2} - 4) - 7\sqrt{2} + 10$

$3\sqrt{2} - 4 = 2 \cdot (-7\sqrt{2} + 10) + 17\sqrt{2} - 24$

...zde to bude nekonečné.

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

$1 = 0 \cdot \sqrt{2} + 1$

$\sqrt{2} = 1 \cdot 1 + \sqrt{2} - 1$

$1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + 3 - 2\sqrt{2}$

$\sqrt{2} - 1 = 2 \cdot (3 - 2\sqrt{2}) - 7 + 5\sqrt{2}$

$3 - 2\sqrt{2} = 2 \cdot (-7 + 5\sqrt{2}) + 17 - 12\sqrt{2}$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

Číslo $\sqrt{2}\ :2$ lze zapsat posloupností $[0;1,2,2,\dots]$, stejnou posloupností lze vyjádřit i $1:\sqrt{2}$, dané poměry se sobě rovnají.

Pomocí řetězových zlomků můžeme zapsat reálné číslo. *Chajjám* dokázal ve své práci, že jeho systém je logicky ekvivalentní s řeckým. Na rozdíl od *Eudoxe* se dle (Juškevič, 1970, str. 217) zabýval násobením a dělením poměrů, aby bylo možné provádět praktické výpočty. Další podrobnosti jsou obtížně zjistitelné, neboť práce pravděpodobně není dosud přeložena např. do angličtiny, dostupné jsou pouze texty v arabštině. Dle (Chinčin, 1952, str. 22) neexistují jednoduchá, v praxi použitelná pravidla pro sčítání, odčítání, násobení a dělení řetězových zlomků, slouží spíše pro teoretické úvahy o iracionálních číslech.

Chajjám uměl sestrojit třetí odmocniny, geometrickými postupy totiž řešil kubické rovnice. Jeho pojetí čísel je tedy oproti řeckému, kde jsou díky pravítku a kružítku konstruovatelné pouze odmocniny s odmocnitelem $2n,\ n\in N$, širší. Řetězovými zlomky lze však vedle druhých a třetích odmocnin vyjádřit libovolné reálné číslo, viz (Chinčin, 1952, str. 14).

Dodejme, že podle (Šimša, pdf, str. 6) existoval ještě před *Eudoxem* postup odpovídající výpočtu neúplných podílů Eukleidovým algoritmem, tj. v podstatě metoda výpočtu posloupnosti, která určuje řetězový zlomek. O existenci tohoto postupu nejsou dochovány žádné doklady, pouze je lze předpokládat na základě informací v knihách středověkých arabských matematiků.

Podle (Real numbers 1, 2005) pracovali na konci 15. století n. l. matematikové s číslem jako s výrazem vytvořeným z přirozených čísel pomocí sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování s odmocnitelem *n*, Přijímání, resp. zrovnoprávnění čísel, *n*-tých odmocnin, s racionálními čísly však bylo velmi pozvolné.

Důležitým krokem pro obecnější a hlubší představu o čísle byl zápis reálného čísla desetinným rozvojem. O zavedení desetinných čísel do běžné praxe a o jednotící pohled na číslo se zasloužil *Simon Stevin* (1548 – 1620), vlámský matematik, fyzik a vojenský inženýr. Uvažoval pouze konečné desetinné rozvoje čísel, tj. desetinná čísla taková, jak je známe dnes. Měl vlastní způsob zápisu desetinného čísla pomocí exponentu mocniny se základem jedna desetina:

Např.: Číslo $\frac{6391}{1000}$ bychom mohli zapsat jako $6 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100} + \frac{1}{1000}$. *Stevin* zapsal desetinné číslo 6, 391 takto: 6 ⓪ 3 ① 9 ② 1 ③.

3 PŘEHLED TEORIÍ REÁLNÝCH ČÍSEL OD 17. STOLETÍ

Podle (Real numbers 2, 2005) používal *John Wallis* (1616 – 1703) Stevinova desetinná čísla pro libovolně přesnou aproximaci reálných čísel, veličin jako délka, plocha, rychlost apod. Možnost přiblížit se k číslu libovolně těsně ho vedla ke studiu nekonečných řad. Jejich konvergencí se však nezabýval. Ještě Euler vnímá kvantitu jako veličinu, přestože ve svých pracích potřebuje obecnější pojetí čísla. Potřeba přesného vymezení pojmu reálného čísla byla stále naléhavější.

První takové pokusy se objevují na počátku 19. století a jsou spojeny se jmény *Augustina Cauchyho* (1789 – 1857) a *Bernarda Bolzana* (1781 – 1848). *Cauchy* charakterizuje v Cours d'analyse reálné číslo jako limitu posloupnosti racionálních čísel, definuje součin racionálního a iracionálního čísla. Bolzanova definice se opírá o konvergentní posloupnosti racionálních čísel. Výklad Bolzanovy teorie reálných čísel zůstal bez vlivu na ostatní matematiky, neboť jeho práce nebyla publikována.

Dalším matematikem, který se pokoušel definovat reálné číslo, byl *W. R. Hamilton* (1805 – 1865). Dospěl téměř k myšlence tzv. Dedekindových řezů blízkých řeckému výkladu proporcí. Nenapadlo ho definovat reálné číslo pomocí dvou množin, pokoušel se definovat čísla daná určitým pravidlem.

Od roku 1858 se během půldruhého desetiletí objevila řada příspěvků k tématu reálných čísel. Jmenujme aspoň některé jejich autory: *Karl Weierstrass* (1815 – 1897), *Hermann Hankel* (1839 – 1873), *Charles Méray* (1835 – 1911), *Eduard Heine* (1821 – 1881), jehož výklad na základě cauchyovských posloupností reálných čísel je jedním z dnešních způsobů definování reálných čísel.

Zcela odlišný přístup, kterým nejsou reálná čísla vytvářena z racionálních, měl *David Hilbert* (1862 – 1943). Reálná čísla zavedl axiomaticky na základě 18 axiomů. Jedním z nich je Archimédův axiom, dalším axiom úplnosti, ostatní vyjadřují, že množina reálných čísel je komutativní uspořádané těleso.

4 KÖSSLEROVA TEORIE REÁLNÝCH ČÍSEL

Tato kapitola je zpracována podle (Kössler, 1926).

Miloš Kössler (1884 - 1961), český matematik, vytvořil teorii reálných čísel.

Racionální čísla zapisujeme ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde $q \neq 0$. Při početních operacích s racionálními čísly uvažujeme několik následujících pravidel.

Kössler připomněl, že bude ve své učebnici pracovat s čísly, která tvoří uspořádané komutativní těleso. Čísla, s nimiž bude pracovat lze rozdělit na kladná, záporná a 0.

Uvedl, že každá dvě čísla lze porovnat.

I. Pro každá dvě čísla x, y platí vždy jeden ze vztahů $x = y$, $x < y$, $x > y$.

Relace > je pro tato čísla tranzitivní, čísla lze sčítat a násobit, obě operace jsou komutativní, asociativní a chovají se monotónně vůči relaci >.

II. Pokud $x > y$ a $y > z$, potom i $x > z$.

III. Komutativnost. Platí pro sčítání a násobení dvou čísel x, y.

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

IV. Asociativnost.

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

V. Monotónnost u operací sčítání a násobení.

Pokud $x > y$, pak $x + z > y + z$. Obdobně u operace násobení, pokud $x > y$ a $z > 0$, také $x \cdot z > y \cdot z$. Pokud $x > y$ a $z < 0$, potom $x \cdot z < y \cdot z$. Je-li $z = 0$, pak i $x \cdot z = y \cdot z = 0$.

VI. Distributivnost.

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

VII. Existence neutrálního prvku.

$$a + 0 = a$$

Při sečtení čísla a a neutrálního prvku dostaneme tentýž prvek a.

$$a \cdot 1 = a, \text{ kde } a \neq 0$$

Při násobení neutrálním prvkem se výsledná hodnota nezmění.

Kössler uvádí, že pomocí racionálních čísel nedovedeme vypočítat například úhlopříčku ve čtverci, jehož strana se rovná délce jedna. Při počítání s číslem π počítáme s přibližnou hodnotou $3{,}14159$ nebo $\frac{22}{7}$. Proto byl zaveden další obor čísel - reálná čísla.

Def.: *„Číslo reálné jest symbol myšlený v podobě čísla desetinného kladného, záporného nebo rovného nule o nekonečném počtu cifer.“* (Kössler, 1926, str. 10)

Symbol v definici znamená číslo o nekonečném počtu cifer. Jednotlivé cifry za desetinnou čárkou označujeme jako cifry n-tého řádu. Nula je číslo, které není kladné ani záporné. Pokud se číslo x rovná číslu y, zapíšeme $x = y$, řekneme, že čísla x, y jsou ekvivalentní. V opačném případě, kdy se číslo x nerovná číslu y, zapisujeme $x \neq y$. Pokud se dvě čísla x, y liší pouze znaménkem $x = -y$, nebo $y = -x$, nazval Kössler tato čísla souměrnými. Dnes bychom řekli, že se jedná o čísla opačná (např.: 1 a -1). Pro opačná čísla platí $a + (-a) = 0$.

Reálná čísla můžeme seřadit podle velikosti. Každé kladné číslo je větší než číslo záporné a zároveň je také větší než nula, $x > -y \wedge x > 0$. Nula je vždy větší než záporné číslo, $0 > -y$. Ke každému zápornému číslo vždy existuje číslo souměrné. Při porovnávání dvou záporných čísel, nalezneme ke každému zápornému číslu číslo souměrné, $-x = x_1$ a $-y = y_1$. Číslo $-x > -y$, případně $-x < -y$, pokud pro symetrická čísla platí $x_1 < y_1$, případně $x_1 > y_1$. Pro dvojici reálných čísel platí vždy jeden ze vztahů $x = y$, $x < y$, nebo $x > y$. Reálná čísla jsou spořádaná, neboť při porovnání dvojice čísel x, y, kdy $x < y$, nebo $x > y$, existuje nekonečně mnoho čísel z mezi čísly x, y takových, že $x < z < y$, nebo$x > z > y$.

Abychom mohli reálná čísla sčítat, odčítat, násobit a dělit, zavedeme nejdříve pojem posloupnost čísel a limita posloupnosti.

Def.: *„Jestliže každému celistvému číslu z přirozené řady číselné* $1, 2, 3, \ldots$ *jest přiřazeno určité číslo reálné* $a_1, a_2, a_3, \ldots$*, nazýváme všechna tato čísla hromadným názvem posloupnost čísel.“* (Kössler, 1926, str. 12)

První člen posloupnosti označujeme x_n, každý následující člen pak x_{n+1}, x_{n+2}, ...

Def.: Posloupnost x_1, x_2, x_3, ..., má limitu, pokud existují definitivní úseky k-tého řádu. Limita je reálné číslo s definitivními úseky. Limitu zapisujeme takto $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Definitivními úseky k-tého řádu rozumíme stejné úseky všech řádů u dané posloupnosti. (např.: $1{,}2$; $1{,}22$; $1{,}222, \ldots$).

Posloupnost konverguje, když limita x_n se přibližuje k nekonečnu.

Mějme dvě reálná čísla x, y. Číslo x má úseky x_1, x_2, x_3,...,x_n,...a číslo y úseky y_1, y_2, y_3,...,y_n... .Součtem reálných čísel nazveme posloupnost $a_1 = x_1 + y_1$, $a_2 = x_2 + y_2$,

$a_3 = x_3 + y_3$,... . Součinem reálných čísel nazveme posloupnost $b_1 = x_1 y_1$, $b_2 = x_2 y_2$, $b_3 = x_3 y_3$, ...

Tak jako u racionálních čísel, platí i při početních operacích s reálnými čísly, zákon komutativní, asociativní, distributivní.

Při odčítání reálných čísel platí vztah $x - y = x + (-y)$, nebo-li při odčítání čísla přičítáme opačnou hodnotu daného čísla.

Operace dělení $\frac{y}{x}$ je ekvivalentní s operací násobení $y \cdot \frac{1}{x}$, pokud $x \neq 0$.

ZÁVĚR

Tato bakalářská práce se zabývá reálnými čísly a jejich vývojem. Představila jsem zde úvahy předků o číslech s nekonečným desetinným rozvojem, nebo-li čísel iracionálních. Pro lepší pochopení čtenáře jsem uvedla příklady, díky kterým jsme si mohli vyzkoušet dřívější postupy výpočtů. Přes postupné uznávání iracionalit, jsem uvedla několik teorií, které jsou základem konstrukce reálných čísel. S reálnými čísly velmi často počítáme, proto by tato práce měla vést k přiblížení toho, jak reálné číslo vzniklo.

RESUMÉ

This bachelor thesis deals with real numbers and their development. I introduced here the considerations of ancestors about numbers with infinite decimal development, or irrational numbers. For a better understanding of the reader, I have given examples that helped us to test earlier calculations. Despite the gradual recognition of irrationality, I have introduced several theories that underlie the construction of real numbers. Very often we count on real numbers, so this work should lead to an approximation of how the real number was created.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

BEČVÁŘ, Jindřich; BEČVÁŘOVÁ, Martina; VYMAZALOVÁ, Hana. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-255-4.

BEČVÁŘ, Jindřich; FUCHS, Eduard. *Historie matematiky I*. Praha: Prometheus, 1994. ISSN 0032-2423.

BEČVÁŘ, Jindřich; FUCHS, Eduard. *Historie matematiky II*. Praha: Prometheus, 1997. ISSN 1210-9037.

BENTLEY, Peter. *Kniha o číslech: Tajemství čísel a jejich vliv na náš svět*. Čestlice: Rebo, 2013. ISBN 978-80-255-0649-3.

CHINČIN, Aleksandr Jakovlevič. *Řetězové zlomky*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. Kruh (Přírodovědecké vydavatelství).

JUŠKEVIČ, Adolf Pavlovič. *Istorija matematiki I Nauka*, Moskva, 1970.

KÖSSLER, Miloš. *Úvod do počtu diferenciálního*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1926.

O´CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. *The real numbers: Pythagoras to Stevin* [online], 2019 [cit. 2019-04-17]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Real_numbers_1.html.

O´CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. *The real numbers: Stevin to Hilbert* [online], 2019 [cit. 2019-04-17]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Real_numbers_2.html.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Páté přepracované vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991, s.73. ISBN 80-04-22885-2.

REICHL, Jaroslav; VŠETIČKA, Martin. *Řecká matematika a fyzika*. [online], 2019 [cit. 2019-02-23]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/index.php/main.article/view/1406-recka-matematika-a-fyzika.

ŠIMŠA, Jaromír. *Vývoj představ o reálných číslech.* Praha: Prometheus, 1999. 24 s. Dějiny matematiky, sv.12. ISBN 80-7196-150-7.

Seznam obrázků